

# Utjecaj kvalitete rezultata mjerenja na ocjenu sukladnosti

---

**Ranogajec, Bruno**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:893891>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-29**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Bruno Ranogajec**

Zagreb, 2019. godina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Biserka Runje  
Dr. sc. Amalija Horvatić Novak

Student:

Bruno Ranogajec

Zagreb, 2019. godina

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoricama prof. dr. sc. Biserki Runje i dr. sc. Amaliji Horvatić Novak na korisnim savjetima, odvojenom vremenu i pruženoj pomoći tijekom izrade rada.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji, posebno roditeljima koji su bili neizmjerena podrška tijekom studiranja.

Bruno Ranogajec



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

|                                     |        |
|-------------------------------------|--------|
| Sveučilište u Zagrebu               |        |
| Fakultet strojarstva i brodogradnje |        |
| Datum                               | Prilog |
| Klasa:                              |        |
| Ur.broj:                            |        |

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Bruno Ranogajec** Mat. br.: 0035206126

Naslov rada na hrvatskom jeziku: Utjecaj kvalitete rezultata mjerenja na ocjenu sukladnosti

Naslov rada na engleskom jeziku: Impact of the quality of measurement results on conformity assessment

Opis zadatka:

Ocjena sukladnosti se definira kao svaka aktivnost koja je poduzeta kako bi se izravno ili neizravno utvrdilo da li proizvod, proces, sustav, osoba ili tijelo zadovoljavaju relevantne standarde i ispunjavaju određene zahtjeve. Odluka je li predmet od interesa u skladu s određenim zahtjevom donosi se na temelju rezultata mjerenja. Ključni pokazatelj kvalitete rezultata mjerenja je mjerna nesigurnost. Mjerna nesigurnost se procjenjuje jer mjerenja nisu savršena, u svrhu nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe rezultata dobivenih u različitim umjernim i ispitnim laboratorijima kao i za usporedbu rezultata sa specifikacijama. Sukladno normi JCGM 106:2012 u radu je potrebno analizirati utjecaj mjerne nesigurnosti na ocjenu sukladnosti različitih predmeta od interesa.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
29. studenog 2018.

Rok predaje rada:  
1. rok: 22. veljače 2019.  
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2019.  
3. rok: 20. rujna 2019.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 25.2. - 1.3. 2019.  
2. rok (izvanredni): 2.7. 2019.  
3. rok: 23.9. - 27.9. 2019.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Biserka Runje

Komentor:

Dr. sc. Amalija Horvatić Novak

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Branko Bauer

## SADRŽAJ

|  |     |
|--|-----|
| POPIS SLIKA .....  | III |
| POPIS TABLICA.....   | IV  |
| POPIS OZNAKA .....   | V   |
| SAŽETAK .....  | VII |
| 1. UVOD .....  | 1   |
| 2. POJMOVI I DEFINICIJE .....  | 3   |
| 2.1. VJEROJATNOST .....  | 3   |
| 2.2. POJMOVI VEZANI UZ MJERITELJSTVO.....  | 4   |
| 2.3. POJMOVI VEZANI UZ OCJENU SUKLADNOSTI .....  | 6   |
| 3. MJERNA NESIGURNOST .....  | 10  |
| 3.1. PRORAČUN MJERNE NESIGURNOSTI GUM METODOM .....                                    | 10  |
| 3.2. PRORAČUN MJERNE NESIGURNOSTI MCS METODOM .....                                    | 12  |
| 3.3. ULOGA MJERNE NESIGURNOSTI U OCJENI SUKLADNOSTI .....                              | 13  |
| 4. TOLERANCIJSKE GRANICE I TOLERANCIJSKA POLJA.....                                    | 15  |
| 4.1. MJERENJA RADI OCJENE SUKLADNOSTI.....   | 15  |
| 4.2. DOZVOLJENE I NEDOZVOLJENE VRIJEDNOSTI: TOLERANCIJSKE GRANICE .....                | 16  |
| 4.3. TOLERANCIJSKE GRANICE .....   | 17  |
| 5. POZNAVANJE MJERENE VELIČINE.....  | 19  |
| 5.1. VJEROJATNOST I INFORMACIJE .....  | 19  |
| 5.2. BAYESOV TEOREM .....  | 19  |
| 5.3. NAJBOLJA PROCJENA I STANDARDNA NESIGURNOST.....                                   | 21  |
| 5.4. PODRUČJA POKRIVANJA .....   | 22  |
| 6. VJEROJATNOST SUKLADNOSTI S ODREĐENIM ZAHTJEVIMA .....                               | 24  |
| 6.1. GLAVNO PRAVILO ZA IZRAČUN VJEROJATNOSTI SUKLADNOSTI .....                         | 24  |
| 6.2. VJEROJATNOSTI SUKLADNOSTI S NORMALNOM FUNKCIJOM GUSTOĆE VJEROJATNOSTI .....       | 24  |
| 6.3. JEDNOSTRANA TOLERANCIJSKA POLJA S NORMALNOM FUNKCIJOM GUSTOĆE VJEROJATNOSTI ..... | 26  |
| 6.4. DVOSTRANA TOLERANCIJSKA POLJA S NORMALNOM FUNKCIJOM GUSTOĆE VJEROJATNOSTI.....    | 28  |
| 6.5. VJEROJATNOST SUKLADNOSTI I PODRUČJA POKRIVANJA .....                              | 29  |
| 6.6. INDEKS SPOSOBNOSTI MJERENJA $\bar{C}_M$ .....                                     | 30  |
| 6.7. ODNOS INDEKSA SPOSOBNOSTI MJERENJA I VJEROJATNOSTI SUKLADNOSTI .....              | 32  |
| 7. PODRUČJA PRIHVAĆANJA.....   | 34  |
| 7.1. GRANICE PRIHVAĆANJA .....   | 34  |
| 7.2. PRAVILO ODLUKE TEMELJENO NA JEDNOSTAVNOM PRIHVAĆANJU.....                         | 34  |
| 7.3. PRAVILA ODLUKE TEMELJENA NA ZAŠTITNIM PODRUČJIMA .....                            | 36  |
| 8. RIZICI .....  | 40  |
| 8.1. UPRAVLJANJE RIZICIMA.....   | 40  |
| 8.2. METODE PROCJENE RIZIKA .....  | 40  |
| 8.3. OPĆENITO.....   | 41  |
| 8.4. FUNKCIJE GUSTOĆE VJEROJATNOSTI ZA PROIZVODNI PROCES I MJERNI SUSTAV .....         | 42  |
| 8.5. MOGUĆI ISHODI KONTROLNOG MJERENJA S BINARNIM PRAVILOM ODLUKE.....                 | 43  |
| 8.6. POVEZUJUĆA FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI ZA $Y$ I $\bar{Y}_M$ .....              | 44  |
| 8.7. IZRAČUN GLOBALNIH RIZIKA.....   | 46  |
| 9. ZAKLJUČAK.....  | 58  |

---

10. LITERATURA .....59

## POPIS SLIKA

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| Slika 1.  | Odnos intervala prihvatanja u odnosu na tolerancijsko područje [1] .....                                  | 2  |
| Slika 2.  | Tolerancijska polja [1].....  | 16 |
| Slika 3.  | Tolerancijsko polje samo s donjom granicom tolerancije $T_L$ [1] .....                                    | 26 |
| Slika 4.  | Tolerancijsko polje samo s gornjom granicom tolerancije $T_U$ [1].....                                    | 27 |
| Slika 5.  | Dvostrano tolerancijsko polje [1] .....   | 28 |
| Slika 6.  | Dva 95 % područja pokrivanja za mjerenu veličinu $Y$ u blizini gornje granice tolerancije $T_U$ [1] ..... | 29 |
| Slika 7.  | Odnos indeksa sposobnosti mjerenja i vjerojatnosti sukladnosti [1] .....                                  | 33 |
| Slika 8.  | Pravilo odluke jednostavnog prihvatanja u blizini gornje granice tolerancije $T_U$ [1] .....              | 36 |
| Slika 9.  | Pravilo odluke temeljeno na zaštićenom prihvatanju [1].....   | 37 |
| Slika 10. | Dvostrano područje prihvatanja [15] .....   | 38 |
| Slika 11. | Pravilo odluke temeljeno na zaštićenom odbijanju [1] .....  | 38 |
| Slika 12. | Binarna ocjena sukladnosti [1] .....  | 42 |
| Slika 13. | Tolerancijsko polje i područje prihvatanja za ocjenu sukladnosti kugličnih ležajeva [1] .....             | 50 |
| Slika 14. | Prethodna gamma funkcija gustoće vjerojatnosti [1] .....  | 51 |
| Slika 15. | Graf ovisnosti globalnog potrošačevog rizika u odnosu na višekratnik područja sigurnosti [1].....         | 53 |
| Slika 16. | Graf odnosa globalnog rizika $R_P$ i $R_C$ za primjer kugličnih ležajeva [1] .....                        | 54 |
| Slika 17. | Globalni rizici $R_P$ i $R_C$ za binarnu ocjenu sukladnosti [1].....                                      | 56 |



**POPIS TABLICA**

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Tablica 1. | Vjerojatnosti sukladnosti ( $p_C$ ) i nesukladnosti ( $\bar{p}_C$ ) za jednostrana tolerancijska polja i normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti [1]..... | 28 |
| Tablica 2. | Ovisnost $v_{\max}$ o relativnoj standardnoj nesigurnosti i vjerojatnosti $v \geq v_0$ .....  | 39 |

## POPIS OZNAKA

| Oznaka                    | Opis  |
|---------------------------|---|
| $A$                       | Područje prihvatljivih izmjerenih vrijednosti   |
| $\tilde{A}$               | Područje neprihvatljivih izmjerenih vrijednosti   |
| $A_L$                     | Donja granica prihvaćanja   |
| $A_U$                     | Gornja granica prihvaćanja  |
| $a$                       | Donja granica područja u kojem leži slučajna varijabla  |
| $b$                       | Gornja granica područja u kojem leži slučajna varijabla   |
| $C$                       | Područje sukladnih vrijednosti predmeta od interesa   |
| $\tilde{C}$               | Područje nesukladnih vrijednosti predmeta od interesa   |
| $C_m$                     | Indeks sposobnosti mjerenja   |
| $E(X)$                    | Očekivanje slučajne varijable $X$   |
| $E(Y \eta_m)$             | Uvjetno očekivanje mjerene veličine $Y$ , za izmjeren $\eta_m$  |
| $E_{max}$                 | Maksimalna dozvoljena pogreška očitavanja mjernog instrumenta   |
| $f(\eta, \eta_m)$         | Zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti   |
| $G_X(\xi)$                | Funkcija raspodjele s varijablom $\zeta$ za veličinu $X$  |
| $gamma(\eta; a; \lambda)$ | <i>Gamma</i> funkcija gustoće vjerojatnosti   |
| $g(\eta \eta_m)$          | Funkcija gustoće vjerojatnosti za $Y$ s mjerenom veličinom $\eta_m$   |
| $g_0(\eta)$               | Funkcija gustoće vjerojatnosti za $Y$ prije mjerenja  |
| $g_0(\eta I)$             | Prehodna funkcija gustoće vjerojatnosti   |
| $g_X(\xi)$                | Funkcija gustoće vjerojatnosti s varijablom $\zeta$ za veličinu $X$   |
| $h(\eta_m \eta)$          | Funkcija gustoće vjerojatnosti s varijablom $\eta_m$ za izlaznu veličinu $Y_m$ mjernog sustava za danu pretpostavljenu točnu vrijednost $\eta$ mjerene veličine $Y$ |
| $h_0(\eta_m)$             | granična funkcija gustoće vjerojatnosti   |
| $k$                       | Faktor pokrivanja   |
| $L(\eta, \eta_m)$         | Vjerojatnost točne vrijednosti $\eta$ za danu izmjerenu veličinu $\eta_m$   |
| $p$                       | Vjerojatnost pokrivanja   |
| $p_c$                     | Vjerojatnost sukladnosti  |
| $\bar{p}_c$               | Vjerojatnost nesukladnosti  |
| $R_C$                     | Globalni potrošačev rizik   |
| $R_C^*$                   | Specifični potrošačev rizik   |
| $R_P$                     | Globalni proizvođačev rizik   |

|                      |  |
|----------------------|--|
| $R_p^*$              | Specifični proizvođačev rizik  |
| $s^2$                | Varijanca uzorka   |
| $T$                  | Tolerancija  |
| $T_L$                | Donja granica tolerancije  |
| $T_U$                | Gornja granica tolerancije   |
| $U$                  | Proširena nesigurnost  |
| $U$                  | Standardna nesigurnost   |
| $u_0$                | Standardna nesigurnost povezana s procjenom $y_0$ mjerene veličine $Y$ prije mjerenja                              |
| $u_m$                | Standardna nesigurnost povezana s mjerenom veličinom $\eta_m$ kada je prethodno znanje mjerene veličine zanemarivo |
| $V(X)$               | Varijanca slučajne varijable $X$   |
| $V(Y \eta_m)$        | Uvjetna varijanca mjerene veličine $Y$ , za danu izmjerenu vrijednost $\eta_m$                                     |
| $\omega$             | Parametar duljine sigurnosnog područja   |
| $Y$                  | Mjereno svojstvo predmeta, uzima se da je slučajna varijabla   |
| $Y_m$                | Izlaz mjernog sustava, uzima se da je slučajna varijabla   |
| $\bar{y}$            | Srednja vrijednost uzorka  |
| $y_0$                | Očekivanje $Y$ prije mjerenja  |
| $\tilde{y}$          | Skalirana izmjerena vrijednost veličine  |
| $\alpha$             | Parametar <i>gamma</i> funkcije gustoće vjerojatnosti  |
| $\eta$               | Varijabla koja opisuje moguće vrijednosti mjerene veličine $Y$   |
| $\lambda$            | Parametar <i>gamma</i> funkcije gustoće vjerojatnosti  |
| $\Phi(z)$            | Standardna normalna funkcija raspodjele s varijablom $z$   |
| $\varphi_0(z)$       | Standardna normalna funkcija gustoće vjerojatnosti s varijablom $z$  |
| $\Phi(\eta; y; u^2)$ | Normalna (Gaussova) funkcija gustoće vjerojatnosti s varijablom $\eta$ , očekivanjem $y$ i varijancom $u^2$        |

## SAŽETAK

Tema završnog rada je „Utjecaj kvalitete rezultata mjerenja na ocjenu sukladnosti“. Dan je pregled norme JCGM 106:2012 i tema koje su dio norme. Opisuju se općeniti mjerni pojmovi kao i pojmovi koji se sreću kod detaljnijeg korištenja mjernih sustava radi kontrole kvalitete i ocjene sukladnosti. U radu su dani i neki primjeri kojima se analizira utjecaj mjerne nesigurnosti na ocjenu sukladnosti. Kvaliteta rezultata mjerenja se opisuje pomoću mjerne nesigurnosti koja je važna kod ocjene sukladnosti. Opisani su potrošačev i proizvođačev rizik, njihov utjecaj na ocjenu sukladnosti i mjernu nesigurnost te kako se može njima upravljati. Dan je kratak osvrt na smanjivanje potrošačevog i proizvođačevog rizika, odnosno način njihove optimizacije. U radu je sukladno normi JCGM 106:2012 analiziran utjecaj mjerne nesigurnosti na ocjenu sukladnosti različitih predmeta od interesa.

Ključne riječi: ocjena sukladnosti, mjerna nesigurnost, JCGM 106:2012, rizici

## SUMMARY

The aim of final task is to describe impact of the quality measurement results on conformity assessment. This paper is describing JCGM 106:2012 standard and topics related to this standard. In paper are described general metrology terms and terms that are used in more detailed measuring systems used for quality control and conformity assessment. In this paper are described some examples in which are analyzed impact of measurement uncertainty on conformity assessment. Quality of measurement results are described with measurement uncertainty which is important for conformity assessment. This study describes consumer's and producer's risk, their impact on conformity assessment and measurement uncertainty, and how they are ruled. It is given short summary on reducing consumer's and producer's risk and formulation of their optimization. In study, according to standard JCGM 106:2012, it is analyzed impact of the measurement uncertainty on conformity assesment of different items of interest.

Key words: conformity assessment, measurement uncertainty, JCGM 106:2012, risks

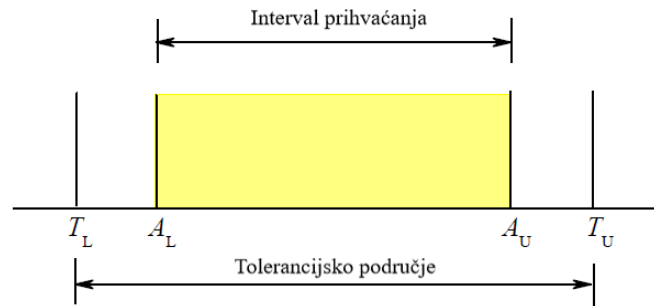
## 1. UVOD

Ocjena sukladnosti se definira kao svaka aktivnost koja je poduzeta kako bi se izravno ili neizravno utvrdilo zadovoljava li proizvod, proces, sustav, osoba ili tijelo relevantne standarde i ispunjava određene zahtjeve. Odluka je li predmet od interesa u skladu s određenim zahtjevom donosi se na temelju rezultata mjerenja. Promatrani predmet može biti npr. etalon (mjerna pločica) ili digitalni voltmetar, koji se treba kalibrirati sukladno normi ISO/IEC 17025:2005 ili ovjeriti po normi ISO 3650, ili uzorak industrijskih otpadnih voda. Određeni zahtjev obično ima jednu ili dvije tolerancijske granice koje definiraju interval dopuštenih vrijednosti mjenog proizvoda, a taj interval se naziva tolerancijsko područje (raspon zahtjeva) [2]. Primjeri takvih svojstva uključuju duljinu etalona, pogrešku pokazivanja na voltmetru i koncentracija žive u uzorku otpadne vode. Ako je vrijednost unutar tolerancijskog područja kaže se da je u skladu, a u suprotnom da nije u skladu. Općenito, odlučivanje je li predmet u skladu će ovisiti o mnogim mjernim svojstvima i moguće je da bude jedno ili više tolerancijskih područja povezano sa svakim svojstvom predmeta. Također može biti nekoliko mogućih odluka na rezultate mjerenja. Nakon određenih mjerenja, može se odlučiti da se prihvaća predmet, odbija predmet ili se traže nova mjerenja. U ovom radu opisati će se predmeti s jednom skalarnom vrijednošću sa zahtjevima zadanim s jednom ili dvije tolerancijske granice i imati će samo dva moguća rješenja, odnosno je li sukladno ili nije, i dvije moguće odluke, odnosno prihvaća li se ili odbija. Ključni pokazatelj kvalitete rezultata mjerenja je mjerna nesigurnost. Mjerna nesigurnost se procjenjuje jer mjerenja nisu savršena, u svrhu nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe rezultata dobivenih u različitim mjernim i ispitnim laboratorijima kao i za usporedbu rezultata sa specifikacijama.

Kod tipičnog mjerenja, mjerenje određene karakteristike ne može biti zamjetljivo samo po sebi. Npr. duljina metalnog etalona ne može biti direktno zamijećena, ali se može zamijetiti prikaz mikrometra čija su ticala u dodiru s krajevima etalona. Takav prikaz mjerenja, odnosno takvo mjerenje sadrži, tj. uzima u obzir efekte vanjskih utjecaja kao što su toplinsko širenje etalona ili umjerenost mikrometra. Kod ocjene sukladnosti, odluka o prihvaćanju ili odbijanju je bazirana na zamjetnim podacima, npr. izmjerena vrijednost veličine, koji vode do zaključka u pogledu mogućih vrijednosti nezamjetnih mjerenih veličina.

Zbog mjerne nesigurnosti uvijek postoji rizik pogrešnog donošenja odluke zadovoljava li predmet ili ne zadane zahtjeve bazirano na izmjerenim veličinama predmeta. Postoje dvije vrste pogrešaka: predmet prihvaćen kao sukladan, ali je u stvari nesukladan i predmet odbijen kao nesukladan, a zapravo je sukladan. Uvođenjem intervala prihvaćanja, rizik pogrešnog

donošenja odluke povezanih s mjernom nesigurnosti se može uravnotežiti tako da se minimiziraju troškovi povezani s takvim pogrešnim odlukama. U radu će se predstaviti problem izračuna vjerojatnosti sukladnosti i vjerojatnosti pogrešnih odluka, pomoću mjerne nesigurnosti kao mjerne veličine, tolerancijskih granica i granica intervala prihvaćanja. [1]



**Slika 1. Odnos intervala prihvaćanja u odnosu na tolerancijsko područje [1]**

Na slici 1 se vidi primjer procjene mjerne sukladnosti kod kojeg se odluke donose na vrijednostima izmjerenih kvantitativnih vrijednosti. Točna vrijednost izmjereneog svojstva se nalazi između tolerancijskih granica, odnosno u tolerancijskom području. Predmet se smatra sukladnim ako se izmjerene vrijednosti nalaze unutar granica intervala prihvaćanja, a nesukladnim ako je izvan područja intervala prihvaćanja.

## 2. POJMOVI I DEFINICIJE

### 2.1. Vjerojatnost

#### *Raspodjela vjerojatnosti*

Raspodjela vjerojatnosti u potpunosti opisuje vjerojatnosti s kojom se neka specifična vrijednost pojavljuje. Ne može se sa sigurnošću reći koliku će vrijednost nešto zauzeti. Raspodjela vjerojatnosti u potpunosti opisuje vjerojatnost pojave neke vrijednosti kod nezvjesnog događaja. Raspodjela vjerojatnosti je izmjerena vjerojatnost izazvana slučajnom varijablom. [3]

#### *Funkcija raspodjele*

Funkcija raspodjele je svaka funkcija koja za svaku vrijednost  $\xi$  daje da će slučajna varijabla  $x$  biti manja ili jednaka  $\xi$ . [3]

$$G_X(\xi) = \Pr(X \leq \xi) \quad (1)$$

#### *Funkcija gustoće vjerojatnosti*

Funkcija gustoće vjerojatnosti je derivacija funkcije raspodjele, kada ona postoji. [4]

$$g_X(\xi) = dG_X(\xi)/d\xi \quad (2)$$

#### *Normalna raspodjela*

Normalna raspodjela je raspodjela vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable  $x$  i ima funkciju gustoće vjerojatnosti. Normalna raspodjela se također naziva i Gaussova raspodjela. [4]

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\xi - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (3)$$

#### *Očekivanje*

Očekivanje se može izraziti kao srednja vrijednost. Nemaju sve slučajne varijable očekivanje [4]. Očekivanje za slučajnu varijablu  $x$  karakteriziranu funkcijom gustoće vjerojatnosti je:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_X(\xi) d\xi \quad (4)$$

## **Varijanca**

Varijanca je mjera disperzije mjerenih ili slučajnih veličina, odnosno prosječna suma kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine. Pozitivni drugi korijen iz varijance mjera je odstupanja, a naziva se standardna devijacija [5]. Varijanca za neprekidnu slučajnu varijablu  $x$  karakteriziranu funkcijom gustoće vjerojatnosti je:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - E(X)]^2 g_X(\xi) d\xi \quad (5)$$

## **Standardna devijacija**

Standardna devijacija ili standardno odstupanje je prosječno srednje kvadratno odstupanje numeričkih vrijednosti neke veličine od njihove aritmetičke sredine. Standardna devijacija je drugi korijen iz varijance. Koristi se kao standard za mjerenje varijabilnosti niza. Ako je standardna devijacija mala, aritmetička sredina dobro predstavlja rezultate. [6]

## **2.2. Pojmovi vezani uz mjeriteljstvo**

### **Veličina**

Svojtvo pojave, tijela ili čestice, gdje svojstvo ima veličinu koja se može iskazati brojem i referencom. Neki primjeri su duljina predmeta od interesa, radijus, energija, toplina, električni otpor. Referenca može biti mjerna jedinica, mjerna procedura ili referentni materijal, a može biti i kombinacija svih troje. Veličina može biti skalarna, ali može biti i vektor ili tenzor. [7]

### **Vrijednost veličine**

Vrijednost veličine je iskazana brojčanom vrijednošću i mjernom . Vrijednost količine je produkt broja i mjerne jedinice (npr. 5,34 m), produkt broja i mjernog postupka (npr. 43,5 HRC) i produkt broja i referentnog materijala (npr. kod iskazivanja vrijednosti koncentracije lutropina u uzorku krvne plazme izražava se pomoću standarda WHO International Standard 80/552 koji se koristi kao kalibrator). Brojčana vrijednost može biti i kompleksna, a vrijednost veličine se može prezentirati na više načina (npr. 5,34 m = 534 cm). Kod vektora i tenzora svaka komponenta ima posebnu vrijednost veličine. [7]



### ***Točna vrijednost veličine***

Točna vrijednost veličine je vrijednost veličine koja je dosljedna definiciji veličine. Točna vrijednost veličine u praksi ne postoji. Točnom vrijednošću veličine se može nazvati vrijednost veličine koja ima neznatnu mjernu nesigurnost. [7]

### ***Mjerena veličina***

Mjerena veličina je veličina koja se mjeri, odnosno svojstvo predmeta koje se promatra i mjeri. Specifikacija mjerene veličine zahtjeva poznavanje vrste količine, opis stanja fenomena, tijela ili čestice koji imaju tu količinu, i kemijske procese koji utječu na tu mjerenu veličinu. Samo mjerenje i uvjeti u kojima se provodi mjerenje mogu utjecati na mjerenu veličinu i promijeniti ju (npr. toplinska dilatacija, mjerenje na različitim temperaturama neće dati iste rezultate). Zbog toga je ponekad potrebno uvesti korekcije mjerenja. [7]

### ***Rezultati mjerenja***

Rezultati mjerenja su set količinskih vrijednosti koje su pridodane mjerenim veličinama, a također i sve ostale raspoložive informacije koje opisuju predmet od interesa. Rezultati mjerenja generalno sadrže relevantne informacije o setu količinskih vrijednosti, tako da neke mogu biti više reprezentne od drugih. Rezultati mjerenja se obično iskazuju sa jednom izmjerenom količinskom vrijednošću i mjernom nesigurnosti. Ako mjerna nesigurnost nije značajna, rezultati mjerenja se mogu prikazati samo izmjerenom količinskom vrijednošću. Takav način mjerenja je uobičajen u većini područja. [7]

### ***Interval pokrivenosti***

Interval pokrivenosti je interval koji sadrži set točnih količinskih vrijednosti mjerenog predmeta od interesa s navedenom vjerojatnošću, baziran na raspoloživim informacijama. Interval pokrivenosti ne treba biti u središtu izmjerene količinske vrijednosti. Interval pokrivenosti se može izvesti iz proširene mjerne nesigurnosti. [7]

### ***Vjerojatnost pokrivenosti***

Vjerojatnost pokrivenosti je vjerojatnost da se set točnih količinskih vrijednosti nalazi unutar specifičnog intervala pokrivenosti. Vjerojatnost pokrivenosti se također naziva i razina sigurnosti prema GUM-u (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*). [7]

### ***Naznaka***

Naznaka je količinska vrijednost dobivena mjernim instrumentom ili mjernim sustavom. Naznaka može biti u vizualnom ili akustičnom obliku ili se može prenijeti na drugi uređaj. Naznaka se često daje kao pozicija ticala za analogni output ili kao prikazani ili ispisani broj za digitalni output. Naznaka se također može nazivati i očitanjem. Naznaka i odgovarajuća vrijednost količine koja se mjeri nisu nužno vrijednosti količine iste vrste. [7]

## **2.3. Pojmovi vezani uz ocjenu sukladnosti**

### ***Ocjena sukladnosti***

Ocjena sukladnosti se definira kao svaka aktivnost koja je poduzeta kako bi se izravno ili neizravno utvrdilo da li proizvod, proces, sustav, osoba ili tijelo zadovoljavaju relevantne standarde i ispunjavaju određene zahtjeve. [1]

Kontrola procjene sukladnosti se provodi pomoću zapažanja i procjene popraćene s prikladnim mjerenjima, testiranjima ili mjerenjima pomoću kalibra. Mjerenje izvršeno kao dio ocjene sukladnosti se ponekad naziva i kontrolno mjerenje. [8]

### ***Određeni zahtjev***

Određeni zahtjev je potreba ili očekivanje koje je potrebno izvršiti. Određeni zahtjevi se mogu pronaći u dokumentima kao što su zakoni, propisi, norme i tehničke specifikacije. U ovom radu, određeni zahtjevi će imati oblik zadanog intervala dozvoljenih vrijednosti mjerene veličine predmeta od interesa. [9]

### ***Granica tolerancije***

Granica tolerancije je zadana gornja ili donja granica dopuštenih vrijednosti mjerene veličine predmeta od interesa. To je limitirana vrijednost za određenu karakteristiku koja se mjeri. [8]

### ***Tolerancijsko polje***

Tolerancijsko polje je područje u kojem se nalaze dopuštene vrijednosti mjerene veličine predmeta od interesa. Ako nije drugačije navedeno, granice tolerancijskog polja spadaju u tolerancijsko polje. Izraz tolerancijsko polje kod ocjene sukladnosti ima drugačije značenje nego isti izraz korišten u statistici. Negdje se može naći i izraz specifikacijska zona. [10]

### ***Tolerancija***

Tolerancija je razlika između gornje i donje granice tolerancije. To je jedinstvena vrijednost. [1]

### ***Vjerojatnost sukladnosti***

Vjerojatnost sukladnosti je vjerojatnost da će predmet od interesa zadovoljavati određene zahtjeve koji su postavljeni. [1]

### ***Granica prihvatanja***

Granica prihvatanja je zadana gornja ili donja granica dopuštenih izmjerenih vrijednosti veličine. [1]

### ***Područje prihvatanja***

Područje prihvatanja je područje u kojem se nalaze dopuštene izmjerene količinske vrijednosti. Ako nije drugačije navedeno, granice prihvatanja pripadaju području prihvatanja. Negdje se može naći i izraz zona prihvatanja. [1]

### ***Područje odbijanja***

Područje odbijanja je područje u kojem se nalaze nedopuštene izmjerene količinske vrijednosti. Negdje se može naći i izraz zona odbijanja. [1]

### ***Područje sigurnosti***

Područje sigurnosti je područje između tolerancijskog polja i odgovarajućeg područja prihvaćanja. Područje sigurnosti uključuje granice. [1]

### ***Pravilo odluke***

Pravilo odluke je dokumentirano pravilo koje opisuje kako će mjerna nesigurnost utjecati na donošenje odluke o prihvaćanju ili odbijanju predmeta od interesa, sukladno zadanim zahtjevima i rezultatima mjerenja. [1]

### ***Rizici***

Rizici se mogu podijeliti u četiri kategorije. Prva kategorija je specifični kupčev rizik, a to je vjerojatnost da će određeni predmet od interesa biti prihvaćen, a nije sukladan. Druga kategorija je specifični proizvođačev rizik, koji je vjerojatnost da će predmet od interesa biti odbije, a sukladan je. Treća kategorija je globalni kupčev rizik, vjerojatnost da će nesukladan predmet od interesa biti prihvaćen na temelju budućih rezultata mjerenja. Četvrta kategorija je globalni proizvođačev rizik, koji je vjerojatnost da će sukladan predmet od interesa biti odbijen na temelju budućih rezultata mjerenja. [1]

### ***Indeks sposobnosti mjerenja***

Indeks sposobnosti mjerenja je tolerancija podijeljena s višekratnikom standardne mjerne nesigurnosti povezane s izmjerenom vrijednosti mjenog svojstva predmeta od interesa. U ovom radu višekratnik će biti broj 4. [1]

### ***Maksimalna dozvoljena pogreška***

Maksimalna dozvoljena pogreška  $MPE$  za mjerni instrument je maksimalna dozvoljena razlika između očitavanja instrumenta i stvarne količine koja se mjeri. Maksimalna dozvoljena razlika se propisuje specifikacijama ili propisima. Pogreška očitavanja se može napisati kao  $E = R - R_0$ , gdje  $R$  predstavlja stvarno očitavanje, a  $R_0$  predstavlja očitavanje idealnog mjernog instrumenta. U testiranju i provjeri mjernog instrumenta, pogreška očitavanja je obično procijenjena mjerenjem kalibriranog etalona. [1]

### 3. MJERNA NESIGURNOST

Mjerna nesigurnost definirana je kao parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini. Procjena mjerne nesigurnosti temelji se na procjenama iz nepoznatih razdioba vjerojatnosti koje su određene s pomoću ponovljenih odnosno obnovljenih mjerenja, ili iz subjektivnih ili apriornih razdioba koje se temelje na sveukupnim raspoloživim podacima. [11]

#### 3.1. Proračun mjerne nesigurnosti GUM metodom

(GUM – *Guide to the expression of uncertainty in measurement*)

U većini slučajeva mjerena veličina  $Y$  ne mjeri se izravno nego se određuje iz  $N$  drugih veličina  $X_1, X_2, \dots, X_N$  na temelju funkcijskog odnosa koji predstavlja osnovni matematički model za potpuno određenje mjerene veličine [11].

Ulazne veličine  $X_1, X_2, \dots, X_N$  o kojima ovisi izlazna veličina  $Y$  mogu se promatrati kao mjerene veličine i mogu ovisiti o drugim veličinama dovodeći tako do složenog funkcijskog odnosa koji se ne mora uvijek moći eksplicitno napisati [11].

U GUM-u postoji jasna podjela između sastavnica nesigurnosti tipa A i tipa B s obzirom na različite načine njihova proračunavanja. Vrlo jednostavno može se reći da se proračun nesigurnosti A - vrste temelji na statističkoj analizi niza ponovljenih mjerenja. Procijenjeno standardno odstupanje izračunato iz niza ponovljenih mjerenja ujedno je procijenjeno standardno odstupanje  $u(x_i)$  koje opisuje sastavnicu nesigurnosti A - vrste i često se naziva standardna nesigurnost A - vrste. Za opisivanje sastavnice nesigurnosti A - vrste potrebno je dati i broj stupnjeva slobode  $v_i$  nesigurnosti  $u(x_i)$ . Za veličinu procijenjenu s pomoću srednje vrijednosti niza ponovljenih mjerenja broj stupnjeva slobode  $v$  jednak je  $n - 1$ . Ukoliko se procjena  $x_i$  ulazne veličine  $X_i$  dobiva iz krivulje dobivene metodom najmanjih kvadrata broj stupnjeva slobode standardne nesigurnosti bit će  $n - 2$ . [11]

Standardna nesigurnost B - vrste ne može se utvrditi samo statističkom analizom niza ponovljenih mjerenja, već se pri tome moraju primijeniti neke druge metode koje se temelje na svim dostupnim podacima o naravi mjerene veličine. Ponovljena mjerenja također mogu biti od pomoći pri utvrđivanju utjecajnih parametara u postupku proračuna nesigurnosti B - vrste.

Ukoliko se provode ponovljena mjerenja to ne znači da se isključivo radi o proračunu nesigurnosti A - vrste. Standardna nesigurnost  $u(x_i)$  B - vrste, dobiva se iz apriornih razdioba vjerojatnosti. Pri tome se postavlja pitanje broja stupnjeva slobode  $\nu_i$  koji treba pripisati standardnoj nesigurnosti dobivenoj iz proračuna B - vrste. U velikom broju slučajeva za standardnu nesigurnost dobivenu iz proračuna B - vrste može se pretpostaviti da je ona točno poznata, pa slijedi  $\nu_i \rightarrow \infty$ . [11]

Ono što je zajedničko sastavnicama mjerne nesigurnosti je da se obje vrste proračuna temelje na razdiobama vjerojatnosti, a iskazuju se varijancama ili standardnim odstupanjima. Dok se iz proračuna A - vrste nesigurnost  $u(x_i)$  dobiva iz razdioba vjerojatnosti utemeljenih na frekvenciji, nesigurnost  $u(x_i)$  iz proračuna B - vrste dobiva se iz apriornih razdioba vjerojatnosti. [11]

Sastavljena standardna nesigurnost  $u_c(y)$ , određuje se odgovarajućim sastavljanjem standardnih nesigurnosti  $u(x_i)$  procjena ulaznih veličina  $x_1, x_2, \dots, x_N$  [11].

Proširena nesigurnost je veličina koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća veliki dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini. Proširena nesigurnost dobiva se množenjem složene standardne nesigurnosti  $u_c(y)$  s faktorom pokrivanja  $k$ , a označuje se s  $U$  [11].

Vrijednost faktora pokrivanja  $k$  može se samo naći ako postoji široko znanje o razdiobi vjerojatnosti svake ulazne veličine i ako se te razdiobe sastavljaju da bi se dobila razdioba izlazne veličine. Procjene  $x_i$  ulaznih veličina i njihove standardne nesigurnosti  $u(x_i)$  same nisu prikladne za tu svrhu. Stoga se zahvaljujući centralnom graničnom teoremu pretpostavlja da je razdioba vjerojatnosti veličine  $(y - Y)/u_c(y)$ ,  $t$  - razdioba. Pri tome je faktor pokrivanja  $k = t_p(\nu_{\text{eff}})$ , s  $t_p$  faktorom koji se temelji na stvarnom broju stupnjeva slobode  $\nu_{\text{eff}}$  nesigurnosti  $u_c(y)$  dobivene iz Welch – Satterthwaiteove formule. [11]

Za mnoga praktična mjerenja faktor pokrivanja  $k$  će biti u području između 2 i 3. U slučajevima gdje je razdioba vjerojatnosti opisana s  $y$  i  $u_c(y)$  približno normalna, a broj stupnjeva slobode sastavljene standardne nesigurnosti  $u_c(y)$  značajan po iznosu, može se pretpostaviti da uzimanje  $k = 2$  daje interval uz vjerojatnost od približno  $P = 95\%$ . Međutim čak i ako razdiobe veličina  $X_i$  nisu normalne, razdioba veličine  $y$  često se približno opisuje normalnom razdiobom

uz primjenu centralnog graničnog teorema. Međutim, za posebne primjene  $k$  može biti i izvan tog područja. U određenim slučajevima u praksi može se dogoditi da određeni uvjeti koje zahtijeva centralni granični teorem nisu ispunjeni te njegova primjena može dovesti do neprihvatljivih rezultata. Također ako je funkcijski odnos između  $y$  i njezinih ulaznih veličina nelinearan, a razvoj te funkcije u Taylorov red uz zadržavanje samo prvih članova razvoja nije prihvatljivo približno određenje, razdioba vjerojatnosti izlazne veličine  $Y$  ne može se dobiti konvolucijom razdioba ulaznih veličina. U takvim slučajevima zahtijevaju se druge analitičke ili numeričke metode. [11]

### 3.2. Proračun mjerne nesigurnosti MCS metodom

Monte Carlo simulacija (MCS) je statistička simulacija povezana sa slučajnim događajima. Neki autori Monte Carlo simulacijama zovu bilo koju vrstu programa što se koristi slučajnim brojevima. Termin Monte Carlo simulacije upotrijebit će se samo za simulacije kod kojih se u rješavanju problema koristi stvaranje uzoraka iz razdioba slučajnih varijabli. [11]

MCS metoda u postupku procjenjivanja mjerne nesigurnosti rezultata mjerenja temelji se na generiranju slučajnih brojeva iz funkcija gustoće vjerojatnosti za svaku ulaznu veličinu  $X_i$  i stvaranju odgovarajuće vrijednosti izlazne veličine  $Y$ , kombinirajući različite razdiobe kojima su definirane ulazne veličine. Postupak se ponavlja  $M$  puta te se na taj način tvori eksperimentalna funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine koja se temelji na  $M$   $Y$  vrijednosti. Iz eksperimentalne funkcije gustoće vjerojatnosti slijedi procjena izlazne veličine  $y$ , procijenjeno standardno odstupanje, te procjena intervala  $(y_{((\frac{1-P}{2})M)}, y_{((\frac{1+P}{2})M)})$  za zadanu vjerojatnost  $P$ . [11]

Karakteristike MCS metode u postupku procjenjivanja mjerne nesigurnosti rezultata mjerenja su sljedeće [11]:

- moguća je kombinacija različitih funkcija gustoća vjerojatnosti kojima su definirane ulazne veličine
- u proračun su uključeni viši redovi razvoja funkcije u Taylorov red
- simuliraju se nepoznate sustavne pogreške.

Mjerenja nisu savršena kako zbog djelovanja slučajnih utjecaja (trenutna promjena temperature, tlaka i vlage ili neiskustvo mjeritelja, nesavršenost uređaja i osjetila) tako i zbog ograničenih



možnosti korekcije sustavnih djelovanja (promjena karakteristike instrumenta između dva umjeravanja, utjecaj mjeritelja pri očitavanju analogne skale, nesigurnost vrijednosti referentnog etalona itd.). Mjerna nesigurnost je upravo posljedica djelovanja slučajnih utjecaja i ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja. [11]

Mjerna nesigurnost procjenjuje se iz razloga što mjerenja nisu savršena, zbog nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe mjernih rezultata dobivenih u različitim umjernim i ispitnim laboratorijima, te radi usporedbe rezultata sa specifikacijama proizvođača ili zadanom tolerancijom [11].

### 3.3. Uloga mjerne nesigurnosti u ocjeni sukladnosti

Ako je proširena mjerna nesigurnost  $U$  izražena kao produkt standardne mjerne nesigurnosti  $u$  i faktora pokrivanja  $k$ , za bilo koju izmjerenu vrijednost koja leži unutar područja prihvaćanja, najveća vjerojatnost prihvaćanja nesukladnog predmeta od interesa će biti 2,3 %, pretpostavljajući normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti za izmjerenu veličinu [12].

Odluka o prihvaćanju predmeta kao sukladnog ili odbijanju kao nesukladnog s obzirom na zahtjeve je temeljena na izmjerenim vrijednostima karakteristika objekta u odnosu na kriterij prihvaćanja. Granica prihvaćanja izvan tolerancijskog polja se također može izabrati tako da povećava vjerojatnost da je odbijeni predmet stvarno nesukladan. Takvo se pravilo odluke zaštićenog odbijanja često koristi kada se želi čisti dokaz da je granica prekoračena prije nego se poduzmu negativne radnje [13].

S pravilom odluke koje se temelji na jednostavnom prihvaćanju i s izmjerenim vrijednostima dobivenima s normalnom razdiobom koje leže na donjoj ili gornjoj granici, vjerojatnost prihvaćanja ili odbijanja sukladnog ili nesukladnog predmeta će biti 50 %. Kada se odlučuje o prihvaćanju ili odbijanju postoji 50 % šansi za donošenje krive odluke. [12]

Odluka o prihvaćanju predmeta kao sukladnog ili odbijanje predmeta kao nesukladnog je temeljena na izmjerenoj vrijednosti karakteristike predmeta s primijenjenim pravilom odluke. Cilj analize rizika je usporediti parametre stvarnog i konstruiranog proizvoda s granicama specifikacije. Parametri koji ne zadovoljavaju kriterij, odnosno parametri koji premašuju granice specifikacije, se moraju presložiti. [14]

Mjerna nesigurnost je jedan od faktora koji se moraju uzeti u obzir kada se definira kriterij prihvaćanja. Prihvaćanje ili odbijanje predmeta kada izmjerena vrijednost promatrane karakteristike leži u blizini granica tolerancije može rezultirati donošenjem pogrešnih odluka, a može i voditi do neželjenih posljedica. Važno i široko primjenjivo pravilo odluke je pravilo jednostavnog prihvaćanja ili podijeljenog rizika. Kod takvog pravila, proizvođač i potrošač prihvaćaju ili odbijaju predmet kao sukladan ili nesukladan temeljeno na tome leže li rezultati mjerenja unutar granica tolerancije. Kao što ime podijeljeni rizik kaže, korištenjem tog pravila odluke proizvođač i potrošač dijele posljedice pogrešnih odluka. U praksi, da bi se vjerojatnost donošenja pogrešnih odluka zadržala u prihvatljivim granicama, nužno je da postoji konsenzus između proizvođača i potrošača da se mjerna nesigurnost uzima u obzir i smatra prihvatljivom za namijenjenu svrhu predmeta. [12]

Oslanjanje na pravilo odluke jednostavnog prihvaćanja i izmjerene vrijednost dane normalnom raspodjelom mogu dovesti do toga da vjerojatnost prihvaćanja nesukladnog i odbijanje sukladnog predmeta bude i do 50 %. Posebno je bitno točno procijeniti mjernu nesigurnost tako da se očekuje da je točna vrijednost unutar opsega nesigurnosti i da je procijenjena mjerna nesigurnost realistična. [12]

## 4. TOLERANCIJSKE GRANICE I TOLERANCIJSKA POLJA

### 4.1. Mjerenja radi ocjene sukladnosti

U obzir se uzima situacija gdje se mjeri svojstvo predmeta od interesa, npr. pogreška očitavanja voltmetra, da bi se donijela odluka je li predmet od interesa sukladan definiranom zahtjevu ili nije. Takvo ispitivanje sukladnosti sadrži redosljed od tri operacije:

- mjerenje svojstva predmeta od interesa
- uspoređivanje rezultata mjerenja s zadanim zahtjevom
- odluka o sljedećoj akciji.

U praksi, jednom kada su rezultati mjerenja dobiveni, usporedba i/ili odluka se obično provode koristeći prethodno utvrđenim pravilom odluke (2.3.12.). To pravilo odluke se oslanja na rezultate mjerenja, zadani zahtjev i posljedice pogrešne odluke. [1]

Smjernice za formiranje pravila odluke su dostupne i mogu se pronaći u normama. Norme ISO 14253-1 i ASME B89.7.3.1 pružaju smjernice za dokumentiranje izabranog pravila odluke i za opisivanje uloge mjerne nesigurnosti u prihvatanju područja prihvatanja. U tim normama pravilo odluke se donosi na temelju dvije ili više mogućih odluka, uključujući dvojno pravilo odluke, a u ovom radu se upravo takvo dvojno pravilo odluke promatra kao specijalni slučaj. [1]

Mjerenja izvršenja kao dio ocjene sukladnosti su dizajnirana na način da pružaju informacije dovoljne da se donese odluka sa prihvatljivom razinom rizika. Prikladna strategija mjerenja će uskladiti cijenu smanjivanja mjerne nesigurnosti s koristi sigurnijeg poznavanja točne vrijednosti mjerenog predmeta od interesa. [1]

Kontrolno mjerenje zajedno s povezanim pravilom odluke je usko povezano s pitanjima kao što su trošak i rizik. Kao takvo, dizajn zadovoljavajuće ocjene sukladnosti nije strogo tehničke prirode. Ako je cilj minimizirati troškove, tada s pogodnim ekonomskim modelom, problem se može svesti na izravan izračun. [1]

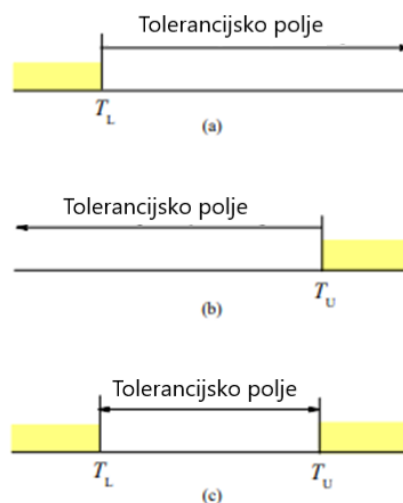
#### 4.2. Dozvoljene i nedozvoljene vrijednosti: tolerancijske granice

U ovom radu, zadani zahtjevi za mjerenje predmeta od interesa sadrže granične vrijednosti, koje se nazivaju tolerancijske granice i one odvajaju područje dozvoljenih vrijednosti od područja nedozvoljenih vrijednosti. Područja dozvoljenih vrijednosti, nazvana tolerancijska polja postoje u dva oblika:

- jednostrano tolerancijsko polje s gornjom ili donjom tolerancijskom granicom
- dvostrano tolerancijsko polje s gornjom i donjom tolerancijskom granicom

U oba slučaja, predmet od interesa je sukladan zadanom zahtjevu ako je točna vrijednost mjerenog svojstva unutar tolerancijskog polja, a ako je izvan tada je nesukladan. Iznad opisana tolerancijska polja se mogu vidjeti na slici 2.

Naizgled jednostrana tolerancijska polja često imaju dodatna ograničenja, koja zbog fizičkih ili teoretskih razloga nisu eksplicitno navedena. Takva tolerancijska polja su ustvari dvostrana, imajući jednu zadanu tolerancijsku granicu, dok se druga tolerancijska granica podrazumijeva. [10]



Slika 2. Tolerancijska polja [1]

Na slici su navedena tri moguća izgleda tolerancijskog polja. U slučaju (a) je navedeno tolerancijsko polje definirano s jednom tolerancijskom granicom, donjom tolerancijskom granicom  $T_L$ . U slučaju (b) je navedeno tolerancijsko polje također definirano s jednom tolerancijskom granicom, ali je to u ovom slučaju gornja tolerancijska granica  $T_U$ . Kod slučaja

(c) je prikazano tolerancijsko polje s obje granice, odnosno dvostrano tolerancijsko polje s gornjom i donjom tolerancijskom granicom. Razlika  $T_U - T_L$  predstavlja toleranciju.

U nekim slučajevima kao što su sigurnost hrane i zaštita okoliša, zadavanje tolerancijskih granica u mjerenjima kod ocjene sukladnosti mogu uključivati nesigurnosti povezane s otežanom procjenom posljedica netočnih odluka [15]. Povezan problem u analizi pouzdanosti, koji se naziva nesigurnost potpunosti, je povezan s neanaliziranim doprinosima rizika [16].

Nesigurnost potpunosti nema veze s mjernom nesigurnosti povezanom s procjenom rezultata mjerenja s kontrolnog mjerenja. U ovom radu tolerancijske granice se uzimaju kao fiksne konstante.

### 4.3. Tolerancijske granice

Postoji više primjera tolerancijskih granica. Postoje primjeri sa samo gornjom tolerancijskom granicom, sa samo donjom tolerancijskom granicom, sa eksplicitnom gornjom i eksplicitnom donjom granicom, s eksplicitnom gornjom i implicitnom donjom granicom i primjeri s eksplicitnom donjom i implicitnom gornjom granicom. [1]

Primjer sa samo gornjom tolerancijskom granicom je napon  $V_b$  za određeni tip Zenerove diode koji je određen da ne može biti veći od  $-5,4$  V. Za tu diodu tolerancijsko polje je zadano s  $V_b \leq -5,4$  V. [1]

Primjer samo donje tolerancijske granice je metalna limenka za pića. Metalna limenka za pića mora imati otpornost na pucanje  $B$  veću od 490 kPa, odnosno mora izdržati najmanje tlak od 490 kPa, a da ne pukne. Za ovaj primjer tolerancijsko polje je  $B \geq 490$  kPa. [1]

Primjer s obje eksplicitno zadane granice je bilo koji predmet od interesa kojemu je zadana maksimalno dozvoljeno odstupanje. Npr. ako neki predmet od interesa ima zadanu masu 1 kg i zadano maksimalno dozvoljeno odstupanje od 500  $\mu$ g to znači da masa tog predmeta od interesa ne smije biti manja od 0,999 999 5 kg i ne smije biti veća od 1,000 000 5 kg. Sukladni su svi predmeti od interesa kojima interval pogreške  $E = m - m_0$  leži u intervalu  $-500 \mu\text{g} \leq E \leq 500 \mu\text{g}$ . [1]

Primjer s gornjom eksplicitno zadanom i donjom implicitno zadanom tolerancijskom granicom je regulacija da masena koncentracija  $X$  žive u protoku industrijske otpadne vode ne smije biti veća od 10 ng/L i to je eksplicitna gornja tolerancijska granica. Pošto masena koncentracija ne može biti manja od 0, dobiva se da je donja implicitna tolerancijska granica 0 ng/L. Uzorak otpadne vode je usklađen s regulacijom ako masena koncentracija žive u uzorku leži u intervalu  $0 \text{ ng/L} \leq X \leq 10 \text{ ng/L}$ . [1]

Primjer s donjom implicitno zadanom i gornjom eksplicitnom zadanom tolerancijskom granicom je zahtjev za čistoćom  $P$  natrijevog benzoata u prahu koji se koristi kao konzervans u hrani. Čistoća  $P$ , iskazana kao maseni udio na suhoj bazi, ne smije biti manja od 99 % što je donja eksplicitni zadana tolerancijska granica. Čistoća ne može biti veća od 100 %, što je ujedno i gornja implicitni zadana tolerancijska granica. Zadovoljavajući uzorak natrijevog benzoata je onaj kojemu uzorak čistoće leži u intervalu  $99,0 \% \leq P \leq 100 \%$ . [1]

## 5. POZNAVANJE MJERENE VELIČINE

### 5.1. Vjerojatnost i informacije

U mjerenjima izvedenima kao dio ocjene sukladnosti, poznavanje svojstva predmeta od interesa (mjerene veličine) je modelirano uvjetovanom funkcijom gustoće (raspodjele) vjerojatnosti čiji oblik ovisi o raspoloživim informacijama. Takva informacija uvijek ima dvije komponente. Prva komponenta je informacija koja je raspoloživa prije obavljanja mjerenja (naziva se prethodna informacija), a druga komponenta je dodatna informacija koja se dobiva samim mjerenjem [17].

Funkcija gustoće vjerojatnosti za svojstvo predmeta od interesa (mjerenu veličinu) kodira i prenosi mišljenje u njezine moguće vrijednosti s određenim stanjem znanja. Slabo znana mjerena veličina obično ima široku funkciju gustoće vjerojatnosti, relativno zahtjevima ocjene sukladnosti, ukazujući na široko područje mogućih vrijednosti kompatibilnih sa slabom informacijom. Obavljanje mjerenja pruža nove informacije koje služe za izoštravanje funkcije gustoće vjerojatnosti i suzuje područje mogućih vrijednosti mjerene veličine. [1]

Posljedica mjerenja je da se može ažurirati znanje o svojstvu predmeta od interesa koje se ima prije mjerenja, prinoseći znanje o svojstvu predmeta od interesa nakon mjerenja koje uključuje podatke mjerenja. Pravilo za tu transformaciju naziva se Bayesov teorem ili Bayesova formula, a temeljni matematički okvir je znan kao Bayesova teorija vjerojatnosti. [1]

### 5.2. Bayesov teorem

Prije nego što je dokazao svoj poznati teorem, Bayes se bavio pitanjem uvjetne vjerojatnosti, odnosno vjerojatnosti da se dogodio događaj  $A$  ako nam je poznato da se realizirao događaj  $B$ , čiju je definiciju zapisao u obliku  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . Takva vjerojatnost se još označava s  $P_B(A)$  i često se naziva uvjetna vjerojatnost od  $A$  uz uvjet  $B$ . [18]

U ocjeni sukladnosti, mjereno svojstvo  $Y$  predmeta od interesa se smatra slučajnom varijablom s mogućim vrijednostima označenima s  $\eta$ . Prije mjerenja  $Y$ , razumno vjerovanje u moguće

vrijednosti je okarakterizirano s prethodnom funkcijom gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta)$ , čiji oblik ovisi o neovisnom mjernom sustavu. [1]

Prethodna funkcija gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta)$  je često zadana bazirajući se na znanje stečeno prethodnim mjerenjima sličnih predmeta od interesa. [1]

U tipičnom kontrolnom mjerenju, veličina  $Y$  je mjerena koristeći proceduru koja je sastavljena tako da osigura dovoljno informacija za procjenu sukladnosti u skladu s zadanim zahtjevom. [1]

Izlaz (eng. *output*) mjernog sustava je veličina smatrana slučajnom varijablom  $Y_m$  s mogućim vrijednostima označenima s  $\eta_m$ . Mjerenje veličine  $Y$  prinosi posebnom ostvarenju, izmjerenoj vrijednosti veličine  $\eta_m$  i rezultanti funkcije gustoće vjerojatnosti nakon mjerenja za  $Y$ , s ovom novom informacijom, piše se kao:

$$g(\eta|Y_m = \eta_m) = : g(\eta|\eta_m) \quad (6)$$

Jednadžba 6 znači da je desni dio jednadžbe definiran lijevim dijelom jednadžbe. [1]

Prethodna i sljedeća funkcija gustoća vjerojatnosti su povezane s Bayesovim teoremom u jednadžbi 7. U toj jednadžbi  $\eta_m$  je izmjerena vrijednost, a  $C$  je konstanta takva da vrijedi  $\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta|\eta_m) d\eta = 1$ . Izraz  $h(\eta|\eta_m)$  u jednadžbi 7 je funkcija gustoće vjerojatnosti za moguću vrijednost  $Y_m$ , uz uvjet neke vrijednosti  $Y = \eta$  mjerene veličine. [1]

$$g(\eta|\eta_m) = C g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) \quad (7)$$

Izražena kao funkcija od  $\eta$  za izmjerenu vrijednost  $\eta_m$ , funkcija gustoće vjerojatnosti  $h(\eta|\eta_m)$  se naziva vjerojatnost od  $\eta$  uz uvjet  $\eta_m$  i piše se:

$$h(\eta_m|\eta) = : L(\eta; \eta_m) \quad (8)$$



Mjerenje se može gledati kao odnos očitavanja i odziva ili kao odnos ulaza i izlaza. U takvom pogledu, vjerojatnost funkcije  $L(\eta; \eta_m)$  karakterizira distribuciju mogućih očitavanja ili ulaza (vrijednosti od  $\eta$ ) koje mogu izazvati promatran odziv ili izlaz (izmjerena vrijednost  $\eta_m$ ). [1]

Oblik funkcije vjerojatnosti će ovisiti o posebnom problemu mjerenja i mjernom sustavu, kao što je opisano u matematičkom modelu, ali i o ostalim relevantnim informacijama kao što su podaci o prošlosti, umjerenosti instrumenta i rezultatu mjerenja kalibriranih izradaka ili etalona i iskustvu sa sličnim sustavima. U mnogim praktičnim slučajevima, funkcija vjerojatnosti se može izraziti pomoću normalne, odnosno Gaussove raspodjele. [1]

Bayesov teorem pokazuje kako znanje nakon mjerenja nastaje od kombinacije informacija prije mjerenja, sadržanih u prethodnoj distribuciji, i informacija dobivenih mjerenjem, prikazanih funkcijom vjerojatnosti. [1]

U mnogim slučajevima, mjerni sustav je upotrijebljen da bi se prije mjerenja dopunilo slabo poznavanje mjerene veličine s točnim mjernim informacijama. U takvom slučaju, znanje funkcije gustoće vjerojatnosti nakon mjerenja je u suštini definirano s funkcijom vjerojatnosti s približnom aproksimacijom, gdje je  $C$  konstanta. [1]

$$g(\eta|\eta_m) = Ch(\eta_m|\eta) \quad (9)$$

### 5.3. Najbolja procjena i standardna nesigurnost

Rezultati mjerenja su obično zaključeni s davanjem procjene mjerene veličine i parametra koji karakterizira rasipanje vjerojatnih vrijednosti oko te procjene. U ovom radu, procjena  $y$  od svojstva  $Y$  se uzima kao očekivanje  $E(Y|\eta_m)$ . Povezani parametar rasipanja  $u(y) = u$ , nazvan standardna nesigurnost se uzima kao standardna devijacija od  $Y$ , što je pozitivni drugi korijen od varijance  $V(Y|\eta_m)$ .  $E(Y|\eta_m)$  i  $V(Y|\eta_m)$  su definirani donjim izrazima. [1]

$$E(Y|\eta_m) = y = \int_{-\infty}^{\infty} \eta g(\eta|\eta_m) d\eta \quad (10)$$

$$V(Y|\eta_m) = u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - y)^2 g(\eta|\eta_m) d\eta \quad (11)$$

Standardna nesigurnost  $u$  karakterizira rasipanje  $Y$  oko procjene  $y$ . Kada je funkcija gustoće vjerojatnosti za  $Y$  s jednim vrhom i simetrična, tada je procjena  $y$  najvjerojatnija vrijednost  $Y$ . [1]

Za analizu mjerenja prema JCGM 100:2010 (GUM), procjene mjernih podataka pridonose procjeni mjerene veličine  $\eta_m$  i povezane standardne nesigurnosti  $u_m$ . Prethodna informacija se pretpostavlja da je tako slaba da se funkcija gustoće vjerojatnosti nakon mjerenja  $g(\eta|\eta_m)$  može rezimirati s procjenom  $y = \eta_m$  i povezanom standardnom nesigurnošću  $u = u_m$ . [1]

#### 5.4. Područja pokrivanja

Nakon mjerenja, vjerojatnost da  $Y$  nije veći od zadane vrijednosti  $a$  je:

$$\Pr(Y \leq a|\eta_m) = G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta|\eta_m) d\eta \quad (12)$$

gdje je  $G(z) = \int_{-\infty}^z g(\eta|\eta_m) d\eta$  raspodjela funkcije  $Y$ , s zadanim podatkom  $\eta_m$ . [1]

Slijedi da vjerojatnost  $p$  da  $Y$  leži u području  $[a, b]$ , s  $a < b$  je:

$$p = \Pr(a \leq Y \leq b|\eta_m) = \int_a^b g(\eta|\eta_m) d\eta = G(b) - G(a) \quad (13)$$

Područje kao što je  $[a, b]$  naziva se područje pokrivanja za  $Y$ , a  $p$  je povezana s odgovarajućom vjerojatnošću pokrivanja. Vodič za izradu područja pokrivanja s željenom vjerojatnošću pokrivanja, uključujući i slučaj diskretne aproksimacije funkcije raspodjele dobivene Monte Carlo metodom, je dan u normi JCGM 101:2008. [1]

Kada je funkcija gustoće vjerojatnosti za  $Y$  simetrična i jedinstvena, važno i široko korišteno područje pokrivanja je centrirano na najbolje procijenjeni  $y$ , s dužinom jednakom višekratniku standardne nesigurnosti  $u$ . GUM definira dodatnu mjeru nesigurnosti koja se naziva proširena nesigurnost  $U$ , a dobiva se množenjem standardne nesigurnosti  $u$  s faktorom pokrivanja  $k$ :  $U = ku$ . [1]

Faktor pokrivanja se odabire da bi se postigla željena vjerojatnost pokrivanja povezana s područjem pokrivanja  $[y - U, y + U]$ . Odnos između  $k$  i povezanosti vjerojatnosti pokrivanja ovisi o funkciji gustoće vjerojatnosti za  $Y$ . Područje pokrivanja  $[y - U, y + U]$  se ponekad naziva i područje nesigurnosti. Ako je funkcija gustoće vjerojatnosti za  $Y$  nesimetrična, bilo bi bolje da se odluči najmanje područje pokrivanja za zadanu vjerojatnost pokrivanja. [1]

## 6. VJEROJATNOST SUKLADNOSTI S ODREĐENIM ZAHTJEVIMA

### 6.1. Glavno pravilo za izračun vjerojatnosti sukladnosti

Predmet od interesa je sukladan određenom zahtjevu ako točna vrijednost povezanog svojstva  $Y$  leži unutar tolerancijskog polja. Poznavanje  $Y$  se dobiva iz funkcije gustoće vjerojatnosti  $g(\eta|\eta_m)$  pa je zato izjava o sukladnosti uvijek zaključak s nekom vjerojatnošću da je točan [1]. Obilježavanje seta mogućih vrijednosti  $Y$  s  $C$ , vjerojatnost sukladnosti označena s  $p_c$  je dana izrazom:

$$p_c = \Pr(Y \in C|\eta_m) = \int_C g(\eta|\eta_m) d\eta \quad (14)$$

Jednadžba 14 daje glavno pravilo za izračun vjerojatnosti da će predmet od interesa biti sukladan određenom zahtjevu temeljeno na mjerenju relevantnog svojstva predmeta od interesa. Ako svojstvo  $Y$  ima tolerancijsko polje s dvostrukim granicama, npr. s donjom granicom  $T_L$  i s gornjom granicom  $T_U$ , tada je  $C = [T_L, T_U]$  i vjerojatnost sukladnosti je jednaka:

$$p_c = \int_{T_L}^{T_U} g(\eta|\eta_m) d\eta \quad (15)$$

Pošto predmet od interesa je sukladan, ili nije sukladan zahtjevima, tada je vjerojatnost da predmet od interesa nije sukladan jednaka  $\bar{p}_c = 1 - p_c$ . [1]

### 6.2. Vjerojatnosti sukladnosti s normalnom funkcijom gustoće vjerojatnosti

Vjerojatnost sukladnosti ovisi o stanju znanja o mjerenoj veličini  $Y$  koja je sadržana u i prenijeta iz funkcije gustoće vjerojatnosti  $g(\eta|\eta_m)$ . U mnogim slučajevima razumno je karakterizirati znanje o  $Y$  s normalnom razdiobom i ta vjerojatnost može biti izračunata. Ako je prijašnja raspodjela normalna i mjerni sustav (npr. funkcija vjerojatnosti) je karakteriziran normalnom raspodjelom, tada je i raspodjela  $g(\eta|\eta_m)$  također normalna raspodjela. [1]

Općenito, ako je funkcija vjerojatnosti karakterizirana normalnom raspodjelom i informacije prije mjerenja su slabe, tada je funkcija gustoće vjerojatnosti nakon mjerenja približno normalna. U takvom slučaju,  $g(\eta|\eta_m)$  može biti adekvatno aproksimirana normalnom raspodjelom s očekivanjem i standardnom devijacijom zadanom s najbolje procijenjenim  $y$  i standardnom nesigurnošću  $u$  izračunatom pomoću jednadžbe 11. Normalna razdioba je u cijelosti zadana s očekivanjem i standardnom devijacijom. [1]

Zbog sličnosti i široke primjene, normalna funkcija gustoće vjerojatnosti će se koristiti da se prikaže izračun vjerojatnosti sukladnosti u ovom radu. Takvi izračuni se mogu proširiti na slučaj gdje malen broj očitavanja daje porast povećanoj i pomaknutoj t-raspodjeli. [1]

Pretpostavlja se da je funkcija gustoće vjerojatnosti  $g(\eta|\eta_m)$  za mjerenu veličinu  $Y$  normalna razdioba zadana s najboljom procjenom (očekivanjem)  $y$  i standardnom nesigurnosti (standardnom devijacijom)  $u$ . Tada je  $g(\eta|\eta_m)$  dobiveno izrazom:

$$g(\eta|\eta_m) = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta-y}{u}\right)^2\right] = : \varphi(\eta; y; u^2) \quad (16)$$

Općenito, procjena  $y$  ovisi o  $\eta_m$ ,  $y = y(\eta_m)$ . Kada je znanje o  $Y$  slabo prije mjerenja, tada se obično uzima da je  $y \approx \eta_m$ . [1]

Od koraka koji vode do jednadžbe 13, vjerojatnost da  $Y$  leži u području  $[a, b]$ , i uvjet da je funkcija gustoća vjerojatnosti jednadžba 16, dobije se da je vjerojatnost jednaka:

$$\Pr(a \leq Y \leq b|\eta_m) = \Phi\left(\frac{b-y}{u}\right) - \Phi\left(\frac{a-y}{u}\right) \quad (17)$$

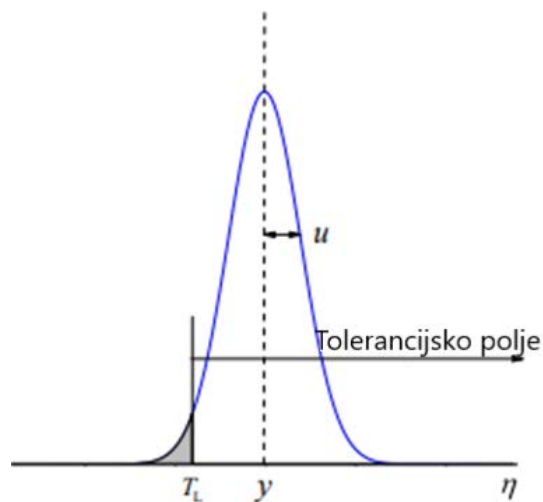
gdje je  $y = y(\eta_m)$  i

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/2) dt \quad (18)$$

je funkcija standardne normalne raspodjele. [1]

### 6.3. Jednostrana tolerancijska polja s normalnom funkcijom gustoće vjerojatnosti

#### *Jednostrano tolerancijsko polje samo s donjom granicom tolerancije*



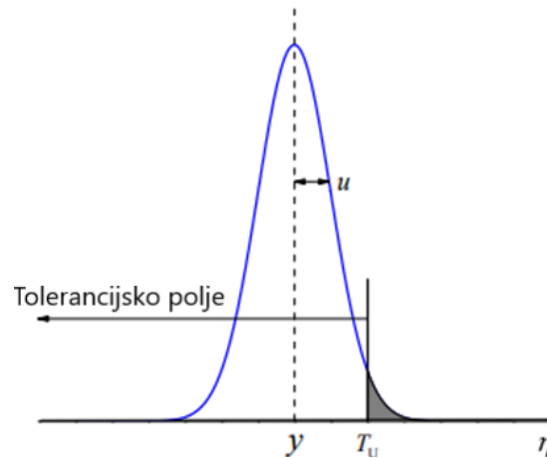
Slika 3. Tolerancijsko polje samo s donjom granicom tolerancije  $T_L$  [1]

Slika 3 prikazuje jednostrano tolerancijsko polje samo s jednom, donjom granicom tolerancije  $T_L$ . Sukladne vrijednosti svojstva od interesa  $Y$  leže u području  $\eta \geq T_L$ . Znanje o  $Y$  nakon kontrolnog mjerenja se dobiva pomoću normalne funkcije gustoće vjerojatnosti, koja je na slici prikazana u preklapanju s tolerancijskim poljem. Funkcija gustoće vjerojatnosti ima najbolju procjenu  $y$  i pripadajuću standardnu nesigurnost  $u$ . Najbolja procjena (očekivanje)  $y$  leži u tolerancijskom polju [1]. Zatamnjeno područje lijevo od  $T_L$  prikazuje vjerojatnost da predmet od interesa nije sukladan zahtjevu. Iz izraza 17, s  $a = T_L$  i  $b \rightarrow \infty$ , uz napomenu da je  $\Phi(\infty) = 1$ , dobiva se da je vjerojatnost sukladnosti jednaka:

$$p_c = 1 - \Phi\left(\frac{T_L - y}{u}\right) \quad (19)$$

Pošto je  $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$ , izraz 19 može se zapisati kao:

$$p_c = \Phi\left(\frac{y - T_L}{u}\right) \quad (20)$$

**Jednostrano tolerancijsko polje samo s gornjom granicom tolerancije****Slika 4. Tolerancijsko polje samo s gornjom granicom tolerancije  $T_U$  [1]**

Slika 4 je kao i slika 3, ali je u ovom slučaju tolerancijsko polje definirano samo s gornjom granicom tolerancije  $T_U$ . Slika 4 prikazuje normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti u preklapanju s jednostranim tolerancijskim poljem koje ima samo gornju granicu tolerancije  $T_U$ . Sukladne vrijednosti svojstva od interesa  $Y$  leže u intervalu  $\eta \leq T_U$  [1]. U ovom slučaju zatamnjeno područje desno od  $T_U$  prikazuje vjerojatnost da predmet od interesa nije sukladan zahtjevima. Iz izraza 17, s  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b = T_U$  i uz napomenu da je  $\Phi(-\infty) = 0$ , dobiva se da je vjerojatnost sukladnosti jednaka:

$$p_c = \Phi\left(\frac{T_U - y}{u}\right) \quad (21)$$

**Generalni pristup tolerancijskim poljima s jednom granicom tolerancije**

Vjerojatnosti iz izraza 20 i 21 su istog oblika i mogu se zapisati kao:

$$p_c = \Phi(z) \quad (22)$$

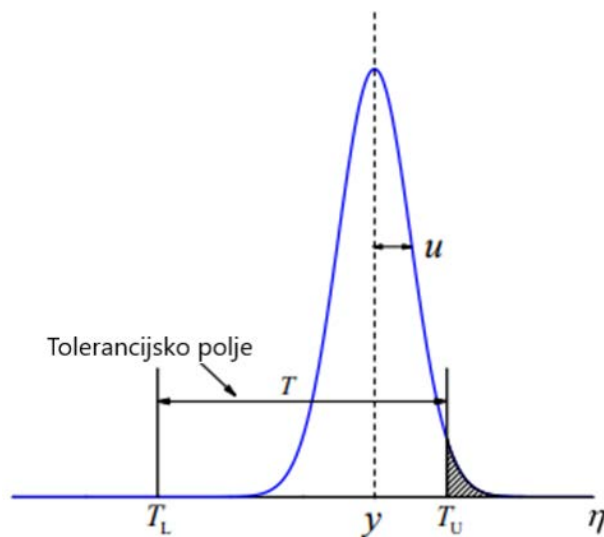
gdje je  $z = (y - T_L) / u$  za tolerancijsko polje s donjom granicom i  $z = (y - T_U) / u$  za tolerancijsko polje s gornjom granicom. U oba slučaja  $p_c$  je veći ili jednak polovini vrijednosti očekivanja  $y$  u tolerancijskom polju ( $z \geq 0$ ) i manji polovini vrijednosti u drugom slučaju. U

tablici 1 prikazane su vrijednosti  $z$  za različite vrijednosti vjerojatnosti sukladnosti  $p_c$ . U oba slučaja (gornja ili donja granica tolerancije)  $z$  je veći ili jednak nuli za očekivanje  $y$  u tolerancijskom polju. [1]

**Tablica 1. Vjerojatnosti sukladnosti ( $p_c$ ) i nesukladnosti ( $\bar{p}_c$ ) za jednostrana tolerancijska polja i normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti [1]**

| $p_c$    | $\bar{p}_c$ | $z$   |
|----------|-------------|-------|
| 0,80     | 0,20        | 0,84  |
| 0,90     | 0,10        | 1,28  |
| 0,95     | 0,05        | 1,64  |
| 0,99     | 0,01        | 2,327 |
| 0,999    | 0,001       | 3,09  |
| 0,999996 | 0,000004    | 4,465 |

#### 6.4. Dvostrana tolerancijska polja s normalnom funkcijom gustoće vjerojatnosti



**Slika 5. Dvostrano tolerancijsko polje [1]**

Na slici 5 prikazano je dvostrano tolerancijsko polje, odnosno tolerancijsko polje omeđeno s dvije granice, donjom  $T_L$  i gornjom  $T_U$ . Tolerancijsko polje ima duljinu  $T = T_U - T_L$  što definira toleranciju  $T$ . Kao i prije, znanje o mjerenoj veličini  $Y$  se pretpostavlja da se dobije iz

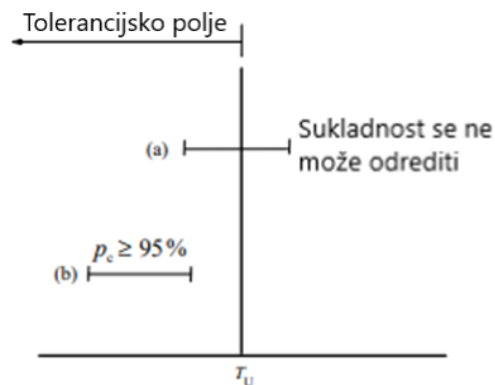


normalne funkcije gustoće vjerojatnosti. Očekivanje  $y$  leži unutar tolerancijskog polja i vidi se djelić vjerojatnosti u području  $\eta > T_U$  iznad gornje granice tolerancije [1]. Sukladne vrijednosti  $Y$  leže u intervalu  $T_L \leq \eta \leq T_U$ . Koristeći izraz 17 s  $b = T_U$  i  $a = T_L$  dobiva se izraz za vjerojatnost sukladnosti:

$$p_c = \Phi\left(\frac{T_U - y}{u}\right) - \Phi\left(\frac{T_L - y}{u}\right) \quad (23)$$

### 6.5. Vjerojatnost sukladnosti i područja pokrivanja

Rezultati mjerenja mogu se zaključiti s davanjem područja pokrivanja i povezane vjerojatnosti sukladnosti. To je bolji način nego da se daje eksplicitna funkcija gustoće vjerojatnosti za mjerenu veličinu  $Y$ . U takvom slučaju, izjava o vjerojatnosti sukladnosti se može uraditi uspoređujući područje pokrivanja s tolerancijskim poljem. Ako cijelo područje pokrivenosti s vjerojatnošću pokrivanja  $p$  leži unutar tolerancijskog polja, tada  $p_c$  ne može biti manji od  $p$ . To zapažanje može se vidjeti na slici 6, koja pokazuje dva 95 % područja pokrivanja u blizini gornje granice tolerancije. [1]



Slika 6. Dva 95 % područja pokrivanja za mjerenu veličinu  $Y$  u blizini gornje granice tolerancije  $T_U$  [1]

Područje (a) se proteže izvan tolerancijskog polja i bez poznavanja oblika funkcije gustoće vjerojatnosti za  $Y$  ne može se sa sigurnošću donijeti odluka o vjerojatnosti sukladnosti. [1]

U području (b) sve vrijednosti su manje od granice tolerancije i postoje sukladne vrijednosti  $Y$  koje ne pripadaju tom području pa je zato  $p_c \geq 95\%$ . [1]

Općenito, ako je  $[\eta_{min}, \eta_{max}]$  interval pokrivanja za  $Y$ , s vjerojatnošću pokrivanja  $p$ , tada vrijedi:

- za jednostruku gornju granicu tolerancije  $T_U$ ,  $p_c \geq p$  ako je  $\eta_{max} \leq T_U$
- za jednostruku donju granicu tolerancije  $T_L$ ,  $p_c \geq p$  ako je  $\eta_{min} \geq T_L$
- za dvostruko polje s gornjom i donjom granicom tolerancije  $T_U$  i  $T_L$ ,  $p_c \geq p$  ako je  $\eta_{min} \geq T_L$  i  $\eta_{max} \leq T_U$ . [1]

Usporedba intervala pokrivanja za svojstvo od interesa s područjem dozvoljenih vrijednosti je osnova za odlučivanje sukladnosti s zahtjevom kao što je opisano u ISO 10576-1. [1]

Ako je funkcija gustoće vjerojatnosti za  $Y$  zadana tada se vjerojatnost sukladnosti uvijek može izračunati. Funkcija gustoće vjerojatnosti za mjerenu veličinu je više informativna nego područje pokrivanja s pripadajućom vjerojatnošću pokrivanja. [1]

Kada se obavi ocjena sukladnosti za mjerni instrument, naročito kad je ocjena sukladnosti regulirani specijalnim standardima, definicija mjerene veličine, posljedično i procjena nesigurnosti, može biti nejasna i može zahtijevati posebnu pažnju. [1]

## 6.6. Indeks sposobnosti mjerenja $C_m$

Uzima se u obzir slučaj kod kojeg su informacije prije mjerenja toliko slabe da se poznavanje mogućih vrijednosti mjenog svojstva  $Y$  može saznati kompletno samo iz mjerenja. U takvom slučaju, ako se pretpostavlja da je raspodjela  $Y$  normalna funkcija gustoće vjerojatnosti  $g(\eta|\eta_m) = \varphi(\eta; y; u^2)$ , tada je  $y \approx \eta_m$  i  $u \approx u_m$ . U nastavku ovog poglavlja, smatra se da je to slučaj i rezultati mjerenja će se zaključiti s dva parametra  $(\eta_m, u_m)$  koji su očekivanje i standardna devijacija funkcije gustoće vjerojatnosti. [1]

Parametar koji opisuje kvalitetu mjerenja, relativno zadanom zahtjevu tolerancije, naziva se indeks sposobnosti mjerena i definira se izrazom:

$$C_m = \frac{T_U - T_L}{4u_m} = \frac{T}{4u_m} = \frac{T}{2U} \quad (24)$$

gdje je  $U = 2u_m$  proširena nesigurnost s faktorom pokrivanja  $k = 2$ . [1]

Faktor 4 u izrazu 24 je proizvoljan, ovaj izbor je motiviran širokom primjenom intervala pokrivanja  $[\eta_m - 2u_m, \eta_m + 2u_m]$  u izvještavanju rezultata mjerenja. U slučaju gdje je  $g(\eta|\eta_m)$  normalna funkcija gustoće vjerojatnosti, vjerojatnost pokrivanja za takvo područje je otprilike 95 %. [1]

Postoji bliska povezanost između  $C_m$  i ostalih izvedenih parametara koji se koriste da karakteriziraju kvalitetu mjerenja u raznovrsnim kontekstima. Među njima su mjerni omjer, pravilo proizvođača etalona, test omjera nesigurnosti (TUR – *test uncertainty ratio*) i test omjera točnosti (TAR – *test accuracy ratio*). Treba biti oprezan s korištenjem takvih pravila jer su ona ponekad dvosmislena ili su nepotpuno definirana. S druge strane, izraz 24 jasno pokazuje da izraz kao što je  $C_m \geq 4$  znači da je  $u_m \leq T/16$ . [1]

Kod umjeravanja ili provjere mjernog instrumenta, određeni zahtjev je često zadan u obliku maksimalno dozvoljene pogreške (očitanja). Takav zahtjev znači da kada je mjerni instrument korišten da izmjeri veličinu  $Y$ , pogreška naznake instrumenta mora ležati u području koje je definirano zadanim gornjim i donjim granicama. U uobičajenom slučaju gdje je područje simetrično  $[-E_{\max}, E_{\max}]$ , tolerancija je  $T = 2E_{\max}$  i indeks sposobnosti mjerenja je:

$$C_m = \frac{2E_{\max}}{2U} = \frac{E_{\max}}{U} \quad (25)$$

U ovom izrazu,  $U$  je proširena nesigurnost za faktor pokrivanja  $k = 2$  povezanim s mjerenjem pogreške naznake mjernog instrumenta. [1]

## 6.7. Odnos indeksa sposobnosti mjerenja i vjerojatnosti sukladnosti

Za normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti, izraz 23 daje vjerojatnost sukladnosti  $p_c$  u odnosima pojedinog para granica tolerancija ( $T_L, T_U$ ) i pojedinog rezultata mjerenja zaključenog s ( $y, u$ ). Uzimajući da je  $y = \eta_m$  i  $u = u_m$ , ovaj izraz se može zapisati u obliku prikladnom za općenite probleme mjerenja tako da se definira veličina:

$$\tilde{y} = \frac{\eta_m - T_L}{T} \quad (26)$$

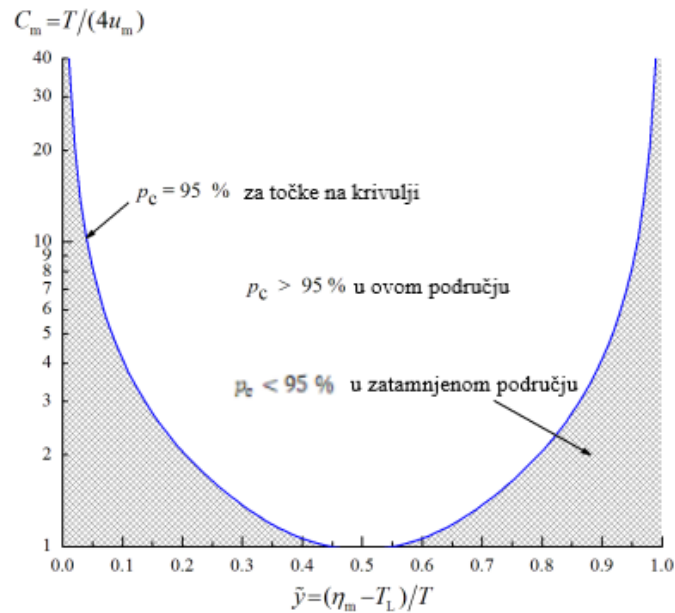
Za procijenjeni  $\eta_m$  u tolerancijskom polju,  $\tilde{y}$  leži u području  $0 \leq \tilde{y} \leq 1$ . [1]

Za normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti nakon mjerenja  $\varphi(\eta; \eta_m; u_m^2)$ , izraz 23, koristeći izraze 24 i 25, može zapisati kao:

$$p_c = \Phi[4C_m(1 - \tilde{y})] - \Phi(-4C_m\tilde{y}) = p_c(\tilde{y}, C_m) \quad (27)$$

tako da je  $p_c$  u potpunosti određen s dvije veličine  $\tilde{y}$  i  $C_m$ . [1]

Često je slučaj da standardna nesigurnost  $u_m$  povezana s procjenom  $\eta_m$  ima fiksnu vrijednost koja ovisi o konstrukciji mjernog sustava, ali je neovisna o  $\eta_m$ . Npr. niz uzoraka vode se može kontrolirati da se odredi koncentracija otopljene žive za svaki uzorak koristeći mjerni postupak koji daje različite procjene, iako svaki ima istu povezanost s mjernom nesigurnosti  $u_m$ . U takvom slučaju indeks sposobnosti mjerenja  $C_m = T/4u_m$  je ustaljen i pitanje je da li sukladnost izmjenog svojstva s prihvatljivom vjerojatnošću može biti odlučena bazirano na procijenjeni  $\eta_m$ , koristeći se izrazima 26 i 27 s tim da je  $C_m$  ustaljen. [1]



**Slika 7. Odnos indeksa sposobnosti mjerenja i vjerojatnosti sukladnosti [1]**

Na slici 7 je prikazan graf koji prikazuje odnos indeksa sposobnosti mjerenja  $C_m = T/(4u_m)$  i  $\tilde{y} = (\eta_m - T_L)/T$ . Graf prikazuje mjesto od konstante 95 % vjerojatnosti sukladnosti  $p_c$ . Krivulja razdvaja područja sukladnosti i nesukladnosti na razini od 95 % sigurnosti. Raspodjela nakon mjerenja za mjerenu veličinu  $Y$  se uzima da je normalna funkcija gustoće vjerojatnosti  $\varphi(\eta; \eta_m; u_m^2)$ . [1]

Postoji beskonačan broj parova  $(\tilde{y}, C_m)$  kojima se dobiva zadana vjerojatnost sukladnosti  $p_c$  pomoću izraza 27. Slika 7 prikazuje odnos  $C_m$  i  $\tilde{y}$  niz krivulje s konstantnom 95 % vjerojatnošću sukladnosti za procijenjeni  $\eta_m$  unutar tolerancijskog polja  $0 \leq \tilde{y} \leq 1$ . [1]

Vodoravna os na slici 7 predstavlja  $C_m = 1$  ili  $u_m = T/4$ . Za ovu relativno veliku standardnu nesigurnost, može se vidjeti da je  $p_c \geq 95\%$  samo za  $0,45 \leq \tilde{y} \leq 0,55$ . Ako je zahtijevano da mjereno svojstvo bude sukladno zahtjevu s barem 95 % razine sigurnosti, prihvatljiva procjena  $\eta_m$  bi morala ležati u središtu približno 10 % tolerancijskog polja. [1]

## 7. PODRUČJA PRIHVAĆANJA

### 7.1. Granice prihvatanja

Odluka o prihvatanju predmeta od interesa kao sukladnog ili odbijanje kao nesukladnog prema zadanom zahtjevu je temeljena na izmjerenoj vrijednosti  $\eta_m$  svojstva predmeta od interesa u odnosu s pravilom odluke koje određuje ulogu mjerne nesigurnosti u oblikovanju kriterija prihvatanja. Područje izmjerenih vrijednosti svojstva predmeta od interesa koje rezultira prihvatanjem predmeta od interesa, naziva se područje prihvatanja i definirano je s jednom ili dvije granice prihvatanja. [1]

Granice prihvatanja i pripadajuća pravila odluke izabiru se na takav način da se uklone neželjene posljedice pogrešno donesenih odluka. Postoji nekoliko široko primjenjivih pravila odluke koja su jednostavna za izvršiti. Mogu se primijeniti kada je poznavanje svojstva od interesa dobiveno u pogledu najbolje procjene i odgovarajućeg područja pokrivanja. [1]

### 7.2. Pravilo odluke temeljeno na jednostavnom prihvatanju

Važno i široko korišteno pravilo odluke poznato je kao jednostavno prihvatanje ili podijeljen rizik. Kod takvog pravila, proizvođač i korisnik (potrošač) rezultata mjerenja se slažu, implicitno ili eksplicitno, o prihvatanju predmeta od interesa kao sukladan ako ima svojstvo čija je izmjerena vrijednost u tolerancijskom polju. Kao što alternativni izraz 'podijeljeni rizik' nagoviješta, s pravilom odluke jednostavnog prihvatanja proizvođač i korisnik dijele posljedice pogrešno donesenih odluka. [1]

U praksi, da bi se šanse za pogrešne odluke zadržale na razinama koje su prihvatljive i proizvođaču i korisniku, obično se postavlja zahtjev da mjerna nesigurnost bude razmatrana i prosuđena tako da bude prihvatljiva za namijenjenu svrhu. [1]

Jedan pristup takvom razmatranju zahtijeva za zadanu procjenu mjerne veličine, koja ima povezanu proširenu nesigurnost  $U$ , za faktor pokrivanja  $k = 2$ , mora zadovoljavati izraz  $U \leq U_{\max}$ , gdje  $U_{\max}$  predstavlja zajednički prihvaćenu maksimalnu prihvaćenu proširenu nesigurnost. Takav pristup je prikazan u idućem primjeru. [1]

Primjer je iz zakonskog mjeriteljstva gdje se pravilo odluke temeljeno na jednostavnom prihvaćanju koristi kod provjere mjernih instrumenata. U obzir se uzima takav mjerni uređaj kojemu je zahtijevano da ima pogrešku prikaza u području  $[-E_{\max}, E_{\max}]$ . Uređaj se prihvaća kao sukladan specifičnom zahtjevu ako zadovoljava iduće kriterije:

- a) kod mjerenja kalibriranog standarda, najbolja procjena  $e$  pogreške prikaza mjernog uređaja  $E$  zadovoljava  $|e| \leq E_{\max}$  i
- b) proširena nesigurnost za faktor pokrivanja  $k = 2$  povezano s procjenom  $e$  zadovoljava  $U \leq U_{\max} = E_{\max}/3$ . [1]

U smislu indeksa sposobnosti mjerenja, kriterij b) je ekvivalentan zahtjevu da je  $C_m \geq 3$ .

Sljedeće praktično prihvatljivo pravilo odluke prati metodu koja se naziva metoda preciznosti u vodiču IEC 115. Kod ovog pristupa, koristi se dobro naznačena ispitna metoda i izvori nesigurnosti su minimizirani s:

- a) korištenjem mjernih instrumenata koji imaju maksimalnu dozvoljenu pogrešku unutar određenih područja
- b) održavanjem okolišnih uvjeta, kao što su temperatura i relativna vlažnost, unutar određenih područja
- c) dobro dokumentiranom kontrolom laboratorijskih postupaka
- d) dobro dokumentiranim kompetencijama radnika koji se bave mjerenjima [1]

Kontroliranjem izvora varijabilnosti unutar propisanih granica, mjerna nesigurnost povezana s najboljom procjenom mjerene veličine smatra se zanemarivom, nije eksplicitno procijenjena i ne igra ulogu u prihvaćanju ili odbijanju odluke. Pristup metode preciznosti iz vodiča IEC 115 oblikuje trenutnu praksu elektrotehničkih ispitnih laboratorija u korištenju najnovije mjerne opreme i rutina, koje su dobro utvrđene testne metode. [1]

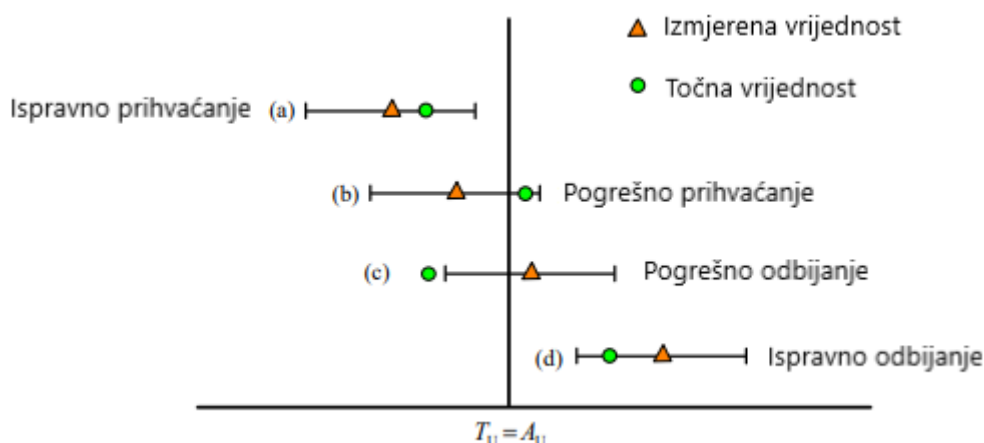
Ovisno o relativnoj širini tolerancijskog polja i područja pokrivanja, pravilo odluke jednostavnog prihvaćanja ili slično pravilo odluke, može često podržati kvalitetne predmete od interesa koji se mjere i kalibracije koje se rade kao podrška ocjene sukladnosti. [1]

### 7.3. Pravila odluke temeljena na zaštitnim područjima

Prihvatanje ili odbijanje predmeta kada je izmjerena vrijednost svojstva od interesa blizu granica tolerancije može rezultirati pogrešnom odlukom i dovesti do nepoželjnih posljedica. Takve pogrešne odluke se obično pojavljuju kao dva tipa u slučaju jednostruke gornje granice tolerancije, što je vidljivo na slici 8 u slučajevima (b) i (c). [1]

S pravilom odluke temeljenim na jednostavnom prihvatanju i čestim slučajem simetrične i jedinstvene funkcije gustoće vjerojatnosti (kao što je normalna raspodjela) za mjerenu veličinu, vjerojatnost prihvatanja nesukladnog predmeta od interesa (slika 8, slučaj (b)) ili odbijanja sukladnog predmeta od interesa (slika 8, slučaj (c)) može biti i do 50 %. To će se dogoditi ako izmjerena vrijednost svojstva leži jako blizu granici tolerancije. U takvom slučaju otprilike 50 % funkcije gustoće vjerojatnosti za mjerenu veličinu bi ležalo na jednoj strani granice pa bi prihvaćanjem ili odbijanjem predmeta od interesa bilo 50 % šanse da je donesena pogrešna odluka. [1]

Bilo koja od tih vjerojatnosti može biti smanjena, ali pod cijenom povećanja druge vjerojatnosti. Vjerojatnost se može smanjiti odabirom granica prihvatanja koje su odmaknute od granica tolerancije. Takva strategija donošenja odluke o sukladnosti se naziva *guardbanding*, što bi značilo uvođenje zaštitnog područja. [1]



**Slika 8. Pravilo odluke jednostavnog prihvatanja u blizini gornje granice tolerancije  $T_U$  [1]**

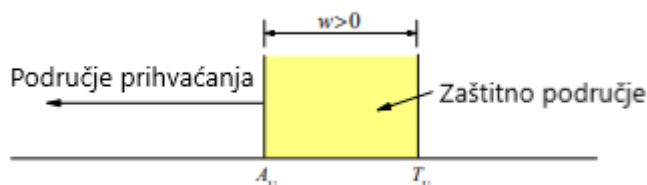
Na slici 8 prikazano je pravilo odluke jednostavnog prihvatanja u blizini gornje tolerancije  $T_U$  s četiri 95 % područja pokrivanja. Za takvo pravilo odluke, granica prihvatanja  $A_U$  se podudara



s granicom tolerancije. Odluke o prihvatanju ili odbijanju ispitanih predmeta od interesa se donosi na temelju izmjerenih vrijednosti (trokuti), dok se stvarne točne vrijednosti (krugovi) ne mogu znati. Slučajevi (b) i (c) vode do pogrešnih odluka koje se nazivaju pogrešno prihvaćanje i pogrešno odbijanje. U slučaju (c) točna vrijednost mjerene veličine leži (ne znajući) izvan 95 % područja pokrivanja. [1]

### Zaštićeno prihvaćanje

Rizik prihvaćanja nesukladnog predmeta od interesa se može smanjiti na način da se granica prihvaćanja  $A_U$  smjesti unutar tolerancijskog polja, kao što je prikazano na slici 9. Područje definirano s  $T_U$  i  $A_U$  naziva se zaštitno područje, a proizašlo pravilo odluke se naziva zaštićeno prihvaćanje. [1]



Slika 9. Pravilo odluke temeljeno na zaštićenom prihvaćanju [1]

Na slici 9 je prikazano pravilo odluke temeljeno na zaštićenom prihvaćanju. Gornja granica prihvaćanja  $A_U$ , koja je unutar gornje granice tolerancije  $T_U$ , definira područje prihvaćanja koje smanjuje vjerojatnost pogrešnog prihvaćanja nesukladnog predmeta od interesa. Po konvenciji, duljina parametra  $\omega$ , koji je povezan s zaštitnim područjem prihvaćanja, smatra se pozitivnim:  $\omega = T_U - A_U > 0$ . [1]

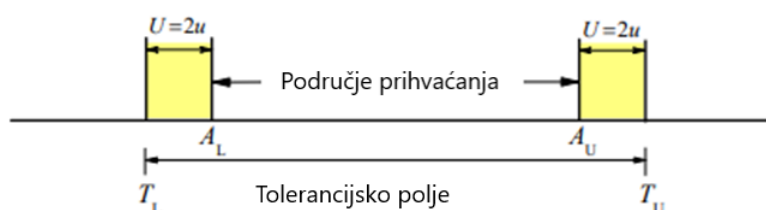
Kod mnogih slučajeva, duljina parametra  $\omega$  se uzima da je višekratnik proširene nesigurnosti za faktor pokrivanja  $k = 2$ ;  $U = 2u$ .  $\rightarrow \omega = rU$

Višekratnik  $r$  je izabran da osigura minimalnu vjerojatnost sukladnosti za predmet od interesa koji je prihvaćen. Čest izbor je  $r = 1$ , a u tom slučaju je  $\omega = U$ . [1]

U normi ISO 14253-1 je uspostavljeno zadano pravilo odluke zaštićenog prihvaćanja za prikazivanje sukladnosti s određenim zahtjevom. U slučaju dvostranog tolerancijskog polja,

gornja i donja granica prihvaćanja su udaljene od odgovarajućih granica tolerancije za zaštitno područje kojem je parametar duljine jednak  $\omega = U = 2u$ . [13]

Cilj zaštitnih područja, s  $\omega = 2u$ , je da za svaku vrijednost mjerene veličine koja leži unutar područja prihvaćanja osigura da je vjerojatnost prihvaćanja nesukladnog predmeta od interesa najviše 2,3 %. Pretpostavlja se normalna funkcija gustoće vjerojatnosti za mjerenu veličinu. Za izmjerene vrijednosti dalje od granica prihvaćanja, vjerojatnost pogrešnog prihvaćanja će biti manja od maksimalne. [13]



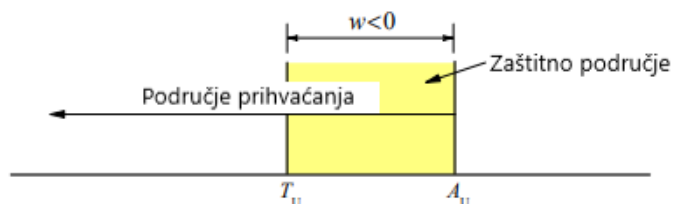
Slika 10. Dvostrano područje prihvaćanja [15]

Na slici 10 prikazano je dvostrano područje prihvaćanja koje je napravljeno smanjivanjem tolerancijskog polja na svakoj strani za  $k = 2$  proširenu nesigurnost  $U = 2u$ . To je zadano pravilo odluke koje se koristi u normi ISO 14253-1. [13]

### Zaštićeno odbijanje

Granica prihvaćanja izvan tolerancijskog polja može se izabrati tako da poveća vjerojatnost da je odbijen predmet od interesa stvarno nesukladan. Takvo pravilo odluke zaštićenog odbijanja se često koristi kada se želi čisti dokaz da je granica premašena prije poduzimanja negativnih radnji. [1]

Duljina parametra  $\omega$  za zaštićeno odbijanje zaštitnog područja je  $\omega = T_U - A_U < 0$ . [1]



Slika 11. Pravilo odluke temeljeno na zaštićenom odbijanju [1]

Na slici 11 prikazano je pravilo odluke temeljeno na zaštićenom odbijanju. Gornja granica prihvaćanja  $A_U$ , koja je izvan tolerancijskog polja  $T_U$ , definira područje prihvaćanja koje smanjuje vjerojatnost pogrešnog odbijanja sukladnog predmeta od interesa. [1]

### **PRIMJER 1 – mjerenje brzine**

Kod mjerenja brzine na cestama, brzina vozila se mjeri tako da policija koristi uređaje kao što su radari i laserski pištolji. Odluka o davanju kazne se mora donijeti s visokom sigurnošću da je ograničenje brzine stvarno prekoračeno.

Za slučajeve relativnih standardnih nesigurnosti  $u(v)/v$  od 1 %, 2 %, 3 %, 4 % i 5 % potrebno je za ograničenje brzine od  $v_0 = 130$  km/h odrediti prag brzine  $v_{\max}$  da je za izmjerenu brzinu  $v \geq v_{\max}$  vjerojatnost da je  $v \geq v_0$  99 %, 99,9 % i 99,9996 %.

Ovaj matematički problem jednak je izračunu vjerojatnosti sukladnosti za jednostrano tolerancijsko polje. Iz tablice 1 se vide vrijednosti  $z$  za određenu vjerojatnost, a  $v_{\max}$  se izračunava pomoću idućeg izraza:

$$v_{\max} = \frac{v_0}{1 - \frac{u(v)}{v} * z}$$

**Tablica 2. Ovisnost  $v_{\max}$  o relativnoj standardnoj nesigurnosti i vjerojatnosti  $v \geq v_0$**

|                  | $\frac{u(v)}{v} = 1\%$ | $\frac{u(v)}{v} = 2\%$ | $\frac{u(v)}{v} = 3\%$ | $\frac{u(v)}{v} = 4\%$ | $\frac{u(v)}{v} = 5\%$ |
|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $p_c = 0,99$     | ≈ 133 km/h             | ≈ 136 km/h             | ≈ 140 km/h             | ≈ 143 km/h             | ≈ 147 km/h             |
| $p_c = 0,999$    | ≈ 134 km/h             | ≈ 139 km/h             | ≈ 143 km/h             | ≈ 148 km/h             | ≈ 154 km/h             |
| $p_c = 0,999996$ | ≈ 136 km/h             | ≈ 143 km/h             | ≈ 150 km/h             | ≈ 158 km/h             | ≈ 167 km/h             |

U tablici 2 su vidljivi rezultati brzine  $v_{\max}$  ovisno o parametrima relativne standardne nesigurnosti i vjerojatnosti da je  $v \geq v_0$ . Interval  $v_0 \leq v \leq v_{\max}$  je zaštitno područje koje osigurava određenu vjerojatnost da je ograničenje brzine stvarno prekoračeno za izmjerenu brzinu veću ili jednaku  $v_{\max}$ . Može se uočiti da vrijednost  $v_{\max}$  raste s povećanjem relativne standardne nesigurnosti i povećanjem vjerojatnosti da je  $v \geq v_0$ . Također je vidljivo da je utjecaj vjerojatnosti na vrijednost  $v_{\max}$  izraženiji kod veće relativne standardne nesigurnosti.

## 8. RIZICI

### 8.1. Upravljanje rizicima

Rizik je stanje u kojemu odluka ima više od jednog mogućeg ishoda pri čemu se vjerojatnost svakoga mogućeg ishoda može ocijeniti iz ranijeg iskustva ili iz studija tržišta. Stanje koje za ishod nudi više od jednog mogućeg ishoda jest stanje neizvjesnosti; povezano s time rizik se definira kao učinak neizvjesnosti na ciljeve, pri čemu učinak može biti pozitivna ili negativna. [19]

Pojava rizika povezuje se sa stanjem nepotpunog razumijevanja određenog problema koje nastaje uslijed manjka informacija o određenom problemu ili nestabilnosti strukture ulaznih varijabli [20]. Rizik se sastoji od 3 osnovna elementa: percepcije o tome može li se neki štetan događaj stvarno dogoditi, vjerojatnosti da se taj događaj dogodi te posljedice koju taj događaj može stvoriti [21]. Upravljanje rizicima je proces kojim se identificiraju, procjenjuju i obrađuju rizici pomoću konzistentnih i ponovljivih postupaka na osnovu čega se pravi izvještaj te vrši nadgledanje rizičnih aktivnosti pri čemu se važnost daje međusobnoj komunikaciji i konzultacijama između svih odjela. Procjena rizika nije zadaća samo uprave već svih razina organizacije. Upravljanje rizicima ne nastoji eliminirati rizike, već stvoriti okruženje u kojem se mogu donijeti optimalne poslovne odluke uzimajući u obzir identificirane rizike i posljedice koje oni mogu izazvati [19]. Jedan od glavnih dijelova procesa upravljanja rizicima jest procjena rizika čija zadaća podrazumijeva procjenu utjecaja potencijalno donesenih odluka na određene ciljeve te analiziranje rizika kao posljedice događaja kao i vjerojatnost njegova pojavljivanja prije samog donošenja određene odluke [22].

### 8.2. Metode procjene rizika

Obzirom na raznolikost zahtjeva postoji velik broj metoda za procjenu rizika. Norma za upravljanje rizicima *ISO 3100:2009 – Risk management – Principles and guidelines* dijeli proces procjene rizika na tri podkoraka: identifikaciju, analizu te evaluaciju rizika. Sukladno tome, metode procjene rizika dijele se na metode za identifikaciju, metode za analizu te metode za evaluaciju rizika. Identifikacija rizika podrazumijeva pronalazak, prepoznavanje i opisivanje rizika, analiza rizika podrazumijeva shvaćanje prirode rizika kao i određivanje razine rizika, dok evaluacija rizika jest proces usporedbe rezultata dobivenih analizom rizika s ciljem određivanja utjecaja rizika u promatranom procesu. [23]

Svrha provođenja procjene rizika jest dolazak do informacija, provođenje analize donošenja određene odluke koja definira ponašanje te odabir najboljeg rješenja, tj. najbolje odluke za određeni rizik [19,22].

Metode za procjenu rizika se obzirom na smjernice i načine procjene rizika, kao i uspješnosti izvedbe, dijele prema primjenjivosti u pojedinim fazama procesa procjene rizika. Tako su pojedine metode primjenjive u početnim fazama procjene, dakle u fazi identifikacije rizika, dok se njihova primjena u drugim fazama procjene rizika ne preporuča [23]. Sukladno normi *ISO 31010 – Risk management – Risk assesment techniques* [22] to su metode *Brainstorming*, *Structured or semi-structured interiews*, *Delphi*, *Check-list* i *Primary hazard analysis*. Suprotno njima, metoda *Monte Carlo Simulation* se pak strogo preporuča u zadnjem koraku procesa procjene rizika, evaluaciji rizika, dok se njezina primjena u koracima koji prethode uopće ne preporuča. Također, pojedine metode za procjenu rizika se preporučaju u svim koracima procjene rizika, riječ je o metodama: *Environmental risk assessment*, *Structure << What if? >>* (*SWIFT*), *Failure mode effect analysis (FMEA)* i *Reliability centred maintenance*. [23]

### 8.3. Općenito

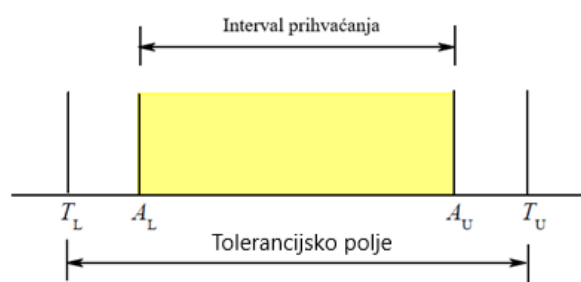
Kod ocjene sukladnosti koja koristi binarno pravilo odluke, mjeri se svojstvo predmeta od interesa i predmet od interesa se prihvaća kao sukladan ako izmjerena veličina svojstva leži u definiranom području prihvaćanja. Izmjerena vrijednost izvan područja prihvaćanja vodi do odbijanja predmeta od interesa kao nesukladan. Na slici 12 vide se područja od interesa, odnosno tolerancijsko polje (sukladnih vrijednosti) i područje prihvaćanja (dopuštenih izmjerenih veličina). [1]

Korištenje područja sigurnosti pruža način da se ograniči vjerojatnost donošenja pogrešnih odluka o sukladnosti temeljenih na informacijama dobivenih mjerenjem, a to je sve rezimirano područjem pokrivanja. U trenutnoj točki bavi se preciznijom procjenom takvih vjerojatnosti za proizvodne procese. Procijenjene vjerojatnosti ovise o dva faktora, a to su proizvodni proces i mjerni sustav. [1]

Ako je mjerni sustav savršeno precizan, sve odluke o sukladnosti bile bi točne i svi rizici bili bi svedeni na nulu. Povećanje mjerne nesigurnosti znači povećanje vjerojatnosti donošenja

pogrešnih odluka, a vjerojatnost je najveća kad su izmjerene vrijednosti blizu granica tolerancija. [1]

Rizik također ovisi o prirodi proizvodnog procesa. Ako proces rijetko proizvodi predmet čije svojstvo od interesa je blizu granica tolerancija, manje je prilike za donošenje pogrešnih odluka. Suprotno tome, ako proizvodni proces proizvodi proizvode kojima su svojstva blizu tolerancijskih granica, pojavljuju se nesigurnosti povezane s mjerenjima. Ostatak ove točke pokazuje kako se mogu procijeniti doprinosi oba faktora. [1]



**Slika 12. Binarna ocjena sukladnosti [1]**

Na slici 12 je prikazan primjer binarne ocjene sukladnosti čije odluke su temeljene na izmjerenim vrijednostima. Točna vrijednost izmjerenog svojstva (mjerene veličine) predmeta od interesa je određena da leži u tolerancijskom polju koje je definirano gornjom i donjom tolerancijskom granicom ( $T_L, T_U$ ). Predmet se prihvaća kao sukladan ako izmjerena vrijednost svojstva leži u intervalu prihvatanja koje je definirano svojim granicama ( $A_L, A_U$ ), a odbija se kao nesukladan ako je suprotno. [1]

#### 8.4. Funkcije gustoće vjerojatnosti za proizvodni proces i mjerni sustav

U obzir se uzima proces koji proizvodi niz predmeta, a svaki predmet ima mjerljivo svojstvo  $Y$  s mogućim vrijednostima  $\eta$ . Proces može biti strojna proizvodnja otpornika s nazivnim otporom od 10 k $\Omega$  ili proces uzimanja uzoraka vode iz oceana koja sadrži otoplenu živu pomoću bočica. Za predmet od interesa koji je nasumično izabran iz procesa, poznavanje svojstva  $Y$  prije mjerenja dobiva se funkcijom gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta)$ . Za funkciju gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta)$  se može reći da karakterizira proizvodni proces i ponekad se naziva gustoća vjerojatnosti

procesa. Oblik  $g_0(\eta)$  se obično dodjeljuje temeljeno na poznavanju dobivenom mjerenjem svojstva od interesa u uzorku proizvedenih predmeta. [1]

Ocjena sukladnosti proizvedenog predmeta se realizira mjerenjem svojstva od interesa. Izlaz mjernog sustava je veličina koja se smatra kao promatrana slučajna varijabla  $Y_m$  čije moguće vrijednosti  $\eta_m$ , pretpostavljajući znanu vrijednost ulaza  $Y = \eta$ , su dobivene funkcijom gustoće vjerojatnosti  $h(\eta_m|\eta)$ . Oblik  $h(\eta_m|\eta)$  se dobiva na temelju konstrukcije mjernog sustava, informacija dobivenih kalibracijama i poznavanjem relevantnih utjecajnih veličina kao što su okolišni parametri i svojstva materijala. [1]

### 8.5. Mogući ishodi kontrolnog mjerenja s binarnim pravilom odluke

Neka  $C$  i  $\tilde{C}$  predstavljaju područja sukladnih i nesukladnih vrijednosti  $Y$  i neka  $A$  i  $\tilde{A}$  predstavljaju područja prihvatljivih i neprihvatljivih vrijednosti  $Y_m$ . Npr. na slici 12  $C$  odgovara vrijednostima  $Y$  u intervalu  $T_L \leq Y \leq T_U$ , a  $A$  odgovara vrijednostima  $Y_m$  u intervalu  $A_L \leq Y_m \leq A_U$ . [1]

Kod binarnog pravila odluke postoje četiri moguća ishoda ispitivanja ocjene sukladnosti koje daje izmjerena vrijednost veličine  $\eta_m$ . [1]

Prvi mogući ishod je opravdano prihvaćanje. To znači da je predmet od interesa prihvaćen ( $Y_m = \eta_m \in A$ ) i sukladan zahtjevima ( $Y \in C$ ). Ovo je željeni ishod ispitivanja ocjene sukladnosti, koji vodi do prihvaćanja sukladnog predmeta. [1]

Drugi mogući ishod je pogrešno prihvaćanje. Kod ovog ishoda predmet je prihvaćen ( $Y_m = \eta_m \in A$ ), ali nije sukladan zahtjevima ( $Y \in \tilde{C}$ ). Ovo je pogrešna odluka čija se vjerojatnost naziva potrošačevim rizikom, zbog toga što cijenu povezanu s takvom pogreškom obično plaća potrošač ili korisnik koji prihvaća predmet koji odgovara svojoj svrsi i ponaša se prema tome. Za konkretan izmjereni predmet koji je prihvaćen kao sukladan s izmjerenom vrijednosti  $Y_m = \eta_m \in A$ , vjerojatnost pogrešnog prihvaćanja se naziva specifičnim potrošačevim rizikom, a označava se s  $R_C^*$ . Iz izraza 14 za vjerojatnost sukladnosti se može vidjeti da se  $R_C^*$  dobiva iz  $R_C^* = 1 - p_c$  za izmjerenu vrijednost  $\eta_m$  u području prihvaćanja. Za proizvod koji je nasumično izabran iz proizvodnog procesa, vjerojatnost da će biti pogrešno prihvaćen nakon mjerenja

naziva se globalnim potrošačevim rizikom, a označava se s  $R_C$ . Izračun  $R_C$  će biti opisan kasnije u poglavlju. [1]

Treći mogući ishod je opravdano odbijanje. Predmet od interesa je odbijen ( $Y_m = \eta_m \in \tilde{A}$ ) i nesukladan je zahtjevima ( $Y \in \tilde{C}$ ). To je željeni ishod ocjene sukladnosti koji vodi do odbijanja nesukladnog predmeta. [1]

Posljednji mogući ishod je pogrešno odbijanje. Predmet je odbijen ( $Y_m = \eta_m \in \tilde{A}$ ), ali je u stvari sukladan zahtjevu ( $Y \in C$ ). To je još jedna pogrešna odluka čija se vjerojatnost naziva proizvođačevim rizikom. Naziva se tako jer cijena povezana s takvom odlukom je obično plaćena od strane proizvođača koji ne može prodati proizvod koji je pao na ispitivanju sukladnosti. Za konkretan izmjereni predmet koji je odbijen kao nesukladan s izmjerenom vrijednosti  $Y_m = \eta_m \in \tilde{A}$ , vjerojatnost pogrešne odluke se naziva specifičnim proizvođačevim rizikom. Ta vjerojatnost se označava s  $R_p^*$ . Iz izraza 14 za vjerojatnost sukladnosti može se vidjeti da je  $R_p^*$  dobiveno iz  $R_p^* = p_c$  za izmjerenu vrijednost  $\eta_m$  izvan područja prihvaćanja. Za proizvod koji je odabran nasumično iz proizvodnog procesa, vjerojatnost da će biti pogrešno odbijen nakon mjerenja naziva se globalnim proizvođačevim rizikom i označava se s  $R_p$ . Izračun  $R_p$  će se obraditi kasnije u poglavlju. [1]

## 8.6. Povezujuća funkcija gustoće vjerojatnosti za $Y$ i $Y_m$

Kao što je navedeno u prošlom podnaslovu, specifični potrošačev rizik i specifični proizvođačev rizik  $R_C^*$  i  $R_p^*$  su povezani s vjerojatnošću sukladnosti za konkretan izmjereni predmet od interesa za dane rezultate mjerenja. Ako je vrijednost svojstva  $Y$  izvan tolerancijskog polja i izmjerena vrijednost  $Y_m$  je unutar intervala prihvaćanja, tada je realiziran potrošačev rizik. Vjerojatnost da će se dogoditi ta dva događaja, odnosno globalni proizvođačev rizik, je definirana zajedničkom raspodjelom vjerojatnosti koja ovisi o proizvodnom procesu i mjernom sustavu. [1]

Zajednička gustoća vjerojatnosti se može pisati kao produkt gustoća koje su već poznate. Odnosno, vjerojatnost da je vrijednost mjerene veličine  $Y$  izvan tolerancijskog polja i izmjerena vrijednost  $Y_m$  unutar područja prihvaćanja je dana vjerojatnošću da proizvodni proces proizvodi predmet s točnom vrijednošću  $Y$  izvan tolerancijskog polja pomnoženo s vjerojatnošću da



mjerni sustav proizvodi izmjerenu vrijednost  $Y_m$  unutar područja prihvaćanja, a mjerena veličina  $Y$  je izvan tolerancijskog polja. [1]

Slično, globalni proizvođačev rizik je definiran u uvjetima iste zajedničke raspodjele vjerojatnosti. Ako se tolerancijsko polje, proizvodni proces i mjerni sustav smatraju fiksima, globalni potrošačev rizik i globalni proizvođačev rizik se određuju pomoću granica prihvaćanja. Granice prihvaćanja se stoga mogu postaviti da postignu prihvatljivi balans između dvije vrste rizika. Općenito, nije moguće postaviti granice prihvaćanja tako da minimiziraju i potrošačev i proizvođačev rizik istovremeno, smanjivanje jednog će povećati drugi. [1]

Za dani proizvodni proces i mjerni sustav, poznavanje mogućih ishoda ispitivanja ocjene sukladnosti nasumično izabranog predmeta je opisano zajedničkom funkcijom gustoće vjerojatnosti [1]. Za tako nasumično izabran predmet, vjerojatnost da vrijednost mjerene veličine  $Y$  leži u intervalu  $\eta \leq Y \leq \eta + d\eta$  i da bi mjerenje  $Y$  dalo izmjerenu vrijednost  $Y_m$  u intervalu  $\eta_m \leq Y_m \leq \eta_m + d\eta_m$  je dana izrazom:

$$\Pr(\eta \leq Y \leq \eta + d\eta \text{ i } \eta_m \leq Y_m \leq \eta_m + d\eta_m) = f(\eta, \eta_m) d\eta d\eta_m \quad (28)$$

gdje je  $f(\eta, \eta_m)$  zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti za  $Y$  i  $Y_m$ . [1]

Koristeći pravilo množenja teorije vjerojatnosti, zajednička gustoća  $f(\eta, \eta_m)$  se može razložiti na dva načina:

$$f(\eta, \eta_m) = g_0(\eta) h(\eta_m | \eta) \quad (29a)$$

$$f(\eta, \eta_m) = h_0(\eta_m) g(\eta | \eta_m) \quad (29b)$$

Dvije funkcije gustoće vjerojatnosti s desne strane jednakosti u izrazu 29a su dvije gustoće vjerojatnosti opisane u točki 7.2. S danim oblicima tih funkcija gustoće vjerojatnosti, dvije gustoće vjerojatnosti s desne strane jednakosti u izrazu 29b se mogu izračunati. [1]

## 8.7. Izračun globalnih rizika

U ovom poglavlju prikazat će se formula koja je razvijena za izračunavanje globalnih rizika pogrešnih odluka. Takvi izračuni se tradicionalno koriste koristeći raspodjelu izmjerene frekvencije različitih ishoda kada se mjeri veliki uzorak nominalno identičnih predmeta. Globalni potrošačev rizik, u takvom pristupu, je jednak omjeru predmeta u izmjerenom uzorku koji su prihvaćeni za upotrebu, ali nisu sukladni zadanom zahtjevu. Takva nesukladnost, za konkretan predmet, se mora prikazati nakon činjenice odvojenim mjerenjem s nesigurnošću puno manjom nego što je nesigurnost mjernog sustava korištenog u ocjeni sukladnosti. [1]

Globalni rizici koji se spominju u daljnjem tekstu su radije izračunati koristeći raspodjelu vjerojatnosti nego raspodjelu frekvencija, zbog toga što nije potrebno uzimati u obzir cjelinu izmjerenih predmeta koji zapravo mogu i ne postojati. Brojčano, izračunate vjerojatnosti će se u prosjeku uvijek slagati s izmjerenim frekvencijama. Zbog toga se granice prihvaćanja mogu izabrati da prinosu prihvatljivim djelićima pogrešno prihvaćenih ili odbijenih predmeta u ocjeni sukladnosti predmeta u uzorku. [1]

Za danu zajedničku funkciju gustoće vjerojatnosti iz izraza 29a i dvije gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta)$  i  $h(\eta_m|\eta)$ , vjerojatnosti svakog od četiri moguća ishoda opisana iznad se mogu izračunati. Te vjerojatnosti su jednostavno dotični volumeni ispod zajedničke gustoće vjerojatnosti  $f(\eta, \eta_m)$  integrirano preko četiri područja koja opisuju sve moguće ishode. [1]

Posebno su zanimljivi globalni potrošačev rizik i globalni proizvođačev rizik koji se izračunavaju prema sljedećim formulama. [1]

Za izmjerenu vrijednost u području prihvaćanja i vrijednosti  $Y$  izvan tolerancijskog polja, globalni potrošačev rizik je jednak:

$$R_C = \int_{\bar{C}} \int_A g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta \quad (30)$$

Za izmjerenu vrijednost izvan područja prihvaćanja i vrijednosti  $Y$  unutar tolerancijskog polja, globalni proizvođačev rizik je jednak:

$$R_P = \int_C \int_{\bar{A}} g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta \quad (31)$$

Izrazi 30 i 31 su generalne formule za izračun globalnog potrošačevog i proizvođačevog rizika. Ovisno o konkretnim oblicima funkcija gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta)$  i  $h(\eta_m|\eta)$ , eksplicitna procjena  $R_C$  i  $R_P$  se može izvršiti numerički. [1]

### ***Poseban slučaj: Binarno pravilo odluke***

Za konkretnu binarnu ocjenu sukladnosti prikazanu na slici 12, formule 30 i 31 prelaze u:

$$R_C = \left( \int_{-\infty}^{T_L} + \int_{T_U}^{\infty} \right) \int_{A_L}^{A_U} g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta \quad (32)$$

i:

$$R_P = \left( \int_{-\infty}^{A_L} + \int_{A_U}^{\infty} \right) \int_{T_L}^{T_U} g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta d\eta_m \quad (33)$$

Korištenje izraza 32 i 33 u slučaju kada je zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti (28) produkt normalne raspodjele je prikazano u primjeru ispod. [1]

### **PRIMJER 2– proizvodnja prstena**

Proizvode se prsteni nazivnog promjera 70 mm u serijama od  $N = 10000$  komada. Promjer prstena se treba nalaziti u tolerancijskom polju koje je definirano granicama  $T_L = 69,980$  mm i  $T_U = 70,020$  mm. Na uzorku od 100 izmjerenih prstena utvrđeno je procijenjeno standardno odstupanje u iznosu od  $s = 12$   $\mu\text{m}$ .

Temeljeno na toj informaciji, normalna funkcija gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta) = \varphi(\eta; y_0; u_0^2)$  je dodijeljena da modelira proizvodni proces s  $y_0 = 70$  mm i  $u_0 = s = 0,012$  mm.

Vjerojatnost sukladnosti iznosi:

$$p_c = \int_{T_L}^{T_U} g_0(\eta) d\eta = \int_{69,980}^{70,020} \varphi(\eta; 70; 0,012^2) d\eta \approx 0,90 = 90 \% \quad (34)$$

Može se zaključiti da 10 % prstena neće ispunjavati tražene specifikacije što je iz ekonomskih razloga neprihvatljivo. Kako bi se povećala sposobnost procesa izrade prstena tj. smanjila varijacija procesa potrebna su dodatna ulaganja u nove strojeve. S obzirom da se radi o znatnim ulaganjima odlučeno je da se proizvodnja nastavi korištenjem postojećeg proizvodnog sustava te da se uvede kontrolni proces koji će detektirati i otkloniti nesukladne prstene.

Da bi se smanjila vjerojatnost isporuke prstena koji ne zadovoljavaju zahtjev (potrošačev rizik), granice prihvatanja  $A_L = 70,018$  mm i  $A_U = 69,978$  mm su postavljene unutar tolerancijskog polja i tako stvaraju zaštićeno područje prihvatanja sa simetričnim sigurnosnim područjem duljine 2  $\mu$ m. Mjerenje promjera prstena provodit će se primjenom mikrometra za unutarnje mjerenje uz standardnu mjernu nesigurnost  $u_m = 4$   $\mu$ m.

Proizvođačev i potrošačev rizik se računaju iz sljedećih izraza:

$$R_C = \int_{-\infty}^{\frac{T_L - y_0}{u_0}} F(z) \varphi_0(z) dz + \int_{\frac{T_U - y_0}{u_0}}^{\infty} F(z) \varphi_0(z) dz \quad (35)$$

$$R_P = \int_{\frac{T_L - y_0}{u_0}}^{\frac{T_U - y_0}{u_0}} (1 - F(z)) \varphi_0(z) dz \quad (36)$$

$$F(z) = \Phi\left(\frac{A_U - y_0 - u_0 z}{u_m}\right) - \Phi\left(\frac{A_L - y_0 - u_0 z}{u_m}\right) \quad (37)$$

s 
$$\varphi_0(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$$

i 
$$F(z) = \Phi\left(\frac{A_U - y_0 - u_0 z}{u_m}\right) - \Phi\left(\frac{A_L - y_0 - u_0 z}{u_m}\right) = \Phi(4,5 - 3z) - \Phi(-4,5 - 3z).$$

Numeričkim integriranjem dobiva se:

$$R_C = \int_{-\infty}^{-1,667} F(z) \varphi_0(z) dz + \int_{1,667}^{\infty} F(z) \varphi_0(z) dz = 0,01 = 1 \%$$

$$R_P = \int_{-1,667}^{1,667} [1 - F(z)] \varphi_0(z) dz = 0,07 = 7 \%$$

Uzimajući u obzir uzorak od 100 prstena proizvedenih na stroju, izmjerenih i prihvaćenih ili odbijenih kao pogodnih za upotrebu, može se navesti nekoliko zanimljivih značajki ove ocjene sukladnosti procesa. Neke od tih značajki su:

- uzimajući svojstva proizvodnog procesa, 90 % prstena je sukladno zahtjevu i 10 % je nesukladno (vidljivo u izrazu 34)
- od 90 sukladnih prstena, 83 su prihvaćena, a 7 ih je pogrešno odbijeno kao nesukladni
- od 10 nesukladnih prstena, 9 ih je odbijeno, a 1 je pogrešno prihvaćen kao sukladan
- 84 prstena je prihvaćeno, od toga 83 je sukladno, odnosno 99 %, dok je 1 % izvan tolerancije. To je cilj kontrolnog mjerenja, smanjivanje broja nesukladnih otpornika, među onima prihvaćenima za upotrebu, s 10 na 1 %
- od 16 odbijenih prstena, 7, odnosno 44 % zapravo je sukladno zahtjevu. To je cijena smanjivanja rizika prihvaćanja nesukladnih predmeta.

### ***Postavljanje granica prihvaćanja***

U primjeru iznad, globalni rizici  $R_C$  i  $R_P$  su izračunati pomoću unaprijed zadanim granicama prihvaćanja  $A_L$  i  $A_U$ . U mnogim stvarnim primjerima, željena razina rizika se bira na temelju analiza troška i granice prihvaćanja su izračunate tako da osiguraju da se postigne željena razina rizika. Takvi izračuni nisu točni. Praktičan pristup takvim problemima je pomoću grafičkih rješenja, kao što je vidljivo u sljedećem primjeru. [1]

### **PRIMJER 3– proizvodnja kugličnih ležajeva**

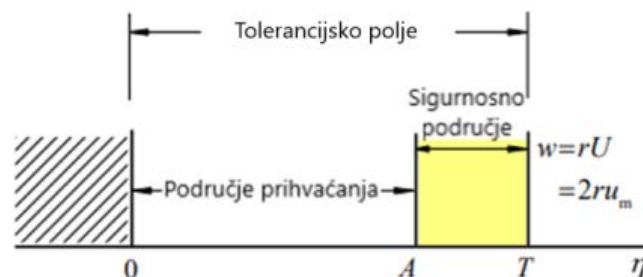
Proizvođač proizvodi velik broj preciznih kugličnih ležajeva. Zahtjev na svojstva za te ležajeve (predmet od interesa) zahtjeva da za svaki predmet radijalna pogreška kretanja (svojstvo od interesa) bude manja od 2  $\mu\text{m}$ . Radijalna pogreška kretanja ležaja je neželjeno kretanje okomito na os rotacije. Za odličan ležaj, radijalna pogreška kretanja bi bila nula, no svi realni ležajevi imaju pozitivnu radijalnu pogrešku kretanja.

Da bi se karakterizirao proizvodni proces, mjeri se radijalna pogreška kretanja velikog uzorka ležajeva koristeći visoko precizne uređaje za ispitivanje s neznatnom mjernom nesigurnosti. Za

ovaj uzorak, prosječna promatrana radijalna greška kretanja je  $\bar{y} = 1 \mu\text{m}$  i povezanom standardnom devijacijom uzorka  $s = 0,5 \mu\text{m}$ .

Prije isporuke ležajevi se ispituju na sukladnost za određen zahtjev. U tim ispitivanjima radijalna pogreška kretanja se mjeri koristeći kalibrirani uređaj za ispitivanje. Mjerni sustav je karakteriziran normalnom funkcijom gustoće vjerojatnosti  $\varphi(\eta_m; \eta; u_m^2)$  sa standardnom nesigurnosti  $u_m = 0,25 \mu\text{m}$ .

Iz ekonomskih razloga udio nesukladnih ležajeva prodanih potrošaču kao sukladni (globalni potrošačev rizik) mora biti zadržan na 0,1 % ili manje. Kako se može izabrati granica prihvaćanja  $A$  da zadovolji taj zahtjev?



**Slika 13. Tolerancijsko polje i područje prihvaćanja za ocjenu sukladnosti kugličnih ležajeva [1]**

Na slici 13 prikazano je tolerancijsko polje i područje prihvaćanja za ocjenu sukladnosti kugličnih ležajeva. Dozvoljene vrijednosti radijalne pogreške kretanja  $Y$  leže u intervalu  $0 \leq \eta \leq T$ . Granica prihvaćanja  $A$  je odvojena od granice tolerancije  $T$  za vrijednost sigurnosnog područja koja ima parametar duljine  $\omega = rU = 2ru_m$ . Pravilo odluke u ovom slučaju je sigurnosno prihvaćanje, s  $\omega > 0$ .

Sukladni kuglični ležaj zahtjeva da radijalna pogreška kretanja  $Y$  bude u području  $0 \leq \eta \leq T$ . Pošto je radijalna pogreška kretanja uvijek pozitivna, s izmjerenim vrijednostima blizu nule, prethodna funkcija gustoće vjerojatnosti za  $Y$  će se modelirati s gustoćom gamma vjerojatnosti. Temeljeno na uzorcima mjerenja, očekivanje i standardna nesigurnost prethodne funkcije

gustoće vjerojatnosti se zadaju da su  $y_0 = \bar{y} = 1 \mu\text{m}$  i  $u_0 = s = 0,5 \mu\text{m}$ . Parametri  $\alpha$  i  $\lambda$  se izračunavaju na idući način:

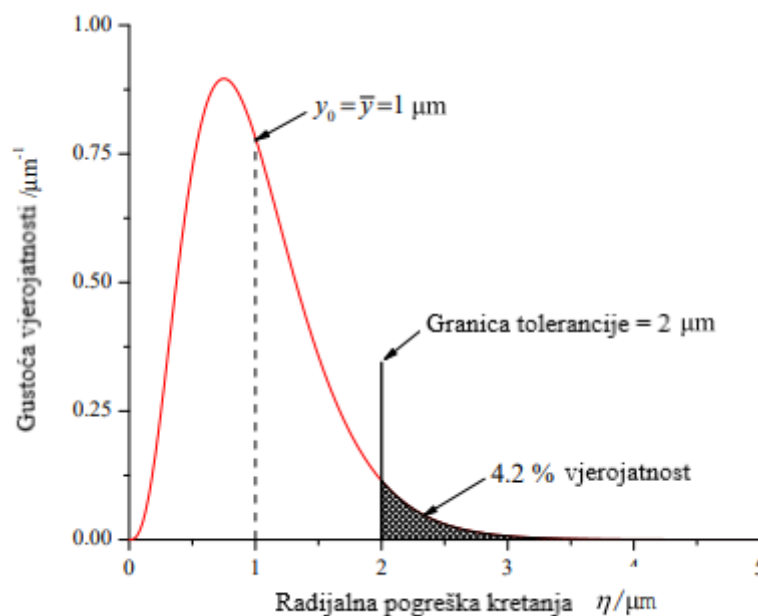
$$\alpha = \frac{\bar{y}^2}{s^2} = \frac{1^2}{0,5^2} = 4 \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{\bar{y}}{s^2} = \frac{1}{0,5^2} = 4$$

Iz iduće definicije za gustoću *gamma* vjerojatnosti računa se prethodna funkcija gustoće vjerojatnosti za radijalnu pogrešku ležaja  $Y$ .

$$\text{gamma}(\eta; \alpha; \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \eta^{\alpha-1} e^{-\lambda\eta}, \eta \geq 0 \quad (38)$$

Prema izrazu 38, prethodna funkcija gustoće vjerojatnosti za radijalnu pogrešku ležaja  $Y$  je:

$$g_0(\eta) = \text{gamma}(\eta; 4, 4) = \frac{128}{3} \eta^3 e^{-4\eta}, \eta \geq 0 \quad (39)$$



Slika 14. Prethodna *gamma* funkcija gustoće vjerojatnosti [1]

Na slici 14 je prikazana prethodna *gamma* funkcija gustoće vjerojatnosti dobivena pomoću izraza 39, a dobivena je na temelju raspodjele frekvencije izmjerenih radijalnih pogrešaka

kretanja za uzorak kugličnih ležajeva. Tolerancijsko polje je interval  $0 \leq \eta \leq 2 \mu\text{m}$ . Očekivanje raspodjele je prethodna procjena  $y_0 = 1 \mu\text{m}$  s povezanom standardnom nesigurnosti  $u_0 = 0,5 \mu\text{m}$ . Zbog toga što raspodjela nije simetrična, najvjerojatnija vrijednost  $Y$  nije jednaka  $y_0$ .

Vjerojatnost da će kuglični ležaj koji je nasumično izabran iz proizvodnog procesa prikazivati radijalnu pogrešku kretanja veću od  $2 \mu\text{m}$  je prikazana na slici 14 u zatamnjenom području grafa. Vjerojatnost nesukladnosti je:

$$\bar{p}_c = \int_2^{\infty} \text{gamma}(\eta; 4, 4) d\eta = 0,042$$

Iz izraza iznad vidljivo je da ako će se svi kuglični ležajevi isporučiti bez mjerenja, oko 4,2 % njih će biti nesukladno. Mjerni sustav nakon proizvodnog procesa je namijenjen otkrivanju nesukladnih ležajeva tako da se oni ne isporuče. Granica prihvaćanja bi trebala smanjiti potrošačev rizik  $R_C$  na 0,1 % ili manje. Za pravilo odluke ocjene sukladnosti prikazano na slici 13, tolerancijsko polje je u intervalu  $0 \leq Y \leq T$ , a područje prihvaćanja u intervalu  $0 \leq Y_m \leq A$ . Kao što se je došlo do izraza 32 i 33, globalni potrošačev i proizvođačev izraz su:

$$R_C = \int_T^{\infty} \int_0^A g_0(\eta) h(\eta_m | \eta) d\eta_m d\eta, \quad R_P = \int_0^T \int_A^{\infty} g_0(\eta) h(\eta_m | \eta) d\eta_m d\eta \quad (40)$$

Za mjerni sustav karakteriziran normalnom funkcijom gustoće vjerojatnosti  $h(\eta_m | \eta) = \varphi(\eta_m; \eta; u_0^2)$ , radeći supstituciju  $z = (\eta_m - \eta)/u_m$ ,  $dz = d\eta_m/u_m$  i integriranjem po  $z$ , izrazi 40 postaju:

$$R_C = \int_T^{\infty} \left[ \Phi\left(\frac{A-\eta}{u_m}\right) - \Phi\left(-\frac{\eta}{u_m}\right) \right] g_0(\eta) d\eta, \quad R_P = \int_0^T \left[ 1 - \Phi\left(\frac{A-\eta}{u_m}\right) \right] g_0(\eta) d\eta \quad (41)$$

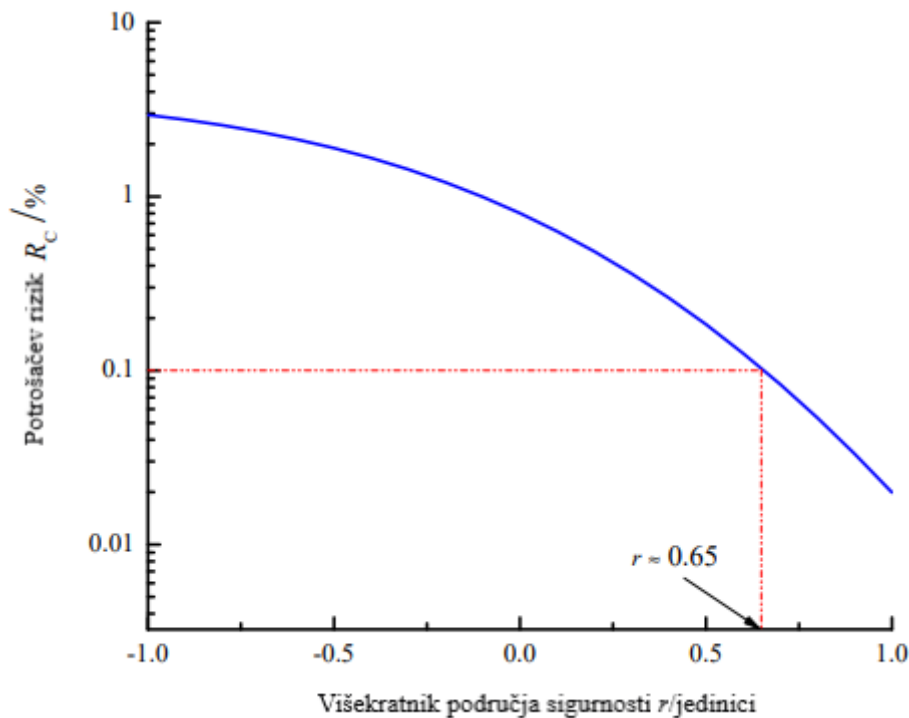
Iz slike 13 je vidljivo da je  $A = T - 2ru_m$ . Ovdje je  $T = 2 \mu\text{m}$  i  $u_m = 0,25 \mu\text{m}$ . Izjednačavanjem  $g_0(\eta)$  i gamma funkcije gustoće vjerojatnosti iz izraza 39 daje eksplicitne rezultate:

$$R_C(r) = \frac{128}{3} \int_2^{\infty} [\Phi(8 - 2r - 4\eta) - \Phi(-4\eta)] \eta^3 e^{-4\eta} d\eta \quad (42)$$



$$R_P(r) = \frac{128}{3} \int_0^2 [1 - \Phi(8 - 2r - 4\eta)] \eta^3 e^{-4\eta} d\eta \quad (43)$$

Na slici 15 prikazan je globalni potrošačev rizik  $R_C$  u odnosu s višekratnikom područja sigurnosti  $r$ . Za  $r \approx 0,65$ , granica prihvaćanja je  $A = T - 2(0,65)u_m = 1,7 \mu\text{m}$ , a željeni rizik  $R_C = 0,1 \%$  je postignut.



**Slika 15. Graf ovisnosti globalnog potrošačevog rizika u odnosu na višekratnik područja sigurnosti [1]**

Integrali iz izraza 42 i 43 se ne mogu egzaktno izračunati, ali se mogu izračunati numerički za bilo koju izabranu vrijednost višekratnika područja sigurnosti  $r$ .

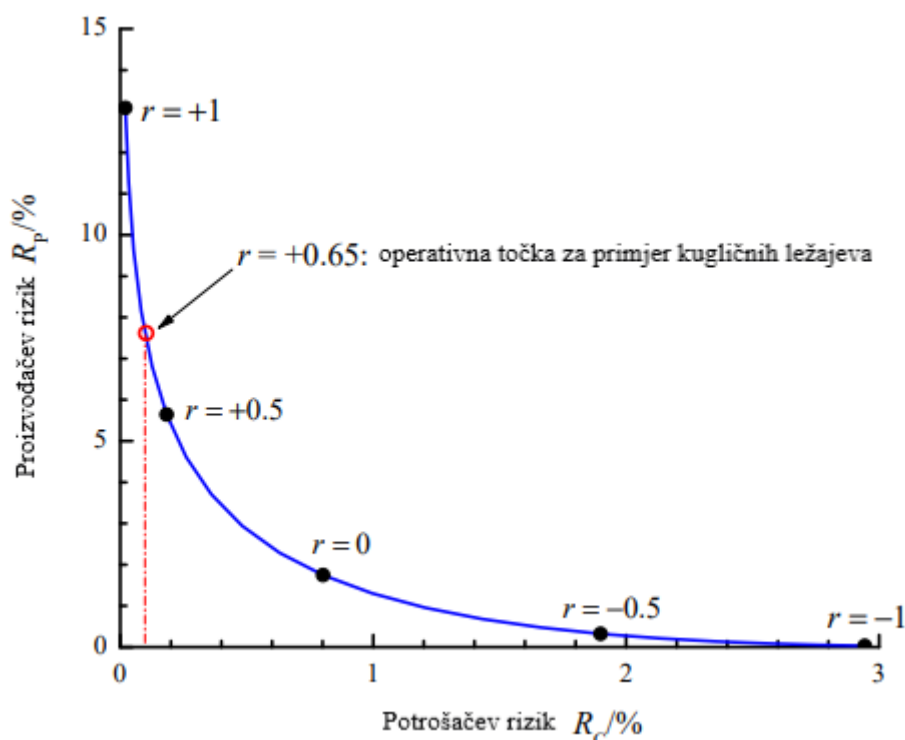
Slika 15 prikazuje globalni potrošačev rizik  $R_C$  za  $-1 \leq r \leq 1$ . Pozitivni  $r$  odgovara  $A < T$  i negativni  $r$  odgovara  $A > T$ . Za  $r = 0$  ne postoji područje sigurnosti ( $A = T$ ) i pravilo odluke se naziva podijeljeni rizik ili jednostavno prihvaćanje. Slika prikazuje da je željena razina rizika,  $R_C = 0,1 \%$ , postignuta za višekratnik područja sigurnosti  $r \approx 0,65$ . To rezultira sigurnim područjem prihvaćanja s granicom prihvaćanja:

$$A = T - 2ru_m = (2 - 2 * 0,65 * 0,25) \mu\text{m} \approx 1,7 \mu\text{m}$$

Izbor granica prihvaćanja rješava problem odluke.

Kod ocjene sukladnosti s binarnim pravilom odluke, djelovanje da bi se smanjio potrošačev rizik će uvijek povećati proizvođačev rizik. To općenito pravilo se vidi na slici 16 koja prikazuje odnos  $R_P$  i  $R_C$  koji su numerički izračunati iz jednadžbi 42 i 43, za primjer kugličnih ležajeva. Za  $r = 0,65$  globalni proizvođačev rizik  $R_P$  je otprilike 7,5 %. To znači da otprilike 75 od svakih 1000 kugličnih ležajeva koji padaju kontrolu bi zapravo bili sukladni zahtjevu, a to rezultira gubitkom prihoda koji bi nastali da su se ti dobri ležajevi prodali.

Povećanjem količine sukladnih dijelova je trošak sigurnog prihvaćanja, koji zahtijeva smanjivanje prihvaćanja i isporuke nesukladnih proizvoda. U praksi dobavljač mora izabrati operativnu točku na krivulji kao što je prikazano na slici 16, a koja će balansirati rizik i donijeti optimalni ishod. Izbor takve operativne točke je poslovna ili politička odluka koja zahtijeva ekonomsku analizu problema odluke.



Slika 16. Graf odnosa globalnog rizika  $R_P$  i  $R_C$  za primjer kugličnih ležajeva [1]

Slika 16 prikazuje odnos globalnih rizika  $R_P$  i  $R_C$  za primjer kugličnih ležajeva. Bilo koja točka na krivulji odgovara konkretnoj vrijednosti  $r$ , višekratniku sigurnosnog područja, s nekoliko

naznačenih konkretnih vrijednosti. Da bi se smanjio potrošačev rizik pomicanjem granice prihvaćanja dalje unutar tolerancijskog polja (povećanje  $r$ ), uvijek se povećava rizik pogrešnog odbijanja sukladnih ležajeva. Potrebna je ekonomska analiza da se odabere optimalno pravilo odluke. Otvoreni krug na slici prikazuje operativnu točku korištenu u prikazanom primjeru.

### **Generalni grafički pristup**

Za proces sa zadanom tolerancijom  $T$ , normalna prethodna funkcija gustoće vjerojatnosti  $g_0(\eta) = \varphi(\eta; y_0; u_0^2)$  i normalna funkcija gustoće vjerojatnosti mjernog sustava  $h(\eta_m|\eta) = \varphi(\eta_m; \eta; u_m^2)$ , graf kao što je prikazan na slici 17 se može izraditi da bi olakšao postavljanje granica prihvaćanja. [1]

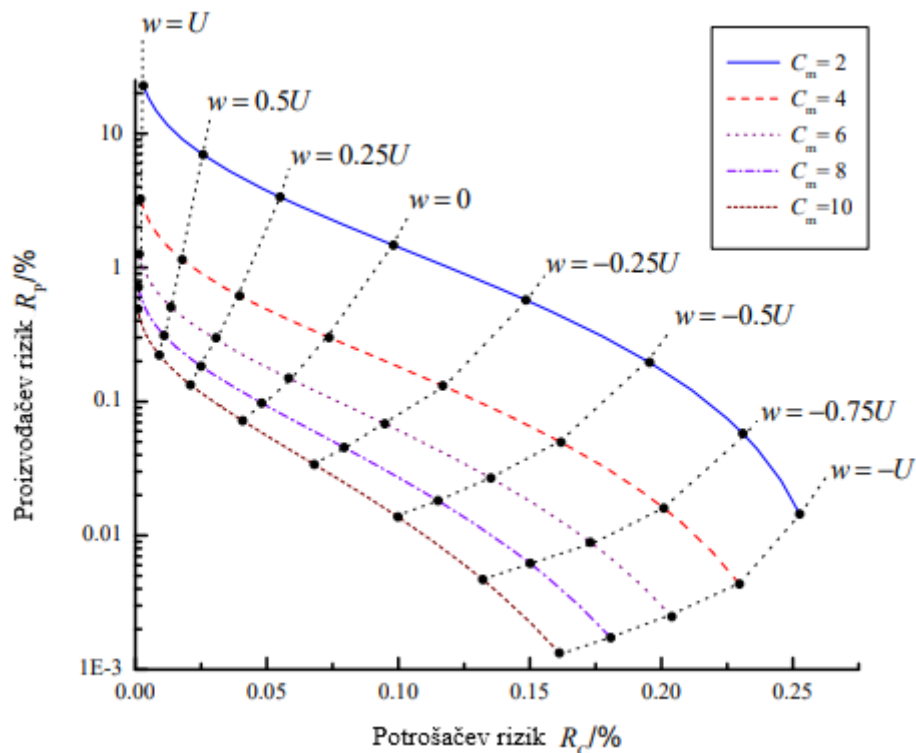
U ovom primjeru pretpostavlja se da su prethodne informacije slabe u smislu da je  $u_m^2 \ll u_0^2$  pa je procjena  $y \approx \eta_m$  sa standardnom nesigurnosti  $u \approx u_m$ . [1]

Slika prikazuje odnos  $R_p$  i  $R_C$  za konkretan slučaj u kojem je  $u_0 = T/6$ . [1]

Pet krivulja na slici odgovaraju vrijednostima indeksa sposobnosti mjerenja  $C_m = T/4u_m$  u rasponu od 2 do 10, a duž svake krivulje točke prikazuju područja sigurnosti s raznovrsnim parametrima duljine, od  $\omega = -U$  do  $\omega = U$ , a proširena nesigurnost  $U$  je jednaka  $2u$ .

Da bi se koristio konkretan graf potrebno je naglasiti da:

- se proces smatra centriranim, tako da prethodna procjena  $y_0$  izmjerene vrijednosti leži na polovici tolerancijskog polja
- se pretpostavlja da gornje i donje područje sigurnosti imaju parametre duljine koji su jednaki po apsolutnoj vrijednosti (simetrično područje prihvaćanja)
- su  $R_p$  i  $R_C$  izračunati pretpostavljajući normalnu funkciju gustoće vjerojatnosti procesa i mjernog sustava
- je moguća interpolacija za ostale sposobnosti mjerenja osim pet prikazanih
- je moguće interpolirati duž krivulje za procjenu područja sigurnosti. [1]



Slika 17. Globalni rizici  $R_P$  i  $R_C$  za binarnu ocjenu sukladnosti [1]

Na slici 17 je prikazan odnos globalnih rizika  $R_P$  i  $R_C$  za binarnu ocjenu sukladnosti s prethodnom standardnom nesigurnosti  $u_0 = T/6$ . Pet krivulja odgovara vrijednostima indeksa sposobnosti mjerenja  $C_m = T/4u_m$  u rasponu od 2 do 10. Pozitivne vrijednosti  $\omega$  odgovaraju zaštićenom prihvaćanju s granicama prihvaćanja unutar tolerancijskog polja kao što je prikazano na slici 12. [1]

### Vrijednost smanjene mjerne nesigurnosti

Smanjivanje nesigurnosti povezane s rezultatom mjerenja ocjene sukladnosti će također smanjiti vjerojatnost donošenja pogrešnih odluka o prihvaćanju ili odbijanju. To zapažanje se dobro vidi na slici 17 gdje točkaste linije označavaju mjesta raznovrsnih sigurnosnih područja. [1]

Za pravilo odluke jednostavnog prihvaćanja ( $\omega = 0$ ) koje je vidljivo, npr. da je mjerna nesigurnost takva da je  $C_m = \frac{T}{4u_m} = 2$ , tada bi potrošačev rizik  $R_C$  bio otprilike 0,1 %, a odgovarajući proizvođačev rizik  $R_P$  bi bio oko 1,5 %.[1]

Investiranje u poboljšani mjerni sustav s  $C_m = 10$  bi smanjio te rizike na  $R_C$  približno 0,04 % i  $R_P$  na približno 0,07 %. Da li bi takvo smanjenje mjerne nesigurnosti bilo ekonomski poželjno ovisi o kompromisu između troška poboljšanog mjeriteljstva i novca uštedenog smanjenjem pogrešnih odluka. [1]

Poboljšanje proizvodnog procesa će imati sličan efekt u smanjenju i potrošačevog i proizvođačevog rizika i uključivat će slične analize između troška i beneficija. [1]

## 9. ZAKLJUČAK

U radu je analiziran utjecaj mjerne nesigurnosti rezultata mjerenja na procjenu sukladnosti proizvoda, procesa i sustava. Analiza je provedena sukladno normi JCGM 106:2012. Vidljivo je da bi ocjenjivanje sukladnosti bilo jednostavno kad bi mjerni sustav bio savršen. Tada bi svi rizici bili svedeni na nulu, no u stvarnosti nijedan mjerni sustav nije savršeno točan i precizan. Vjerojatnost donošenja pogrešnih odluka se povećava povećanjem mjerne nesigurnosti i kada se izmjerene vrijednosti nalaze u blizini tolerancijskih granica. S time, vidi se da mjerna nesigurnost ima utjecaj na ocjenu sukladnosti takav da s povećanjem mjerne nesigurnosti se povećava vjerojatnost pogrešne ocjene sukladnosti. Odnosno, s manjom mjernom nesigurnosti može se biti sigurniji da je ocjena sukladnosti opravdana. U ovom radu obrađeni su i proizvođačev i potrošačev rizik. Od prihvatanja nesukladnih i odbijanja sukladnih predmeta od interesa, koristi nema ni proizvođač, a ni potrošač. Takve pogrešne odluke utječu na ekonomsku dobit i na samo zadovoljstvo potrošača. No, oba rizika se ne mogu svesti na nulu, odnosno ne mogu se oba ukloniti u potpunosti. Smanjivanjem jednog rizika, povećava se drugi rizik. Zbog toga je potrebno analizirati i donijeti odluku temeljenu na ekonomskim ili političkim željama proizvođača o optimiranju procesa. Odnosno potrebno je optimizirati rizike i odreći se nečega u korist drugog. Tj. pitanje je hoće li se odbijati sukladne predmete od interesa i time gubiti prihode ili će se prihvaćati nesukladne predmete pa time gubiti zadovoljstvo kupaca. Zaključno, za što bolju i sigurniju ocjenu sukladnosti potrebno je ostvariti točne i precizne rezultate mjerenja što će rezultirati s malom mjernom nesigurnosti. Iako su mjerni sustavi koji osiguravaju malu mjernu nesigurnost rezultata mjerenja skuplji, smanjit će pogreške ocjene sukladnosti i samim time olakšati smanjivanje i optimiranje potrošačevog i proizvođačevog rizika.

## 10. LITERATURA

- [1] JCGM 106:2012 – Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment, listopad 2012.
- [2] Runje, B.: Predavanja iz kolegija Osnove osiguravanja kvalitete, Zagreb, 2018.
- [3] ISO 3534-1:2006 – Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: General statistics terms and terms used in probability, 2006.
- [4] JCGM 101:2008 – Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Prvo izdanje, 2008.
- [5] Varijanca, <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=63913>, 25.1.2019.
- [6] Standardna devijacija, <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=57758>, 25.1.2019.
- [7] JCGM 200:2012 – International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms, Treće izdanje, 2012.
- [8] ISO 3534-2:2006 – Statistics – Vocabulary and symbols – Part 2: Applied statistics, rujan 2006.
- [9] ISO/IEC 17000:2004 – Conformity assesment – Vocabulary and general principles, Prvo izdanje, 2004.
- [10] ISO 10576-1:2003 – Statistical methods – Guidelines for the evaluation of conformity with specified requirements – Part 1: General principles, Ženeva, 2014.
- [11] Runje, B.: Predavanja iz kolegija TEORIJA I TEHNIKA MJERENJA, Zagreb, 2014.
- [12] Runje, B., Horvatić Novak, A., Keran, Z. (2018): Impact of the quality of measurement results on conformity assessment, Proceedings of the 29th DAAAM International Symposium, pp.xxxx-xxxx, B. Katalinic (Ed.), Published by DAAAM International, ISBN 978-3-902734-xx-x, ISSN 1726-9679, Vienna, Austria
- [13] ISO 14253-1:2017 – Geometrical Product Specifications GPS – Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment – Part 1: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specification, listopad 2010.
- [14] Broum, T; Dvorak, J & Kleinova, J. (2011). Value optimization and risks elimination of product, Annals of DAAAM for 2011 & Proceedings of the 22nd International DAAAM Symposium, Volume 22, No. 1, ISSN 1726-9679 ISBN 978-3-901509-83-4, Katalinic, B. (Ed.), pp. 757-758, Published by DAAAM International, Vienna, Austria, EU

- [15] Källigren, H., Lauwaars, M., Magnusson, B., Pendrill, L., Taylor, P.: Role of measurement uncertainty in conformity assesment in legal metrology and trade, *Accred. Qual. Assur.* 8, 2003.
- [16] Modarres, M., Kaminskiy, M., Krivtsov, V.: *Reliability and Risk Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [17] Rossi, G.B., Crenna, F.: A probabilistic approach to measurement-based decisions, *Measurement* 39, 2006.
- [18] Brückler, F.M.: *Povijest Matematike II*, Zagreb, 2009.
- [19] ISO 31000:2018 Risk management – Guidelines, veljača 2018.
- [20] Drljača, M., Bešker, M.: *Održivi uspjeh i upravljanje rizicima poslovanja*, Poslovna politika, Beograd, 2010.
- [21] Bešker, M.: *Izvori ugrožavanja i procjena stanja sigurnosti-rizika-ugroženosti*, Oskar, Zagreb, 2006.
- [22] IEC/FDIS 31010 – Risk management – Risk assesment techniques
- [23] Runje, B., Mudronja, V., Horvatić, A.: *Metode procjene rizika*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb