

# Optimalno upravljanje podupravljanom besposadnom letjelicom temeljeno na varijacijskim integratorima

---

**Kasalo, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:658268>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-27**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Marko Kasalo**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**OPTIMALNO UPRAVLJANJE  
PODUPRAVLJANOM  
BESPOSADNOM LETJELICOM  
TEMELJENO NA  
VARIJACIJSKIM  
INTEGRATORIMA**

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdravko Terze

Student:

Marko Kasalo

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

*Veliko hvala svima!*



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomске ispite  
Povjerenstvo za diplomске ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Marko Kasalo**

Mat. br.: 0035169079

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Optimalno upravljanje podupravljanom besposadnom letjelicom temeljeno na varijacijskim integratorima**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Optimal Control of Underactuated Unmanned Aerial Vehicle Based on Variational Integrators**

Opis zadatka:

Korištenjem klasičnih integratora dinamike sustava više tijela diskretiziraju se jednadžbe gibanja u vremenu, koje su izvedene iz Newton-Eulerovih zakona gibanja. S druge strane, korištenjem varijacijskih integratora umjesto diskretiziranja diferencijalnih jednadžbi po varijablama pooptćenih pomaka, diskretizacija se provodi na razini energije, diskretizirajući pripadnu Lagrangeovu funkciju (razlika između kinetičke i potencijalne energije sustava). Varijacijski integratori su simplektični i njihova primjena dovodi do očuvanja kinetičkog momenta sustava, a također i do garancije ograničenja numeričke pogreške očuvanja energije procesa. Osim za numeričku integraciju dinamike sustava, varijacijski integratori se, zbog svojih dobrih svojstava očuvanja diferencijalno-geometrijske strukture dinamičkog odziva, u posljednje vrijeme često upotrebljavaju i za optimalno upravljanje sustavima.

Podupravljeni mehanički sustavi, kakav je i primjer mahokriline letjelice, su sustavi koji nemaju upravljački pogon (*eng. actuator*) pridružen svakom stupnju slobode gibanja i problem upravljanja proizlazi iz činjenice da je broj upravljačkih pogona manji od broja stupnjeva slobode gibanja.

S obzirom na gornje rečeno, u radu je potrebno:

1. Opisati varijacijske integratore, a posebnu pozornost obratiti na tzv. *Discrete Mechanics and Optimal Control (DMOC)* pristup, koji omogućava primjenu varijacijskih integratora za optimalno upravljanje sustavom.
2. Izabrati primjer podupravljanje besposadne letjelice i opisati pripadni matematički model s posebnim naglaskom na probleme upravljanja.
3. Opisati i implementirati izabrani algoritam za optimalno upravljanje, temeljen na varijacijskim integratorima, na primjeru izabrane podupravljanje besposadne letjelice.
4. Komentirati dobivene rezultate s naglaskom na prednosti i nedostatke korištenja varijacijskog pristupa naspram klasičnog pristupa optimalnog upravljanja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

3. svibnja 2018.

Datum predaje rada:

5. srpnja 2018.

Predviđeni datum obrane:

11., 12. i 13. srpnja 2018.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Zdravko Terze

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS OZNAKA .....	III
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY.....	VII
1. UVOD .....	1
2. VARIJACIJSKI INTEGRATORI.....	2
2.1. Lagrangeova mehanika (neprekidno vrijeme).....	2
2.2. Lagrangeova mehanika (diskretizirano vrijeme).....	4
2.3. Forma položaj-količina gibanja.....	6
2.4. Sustavi s vanjskim opterećenjem (neprekidno vrijeme).....	7
2.5. Sustavi s vanjskim opterećenjem (diskretizirano vrijeme).....	8
2.6. Forma položaj-količina gibanja (s vanjskim opterećenjem) .....	10
3. DISKRETNA MEHANIKA I OPTIMALNO UPRAVLJANJE (DMOC).....	11
3.1. Lagrangeov problem optimalnog upravljanja (neprekidno vrijeme) .....	11
3.2. Lagrangeov problem optimalnog upravljanja (diskretizirano vrijeme) .....	12
4. PRIMJENA .....	15
4.1. Jednostavan helikopter .....	15
4.2. Linearni kvadratni regulator .....	16
4.3. Python-ov modul <code>trep</code> .....	17
4.4. Python kod optimalnog upravljanja jednostavnim helikopterom.....	18
4.5. Rezultati.....	21
5. DRUGI ALGORITMI I DMOC.....	24
6. ZAKLJUČAK .....	26
LITERATURA .....	27
PRILOG.....	29

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Varijacija $\delta q(t)$ puta $q(t)$ na mnogostrukosti $Q$ .....	2
Slika 2.	Točke $q_k$ diskretiziranog put i pripadne varijacije $\delta q_k$ .....	5
Slika 3.	Lijevo i desno diskretizirano opterećenje .....	9
Slika 4.	Jednostavni helikopter .....	15
Slika 5.	Putanja u vremenu po x osi.....	15
Slika 6.	Putanja u vremenu po y osi.....	15
Slika 7.	Putanja u vremenu po z osi .....	15
Slika 8.	Metode za rješavanje problema optimalnog upravljanja .....	25



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	–	Matrica koeficijenata sustava
$B$	–	Matrica ulaza sustava
$B_\delta$	–	Okolina točke
$\mathcal{C}$	–	Prostor putova
$\mathcal{C}_d$	–	Diskretizirani prostor putova
$C^n$	–	Klasa funkcije
$\mathcal{D}$	–	Prostor putova upravljanja
$\mathcal{D}_d$	–	Diskretizirani prostor putova upravljanja
$D_i$	–	Diferencijalni operator u odnosu na $i$ -ti argument
$D_{EL} L$	–	Euler-Lagrangeovo preslikavanje
$D_{DEL} L_d$	–	Diskretizirano Euler-Lagrangeovo preslikavanje
$\mathbf{d}$	–	Diferencijalni operator
$\mathbb{F}$	–	Legendreova transformacija
$\mathbb{F}^{f+}$	–	Diskretizirana Legendreova transformacija
$\mathbb{F}^{f-}$	–	Diskretizirana Legendreova transformacija
$f_L$	–	Lagrangeovo opterećenje
$f_{LC}$	–	Lagrangeovo upravljano opterećenje
$f_{C_d}^+$	–	Diskretizirano Lagrangeovo upravljano opterećenje
$f_{C_d}^-$	–	Diskretizirano Lagrangeovo upravljano opterećenje
$f_k^+$	–	Diskretizirano Lagrangeovo upravljano opterećenje
$f_k^-$	–	Diskretizirano Lagrangeovo upravljano opterećenje

$I$	s, $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Vremenski interval, tenzor inercije
$I_1, I_2, I_3$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Glavni momenti inercije
$J$	–	Funkcija cilja
$J^*$	–	Minimizirana funkcija cilja
$\mathcal{K}$	–	Matrica pojačanja
$L$	J	Lagrangeova funkcija
$L^\infty$	–	Prostor funkcija
$L_d$	J	Diskretizirana Lagrangeova funkcija
$l_1, l_2$	m	Duljine
$m$	kg	Masa
$p$	–	Poopćena količina gibanja
$p_k$	–	Vrijednost diskretizirane poopćene količine gibanja u $t_k$
$Q$	–	Konfiguracijska mnogostrukost, težinska matrica stanja
$\ddot{Q}$	–	Podmnostrukost drugog reda
$\ddot{Q}_d$	–	Diskretizirana podmnostrukost drugog reda
$q$	–	Skup lokalnih koordinata, put na mnogostrukosti
$q^i$	–	i-ta komponenta od $q$
$q^*$	–	Optimalan $q$
$q_d$	–	Diskretizirani put
$q_k$	–	Vrijednost diskretiziranog puta u $t_k$
$\dot{q}$	–	Derivacija $q$ po vremenu
$\dot{q}^*$	–	Optimalan $\dot{q}$
$\dot{q}^i$	–	i-ta komponenta od $\dot{q}$
$R$	–	Matrica parametara upravljanja

$\mathcal{S}$	kg · m	Funkcional djelovanja
$\mathcal{S}_d$	kg · m	Diskretizirani funkcional djelovanja
$\mathbb{R}$	–	Skup realnih brojeva
$TQ$	–	Tangentni svežanj
$T^*Q$	–	Kotangentni svežanj
$T_q\mathcal{C}$	–	Tangentni prostor na $\mathcal{C}$ u $q$
$T_{q_d}\mathcal{C}_d$	–	Tangentni prostor na $\mathcal{C}_d$ u $q_d$
$t$	s	Vrijeme
$t_k$	s	Vremenska točka
$U$	–	Mnogostrukost upravljanja
$u$	–	Parametar upravljanja
$u^*$	–	Optimalan $u$
$u_d$	–	Diskretizirani parametar upravljanja
$u_g$	N	Upravljana sila koju generira glavni rotor helikoptera
$u_k$	–	Diskretna točka upravljanja
$u_s$	N	Upravljana sila koju generira stražnji rotor helikoptera
$v$	m/s	Brzina
$\Delta\tilde{t}$	s	Niz vremenskih točaka
$\delta$	–	Varijacija
$\varphi_m, \varphi_{ld}$	rad	Kutovi nagiva glavnog rotora helikoptera
$\Theta_L$	–	Lagrangeova 1-forma
$\Theta_{L_d}^+$	–	Diskretizirana Lagrangeova 1-forma
$\Theta_{L_d}^-$	–	Diskretizirana Lagrangeova 1-forma
$\omega$	rad/s	Kutna brzina

## SAŽETAK

Na početku ovog rada opisani su varijacijski integratori iz perspektive Lagrangeove mehanike, a potom je teorija varijacijskih integratora poslužila kao uvod i osnova za opis DMOC (eng. Discrete Mechanics and Optimal Control) algoritma. Za primjenu iznesene teorije odabran je Python-ov modul `trep`. Modul je prvo opisan, a zatim upotrijebljen za rješavanje problema optimalnog upravljanja jednostavnim helikopterom. Na kraju, DMOC je uspoređen s drugim algoritmima za rješavanje optimalnog problema upravljanja.

Ključne riječi: *Lagrangeova mehanika, diskretna mehanika, varijacijski integratori, optimalno upravljanje*

## SUMMERY

At the beginning of this thesis, variational integrators are described from the Lagrangian mechanics perspective. After that, variational integrators theory was used as an introduction and as a basis for describing DMOC (Discrete Mechanics and Optimal Control) algorithm. Python module `trep` was utilized for implementation of presented theory. Firstly the module was described and then it was used for solving optimal control problem of a simple helicopter. In the end, DMOC was compared with other algorithms for solving optimal control problems.

Key words: *Lagrangian mechanics, discrete mechanics, variational integrators, optimal control*

## 1. UVOD

Odličan uvod u temu ovog diplomskog rada već je dan u *opisu zadatka*, pored toga se malo što može dodati a da je za uvod prikladno i pritom netrivialno.

*Mehanički integratori* naziv je za skupinu *numeričkih algoritama* namijenjenih numeričkoj analizi mehaničkih sustava koji poštuju, najmanje jedno od tri, važna temeljna svojstva takvih sustava, pri čemu se pod temeljnim svojstvima smatraju *simplektičnost*, *očuvanje energije* i *očuvanje količine gibanja* [1].

*Varijacijski integratori* su numerički algoritmi dobiveni diskretizacijom *varijacijskih principa* kao što su, u području mehanike, *Hamiltonov* ili *Lagrange-d' Alembertov princip* [2]. Varijacijski integratori temeljeni na mehaničkim varijacijskim principima pripadaju klasi mehaničkih integratora [1].

*DMOC* (eng. *Discrete Mechanics and Optimal Control*) je numerički algoritam dobiven diskretizacijom *problema optimalnog upravljanja* koja je provedena u skladu s diskretizacijom prethodno spomenutih mehaničkih varijacijskih principa [3], odnosno diskretizirani mehanički varijacijski principi služe kao ograničenja *diskretiziranoj funkciji cilja* u diskretiziranom problemu optimalnog upravljanja [4]. Iako DMOC kao podlogu može koristiti *Lagrangeovu* i *Hamiltonovu mehaniku* [5, 6], u ovom radu teorija i primjena DMOC-a dana je isključivo za Lagrangeovu mehaniku.

## 2. VARIJACIJSKI INTEGRATORI

### 2.1. Lagrangeova mehanika (neprekidno vrijeme)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [1], [7], [8] i [9].

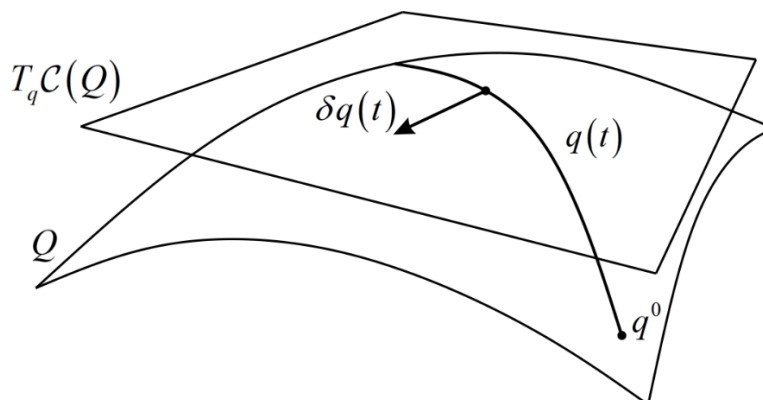
Neka je  $Q$   $n$ -dimenzionalna konfiguracijska mnogostrukost s lokalnim koordinatama  $q = (q^1, \dots, q^n)$ . Tangentni svežanj  $TQ$  predstavlja prostor stanja pridružen mnogostrukosti  $Q$ , a preslikavanje  $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$  Lagrangeovu funkciju odnosno lagranžijan. Za vrenemski interval  $[0, T]$ , prostor putova definira se kao

$$\mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}([0, T], Q) = \{q: [0, T] \rightarrow Q \mid q \text{ je } C^2 \text{ krivulja}\}, \quad (1)$$

a funkcional djelovanja  $\mathcal{S}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  kao

$$\mathcal{S}(q) = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (2)$$

Neka je ponovno s  $q: [0, T] \rightarrow Q$  dan put na  $Q$ , te neka je  $q(t, \epsilon)$  skup putova za koje vrijedi  $q(t, 0) = q(t)$ . Varijacija  $\delta q(t) \in T_q \mathcal{C}(Q)$  puta  $q(t)$  predstavlja polje vektora tangencijalnih na mnogostrukost  $Q$  duž puta  $q(t)$ . Jedan od ih vektora prikazan je slikom 1.



**Slika 1.** Varijacija  $\delta q(t)$  puta  $q(t)$  na mnogostrukosti  $Q$ .

Dakle, vrijedi

$$\delta q(t) = \left. \frac{d}{d\epsilon} q(t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0}. \quad (3)$$

Prema *Hamiltonovom principu stacionarnog djelovanja* put  $q(t)$  je *stacionarna točka* funkcionala  $\mathcal{S}$  ako vrijedi  $\delta\mathcal{S} = 0$  za sve varijacije  $\delta q(t) \in T_q\mathcal{C}(Q)$ , pri čemu je  $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$ , odnosno ako vrijedi

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = \mathbf{d}\mathcal{S}[q(t)] \cdot \delta q(t) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{S}[q(t, \epsilon)] \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right] dt \\ &= \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right|_0^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Na temelju izraza (3) zaključuje se da je put  $q(t) \in \mathcal{C}(Q)$  rješenje *Euler-Lagrangeovih jednadžbi* ako vrijedi

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right) = 0, \quad (5)$$

za svaki  $t \in (0, T)$ .

Da bi se naglasila geometrijska pozadina Hamiltonovog principa, izraz (3) može se zapisati i kao

$$\delta\mathcal{S} = \int_0^T D_{\text{EL}} L(\ddot{q}) \cdot \delta q dt + \Theta_L(\dot{q}) \cdot \hat{\delta} q \Big|_0^T, \quad (6)$$

pri čemu su tada

$$\hat{\delta} q = \left( \left( q(t), \frac{\partial q}{\partial t}(t) \right), \left( \delta q(t), \frac{\partial \delta q}{\partial t}(t) \right) \right), \quad (7)$$



$D_{\text{EL}}L$  jedinstveno Euler-Lagrangeovo preslikavanje  $D_{\text{EL}}L: \ddot{Q} \rightarrow T^*Q$ , klase  $C^{k-2}$ , s koordinatnim prikazom

$$(D_{\text{EL}}L)_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right), \quad (8)$$

dok je jedinstvena Lagrangeova 1-forma na  $TQ$ , klase  $C^{k-1}$ , s koordinatnim prikazom

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i. \quad (9)$$

## 2.2. Lagrangeova mehanika (diskretizirano vrijeme)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [7].

Neka je ponovno  $Q$   $n$ -dimenzionalna konfiguracijska mnogostrukost, te neka je s  $Q \times Q$  definiran diskretizirani prostor stanja. Zbog lokalne izomorfности tako definiran prostor sadrži istu količinu informacija kao i prostor  $TQ$ . Diskretizirana Lagrangeova funkcija definira se kao  $L_d = Q \times Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . U nastavku teksta se zavisnost  $L_d$  o vremenu zanemaruje čime se diskretizirana Lagrangeova funkcija svodi na  $L_d = Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Neka je, nadalje, s  $\{t_k = kh \mid k = 0, \dots, N\} \subset \mathbb{R}$  definiran niz vremenskih točaka te neka je na temelju tog niza definiran diskretizirani prostor putova

$$\mathcal{C}_d(Q) = \mathcal{C}_d(\{t_k\}_{k=0}^N, Q) = \{q_d : \{t_k\}_{k=0}^N \rightarrow Q\}. \quad (10)$$

Diskretizirani put  $q_k \in \mathcal{C}_d(Q)$  poistovijećuje se sa slikom  $q_d = \{q_k\}_{k=0}^N$ , pri čemu je  $q_k = q_d(t_k)$ .

Diskretizirani funkcional djelovanja  $\mathcal{S}_d : \mathcal{C}_d(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  definira se kao zbroj diskretiziranih Lagrangeovih funkcija, odnosno kao

$$\mathcal{S}_d(q_d) = \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}). \quad (11)$$

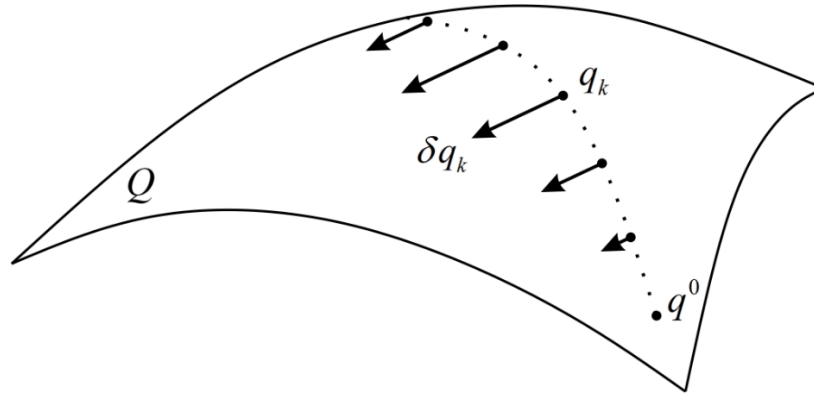
Prema diskretiziranom Hamiltonovom principu stacionarnog djelovanja vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_d &= \mathbf{d}\mathcal{S}_d(q_d) \cdot \delta q_d = \sum_{k=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + D_2 L_d(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_{k+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k)] \cdot \delta q_k \\ &\quad + D_1 L_d(q_0, q_1) \cdot \delta q_0 + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) \cdot \delta q_N. \end{aligned} \quad (12)$$

Diskretizirani put  $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$  je rješenje diskretiziranih Euler-Lagrangeovih jednadžbi ako prvi član s desne strane u izrazu (11) iščezava za sve diskretizirane varijacije  $\delta q_d \in T_{q_d} \mathcal{C}_d(Q)$ , a to znači da točke  $\{q_k\}$  moraju zadovoljavati

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad (13)$$

za svaki  $k=1, \dots, N-1$ . Diskretizirani put  $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$  i pripadne diskretizirane varijacije  $\delta q_d \in T_{q_d} \mathcal{C}_d(Q)$  prikazani su na slici 2.



**Slika 2.** Točke  $q_k$  diskretiziranog put i pripadne varijacije  $\delta q_k$ .

Za kraj potpoglavlja dan je diskretizirani Hamiltonov princip s naglašenom geometrijom, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{dS}_d(q_d) \cdot \delta q_d &= \sum_{k=1}^{N-1} D_{\text{DEL}} L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})) \cdot \delta q_k \\ &+ \Theta_{L_d}^+(q_{N-1}, q_N) \cdot (\delta q_{N-1}, \delta q_N) - \Theta_{L_d}^+(q_0, q_1) \cdot (\delta q_0, \delta q_1), \end{aligned} \quad (14)$$

pri čemu je  $D_{\text{DEL}} L_d : \ddot{Q}_d \rightarrow T^*Q$  jedinstveno *diskretizirano Euler-Lagrangeovo preslikavanje* klase  $C^{k-1}$ , za koje vrijedi jednakost

$$D_{\text{DEL}} L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})) = D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}). \quad (15)$$

Lagrangeova 1-forma i  $\Theta_{L_d}^-$  su jedinstvene *diskretizirane Lagrangeove 1-forme* na  $Q \times Q$ , klase  $C^{k-1}$ , za koje vrijedi

$$\Theta_{L_d}^+(q_0, q_1) = D_2 L_d(q_0, q_1) \mathbf{d}q_1 = \frac{\partial L_d}{\partial q_1^i} dq_1^i, \quad (16)$$

$$\Theta_{L_d}^-(q_0, q_1) = -D_1 L_d(q_0, q_1) \mathbf{d}q_0 = -\frac{\partial L_d}{\partial q_0^i} dq_0^i. \quad (17)$$

### 2.3. Forma položaj-količina gibanja

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [7], [9] i [10].

U ovom potpoglavlju prikazuje se veza između diskretizirane količine gibanja i diskretizirane Euler-Lagrangeove jednadžbe. Zbog toga što je primarni interes ovog rada diskretna Lagrangeova mehanika te zbog kompleksne i opširne teorije koja se nalazi u pozadini te veze, ozbiljnija analiza se ne provodi.

Legendreovom transformacijom Lagrangeove funkcije  $L(q, \dot{q})$  naziva se preslikavanje  $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$  koje ima koordinatnu formu

$$\mathbb{F}L(q, \dot{q}) = \left( q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = (q, p). \quad (18)$$

Primjena Legendreove transformacije na diskretiziranu Lagrangeovu funkciju rezultira izrazom za diskretiziranu količinu gibanja

$$p_k = D_2 L_d(q_{k+1}, q_k) = -D_1 L_d(q_k, q_{k-1}), \quad (19)$$

odnosno

$$p_k = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}), \quad (20)$$

$$p_{k+1} = D_2 L_d(q_k, q_{k+1}). \quad (21)$$

Općenito, jednadžba (20) je nelinearna i ne može ju se riješiti eksplicitno za  $q_{k+1}$ , potrebno je stoga upotrijebiti neku od numeričkih metoda pa tek nakon toga eksplicitno rješavati jednadžbu (21).

## 2.4. Sustavi s vanjskim opterećenjem (neprekidno vrijeme)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [5] i [6].

*Lagrangeovo opterećenje* definira se kao *horizontalna 1-forma* na  $TQ$ ,  $f_L : TQ \rightarrow T^*Q$ , a u koordinatama se zapisuje kao

$$f_L : (q, \dot{q}) \rightarrow (q, f_L(q, \dot{q})). \quad (22)$$

Ako je  $U \subset \mathbb{R}^m$  *mногоstrukost upravljanja*, onda se na intervalu  $I = [0, T]$  može definirati *prostor putova upravljanja* kao

$$\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}([0, T], U) = \{u : [0, T] \rightarrow U \mid u \in L^\infty\}, \quad (23)$$

pri čemu se  $u(t) \in U$  naziva *parametar upravljanja*. *Lagrangeovo upravljano opterećenje* definira se kao preslikavanje  $f_{LC} : TQ \times U \rightarrow T^*Q$ , s koordinatnim zapisom

$$f_{LC} : (q, \dot{q}, u) \rightarrow (q, f_{LC}(q, \dot{q}, u)). \quad (24)$$

Dodavanjem upravljanog opterećenja, Hamiltonov princip postaje *Lagrange-d'Alembertovim principom*, pa prema tome vrijedi sljedeće

$$\delta \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_0^T f_{LC}(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \cdot \delta q(t) dt = 0. \quad (25)$$

Drugi integral predstavlja *virtualni rad* koji nastaje djelovanjem upravljanog opterećenja  $f_{LC}$ . Integriranjem izraza (25) dobije se sustav *Euler-Lagrangeovih jednadžbi s vanjskim opterećenjem*, koje u koordinatnom zapisu izgledaju

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) + f_{LC}(q, \dot{q}, u) = 0. \quad (26)$$

## 2.5. Sustavi s vanjskim opterećenjem (diskretizirano vrijeme)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [5] i [6].

Neka je za potrebe diskretizacije prostora putova upravljanja definiran novi niz vremenskih točaka  $\Delta \tilde{t} = \{t_{kl} = t_k + c_l h \mid k \in \{0, \dots, N-1\}, l \in \{1, \dots, s\}\}$ ,  $0 \leq c_1 < \dots < c_s \leq 1$ . S tako definiranim nizom diskretizira se prostor putova upravljanja kao

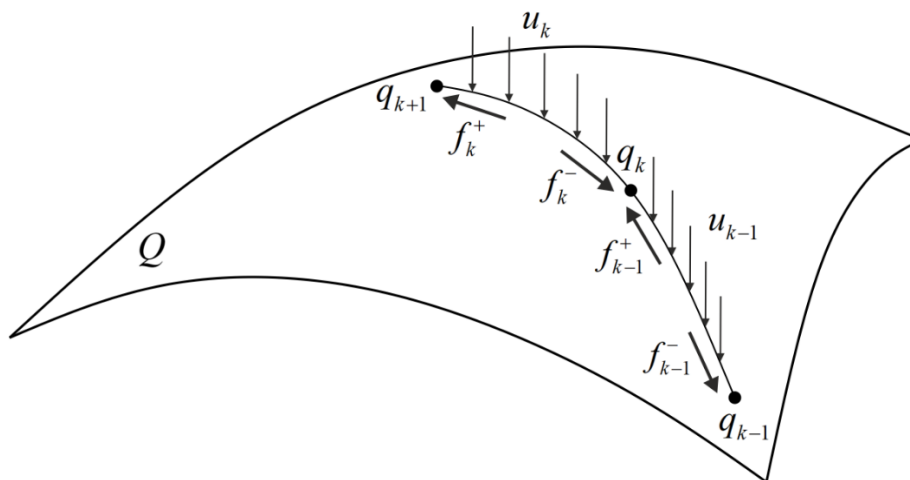
$$\mathcal{D}_d(U) = \mathcal{D}_d(\Delta \tilde{t}, U) = \{u_d : \Delta \tilde{t} \rightarrow U\}. \quad (27)$$

Nadalje, neka su na intervalu  $[t_k, t_{k+1}]$  definirane *diskretne točke upravljanja*  $u_k = (u_{k1}, \dots, u_{ks}) \in U^s$  kao vrijednosti parametara upravljanja koji upravljaju sustavom od točke  $q_k = q_d(t_k)$  do  $q_{k+1} = q_d(t_{k+1})$ , pri čemu su  $u_{kl} = u_d(t_{kl})$  za svaki  $l \in \{1, \dots, s\}$ . Skup  $U^s$  može se promatrati kao konačno dimenzionalni potprostor prostora  $\mathcal{D}([0, h], U)$ . Prema takvom tumačenju diskretiziranog prostora putova upravljanja vrijedi  $f_{C_d}^+, f_{C_d}^- : Q \times Q \times U^s \rightarrow T^*Q$ , odnosno

$$f_{C_d}^+(q_k, q_{k+1}, u_k) = (q_{k+1}, f_{C_d}^+(q_k, q_{k+1}, u_k)), \quad (28)$$

$$f_{C_d}^-(q_k, q_{k+1}, u_k) = (q_k, f_{C_d}^-(q_k, q_{k+1}, u_k)). \quad (29)$$

Izrazi (28) i (29) predstavljaju *diskretizirana Lagrangeova upravljana opterećenja*, pri čemu se za opterećenje s indeksom + koristi pridjev *lijevo* a za opterećenje s indeksom - *desno*. Radi bolje preglednosti izraze (28) i (29) zapisati će se  $f_k^\pm = f_{C_d}^\pm(q_k, q_{k+1}, u_k)$ . Lijevo opterećenje  $f_{k-1}^+$  rezultat je djelovanja upravljanog opterećenja na vremenskom intervalu  $[t_{k-1}, t_k]$ , dok je desno opterećenje  $f_k^-$  rezultat djelovanja upravljanog opterećenja na vremenskom intervalu  $[t_k, t_{k+1}]$ , geometrijska interpretacija dana je slikom 3.



**Slika 3.** Lijevo i desno diskretizirano opterećenje.

Uz pomoću tih izraza izvodi se *diskretizirani Lagrange-d'Alembertov princip* na temelju kojeg se traži diskretizirani put  $\{q_k\}_{k=0}^N$  koji zadovoljava jednakost

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} [f_{C_d}^-(q_k, q_{k+1}, u_k) \cdot \delta q_k + f_{C_d}^+(q_k, q_{k+1}, u_k) \cdot \delta q_{k+1}] = 0, \quad (30)$$

za sve varijacije  $\{\delta q_k\}_{k=0}^N$  koje iščezavaju u krajnjim točkama, iz čega dalje slijedi da je diskretizirani put rješenje *diskretiziranih Euler-Lagrangeovih jednadžbi s vanjskim opterećenjem* ako vrijedi

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{C_d}^+(q_{k-1}, q_k, u_{k-1}) + f_{C_d}^-(q_k, q_{k+1}, u_k) = 0. \quad (31)$$

## 2.6. Forma položaj-količina gibanja (s vanjskim opterećenjem)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [5], [6] i [10].

Iz istih razloga koji su navedeni u potpoglavlju 2.1.3 ozbiljnija analiza izostaje, uz jednostavan uvod, dani su gotovi izrazi.

*Diskretizirane Legendreove transformacije s vanjskim opterećenjem* su

$$\mathbb{F}^{f^+}L_d : (q_0, q_1) \mapsto (q_1, p_1) = (q_1, D_2L_d(q_0, q_1) + f_{C_d}^+(q_0, q_1, u_0)), \quad (32)$$

$$\mathbb{F}^{f^-}L_d : (q_0, q_1) \mapsto (q_0, p_0) = (q_0, -D_1L_d(q_0, q_1) - f_{C_d}^-(q_0, q_1, u_0)). \quad (33)$$

Kombiniranjem izraza (31), (32) i (33) dobije se

$$p_k = -D_1L_d(q_k, q_{k+1}) - f_{C_d}^-(q_k, q_{k+1}, u_k), \quad (34)$$

$$p_{k+1} = D_2L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{C_d}^+(q_k, q_{k+1}, u_k). \quad (35)$$

Jednadžba (34), za razliku od jednadžbe (35), ne može se riješiti eksplicitno. Potrebno je stoga, kao i kod jednadžbe (20), poslužiti se nekom od numeričkih metoda pa potom prijeći na eksplicitno rješavanje jednadžbe (35).

### 3. DISKRETNA MEHANIKA I OPTIMALNO UPRAVLJANJE (DMOC)

#### 3.1. Lagrangeov problem optimalnog upravljanja (neprekidno vrijeme)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [5], [6] i [11].

Neka su, za mehanički sustav definiran Lagrangeovom funkcijom  $L:TQ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I=[0,T]$  vremenski interval i  $Q$  konfiguracijska mnogostrukost, neka je  $q:I \rightarrow Q$  put za koji vrijedi  $(q(0), \dot{q}(0)) = (q^0, \dot{q}^0) \in TQ$  i neka na taj sustav djeluje Lagrangeovo upravljano opterećenje  $f_{LC}:TQ \times U \rightarrow T^*Q$  s odabranim parametrom upravljanja  $u(t) \in U$ . Da bi se riješio *Lagrangeovog problem optimalnog upravljanja* potrebno je pronaći optimalne funkcije  $q(t), \dot{q}(t)$  i  $u(t)$ , takve da *funkcija cilja*  $J:TQ \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , odnosno

$$J(q, \dot{q}, u) = \int_0^T C(q(t), \dot{q}(t), u(t)) dt + \Phi(q(T), \dot{q}(T)), \quad (36)$$

bude minimizirana, pri čemu konačno stanje sustava  $(q(T), \dot{q}(T))$  mora zadovoljiti ograničenje

$$r(q(T), \dot{q}(T), q^T, \dot{q}^T) = 0, \quad (37)$$

za konkretne vrijednosti  $(q^T, \dot{q}^T) \in TQ$ . Istovremeno, sustav mora poštovati i Lagrange-d'Alembertov princip dan izrazom (25), a u slučaju da postoje ograničenja stanja ili parametara upravljanja, dodatno mora biti zadovoljenja i nejednakost

$$h(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \geq 0. \quad (38)$$

Dakle, Lagrangeov problem optimalnog upravljanja definira se kao

$$\min_{q, \dot{q}, u, (T)} J(q, \dot{q}, u) = \int_0^T C(q(t), \dot{q}(t), u(t)) dt + \Phi(q(T), \dot{q}(T)), \quad (39a)$$



s ograničenjima

$$\delta \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_0^T f_{LC}(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \cdot \delta q(t) dt = 0. \quad (39b)$$

$$q(0) = q^0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}^0, \quad (39c)$$

$$h(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \geq 0, \quad (39d)$$

$$r(q(T), \dot{q}(T), q^T, \dot{q}^T) = 0. \quad (39e)$$

Konačno vrijeme  $T$  može biti fiksirano ili može biti dodatni stupanj slobode optimizacijskog problema. Trojka  $(q, \dot{q}, u)$  je *moгуće rješenje* ako su zadovoljena ograničenja (39b)-(39e). Trojka  $(q^*, \dot{q}^*, u^*)$  je optimalno rješenje Lagrangeovog problema optimalnog upravljanja ako vrijedi

$$J(q^*, \dot{q}^*, u^*) \leq J(q, \dot{q}, u), \quad (40)$$

za sva moguća rješenja  $(q, \dot{q}, u)$ . Trojka  $(q^*, \dot{q}^*, u^*)$  je *lokalno optimalno rješenje* ako postoji okolina  $B_\delta((q^*, \dot{q}^*, u^*))$ ,  $\delta > 0$ , takva da vrijedi

$$J(q^*, \dot{q}^*, u^*) \leq J(q, \dot{q}, u). \quad (41)$$

### 3.2. Lagrangeov problem optimalnog upravljanja (diskretizirano vrijeme)

Potpoglavlje je napisano korištenjem literature [5], [6] i [11].

Diskretizacija jednadžbi (35a)-(35e) provodi se prema pravilima koja su dana u poglavlju 2.2. Dakle, neka je s  $\{t_k = kh \mid k = 0, \dots, N\} \subset \mathbb{R}$  definiran niz vremenskih točak, zbog toga što su brzine definirane na vremenskim intervalima  $[t_k, t_{k+1}]$  a ne u vremenskim točkama, da bi se mogli odrediti

rubni uvjeti  $q(0) = q^0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}^0$  i  $r(q(T), \dot{q}(T), q^T, \dot{q}^T) = 0$ , potrebno je umjesto izraza za brzinu

uvesti izraze za količinu gibanja izvedene u poglavlju 2.6., prema kojima vrijedi

$$p^0 = -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_0^-, \quad (42)$$

$$p^T = D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+. \quad (43)$$

Diskretizacijom jednadžbi (39a)-(39e) i korištenjem jednadžbe (42), za slučaj kad krajnje stanje nije unaprijed poznato, *diskretizirani Lagrangeov problem optimalnog upravljanja* je

$$\min_{q_d, u_d, (h)} J_d(q_d, u_d) = \sum_{k=0}^{N-1} C_d(q_k, q_{k+1}, u_k) + \Phi_d(q_{N-1}, q_N, u_{N-1}), \quad (44a)$$

s ograničenjima

$$q_0 = q^0, \quad (44b)$$

$$p_0 = -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_0^-, \quad (44c)$$

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (44d)$$

$$h_d(q_k, q_{k+1}, u_k) \geq 0, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (44e)$$

$$r_d(q_{N-1}, q_N, u_{N-1}, q^T, \dot{q}^T) = 0. \quad (44f)$$

Za slučaj kad je krajnje stanje unaprijed poznato, problem izgleda

$$\min_{q_d, u_d, (h)} J_d(q_d, u_d) = \sum_{k=0}^{N-1} C_d(q_k, q_{k+1}, u_k), \quad (45a)$$

s ograničenjima

$$q_0 = q^0, \quad (45b)$$

$$p^0 = -D_1 L_d(q_0, q_1) - f_0^-, \quad (45c)$$

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_{k-1}^+ + f_k^- = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (45d)$$

$$h(q_k, q_{k+1}, u_k) \geq 0, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (45e)$$

$$q_N = q^T, \quad (45f)$$

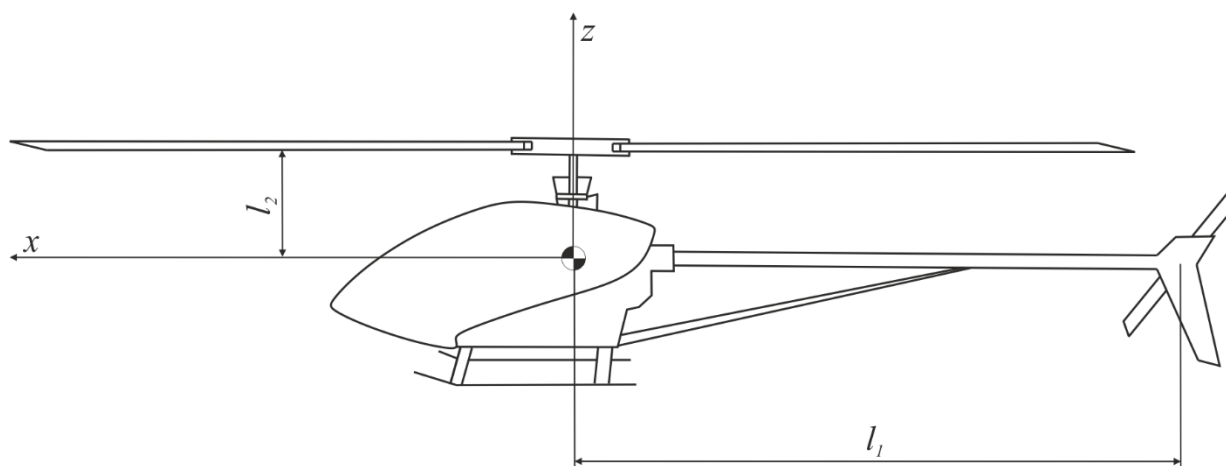
$$p^T = D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) + f_{N-1}^+. \quad (45g)$$

Jednadžbe (44a)-(44f) kao i jednadžbe (45a)-(45g) primjer su *problema nelinearnog programiranja* koji se rješavaju standardnim metodama *sekvencijalnog kvadratnog programiranja*.

## 4. PRIMJENA

### 4.1. Jednostavan helikopter

Jednostavan helikopter, prikazan slikom 4, prema Kobilarovu i sur. [12], definira se kao jedno kruto tijelo, podupravljano, mase  $m$  i glavnih momenata inercije oko težišta  $I_1, I_2$  i  $I_3$ .



**Slika 4.** Jednostavni helikopter.

Upravljanje letjelicom izvodi se preko sile  $u_g$ , koju generira glavni rotor, i sile  $u_s$ , koju generira stražnji rotor. Sila glavnog rotora može se usmjeriti naginjanjem naprijed ili nazad za kut  $\varphi_m$  i lijevo ili desno za kut  $\varphi_{ld}$ . Prema tome, matrica upravljanja je

$$u = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_m)\cos(\varphi_{ld}) & 0 \\ \sin(\varphi_{ld}) & 1 \\ \cos(\varphi_{ld})\cos(\varphi_m) & 0 \\ -l_2\sin(\varphi_{ld})\cos(\varphi_m) & 0 \\ l_2\sin(\varphi_m)\cos(\varphi_{ld}) & 0 \\ 0 & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_g & u_s \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Lagrangeova funkcija za takvu letjelicu je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgh. \quad (47)$$

Helikopterom je optimalno upravljano upotrebom linearnog kvadratnog regulatora, LQR (eng. linear quadratic regulator). Definicija je dana u sljedećem potpoglavlju.

## 4.2. Linearni kvadratni regulator

Prema [13], diskretizirani LQR definiran je sljedećim skupom jednažbi

$$x(t_{k+1}) = A(t_k)x(t_k) + B(t_k)u(t_k), \quad (48)$$

$$J(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} [x^T(t_k)Q(t_k)x(t_k) + u^T(t_k)R(t_k)u(t_k)] + x^T(t_f)Q(t_f)x(t_f), \quad (49)$$

$$R(t_k) = R^T(t_k) \geq 0, \quad \forall t_k \in \{t_0, \dots, (t_{f-1})\}, \quad (50)$$

$$Q(t_k) = Q^T(t_k) \geq 0, \quad \forall t_k \in \{t_0, \dots, t_f\}. \quad (51)$$

Funkcija cilja minimizirana je s

$$u^*(t_k) = -\mathcal{K}(t_k)x(t_k), \quad (52)$$

iz čega slijedi da je

$$J^*(x(t_0), t_0) = x^T(t_k)Q(t_k)x(t_k), \quad (53)$$

pri čemu su

$$\mathcal{K}(t_k) = \Gamma^{-1}(t_k)B^T(t_k)P(t_{k+1})A(t_k), \quad (54)$$

$$\Gamma(t_k) = R(t_k) + B^T(t_k)P(t_{k+1})B(t_k). \quad (55)$$

U gornjim izrazima  $P(t_{k+1})$  je simetrična matrica koja se dobije rješavanjem diskretizirane Riccatijeve jednadžbe

$$P(t_k) = Q(t_k) + A^T(t_k)P(t_{k+1})A(t_k) - \mathcal{K}^T(t_k)\Gamma(t_k)\mathcal{K}(t_k), \quad (56)$$

$$P(t_f) = Q(t_f). \quad (57)$$

### 4.3. Python-ov modul `trep`

Prema Johnsonu [13] `trep` je Python-ov modul namijenjen numeričkoj analizi mehaničkih sustava, a pisan je prema teoriji varijacijskih integratora i na njima utemeljenoj teoriji optimalnog upravljanja. Diskretizacija jednadžbi izvršena je metodom srednje vrijednosti.

$$L_d(q_k, q_{k+1}) = (t_{k+1} - t_k) L\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{t_{k+1} - t_k}\right), \quad (58)$$

$$f_{C_d}^-(q_k, q_{k+1}, u_k) = (t_{k+1} - t_k) f\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}, \frac{q_{k+1} - q_k}{t_{k+1} - t_k}, u_k\right), \quad (59)$$

$$f_{C_d}^+(q_k, q_{k+1}, u_k) = 0. \quad (60)$$

Za `trep` modul karakterističan je prikaz mehaničkog sustava na principu *drveta* (eng. tree-based description) [10]. Prema Johnsonu i Murpheyu [14] mehanički sustavi često imaju hijerarhijsku strukturu, pa se prikazom mehaničkog sustava u drvo formi dobije pregledna struktura sustava i dobra osnova za efikasnu numeričku analizu. Bitni mjesta mehaničkog sustava prikazuju se međusobno zavisnim koordinatnim sustavima. Odnos između dva koordinatna sustava reguliran je samo jednom od šest osnovnih transformacija euklidskog prostora, a to znači da se kompleksniji spojevi modeliraju višestrukim koordinatnim sustavima. Primjer takvog prikaza jasno je vidljiv u priloženom Python kodu.

#### 4.4. Python kod optimalnog upravljanja jednostavnim helikopterom

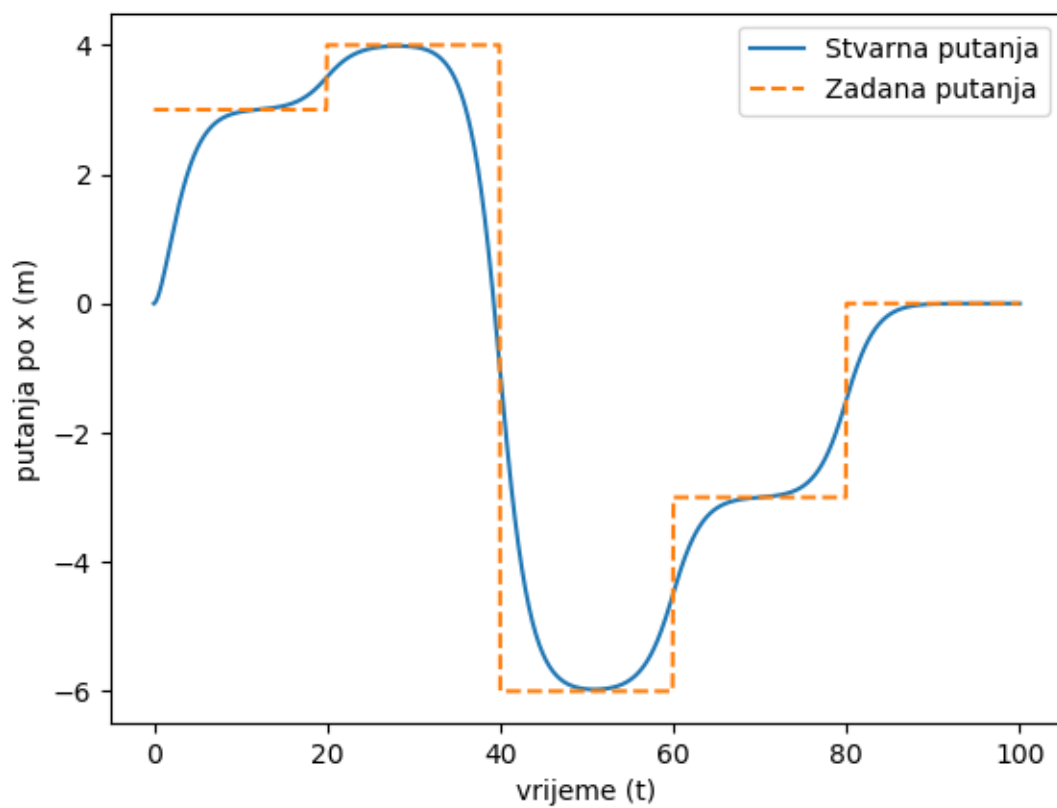
```
1     import numpy as np
2     import trep
3     import matplotlib
4     import matplotlib.pyplot as plt
5     import trep.discopt as discopt
6
7     #po etno stanje
8     q0 = np.array([0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
9     p0 = np.array([0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
10    X0 = np.hstack([q0,p0])
11
12    #vremenski korak
13    dt = 0.1
14
15    #kona no vrijeme
16    tf = 100.
17
18    #definiranje putanje
19    def fref1(t):
20        if 0<=t and t<20:
21            return 3
22        elif 20<=t and t<40:
23            return 4
24        elif 40<=t and t<60:
25            return -6
26        elif 60<=t and t<80:
27            return -3
28        elif t<=100:
29            return 0
30        else:
31            print "Error!"
32
33    def fref2(t):
34        if 0<=t and t<20:
35            return 5
36        elif 20<=t and t<40:
37            return 11
38        elif 40<=t and t<60:
39            return 6
40        elif t<=100:
41            return 0
42        else:
43            print "Error!"
44
45    def fref3(t):
46        if 0<=t and t<20:
47            return 3
48        elif 20<=t and t<40:
49            return 6
50        elif 40<=t and t<60:
51            return 10
52        elif 60<=t and t<80:
53            return 13
54        elif t<=100:
55            return 16
```

```
56         else:
57             print "Error!"
58
59     def fref4(t):
60         if 0<=t and t<=100:
61             return 0
62         else:
63             print "Error!"
64
65     def fref5(t):
66         if 0<=t and t<=100:
67             return 0
68         else:
69             print "Error!"
70
71     def fref6(t):
72         if 0<=t and t<=100:
73             return 0
74         else:
75             print "Error!"
76
77     def fref8(t):
78         if 0<=t and t<20:
79             return 3
80         elif 20<=t and t<40:
81             return 0
82         elif 40<=t and t<60:
83             return -3
84         elif 60<=t and t<80:
85             return -6
86         elif t<=100:
87             return 4
88         else:
89             print "Error!"
90
91
92
93     #kreiranje sustava
94     system = trep.System()
95
96     #definiranje okvira
97     frames1 = [
98         trep.tx("ok1p", name="okvir1"), [
99             trep.ty("ok2p", name="okvir2"), [
100                 trep.tz("ok3p", name="okvir3")]]]
101     frames2 = [
102         trep.rx("okv4", name="okvir4"), [
103             trep.rz("okv5", name="okvir5"), [
104                 trep.rx("okv6", name="okvir6"), [
105                     trep.tx(1.3, name="okvir7"), [
106                         trep.ty("ok8p", name="okvir8")]]]]]]]
107
108
109     #dodavanje okvira u sustav
110     system.import_frames(frames1)
111     system.import_frames(frames2)
112
113     #spoj pogonskog okvira i trupa
```

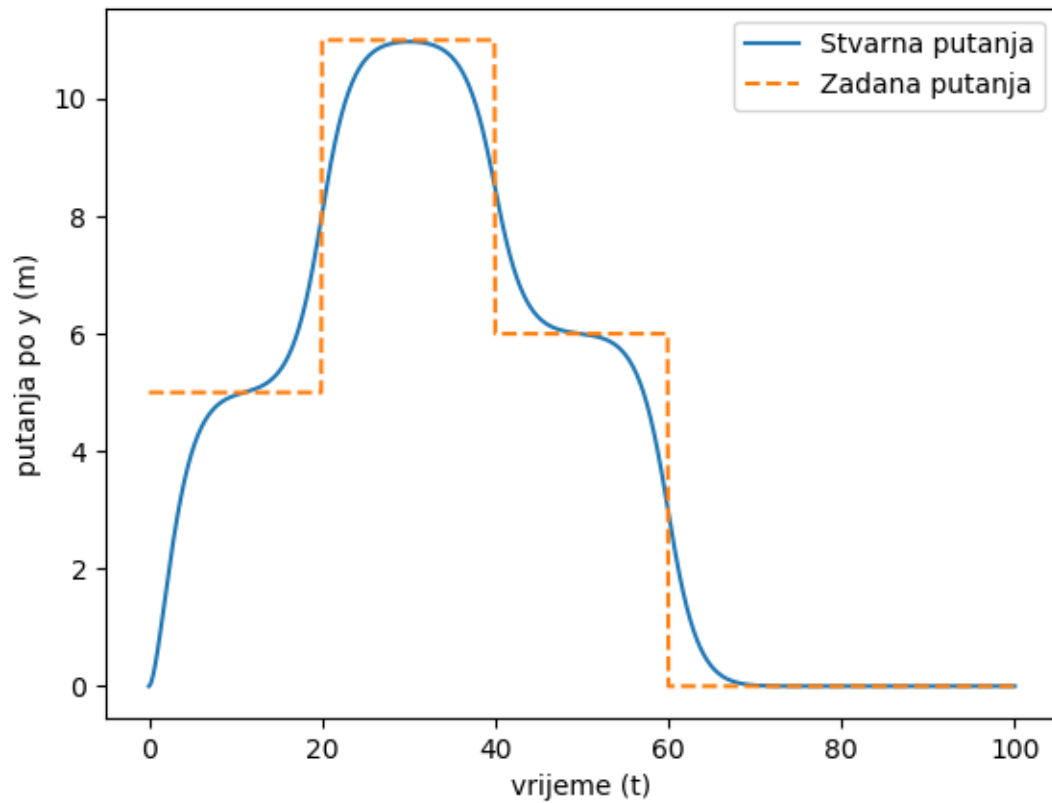


```
114     trep.constraints.Distance(system,system.get_frame('okvir3'),
115     system.get_frame('okvir4'), 0.15)
116     #dodavanje mase i momenata inercije
117     system.get_frame('okvir6').set_mass(1,Ixx=0.03,Iyy=0.04,Izz=0.05)
118
119     #dodavanje gravitacije u sustav
120     trep.potentials.Gravity(system, (0,0,-9.8))
121
122     #dodavanje sila u sustav
123     trep.forces.ConfigForce(system, "ok1p", "ok1Pogon")
124     trep.forces.ConfigForce(system, "ok2p", "ok2Pogon")
125     trep.forces.ConfigForce(system, "ok3p", "ok3Pogon")
126     trep.forces.ConfigForce(system, "ok8p", "ok8Pogon")
127
128     #kreiranje varijacijskog integratora i diskretnog sustava
129     t = np.arange(0,tf+dt,dt)
130     mvi = trep.MidpointVI(system)
131     dsys = discopt.DSystem(mvi, t)
132
133     #kreiranje referentne putanje
134     (Xinit,Uinit) = dsys.build_trajectory([q0.tolist()*len(t)])
135     qref =
136     [[fref1(x),fref2(x),fref3(x),fref4(x),fref5(x),fref6(x),fref8(x),] for
137     x in t]
138     (Xref,Uref) = dsys.build_trajectory(qref)
139
140     #kreiranje te inskih matrica i funkcije cilja
141     Q = np.diag([0.1, 0.1, 1, 0.5, 0.5, 15, 0.1, 1, 0.1, 1, 0.1, 1, 0.1,
142     5])
143     R = np.diag([1, 1, 0.01, 1])
144     cost = discopt.DCost(Xref, Uref, Q, R)
145
146     #definiranje optimizatora
147     optimizer = discopt.DOptimizer(dsys, cost)
148
149     #pode avanje i izvo enje optimizacije
150     optimizer.first_method_iterations = 4
151     finished, X, U = optimizer.optimize(Xinit, Uinit)
```

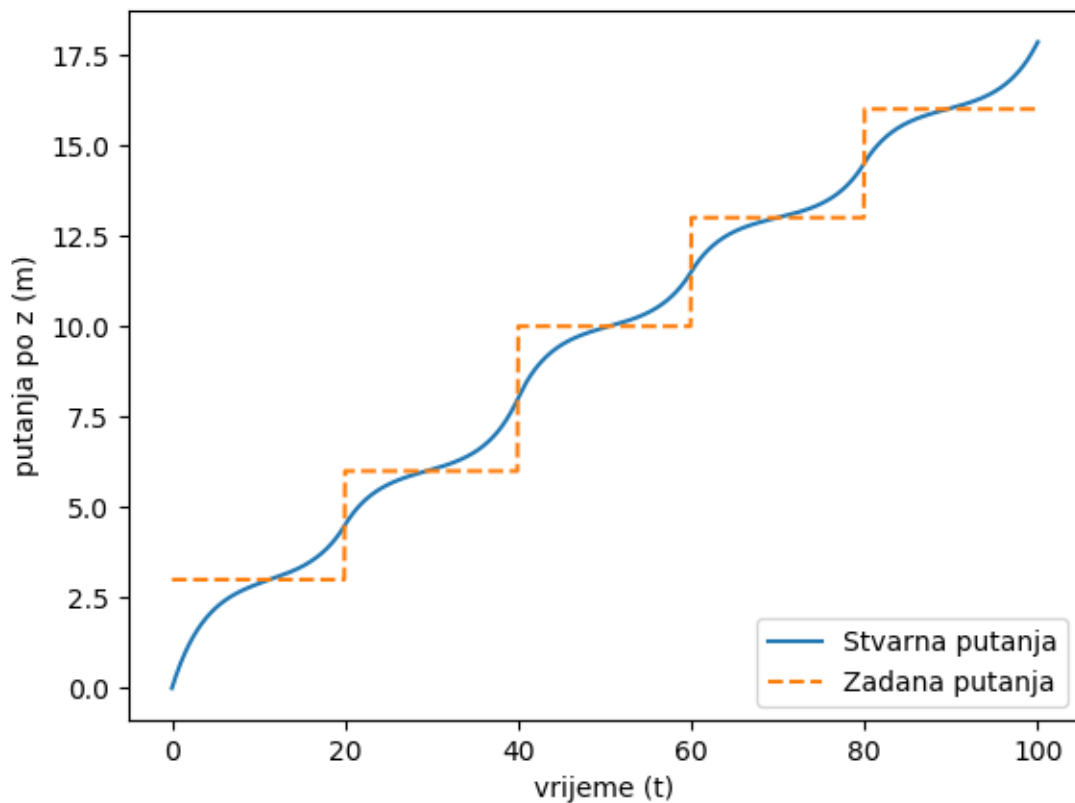
## 4.5. Rezultati



**Slika 5.** Putanja u vremenu po x osi.



**Slika 6.** Putanja u vremenu po y osi.



**Slika 7.** Putanja u vremenu po z osi.

Na svim rezultatima je jasno vidljivo kako stvarne putanje konvergiraju prema zadanim putanjama.

## 5. DRUGI ALGORITMI I DMOC

Metode za rješavanje problema optimalnog upravljanja najčešće se dijele na direktne i indirektne metode [5].

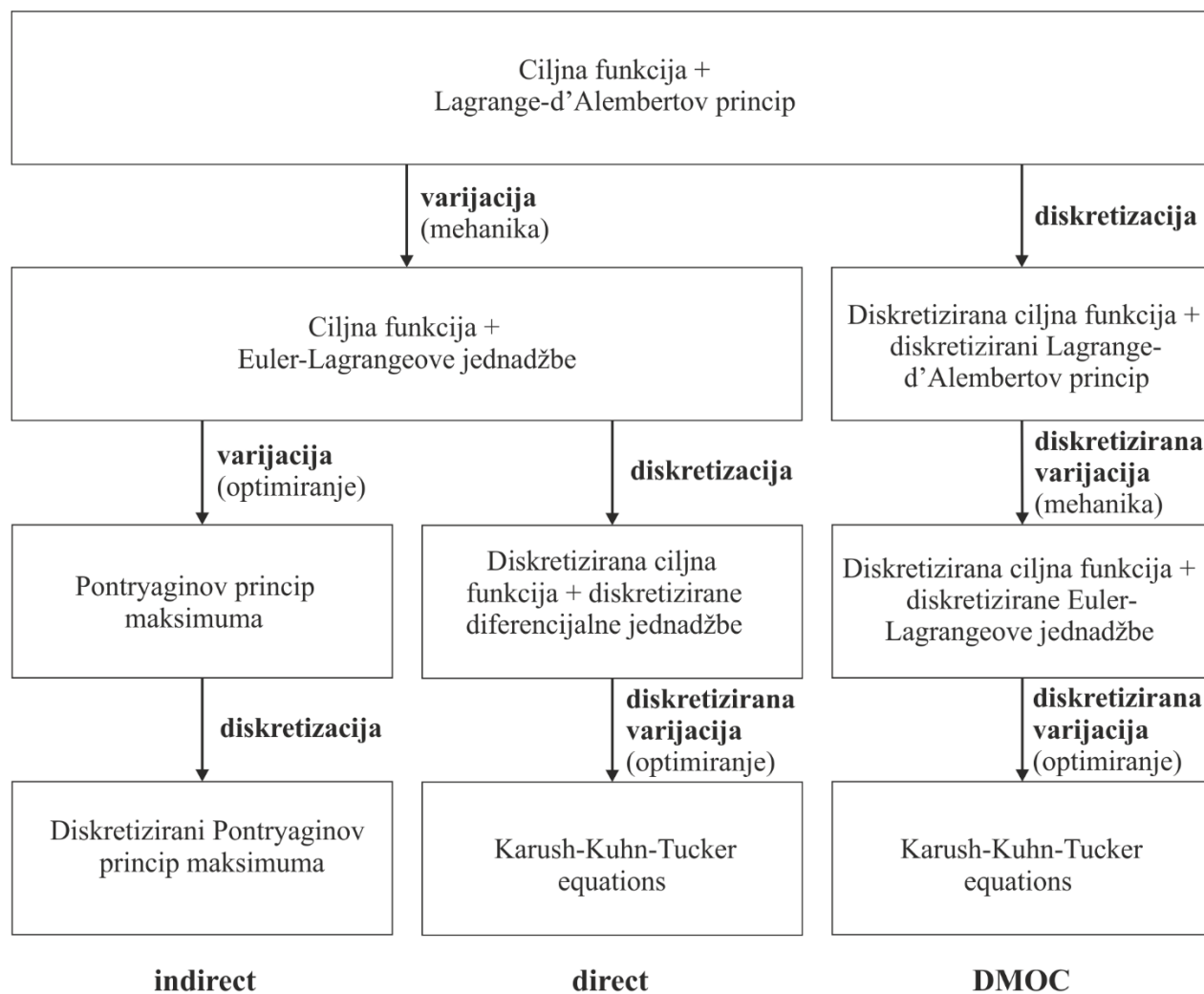
Kod indirektnih metoda iz ciljne funkcije i Lagrange-d' Alembertovog principa prvom varijacijom dobije se ciljna funkcija i Euler-Lagrangeove jednadžbe, dok se drugom varijacijom dobiju nužni uvjeti optimalnosti odnosno Pontryaginov princip maksimuma. Iz tako dobivenog problema rubnih uvjeta nekom od numeričkih metoda traži se konačno rješenje [6].

Kod direktnih metoda prvi korak je isti kao i kod indirektnih metoda, dok se u drugom koraku optimizacijski problem diskretizacijom Euler-Lagrangeovih jednadžbi direktno prevodi u ograničeni konačno dimenzionalni optimizacijski problem. Tako dobiven problem dalje se rješava standardnim iterativnim metodama kao što je sekvencijalno kvadratno programiranje [6].

DMOC je također direktna metoda za rješavanje optimizacijskog problema [11]. Bitna razlika između uobičajenih direktnih metoda i DMOC-a je u tome što se kod DMOC-a diskretizacija vrši već na razini varijacijskih principa, pa se nakon toga diskretiziranim varijacijama dolazi do ograničenog optimizacijskog problema [6].

Upravo zbog takve diskretizacije, koja se vrši već na razini varijacijskih principa, DMOC-u je omogućeno da naslijedi dobra svojstva varijacijskih integratora, što ga čini specijaliziranim optimizacijskim algoritmom, koji je precizniji i brži u odnosu na druge optimizacijske algoritme. Preciznost je posljedica toga što DMOC poštuje mehaničke principe sustava kojim se upravlja, dok je brzina posljedica činjenice da DMOC radi samo s konfiguracijama a ne s konfiguracijama i brzinama ili konfiguracijama i količinama gibanja [5]. Primjena DMOC-a nije ograničena samo na mehaničke sustave, svaki prikladno oblikovan optimizacijski problem može se riješiti korištenjem DMOC metode [12].

Gore iznesene metode, dijagramom su prikazane na slici 4. Izvorna slika je iz [5] i [6], no za potrebe ovog rada je prevedena, prilagođena i iznova nacrtana.



**Slika 8.** Metode za rješavanje problema optimalnog upravljanja.

Velikim dijelom poznati nedostaci su posljedica toga što je DMOC relativno nova teorija, prema Marsdenu [3] koncept je osmišljen 2004. godine, pa je još puno stvari ostalo za istražiti i dokazati. Teško je ozbiljnije govoriti o nedostacima DMOC algoritma zbog manjka literature koja tu temu obrađuje.

## 6. ZAKLJUČAK

Osnovna ideja varijacijskih integratora i na njima utemeljenog DMOC algoritma je analiza mehaničkog sustava matematičkom metodom u koju su ugrađeni principi mehanike. Pretpostavka je da će analiza mehaničkog sustava takvom metodom biti kvalitetnija u odnosu na druge metode.

Kroz rad je prvo iznesena teorija koja iz te ideje proizlazi, potom je ta teorija organizirana u algoritam te je na kraju taj algoritam primijenjen na konkretan problem sa svrhom da se potvrde pretpostavke osnovne ideje.

U radu je predstavljen samo mali dio puno kompleksnijeg, većeg i još uvijek aktivnog područja. Potrebno je dobro poznavati diferencijalnu geometriju, dinamičke sustave, matematičku optimizaciju i teoriju upravljanja da bi se varijacijski integratori i DMOC algoritam mogli analizirati u njima prikladnom kontekstu. Koncept je nedavno osmišljen, no već sad postoje brojne primjene, prilagodbe i proširenja. Zbog velikog potencijala same teorije i puno otvorenih pitanja za pretpostaviti je da će oba algoritma i dalje ostati predmetom istraživanja.

## LITERATURA

- [1] Marsden, J. E.: Lectures on Mechanics, Cambridge University Press, 1992.
- [2] Lew, A., Marsden, J. E., Ortiz, M. i West, M.: An overview of variational integrators. U: Finite Element Methods: 1970's and Beyond, ur. Franca, L. P., Tezduyar, T. E. i Masud, A., 98-115, CIMNE, 2004.
- [3] CITRIS: Jerrold Marsden on Discrete Mechanics and Optimal Control, 4. prosinca 2008. <https://www.youtube.com/watch?v=RLEeS1R3anU&t=241s> (Pristupljeno 20. lipnja 2018.)
- [4] Kobilarov, M.: Discrete geometric motion control of autonomus vehicles, Ph.D. Thesis, University of Southern California, 2008.
- [5] Ober-Blöbaum, S.: Discrete mechanics and optimal control, Ph.D. Thesis, University of Paderborn, 2008.
- [6] Ober-Blöbaum, S., Junge, O. i Marsden, J. E.: Discrete mechanics and optimal control: An analysis, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 17(2), 322-352, 2011.
- [7] Marsden, J. E. i West, M.: Discrete mechanics and variational integrators, Acta Numerica 10, 357-514, 2001.
- [8] Holm, D. D., Schmach, T. i Stoica, C.: Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions, Oxford University Press, 2009.
- [9] Marsden, J. E. i Ratiu, T. S.: Introduction To Mechanics And Symmetry, 2. izd., Springer-Verlag, 1999.
- [10] Schultz, J., Johnson, E. i Murphey, T. D.: Trajectory optimization in discrete mechanics, 2014.
- [11] Xu, K., Timmermann, J. i Trächtler, A.: Nonlinear Model Predictive Control with Discrete Mechanics and Optimal Control, 2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 1755-1761, 2017.
- [12] Kobilarov, M., Desbrun, M., Marsden, J. E. i Sukhatme, G. S.: A Discrete Geometric Optimal Control Framework for Systems with Symmetries. U: Proceedings of Robotics: Science and Systems. MIT Press , Cambridge, 161-168, 2008.



- [13] Johnson, E.: *trep Documentation*, 2017. Preuzeto s <https://media.readthedocs.org/pdf/trep/v1.0.3/trep.pdf> (Pristupljeno 5. lipnja 2018.)
- [14] Johnson, E. R. i Murphey, T. D.: Scalable variational integrators for constrained mechanical systems in generalized coordinates, *IEEE Trans. Robotics* 25, 1249, 2009.
- [15] Zhang, J., Zhang, W. i Shan, J.: A new DMOC-based approach to solve Goddard rocket problem, 2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 2165-2169, 2012.

## **PRILOG**

### **I. CD-R disc**