

# Računalna simulacija hidrauličkog udara izazvanog zatvaranjem ventila u cjevovodu zrakaste strukture

---

**Kovačić, Luka**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:845514>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ZAVRŠNI RAD**

Luka Kovačić

Zagreb, 2018

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

Mentor:  
Prof. dr. sc. Ivo Džijan, dipl. ing.

Student:  
Luka Kovačić

Zagreb, 2018



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Kovačić**

Mat. br.: 0035200010

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalna simulacija hidrauličkog udara izazvanog zatvaranjem ventila u cjevovodu zrakaste strukture**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical simulation of the water hammer caused by closing the valve in tree-like structure pipeline**

Opis zadatka:

Hidraulički udar je pojava nagle i znatne promjene tlaka koja nastaje kao posljedica nagle promjene brzine strujanja pri promjeni režima strujanja u cjevovodu.

U radu treba numerički modelirati hidraulički udar u jednostavnom cjevovodu kojim voda struji između dva spremnika nakon naglog zatvaranja ventila na kraju cjevovoda. Pri modeliranju treba koristiti numeričku metodu karakteristika.

Provjeriti mogućnost dobivenog programa da simulira stacionarno strujanje te analizirati utjecaj promjene prostorno vremenskog koraka integracije, viskoznosti fluida i vremena zatvaranja ventila na promjene tlaka i piezometričke visine u cjevovodu.

Rad treba sadržavati:

1. Uvod s fizikalnim opisom i analizom pojave hidrauličkog udara.
2. Prikaz numeričke metode karakteristika za proračun nestacionarnog strujanja u jednostavnom cjevovodu.
3. Rezultate analize utjecaja prostorno vremenskog koraka integracije, viskoznosti fluida i vremena zatvaranja ventila.
4. Diskusiju rezultata, te zaključke.

Rezultate proračuna treba prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama.  
Trebna navesti literaturu i eventualno dobivenu pomoć tijekom izrade rada.

Zadatak zadan:

30. studenog 2017.

Rok predaje rada:

1. rok: 23. veljače 2018.

2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2018.

3. rok: 21. rujna 2018.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 26.2. - 2.3. 2018.

2. rok (izvanredni): 2.7. 2018.

3. rok: 24.9. - 28.9. 2018.

Zadatak zadao:

*Ivo Džijan*  
Izv. prof. dr. sc. Ivo Džijan

Predsjednik Povjerenstva:

*Igor Balen*  
Prof. dr. sc. Igor Balen

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Ivi Džijanu na savjetima i pomoći pri izradi ovog rada.

Zahvaljujem se i obitelji na potpori koju su mi pružili za vrijeme preddiplomskog studija.

Luka Kovačić

# SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA.....	III
POPIS TABLICA .....	VII
POPIS OZNAKA.....	VIII
SAŽETAK .....	X
SUMMARY .....	XI
1. UVOD .....	1
2. HIDRAULIČKI UDAR [2] .....	2
3. METODA KARAKTERISTIKA.....	7
4. HIDRODINAMIČKI I NUMERIČKI MODEL STRUJANJA.....	9
4.1. PRORAČUN STACIONARNOG REŽIMA STRUJANJA .....	10
4.1.1. NEVISKOZNO STRUJANJE .....	11
4.1.2. VISKOZNO STRUJANJE.....	11
4.2. PRORAČUN NESTACIONARNOG REŽIMA STRUJANJA.....	12
4.2.1. RUBNI UVJETI NA STRANI SPREMNIKA .....	15
4.2.2. RUBNI UVJETI NA STRANI VENTILA .....	16
5. ANALIZA REZULTATA RAČUNALNE SIMULACIJE .....	18
5.1. PRIKAZ REZULTATA NEVISKOZNOG STRUJANJA .....	19
5.2. UTJECAJ VISKOZNOSTI FLUIDA .....	22
5.3. UTJECAJ PROMJENE PROSTORNO VREMENSKOG KORAKA INTEGRACIJE PRI NEVISKOZNOM STRUJANJU .....	25
5.3.1. UTJECAJ PROMJENE PROSTORNO VREMENSKOG KORAKA INTEGRACIJE PRI NEVISKOZNOM STRUJANJU ZA CFL = 1.....	25
5.3.2. UTJECAJ PROMJENE PROSTORNO VREMENSKOG KORAKA INTEGRACIJE PRI NEVISKOZNOM STRUJANJU ZA CFL = 0,99.....	28
5.4. UTJECAJ PROMJENE CFL BROJA PRI NEVISKOZNOM STRUJANJU .....	31

---

5.5. UTJECAJ PROMJENE CFL BROJA PRI VISKOZNOM STRUJANJU .....	34
5.6. UTJECAJ PROMJENE VREMENA ZATVARANJA VENTILA PRI NEVISKOZNOM STRUJANJU .....	37
6. ZAKLJUČAK .....	42
POPIS LITERATURE: .....	43
PRILOZI: .....	44

## POPIS SLIKA

<b>Slika 1</b> – Puknuće cijevi uzrokovano hidrauličkim udarom [1].....	1
<b>Slika 2</b> – Sustav spremnik – cijev – ventil [2].....	2
<b>Slika 3</b> – Propagacija tlačnog poremećaja prema spremniku, vrijeme $t < L/c$ [2].....	3
<b>Slika 4</b> – Sustav u trenutku $t = L/c$ [2].....	3
<b>Slika 5</b> – Propagacija tlačnog poremećaja prema ventilu, vrijeme $\frac{L}{c} < t < \frac{2L}{c}$ [2].....	4
<b>Slika 6</b> – Sustav u trenutku $t = 2L/c$ [2].....	4
<b>Slika 7</b> – Propagacija tlačnog poremećaja prema spremniku, vrijeme $\frac{2L}{c} < t < \frac{3L}{c}$ [2].....	5
<b>Slika 8</b> – Sustav u trenutku $t = 3L/c$ [2].....	5
<b>Slika 9</b> – Propagacija tlačnog poremećaja prema ventilu, vrijeme $\frac{3L}{c} < t < \frac{4L}{c}$ [2].....	5
<b>Slika 10</b> – Sustav u trenutku $t = 4L/c$ [2].....	6
<b>Slika 11</b> – Izgled karakteristika u $x - t$ ravnini za strujanje nestlačivog fluida.....	8
<b>Slika 12</b> – Promatrani sustav Spremnik – cijev – ventil [2].....	19
<b>Slika 13</b> – Prikaz karakteristika zadanog sustava u $x - t$ ravnini za $CFL = 1$ [2].....	13
<b>Slika 14</b> – Prikaz karakteristika zadanog sustava u $x - t$ ravnini za $CFL < 1$ [2].....	13
<b>Slika 15</b> – Spremnik kao rubni uvjet [2].....	15
<b>Slika 16</b> – Ventil kao rubni uvjet [2].....	16
<b>Slika 17</b> – Promjena brzine kod postupnog zatvaranja ventila [2].....	16
<b>Slika 18</b> – Prikaz položaja čvorova u zadanom sustavu.....	18
<b>Slika 19</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 2 pri neviskoznom strujanju fluida.....	19
<b>Slika 20</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 11 pri neviskoznom strujanju fluida.....	20
<b>Slika 21</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 20 pri neviskoznom strujanju fluida.....	20
<b>Slika 22</b> – Promjena brzine u čvoru 2 pri neviskoznom strujanju fluida.....	20
<b>Slika 23</b> – Promjena brzine u čvoru 11 pri neviskoznom strujanju fluida.....	21
<b>Slika 24</b> – Promjena brzine u čvoru 20 pri neviskoznom strujanju fluida.....	21
<b>Slika 25</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 2 pri viskoznom strujanju fluida.....	22
<b>Slika 26</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 11 pri viskoznom strujanju fluida.....	22
<b>Slika 27</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 20 pri viskoznom strujanju fluida.....	23
<b>Slika 28</b> – Promjena brzine u čvoru 2 pri viskoznom strujanju fluida.....	23
<b>Slika 29</b> – Promjena brzine u čvoru 11 pri viskoznom strujanju fluida.....	23
<b>Slika 30</b> – Promjena brzine u čvoru 20 pri viskoznom strujanju fluida.....	24



<b>Slika 31</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 3 mreže $\Delta x_{10}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	25
<b>Slika 32</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 5 mreže $\Delta x_{20}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	26
<b>Slika 33</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 9 mreže $\Delta x_{40}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	26
<b>Slika 34</b> – Promjena brzine u čvoru 3 mreže $\Delta x_{10}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	26
<b>Slika 35</b> – Promjena brzine u čvoru 5 mreže $\Delta x_{20}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	27
<b>Slika 36</b> – Promjena brzine u čvoru 9 mreže $\Delta x_{40}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	27
<b>Slika 37</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 3 mreže $\Delta x_{10}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99.....	28
<b>Slika 38</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 5 mreže $\Delta x_{20}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99.....	28
<b>Slika 39</b> – Promjena piezometričke visine u čvoru 9 mreže $\Delta x_{40}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99.....	29
<b>Slika 40</b> – Promjena brzine u čvoru 3 mreže $\Delta x_{10}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99.....	29
<b>Slika 41</b> – Promjena brzine u čvoru 5 mreže $\Delta x_{20}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99.....	29
<b>Slika 42</b> – Promjena brzine u čvoru 9 mreže $\Delta x_{40}$ pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99.....	30
<b>Slika 43</b> – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	31
<b>Slika 44</b> – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,8.....	31
<b>Slika 45</b> – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,5.....	32
<b>Slika 46</b> – Promjena brzine na ulazu u cijev pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1.....	32

<b>Slika 47</b> – Promjena brzine na ulazu u cijev pri neviskoznom strujanju fluida za $CFL = 0,8$ .....	32
<b>Slika 48</b> – Promjena brzine na ulazu u cijev pri neviskoznom strujanju fluida za $CFL = 0,5$ .....	33
<b>Slika 49</b> – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri viskoznom strujanju fluida za $CFL = 1$ .....	34
<b>Slika 50</b> – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri viskoznom strujanju fluida za $CFL = 0,8$ .....	34
<b>Slika 51</b> – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri viskoznom strujanju fluida za $CFL = 0,5$ .....	35
<b>Slika 52</b> – Promjena brzine na ulazu u cijev pri viskoznom strujanju fluida za $CFL = 1$ .....	35
<b>Slika 53</b> – Promjena brzine na ulazu u cijev pri viskoznom strujanju fluida za $CFL = 0,8$ .....	35
<b>Slika 54</b> – Promjena brzine na ulazu u cijev pri viskoznom strujanju fluida za $CFL = 0,5$ .....	36
<b>Slika 55</b> – Usporedba promjene piezometričke visine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	37
<b>Slika 56</b> – Usporedba promjene piezometričke visine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = 2L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	37
<b>Slika 57</b> – Usporedba promjene piezometričke visine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = 4L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	38
<b>Slika 58</b> – Usporedba promjene piezometričke visine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	38
<b>Slika 59</b> – Usporedba promjene piezometričke visine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = 2L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	38
<b>Slika 60</b> – Usporedba promjene piezometričke visine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = 4L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	39
<b>Slika 61</b> – Usporedba promjene brzine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	39
<b>Slika 62</b> – Usporedba promjene brzine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila $t_{zat} = 0$ i $t_{zat} = 2L/c$ pri neviskoznom strujanju fluida.....	39

- Slika 63** – Usporedba promjene brzine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{\text{zat}} = 0$  i  $t_{\text{zat}} = 4L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida.....40
- Slika 64** – Usporedba promjene brzine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{\text{zat}} = 0$  i  $t_{\text{zat}} = L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida.....40
- Slika 65** – Usporedba promjene brzine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{\text{zat}} = 0$  i  $t_{\text{zat}} = 2L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida.....40
- Slika 66** – Usporedba promjene brzine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{\text{zat}} = 0$  i  $t_{\text{zat}} = 4L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida.....41

## POPIS TABLICA

**Tablica 1** – Parametri sustava Spremnik – cijev – ventil [2].....10

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$t$	s	Vrijeme
$v$	m/s	Brzina fluida
$H$	m	Razina fluida u spremniku
$L$	m	Duljina cjevovoda
$D$	mm	Promjer cijevi
$p$	Pa	Tlak
$p_a$	Pa	Atmosferski tlak
$\Delta p$	Pa	Razlika tlaka
$c$	m/s	Brzina širenja tlačnog poremećaja
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća fluida
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijsko ubrzanje
$h$	m	Piezometrička visina
$\lambda$	/	Faktor trenja
$s$	mm	Debljina stijenke
$k$	mm	Visina hrapavosti stijenke cijevi
$E$	Pa	Modul elastičnosti cijevi
$H_2$	m	Razina vode u desnom spremniku
$H_0$	m	Razlika razina vode između spremnika
$H_1$	m	Razina vode u lijevom spremniku ( $H_1 = H_2 + H_0$ )
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	Kinematička viskoznost fluida
$K$	Pa	Volumni modul elastičnosti fluida
$Q$	m <sup>3</sup> /s	Protok
$v_0$	m/s	Brzina stacionarnog strujanja fluida
$A$	m <sup>2</sup>	Površina poprečnog presjeka cjevovoda
$h_f$	m	Visina linijskih gubitaka
$Re$	/	Reynoldsov broj
$I$	/	Ukupni broj čvorova cjevovoda
$i$	/	Promatrani čvor cjevovoda
$z$	/	Broj segmenata cjevovoda
$n$	/	Promatrani vremenski trenutak

---

$\Delta x$	m	Prostorni korak integracije
$\Delta t$	s	Vremenski korak integracije
CFL	/	Courant – Friedrichs – Lewy broj
$t_{\text{poc}}$	s	Vrijeme početka zatvaranja ventila
$t_c$	s	Vrijeme potpunog zatvaranja ventila
$t_{\text{zat}}$	s	Vrijeme potrebno za zatvaranje ventila

## SAŽETAK

U ovom radu se, u programskom paketu MATLAB®, računalno simulira hidraulički udar izazvan zatvaranjem ventila na kraju cijevi kroz koju fluid struji između dva otvorena spremnika. Pri modeliranju hidrauličkog udara koristi se numerička metoda karakteristika. Računalnom simulacijom analizira se utjecaj promjene prostorno vremenskog koraka integracije, viskoznosti fluida i vremena zatvaranja ventila na promjene piezometričke visine (tlaka) i brzine u cjevovodu. Dobiveni rezultati računalne simulacije prikazani su dijagramski. Pri strujanju viskoznog fluida s vremenom dolazi do smanjivanja amplitude piezometričke visine i brzine u cijevi te promjena piezometričke visine u vremenu poprima karakteristični oblik pile. Promjena prostorno vremenskog koraka integracije nema utjecaja na rezultate simulacije nestacionarnog neviskoznog strujanja kada je CFL broj jednak jedan, dok se kada je CFL broj manji od jedan javlja negativni utjecaj numeričke difuzije. Pri brzom zatvaranju ventila maksimalne vrijednosti tlaka u sustavu jednake su onima kod trenutnog zatvaranja ventila, dok se pri sporom zatvaranju ventila maksimalne vrijednosti tlaka u sustavu smanjuju.

Ključne riječi: hidraulički udar, metoda karakteristika, hidrodinamika cijevnih mreža, CFL broj

## **SUMMARY**

This paper presents, with the use of software package MATLAB®, computer simulation of the water hammer caused by closing the valve in the pipeline in which water flows between two open tanks. The numerical method of the characteristics is used in modeling the water hammer. Computer simulation analyzes the influence of space and time integration step, fluid viscosity, along with valve closure time on changes in the piezometric height (pressure) and velocity in the pipeline. The obtained computer simulation results are shown in diagrams. For the flow of viscous fluid the amplitude of the piezometric height and velocity in the pipe reduces over time, and the change of the piezometric height takes on the characteristic shape of the saw. The change in space and time integration step has no effect on the results of the simulation of non viscous fluid flow when the CFL number is equal to one, but when the CFL number is less than one the negative impact of the numerical diffusion occurs. The maximum pressure values in the system are the same at quick and at instant closing of the valve, as opposed to the slow closing of the valve when the maximum pressure values in the system are reduced.

Keywords: hammer wave, method of the characteristics, hydrodynamics of pipe networks, CFL number



## 1. UVOD

Prilikom strujanja fluida kroz cjevovodni sustav pretpostavlja se stacionarni model strujanja, no takav model ne daje preciznu sliku događaja u cjevovodu pri puštanju sustava u rad ili njegovog isključivanja iz rada. Prijelazne pojave koje se događaju pri naglom zatvaranju ventila ili uključivanju i isključivanju pumpe nameću potrebu uvođenja matematičkog modela nestacionarnog strujanja. Pri takvim pojavama dolazi do vremenske promjene tlaka i brzine u cjevovodu. Nagla promjena brzine prouzrokovana naglim zatvaranjem ventila dovodi do znatnog porasta tlaka u sustavu. Takvu pojavu nazivamo hidraulički udar. Hidraulički udar je najčešći i najteži problem strujanja fluida u radu cjevovodnih mreža. Veliki tlak generiran hidrauličkim udarom može dovesti do puknuća cijevi te kvarova ključnih elemenata cjevovoda poput npr. turbina, ventila i pumpi.

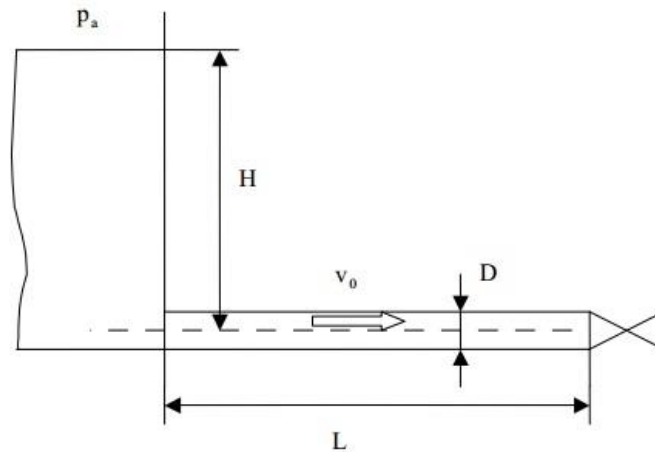


**Slika 1** – Puknuće cijevi uzrokovano hidrauličkim udarom [1]

Zbog navedenih mogućih problema iznimno je bitno precizno odrediti maksimalni tlak pri hidrauličkom udaru te ako taj tlak prelazi dopuštenu razinu treba definirati način zaštite mreže od hidrauličkog udara. Neke mjere zaštite su: ugradnja tlačne posude, rasteretne komore, sigurnosnog ventila, dozračnog ventila itd.

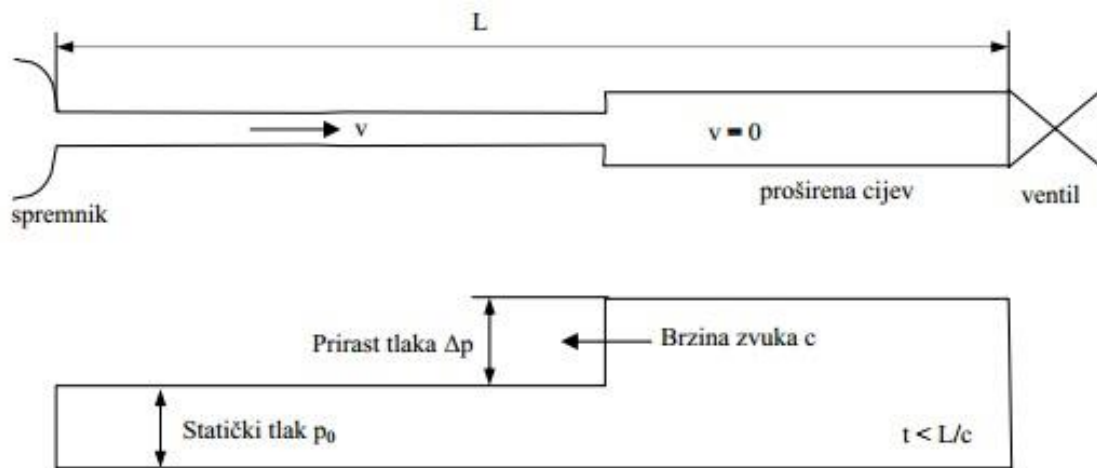
## 2. HIDRAULIČKI UDAR [2]

Kako bi se prikazale promjene tlaka u cjevovodu prilikom hidrauličkog udara za primjer je uzet sustav spremnik – cijev – ventil.



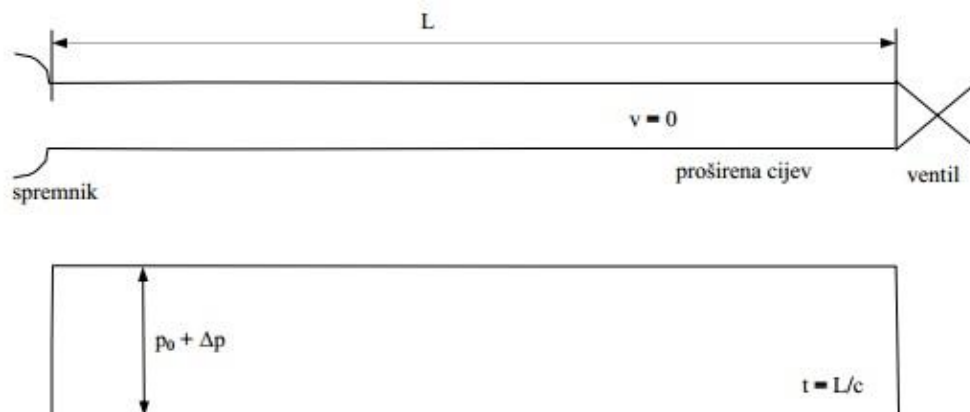
**Slika 2** – Sustav spremnik – cijev – ventil [2]

Pretpostavlja se da do trenutka  $t = 0$  fluid struji neviskozno i stacionarno brzinom  $v_0$  iz velikog spremnika visine  $H$ , kroz cijev konstantne duljine  $L$  i promjera  $D$  te kroz ventil. Budući da je strujanje neviskozno i stacionarno piezometrička visina i brzina konstantne su duž cijevi. Također se pretpostavlja da je zatvaranje ventila trenutno što znači da prilikom zatvaranja fluid ne struji kroz ventil. Takvo zatvaranje je u realnom slučaju nemoguće budući da se niti jedan ventil ne može zatvoriti u nultom vremenu pa je bitno naglasiti da ono postoji samo kao teorijski koncept. Kada se ventil zatvori gibajući fluid udara u zatvoreni ventil što uzrokuje porast tlaka fluida za  $\Delta p$ . Kao posljedica povećanja tlaka dolazi do širenja cijevi i komprimiranja fluida na tom mjestu. Idući sloj fluida zaustavit će se vrlo kratko nakon prvog. Taj vremenski period između zaustavljanja prvog i drugog sloja fluida nastaje zbog potrebe drugog sloja da putuje dok ne ispuni volumen dobiven širenjem cijevi i kompresijom prvog sloja fluida. Proces zaustavljanja fluida se nastavlja sloj po sloj stvarajući propagaciju tlačnog vala veličine  $\Delta p$  brzinom zvuka  $c$  (Slika 3). Lijevo od fronte tlačnog poremećaja fluid još uvijek struji brzinom  $v_0$  pri tlaku  $p_0$ , dok desno od fronte fluid miruje pri tlaku  $p = p_0 + \Delta p$ , gdje je prema Allievijevom izrazu  $\Delta p = \rho c v_0$  nastao udarom fluida u ventil, a  $p_0$  je tlak u spremniku i u cijevi prije zatvaranja ventila. Budući da se zaustavljeni slojevi fluida ne mogu odmaknuti od ventila njihov tlak ne može pasti već ostaje na vrijednosti koja je postignuta udarom u ventil.



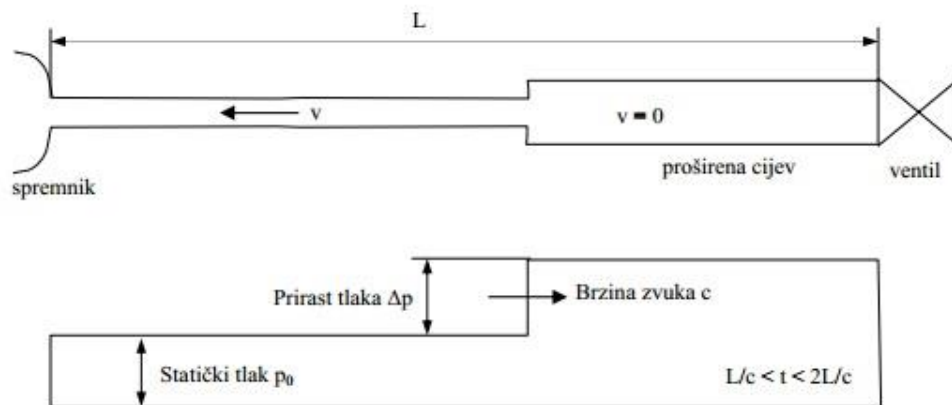
**Slika 3** – Propagacija tlačnog poremećaja prema spremniku, vrijeme  $t < L/c$  [2]

Karakteristično vrijeme potrebno da tlačni val prijeđe cijelu duljinu cijevi iznosi  $t = L/c$ . U trenutku  $t = L/c$  kompletan fluid u cijevi miruje pri tlaku  $p = p_0 + \Delta p$  (Slika 4). Budući da je u trenutku  $t = L/c$  tlak u spremniku,  $p_0$ , različit od tlaka u cijevi,  $p_0 + \Delta p$ , ovo stanje je neravnotežno.



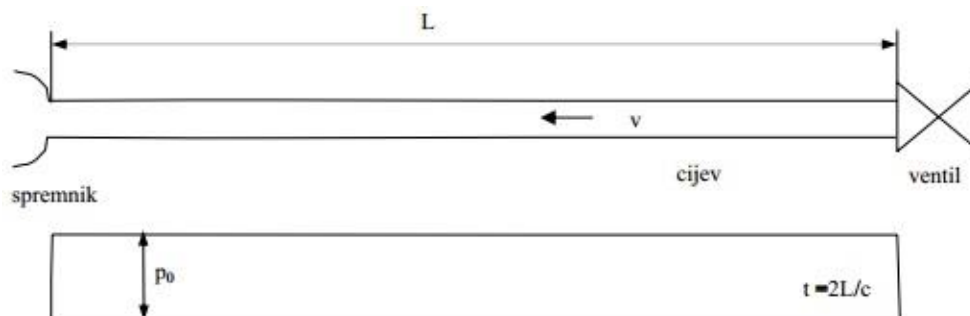
**Slika 4** – Sustav u trenutku  $t = L/c$  [2]

Zbog takvog neravnotežnog stanja, tj. razlike tlaka u cijevi i tlaka u spremniku, fluid počinje strujati iz cijevi prema spremniku brzinom  $v_0 = \Delta p / \rho c$ . Porast tlaka  $\Delta p$  se pretvara u kinetičku energiju natražnog strujanja. Sve to uzrokuje frontu tlačnog poremećaja koja putuje prema ventilu (Slika 5). Lijevo od fronte vlada tlak  $p_0$ , a desno fluid još uvijek miruje pod tlakom  $p_0 + \Delta p$ . Ovaj tlačni val putuje unutar vremenskog intervala  $t = \left(\frac{L}{c}, \frac{2L}{c}\right)$ .



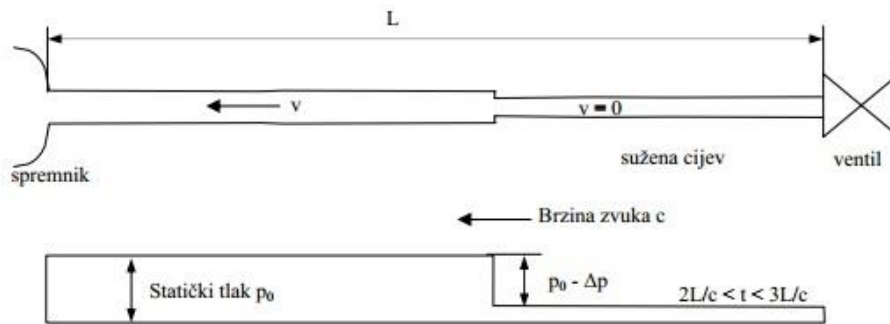
**Slika 5** – Propagacija tlačnog poremećaja prema ventilu, vrijeme  $\frac{L}{c} < t < \frac{2L}{c}$  [2]

U trenutku  $t = \frac{2L}{c}$  rasteretni val dolazi do ventila, a fluid u cijevi struji brzinom  $v_0$  prema spremniku pri tlaku  $p_0$  (Slika 6). Ovakvo stanje je i dalje neravnotežno i čim ono nastupi sloj fluida uz ventil pokušava proći kroz njega i nastaviti strujati uzvodno. Budući da fluid ne može strujati kroz ventil njegova količina gibanja se pretvara u pad tlaka.



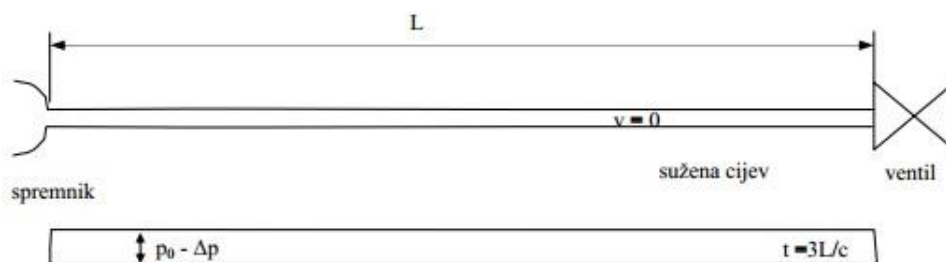
**Slika 6** – Sustav u trenutku  $t = 2L/c$  [2]

Sloj fluida uz ventil se zaustavlja i prelazi u stanje mirovanja pri sniženom tlaku čiji je iznos jednak  $p = p_0 - \Delta p$  (prema Allievijevom izrazu  $\Delta p = \rho c v_0$ ). Ponovno se stvara fronta tlačnog poremećaja koja putuje od ventila prema spremniku. Lijevo od fronte fluid struji nizvodno (prema spremniku) brzinom  $v_0$  pri tlaku  $p_0$  u dijelu cijevi početnog promjera dok desno od fronte fluid miruje pri sniženom tlaku u dijelu cijevi čiji je promjer sužen (Slika 7). Ovaj tlačni val putuje sve dok fronta tlačnog poremećaja ne dođe do spremnika tj. u vremenskom intervalu  $t = \left(\frac{2L}{c}, \frac{3L}{c}\right)$ .



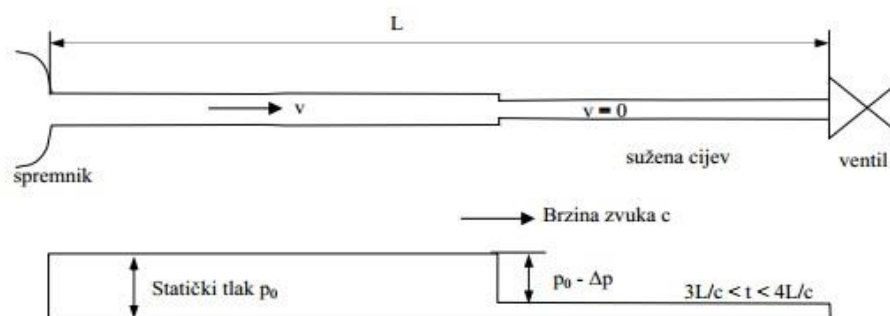
**Slika 7** – Propagacija tlačnog poremećaja prema spremniku, vrijeme  $\frac{2L}{c} < t < \frac{3L}{c}$  [2]

U trenutku  $t = 3L/c$  fronta tlačnog poremećaja dolazi do spremnika, a sužena cijev je ispunjena mirujućim fluidom pri sniženom tlaku  $p = p_0 - \Delta p$  (Slika 8). Budući da u spremniku vlada statički tlak  $p_0$  koji je viši od tlaka u cijevi,  $p = p_0 - \Delta p$ , ovakvo stanje je neravnotežno.



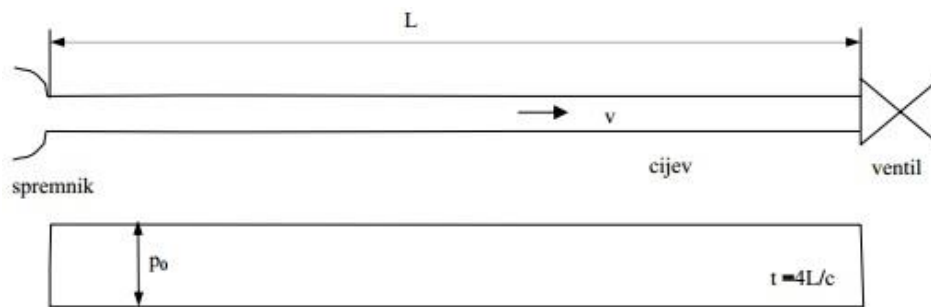
**Slika 8** – Sustav u trenutku  $t = 3L/c$  [2]

Zbog navedene razlike tlakova između spremnika i cijevi fluid ponovno utječe u cijev brzinom  $v_0$  uzrokujući nastajanje fronte tlačnog poremećaja koja podiže tlak unutar cijevi na tlak  $p_0$ . Putovanjem fronte tlačnog poremećaja od spremnika do ventila, vremenski interval  $t = \left(\frac{3L}{c}, \frac{4L}{c}\right)$ , cijev se širi na svoj početni promjer (Slika 9).



**Slika 9** – Propagacija tlačnog poremećaja prema ventilu, vrijeme  $\frac{3L}{c} < t < \frac{4L}{c}$  [2]

U trenutku  $t = 4L/c$  fronta tlačnog poremećaja se sudara s ventilom što sustav dovodi u početno stanje tj. u stanje u kojem se sustav nalazio u trenutku zatvaranja ventila ( $t = 0$ ).



**Slika 10** – Sustav u trenutku  $t = 4L/c$  [2]

Budući da u obzir nije uzeto trenje, tj. viskoznost fluida, ovaj proces će se neprestano ponavljati s periodom  $t = 4L/c$ . U slučaju strujanja viskoznog fluida amplituda tlačnog poremećaja će se s vremenom smanjivati, a fluid nakon određenog vremena prijeći u stanje mirovanja.

### 3. METODA KARAKTERISTIKA

Metoda karakteristika je numerička metoda koja se koristi za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi hiperboličkog tipa. Metodom karakteristika parcijalne diferencijalne jednadžbe (u daljnjem tekstu: PDJ) transformiraju se u obične diferencijalne jednadžbe (u daljnjem tekstu: ODJ). PDJ pretvaramo u karakterističan oblik i pronalazimo jednadžbe njihovih karakteristika. Te karakteristike su linije u  $X - Y$  ravnini uzduž kojih vrijede ODJ. Kako bi se metoda pobliže ilustrirala za primjer je uzet sustav jednadžbi kojeg čine jednadžba kontinuiteta (1a) i jednadžba količine gibanja (1b) kojima se opisuje jednodimenzijnsko izotermičko strujanje slabo stlačivog fluida u elastičnom cjevovodu kruto vezanom za podlogu.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0 \quad (1b)$$

U gornjim jednadžbama su:  $x$  koordinata u pravcu osi cijevi,  $t$  vrijeme,  $h$  piezometrička visina,  $v$  srednja brzina strujanja fluida,  $c$  brzina širenja tlačnog poremećaja,  $g$  gravitacijsko ubrzanje,  $\lambda$  faktor trenja te  $D$  promjer cjevovoda.

Sustav jednadžbi (1a) i (1b) predstavlja sustav nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi hiperboličkog tipa bez općeg analitičkog rješenja u kojemu su nepoznanice piezometrička visina  $h = h(x, t)$  te srednja brzina strujanja fluida  $v = v(x, t)$ . Sustav se može riješiti numerički pomoću zadanih početnih i rubnih uvjeta uz pomoć metode karakteristika (Prema Fox, 1989).

Množenjem jednadžbe (1b) s brzinom širenja tlačnog poremećaja  $c$  dobije se:

$$c \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{vc}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + c\lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0 \quad (2)$$

Zatim se zbrajaju jednadžbe (1a) i (2):

$$(v + c) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c}{g} (v + c) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c}{g} \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (3)$$

Jednadžba (3) se dalje može srediti tako da je pomnožimo s  $\frac{g}{c}$  i izlučimo derivacije piezometričke visine i brzine:

$$\left[ (v + c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{g}{c} h + \left[ (v + c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right] v + \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (4)$$

Usporedbom izraza (4) s lančanim pravilom deriviranja funkcije  $\phi[x(t), t]$  koje glasi:

$$\frac{d\phi[x(t), t]}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5)$$

vidljivo je da duž pravca  $(v + c) = dx/dt$  vrijedi:

$$\left[ (v + c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right] h = \frac{dh}{dt} \quad (6a)$$

$$\left[ (v + c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right] v = \frac{dv}{dt} \quad (6b)$$

Koristeći izraze (6a) i (6b) izraz (4) se može srediti do konačnog oblika.

$$\frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (7a)$$

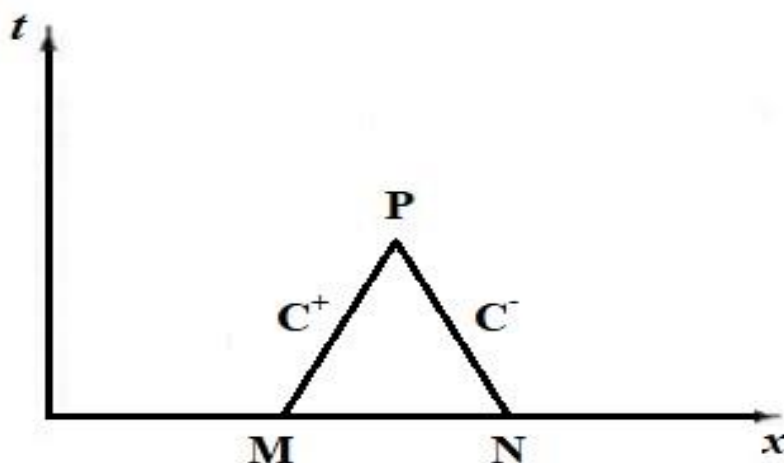
Izraz (7a) predstavlja ODJ koja se naziva karakteristična jednadžba. Ona vrijedi unutar  $x - t$  ravnine duž pozitivne karakteristike ( $C^+$ ) nagiba  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v+c}$ .

Oduzimanjem jednadžbi (1a) i (2) te provođenjem identičnog postupka dolazi se do izraza:

$$-\frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (7b)$$

Izraz (7b) također predstavlja ODJ koja se naziva karakteristična jednadžba. Ona vrijedi unutar  $x - t$  ravnine duž negativne karakteristike ( $C^-$ ) nagiba  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v-c}$ .

Budući da je za strujanja nestlačivog fluida brzina širenja tlačnog poremećaja  $c$  mnogo veća od brzine strujanja fluida  $v$  karakteristike su u tom slučaju približno pravci (Slika 11).

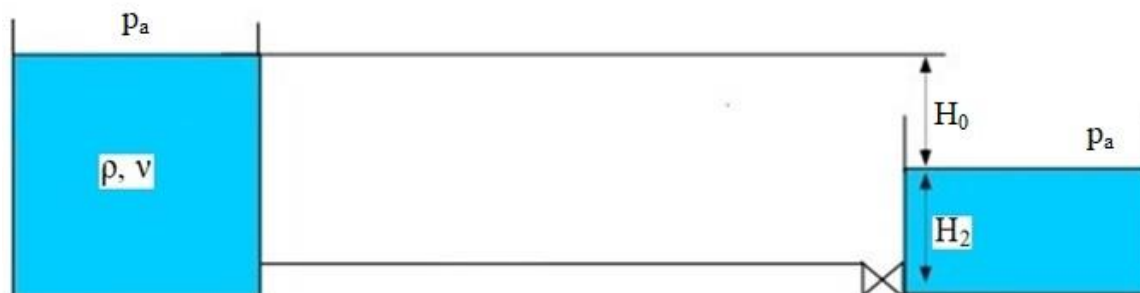


**Slika 11** – Izgled karakteristika u  $x - t$  ravnini za strujanje nestlačivog fluida



## 4. HIDRODINAMIČKI I NUMERIČKI MODEL STRUJANJA

Za potrebe računalne simulacije iz literature (Šavar, 2005.) preuzet je sustav Spremnik – cijev – ventil (Slika 12) sa zadanim parametrima (Tablica 1).



**Slika 12** – Promatrani sustav Spremnik – cijev – ventil [2]

**Tablica 1** – Parametri sustava Spremnik – cijev – ventil [2]

OPIS	OZNAKA	IZNOS	MJERNA JEDINICA
Duljina cijevi	$L$	91,44	m
Promjer cijevi	$D$	10,97	mm
Debljina stijenke	$s$	0,81	mm
Visina hrapavosti stijenke cijevi	$k$	0,1	mm
Modul elastičnosti cijevi	$E$	$1,1003 \cdot 10^{11}$	Pa
Razina vode u desnom spremniku	$H_2$	7,2	m
Razlika razina vode između spremnika	$H_0$	0,1275	m
Razina vode u lijevom spremniku	$H_1 = H_2 + H_0$	7,3275	m
Gustoća vode	$\rho$	992,8	kg/m <sup>3</sup>
Kinematička viskoznost vode	$\nu$	$0,6414 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
Volumni modul elastičnosti vode	$K$	$1,1003 \cdot 10^9$	Pa
Gravitacijsko ubrzanje	$g$	9,80665	m <sup>2</sup> /s
Atmosferski tlak	$p_a$	$1,01325 \cdot 10^5$	Pa

Do zatvaranja ventila, potaknut razlikom visina između spremnika, fluid kroz cjevovod struji u stacionarnom režimu strujanja, a nakon zatvaranja ventila dolazi do hidrauličkog udara i uspostavlja se nestacionarni režim strujanja koji se proračunava metodom karakteristika.

Cjevovod se dijeli na  $z = I - 1$  segmenta gdje je  $I$  ukupni broj čvorova. Čvorovi predstavljaju sjecišta pozitivnih i negativnih karakteristika te sjecišta karakteristika i koordinatnih osi  $x - t$  koordinatnog sustava. U navedenim se sjecištima u nestacionarnom režimu strujanja proračunava stanje sustava. Brzina i tlak fluida unutar cjevovoda u stacionarnom režimu smatraju se početnim uvjetima proračuna nestacionarnog režima strujanja.

Usvojeni hidrodinamički i numerički model ne uključuje mogućnost pojave kavitacije, te u slučaju njene pojave proračun treba prekinuti ili rezultate tumačiti s dozom opreza.

#### 4.1. PRORAČUN STACIONARNOG REŽIMA STRUJANJA

Hidraulički proračun cjevovoda u režimu stacionarnog strujanja se temelji na jednadžbi kontinuiteta

$$Q = v_0 A = \text{konst.} \quad (8)$$

i modificiranoj Bernoullijevoj jednadžbi duž strujnice koja za strujanje između dva otvorena velika spremnika glasi

$$\frac{p_a}{\rho g} + H_1 = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + H_2 + h_f \quad (9)$$

Gdje je  $h_f$  visina linijskih gubitaka u cjevovodu, koji su posljedica viskoznosti fluida tj. trenja, a  $v_0$  brzina stacionarnog strujanja fluida.

Linijski gubici se modeliraju uz pomoć izraza Darcy–Weisbacha koji glasi:

$$h_f = \lambda \frac{L v_0^2}{D 2g} \quad (10)$$

gdje je  $\lambda$  faktor trenja koji je određen eksperimentalno, a u općem slučaju je funkcija Reynoldsovog broja (11) i relativne visine hrapavosti stijenke cijevi  $k/D$  (Virag, Šavar, Džijan 2017).

$$Re = \frac{v_0 D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (11)$$

Strujanje u okruglim cijevima se smatra laminarnim do vrijednosti Reynoldsovog broja  $Re = 2300$ , a turbulentnim pri vrijednostima Reynoldsova broja  $Re > 2300$ , no treba se uzeti u obzir da je pri vrijednostima Reynoldsova broja od 2300 do 4000 faktor trenja izrazito nepredvidljiv. Za proračun faktora trenja pri laminarnom strujanju se koristi formula:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (12a)$$

U području turbulentnog strujanja se najčešće koristi eksplicitna formula Swamee–Jainn (12b), koja je dovoljno točna za inženjerske proračune, a primjenjiva je za čitavo područje Moodyjeva dijagrama uz  $Re > 5000$  (Virag, Šavar, Džijan 2017.).

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[ \ln \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (12b)$$

#### 4.1.1. NEVISKOZNO STRUJANJE

U slučaj neviskoznog strujanja trenje se ne uzima u obzir pa su linijski gubici u Bernoullijevoj jednadžbi (9) jednaki nuli. Kao jedina nepoznanica u jednadžbi (9) tada ostaje brzina fluida pa nju iz iste možemo i izračunati:

$$v_0 = \sqrt{2gH_0} = 1,581 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (13)$$

Piezometrička visinu na ulazu u cjevovod ( $i = 1$ ) se također može izračunati putem Bernoullijeve jednadžbe:

$$h_{i=1} = \frac{p_{(i=1)}}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} + H_1 - \frac{v_0^2}{2g} = 17,61 \text{ m} \quad (14)$$

Budući da je strujanje neviskozno brzina i tlak su konstantni kroz cijeli cjevovod (tj. u svim čvorovima).

#### 4.1.2. VISKOZNO STRUJANJE

U slučaju viskozno strujanja u obzir se mora uzeti trenje, tj. linijski gubici, pa kada se iz Bernoullijeve jednadžbe (9) izrazi brzina ona poprima sljedeći oblik:

$$v_0 = \sqrt{2gH_0 \left( 1 + \lambda \frac{L}{D} \right)} \quad (15)$$

Budući da faktor trenja ovisi o Reynoldsovom broju (12), a on o brzini (11) potrebno je iteracijom između (11), (12) i (15) doći do rješenja. Nakon par iteracija dobije se da je brzina

$$v_0 = 0,07997 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zatim se iz jednadžbe (14) može izračunati da je piezometrička visina na ulazu u cjevovod:

$$h_{i=1} = 17,73 \text{ m}$$

Piezometrička visina u svakom idućem čvoru manja je za  $h_f / (I - 1)$ , gdje je  $I$  ukupni broj čvorova.

## 4.2. PRORAČUN NESTACIONARNOG REŽIMA STRUJANJA

Matematički model nestacionarnog jednodimenzijskoga strujanja fluida kroz cijev kružnoga presjeka temelji se na jednadžbi kontinuiteta (1a) i jednadžbi količine gibanja (1b). Brzina zvuka, tj. brzina širenja tlačnog poremećaja  $c$  definirana je jednadžbom:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{sE} \right)}} \quad (16)$$

gdje je:  $\rho$  gustoća fluida,  $K$  volumenski modul elastičnosti fluida,  $D$  promjer cjevovoda,  $s$  debljina stijenke cjevovoda te  $E$  modul elastičnosti materijala cijevi

Provođenjem metode karakteristika iz sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (1a) i (1b) dolazi se do karakterističnih jednadžbi (7) (Pogl. 3. Metoda karakteristika).

Karakteristične jednadžbe (7) su obične diferencijalne jednadžbe koje se rješavaju numerički, u ovom primjeru metodom konačnih razlika. Metodom konačnih razlika infinitezimalni diferencijali  $dh$ ,  $dv$ ,  $dx$  i  $dt$  iz jednadžbi (7) se zamjenjuju konačnim razlikama  $\Delta h$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta x$  i  $\Delta t$ .

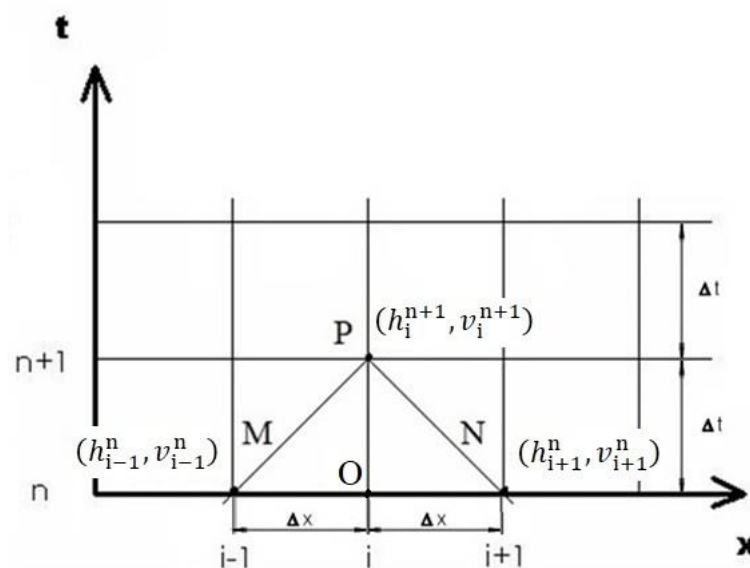
$$\frac{g \Delta h}{c \Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} + \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (17a)$$

$$-\frac{g \Delta h}{c \Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} + \lambda \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (17b)$$

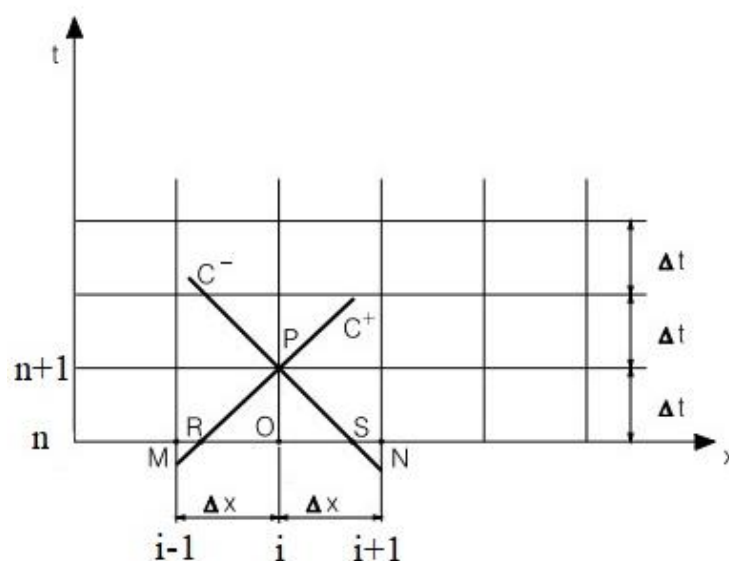
Član  $\Delta x$  predstavlja prostorni korak integracije, tj. duljinu segmenata na koje se cjevovod dijeli, a  $\Delta t$  predstavlja vremenski korak integracije koji mora zadovoljavati Courant – Friedrichs – Lewy (u daljnjem tekstu: CFL) uvjet (18) da bi simulacija bila stabilna (Šavar, 2005.).

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max|v \pm c|} = \text{CFL} \frac{\Delta x}{c} \quad (18)$$

CFL uvjet se koristi da bi se odredio maksimalni dopušteni vremenski korak uz održavanje stabilnosti simulacije. CFL uvjet je zadovoljen kada je unutar jednog vremenskog koraka duljina puta informacije ( $c\Delta t$ ) manja od udaljenosti dva čovra ( $\Delta x$ ), odnosno kada za dani element vrijedi  $CFL \leq 1$ . Zaključno: informacija se iz određenog čvora mora propagirati samo do njemu susjednih čvorova. Za vrijednosti  $CFL > 1$  informacija putuje kroz više od jednog elementa ( $c\Delta t > \Delta x$ ), CFL uvjet nije zadovoljen te dolazi do divergiranja rezultata simulacije. U slučaju elemenata različite duljine maksimalni dopušteni vremenski korak se bira za najkraći element mreže kako bi svi ostali (veći) elementi zadovoljili CFL uvjet i održali stabilnost.



**Slika 13** – Prikaz karakteristika zadanog sustava u  $x - t$  ravnini za  $CFL = 1$  [2]



**Slika 14** – Prikaz karakteristika zadanog sustava u  $x-t$  ravnini za  $CFL < 1$  [2]

Točka P predstavlja poziciju točke O (čvora  $i$  u vremenskom trenutku  $n$ ) u novom vremenskom trenutku  $n + 1$  u kojem su piezometrička visina  $h_P = h_i^{n+1}$  i brzina  $v_P = v_i^{n+1}$  nepoznate. Iz točke P povlače se dvije karakteristike, pozitivna i negativna, koje sijeku pravac  $t = n$  koji predstavlja prethodni vremenski trenutak.

Ako vrijedi  $CFL = 1$  (Slika 13) karakteristike će prolaziti kroz susjedne čvorove, točke M (čvor  $i - 1$ ) i N (čvor  $i + 1$ ), čije su piezometričke visine i brzine poznate. U slučaju da vrijedi  $CFL < 1$  (Slika 14) karakteristike presijecaju pravac prethodnog vremenskog trenutka u točkama R i S te je potrebno linearnom interpolacijom doći do vrijednosti piezometričkih visina i brzina u tim točkama.

Za primjer cjevovoda podijeljenog na jednake segmente s konstantnim poprečnim presjekom, kao i zadani slučaj (Slika 12), izrazi za linearnu interpolaciju brzina glase (prema Šavar, Virag, Korbar):

$$\begin{aligned} v_R^n &= CFL v_{i-1}^n + (1 - CFL) v_i^n \\ v_S^n &= CFL v_{i+1}^n + (1 - CFL) v_i^n \end{aligned} \quad (19)$$

Dok izrazi za linearnu interpolaciju piezometričkih visina glase:

$$\begin{aligned} h_R^n &= CFL h_{i-1}^n + (1 - CFL) h_i^n \\ h_S^n &= CFL h_{i+1}^n + (1 - CFL) h_i^n \end{aligned} \quad (20)$$

Karakteristične jednadžbe postavljene duž karakteristika u kojima su infinitezimalni diferencijali zamijenjeni konačnim razlikama piezometričkih visina i brzina između točaka P i R te P i S (Slika 13) glase:

$$\frac{g}{c} (h_i^{n+1} - h_R^n) + (v_i^{n+1} - v_R^n) + \frac{\lambda v_R^n |v_R^n| \Delta t}{2D} = 0 \quad (21a)$$

$$-\frac{g}{c} (h_i^{n+1} - h_S^n) + (v_i^{n+1} - v_S^n) + \frac{\lambda v_S^n |v_S^n| \Delta t}{2D} = 0 \quad (21b)$$

Zbrajanjem karakterističnih jednadžbi dolazi se do izraza za brzinu  $v_i^{n+1}$  u točki P:

$$v_i^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{g}{c} (h_R^n - h_S^n) + \frac{1}{2} (v_R^n + v_S^n) - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda v_R^n |v_R^n| \Delta t}{2D} + \frac{\lambda v_S^n |v_S^n| \Delta t}{2D} \right) \quad (22)$$

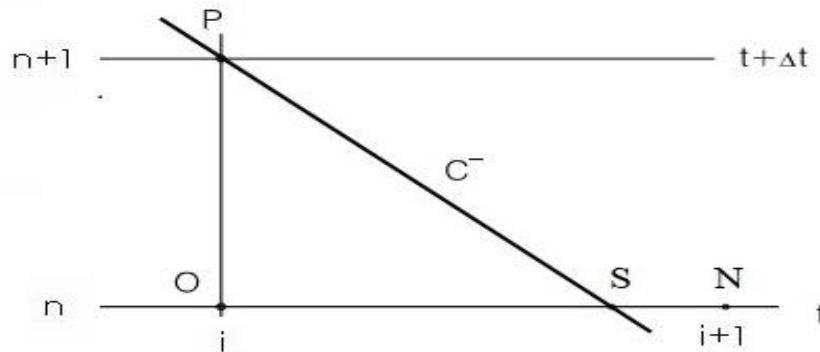
Oduzimanjem karakterističnih jednadžbi (21) dolazi se do izraza za piezometričku visinu u točki P:

$$h_i^{n+1} = \frac{1}{2} (h_R^n + h_S^n) + \frac{1}{2} \frac{c}{g} (v_R^n - v_S^n) - \frac{1}{2} \frac{c}{g} \left( \frac{\lambda v_R^n |v_R^n| \Delta t}{2D} - \frac{\lambda v_S^n |v_S^n| \Delta t}{2D} \right) \quad (23)$$

Budući da su početni uvjeti već poznati (Pogl 4.1.1. Nevizkozno strujanje i 4.1.2. Viskozno strujanje) potrebno je još samo odrediti rubne uvjete. Za zadani sustav (Slika 12) rubni uvjeti se zadaju na početku cijevi, tj. na izlazu iz spremnika, i na kraju cijevi tj. na mjestu ventila.

#### 4.2.1. RUBNI UVJETI NA STRANI SPREMNIKA

Budući da se spremnik nalazi na uzvodnom kraju cijevi rubni uvjet se rješava duž negativne karakteristike (Slika 15).



Slika 15 – Spremnik kao rubni uvjet [2]

Karakteristična jednadžba duž negativne karakteristike (21b) sadrži dvije nepoznanice  $h_i^{n+1}$  i  $v_i^{n+1}$ . Da bi se rubni uvjet uspješno proračunao potrebna je još jedna jednadžba, a ona se može dobiti iz uvjeta da je piezometrička visina u spremniku konstantna, tj. općenito da je ona funkcija vremena:

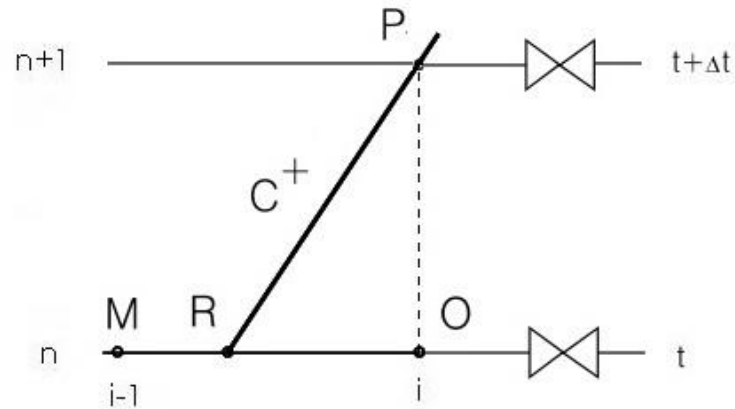
$$h_i^{n+1} = h_i^n(t) \quad (24)$$

Izraz za brzinu u čvoru P se zatim može dobiti izlučivanjem brzine  $v_i^{n+1}$  iz karakteristične jednadžbe (21b) koja vrijedi duž negativne karakteristike.

$$v_i^{n+1} = \frac{g}{c} (h_i^{n+1} - h_S^n) + v_S^n - \frac{\lambda v_S^n |v_S^n| \Delta t}{2D} \quad (25)$$

#### 4.2.2. RUBNI UVJETI NA STRANI VENTILA

Za modeliranje rubnih uvjeta na nizvodnom kraju cijevi, tj. ventilu koristi se karakteristična jednadžba (21a) koja vrijedi duž pozitivne karakteristike (Slika 16).



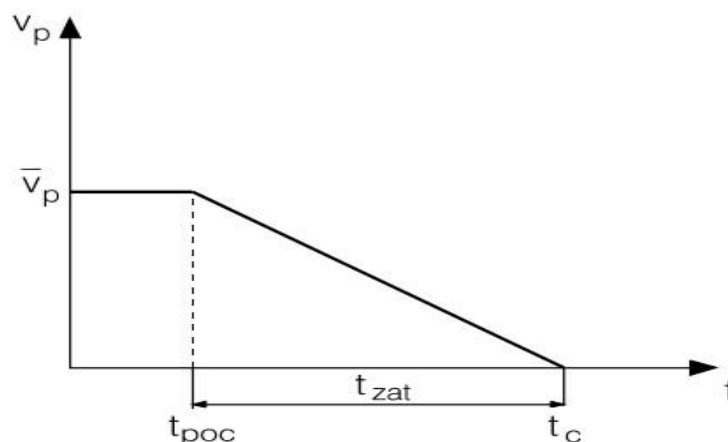
Slika 16 – Ventil kao rubni uvjet [2]

Budući da u karakterističnoj jednadžbi (21a) postoje dvije nepoznanice,  $h_i^{n+1}$  i  $v_i^{n+1}$ , potrebno je odrediti još jednu jednadžbu da bi sustav bio rješiv. U slučaju da je zatvaranje ventila trenutno dodatna jednadžba koja vrijedi za zatvoreni ventil glasi:

$$v_i^{n+1} = 0 \quad (26)$$

No u slučaju kada se ventil postupno zatvara pretpostavit će se linearna promjena brzine (Slika 17) te će u tom slučaju rubni uvjet tijekom zatvaranja ventila glaziti:

$$v_i^{n+1} = \bar{v}_i^{n+1} \left( 1 - \frac{t - t_{poc}}{t_c - t_{poc}} \right) \quad (27)$$



Slika 17 – Promjena brzine kod postupnog zatvaranja ventila [2]



Brzina  $v_i^{n+1}$  ima maksimalnu vrijednost  $\overline{v_i^{n+1}}$  u trenutku početka zatvaranja  $t_{poc}$ , a minimalnu ( $v_i^{n+1} = 0$ ) u trenutku potpunog zatvaranja ventila  $t_c$  (Slika 17). Jednadžba (27) vrijedi u vremenskom intervalu  $t = [t_{poc}, t_c]$ , a od vremenskog intervala  $t > t_c$  ponovno vrijedi jednadžba (26).

Izraz za piezometričku visinu u čvoru P se zatim može dobiti izlučivanjem piezometričke visine  $h_i^{n+1}$  iz karakteristične jednadžbe (21a) koja vrijedi duž pozitivne karakteristike.

$$h_i^{n+1} = h_R^n - \frac{c}{g} (v_i^{n+1} - v_R^n) - \frac{c \lambda v_R^n |v_R^n| \Delta t}{g 2D} \quad (28)$$

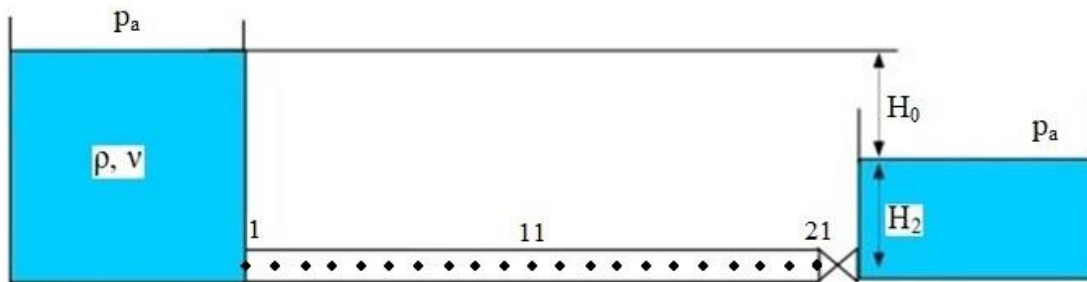
## 5. ANALIZA REZULTATA RAČUNALNE SIMULACIJE

Koristeći jednadžbe (22) i (23) kao i početne (4.1.1.) te rubne (4.2.1. i 4.2.2.) uvjete uz pomoć skripte (Prilog 1) u programskom paketu MATLAB® simulira se stacionarno strujanje fluida te nestacionarno strujanje prouzrokovano hidrauličkim udarom uslijed zatvaranja ventila u cjevovodu zadanog sustava (Slika 12, Tablica 1). Cilj je analizirati utjecaj promjene prostorno vremenskog koraka integracije, viskoznosti fluida te vremena zatvaranja ventila na promjene piezometričke visine i brzine u cjevovodu. Za referentni primjer (Slika 18) cijev duljine  $L = 91,44$  m podijeljena je na 20 segmenata (broj čvorova  $I = 21$ ). Tako podijeljena cijev smatra se referentnom mrežom za koju uz  $CFL = 1$  prostorni i vremenski korak iznose:

$$\Delta x = \frac{L}{I - 1} = 4,572 \text{ m} \quad (29)$$

te

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{c} = 0,0034 \text{ s} \quad (30)$$



Slika 18 – Prikaz položaja čvorova u zadanom sustavu

Rezultati su prikazani dijagramski. Na ordinatnoj osi prikazani su bezdimenzijski iznosi piezometričke visine  $\left(\frac{h-h_{\text{MIN}}}{h_{\text{MAX}}-h_{\text{MIN}}}\right)$  i brzine  $\left(\frac{v}{v_{\text{MAX}}}\right)$ , a na apscisnoj osi vrijeme trajanja simulacije iskazano u sekundama.

$h_{\text{MAX}}$  označava maksimalnu dostignutu piezometričku visinu u cjevovodu za vrijeme izvođenja simulacije. Za neviskozno strujanje ona je jednaka zbroju piezometričke visine stacionarnog strujanja i prirasta piezometričke visine koji je posljedica naglog zatvaranja ventila.

$$h_{\text{MAX}} = h_{\text{STAC}} + \Delta h = h_{\text{STAC}} + cv_0/g \quad (31)$$

$h_{\text{MIN}}$  označava minimalnu dostignutu piezometričku visinu u cjevovodu za vrijeme izvođenja simulacije.

Za neviskozno strujanje ona je jednaka razlici piezometričke visine stacionarnog strujanja i pada piezometričke visine koji je posljedica prolaska rasteretnog vala kroz cjevovod.

$$h_{\text{MIN}} = h_{\text{STAC}} - \Delta h = h_{\text{STAC}} - cv_0/g \quad (32)$$

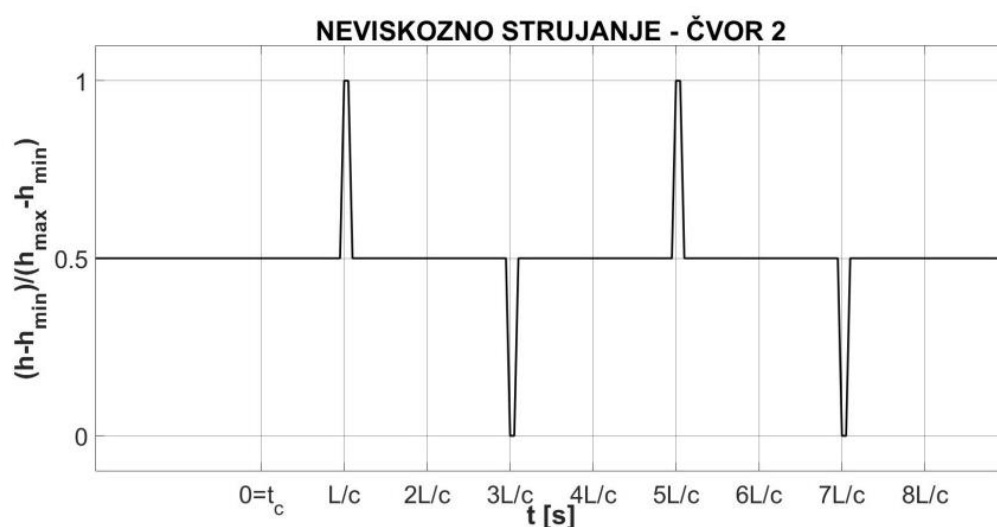
$v_{\text{MAX}}$  označava maksimalnu dostignutu brzinu u cjevovodu za vrijeme izvođenja simulacije, a ona je jednaka brzini stacionarnog strujanja.

$$v_{\text{MAX}} = v_0 \quad (33)$$

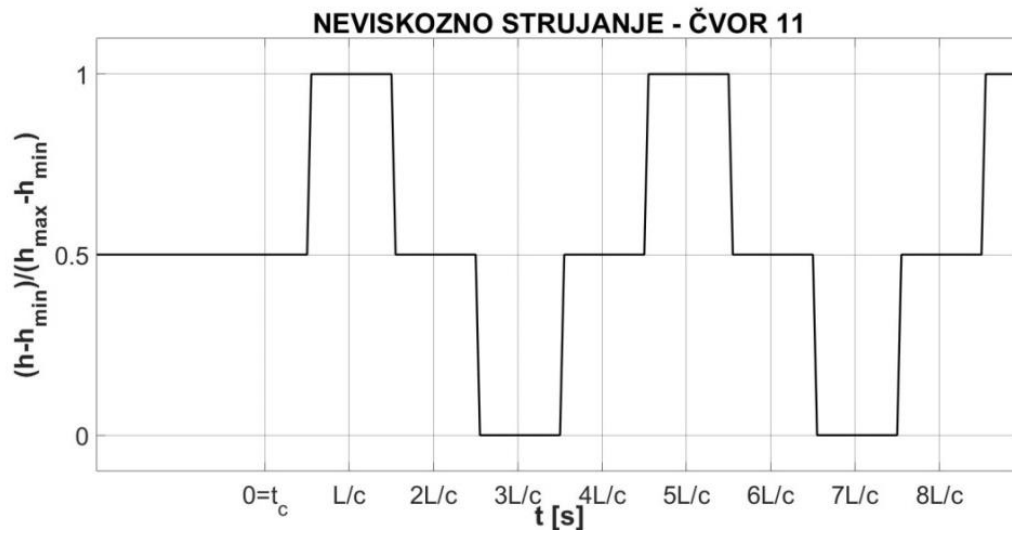
Na apscisnoj osi vrijeme je izraženo kao karakteristično vrijeme  $L/c$  kako bi se jednostavnije prikazala periodičnost hidrauličkog udara. Stacionarno strujanje prikazano je na negativnom dijelu apscisne osi u intervalu  $-2L/c < t < 0$ . Nestacionarno strujanje prouzrokovano zatvaranjem ventila prikazano je na pozitivnom dijelu apscisne osi u intervalu  $t > 0$ . Nula na apscisnoj osi označava početni trenutak zatvaranja ventila,  $0 = t_{\text{poc}}$ . U slučaju trenutnog zatvaranja ventila nula na apscisnoj osi označava početni trenutak zatvaranja i trenutak potpunog zatvaranja ventila,  $0 = t_{\text{poc}} = t_c$ .

## 5.1. PRIKAZ REZULTATA NEVISKOZNOG STRUJANJA

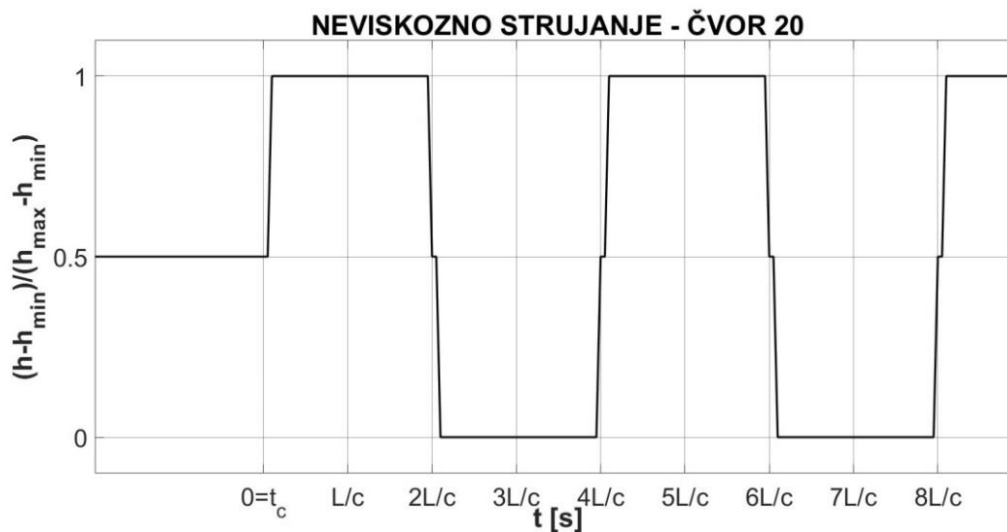
Za simulaciju neviskozno strujanja fluida u cjevovodu uslijed trenutnog zatvaranja ventila ( $0 = t_{\text{poc}} = t_c$ ) korištena je referentna mreža, cijev podijeljena na 20 segmenata (21 čvor), uz  $\text{CFL} = 1$ . Prostorni korak iznosi  $\Delta x = 4,572$  m, dok vremenski korak iznosi  $\Delta t = 0,0034$  s. Rezultati su prikazani u čvorovima koji se nalaze uz spremnik (čvor 2), na sredini cjevovoda (čvor 11) te uz ventil (čvor 20).



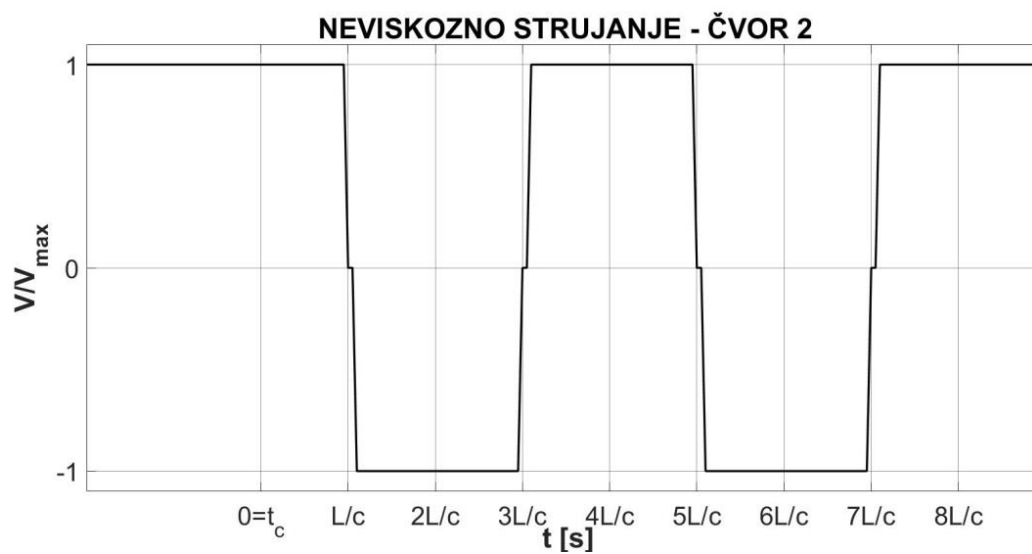
**Slika 19** – Promjena piezometričke visine u čvoru 2 pri neviskoznom strujanju fluida



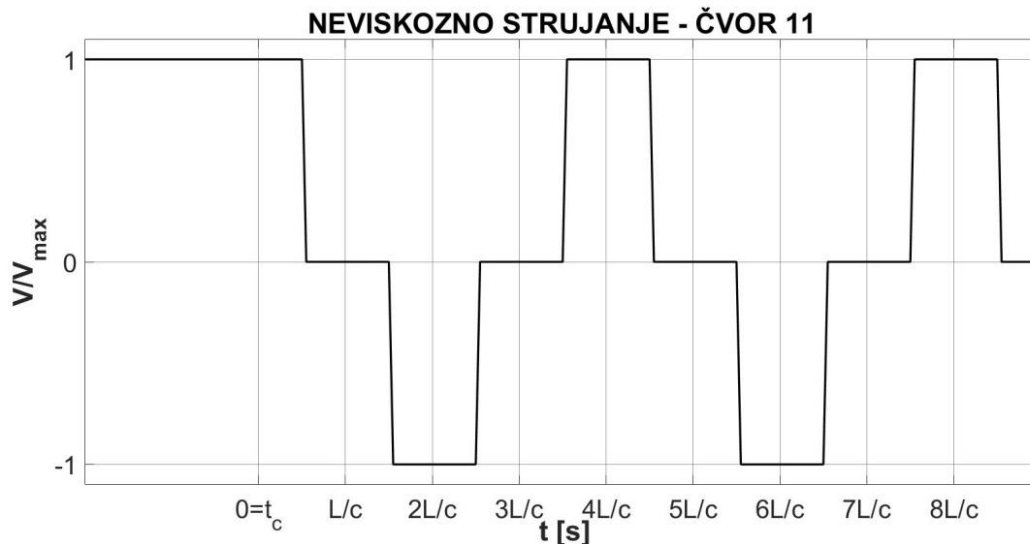
Slika 20 – Promjena piezometričke visine u čvoru 11 pri neviskoznom strujanju fluida



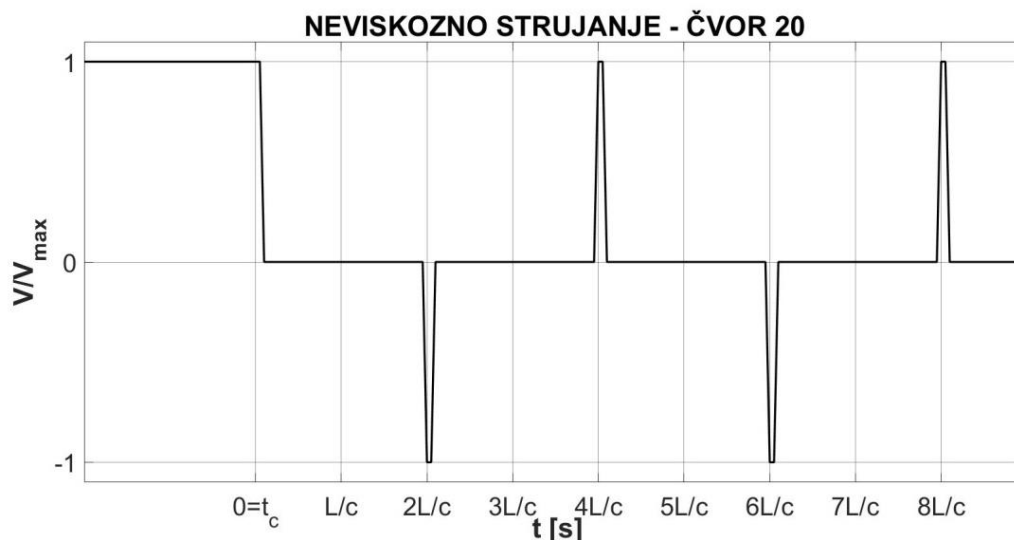
Slika 21 – Promjena piezometričke visine u čvoru 20 pri neviskoznom strujanju fluida



Slika 22 – Promjena brzine u čvoru 2 pri neviskoznom strujanju fluida



**Slika 23** – Promjena brzine u čvoru 11 pri neviskoznom strujanju fluida

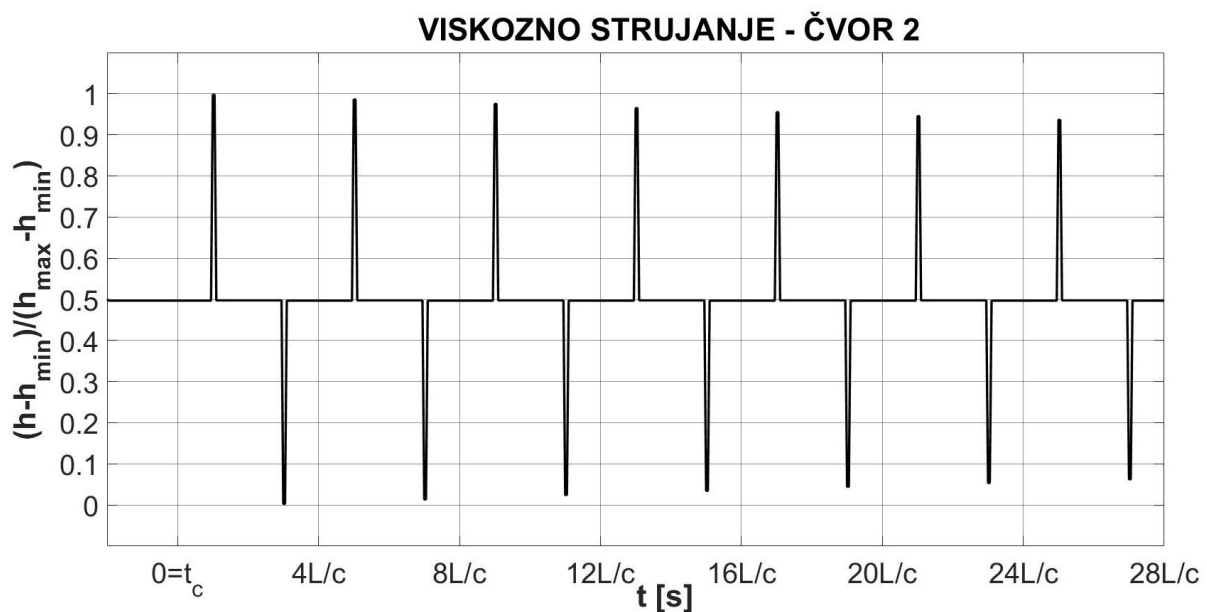


**Slika 24** – Promjena brzine u čvoru 20 pri neviskoznom strujanju fluida

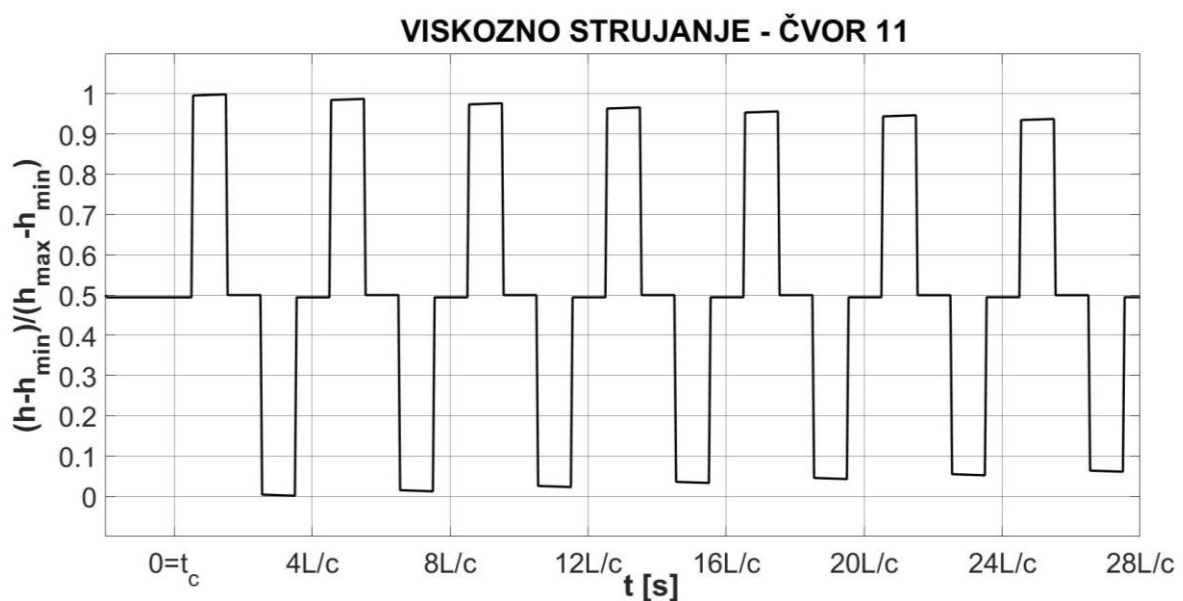
Priloženi dijagrami (Slika 19 – 24) pokazuju da je program u stanju održavati stacionarno strujanje u cjevovodu do trenutka zatvaranja ventila te potvrđuju iznesenu tezu o putovanju tlačnog poremećaja u cjevovodu tj. tezu o iznosima tlaka (piezometričke visine) i brzine u cjevovodu kao posljedica naglog zatvaranja ventila (Pogl. 2. Hidraulički udar). U dijagramima se može vidjeti repetitivnost procesa hidrauličkog udara s periodom  $t = 4L/c$ , a budući da je strujanje neviskozno amplitude piezometričke visine i brzine su konstantne.

## 5.2. UTJECAJ VISKOZNOSTI FLUIDA

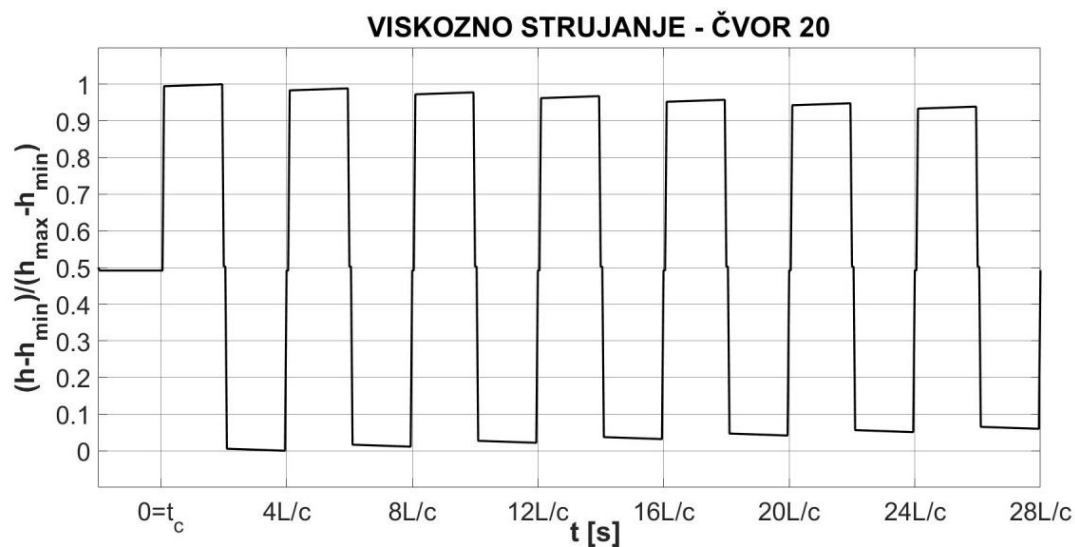
Za simulaciju viskoznog strujanja fluida u cjevovodu uslijed trenutnog zatvaranja ventila ( $0 = t_{\text{poc}} = t_c$ ) korištena je referentna mreža, cijev podijeljena na 20 segmenata (21 čvor), uz  $\text{CFL} = 1$ . Prostorni korak iznosi  $\Delta x = 4,572 \text{ m}$  dok vremenski korak iznosi  $\Delta t = 0,0034 \text{ s}$ . Za simulaciju je korišten fluid kinematičke viskoznosti iznosa  $\nu = 0,6414 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ . Rezultati su prikazani u čvorovima koji se nalaze uz spremnik (čvor 2), na sredini cjevovoda (čvor 11) te uz ventil (čvor 20).



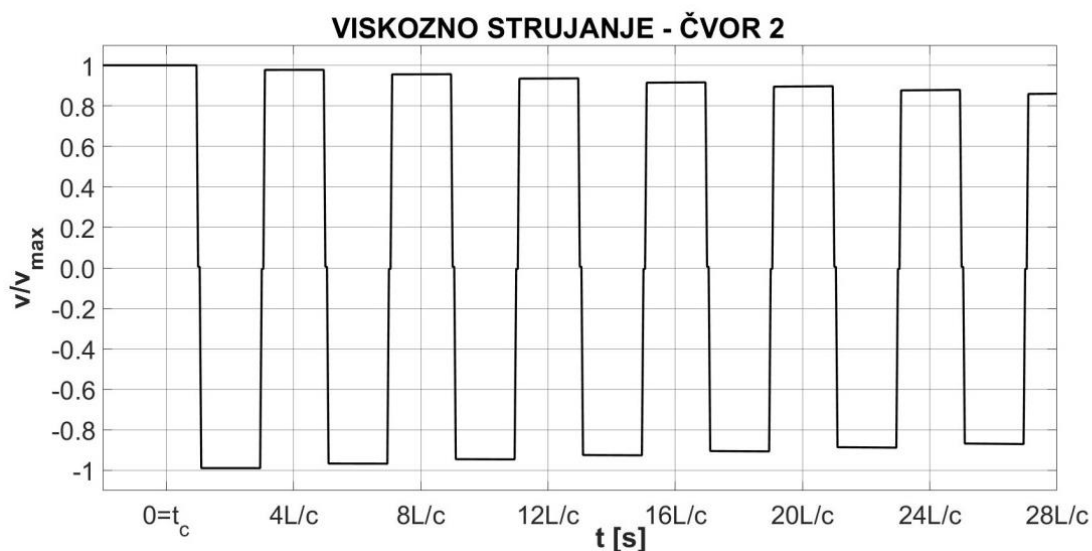
**Slika 25** – Promjena piezometričke visine u čvoru 2 pri viskoznom strujanju fluida



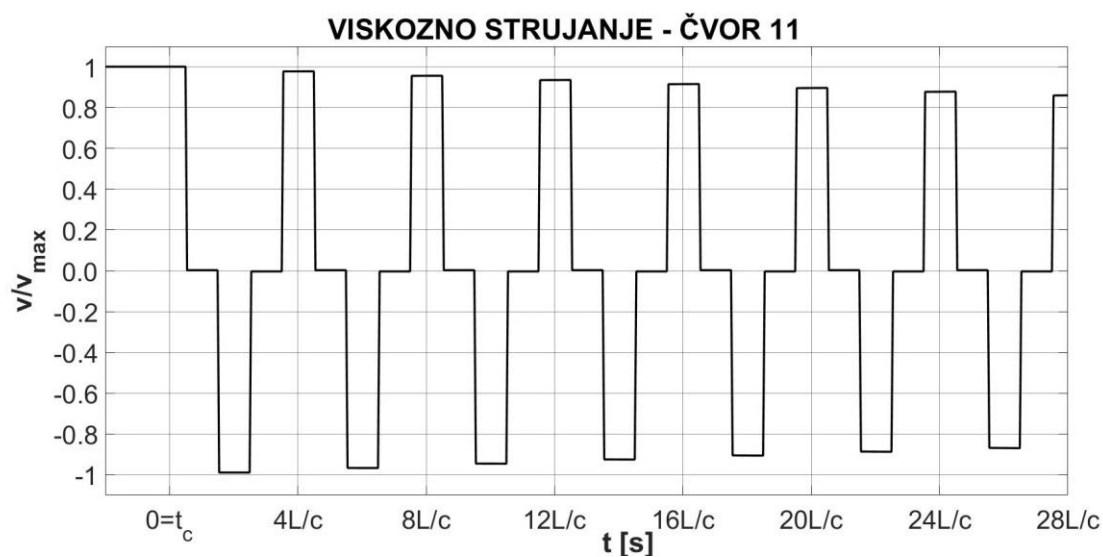
**Slika 26** – Promjena piezometričke visine u čvoru 11 pri viskoznom strujanju fluida



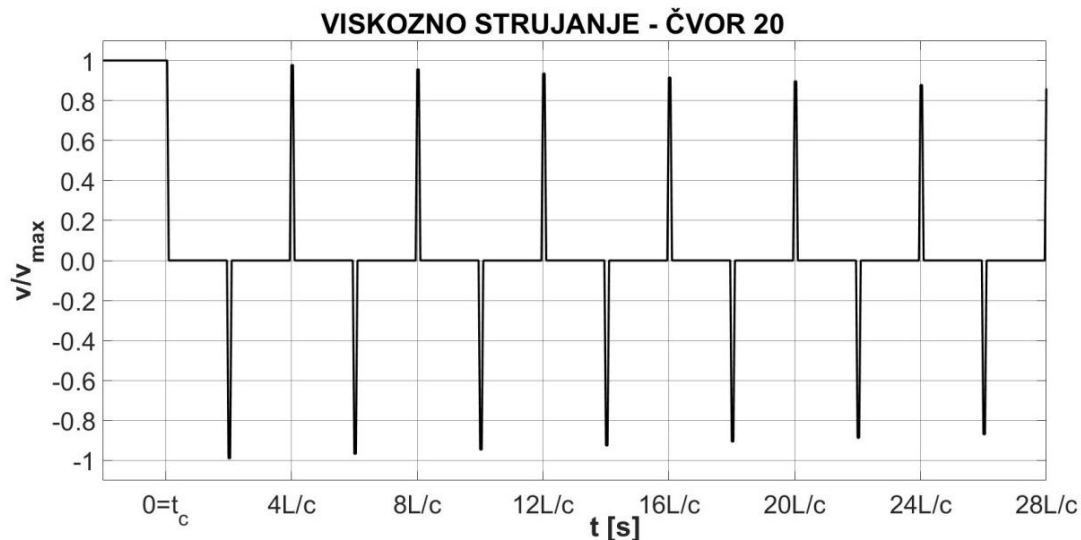
**Slika 27** – Promjena piezometričke visine u čvoru 20 pri viskoznom strujanju fluida



**Slika 28** – Promjena brzine u čvoru 2 pri viskoznom strujanju fluida



**Slika 29** – Promjena brzine u čvoru 11 pri viskoznom strujanju fluida



**Slika 30** – Promjena brzine u čvoru 20 pri viskoznom strujanju fluida

U dijagramima (Slika 25 – 30), kao i u slučaju strujanja neviskoznog fluida, može se vidjeti repetitivnost procesa hidrauličkog udara s periodom  $t = 4L/c$ . Za razliku od strujanja neviskoznog fluida, kod strujanja viskozno fluida, kao posljedica trenja dolazi do smanjivanja amplitude piezometričke visine (tlaka) i brzine s vremenom te sustav teži stanju mirovanja. Dijagrami promjene piezometričke visine (Slika 25 – 27) imaju karakteristični oblik pile. Nakon što fronta tlačnog poremećaja prođe kroz čvor i prouzroči početni skok piezometričke visine ona nastavlja rasti sve do prolaska rasteretnog vala. Ovo je specifična pojava koja se javlja kod hidrauličkog udara viskozno fluida te se, prema Živić (1995), može objasniti na sljedeći način: fronta tlačnog poremećaja se nakon zatvaranja ventila širi uzvodno prema spremniku nailazeći na sve veći tlak te zaustavljajući sloj po sloj fluida proizvodi male tlačne poremećaje koji, šireći se nizvodno, još povećavaju piezometričku visinu u čvorovima.

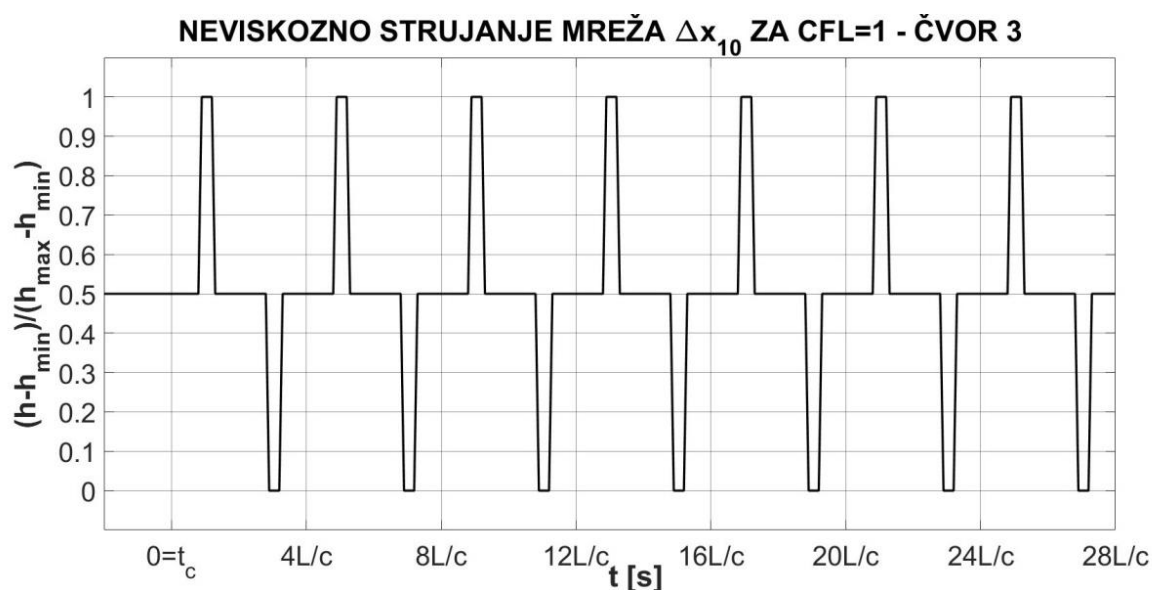


### 5.3. UTJECAJ PROMJENE PROSTORNO VREMENSKOG KORAKA INTEGRACIJE PRI NEVISKOZKOM STRUJANJU

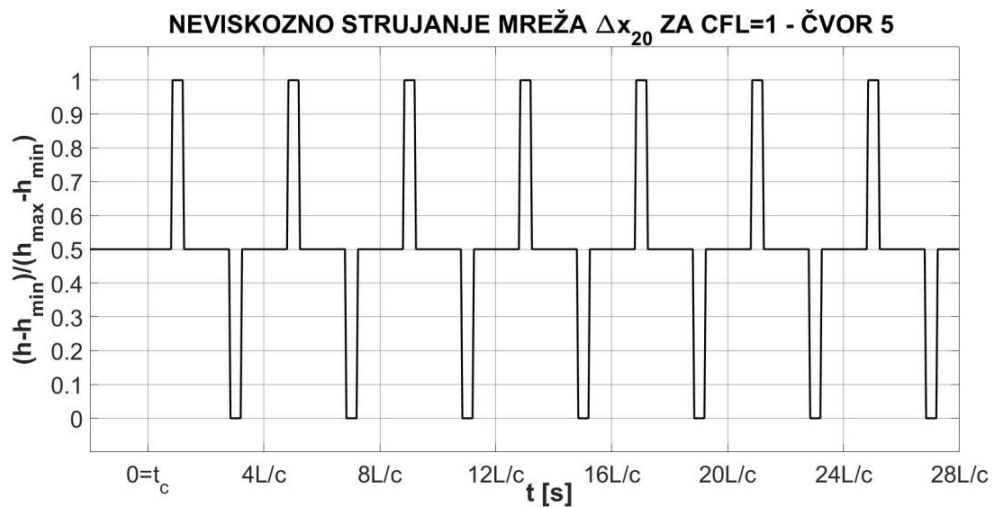
U svrhu analize utjecaja promjene prostorno vremenskog koraka simulacije osim referentne mreže, cijev podijeljena na dvadeset segmenata (21 čvor), uvedene su dvije dodatne mreže, cijev podijeljena na deset (11 čvorova) i četrdeset segmenata (41 čvor). U daljnjem tekstu mreže će se navoditi sa znakom prostornog koraka ( $\Delta x_{20}$  za referentnu mrežu, a  $\Delta x_{10}$  i  $\Delta x_{40}$  za dodatne mreže). Rezultati simulacije neviskoznog strujanja fluida u cjevovodu uslijed trenutnog zatvaranja ventila ( $0 = t_{poc} = t_c$ ) prikazani su za sve tri mreže na mjestu čvora 5 mreže  $\Delta x_{20}$  za vrijednosti CFL broja  $CFL = 1$  i  $CFL = 0,99$ . Čvor 5 mreže  $\Delta x_{20}$  se nalazi na udaljenosti 18,288 m od spremnika. Mjesto čvora 5 referentne mreže jednako je mjestu čvora 3 mreže  $\Delta x_{10}$  te čvora 9 mreže  $\Delta x_{40}$ .

#### 5.3.1. UTJECAJ PROMJENE PROSTORNO VREMENSKOG KORAKA INTEGRACIJE PRI NEVISKOZKOM STRUJANJU ZA $CFL = 1$

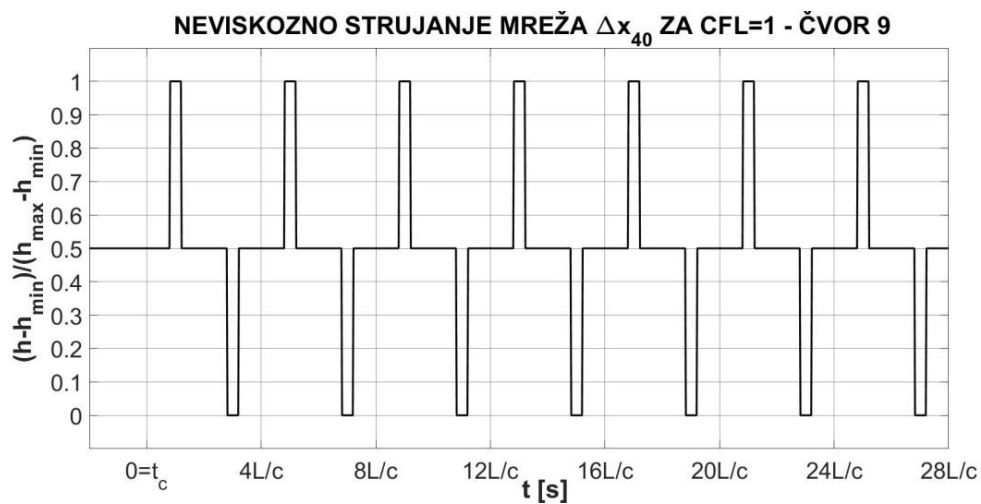
Za referentnu mrežu uz  $CFL = 1$  prema formulama (29) i (30) koristi se prostorni korak integracije  $\Delta x_{20} = 4,572$  m i vremenski korak integracije  $\Delta t_{20} = 0,0034$  s. Koristeći iste formule uz  $CFL = 1$  za dodatne dvije mreže mogu se izračunati njihovi prostorni koraci,  $\Delta x_{10} = 9,144$  m i  $\Delta x_{40} = 2,286$  m, te vremenski koraci,  $\Delta t_{10} = 0,0068$  s i  $\Delta t_{40} = 0,0017$  s.



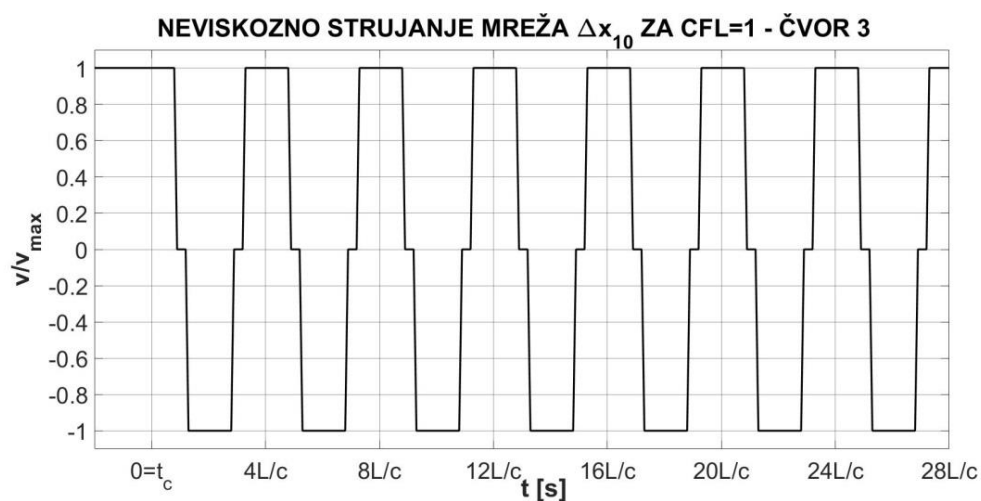
**Slika 31** – Promjena piezometričke visine u čvoru 3 mreže  $\Delta x_{10}$  pri neviskoznom strujanju fluida za  $CFL = 1$



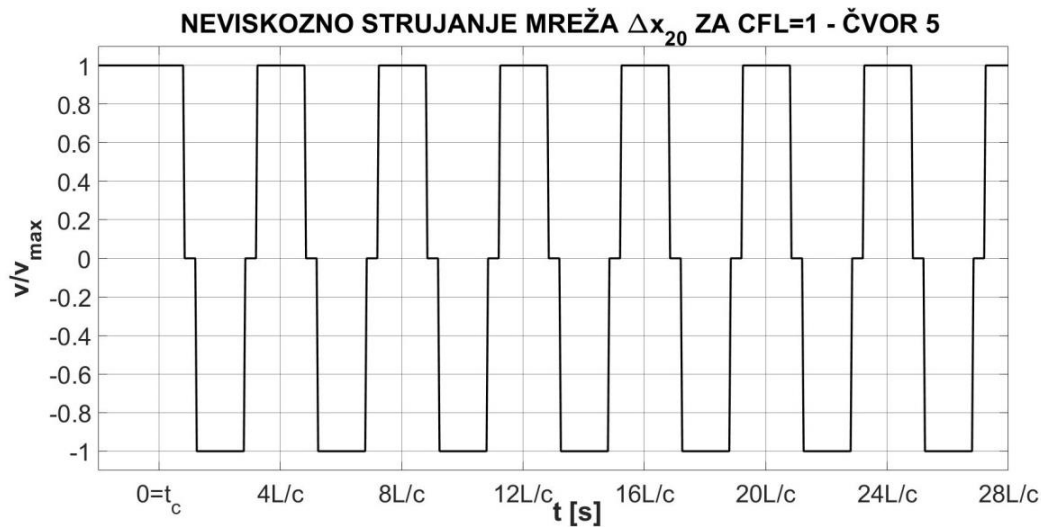
**Slika 32** – Promjena piezometričke visine u čvoru 5 mreže  $\Delta x_{20}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1



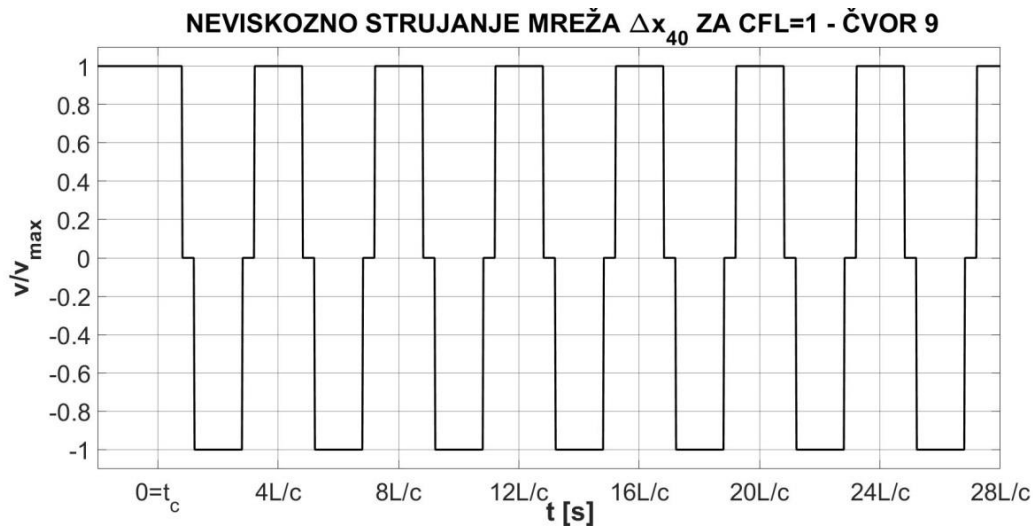
**Slika 33** – Promjena piezometričke visine u čvoru 9 mreže  $\Delta x_{40}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1



**Slika 34** – Promjena brzine u čvoru 3 mreže  $\Delta x_{10}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1



**Slika 35** – Promjena brzine u čvoru 5 mreže  $\Delta x_{20}$  pri neviskoznom strujanju fluida za  $CFL = 1$

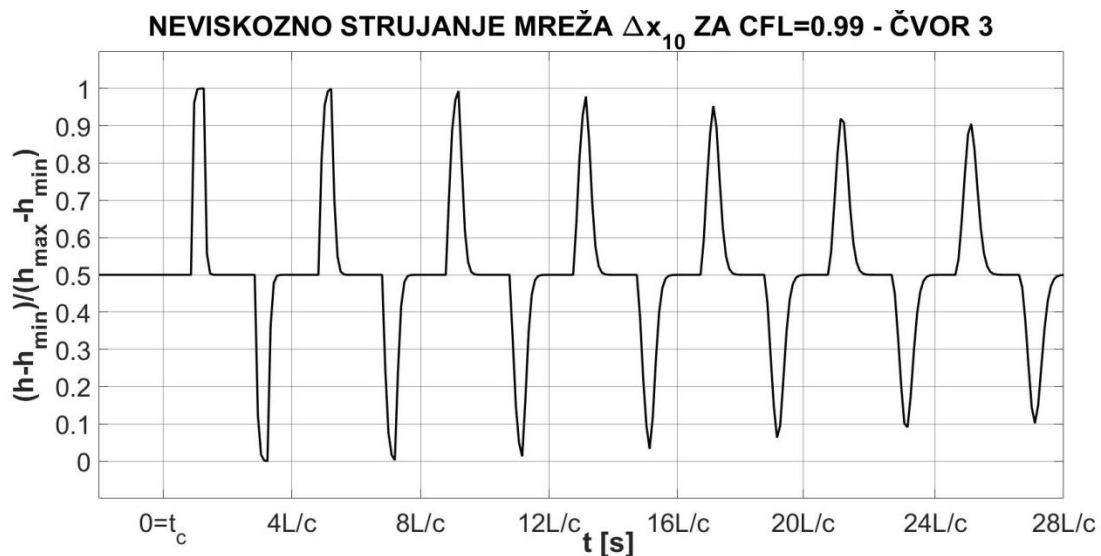


**Slika 36** – Promjena brzine u čvoru 9 mreže  $\Delta x_{40}$  pri neviskoznom strujanju fluida za  $CFL = 1$

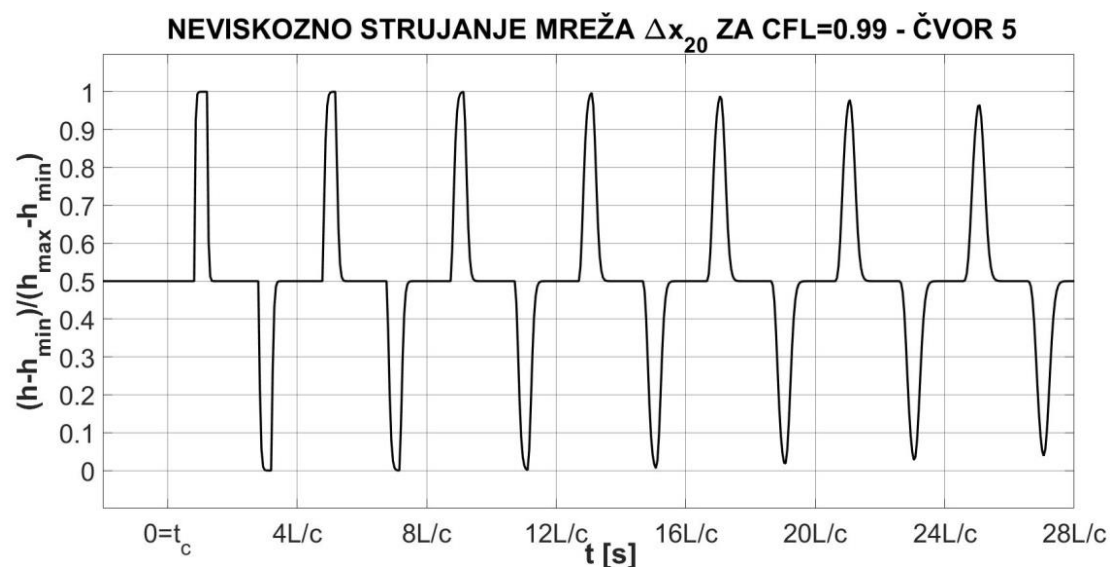
Iz dijagrama (Slika 31 – 36) vidljivo je da, u slučaju kada vrijedi  $CFL = 1$  za mreže različite gustoće, nema razlike u rezultatima promjene piezometričke visine i brzine u čvorovima koji se nalaze na istoj udaljenosti od spremnika. Iz tog razloga se, za  $CFL = 1$ , mogu koristiti mreže manje gustoće kako bi se uštedilo na vremenu izvođenja simulacije.

### 5.3.2. UTJECAJ PROMJENE PROSTORNO VREMENSKOG KORAKA INTEGRACIJE PRI NEVISKOZKOM STRUJANJU ZA CFL = 0,99

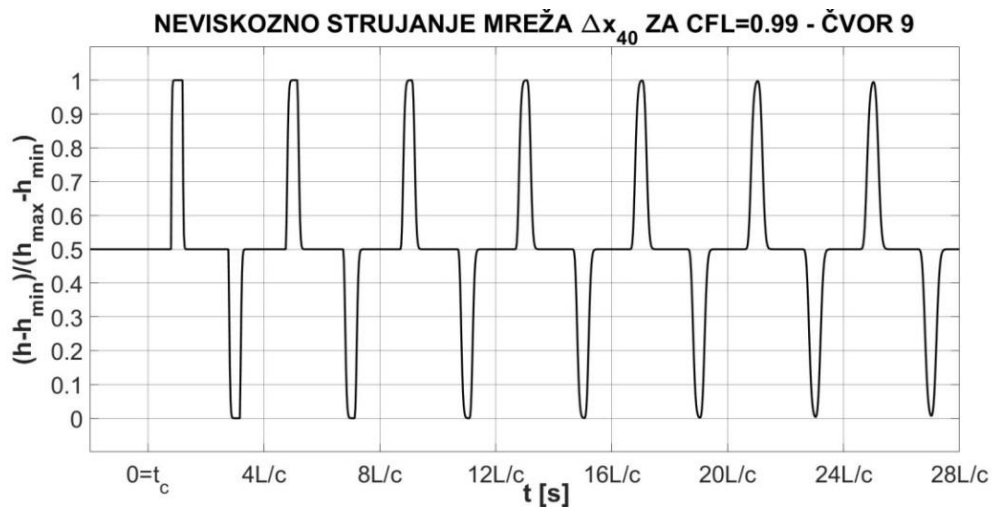
Za referentnu mrežu prema formulama (29) i (30) i uz CFL = 0,99 dobije se prostorni korak integracije  $\Delta x_{20} = 4,572$  m i vremenski korak integracije  $\Delta t_{20} = 0,003366$ . Koristeći iste formule uz CFL = 0,99 za dodatne dvije mreže mogu se izračunati njihovi prostorni koraci,  $\Delta x_{10} = 2,286$  m i  $\Delta x_{40} = 1,524$  m, te vremenski koraci,  $\Delta t_{10} = 0,006732$  s i  $\Delta t_{40} = 0,001683$  s.



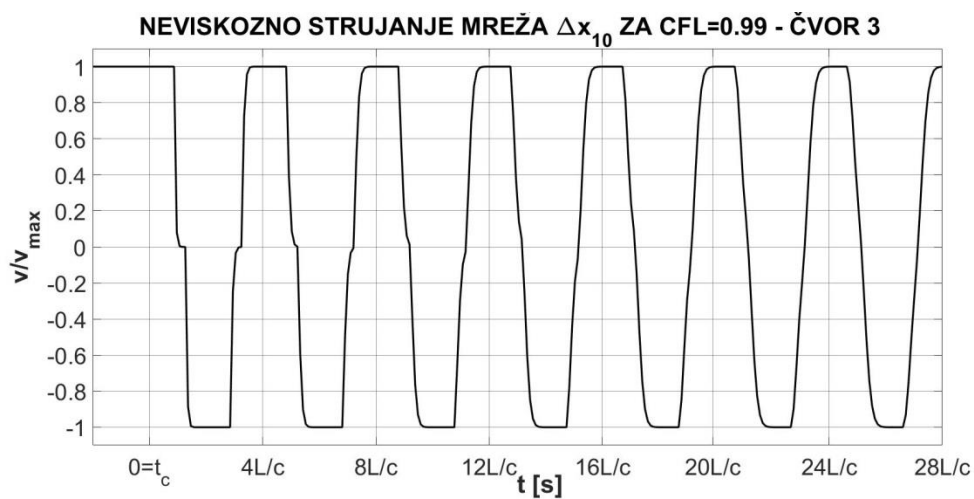
**Slika 37** – Promjena piezometričke visine u čvoru 3 mreže  $\Delta x_{10}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99



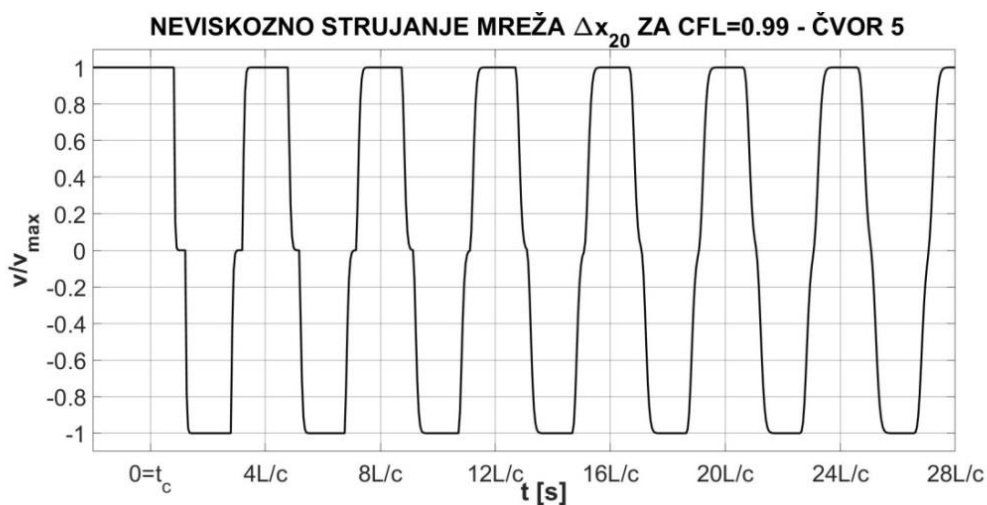
**Slika 38** – Promjena piezometričke visine u čvoru 5 mreže  $\Delta x_{20}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99



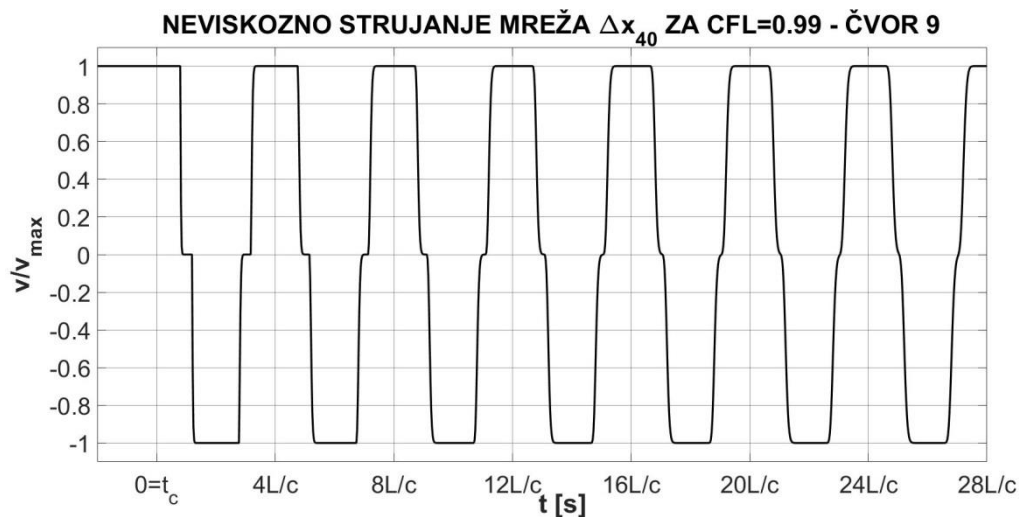
**Slika 39** – Promjena piezometričke visine u čvoru 9 mreže  $\Delta x_{40}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99



**Slika 40** – Promjena brzine u čvoru 3 mreže  $\Delta x_{10}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99



**Slika 41** – Promjena brzine u čvoru 5 mreže  $\Delta x_{20}$  pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,99

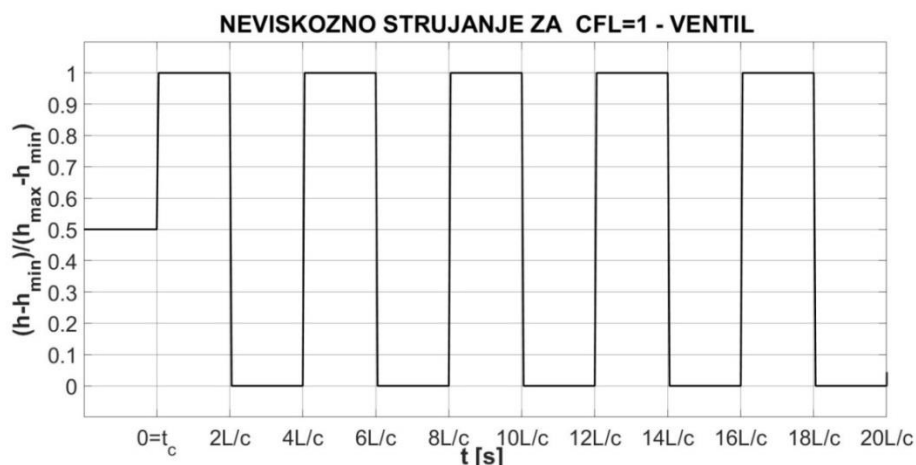


**Slika 42** – Promjena brzine u čvoru 9 mreže  $\Delta x_{40}$  pri neviskoznom strujanju fluida za  $CFL = 0,99$

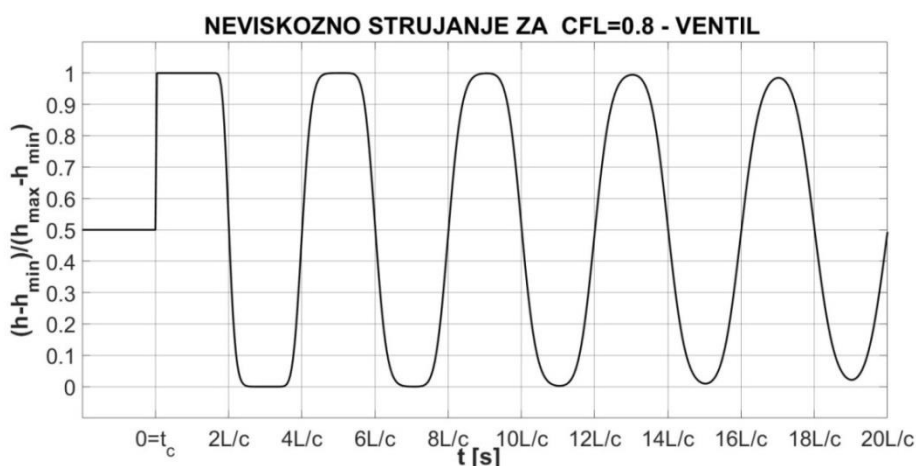
Iz dijagrama (Slika 37 – 42) vidljivo je da, za  $CFL < 1$ , za mreže različite gustoće, postoje razlike u rezultatima promjene piezometričke visine i brzine u čvorovima koji se nalaze na istoj udaljenosti od spremnika. Uočljivo je da dolazi do zaobljenja linija promjene piezometričke visine i brzine. Iz dijagrama promjene piezometričke visine (Slika 37 – 40) vidljivo je da s vremenom dolazi do pada amplitude piezometričke visine. Budući da je već navedeno (Pogl. 5.1. Rezultati za neviskozno strujanje i 5.2. Rezultati za viskozno strujanje) da se ova pojava javlja kod viskoznog, a ne neviskoznog strujanja može se zaključiti da je ona u ovom slučaju nefizikalna. Navedene pojave mogu se pripisati numeričkoj difuziji koja se javlja kao posljedica numeričke pogreške kada vrijedi  $CFL < 1$ . Numerička difuzija se javlja jer se piezometričke visine,  $h_R^n$  i  $h_S^n$ , te brzine,  $v_R^n$  i  $v_S^n$ , određuju linearnom interpolacijom uz pomoć CFL broja (Jednadžba 19 i 20). Greške su izraženije što je broj elemenata cjevovoda manji, odnosno prostorni i vremenski korak integracije veći. Iz tog razloga je, za  $CFL < 1$ , preporučeno korištenje mreže s većim brojem elemenata, tj. s manjim prostornim i vremenskim korakom integracije, čime se postiže točniji numerički postupak.

## 5.4. UTJECAJ PROMJENE CFL BROJA PRI NEVISKOZNOM STRUJANJU

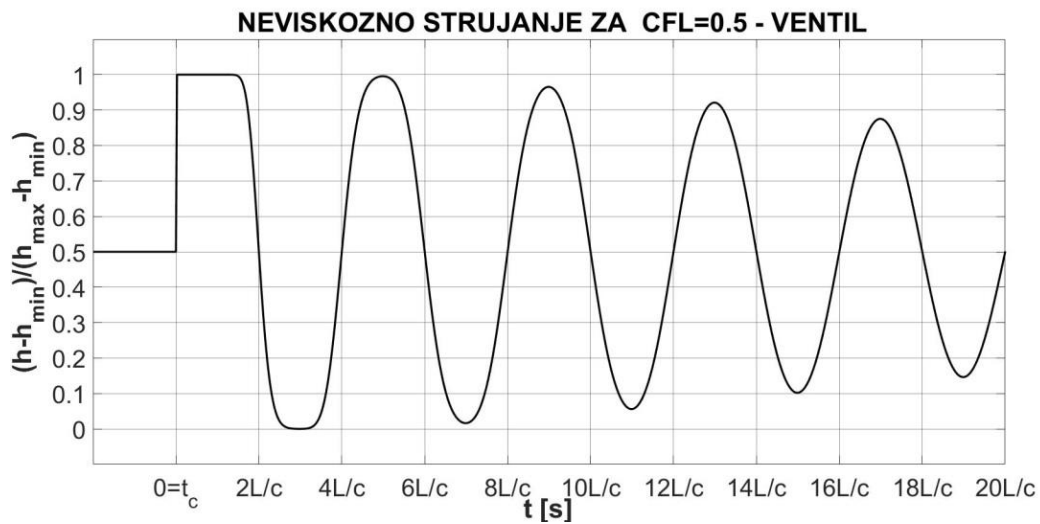
U svrhu analize utjecaja promjene CFL broja na rezultate simulacije odabrana je referentna mreža, cijev podijeljena na 20 segmenata, uz CFL brojeve: CFL = 1, CFL = 0,8 i CFL = 0,5. Prostorni korak ne ovisi o vrijednosti CFL broja stoga za navedene CFL brojeve iznosi  $\Delta x_{20} = 4,572$  m. Vremenski korak ovisi o vrijednosti CFL broja te iznosi:  $\Delta t_{20, CFL=1} = 0,0034$  s za CFL = 1,  $\Delta t_{20, CFL=0,8} = 0,0027$  za CFL = 0,8 te  $\Delta t_{20, CFL=0,5} = 0,0017$  s za CFL = 0,5. Rezultati promjene CFL broja simulacije neviskoznog strujanja fluida uslijed trenutnog zatvaranja ventila ( $0 = t_{poc} = t_c$ ) prikazani su u čvorovima koji se nalaze na mjestu ventila (čvor 21) za prikaz promjene piezometričke visine te na ulazu u cijev (čvor 1) za prikaz promjene brzine.



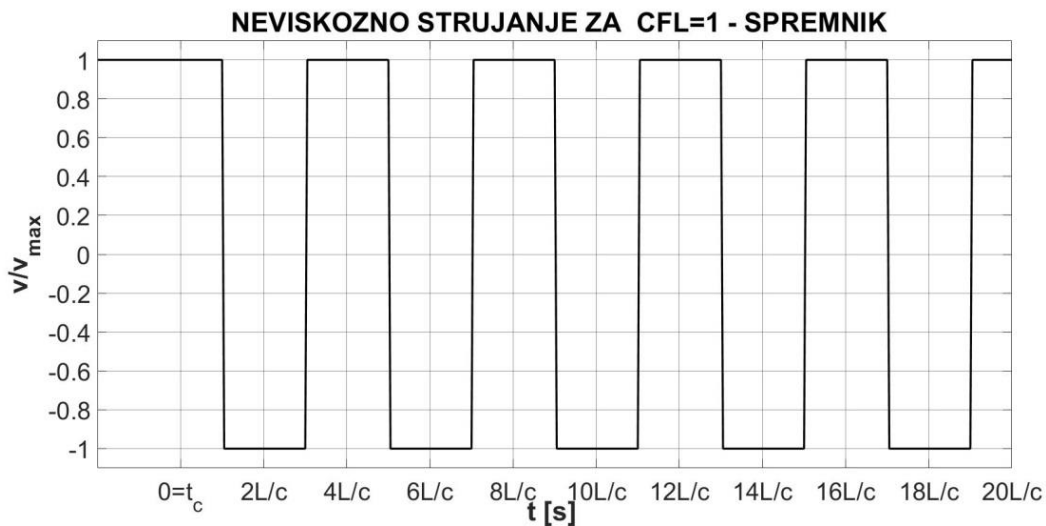
**Slika 43** – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1



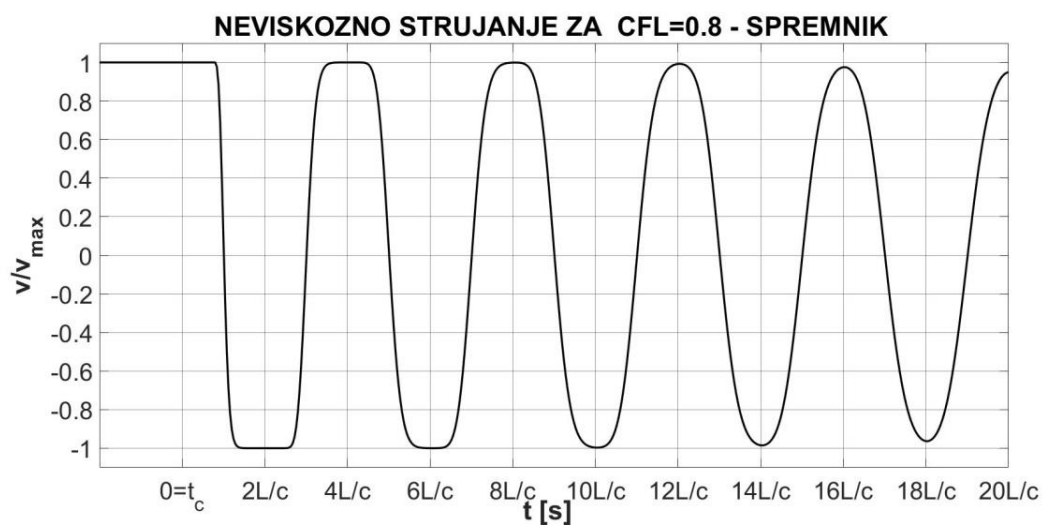
**Slika 44** – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,8



**Slika 45** – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,5

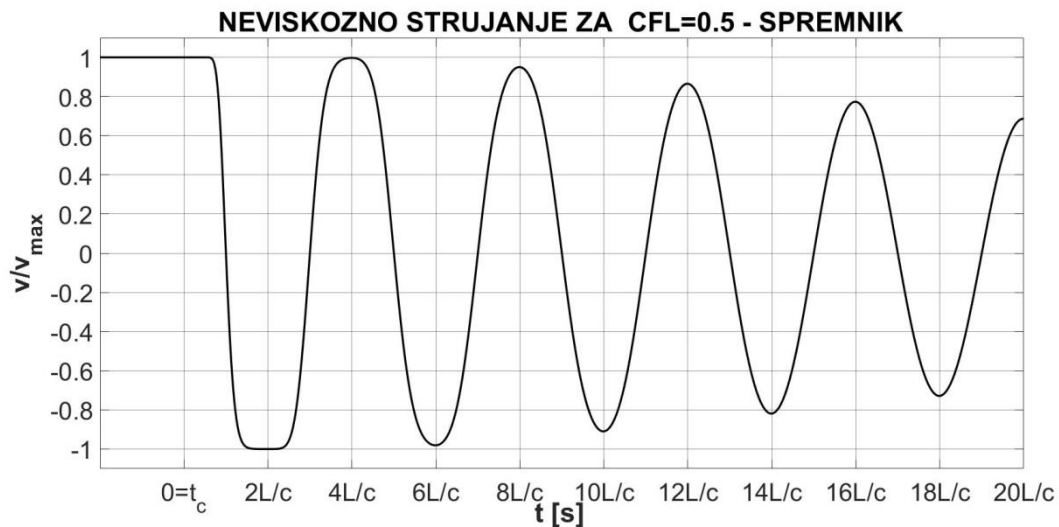


**Slika 46** – Promjena brzine na ulazu u cijev pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 1



**Slika 47** – Promjena brzine na ulazu u cijev pri neviskoznom strujanju fluida za CFL = 0,8



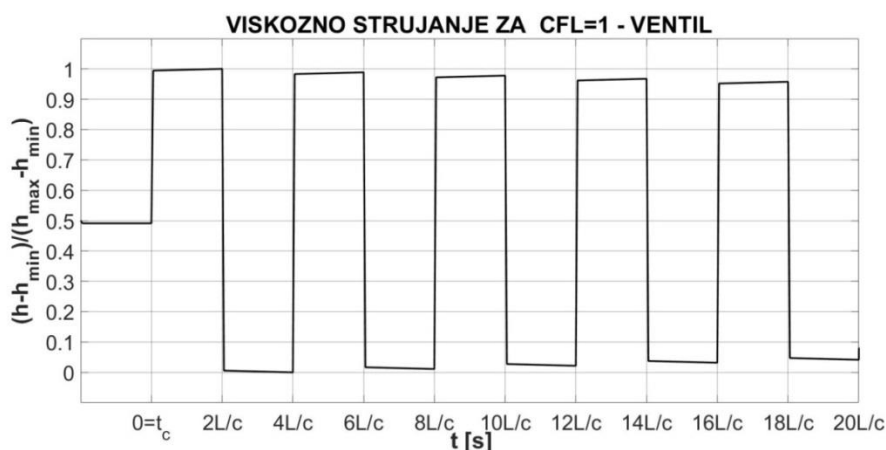


**Slika 48** – Promjena brzine na ulazu u cijev pri neviskoznom strujanju fluida za  $CFL = 0,5$

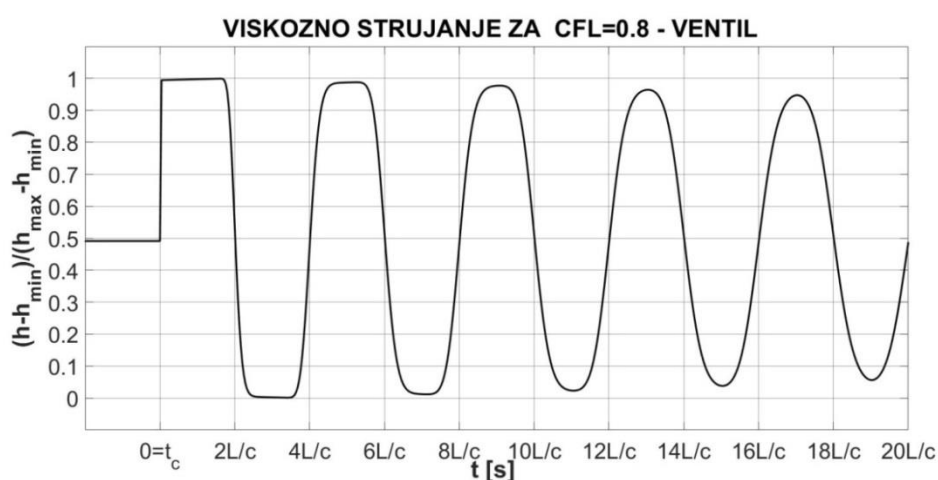
Iz priloženih dijagrama (Slika 43 – 48) vidljivo je da se za različite vrijednosti CFL broja u tom čvoru dobiju veoma različiti rezultati promjene piezometričke visine i brzine. U slučajevima kada vrijedi  $CFL < 1$  numerički postupak je netočniji te dolazi do numeričke difuzije. Što je CFL manji netočnost će biti veća. S obzirom da se interpolira u više vremenskih koraka greška se nakuplja te su rezultati s vremenom sve lošiji. Zaključno, da bi rezultati simulacije bili što kvalitetniji bitno je da mreža zadovoljava Courant – Friedrichs – Lewy uvjet (Jednadžba 18) te da CFL broj bude što bliži ili jednak jedinici.

## 5.5. UTJECAJ PROMJENE CFL BROJA PRI VISKOZKOM STRUJANJU

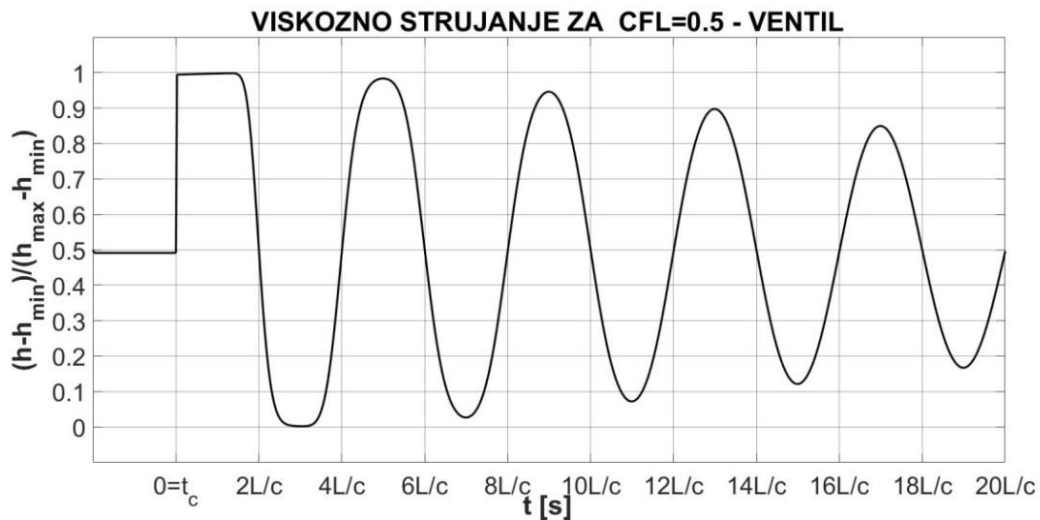
U svrhu analize utjecaja promjene CFL broja na rezultate simulacije odabrana je referentna mreža, cijev podijeljena na 20 segmenata, uz CFL brojeve: CFL = 1, CFL = 0,8 i CFL = 0,5. Prostorni korak ne ovisi o vrijednosti CFL broja stoga za navedene CFL brojeve iznosi  $\Delta x_{20} = 4,572$  m. Vremenski korak ovisi o vrijednosti CFL broja te iznosi:  $\Delta t_{20, CFL=1} = 0,0034$  s za CFL = 1,  $\Delta t_{20, CFL=0,8} = 0,0027$  za CFL = 0,8 te  $\Delta t_{20, CFL=0,5} = 0,0017$  s za CFL = 0,5. Rezultati promjene CFL broja simulacije viskoznog strujanja fluida uslijed trenutnog zatvaranja ventila ( $0 = t_{poc} = t_c$ ) prikazani su u čvorovima koji se nalaze na mjestu ventila (čvor 21) za prikaz promjene piezometričke visine te na ulazu u cijev (čvor 1) za prikaz promjene brzine.



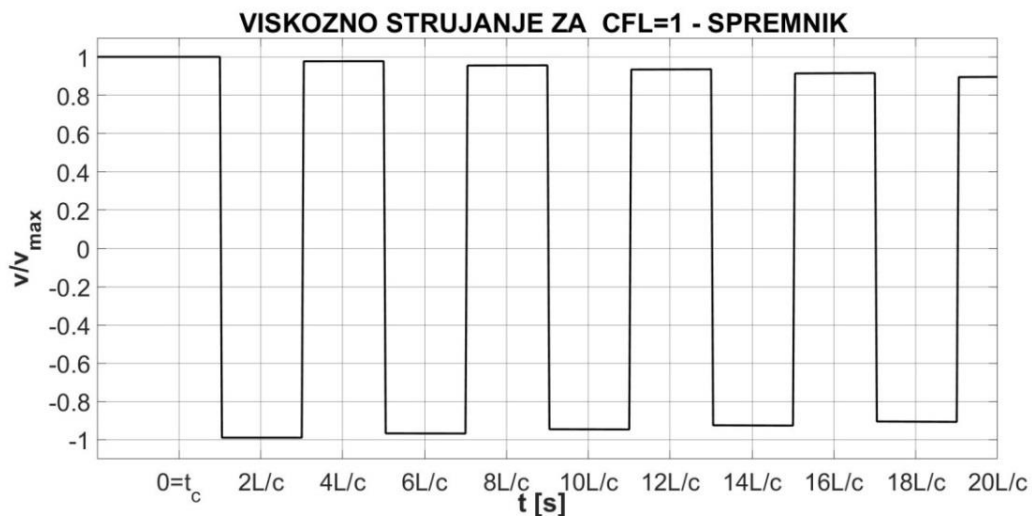
**Slika 49** – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri viskoznom strujanju fluida za CFL = 1



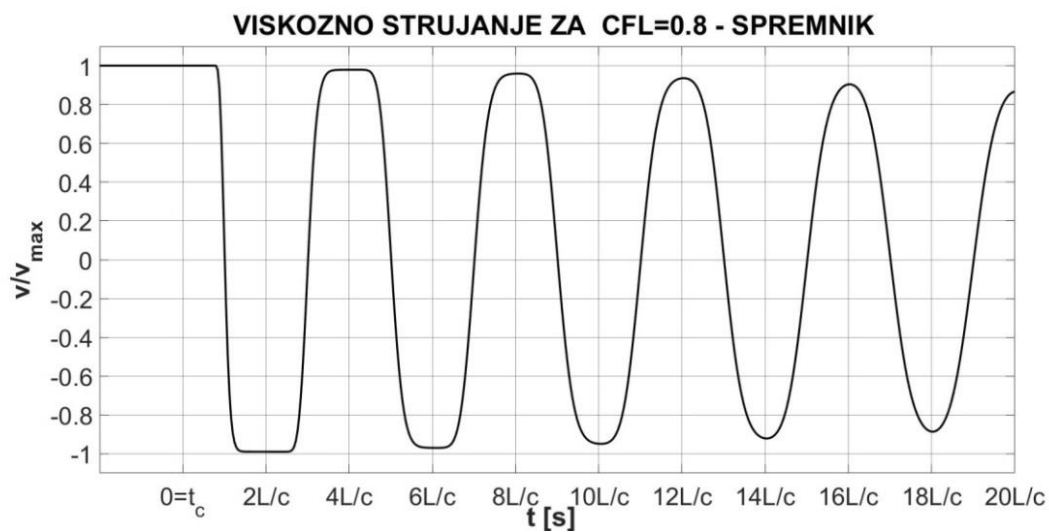
**Slika 50** – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri viskoznom strujanju fluida za CFL = 0,8



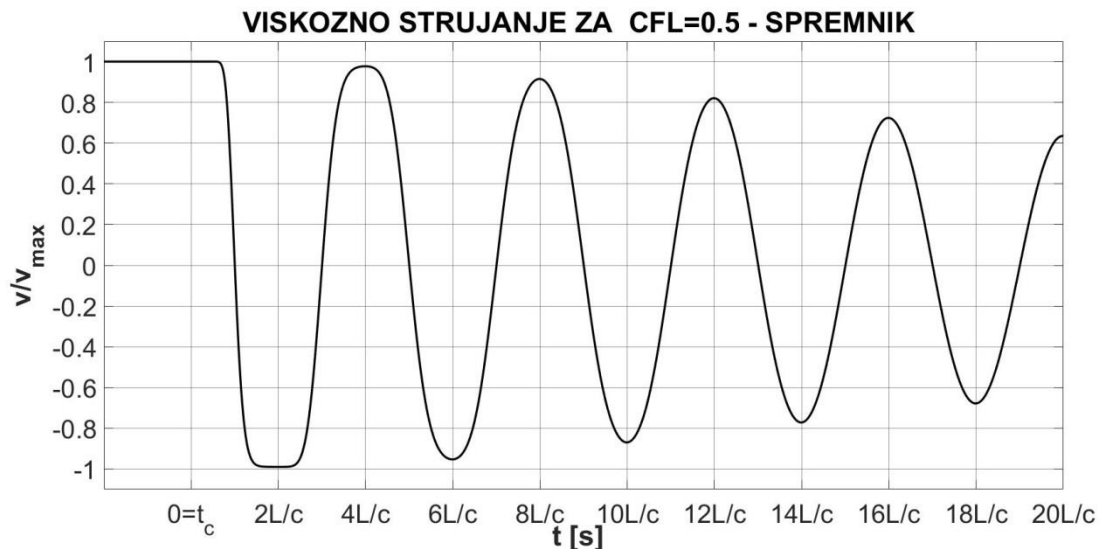
**Slika 51** – Promjena piezometričke visine na mjestu ventila pri viskoznom strujanju fluida za  $CFL = 0,5$



**Slika 52** – Promjena brzine na ulazu u cijev pri viskoznom strujanju fluida za  $CFL = 1$



**Slika 53** – Promjena brzine na ulazu u cijev pri viskoznom strujanju fluida za  $CFL = 0,8$

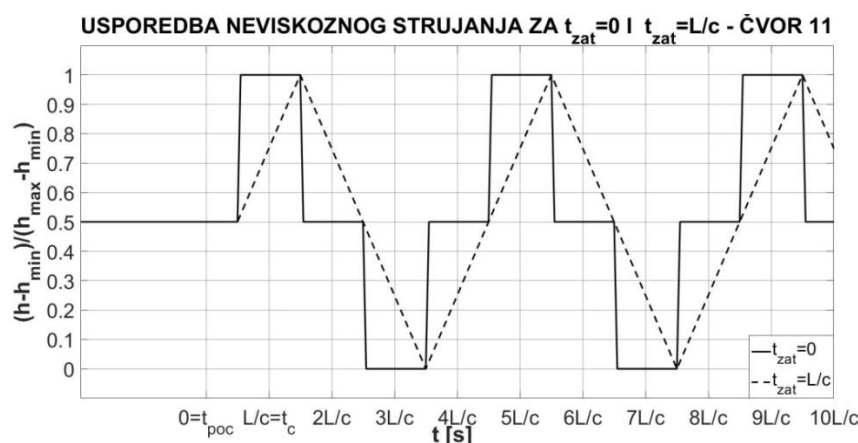


**Slika 54** – Promjena brzine na ulazu u cijev pri viskoznom strujanju fluida za  $CFL = 0,5$

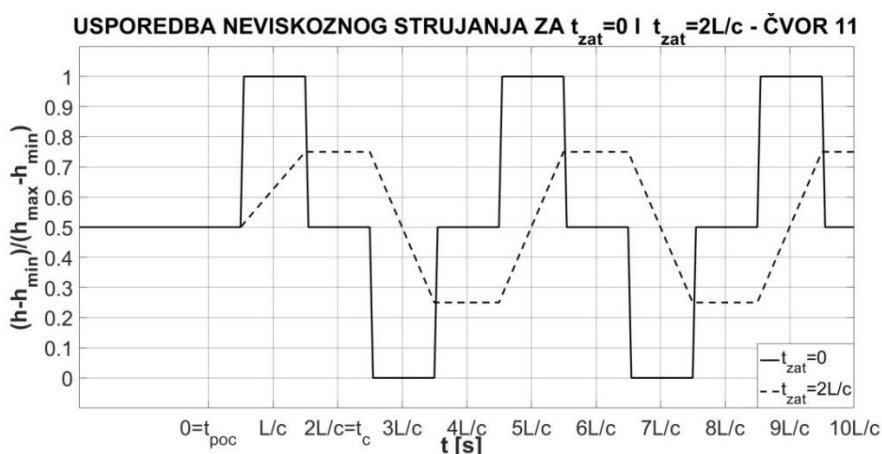
Iz dijagrama (Slika 49 – 54) vidljivo je da promjena CFL broja utječe na rezultate simulacije viskoznog strujanja jednako kao i na rezultate neviskoznog strujanja (Slika 43 – 48). Dolazi do numeričke difuzije, a rezultati su sve lošiji smanjenjem CFL broja. Kao što je već prethodno spomenuto (Pogl. 5.2. Rezultati za viskozno strujanje), u slučaju viskoznog strujanja, zbog trenja tj. viskoznosti fluida, s vremenom dolazi do pada amplitude piezometričke visine i brzine u čvoru. Taj pad je, kao posljedica pada kvalitete rezultata, izraženiji što je CFL broj manji. Zaključno, kao i u slučaju neviskoznog strujanja, da bi rezultati simulacije viskoznog strujanja bili što kvalitetniji bitno je da mreža zadovoljava Courant – Friedrichs – Lewy uvjet (18) te da CFL broj bude što bliži ili jednak jedinici.

## 5.6. UTJECAJ PROMJENE VREMENA ZATVARANJA VENTILA PRI NEVISKOZKOM STRUJANJU

U svrhu analize utjecaja promjene vremena zatvaranja ventila na rezultate simulacije odabrana je referentna mreža, cijev podijeljena na 20 segmenata, uz  $CFL = 1$ . Prostorni korak iznosi  $\Delta x = 4,572$  m, dok vremenski korak iznosi  $\Delta t = 0,0034$  s. Vrijeme zatvaranja ventila izraženo je kao razlika vremena potrebnog za potpuno zatvaranje ventila i vremena početka zatvaranja ventila koje je označeno nulom apscisne osi,  $t_{zat} = t_c - t_{poc}$ . Odabrana vremena zatvaranja ventila iznose  $t_{zat} = L/c$ ,  $t_{zat} = 2L/c$  te  $t_{zat} = 4L/c$ . Rezultati promjene vremena zatvaranja ventila simulacije neviskoznog strujanja fluida prikazani su u čvorovima koji se nalaze na sredini cjevovoda (čvor 11) te na mjestu ventila (čvor 21). Za prikaz rezultata koriste se usporedni dijagrami u kojima se za pojedini čvor uspoređuju rezultati trenutnog zatvaranja ventila,  $t_{zat} = 0$ , te jednog od navedenih alternativnih vremena zatvaranja ventila.



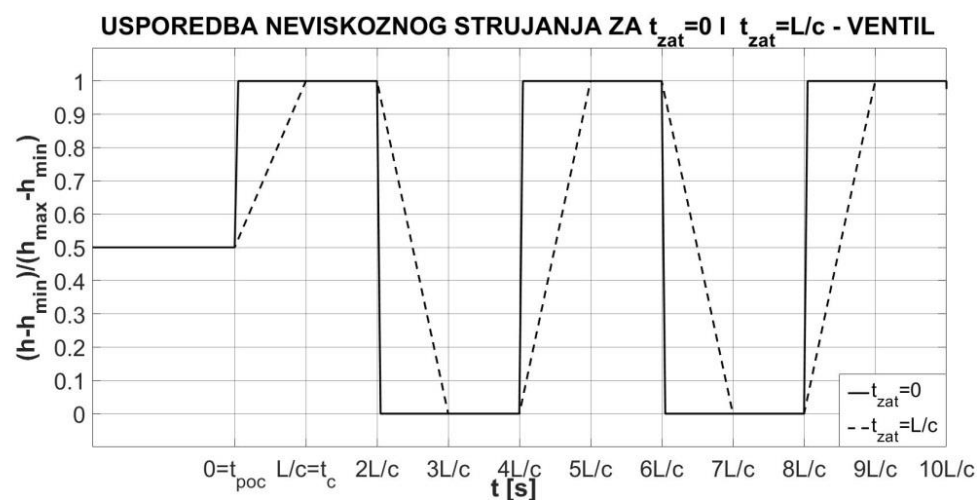
**Slika 55** – Usporedba promjene piezometričke visine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



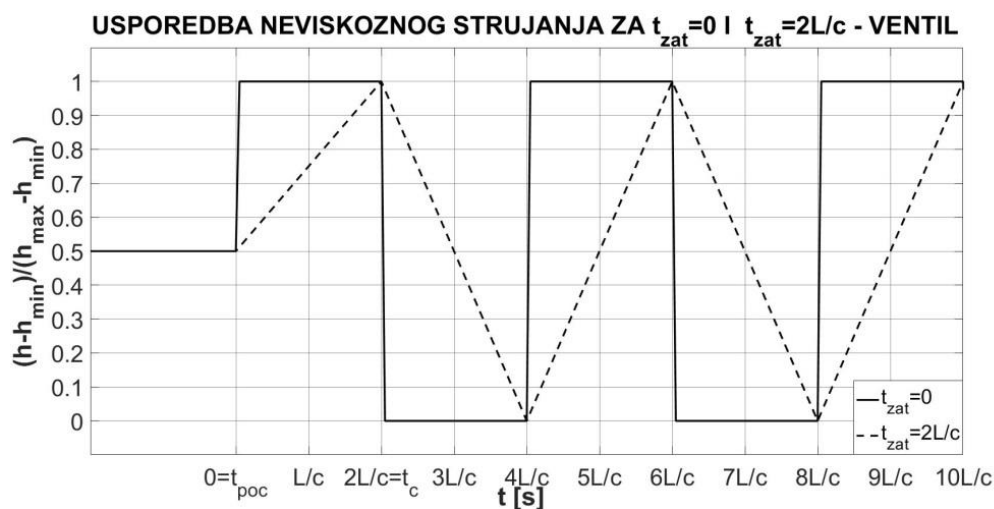
**Slika 56** – Usporedba promjene piezometričke visine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 2L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



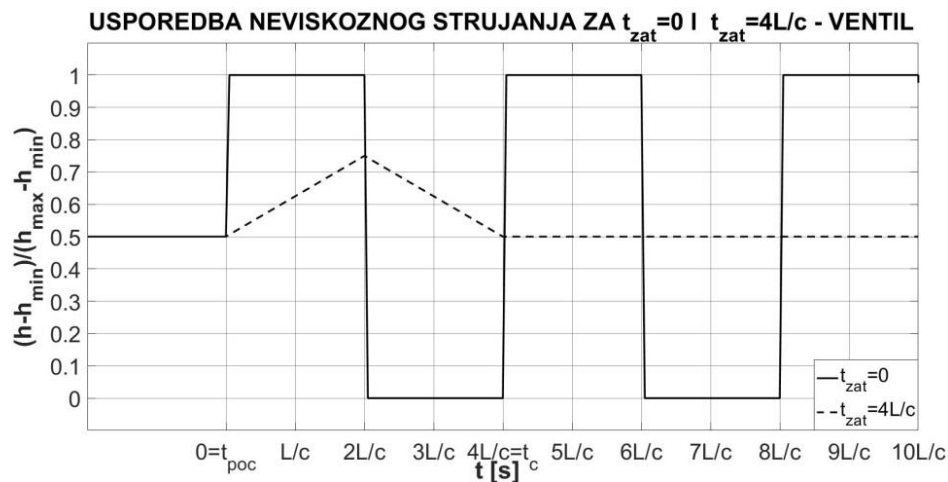
**Slika 57** – Usporedba promjene piezometričke visine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 4L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



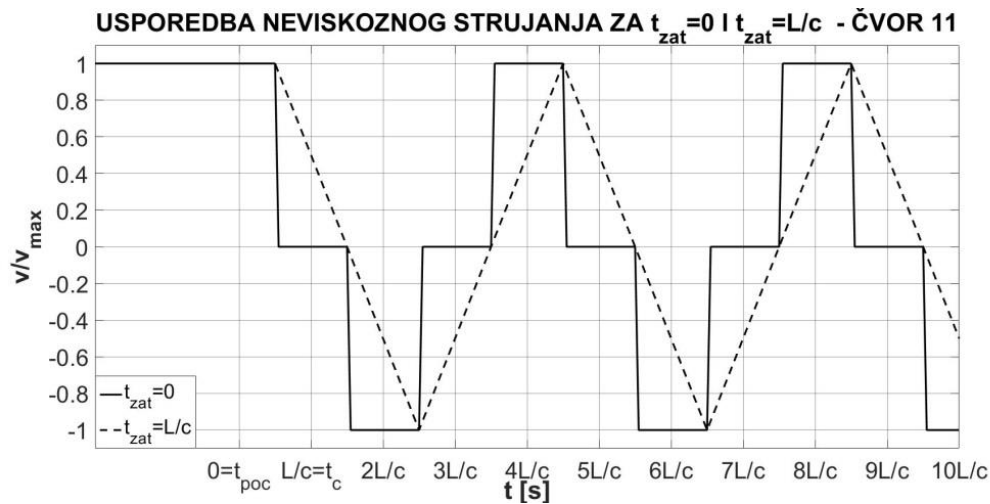
**Slika 58** – Usporedba promjene piezometričke visine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



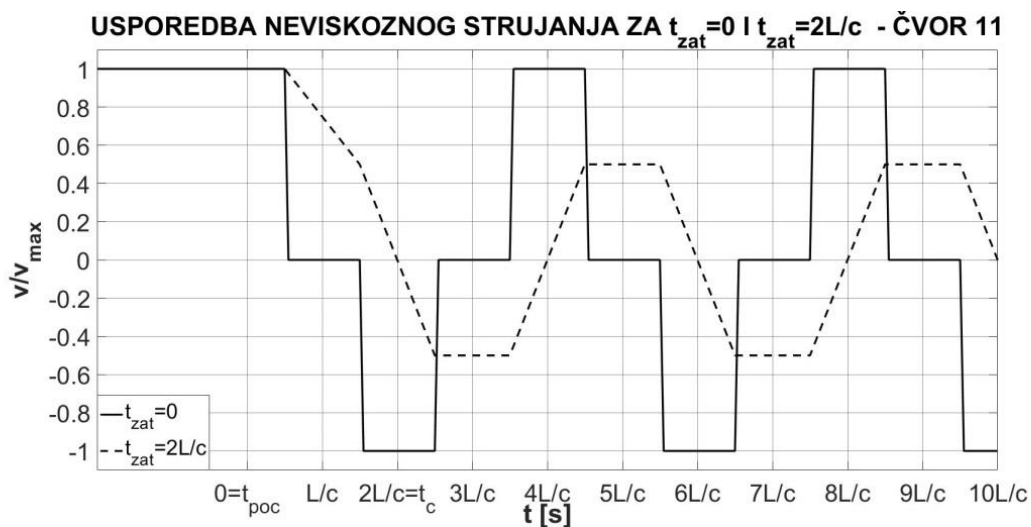
**Slika 59** – Usporedba promjene piezometričke visine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 2L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



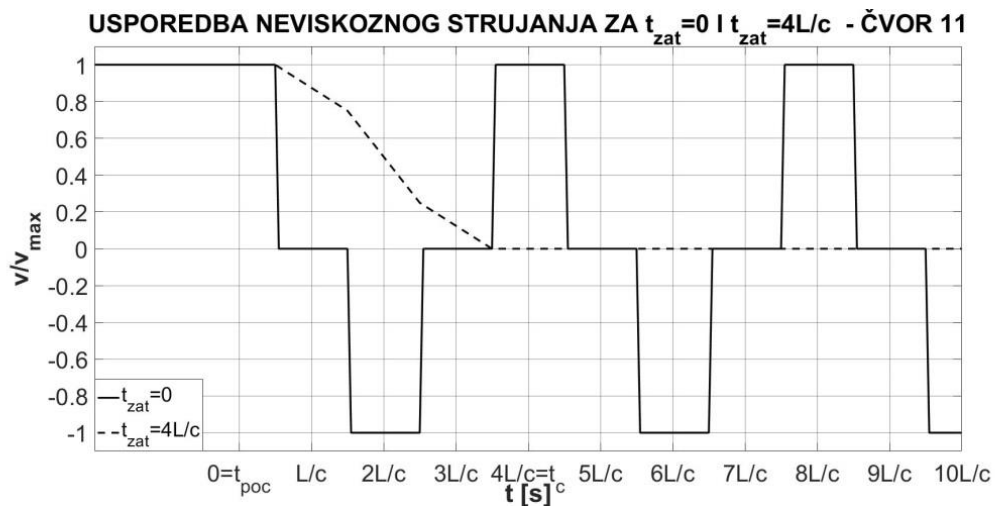
**Slika 60** – Usporedba promjene piezometričke visine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 4L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



**Slika 61** – Usporedba promjene brzine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



**Slika 62** – Usporedba promjene brzine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 2L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



**Slika 63** – Usporedba promjene brzine u čvoru 11 za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 4L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



**Slika 64** – Usporedba promjene brzine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida



**Slika 65** – Usporedba promjene brzine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 2L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida





**Slika 66** – Usporedba promjene brzine na mjestu ventila za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 0$  i  $t_{zat} = 4L/c$  pri neviskoznom strujanju fluida

Iz dijagrama (Slika 55 – 60) vidljivo je da za trenutno zatvaranje ventila i vrijeme zatvaranje ventila  $t_{zat} = L/c$  amplituda piezometričke visine u cjevovodu ima jednak iznos. Prema Živić (1995) to se fizikalno može objasniti na sljedeći način: potpunim zatvaranjem ventila zadnji formirani tlačni val se emitira prije no što se prvi formirani val reflektira o spremnik te se zato u cjevovodu održava maksimalni iznos tlaka. Pri vremenu zatvaranja ventila  $t_{zat} = 2L/c$  amplituda piezometričke visine u cjevovodu ima manji iznos nego u slučaju trenutnog zatvaranja ventila. Unatoč tome, na samom ventilu se dostiže amplituda piezometričke visine trenutnog zatvaranja ventila. Prema Živić (1995) to se fizikalno može objasniti na sljedeći način: zadnje formirani tlačni val se emitira u trenutku potpunog zatvaranja ventila, a tada povratni reflektirani val dolazi do ventila. Iz tog razloga se vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 2L/c$  smatra graničnim. U slučaju  $t_{zat} \leq 2L/c$  zatvaranje ventila smatra se naglim, a u slučaju  $t_{zat} > 2L/c$  sporim.

U slučaju sporog zatvaranja ventila,  $t_{zat} > 2L/c$ , prvi nastali valovi se reflektiraju o spremnik te dolaze nazad do ventila prije no što se ventil potpuno zatvori. Iz tog razloga je tlak na ventilu manji od onog u slučaju trenutnog zatvaranja ventila što je i vidljivo na dijagramima za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 4L/c$  (Slika 55 – 60). Na dijagramima (Slika 55 – 66) se također može primjetiti da se povećanjem vremena zatvaranja ventila smanjuju nagibi krivulja piezometričkih visina i brzina. Vidljivo je (Slika 55 – 66) da za vrijeme zatvaranja ventila  $t_{zat} = 4L/c$ , osim što tlak ne postiže maksimalne vrijednosti, nestaje i periodičnost promjene piezometričke visine i brzine karakteristične za hidraulički udar jer fluid nakon potpunog zatvaranja ventila prelazi u mirujuće stanje. Iz tih razloga sporo zatvaranje ventila koristi se kao jedan od načina za sprječavanje hidrauličkog udara.

## 6. ZAKLJUČAK

Na primjeru strujanja između dva otvorena spremnika kroz cijev i ventil, pokazano je da je izrađeni program u stanju simulirati stacionarno strujanje prije zatvaranja ventila i nestacionarno strujanje nakon zatvaranja ventila. Uvjet stabilnosti numeričkog postupka je da je Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) broj manji ili najviše jednak jedinici.

Pri strujanju viskoznog fluida, nakon trenutnog zatvaranja ventila, zbog viskoznog trenja s vremenom dolazi do smanjivanja amplitude piezometričke visine (tlaka) i brzine u cijevi te sustav teži stanju mirovanja. Promjena piezometričke visine u vremenu poprima karakteristični oblik pile.

Promjena prostorno vremenskog koraka integracije, kada je CFL broj jednak jedan, nema utjecaja na rezultate simulacije nestacionarnog neviskoznog strujanja. Kada je CFL broj manji od jedan, kao posljedica interpolacije piezometričke visine (tlaka) i brzine, javlja se negativni utjecaj numeričke difuzije na rezultate, i u slučaju neviskoznog i u slučaju viskoznog strujanja. Taj negativni utjecaj se može smanjiti korištenjem gušće mreže i vremenskog koraka integracije koji daje CFL broj što bliži jedinici.

Pri brzom zatvaranju ventila, pri kojem je vrijeme zatvaranja manje ili jednako  $2L/c$ , maksimalne vrijednosti tlaka u sustavu su jednake onima kod trenutnog zatvaranja ventila. Pri sporom zatvaranju ventila, pri kojem je vrijeme zatvaranja veće od  $2L/c$ , maksimalne vrijednosti tlaka u sustavu se smanjuju.

**POPIS LITERATURE:**

- [1] Reed, K.: Water Hammer – What is it, and how we can prevent equipment damage?  
URL: <http://www.taproot.com/archives/55803>
- [2] Šavar, M.: Hidrodinamika cijevnih mreža, Zagreb, 2005.
- [3] Wylie, E. B., Streeter, V.L., Suo, L.: Fluid transients in systems, Englewood Cliffs 1993.
- [4] Fox, J. A.: Transient flow in pipes, open channels, and sewers, Chichester, 1989.
- [5] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: Mehanika fluida 1, Zagreb, 2017.
- [6] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: Mehanika fluida 2, Zagreb, 2017.
- [7] Šavar M., Virag Z., Korbar R.: A Variant of the Method of Characteristics  
URL: [https://www.fsb.unizg.hr/hydro/web\\_pdf/-Variant\\_MOC\\_paper\\_look.pdf](https://www.fsb.unizg.hr/hydro/web_pdf/-Variant_MOC_paper_look.pdf)
- [8] Živić, M.: Proračun hidrauličkog udara u cijevnim mrežama metodom karakteristika, Magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1995.

## **PRILOZI:**

- I. Skripta računalne simulacije

```

1 clear all;
2 clc;
3
4 % UVJETI
5 ViskoznoStrujanje=0; % staviti 0 ako ne 1 ako da
6 TrenutnoZatvaranje=1; % staviti 0 ako ne 1 ako da
7 CFL_1=1; % ako je CFL=1 mora vrijediti CFL_1=1
8
9 % CFL
10 if CFL_1==1
11     CFL=1; % Courant-Friedrichs-Lewy broj
12 else
13     CFL=0.8 % 1 0.99 0.95 0.75 0.6 0.5 0.3 0.1
14 end
15
16 pa=1.01325*10^5; % [Pa] atmosferski tlak
17 g=9.80665; % [m^2/s] gravitacijsko ubrzanje
18
19 % KARAKTERISTICNE VRIJEDNOSTI CIJEVI
20 L= 91.44; % [m] duljina cijevi
21 D=10.97*10^-3; % [m] promjer cijevi
22 s=0.81*10^-3; % [m] debljina stijenke cijevi
23 E=1.1003*10^11; % [Pa] modul elasticnosti cijevi
24 k=0.0001; % [m] visina hrapavosti stijenke
25
26 % KARAKTERISTICNE VRIJEDNOSTI FLUIDA
27 ro=992.8; % [kg/m^3] gustoca fluida
28 nu=0.6414*10^-6; % [m^2/s] kinematicka viskoznost fluida
29 K=2.2774*10^9; % [Pa] volumni modul elasticnosti fluida
30 c=sqrt(1/(ro*(1/K + D/(s*E)))); % [m/s] brzina sirenja tlacnog poremećaja
31
32 % RAZINA VODE U SPREMNICIMA
33 H1=7.3275; % [m] visina fluida u spremniku 1
34 H2=7.2; % [m] visina fluida u spremniku 2
35 H0=H1-H2; % [m] razlika visina fluida u spremnicima
36 Ha=(pa)/(ro*g); % [m] visina atmosferskog tlaka
37
38 % VRIJEDNOSTI INTEGRACIJE
39 z=20; % broj segmenata cijevi
40 i=z+1; % broj cvorova
41 dx=L/z; % [m] prostorni korak
42 dt=CFL*(dx/c); % [s] vremenski korak
43 tmax=20*(L/c); % [s] vrijeme trajanja simulacije
44
45 % VRIJEME ZATVARANJA VENTILA
46 tpoc=2*(L/c); % [s] pocetni trenutak zatvaranja ventila
47
48 if TrenutnoZatvaranje==0
49     tc=tpoc+4*L/c; % [s] trenutak potpunog zatvaranja ventila
50         % L/c 2*L/c 4*L/c
51 else
52     tc=tpoc;
53 end
54

```

```

55 % POCETNI UVJETI
56 if ViskoznoStrujanje==0
57     v0=sqrt(2*g*H0);
58     lambda=0;
59     h=ones(1,i)*(H2+Ha);
60     v=ones(1,i)*v0;
61 else
62     j=1
63     lambda(j)=0.02; % Pretpostavljena vrijednost lambde
64     err=1; % Pretpostavljena vrijednost pogreske
65
66     while 1e-6<err % Greska se proracunava kao apsolutna vrijednost razlike
67         % stare i nove vrijednosti lambde
68         % Iteracija se vrši dok greška ne padne ispod 1e-6
69         j=j+1
70
71         v0(j)=sqrt(2*g*H0/(1+lambda(j-1).*L/D));
72         Re(j)=v0(j)*D/nu;
73
74         if Re>2300
75             lambda(j)=1.325/((log(k/(3.7*D)+5.74/((Re(j))^0.9)))^2);
76         else
77             lambda(j)=64/Re(j);
78         end
79         err=abs(lambda(j)-lambda(j-1));
80     end
81
82     % za vrijednosti lambda, Re i v0 uzima se zadnja vrijednost iteracije
83     lambda=lambda(j);
84     v0=v0(j);
85     Re=Re(j);
86
87     hf=(v0^2)*lambda*L/(z*D*2*g); % visina gubitaka po cvoru
88     hx=linspace((H1+Ha-(v0^2)/(2*g)), (H2+Ha), i);
89     h=ones(1,i).*hx;
90     v=ones(1,i)*v0;
91 end
92
93 % UVODENJE OZNAKE KONSTANTE ZA RUBNI UVJET SPREMNIKA
94 if ViskoznoStrujanje==0
95     hNs=H2+Ha; % Neviskozno strujanje
96 else
97     hVs=hx(1,1); % Viskozno strujanje
98 end
99
100 % LINEARNA INTERPOLACIJA PIEZOMETRICKIH VISINA I BRZINA IZMEDU CVOROVA
101 hR(1,1:z)=CFL*h(1,1:(i-1))+(1-CFL)*h(1,2:i);
102 hS(1,1:z)=CFL*h(1,2:i)+(1-CFL)*h(1,1:(i-1));
103 vR(1,1:z)=CFL*v(1,1:(i-1))+(1-CFL)*v(1,2:i);
104 vS(1,1:z)=CFL*v(1,2:i)+(1-CFL)*v(1,1:(i-1));
105
106 % PRORACUN
107 t=0
108 n=1

```

```

109
110 while t<tmax % od pocetka simulacije do završetka
111
112     t=t+dt
113     n=n+1
114
115     % PRORACUN RUBNOG UVJETA SPREMNIKA - PIEZOMETRICKA VISINA
116
117     if ViskoznoStrujanje==0
118         h(n,1)=hNs
119     else
120         h(n,1)=hVs
121     end
122
123     % PRORACUN RUBNOG UVJETA VENTILA - BRZINA
124
125     if t<tpoc % stacionarno strujanje
126
127         % rubni uvjet ventil - konstantna brzina v=v0
128         v(n,i)=v0
129
130     elseif tpoc<t && t<tc % zatvaranje ventila tzat=(tc-tpoc)
131
132         % rubni uvjet ventil - linearna promjena brzine
133         v(n,i)=v0*(1-(t-tpoc)/(tc-tpoc));
134
135     else % nakon potpunog zatvaranja ventila
136
137         % rubni uvjet ventil - konstantna brzina v=0
138         v(n,i)=0;
139     end
140
141     % PRORACUN PUTEK KARAKTERISTICNIH JEDNADZBI
142
143     % linearna interpolacija brzina i piezometrickih visina izmedu cvorova
144     hR(n,1:z)=CFL*h(n-1,1:(i-1))+(1-CFL)*h(n-1,2:i);
145     hS(n,1:z)=CFL*h(n-1,2:i)+(1-CFL)*h(n-1,1:(i-1));
146     vR(n,1:z)=CFL*v(n-1,1:(i-1))+(1-CFL)*v(n-1,2:i);
147     vS(n,1:z)=CFL*v(n-1,2:i)+(1-CFL)*v(n-1,1:(i-1));
148
149     % rubni uvjet spremnik - jednadzba negativne karakteristike
150     v(n,1) = vS(n,1)+(g/c)*(h(n,1)-hS(n,1)) ...
151         -(0.5*lambda*dt/D)*(vS(n,1).*abs(vS(n,1)));
152
153     % rubni uvjet ventil - jednadzba pozitivne karakteristike
154     h(n,i) = hR(n,z)-(c/g)*(v(n,i)-vR(n,z)) ...
155         -(c/g)*(0.5*lambda*dt/D)*(vR(n,z).*abs(vR(n,z)));
156
157     % cvorovi 2 do (i-1)
158     h(n,2:(i-1))=0.5*(hR(n,1:(z-1))+hS(n,2:z)) ...
159         +(0.5*c/g)*(vR(n,1:(z-1))-vS(n,2:z))...
160         -(c/g)*(0.25*lambda*dt/D) ...
161         *(vR(n,1:(z-1)).*abs(vR(n,1:(z-1)))-vS(n,2:z).*abs(vS(n,2:z)));
162

```

```

163 v(n,2:(i-1))=(0.5*g/c)*(hR(n,1:(z-1))-hS(n,2:z))...
164 +0.5*(vR(n,1:(z-1))+vS(n,2:z))...
165 - (0.25*lambda*dt/D) ...
166 *(vR(n,1:(z-1)).*abs(vR(n,1:(z-1)))+vS(n,2:z).*abs(vS(n,2:z)));
167
168 % navedene jednadzbe vrijede za strujanje neviskoznog i viskozno fluida
169 % no uslijed strujanja neviskoznog fluida clanovi koji se mnoze lambdom
170 % mnoze se nulom
171 end
172
173 %plot(v(1:n,i))
174 plot(h(1:n,i))
175 hold on

```