Numerička analiza metalne konstrukcije ljuljačke

Varenina, Helena

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:591196

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Helena Varenina

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Helena Varenina

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Ivici Skozritu na pruženoj stručnoj pomoći i savjetima tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se svom ocu, braći i sestri na pruženoj podršci i razumijevanju tijekom mojeg obrazovanja.

Također, zahvaljujem se svom dečku i svim svojim prijateljima koji su me neumorno poticali u ustrajnosti i marljivosti.

I na kraju, posebno se zahvaljujem svojoj majci koja nažalost ovaj rad nije dočekala sa mnom, ali me uvijek poticala i ohrabrivala i ostala moja vječna motivacija.

Helena Varenina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Helena Varenina** Mat. br.: 0035199297

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza metalne konstrukcije ljuljačke**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of the Metal Structure of the Swing**

Opis zadatka:

Nosive konstrukcije, koje susrećemo svugdje oko nas, su najčešće izvedene kao rešetkaste konstrukcije. Proračun rešetkastih konstrukcija provodi se ovisno o načinu spajanja elemenata rešetke na različite načine te se na kraju ako je potrebno dodatno provodi upotrebom raznih standardnih procedura.

Za definirane podatke o konstrukciji, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima metalne konstrukcije ljuljačke potrebno je provjeriti da li konstrukcija zadovoljava uvjet čvrstoće tj. izvršiti kontrolni proračun metalne konstrukcije ljuljačke. Proračun provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
30. studenog 2017.

Rok predaje rada:
1. rok: 23. veljače 2018.
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2018.
3. rok: 21. rujna 2018.

Predviđeni datumi obran
1. rok: 26.2. - 2.3. 201
2. rok (izvanredni): 2.7. 201
3. rok: 24.9. - 28.9. 201

Zadatak zadao:
Skozrit Ivica
Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Predsjednik Povjerenstva:
Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

SADRŽAJ I
POPIS SLIKA III
POPIS TABLICA V
POPIS OZNAKA VI
SAŽETAK VIII
SUMMARY IX
1. UVOD 1
1.1. Povijesni razvoj 1
2. NOSIVE KONSTRUKCIJE 4
2.1. Materijal nosivih konstrukcija 4
2.2. Klasifikacija nosivih konstrukcija 4
2.3. Definicija statičke neodređenosti 7
2.3.1. Izvana statički neodređena konstrukcija 9
2.3.2. Iznutra statički neodređena konstrukcija 10
3. LJULJAČKA KAO NOSIVA KONSTRUKCIJA 12
3.1. Općenito o ljuljačkama 12
3.2. Specijalne izvedbe ljuljački 12
3.3. Rešetkasta konstrukcija ljuljačke 13
4. ANALITIČKA ANALIZA 16
4.1. Matrična metoda analize konstrukcija [7] 16
4.2. Metoda krutosti [14] 17
4.2.1. Formulacija matrice krutosti grednog elementa 17
4.2.2. Svojstva matrice krutosti 19
4.2.3. Rubni uvjeti [14] 19
5. METODA KONAČNIH ELEMENATA 21
5.1. Definicija poprečnog presjeka 21
5.2. Odabir grednog elementa 22
5.2.1. Euler-Bernoullijeve (tanke) grede 23
5.2.2. Timoshenkove (posmično fleksibilne) grede 23
5.2.3. Dogovor oko imenovanja 23
5.3. Orijentacija poprečnog presjeka grede 24
5.4. Verifikacija grednih elemenata 25
5.4.1. Rješenja dobivena programskim paketom Abaqus 27
5.4.1.1. Rješenja dobivena diskretizacijom s 3 gredna elementa B31 29
5.4.2. Gredni element B31 31

5.4.3. Gredni element B32 32
5.4.4. Gredni element B33 32
6. PRORAČUN METALNE KONSTRUKCIJE LJULJAČKE 34
6.1. Statičko opterećenje 34
6.1.1. Primjena metode krutosti za analizu konstrukcije ljuljačke 35
6.1.2. Analiza ljuljačke programskim paketom Abaqus 40
6.1.2.1. Raspodjela naprezanja 47
6.1.2.2. Raspodjela unutarnjih sila i momenata 49
6.2. Dinamičko opterećenje 53
6.2.1. Dinamičko opterećenje bez otklona 54
6.2.1.1. Raspodjela naprezanja 56
6.2.1.2. Raspodjela unutarnjih sila i momenata 57
6.2.2. Dinamičko opterećenje uz otklon od 45° 61
6.2.2.1. Raspodjela naprezanja 62
6.2.2.2. Raspodjela unutarnjih sila i momenata 64
7. ZAKLJUČAK 69
LITERATURA 71
PRILOZI 72

POPIS SLIKA

Slika 1. Coalbrookdale bridge [2] 2
Slika 2. Kristalna palača [3] 2
Slika 3. Eiffelov toranj [4] 3
Slika 4. Statički određeni okvirni nosač [7] 5
Slika 5. Statički neodređeni okvirni nosač [7] 5
Slika 6. Mehanizam [7] 6
Slika 7. Prostorna rešetkasta konstrukcija (montaža) [8] 7
Slika 8. Izvana statički neodređeni rešetkasti nosač [7] 9
Slika 9. Lokalni koordinatni sustavi na iznutra statički neodređenoj konstrukciji [7] 10
Slika 10. Presjek [7] 11
Slika 11. Ljuljačka od zakrivljenih nosača [9] 12
Slika 12. Model ljuljačke modeliran pomoću programskog paketa *SolidWorks* 13
Slika 13. Dimenzije ljuljačke u mm 14
Slika 14. Poprečni presjek cijevi [12] 14
Slika 15. Standardne dimenzije cijevi [11] 15
Slika 16. Prostorni gredni konačni element [14] 17
Slika 17. Imenovanje grednih elemenata u *Abaqusu* [16] 24
Slika 18. Interpolacija grednih konačnih elemenata [16] 24
Slika 19. Lokalni koordinatni sustav grednog elementa [16] 25
Slika 20. Prostorna gredna konstrukcija [7] 25
Slika 21. Reakcije veza [7] 26
Slika 22. Rubni uvjeti i zadano opterećenje 27
Slika 23. Diskretizacija s 3 (lijevo) i 6 (desno) konačna elementa 28
Slika 24. Diskretizacija s 9 (lijevo) i 12 (desno) konačnih elemenata 28
Slika 25. Prikaz deformiranog i nedeformiranog oblika konstrukcije 29
Slika 26. Prikaz reakcija veza, tj. sila u smjeru osi *Y* (*Abaqus*) u N 29
Slika 27. Prikaz reakcija veza, tj. momenata oko osi *X* u Nmm 30
Slika 28. Prikaz reakcija veza, tj. momenata oko osi *Z* (*Abaqus*) u Nmm 30
Slika 29. Raspodjela pomaka u smjeru osi *Y* (*Abaqus*) u mm 30
Slika 30. Konvergencija numeričkog rješenja 33
Slika 31. Statičko opterećenje konstrukcije 34
Slika 32. Opterećenje na horizontalnu gredu 35
Slika 33. Opterećenja na sjedištu 35
Slika 34. Prikaz elemenata, globalnih čvorova te globalnih i lokalnih koordinata 36
Slika 35. Lokalni koordinatni sustavi grednih elemenata 40
Slika 36. Položaj globalnog koordinatnog sustava i rubni uvjeti 41
Slika 37. Diskretizacija s 8 (lijevo) i 14 (desno) konačnih elemenata 41
Slika 38. Diskretizacija s 20 (lijevo) i 26 (desno) konačnih elemenata 42
Slika 39. Konvergencija pomaka čvora 3 u smjeru osi *X* u mm 44
Slika 40. Konvergencija pomaka čvora 3 u smjeru osi *Y* u mm 45
Slika 41. Konvergencija kuta zakreta čvora 3 oko osi *Z* u rad 45
Slika 42. Konvergencija pomaka čvora 4 u smjeru osi *X* u mm 45
Slika 43. Konvergencija pomaka čvora 4 u smjeru osi *Y* u mm 46
Slika 44. Konvergencija kuta zakreta čvora 4 oko osi *Z* u rad 46
Slika 45. Konvergencija pomaka čvora 5 u smjeru osi *Y* u mm 46

Slika 46. Prikaz deformiranog i nedeformiranog oblika 47
Slika 47. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu* u N/mm^2 47
Slika 48. Raspodjela normalnih naprezanja u N/mm^2 48
Slika 49. Raspodjela tangencijalnih naprezanja u N/mm^2 48
Slika 50. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N 49
Slika 51. Raspodjela unutarnjih normalnih sila za bočne grede u N 50
Slika 52. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 u N 50
Slika 53. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 za horizontalnu gredu u N 50
Slika 54. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 u N 51
Slika 55. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1 u Nmm 51
Slika 56. Raspodjela momenta savijanja oko lokalne osi 2 u Nmm 52
Slika 57. Raspodjela momenata uvijanja u Nmm 52
Slika 58. Dinamičko opterećenje bez otklona 53
Slika 59. Dinamičko opterećenje uz otklon od 45° 53
Slika 60. Opterećenje na horizontalnu gredu 54
Slika 61. Usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika konstrukcije 55
Slika 62. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu* u N/mm^2 56
Slika 63. Raspodjela normalnih naprezanja u N/mm^2 56
Slika 64. Raspodjela tangencijalnih naprezanja u N/mm^2 57
Slika 65. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N 57
Slika 66. Raspodjela uzdužnih sila za bočne grede u N 58
Slika 67. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 u N 58
Slika 68. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 za horizontalnu gredu u N 59
Slika 69. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 u N 59
Slika 70. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1 u Nmm 60
Slika 71. Raspodjela momenta savijanja oko lokalne osi 2 u Nmm 60
Slika 72. Raspodjela momenata uvijanja u Nmm 61
Slika 73. Opterećenje na horizontalnu gredu 61
Slika 74. Usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika 62
Slika 75. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu* u N/mm^2 62
Slika 76. Raspodjela normalnih naprezanja u N/mm^2 63
Slika 77. Raspodjela tangencijalnih naprezanja u N/mm^2 63
Slika 78. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N 64
Slika 79. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N 64
Slika 80. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 u N 65
Slika 81. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 za horizontalnu gredu u N 65
Slika 82. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 u N 66
Slika 83. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1 u Nmm 66
Slika 84. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 2 u Nmm 67
Slika 85. Raspodjela momenata uvijanja u Nmm 67

POPIS TABLICA

Tablica 1. Usporedba vertikalnog pomaka točke *C* za gredni element B31 31
Tablica 2. Usporedba vertikalnog pomaka točke *C* za gredni element B32 32
Tablica 3. Usporedba vertikalnog pomaka točke *C* za gredni element B33 32
Tablica 4. Kosinusi smjerova lokalnih koordinatnih osi s obzirom na globalne koordinate ... 37
Tablica 5. Izjednačavanje lokalnih i globalnih čvornih stupnjeva slobode..... 38
Tablica 6. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B31..... 42
Tablica 7. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B31..... 43
Tablica 8. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B32..... 43
Tablica 9. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B32..... 44

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
a	mm	duljina
C_E		ekvivalent ugljika
d		stupanj statičke neodređenosti
d_{izn}		stupanj statičke neodređenosti iznutra
d_{izv}		stupanj statičke neodređenosti izvana
DN	mm	nominalni promjer
Du	mm	unutarnji promjer
Dv	mm	vanjski promjer
e		broj nezavisnih jednadžbi ravnoteže
E	N/mm^2	Youngov modul elastičnosti
E_{gp}	J	gravitacijsko potencijalna energija
E_{kin}	J	kinetička energija
F	N	koncentrirana sila
F_{cf}	N	centrifugalna sila
F_{dop}	N	dopušteno opterećenje za odabrani lanac
F_N	N	ukupna napetost lanca
F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}	N	komponente sila u smjeru x, y i z koordinatnih osi
g	m/s^2	akceleracija slobodnog pada
K, **K**^{i}		globalna matrica krutosti i-tog elementa
k, **k**^{i}		lokalna matrica krutosti i-tog elementa
k$_g$		lokalna matrica krutosti elementa izražena u globalnom koordinatnom sustavu
I	mm^4	moment tromosti
m	kg	masa
r		broj nepoznatih sila
r_{izn}		broj nepoznatih komponenti unutarnjih sila
r_{izv}		broj nepoznatih reakcija veza
R		globalni vektor ukupnih čvornih sila
s	mm	debljina stijenke cijevi
S		faktor sigurnosti
SF	N	„Section forces“ – Abaqus; raspodjela sila u elementu
SM	Nmm	„Section moments“ – Abaqus; raspodjela momenata u elementu
T		matrica transformacije
U	mm	pomak u smjeru osi X
v	m/s	obodna brzina

V	mm	pomak u smjeru osi Y
$\mathbf{V}$		matrica globalnih stupnjeva slobode
w	mm	pomak u smjeru osi z, progib
W	mm	pomak u smjeru osi Z
x, y, z		lokalne koordinatne osi
X, Y, Z		globalne koordinatne osi
α	rad,°	kut
ν		Poissonov koeficijent
σ_{dop}	N/mm^2	dopušteno naprezanje
σ_{ekv}	N/mm^2	ekvivalentno naprezanje
Φ_X	rad	zakret oko osi X
Φ_Y	rad	zakret oko osi Y
Φ_Z	rad	zakret oko osi Z

SAŽETAK

U radu je izvršena numerička analiza metalne konstrukcije ljuljačke sastavljene od više kruto vezanih metalnih profila koji imaju poprečni presjek kružnog vijenca.

U uvodu se nalazi opis rešetkastih konstrukcija kao nosivih konstrukcija, dok je u drugom poglavlju provedena klasifikacija konstrukcija i objašnjen pojam stupnja statičke neodređenosti.

U trećem je poglavlju opisana ljuljačka kao nosiva konstrukcija, definirane se dimenzije i odabran profil cijevnog elemenata s kojim se nastavio numerički proračun.

U četvrtom je poglavlju opisana matrična metoda pomaka koja je poslužila za analitičku analizu ovog zadatka, dok je u petom poglavlju detaljno opisana metoda konačnih elemenata i izvršena verifikacija odabranih konačnih elemenata na jednostavnom primjeru.

Šesto poglavlje je posvećeno proračunu metalne konstrukcije ljuljačke u kojem je prvotno analiziran slučaj statičkog opterećenja koji je proveden analitički primjenom matrične metode pomaka i numerički primjenom metode konačnih elemenata. Nakon toga je izvršena usporedba rezultata i odabran gredni konačni element s kojim je analiziran ostatak zadatka. Također, analiza je provedena i za slučaj dinamičkog opterećenja uz primjenu kvazistatičkog principa prilikom čega su u obzir uzeta dva položaja ljuljačke, tj. položaj bez otklona i položaj s otklonom od 45°. Izvršena je kontrola uvjeta čvrstoće i napravljena grafička usporedba za sva tri slučaja opterećenja.

U završnom poglavlju iznesen je zaključak na temelju provedenih analiza i navedena ideja za eventualnu rekonstrukciju.

Ključne riječi: ljuljačka, greda, rešetkasta konstrukcija, matrična metoda pomaka, numerička metoda, uvjet čvrstoće, metoda konačnih elemenata

SUMMARY

In this paper a numerical analysis of metal swing structure, composed of rigidly bonded metal elements having an annulus cross section, has been carried out.

The introduction consists of an explanation of lattice constructions as bearing structures, while the second chapter consists of the classification and explanation of the concept of static degree of uncertainty.

In the third chapter, a swing is described as a load-bearing structure, the dimensions are defined and the profile of the tubular element is being chosen, with which the calculation continues.

The fourth chapter consists of the description of the matrix displacement method used for analytical analysis of this task, while in the fifth chapter the finite element method is described and the verification of selected finite elements in a simple example is being performed.

Chapter Six is devoted to the calculation of the metal structure of the swing in which the case of static load is being performed initially using the matrix displacement method and the numerical method of finite elements, followed by a comparison of the results and by the selection of finite element with which the rest of the task was analysed. Also, the analysis was carried out in the case of a dynamic load using quasistatic principle, considering the two swing positions, i.e. the unmounted position and the 45 degree displacement position. Strength test was performed and a graphical comparison was made for all three load cases.

In the final part, a conclusion was made based on the conducted analysis and the idea for possible reconstruction was mentioned.

Key words: swing, beam, lattice construction, matrix displacement method, numerical method, strength condition, finite element method

1. UVOD

Nosive konstrukcije, kao neizbježni sustavi u svakodnevnom životu, najčešće su izvedene u obliku rešetkastih konstrukcija. Takve konstrukcije svoju primjenu imaju u gotovo svim područjima visokogradnje (hangari, neboderi, tornjevi, krovišta, nadstrešnice, skele itd.), mostogradnje (željeznički, cestovni, pješački mostovi itd.), transportnim postrojenjima (dizalice i sl.), rudarskim i metalurškim postrojenjima (tornjevi za bušenje i sl.), a primjenjuju se i kod izvedbi stupova različitih namjena (rasvjetni, dalekovodni, antenski, radarski, radijski, televizijski itd.) kao i u mnogim drugim područjima.

Kao i za sve nosive konstrukcije, osnovni zahtjev za metalne konstrukcije njihova je nosivost koja se određuje na temelju tehničkih propisa o projektiranju i izvedbi konstrukcija, te o uvjetima održavanja i korištenja. Za metalne nosive konstrukcije primjenjuju se međunarodni propisi *Eurocodes* (posebno HRN EN 1090) [1].

Materijal od kojeg se izrađuju nosive konstrukcije najčešće je metal. Pogodnost primjene metala za izradu nosivih konstrukcija zasniva se na njihovoj visokoj čvrstoći. Takve se konstrukcije izrađuju od osnovnih elemenata, tj. od gotovih profila koji se spajaju u radionicama i tvornicama u takozvane montažne elemente, što se najčešće provodi zavarivanjem, vijčanim spojevima ili zakovicama. Profilirani nosači, štapovi i ostali valjani proizvodi, dobivaju se obradom čelika različitog udjela ugljika.

Nadalje, rešetkaste konstrukcije mogu se javiti u ravninskoj ili prostornoj izvedbi, pri čemu je okvir ili rešetka sastavljena od jednog ili više štapova/greda (ovisno o opterećenju kojem su elementi izloženi) te dvaju ili više stupova koji predstavljaju potpornje. Elementi takvih konstrukcija najčešće su kruto spojeni, odnosno spriječen im je svaki međusobni pomak.

Ovisno o načinu spajanja elemenata rešetkastih konstrukcija, proračun se može provesti na više načina koristeći razne analitičke i/ili numeričke metode od kojih će se dvije, tj. analitička matrična metoda pomaka i numerička metoda konačnih elemenata, detaljno opisati u ovom radu.

1.1. Povijesni razvoj

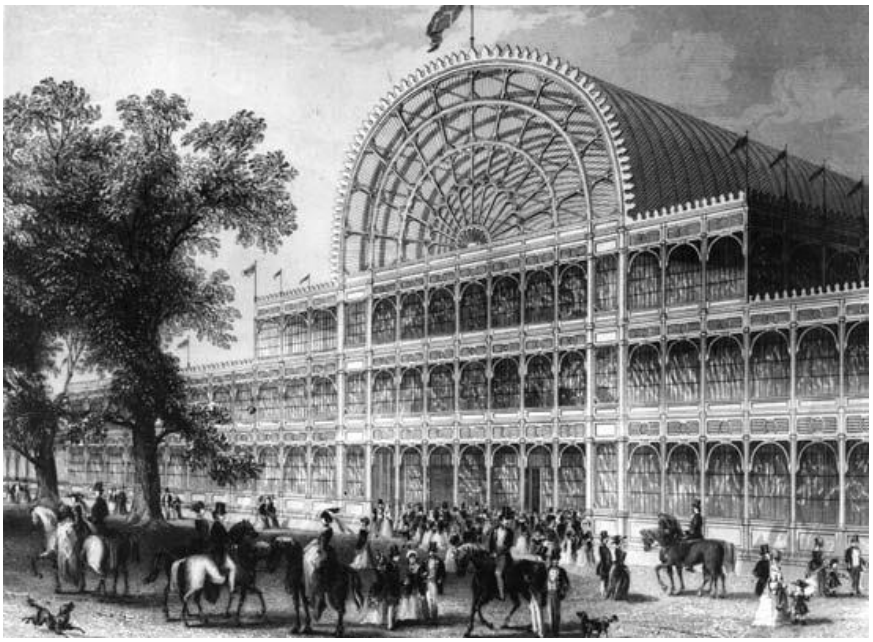
Povijesno gledajući, rešetkaste metalne konstrukcije počele su dobivati značajnu ulogu tek nakon industrijske revolucije. Prvotne primjene bile su u izgradnji mostova, a primjer takve

konstrukcije predstavlja prvi most od lijevanog željeza [Slika 1], *Coalbrookdale bridge*, koji je izgrađen 1779. u Engleskoj.



Slika 1. Coalbrookdale bridge [2]

Nezaobilazna povijesna građevina metalne okvirne izvedbe, izgrađena u Londonu 1851. bila je Kristalna palača arhitekta J. Paxtona [Slika 2], a uništena je u požaru 1936.



Slika 2. Kristalna palača [3]

Također, kao primjer metalne rešetkaste konstrukcije može poslužiti i jedan od najprepoznatljivijih svjetskih simbola, Eiffelov toranj, sagrađen u Parizu između 1887. i 1889. [Slika 3].



Slika 3. Eiffelov toranj [4]

2. NOSIVE KONSTRUKCIJE

2.1. Materijal nosivih konstrukcija

Daleko najprikladniji za izradu metalnih konstrukcija je konstrukcijski čelik, tj. ugljični čelik s udjelom ugljika manjim od 0,6% ili legirani čelik (najčešće s manganom, silicijem, kromom, niklom i/ili volframom). Konstrukcijski čelici koji se primjenjuju za izradu nosivih konstrukcija su opći konstrukcijski čelici, tj. njihova podskupina, ugljični čelici za nosive konstrukcije. Čelici za nosive konstrukcije trebaju ispuniti određene zahtjeve u pogledu nosivosti i sigurnosti. Navedeni zahtjevi mogu se ostvariti ako čelik ima dovoljno visoku granicu razvlačenja, vlačnu, tlačnu, savojnu i smičnu čvrstoću, žilavost te dinamičku izdržljivost. Glavno tehnološko svojstvo koje trebaju posjedovati navedeni čelici je zavarljivost. Preduvjet za dobru zavarljivost je što niža vrijednost ekvivalenta ugljika C_E [5]:

$$C_E = \%C + \%\frac{Mn}{4} + \frac{\%Cr + \%Mo + \%V}{5} + \frac{\%Ni + \%Cu}{10}, \quad \textbf{(2.1)}$$

gdje je $\%C$ postotak ugljika, $\%Mn$ postotak mangana, $\%Cr$ postotak kroma, $\%Mo$ postotak molibdena, $\%V$ postotak vanadija, $\%Ni$ postotak nikla, a $\%Cu$ je postotak bakra. Vrijednost ekvivalenta ugljika koja je prihvatljiva za nosive konstrukcije iznosi $C_E < 0{,}4$ [5]. Također, važno je da konstrukcijski čelici imaju dovoljnu plastičnu deformabilnost kako bi se izbjegla pojava krhkog loma. Uz sve navedeno, konstrukcijski čelici moraju biti otporni na trošenje i koroziju, skloni hladnom oblikovanju i obradivi odvajanjem čestica.

2.2. Klasifikacija nosivih konstrukcija

Nosive konstrukcije prema [6] klasificiraju se na više načina, a neke od najbitnijih podjela vezanih za opterećenje, geometriju te elemente od kojih su sastavljene nosive konstrukcije, istaknut će se u ovom radu.

Opterećenja na konstrukcijama razlikujemo prema:

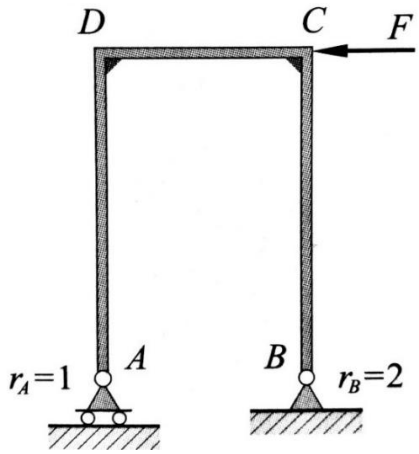
- načinu djelovanja,
- duljini trajanja,
- načinu prijenosa.

Prema načinu djelovanja opterećenja, konstrukcije mogu biti statički ili dinamički opterećene, prema duljini trajanja takva opterećenja mogu biti stalna ili povremena dok prema načinu prijenosa, opterećenja mogu biti koncentrirana ili kontinuirana.

Također, konstrukcije mogu biti izložene i drugim djelovanjima koja uzrokuju pojavu unutarnjih sila (npr. temperaturno djelovanje, skupljanje ili puzanje materijala).

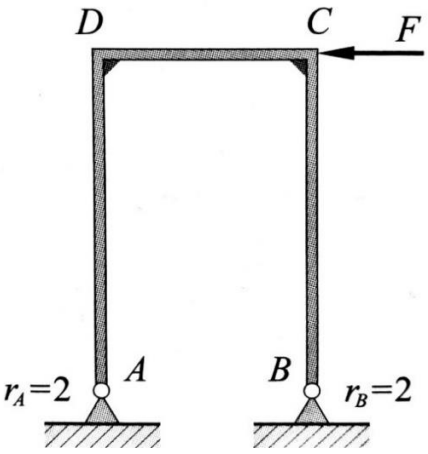
Ako se u obzir uzima kinematički smisao, konstrukcije se općenito dijele na:

- geometrijski nepromjenjive i statički stabilne konstrukcije s minimalnim brojem pravilno raspoređenih veza [Slika 4],



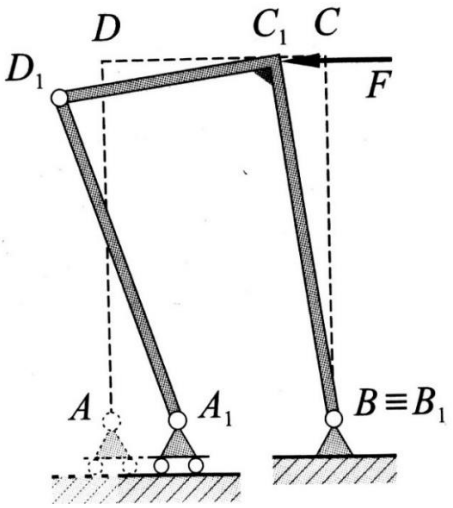
Slika 4. Statički određeni okvirni nosač [7]

- geometrijski nepromjenjive i statički stabilne konstrukcije s pravilno raspoređenim većim brojem veza od minimalno potrebnih [Slika 5],



Slika 5. Statički neodređeni okvirni nosač [7]

- geometrijski promjenjivi sustavi konstrukcija, tj. mehanizmi [Slika 6].



Slika 6. Mehanizam [7]

Geometrijski nepromjenjive i statički stabilne konstrukcije s minimalnim brojem pravilno raspoređenih veza nazivaju se statički određenim konstrukcijama, a reakcije veza takvih konstrukcija mogu se dobiti iz osnovnih uvjeta ravnoteže.

Geometrijski nepromjenjive i statički stabilne konstrukcije s pravilno raspoređenim većim brojem veza od minimalno potrebnih predstavljaju statički neodređene sustave i prilikom analize takvih konstrukcija osnovni uvjeti ravnoteže nisu dostatni pa je potrebno koristiti i dodatne uvjete deformacija.

Geometrijski promjenjivi sustavi konstrukcija, tj. mehanizmi su sustavi kod kojih geometrijska promjenjivost može biti uzrokovana malim brojem potrebnih veza, ali može biti i rezultat lošeg rasporeda veza kod statički određenih ili neodređenih sustava.

S obzirom na osnovne elemente od kojih su izgrađene, nosive konstrukcije mogu biti:

- štapne,
- gredne.

Štapovi su elementi konstrukcija za koje je karakteristično to što prenose sile samo uzduž svojih osi. Nosiva konstrukcija može biti sastavljena samo od štapova ili štapova u kombinaciji s gredama. Veza među elementima takvih konstrukcija je zglobna.

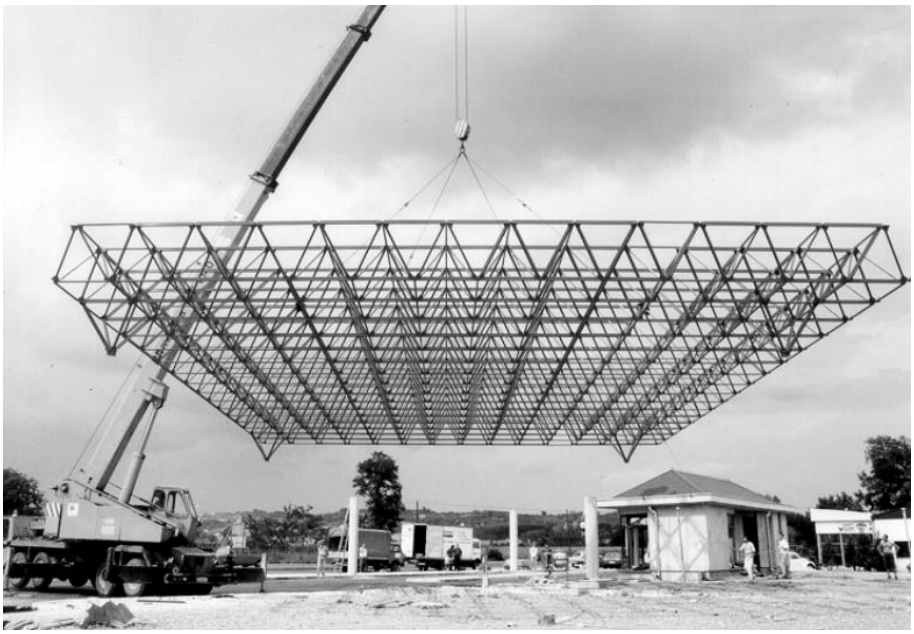
Grede su konstrukcijski elementi koji preuzimaju sva opterećenja koja na njih djeluju i prenose ih na oslonce. Greda je dominantno opterećena na savijanje pri čemu se deformira uzdužna os grede koja se tako deformirana naziva elastična linija. Razlikuje se čisto i poprečno savijanje grede. Prilikom čistog savijanja sve komponente unutarnjih sila, osim momenta savijanja,

jednake su nuli, dok se prilikom poprečnog savijanja, osim momenta savijanja, pojavljuje još i poprečna sila koja uzrokuje smicanje.

S obzirom na prostorni oblik, nosive konstrukcije dijele se na:

- kontinuirane,
- lučne,
- okvirne,
- rešetkaste,
- složene.

U svakodnevnoj se primjeni najčešće susreću rešetkaste konstrukcije, a primjer jedne takve prikazan je na [Slika 7].



Slika 7. Prostorna rešetkasta konstrukcija (montaža) [8]

2.3. Definicija statičke neodređenosti

Kao što je i prethodno spomenuto, osim statički određenih sustava kod kojih se sve reakcije i unutarnje sile u konstrukciji mogu odrediti iz jednadžbi statičke ravnoteže, u inženjerskoj primjeni često se javljaju i statički neodređene konstrukcije.

Statički neodređene konstrukcije su konstrukcije kod kojih je broj nepoznatih reakcija veza i komponenata unutarnjih sila veći od broja nezavisnih jednadžbi ravnoteže.

Naime, prilikom analize statički neodređenih konstrukcija potrebno je koristiti i dopunske jednadžbe koje čine uvjete deformiranja takvih konstrukcija. Za takvu je analizu nužno poznavati geometrijske karakteristike poprečnih presjeka kao i sam materijal konstrukcije. Također, statički neodređene konstrukcije vrlo su osjetljive na način izvedbe veza, variranje temperature, greške u montaži i slično.

Prije same analize statički neodređenih konstrukcija, nužno je definirati stupanj statičke neodređenosti. Stupanj statičke neodređenosti jednak je broju prekobrojnih veza nametnutih konstrukciji. Ukoliko se uklone sve prekobrojne veze, konstrukcija postaje statički određena uz uvjet da se pri tome ne naruši njezina kinematička stabilnost, tj. ako je njezin oblik moguće promijeniti jedino deformiranjem elemenata konstrukcije. U suprotnom, ako se statički neodređenoj konstrukciji ukloni više veza od broja prekobrojnih veza, ona postaje mehanizam, tj. postaje kinematički nestabilna.

Stupanj statičke neodređenosti prema [7] definiran je izrazom:

$$d = r - e. \tag{2.2}$$

Pri čemu r predstavlja broj nepoznatih sila (reakcije veza i unutarnje sile), a e predstavlja broj nezavisnih jednadžbi ravnoteže.

U općem slučaju, broj nezavisnih jednadžbi ravnoteže za prostorne sustave je šest, tj. izrazi (2.3) - (2.8), a za ravninske tri, tj. izrazi (2.3), (2.4) i (2.8):

$$\sum F_x = 0, \tag{2.3}$$

$$\sum F_y = 0, \tag{2.4}$$

$$\sum F_z = 0, \tag{2.5}$$

$$\sum M_x = 0, \tag{2.6}$$

$$\sum M_y = 0, \tag{2.7}$$

$$\sum M_z = 0. \tag{2.8}$$

Ravninski nosači najčešće se vežu s tri vrste oslonaca, odnosno s pomičnim zglobnim osloncem ($r = 1$), nepomičnim zglobnim osloncem ($r = 2$) i uklještenjem ($r = 3$). Analogno vrijedi i za

prostorne nosače kod kojih u pomičnom zglobnom osloncu postoji jedna nepoznata reakcija ($r = 1$), u nepomičnom tri ($r = 3$), a u uklještenju šest komponenata reakcija veza ($r = 6$).

Statički neodređeni ravni puni nosač, osim uklanjanjem nekog od oslonaca, može se pretvoriti u statički određeni na način da se rastavi na više dijelova i međusobno poveže rotacijskim zglobovima, odnosno formira se Gerberov nosač. Pritom rotacijski zglob prenosi poprečnu i uzdužnu silu, ali ne prenosi moment savijanja, odnosno smanjen je stupanj statičke neodređenosti uklanjanjem jedne nepoznate sile, tj. momenta.

Prilikom analize konstrukcija važno je razlikovati vanjsku i unutarnju statičku neodređenost.

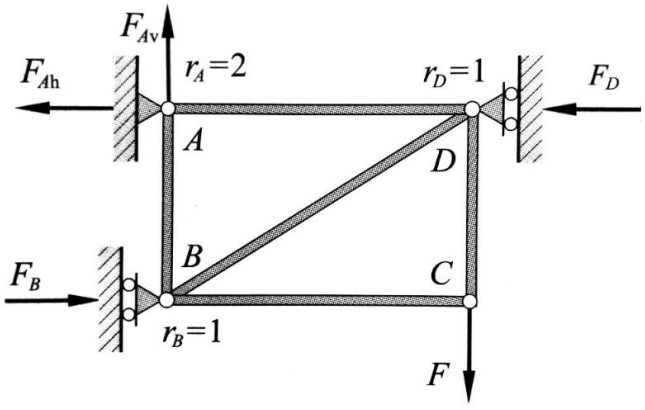
Vanjska statička neodređenost ovisi o broju reakcija u osloncima, odnosno o broju nepoznatih komponenata reaktivnih sila u osloncima. Ako se reakcije veza mogu odrediti pomoću uvjeta ravnoteže, konstrukcija je izvana statički određena. Ukoliko to nije moguće, konstrukcija je izvana statički neodređena.

Unutarnja statička neodređenost ovisi o broju nepoznatih komponenata unutarnjih sila u presjecima rešetkaste konstrukcije, odnosno ako se uz poznate reakcije veza mogu odrediti unutarnje sile u svim elementima, konstrukcija je iznutra statički određena. Ukoliko to nije izvedivo, konstrukcija je iznutra statički neodređena.

Zbog lakšeg predočavanja iznesenih činjenica u nastavku će se prikazati primjeri određivanja statičke neodređenosti.

2.3.1. Izvana statički neodređena konstrukcija

Rešetkasta konstrukcija [Slika 8] sastoji se od 5 štapova koji su svojim krajevima spojeni pomoću zglobova.



Slika 8. Izvana statički neodređeni rešetkasti nosač [7]

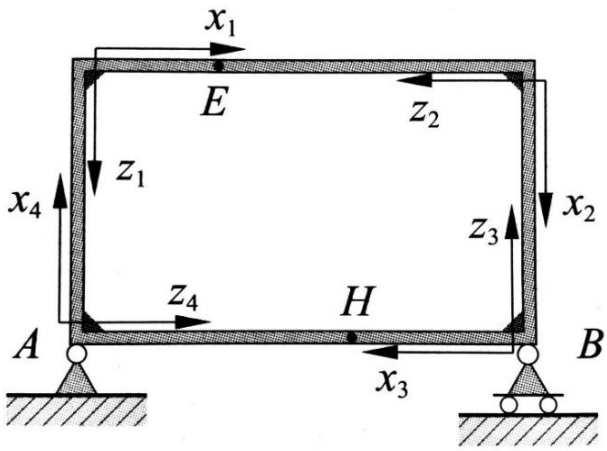
Konstrukcija je za podlogu vezana nepomičnim zglobnim osloncem u *A* te pomičnim zglobnim osloncima u *B* i *D*. Broj nepoznatih reakcija veza u osloncima jednak je 4 (F_{Ah}, F_{Av}, F_B, F_D), tj. $r_{izv} = 4$. Broj nezavisnih jednadžbi ravnoteže za razmatrani ravninski sustav je 3 ($e = 3$). Prema izrazu (2.2) dobije se stupanj statičke neodređenosti:

$$d_{izv} = r_{izv} - e = 4 - 3 = 1. \quad \textbf{(2.9)}$$

Pri čemu je d_{izv} stupanj statičke neodređenosti izvana, a r_{izv} je broj nepoznatih reakcija veza. Zaključuje se da je razmatrani slučaj jednom statički neodređen izvana.

2.3.2. Iznutra statički neodređena konstrukcija

Uz pretpostavku da su sve vanjske sile, tj. opterećenja i reakcije veza, poznate i da leže u ravnini okvira, zadatak je odrediti unutarnje sile u proizvoljnom presjeku nosača prikazanom na [Slika 9] koristeći principe statike krutih tijela.

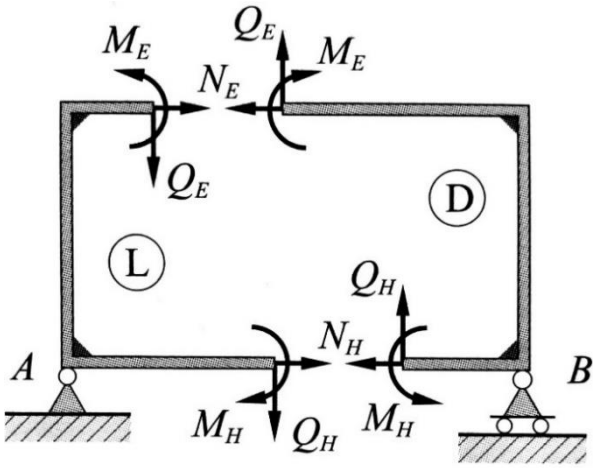


Slika 9. Lokalni koordinatni sustavi na iznutra statički neodređenoj konstrukciji [7]

Da bi se odredile komponente unutarnjih sila kod nosača u obliku zatvorene petlje prikazanog na [Slika 9], nije dovoljno napraviti samo jedan presjek na konturi kao što se to radi kod ravnih punih nosača. Naime, potrebno je tako zatvorenu konturu podijeliti na otvorene konture, tj. u ovom slučaju na lijevi (L) i desni dio (D), odnosno na dvije otvorene konture kao što je prikazano na [Slika 10].

Na svaki od presjeka dodane su tri komponente unutarnjih sila, tj. na presjeku *E* uzdužna sila N_E, poprečna sila Q_E i moment savijanja M_E. Analogno su unutarnje sile dodane i na presjek *H*

(N_H, Q_H, M_H) pa je prema tome broj nepoznatih komponenti unutarnjih sila jednak šest, tj. $r_{\text{izn}} = 6$.



Slika 10. Presjek [7]

Obzirom da se po 3 jednadžbe ravnoteže mogu postaviti za lijevi i desni dio, na raspolaganju stoji 6 jednadžbi ravnoteže. Kako ravnoteža lijevog dijela okvira proizlazi iz ravnoteže desnog dijela, jednadžbe ravnoteže lijevog dijela su linearno zavisne s jednadžbama ravnoteže desnog dijela okvira pa se prema tome mogu iskoristiti samo 3 jednadžbe ravnoteže ($e = 3$).

Prema izrazu (2.2) dobije se stupanj statičke neodređenosti iznutra

$$d_{\text{izn}} = r_{\text{izn}} - e = 6 - 3 = 3. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Pri čemu je d_{izn} stupanj statičke neodređenosti iznutra, a r_{izn} je broj nepoznatih komponenti unutarnjih sila.

Zaključuje se da je razmatrani slučaj tri puta statički neodređen iznutra.

3. LJULJAČKA KAO NOSIVA KONSTRUKCIJA

3.1. Općenito o ljuljačkama

Ljuljačka, kao konstrukcija koja je stvorena za zabavu, najčešće se može vidjeti na igralištima za djecu i u cirkusima za akrobate, pri čemu se često montiraju u setove koji omogućavaju da ih više od jedne osobe koristi istovremeno. Takve ljuljačke dolaze u različitim veličinama i oblicima. Obzirom na materijal, uglavnom se izrađuju u metalnoj ili drvenoj izvedbi. Također, mogu se znatno razlikovati i po obliku izvedbe pri čemu je najčešća izvedba u obliku rešetkaste konstrukcije, ali nerijetko se mogu primijetiti i ljuljačke izrađene od zakrivljenih nosača [Slika 11]. Obzirom na profil elemenata koji sačinjavaju ljuljačku, najzastupljenije su ljuljačke sastavljene od određenog broja cijevnih elemenata.

Sjedište ljuljačke obješeno je na lance, užadi ili štapove. Jednom kada se ostvari gibanje ljuljačke, ona nastavlja oscilirati poput njihala uz neznatno usporavanje zbog trenja i otpora zraka sve dok ih nekakav vanjski utjecaj ne spriječi u tom gibanju.



Slika 11. Ljuljačka od zakrivljenih nosača [9]

3.2. Specijalne izvedbe ljuljački

Osim prethodno navedenih izvedbi ljuljački, prema [10] ljuljačke se mogu pojaviti i u sljedećim oblicima.

Guma ljuljačke su u potpunosti izrađene od gume koja najčešće visi na užetu pričvršćenom na stablo. Prevelike gume se često ojačavaju kružnom metalnom trakom i obješene su na metalne lance kako bi se poboljšala sigurnost same ljuljačke.

Uže ljuljačke su ljuljačke kod kojih se jedan kraj užeta veže na granu stabla, mosta ili druge povišene strukture dok se na drugom kraju formira čvor koji služi za prihvat osobe koja se ljulja, a postavljaju se uglavnom iznad vode.

Ljuljačke za bebe u obliku su košarice koja ima rupe za dječje noge ili u obliku polukošarice koja ima sigurnosni pojas kako bi se smanjila vjerojatnost da dijete ispadne iz takve ljuljačke.

Viseće ležaljke su prenosive ljuljačke od laganog materijala kao što je platno ili mreža. Uglavnom su obješene između dva stabla ili pričvršćene na nosač.

Tandem ljuljačke su ljuljačke dizajnirane za uporabu dvjema osobama u isto vrijeme koje su okrenute ili jedna prema drugoj ili leđa na leđa. Takve su ljuljačke gotovo uvijek dio seta ljuljački zbog okvira potrebnih za podnošenje većih opterećenja.

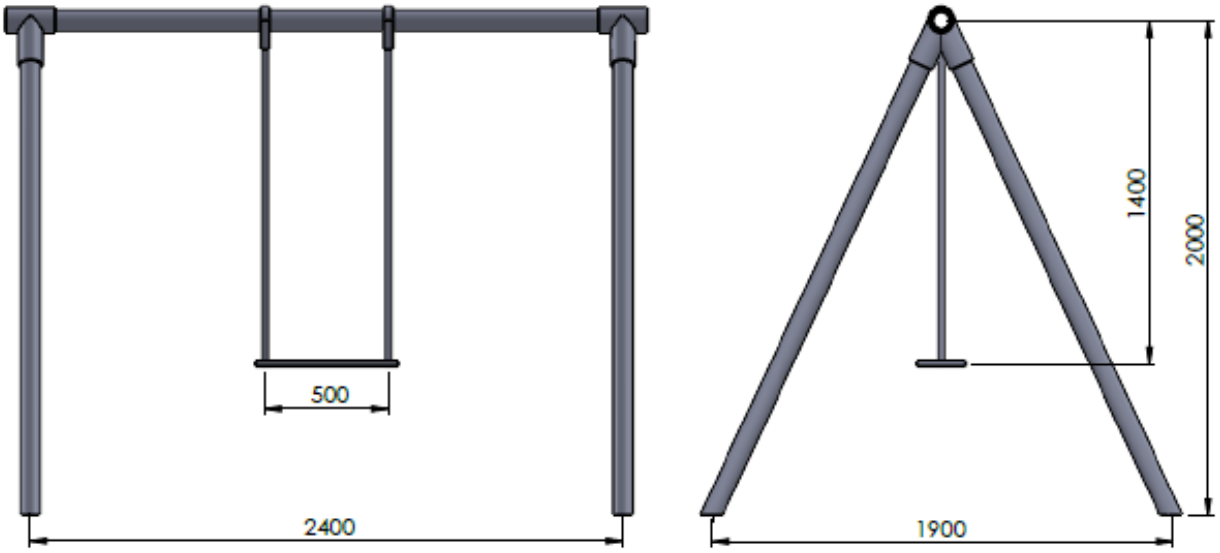
3.3. Rešetkasta konstrukcija ljuljačke

Za lakšu provedbu analize, u ovom će se radu prikazati i kasnije analizirati pojednostavljeni oblik metalne rešetkaste konstrukcije ljuljačke kao što je prikazana na [Slika 12].



Slika 12. Model ljuljačke modeliran pomoću programskog paketa *SolidWorks*

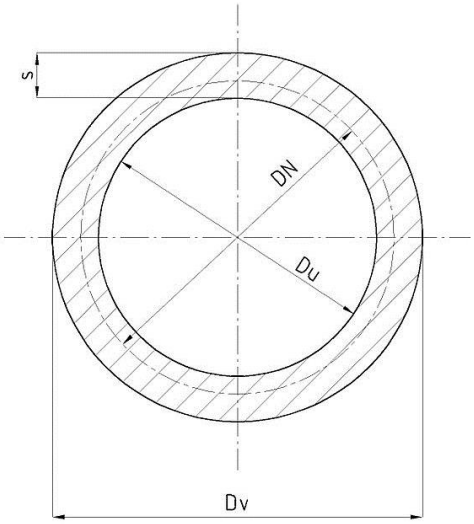
Geometrija konstrukcije i glavne dimenzije koje su potrebne za daljnju analizu prikazane su na Slika 13.



Slika 13. Dimenzije ljuljačke u mm

S prethodne dvije slike može se vidjeti da je ljuljačka sastavljena od greda cijevnih profila, tj. greda koje imaju poprečni presjek kružnog vijenca [Slika 14]. Za potrebe ovog zadatka prema DIN 2440 [11] odabran je jedan takav profil, tj. bešavna cijev Ø60,3x3,65 obzirom da se upravo taj profil često koristi pri izradi rešetkastih ljuljački.

Dimenzije profila istaknute su na [Slika 14], a odabrane dimenzije cijevi uokvirene su na [Slika 15].



Slika 14. Poprečni presjek cijevi [12]

Veličine označene na [Slika 14] su:

DN – nominalni promjer cijevi,

*D*v – vanjski promjer cijevi,

*D*u – unutarnji promjer cijevi,

s – debljina stijenke cijevi.

Nominalni promjer cijevi prema DIN 2440 [Inch]	[DN]	Vanjski promjer Dv [mm]	Unutarnji promjer Du [mm]	Debljina stijenke [mm]
1/8"	6	10.2	6.2	2.00
1/4"	8	13.5	8.8	2.35
3/8"	10	17.2	12.5	2.35
1/2"	15	21.3	16.0	2.65
3/4"	20	26.9	21.6	2.65
1"	25	33.7	27.2	3.25
1 1/4"	32	42.4	35.9	3.25
1 1/2"	40	48.3	41.8	3.25
2"	50	60.3	53.0	3.65
2 1/2"	65	76.1	68.8	3.65
3"	80	88.9	80.8	4.05
4"	100	114.3	105.3	4.50
5"	125	139.7	130.0	4.85
6"	150	165.1	155.4	4.85

Slika 15. Standardne dimenzije cijevi [11]

Materijal od kojeg su izrađene cijevi je opći konstrukcijski čelik, tj. čelik za nosive konstrukcije oznake 1.0037 (Č0370). Prema [13] modul elastičnosti čelika iznosi $E = 210\,000\ \mathrm{N/mm^2}$, a *Poissonov* faktor $\upsilon = 0{,}3$.

Analiza metalne konstrukcije ljuljačke provest će se za više slučaja opterećenja, tj. za statički i dinamički opterećenu ljuljačku u položajima bez otklona i s otklonom od 45°.

Prilikom analize koristit će se određena pojednostavljenja jer nemaju značajan utjecaj na rezultat, a znatno će olakšati provedbu same analize.

4. ANALITIČKA ANALIZA

4.1. Matrična metoda analize konstrukcija [7]

Kako bi se konstrukcija mogla analizirati pomoću matrične metode, nužno je da ta konstrukcija zadovoljava temeljnu pretpostavku te metode, odnosno konstrukcija mora biti izrađena od linearno-elastičnog materijala pri čemu naprezanja ne smiju prelaziti granicu proporcionalnosti.

Također, izuzetno je važno da su pomaci i deformacije male tako da se deformirani i nedeformirani oblik konstrukcije neznatno razlikuje. Uz navedena pravila, uvjeti ravnoteže mogu se postaviti na nedeformiranu geometriju konstrukcije.

U mehanici deformabilnih tijela za analizu konstrukcija koriste se tri skupine jednadžbi:

- statički uvjeti ravnoteže u kojima su nepoznanice sile,
- uvjeti deformiranja, tj. uvjeti kompatibilnosti u kojima su nepoznanice pomaci,
- konstitutivne jednadžbe (veza između naprezanja i deformacija) u kojima su nepoznanice i sile i pomaci.

Kao što je navedeno i u 2. poglavlju, kako bi se uopće moglo krenuti s analizom konstrukcije, nužno je definirati stupanj statičke neodređenosti.

Ukoliko je konstrukcija statički određena, reakcije i unutarnje sile konstrukcije moguće je odrediti samo primjenom uvjeta ravnoteže. Uvjeti kompatibilnosti i konstitutivne jednadžbe koriste se tek za određivanje pomaka statički određene konstrukcije. Međutim, ako je konstrukcija statički neodređena neophodno je primijeniti sve tri skupine prethodno navedenih jednadžbi kako bi se odredile unutarnje sile i pomaci konstrukcije.

Kako se matrična metoda temelji na podjeli konstrukcije na elemente koji se međusobno spajaju u čvorovima, broj stupnjeva slobode n jednak je broju nezavisnih pomaka čvorova.

Nadalje, kod analize konstrukcija matričnim metodama razlikuju se dvije metode:

- metoda krutosti ili metoda pomaka,
- metoda podatljivosti ili metoda sila.

Cilj metode krutosti je iz jednadžbi eliminirati sile tako da samo pomaci ostanu nepoznanice, dok je kod metode podatljivosti osnovna ideja eliminirati pomake kako bi sile ostale kao nepoznanice.

4.2. Metoda krutosti [14]

Jednadžbe ravnoteže ili jednadžbe krutosti konstrukcije simbolički se zapisuju u sljedećem obliku:

$$\mathbf{R} = \mathbf{KV}. \tag{4.1}$$

U jednadžbi (4.1) **R** predstavlja vektor vanjskih čvornih sila, **K** je matrica krutosti konstrukcije, a **V** je vektor čvornih pomaka.

Za poznati vektor čvornih sila **R** i matricu krutosti konstrukcije **K**, vektor nepoznatih čvornih pomaka **V** računa se pomoću izraza:

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}, \tag{4.2}$$

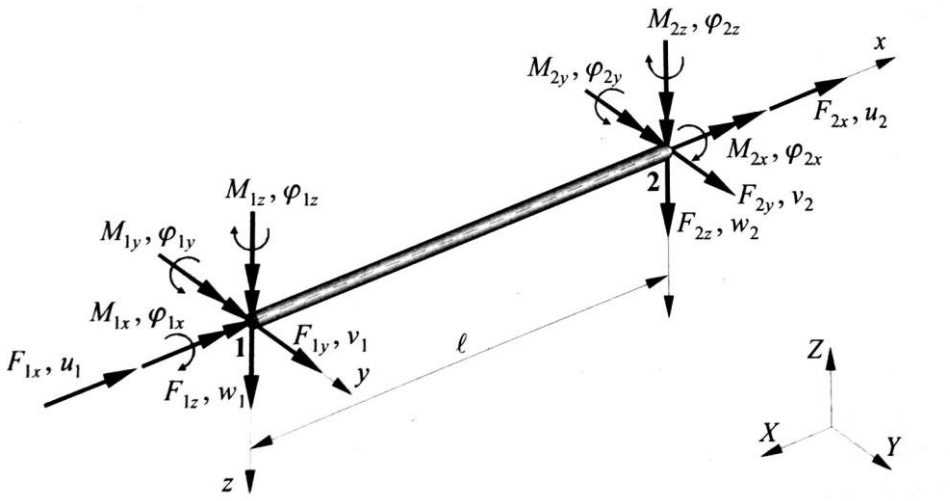
gdje je $\mathbf{K}^{-1}$ inverzna matrica matrice krutosti **K**.

Kako bi se odredila matrica krutosti konstrukcije, potrebno je poznavati matrice krutosti njenih elemenata.

Kako je za daljnju analizu ovog rada potrebno koristiti gredni element, u nastavku će se prikazati matrica krutosti tog elementa.

4.2.1. Formulacija matrice krutosti grednog elementa

Prostorni gredni element ima 6 stupnjeva slobode u svakom čvoru, tj. 3 komponente pomaka i 3 kuta zakreta. Tako zadan prostorni gredni element ima ukupno 12 stupnjeva slobode [Slika 16].



Slika 16. Prostorni gredni konačni element [14]

Prema knjizi [14], matrica krutosti prostornog grednog elementa dobiva se superpozicijom matrica krutosti štapnih i grednih elemenata. Pri tome je štapni element opterećen uzdužnom silom i momentom uvijanja, dok je gredni element opterećen poprečnim silama i momentima savijanja.

Na taj način matrica krutosti za prostorni gredni element prikazan na [Slika 16] ima oblik:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{-AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}. \quad \textbf{(4.3)}$$

Transformacija stupnjeva slobode iz lokalnog u globalni koordinatni sustav provodi se pomoću matrice transformacije:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(4.4)}$$

pri čemu su submatrice od $\mathbf{T}_1$ do $\mathbf{T}_4$ jednake i reda (3x3), a definirane su sljedećim izrazom:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}. \quad \textbf{(4.5)}$$

Submatrice $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$ odnose se na transformaciju pomaka (sila) i kutova zakreta (momenata) čvora 1, a submatrice $\mathbf{T}_3$ i $\mathbf{T}_4$ odnose se na stupnjeve slobode (sile i momente) čvora 2.

Izraz za transformaciju matrice krutosti elementa iz lokalnog u globalni koordinatni sustav:

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^T\mathbf{k}\mathbf{T}. \quad \textbf{(4.6)}$$

Potpuni izvod matrice krutosti može se pronaći unutar [7] ili [14].

4.2.2. Svojstva matrice krutosti

Svojstva matrice krutosti prema [7] glase:

- matrica krutosti je kvadratna matrica s tipičnim elementom k_{ij} koji se u matrici krutosti nalazi u retku i i stupcu j,
- element matrice krutosti k_{ij} odgovara poopćenoj sili Q_i koja je potrebna da izazove jedinični poopćeni pomak $q_j = 1$ uz uvjet da su svi ostali čvorni pomaci jednaki nuli,
- elementi matrice krutosti su simetrični, $k_{ij} = k_{ji}$, što slijedi iz *Maxwell*-ova teorema o uzajamnosti pomaka,
- koeficijenti krutosti u svakom stupcu zadovoljavaju uvjete ravnoteže elementa, odnosno konstrukcije,
- svi koeficijenti na glavnoj dijagonali k_{ii} su pozitivni budući da pozitivna poopćena sila Q_i ne može izazvati negativan poopćeni pomak $q_i = 1$,
- matrice krutosti elemenata kao i cijele konstrukcije su singularne. To znači da ih nije moguće invertirati odnosno njihova determinanta je jednaka nuli,
- submatrice $\mathbf{K}_{pp}$ koje se nalaze na glavnoj dijagonali matrice krutosti konstrukcije $\mathbf{K}$ u retku i stupcu p jednake su sumi submatrica $\mathbf{k}_{11}$ ili $\mathbf{k}_{22}$ svih elemenata koji se sastaju u čvoru p,
- izvandijagonalne submatrice $\mathbf{K}_{pq}$ koje se nalaze u matrici krutosti konstrukcije $\mathbf{K}$ u retku p i stupcu q jednake su nulmatrici $\mathbf{0}$, ako čvorovi p i q nisu povezani nekim štapom,
- izvandijagonalne submatrice $\mathbf{K}_{pq}$ koje se nalaze u matrici krutosti konstrukcije $\mathbf{K}$ u retku p i stupcu q jednake su $\mathbf{k}_{12}^{a} = \mathbf{k}_{21}^{a}$ ako su čvorovi p i q povezani nekim štapom a.

4.2.3. Rubni uvjeti [14]

Pretpostavljanjem rubnih uvjeta za pomake, simetrična i singularna matrica krutosti postaje pozitivno definitna, što je uvjet za mogućnost rješavanja nehomogenog sustava jednadžbi.

Vektor globalnih stupnjeva slobode može se podijeliti na nepoznate ili aktivne pomake $\mathbf{V}_a$ te na poznate ili pasivne pomake $\mathbf{V}_p$, pri čemu se pretpostavlja da se pravci zadanih pomaka poklapaju s globalnim koordinatnim sustavom. Rubni uvjeti sila obuhvaćeni su u vektoru

opterećenja $\mathbf{R}$ koji je također moguće podijeliti na dio koji opisuje zadano opterećenje $\mathbf{R}_a$ i na nepoznate komponente $\mathbf{R}_p$ pri zadanim pomacima. U skladu s podjelom vektora pomaka i vektora sila, matrica krutosti podijeljena je na submatrice pa se globalna jednadžba konačnih elemenata može prikazati u obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ap} \\ \mathbf{K}_{pa} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \\ \mathbf{R}_p \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

iz čega slijede dvije matrične jednadžbe:

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{V}_a + \mathbf{K}_{ap}\mathbf{V}_p = \mathbf{R}_a, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{K}_{pa}\mathbf{V}_a + \mathbf{K}_{pp}\mathbf{V}_p = \mathbf{R}_p. \tag{4.9}$$

Ako su zadani pomaci $\mathbf{V}_p$ jednaki nuli, nepoznate komponenete pomaka jednake su:

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{K}_{aa}{}^{-1}\mathbf{R}_a. \tag{4.10}$$

Nepoznate komponente sila mogu se također izračunati uz uvjet $\mathbf{V}_p = 0$, pri čemu vrijedi:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{K}_{pa}\mathbf{K}_{aa}{}^{-1}\mathbf{R}_a. \tag{4.11}$$

5. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Prilikom diskretizacije grednim konačnim elementima, programski paket *Abaqus/CAE* [15] povodi se teorijom greda koja nalaže da su dimenzije poprečnog presjeka grede male u usporedbi s aksijalnim dimenzijama grede. Pri tome dimenzija nije nužno globalna dimenzija (duljina) nego dimenzija kao što je udaljenost između oslonaca, udaljenost između dijelova na kojima se mijenjaju površine poprečnih presjeka, valna duljina najviših vibracija i sl.

5.1. Definicija poprečnog presjeka

Poprečni presjeci koji se nalaze u *Abaqus*-ovoj bazi podataka [16] su:

- puni poprečni presjeci,
- zatvoreni tankostijeni presjeci,
- otvoreni tankostijeni presjeci,
- cijevi s debelom stijenkom.

Izbor punog ili otvorenog poprečnog presjeka utječe na izračun normalnih i posmičnih naprezanja u točkama poprečnog presjeka.

Ravnina punih poprečnih presjeka uslijed savijanja ostaje ravna, dok će se uslijed torzijskog opterećenja bilo koji neokrugli poprečni presjek izvitoperiti, tj. poprečni presjek neće ostati ravan. Međutim, za pune poprečne presjeke takvo je iskrivljenje dovoljno malo da se uzdužne deformacije mogu zanemariti i može se primijeniti *St. Venantova* teorija savijanja bez dramatičnih posljedica na konačne rezultate.

U *Abaqusu* se nepuni poprečni presjeci tretiraju kao tankostijeni, odnosno kao presjeci u čijoj je ravnini širina stijenke mala u usporedbi s ostalim dimenzijama poprečnog presjeka. Tankostijena teorija greda razlikuje način računanja posmičnih naprezanja ovisno o tome je li presjek otvoreni ili zatvoreni.

Formulacija zatvorenih presjeka koja se koristi u *Abaqusu* temelji se na pretpostavci da se kod dovoljno malih debljina stijenki posmična naprezanja kroz debljinu stijenke ne mijenjaju značajno.

Kod otvorenih presjeka se pretpostavlja da se posmično naprezanje linearno mijenja kroz debljinu stijenke, a na sredini je jednako 0.

Abaqus/CAE nudi definiranje profila grede na tri različita načina [16]:

- odabirom poprečnog presjeka iz baze podataka *Abaqus/CAE* i određivanje oblika i dimenzija presjeka grede,
- definiranje pomoću generaliziranog profila grede upotrebom inženjerskih svojstava poprečnog presjeka kao što su površina i moment inercije poprečnog presjeka,
- definiranje pomoću mreže posebnih dvodimenzijskih elemenata za koje se numerički izračunavaju geometrijske veličine.

U ovom će se radu definiranje profila grede izvršiti na prvi navedeni način, tj. odabirom poprečnog presjeka iz baze podataka *Abaqus/CAE*, određivanjem oblika i upisivanjem dimenzija poprečnog presjeka grede.

Kada se gredi dodijeli poprečni presjek definiran na prethodni način, *Abaqus/CAE* nudi opciju računanja inženjerskih svojstava poprečnog presjeka tijekom analize ili na početku same analize pri čemu se prva opcija može koristiti za linearno i za nelinearno ponašanje materijala, dok je druga opcija uglavnom namijenjena za linearno elastične materijale.

Odabirom opcije računanja svojstava poprečnog presjeka tijekom analize, *Abaqus/CAE* izračunava odziv grede u nizu točaka koje se nalaze po površini poprečnog presjeka pa se izlazni podatci kao što su naprezanja i deformacije mogu izračunati u bilo kojoj točci tog presjeka.

5.2. Odabir grednog elementa

Abaqus nudi širok raspon grednih elemenata, uključujući *Euler-Bernoullijeve* i *Timoshenkove* tipove greda s punim, tankostijenim zatvorenim ili otvorenim presjecima.

Iz *Abaqus/Standard* baze podataka moguće je izabrati [16]:

- *Euler-Bernoullijeve* (tanke) grede u ravnini i u prostoru,
- *Timoshenkove* (posmično fleksibilne) grede u ravnini i prostoru,
- linearnu, kvadratnu i kubičnu interpolacijsku formulaciju grednih elemenata,
- grede s otvorenim presjecima koje koriste teoriju savijanja otvorenih presjeka,
- cijevne elemente,

- hibridnu formulaciju greda koja se obično koristi kod jako krutih greda koje se značajno rotiraju (upotreba u robotici ili u jako fleksibilnim strukturama kao što su pomorski cjevovodi).

5.2.1. Euler-Bernoullijeve (tanke) grede

Euler-Bernoullijeve grede ne opisuju poprečne posmične deformacije, tj. ravnine poprečnih presjeka koje predstavljaju normale na uzdužnu os grede i dalje ostaju ravne (ukoliko nema deplanacije poprečnog presjeka) i okomite na os grede. Koriste se samo za modeliranje tankih greda gdje poprečni presjeci greda trebaju biti mali u usporedbi s karakterističnim dimenzijama duž osi (kao što je udaljenost između oslonaca).

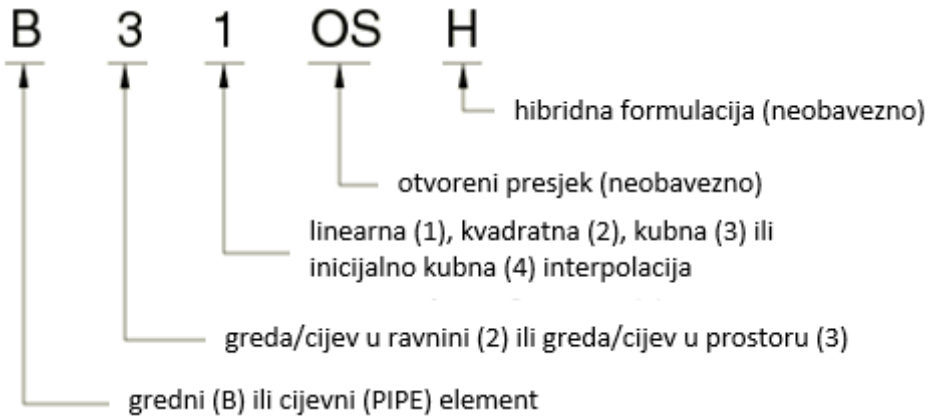
Euler-Bernoullijevi gredni elementi koriste kubnu interpolacijsku funkciju što ih čini prihvatljivo točnima za slučajeve kod kojih je opterećenje raspodijeljeno duž grede pa su prikladni i za opisivanje dinamičkih vibracijskih slučajeva gdje *D´Alembertove*, tj. inercijske sile stvaraju upravo takva opterećenja.

5.2.2. Timoshenkove (posmično fleksibilne) grede

Timoshenkove (posmično fleksibilne) grede (B21, B22, B31, B31OS, B32, B32OS, PIPE21, PIPE22, PIPE31, PIPE32, i njihovi hibridni ekvivalenti), za razliku od *Euler-Bernoullijevih* greda, opisuju poprečne posmične deformacije. Osim za modeliranje tankih greda, pogodne su i za modeliranje debelih greda kod kojih posmična deformacija ne smije biti zanemarena. *Abaqusova* analiza pomoću *Timoshenkovih* greda temelji se na pretpostavci da je poprečno posmično ponašanje grede linearno elastično s konstantnim modulima, neovisno o odzivu presjeka grede na aksijalno rastezanje i savijanje. Mogu biti opterećene velikim uzdužnim opterećenjima dok je za kombinaciju uzdužnog i torzijskog opterećenja, točne rezultate torzijskih posmičnih deformacija moguće dobiti jedino ako uzdužne deformacije nisu prevelike.

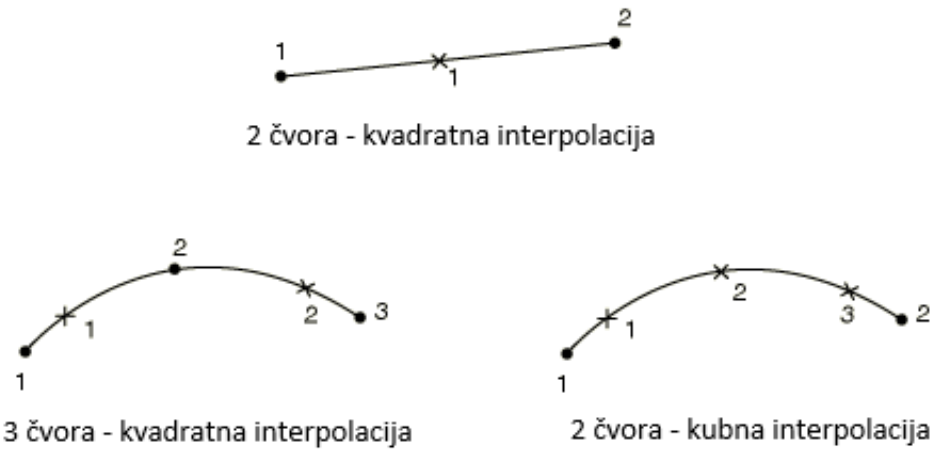
5.2.3. Dogovor oko imenovanja

Imenovanje grednih elemenata u programskom paketu *Abaqus* detaljno je opisano na [Slika 17]. Prema tome se npr. B21H interpretira kao gredni konačni element u ravnini prilikom čije se analize koristi linearna interpolacija i hibridna formulacija.



Slika 17. Imenovanje grednih elemenata u *Abaqusu* [16]

Određivanje broja čvorova na konačnom elementu i interpolacije opisane prema [Slika 17] prikazano je na [Slika 18].

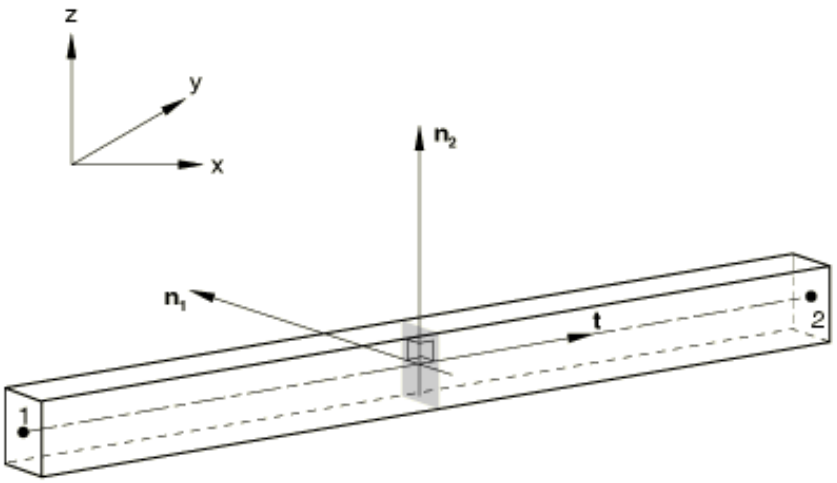


Slika 18. Interpolacija grednih konačnih elemenata [16]

5.3. Orijentacija poprečnog presjeka grede

Prilikom definiranja svojstava konačnog elementa iznimno je važno odrediti orijentaciju poprečnog presjeka grede u odnosu na globalni Kartezijev koordinatni sustav kao što je prikazano na [Slika 19].

Lokalna tangenta duž elementa grede $\boldsymbol{t}$ definirana je kao vektor uzduž osi elementa koji je usmjeren od prvog čvora prema sljedećem čvoru pri čemu je poprečni presjek grede okomit na tako definiranu lokalnu tangentu. Vektori $\boldsymbol{n_1}$ i $\boldsymbol{n_2}$ definiraju lokalne smjerove poprečnog presjeka. Uz lokalnu tangentu $\boldsymbol{t}$ i vektore $\boldsymbol{n_1}$ i $\boldsymbol{n_2}$ u potpunosti je definiran lokalni desnokretni koordinatni sustav grednog elementa.



Slika 19. Lokalni koordinatni sustav grednog elementa [16]

5.4. Verifikacija grednih elemenata

Zadatak preuzet iz knjige *Mehanika deformabilnih tijela* [7].

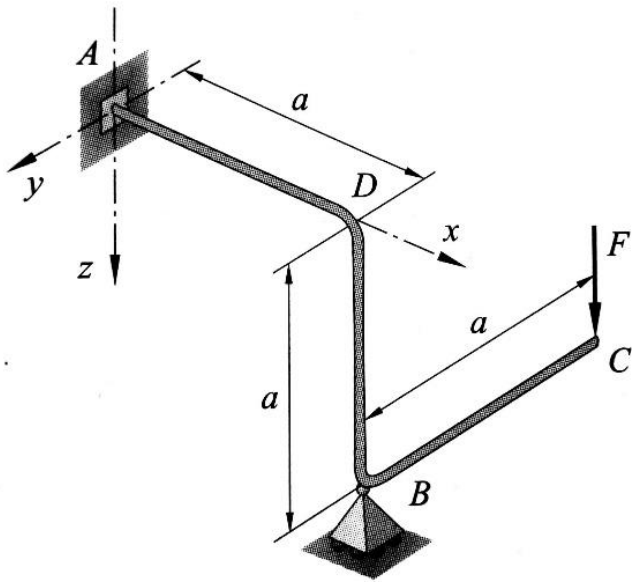
Za prostornu grednu konstrukciju zadanu i opterećenu prema [Slika 20] potrebno je:

a) odrediti reakcije u osloncima,

b) odrediti vertikalni pomak točke *C*.

Grede imaju poprečni presjek u obliku kružnog vijenca [Slika 14].

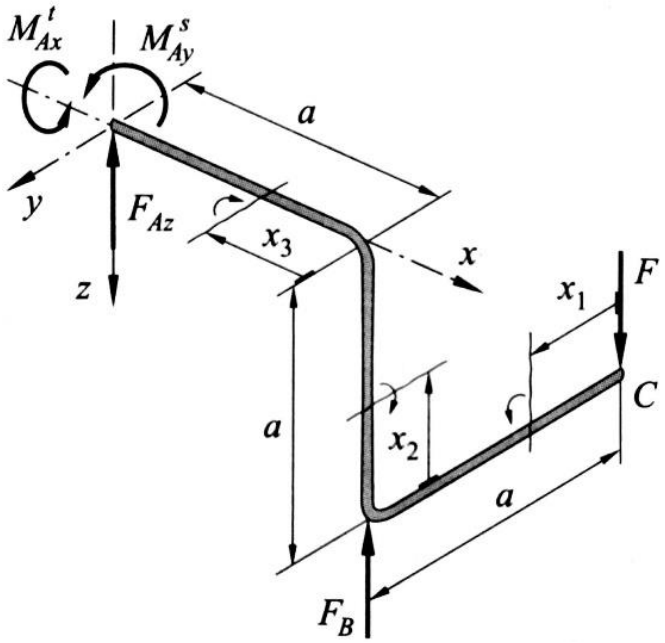
Zadano: $F = 10$ N, $a = 1500$ mm, $E = 210$ GPa, $\upsilon = 0{,}3$, $D_{\mathrm{v}} = 60{,}3$ mm i $D_{\mathrm{u}} = 53$ mm.



Slika 20. Prostorna gredna konstrukcija [7]

Prostorna gredna konstrukcija prema [Slika 20] oslobođena je nametnutih veza i dodane su joj odgovarajuće reakcije veza [Slika 21]. Pri tome pomični oslonac *B* ima samo vertikalnu komponentu reakcije veze F_B, dok uklještenje *A* ima samo 3 komponente reakcija veza (F_{Az}, M_{Ax}^t i M_{Ay}^s) koje se mogu pojaviti za zadani način opterećenja iako se radi o prostornoj konstrukciji. Naime, za prostornu konstrukciju bi se u općem slučaju u uklještenju nalazilo 6 komponenti reakcija veza. Obzirom da vrijede statički uvjeti ravnoteže ispisani u izrazima (2.3) - (2.8), može se zaključiti kako su u uklještenju *A* reakcije veza F_{Ax}, F_{Ay} i M_{Az}^s jednake nuli. Prema tome preostaju samo 4 komponente kao nepoznanice, a za daljnju analizu se koriste 3 jednadžbe ravnoteže pa je prema (2.2) stupanj statičke neodređenosti:

$$d = r - e = 4 - 3 = 1. \tag{5.1}$$



Slika 21. Reakcije veza [7]

Primjenom *drugog Castiglianova teorema* prema [7] slijede rješenja:

$$F_B = 10 \text{ N}, \tag{5.2}$$

$$F_{Az} = 0, \tag{5.3}$$

$$M_{Ax}^t = Fa = 10 \cdot 1500 = 15000 \text{ Nmm}, \tag{5.4}$$

$$M_{Ay}^s = 0. \tag{5.5}$$

Vertikalni pomak točke *C* u pravcu sile *F* može se također izračunati primjenom *drugog Castiglianova teorema*, derivirajući energiju deformiranja *U* akumuliranu u konstrukciji po sili *F*, tj.

$$w_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{8Fa^3}{3EI_y}, \tag{5.6}$$

gdje je *U* energija deformiranja od savijanja i uvijanja.

Za aksijalni moment otpora presjeka I_y vrijedi:

$$I_y = \frac{\pi}{64}(D_{\mathrm{v}}^4 - D_{\mathrm{u}}^4) = 261668{,}6266\ \mathrm{mm}^4, \tag{5.7}$$

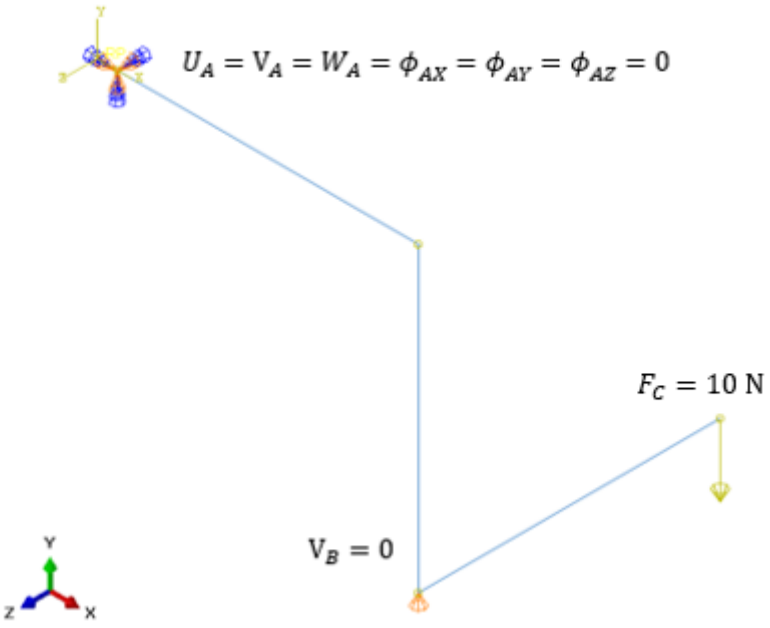
pa slijedi:

$$w_C = \frac{8Fa^3}{3EI_y} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 1500^3}{3 \cdot 210000 \cdot 261668{,}6266} = -1{,}63784\ \mathrm{mm}. \tag{5.8}$$

5.4.1. Rješenja dobivena programskim paketom Abaqus

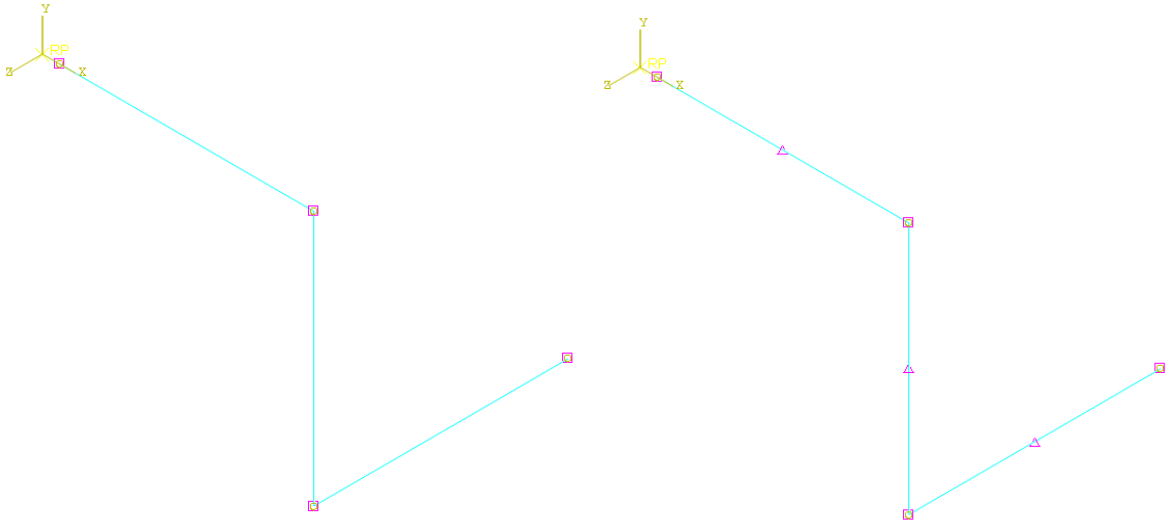
Na [Slika 22] prikazan je numerički model konstrukcije, položaj globalnog koordinatnog sustava, rubni uvjeti te opterećenje.

U točci *A* nalazi se uklještenje, u točci *B* pomični oslonac, a u točci *C* je zadano opterećenje.



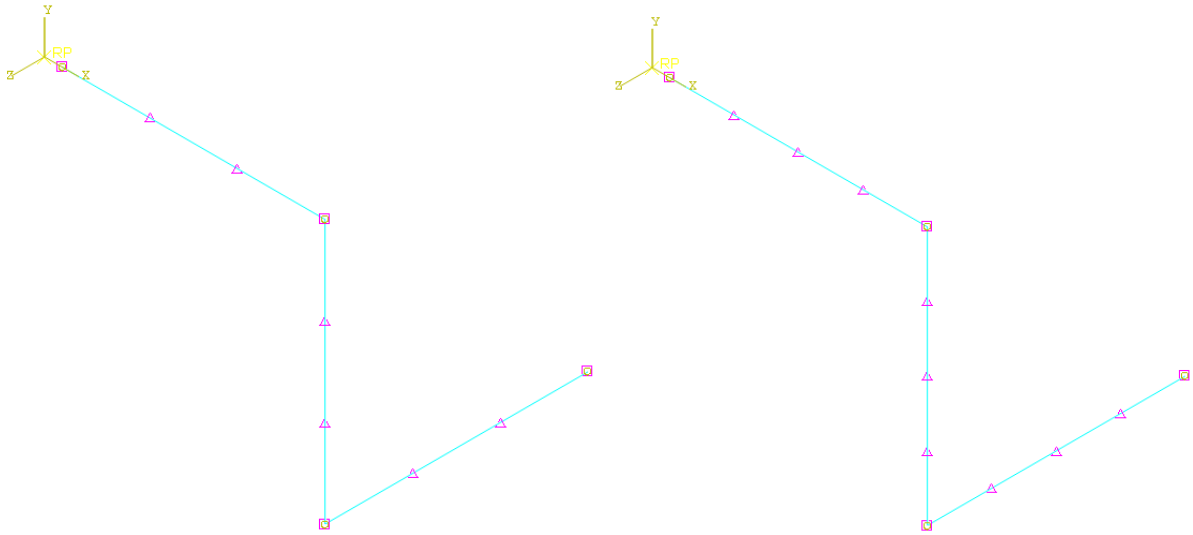
Slika 22. Rubni uvjeti i zadano opterećenje

Na [Slika 23] prikazana je diskretizacija s 3 i 6 konačnih elemenata.



Slika 23. Diskretizacija s 3 (lijevo) i 6 (desno) konačnih elemenata

Na [Slika 24] prikazana je diskretizacija s 9 i 12 konačnih elemenata.

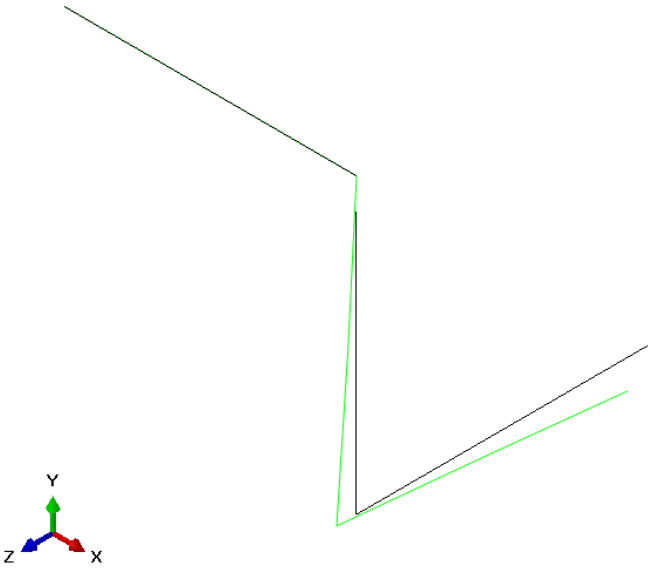


Slika 24. Diskretizacija s 9 (lijevo) i 12 (desno) konačnih elemenata

Kako su se reakcije veza, već kod prve diskretizacije, poklapale s analitičkim rješenjima uz gotovo neprimjetnu razliku u daljnjem će se izlaganju prikazati samo grafička raspodjela tih reakcija, a konvergencija će se analizirati samo za vertikalni pomak točke *C* u ovisnosti o broju i formulaciji konačnih elemenata.

5.4.1.1. Rješenja dobivena diskretizacijom s 3 gredna elementa B31

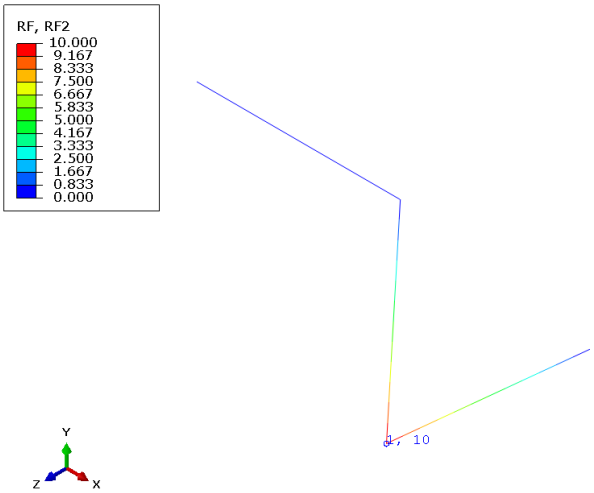
Prikaz deformiranog u odnosu na nedeformirani oblik konstrukcije nalazi se na [Slika 25].



Slika 25. Prikaz deformiranog i nedeformiranog oblika konstrukcije

Na [Slika 26] prikazane su reakcije veza, tj. sila u smjeru osi *Z* (*Y* prema *Abaqusu*).

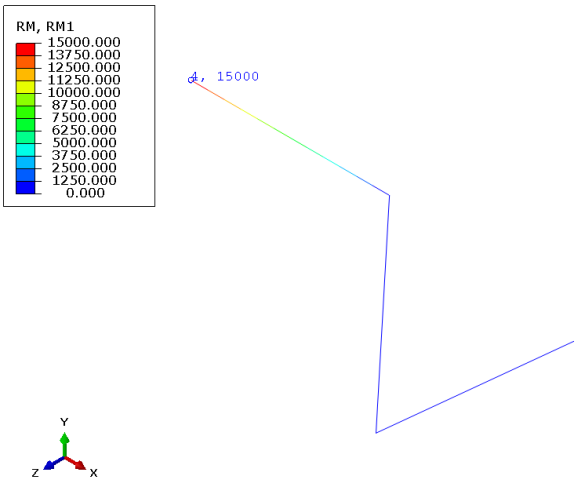
Sa slike je uočljivo kako se reakcija veze u točci *B* u potpunosti poklapa s analitičkim rješenjem.



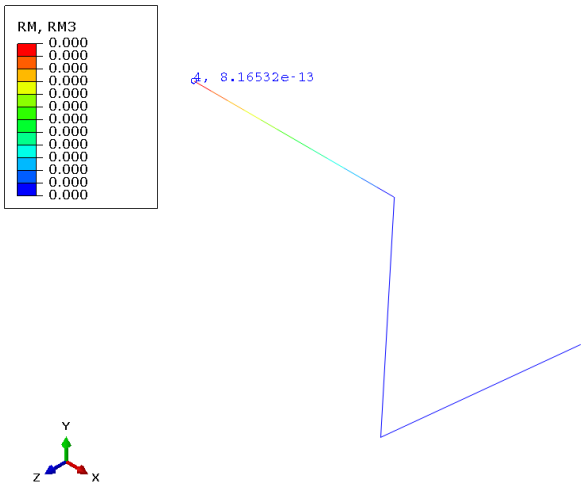
Slika 26. Prikaz reakcija veza, tj. sila u smjeru osi *Y* (*Abaqus*) u N

Na [Slika 27] prikazane su reakcije veza, tj. momenata oko osi *X*, a na [Slika 28] prikazane su reakcije veza, tj. momenata oko osi *Y* (*Z* prema *Abaqusu*).

Sa slika je uočljivo kako se momenti u točci *A* u potpunosti poklapaju s analitičkim rješenjem.

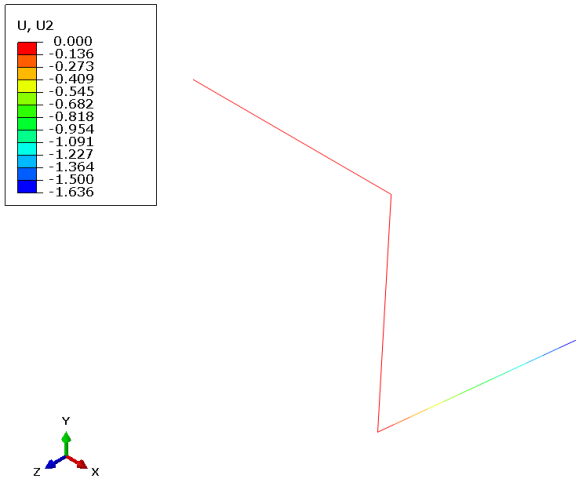


Slika 27. Prikaz reakcija veza, tj. momenata oko osi *X* u Nmm



Slika 28. Prikaz reakcija veza, tj. momenata oko osi *Z* (*Abaqus*) u Nmm

Na [Slika 29] nalazi se raspodjela pomaka u smjeru osi *Z*, tj. *Y* prema *Abaqusu.*



Slika 29. Raspodjela pomaka u smjeru osi *Y* (*Abaqus*) u mm

Analiza rješenja kao i usporedba u ovisnosti o različitom broju konačnih elemenata i stupnju interpolacije bit će prikazana u nastavku.

5.4.2. Gredni element B31

Element B31 prema [Slika 17] diskretizira konstrukciju prostornim grednim elementima, a prilikom analize koristi linearnu interpolaciju.

U [Tablica 1] nalaze se iznosi vertikalnog pomaka točke *C* koji se mijenjaju u ovisnosti o broju konačnih elemenata za gredne elemente B31.

Tablica 1. Usporedba vertikalnog pomaka točke *C* za gredni element B31

Broj konačnih elemenata	Numeričko rješenje u mm	Relativna razlika u %
3	-1,6363	0,1
6	-1,6275	0,63
9	-1,6259	0,73
12	-1,6253	0,77

Relativna razlika izračunata je prema izrazu:

$$\Delta x = \frac{|x - x'|}{\frac{|x + x'|}{2}} \cdot 100, \qquad \textbf{(5.9)}$$

gdje je x vrijednost dobivena analitičkim proračunom, a x' je vrijednost dobivena numeričkim proračunom.

Uspoređujući analitičke rezultate s rezultatima dobivenim numeričkom analizom pomoću programskog paketa *Abaqus,* može se uočiti da je relativna razlika poprilično mala pa čak i ispod 1% što je znatno niže od inženjerski prihvatljive granice od 5 %. Također, može se primijetiti da iznos vertikalnog pomaka s povećanjem broja konačnih elemenata konvergira ka određenom rješenju. Zaključuje se da su gredni elementi B31 prikladni za analizu ovakvih konstrukcija.

5.4.3. Gredni element B32

Diskretizirajući konstrukciju prostornim grednim elementima B32, analiza se provodi kvadratnom interpolacijom, a u [Tablica 2] nalaze se iznosi vertikalnog pomaka točke *C* koji se mijenjaju u ovisnosti o broju konačnih elemenata za gredne elemente B32.

Tablica 2. Usporedba vertikalnog pomaka točke *C* za gredni element B32

Broj konačnih elemenata	Numeričko rješenje u mm	Relativna razlika u %
3	-1,6246	0,81
6	-1,6246	0,81
9	-1,6246	0,81
12	-1,6246	0,81

Uspoređujući analitičke rezultate s rezultatima dobivenim numeričkom analizom pomoću programskog paketa *Abaqus* [Tablica 2], može se uočiti da je i ovdje relativna razlika poprilično mala, tj. unutar inženjerski prihvatljive granice od 5 %. Iz rezultata je vidljivo da bez obzira na povećanje broja konačnih elemenata, iznos vertikalnog pomaka u točci *C* konvergira prema određenom rješenju uz konstantno odstupanje od analitičkog rješenja, a daljnjim povećanjem broja konačnih elemenata nije moguće postići točniji rezultat od dobivenog.

5.4.4. Gredni element B33

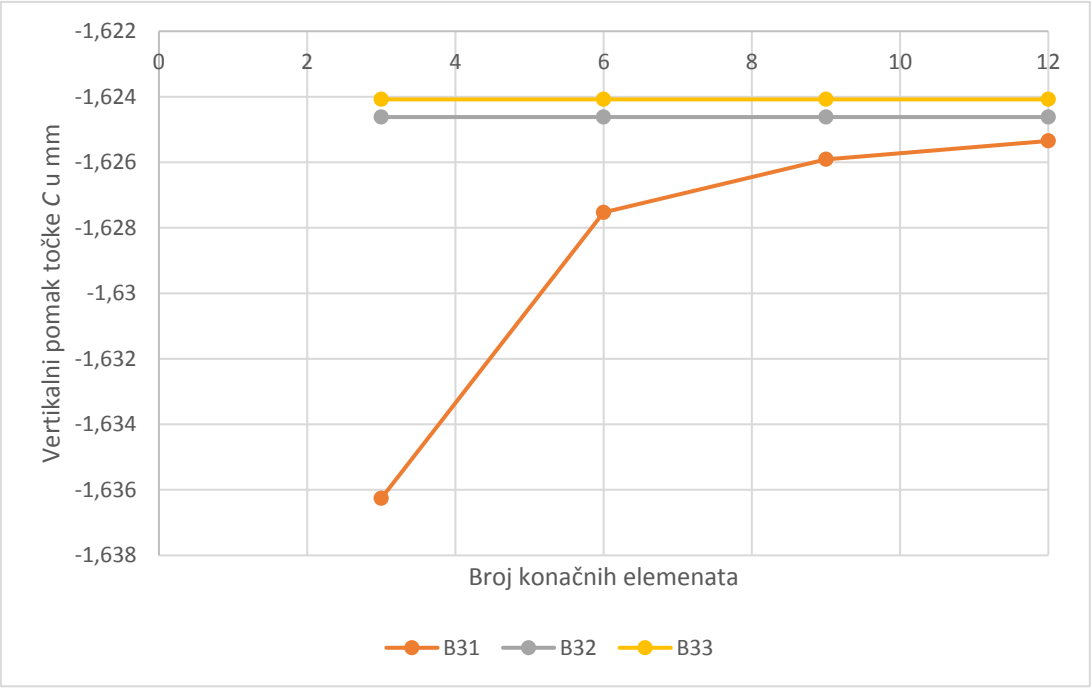
Elementi B33 diskretiziraju konstrukciju prostornim grednim elementima prilikom čije se analize koristi kubna interpolacija, a u [Tablica 3] nalaze se iznosi vertikalnog pomaka točke *C* koji se mijenjaju u ovisnosti o broju konačnih elemenata za gredne elemente B33.

Tablica 3. Usporedba vertikalnog pomaka točke *C* za gredni element B33

Broj konačnih elemenata	Numeričko rješenje u mm	Relativna razlika u %
3	-1,6241	0,84
6	-1,6241	0,84
9	-1,6241	0,84
12	-1,6241	0,84

Usporedbom analitičkih i numeričkih rezultata [Tablica 3], može se uočiti isto što i u prethodnoj analizi s grednim elementima B32, tj. da je relativna razlika mala. Iz rezultata je također vidljivo da bez obzira na povećanje broja konačnih elemenata, iznos vertikalnog pomaka u točci *C* konvergira prema određenom rješenju uz konstantno odstupanje od analitičkog rješenja.

Na [Slika 30] prikazana je grafička usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata te tipu grednog elementa kojim je konstrukcija diskretizirana.



Slika 30. Konvergencija numeričkog rješenja

6. PRORAČUN METALNE KONSTRUKCIJE LJULJAČKE

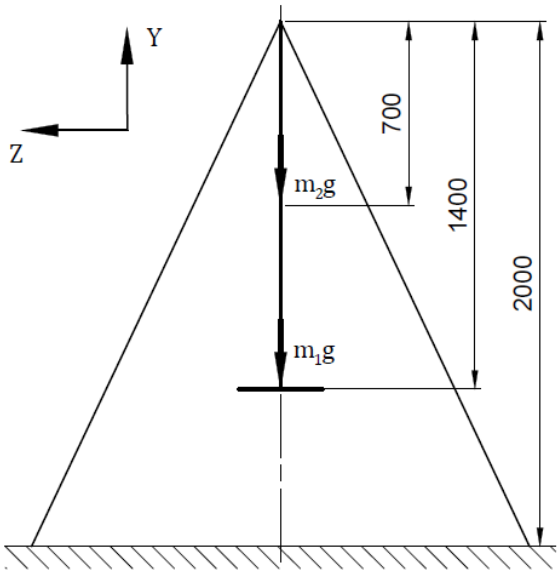
Kao što je prethodno navedeno, analiza će se provesti uz određena pojednostavljenja koja će olakšati sami proračun, a neće značajno utjecati na rezultate.

U obzir se neće uzeti temperaturni utjecaji te masa same konstrukcije. Kao opterećenje djeluju težina osobe koja je na sjedištu, težina sjedišta i lanaca na koje je sjedište pričvršćeno. Obzirom da masa osoba koje koriste konstrukciju može varirati, za analizu će se uzeti maksimalno opterećenje prema slobodnoj procjeni, a naravno ako uz to opterećenje bude zadovoljen uvjet čvrstoće, automatski je zadovoljen i za manje iznose opterećenja.

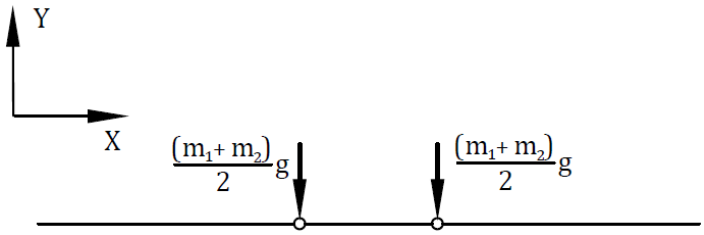
Analiza će se provesti za više slučaja opterećenja. Prvotno će se provjeriti statičko opterećenje konstrukcije [Slika 31], a proračun će se provesti analitičkim putem primjenom matrične metode pomaka i numeričkim putem pomoću programskog paketa *Abaqus*. Nakon toga proračun će biti proveden za dinamičko opterećenje konstrukcije primjenom kvazistatičkog pristupa, a provest će se uz pomoć programskog paketa *Abaqus*.

6.1. Statičko opterećenje

Slučaj statičkog opterećenja prikazan je na [Slika 31], dok su opterećenja koja se preko lanaca prenose na horizontalnu gredu prikazana na [Slika 32].



Slika 31. Statičko opterećenje konstrukcije



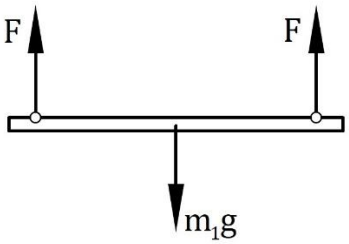
Slika 32. Opterećenje na horizontalnu gredu

Na [Slika 32] m_1 predstavlja masu osobe i sjedišta zajedno, a prema procjeni iznosi 100 kg. Masa lanaca je označena s m_2, a prema HRN C.H4.020-1978 za $d = 5$ mm iznosi [13]:

$$m_2 = 2 \cdot m_l \cdot l = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}4 = 1{,}4 \text{ kg}, \tag{6.1}$$

gdje je m_l duljinska masa, a prema [13] iznosi 0,5 kg/m, dok je s l označena duljina lanca koja iznosi 1,4 m.

Opterećenja koja djeluju na sjedište prikazana su na [Slika 33].



Slika 33. Opterećenja na sjedištu

Prema [Slika 33] na svaki od lanaca djeluje sila F:

$$F = \frac{m_1 g}{2} = 500 \text{ N}, \tag{6.2}$$

pri čemu je g akceleracija slobodnog pada, a iznosi 9,81 m/s^2 (≈ 10 m/s^2).

Prema tome faktor sigurnosti S iznosi:

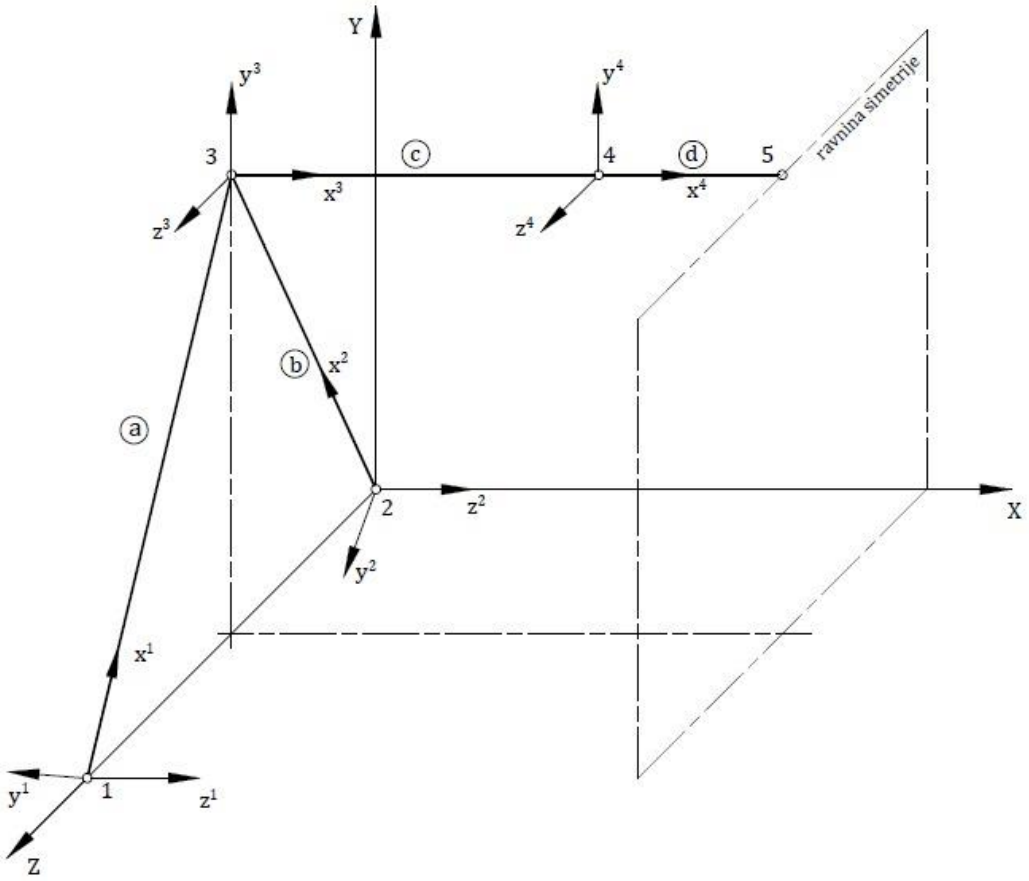
$$S = \frac{F_{\text{dop}}}{F} = \frac{2{,}45}{0{,}5} = 5, \tag{6.3}$$

gdje je F_{dop} dopušteno opterećenje za odabrani lanac prema [13].

6.1.1. Primjena metode krutosti za analizu konstrukcije ljuljačke

Prilikom rješavanja ovog zadatka primijenit će se rubni uvjeti simetrije. Primjenom rubnih uvjeta simetrije smanjit će se broj stupnjeva slobode, a time i olakšati način provedbe proračuna.

Prikaz elemenata, globalnih čvorova, ravnine simetrije, globalnih i lokalnih koordinata nalazi se na [Slika 34].



Slika 34. Prikaz elemenata, globalnih čvorova te globalnih i lokalnih koordinata

Na [Slika 34] globalni koordinatni sustav označen je s *XYZ*, dok su lokalni koordinatni sustavi označeni s $x^i y^i z^i$ (i = 1, 2, 3 i 4). Slova *a*, *b*, *c* i *d* odnose se na gredne konačne elemente, a brojevi od 1 do 5 predstavljaju čvorove globalnog koordinatnog sustava.

Zbog bolje preglednosti, duljine grednih elemenata nisu kotirane, a mogu se iščitati iz [Slika 13]:

$$l_1 = l_2 = 2214{,}16 \text{ mm}, \quad \textbf{(6.4)}$$

$$l_3 = 950 \text{ mm}, \quad \textbf{(6.5)}$$

$$l_4 = 250 \text{ mm}. \quad \textbf{(6.6)}$$

Na temelju orijentacije lokalnih koordinatnih osi elemenata s obzirom na globalni koordinatni sustav kao što je prikazano na [Slika 34], određuju se kosinusi smjerova zapisani u [Tablica 4].

Tablica 4. Kosinusi smjerova lokalnih koordinatnih osi s obzirom na globalne koordinate

Element	$\cos(x,X)$	$\cos(x,Y)$	$\cos(x,Z)$	$\cos(y,X)$	$\cos(y,Y)$	$\cos(y,Z)$	$\cos(z,X)$	$\cos(z,Y)$	$\cos(z,Z)$
1	0	0,9033	-0,4291	0	0,4291	0,9033	1	0	0
2	0	0,9033	0,4291	0	-0,4291	0,9033	1	0	0
3	1	0	0	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	0	0	1

U skladu s [Tablica 4] i izrazom (4.5) submatrice $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \mathbf{T_3} = \mathbf{T_4}$ za elemente od 1 do 4 imaju oblik:

$$\mathbf{T_1^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9033 & -0{,}4291 \\ 0 & 0{,}4291 & 0{,}9033 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{T_1^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9033 & 0{,}4291 \\ 0 & -0{,}4291 & 0{,}9033 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

$$\mathbf{T_1^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.9}$$

$$\mathbf{T_1^4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Primjenom izraza (4.4), (4.6) mogu se ispisati matrice krutosti elemenata s obzirom na globalni koordinatni sustav.

$$\mathbf{k}_g^1 = (\mathbf{T}^1)^{\mathrm{T}} \mathbf{k}^{\mathbf{1}} \mathbf{T}^1, \tag{6.11}$$

$$\mathbf{k}_g^2 = (\mathbf{T}^2)^{\mathrm{T}} \mathbf{k}^2 \mathbf{T}^2, \tag{6.12}$$

$$\mathbf{k}_g^3 = (\mathbf{T}^3)^{\mathrm{T}} \mathbf{k}^3 \mathbf{T}^3, \tag{6.13}$$

$$\mathbf{k}_g^4 = (\mathbf{T}^4)^{\mathrm{T}} \mathbf{k}^4 \mathbf{T}^4. \tag{6.14}$$

Izjednačavanje lokalnih i globalnih čvornih stupnjeva prikazanih na [Slika 34] ispisano je unutar [Tablica 5].

Tablica 5. Izjednačavanje lokalnih i globalnih čvornih stupnjeva slobode

Broj lokalnog stupnja slobode	Broj globalnog stupnja slobode za element			
	1	2	3	4
1	1	7	13	19
2	2	8	14	20
3	3	9	15	21
4	4	10	16	22
5	5	11	17	23
6	6	12	18	24
7	13	13	19	25
8	14	14	20	26
9	15	15	21	27
10	16	16	22	28
11	17	17	23	29
12	18	18	24	30

Izjednačavanjem lokalnih i globalnih stupnjeva slobode elemenata stvaraju se globalne matrice krutosti elemenata $\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2, \mathbf{K}^3$ i $\mathbf{K}^4$ čiji red odgovara broju stupnjeva slobode proračunskog modela (30x30).

Zbrajanjem globalnih matrica krutosti pojedinih elemenata dobiva se ukupna globalna matrica krutosti proračunskog modela:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^4. \quad \textbf{(6.15)}$$

Uz poznatu globalnu matricu krutosti **K** i vektor čvornih sila **R**, potrebno je odrediti vektor stupnjeva slobode, tj. pomaka **V**. Kako bi se to jednostavnije izvelo, poslužit će rubni uvjeti pomaka.

Obzirom da je ljuljačka kruto vezana za podlogu na koju se naslanja, u čvorovima 1 i 2 su tzv. uklještenja.

Uklještenja sprječavaju pomake u bilo kojem smjeru isto kao i kutove zakreta, stoga vrijedi:

$$U_1 = \mathrm{V}_1 = W_1 = \phi_{1X} = \phi_{1Y} = \phi_{1Z} = 0, \quad \textbf{(6.16)}$$

$$U_2 = \mathrm{V}_2 = W_2 = \phi_{2X} = \phi_{2Y} = \phi_{2Z} = 0. \quad \textbf{(6.17)}$$

Također, kako je analitička analiza provedena uz primjenu rubnih uvjeta simetrije, na simetriji vrijedi da su pomak u smjeru osi *X* i kutovi zakreta oko osi *Y* i *Z* jednaki nula:

$$U_5 = \phi_{5Y} = \phi_{5Z} = 0. \quad \textbf{(6.18)}$$

Za ovaj slučaj opterećenja može se primijetiti dvostruka simetrija, tj. prethodno spomenuta simetrija s obzirom na ravninu *YZ* i simetrija s obzirom na ravninu *XY*. Stoga je moguće zapisati dva dodatna rubna uvjeta:

$$W_5 = \phi_{5X} = 0. \quad \textbf{(6.19)}$$

Vektor čvornih sila **R** za ovaj slučaj opterećenja ima sve komponente 0 osim F_y komponente u čvoru 4 pa vrijedi:

$$F_{4Y} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot g = 507 \text{ N}. \quad \textbf{(6.20)}$$

Zbog iscrpnog raspisivanja ovih jednadžbi taj će se korak preskočiti, a rezultati dobiveni programskim paketom *Matlab* [17] ispisat će se u sljedećem koraku.

Rješavanjem sustava jednadžbi dobiju se nepoznate komponente pomaka u čvorovima 3, 4 i 5:

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \\ \phi_{3X} \\ \phi_{3Y} \\ \phi_{3Z} \\ U_4 \\ V_4 \\ W_4 \\ \phi_{4X} \\ \phi_{4Y} \\ \phi_{4Z} \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00145 \\ -0{,}00504 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00136 \\ 0{,}0003 \\ -1{,}85567 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00115 \\ -1{,}99946 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{mm} \end{bmatrix}. \quad \textbf{(6.21)}$$

Uvrštavanjem izračunatih pomaka u globalnu jednadžbu krutosti mogu se odrediti reakcije veza u čvorovima 1 i 2, tj. u uklještenju.

Za čvor 1 vrijedi:

$$\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{1Z} \\ M_{1X} \\ M_{1Y} \\ M_{1Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82{,}57931 \\ 253{,}5 \\ -120{,}267 \\ 145{,}4804 \\ -36211 \\ -50309{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{Nmm} \\ \mathrm{Nmm} \\ \mathrm{Nmm} \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Obzirom da se radi o dvostruko simetričnom problemu, čvor 2 ima jednake iznose reakcija veza.

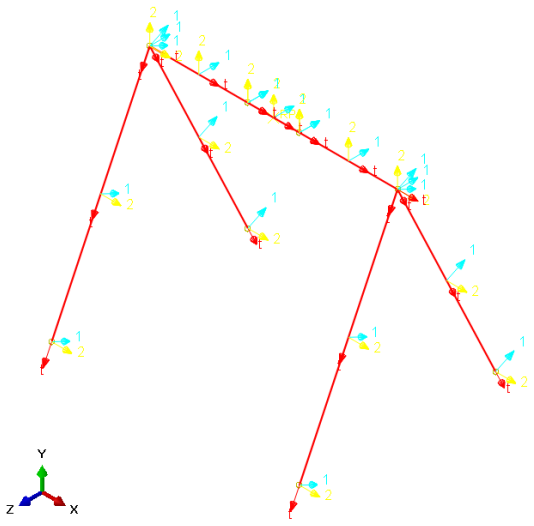
6.1.2. Analiza ljuljačke programskim paketom Abaqus

Proračun će se provesti uz pomoć programskog paketa *Abaqus*, a rezultati će se naknadno usporediti.

Prilikom verifikacije u poglavlju 5 dalo se zaključiti kako elementi B31 monotono konvergiraju ka određenom rješenju, dok elementi B32 i B33 konvergiraju trenutno čak i s veoma malim razlikama u stupnjevima slobode.

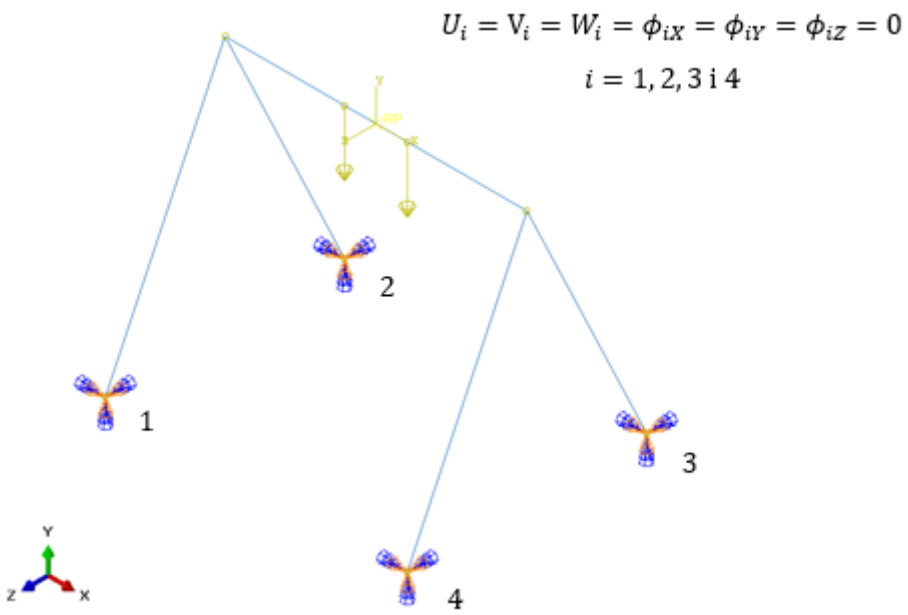
U nastavku će se dati usporedba analitičkih i numeričkih rješenja za pomake u ovisnosti o stupnjevima slobode proračunskog modela, tj. broju konačnih elemenata. Usporedba će se provesti za gredne elemente B31 i B32, tj. za linearnu i kvadratnu interpolaciju, a na temelju toga će se procijeniti s kojim grednim elementom će se provesti daljnja analiza.

Na [Slika 35] nalazi se prikaz lokalnih koordinatnih sustava grednih elemenata.



Slika 35. Lokalni koordinatni sustavi grednih elemenata

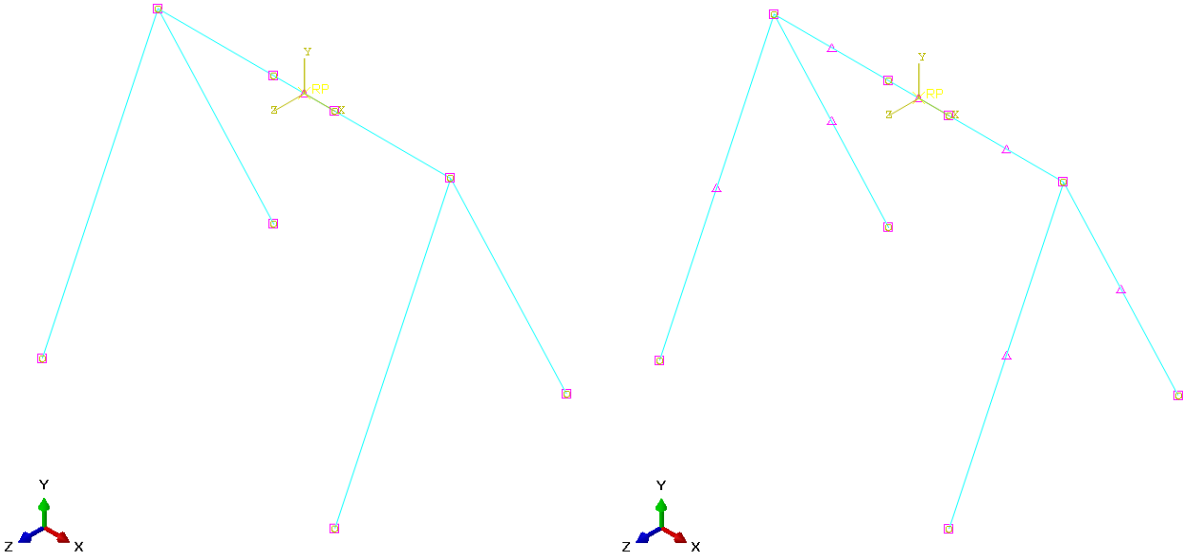
Na [Slika 36] prikazana je modelirana konstrukcija, položaj globalnog koordinatnog sustava te rubni uvjeti.



Slika 36. Položaj globalnog koordinatnog sustava i rubni uvjeti

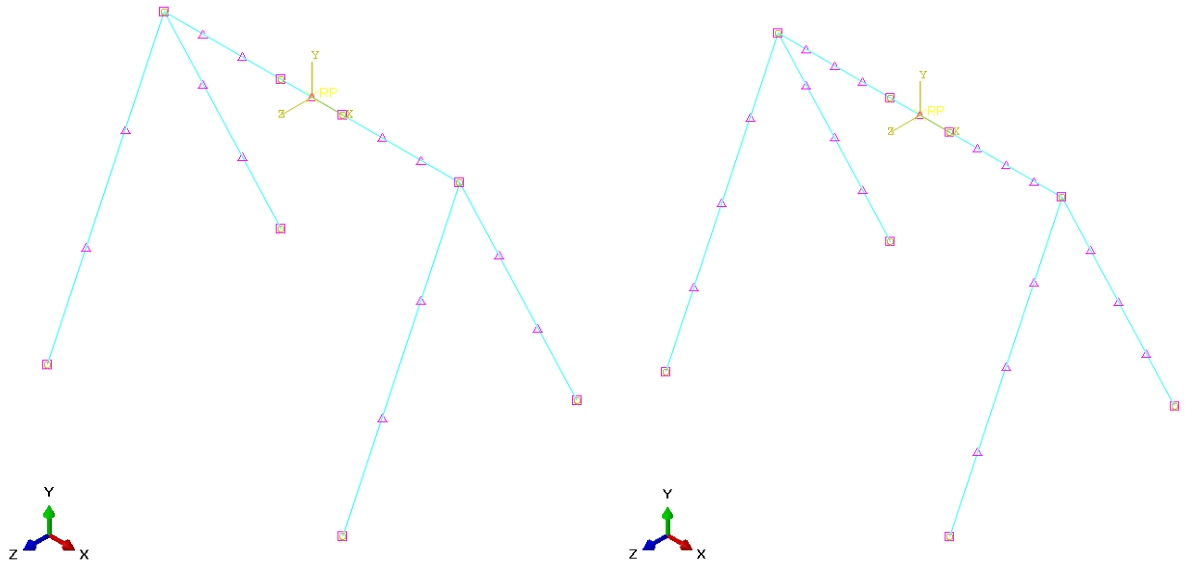
Diskretizacija konstrukcije napravljena je s različitim brojem i tipom konačnih elemenata što je prikazano na sljedećim slikama i tablicama.

Na [Slika 37] prikazana je diskretizacija s 8 i 14 grednih konačnih elemenata.



Slika 37. Diskretizacija s 8 (lijevo) i 14 (desno) konačnih elemenata

Na [Slika 38] prikazana je diskretizacija s 20 i 26 grednih konačnih elemenata.



Slika 38. Diskretizacija s 20 (lijevo) i 26 (desno) konačnih elemenata

U [Tablica 6] i [Tablica 7] nalazi se usporedba rezultata za gredne konačne elemente B31.

Tablica 6. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B31

Komponente pomaka	Analitičko rješenje	*Abaqus*			
		B31			
		8 KE	Rel. razlika u %	14 KE	Rel. razlika u %
U_3/mm	0,00145	0,001315	9,76	0,001409	2,83
V_3/mm	-0,00504	-0,005042	0,04	-0,005041	0,03
ϕ_{3Z}/rad	-0,00136	-0,001523	11,28	-0,001407	3,40
U_4/mm	0,0003	0,000274	9,07	0,000294	2,14
V_4/mm	-1,85567	-2,12182	13,38	-1,94311	4,60
ϕ_{4Z}/rad	-0,00115	-0,001188	3,27	-0,001164	1,22
V_5/mm	-1,99946	-2,27035	12,69	-2,08862	4,36
ϕ_{5Z}/rad	0	0	-	0	-

Tablica 7. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B31

Komponente pomaka	Analitičko rješenje	*Abaqus*			
		B31			
		20 KE	Rel. razlika u %	26 KE	Rel. razlika u %
U_3/mm	0,00145	0,001428	1,49	0,001435	1,02
V_3/mm	-0,00504	-0,005042	0,04	-0,005042	0,04
ϕ_{3Z}/rad	-0,00136	-0,001384	1,74	-0,001376	1,14
U_4/mm	0,0003	0,000298	0,80	0,000299	0,33
V_4/mm	-1,85567	-1,90895	2,83	-1,89691	2,20
ϕ_{4Z}/rad	-0,00115	-0,001159	0,80	-0,001158	0,66
V_5/mm	-1,99946	-2,05386	2,68	-2,04161	2,09
ϕ_{5Z}/rad	0	0	-	0	-

Usporedba rezultata za gredne konačne elemente B32 prikazana je u [Tablica 8] i [Tablica 9].

Tablica 8. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B32

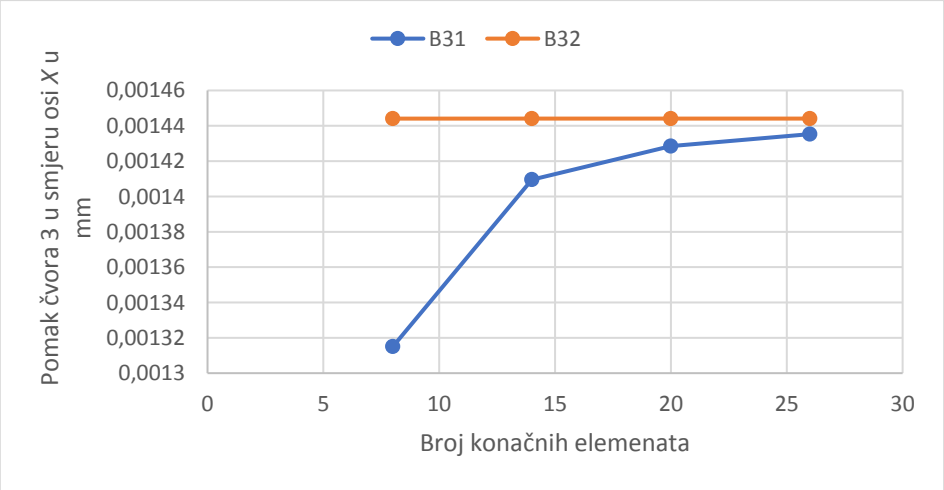
Komponente pomaka	Analitičko rješenje	*Abaqus*			
		B32			
		8 KE	Rel. razlika u %	14 KE	Rel. razlika u %
U_3/mm	0,00145	0,001444	0,41	0,001444	0,41
V_3/mm	-0,00504	-0,005042	0,04	-0,005042	0,04
ϕ_{3Z}/rad	-0,00136	-0,001365	0,35	-0,001365	0,35
U_4/mm	0,0003	0,000301	0,28	0,000301	0,28
V_4/mm	-1,85567	-1,8814	1,38	-1,88137	1,37
ϕ_{4Z}/rad	-0,00115	-0,001155	0,46	-0,001155	0,46
V_5/mm	-1,99946	-2,02581	1,31	-2,02579	1,31
ϕ_{5Z}/rad	0	0	-	0	-

Tablica 9. Usporedba rezultata u ovisnosti o broju konačnih elemenata za B32

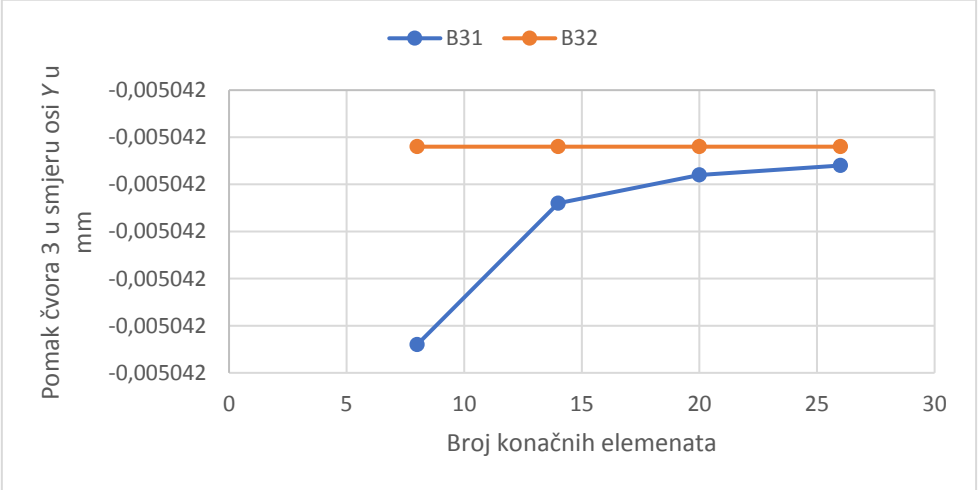
Komponente pomaka	Analitičko rješenje	*Abaqus*			
		B32			
		20 KE	Rel. razlika u %	26 KE	Rel. razlika u %
U_3/mm	0,00145	0,001444	0,41	0,001444	0,41
V_3/mm	-0,00504	-0,005042	0,04	-0,005042	0,04
ϕ_{3Z}/rad	-0,00136	-0,001365	0,35	-0,001365	0,35
U_4/mm	0,0003	0,000301	0,28	0,000301	0,28
V_4/mm	-1,85567	-1,88137	1,37	-1,88137	1,37
ϕ_{4Z}/rad	-0,00115	-0,001155	0,46	-0,001155	0,46
V_5/mm	-1,99946	-2,02578	1,31	-2,02578	1,31
ϕ_{5Z}/rad	0	0	-	0	-

Na temelju provedene usporedbe može se primijetiti da je relativna razlika analitičkih i numeričkih rezultata veoma mala i s povećanjem broja konačnih elemenata i stupnja interpolacije gotovo pa iščezava što ukazuje na ispravnost provedene analize.

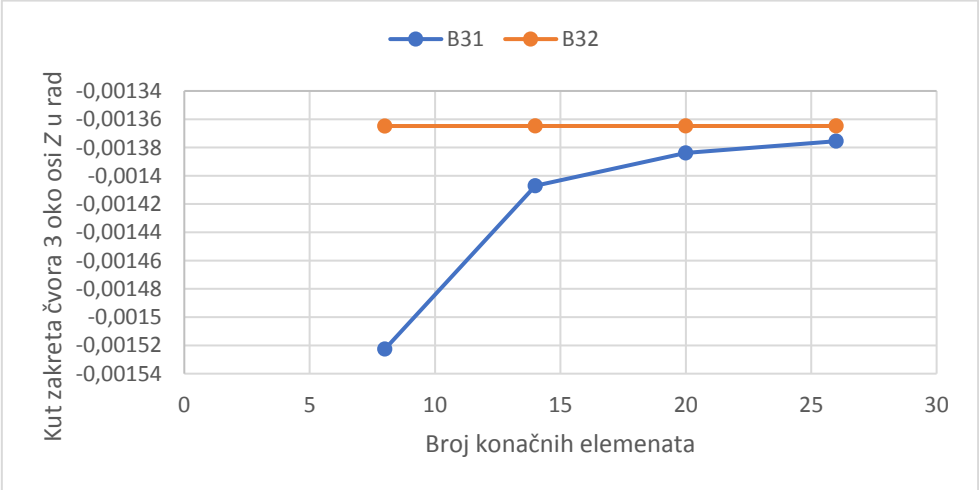
Grafička usporedba prethodno dobivenih rezultata i prikaz konvergencije nalazi se na sljedećim slikama.



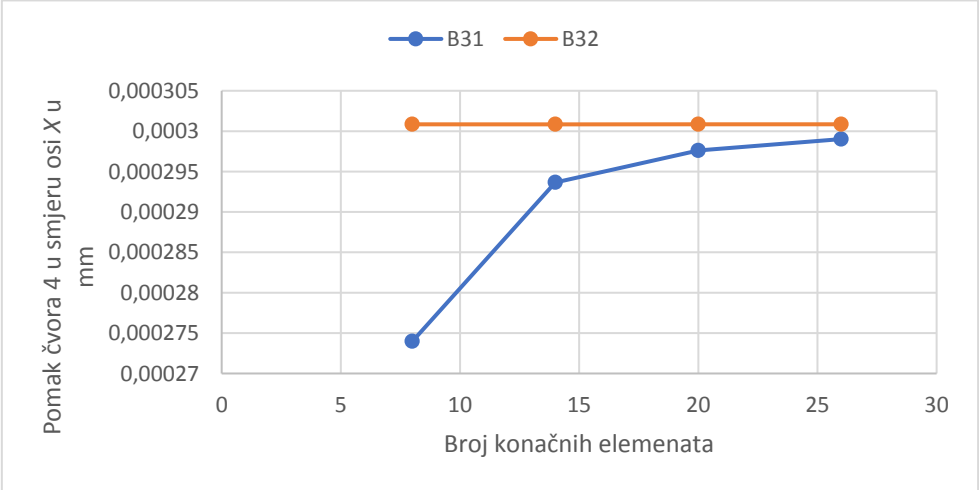
Slika 39. Konvergencija pomaka čvora 3 u smjeru osi *X* u mm



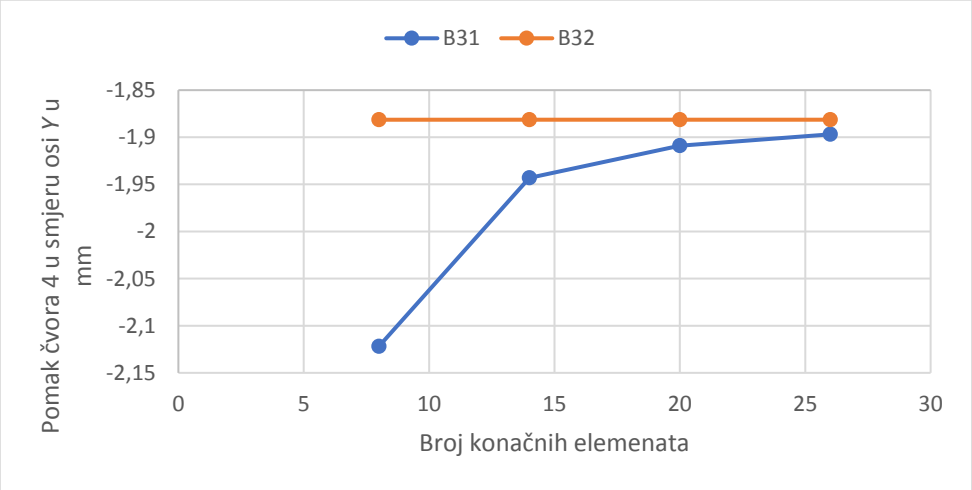
Slika 40. Konvergencija pomaka čvora 3 u smjeru osi *Y* u mm



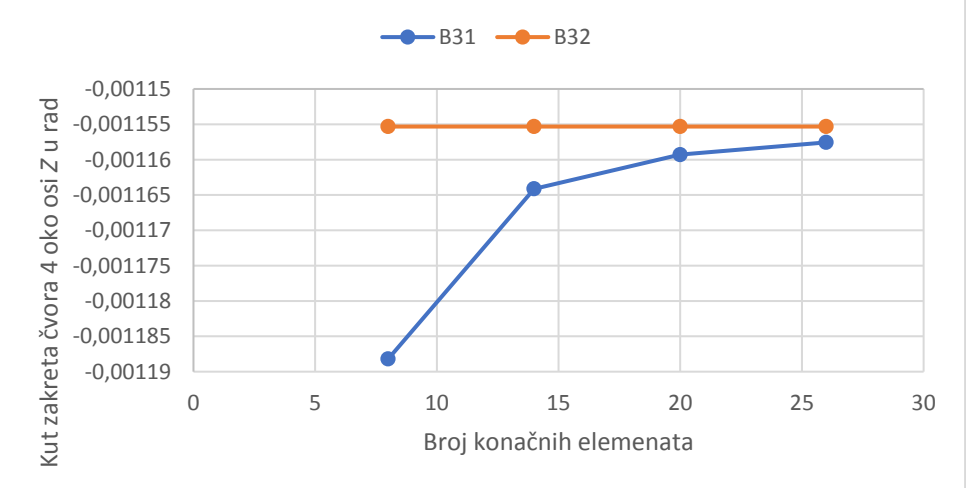
Slika 41. Konvergencija kuta zakreta čvora 3 oko osi *Z* u rad



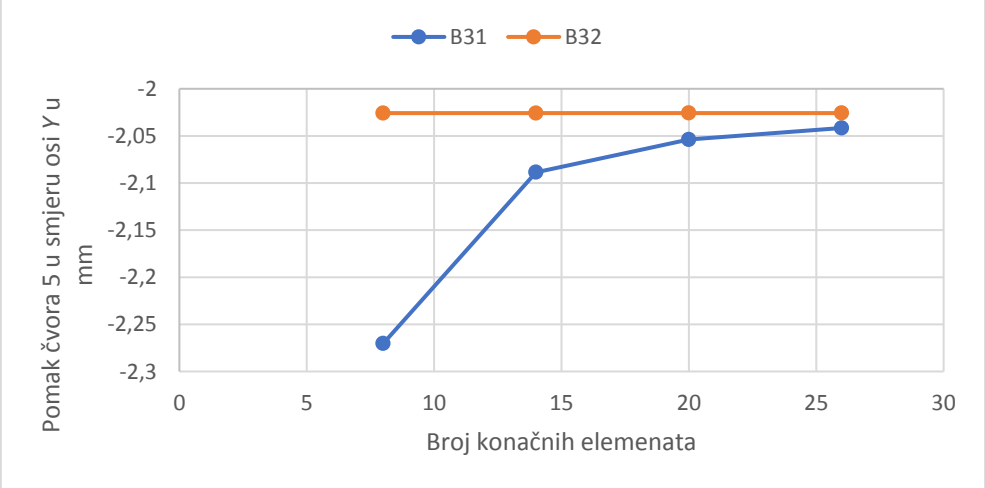
Slika 42. Konvergencija pomaka čvora 4 u smjeru osi *X* u mm



Slika 43. Konvergencija pomaka čvora 4 u smjeru osi *Y* u mm



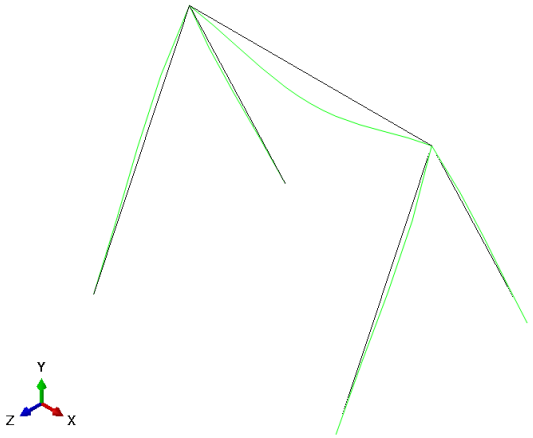
Slika 44. Konvergencija kuta zakreta čvora 4 oko osi *Z* u rad



Slika 45. Konvergencija pomaka čvora 5 u smjeru osi *Y* u mm

Prema rezultatima iz prethodnih tablica i grafovima na kojima je prikazana konvergencija pomaka, može se zaključiti kako gredni elementi B31 monotono konvergiraju točnom rješenju. Elementi B32 konvergiraju brže, tj. veoma brzo se ustali rezultat na koji povećanje broja konačnih elemenata nema utjecaj.

Usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika konstrukcije dobivenog diskretizacijom s 14 konačnih elemenata B32 prikazan je na [Slika 46].

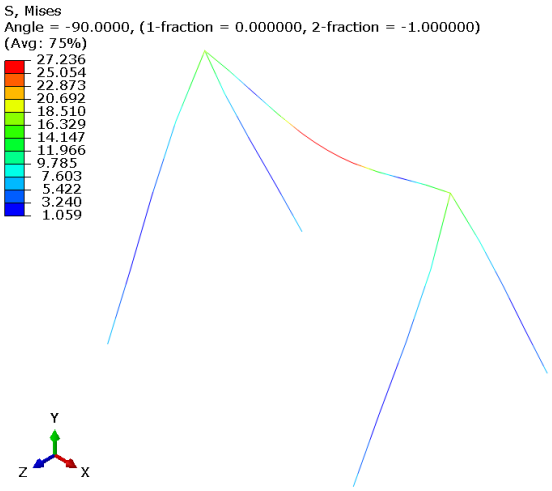


Slika 46. Prikaz deformiranog i nedeformiranog oblika

Daljnja će analiza biti provedena s rezultatima koji su dobiveni diskretizacijom konstrukcije s 14 grednih elemenata B32.

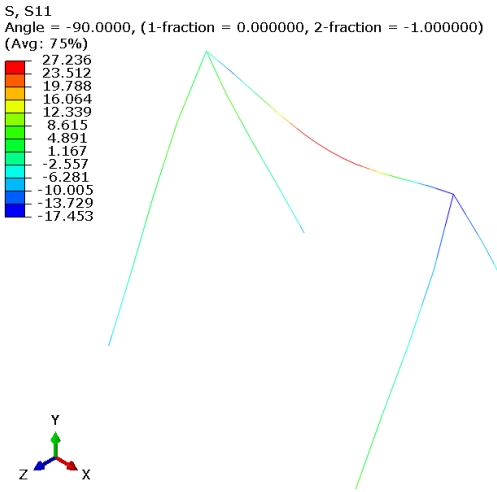
6.1.2.1. Raspodjela naprezanja

Na [Slika 47] prikazana je raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu*.



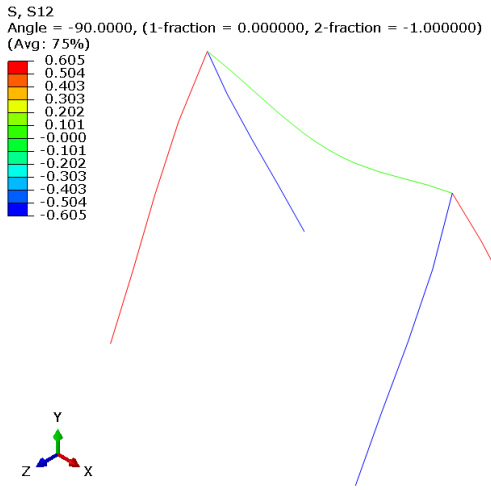
Slika 47. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu* u N/mm^2

Na [Slika 48] nalazi se raspodjela normalnih naprezanja.



Slika 48. Raspodjela normalnih naprezanja u N/mm^2

Na [Slika 49] prikazana je raspodjela tangencijalnih naprezanja.



Slika 49. Raspodjela tangencijalnih naprezanja u N/mm^2

Ekvivalentno naprezanje [Slika 47] prema teoriji najveće distorzijske energije računa se prema izrazu:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]}. \qquad \textbf{(6.23)}$$

Sa [Slika 49] može se zaključiti kako su tangencijalna naprezanja relativno malog iznosa pa nemaju prevelik utjecaj na ekvivalentno naprezanje.

Iako je normalno naprezanje dominantno, uvjet čvrstoće će se provjeriti uzimajući u obzir ekvivalentno naprezanje.

Dopušteno naprezanje za čelike od kojih se izrađuju nosive konstrukcije u rasponu je od 140 do 160 N/mm^2 [1], a maksimalno ekvivalentno naprezanje prema [Slika 47] iznosi 27,236 N/mm^2.

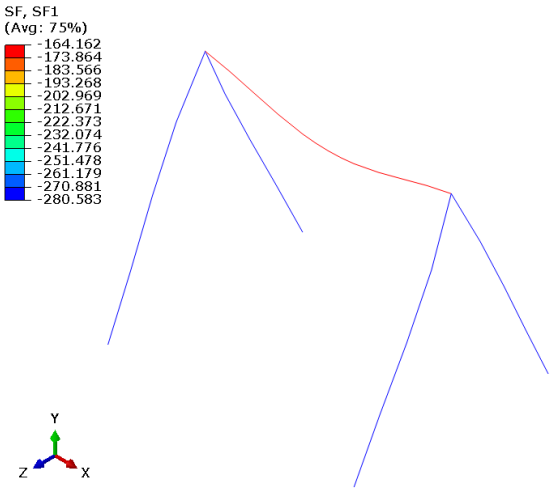
Ako se za dopuštenu vrijednost naprezanja odabere $\sigma_{\text{dop}} = 150\ \text{N/mm}^2$, slijedi izraz i iznos faktora sigurnosti:

$$S = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{\sigma_{\text{ekv}}} = 5{,}5. \qquad \textbf{(6.24)}$$

S obzirom na (6.24) može se zaključiti kako je uvjet čvrstoće višestruko zadovoljen.

6.1.2.2. Raspodjela unutarnjih sila i momenata

Na [Slika 50] prikazana je raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi.



Slika 50. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N

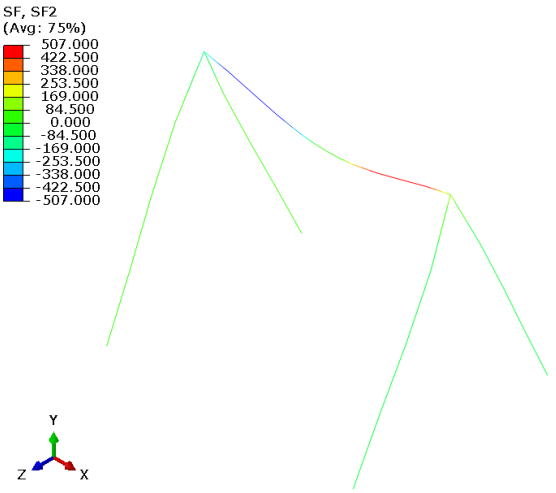
Na [Slika 50] može se primijetiti kako je raspodjela unutarnjih sila u smjeru lokalne koordinatne osi simetrična po cijeloj konstrukciji što je i očekivano obzirom da se razmatrao simetričan problem.

Maksimalan iznos uzdužnih sila može se uočiti na bočnim gredama, a grafička raspodjela po dužini bočnih greda prikazana je na [Slika 51].



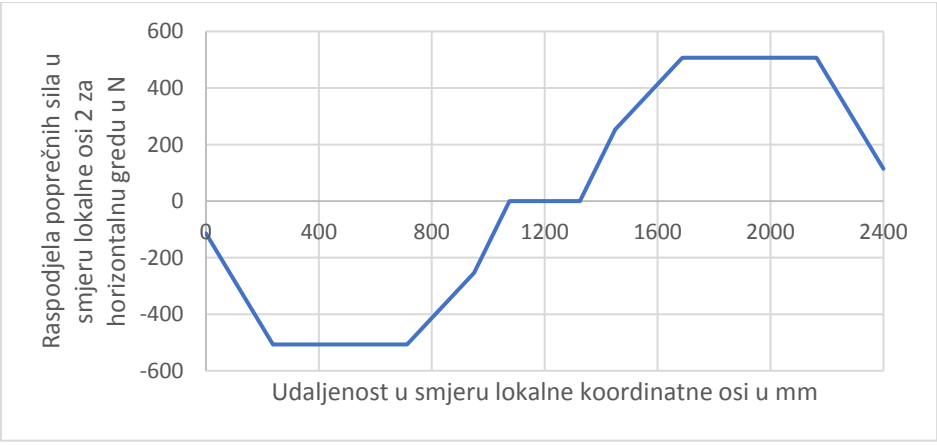
Slika 51. Raspodjela unutarnjih normalnih sila za bočne grede u N

Na [Slika 52] prikazana je raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2.



Slika 52. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 u N

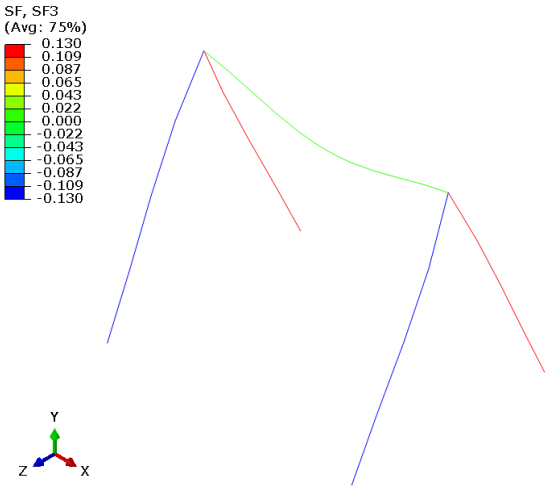
Raspodjela poprečnih sila na horizontalnoj gredi grafički je prikazana na [Slika 53].



Slika 53. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 za horizontalnu gredu u N

Na prethodnim se slikama može vidjeti kako poprečne sile najviše djeluju na horizontalnu gredu i pritom su antisimetrično raspoređene što je također očekivano kod simetričnih konstrukcija koje su simetrično opterećene.

Na [Slika 54] prikazana je raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1.

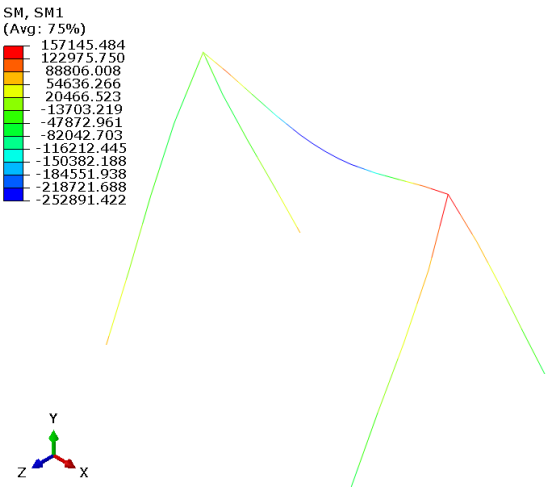


Slika 54. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 u N

Na [Slika 54] može se vidjeti kako poprečne sile u smjeru lokalne osi 1 nemaju veliki utjecaj pa se neće posebno razmatrati.

Na [Slika 55] nalazi se raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1.

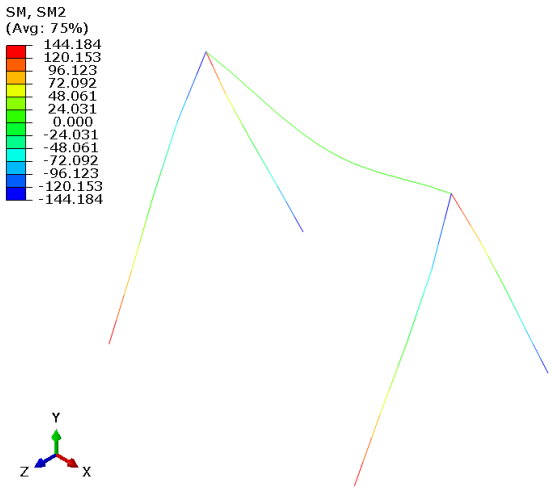
Može se primijetiti simetrična raspodjela momenata savijanja s obzirom na ravninu simetrije *XY* u globalnom koordinatnom sustavu.



Slika 55. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1 u Nmm

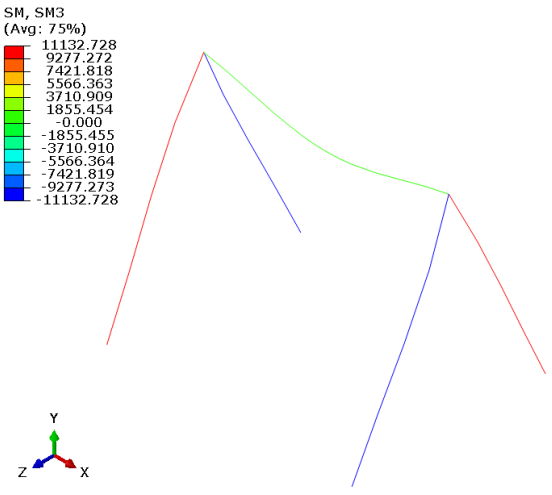
Također, može se uočiti kako je na savijanje dominantno opterećena horizontalna greda, dok su bočne grede osim na savijanje opterećene i na uvijanje zbog svojeg kosog položaja u ovako sastavljenoj konstrukciji za ovaj slučaj opterećenja.

Na [Slika 56] nalazi se raspodjela momenta savijanja oko lokalne osi 2, a na slici se može uočiti kako su momenti savijanja oko lokalne osi 2 relativno malog iznosa pa se neće posebno razmatrati.



Slika 56. Raspodjela momenta savijanja oko lokalne osi 2 u Nmm

Na [Slika 57] nalazi se raspodjela momenata uvijanja u odnosu na lokalni koordinatni sustav.



Slika 57. Raspodjela momenata uvijanja u Nmm

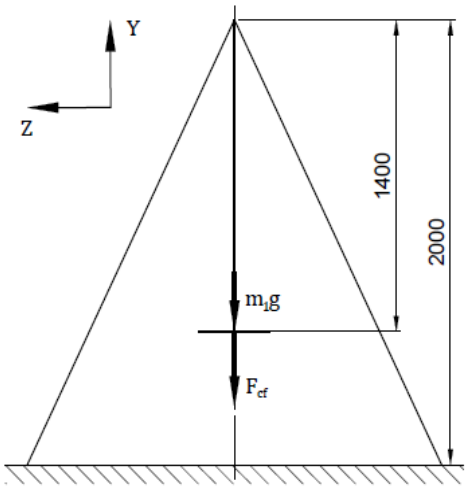
Na [Slika 57] može se uočiti kao najveći moment uvijanja iznosi svega 11 Nm, a to se moglo naslutiti i kod prikaza raspodjele posmičnih naprezanja koja su zbog svojeg malog iznosa imala jako mali utjecaj na ekvivalentno naprezanje.

6.2. Dinamičko opterećenje

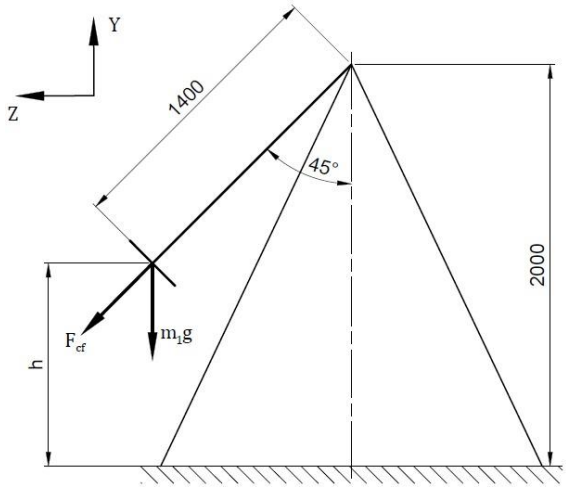
U prethodnom se primjeru dalo uočiti kako je masa lanaca poprilično mala, a faktor sigurnosti je iznimno veliki. Slobodno se mogao odabrati i lanac manje mase, a da uvjet čvrstoće i dalje bude zadovoljen. Iz toga razloga će masa lanaca biti zanemarena u nastavku analize.

Međutim, u ovom dijelu analize u obzir će se uzeti utjecaj inercije, ali će se prilikom analize koristiti kvazistatički pristup. Naime, sa stajališta ubrzanog sustava na tijelo koje se vrti zajedno s njim djeluje inercijska sila, tj. centrifugalna sila. Inercijske sile su prividne sile koje se pojavljuju u sustavima u kojima brzina nije konstantna i nisu posljedica međudjelovanja tijela.

Prilikom dinamičke analize u obzir će se uzeti dva slučaja opterećenja, tj. kada nema otklona sjedišta [Slika 58] i kada je prisutan otklon od 45° [Slika 59].



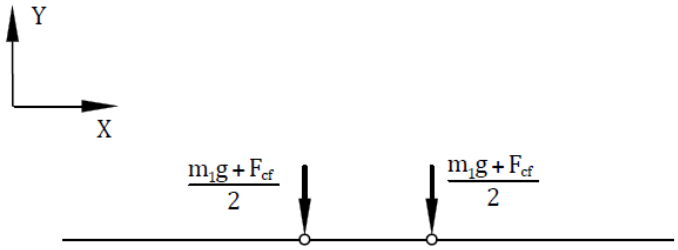
Slika 58. Dinamičko opterećenje bez otklona



Slika 59. Dinamičko opterećenje uz otklon od 45°

6.2.1. Dinamičko opterećenje bez otklona

Na [Slika 60] prikazana su opterećenja koja djeluju na horizontalnu gredu.



Slika 60. Opterećenje na horizontalnu gredu

Na [Slika 60] može se uočiti nova veličina, tj. centrifugalna sila, a postupak izračunavanja te sile opisat će se u nastavku.

Izraz za centrifugalnu silu [18]:

$$F_{\mathrm{cf}} = m\frac{v^2}{l}, \tag{6.25}$$

pri čemu je m masa sjedišta koja je prethodno označena s m_1, l je duljina lanaca, a je v obodna ili linearna brzina.

Zakon očuvanja energije kaže da je kinetička energija tijela mase m_1 u najnižoj točci jednaka njegovoj gravitacijsko potencijalnoj energiji u najvišoj točci, tj. vrijedi:

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{gp}}. \tag{6.26}$$

Ako se prethodni izraz raspiše, dobije se:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh, \tag{6.27}$$

pri čemu je h visina najviše točke.

Visina najviše točke odredit će se za položaj prema [Slika 59].

Stoga vrijedi:

$$h = 1400(1 - \cos 45°) = 410\ \mathrm{mm} = 0{,}41\ \mathrm{m}. \tag{6.28}$$

Pomoću prethodno izračunate visine i izraza (6.27) dobije se izraz za računanje brzine v, a glasi:

$$v^2 = 2gh = 8{,}2\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2, \tag{6.29}$$

pri čemu je brzina:

$$v = \sqrt{2gh} = 2{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{6.30}$$

Sada je moguće izračunati i iznos centrifugalne sile:

$$F_{\mathrm{cf}} = m_1 \frac{v^2}{l} = 100 \frac{8{,}2}{1{,}4} = 585{,}7\ \mathrm{N}. \tag{6.31}$$

Prema [Slika 58] može se zaključiti kako na napetost lanaca utječe prethodno izračunata centrifugalna sila i težina sjedišta, pa je ukupna napetost lanaca:

$$F_{\mathrm{N}} = m_1 g + F_{\mathrm{cf}} = 1000 + 585{,}7 = 1587{,}7\ \mathrm{N}, \tag{6.32}$$

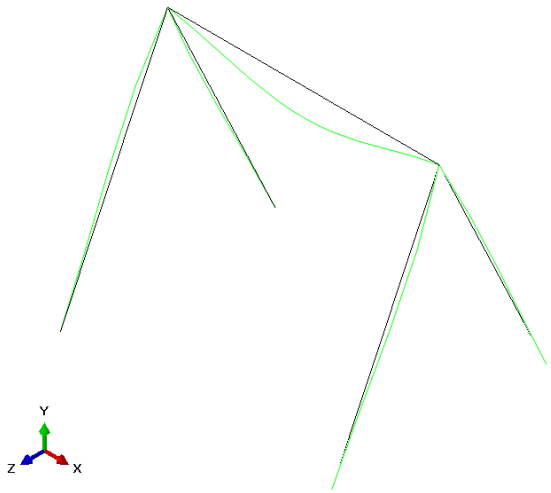
Pri čemu je napetost svakog od lanaca prema [Slika 60] jednaka:

$$\frac{m_1 g + F_{\mathrm{cf}}}{2} = 793\ \mathrm{N}. \tag{6.33}$$

Ovako izračunato opterećenje unosi se kao ulazni podatak za analizu putem programskog paketa *Abaqus*, a rezultati analize komentirat će se u nastavku i usporediti s rješenjima koja su dobivena za statičko opterećenje.

Također, da bi usporedba bila vjerodostojnija i ovdje će se konstrukcija diskretizirati s 14 grednih elemenata B32.

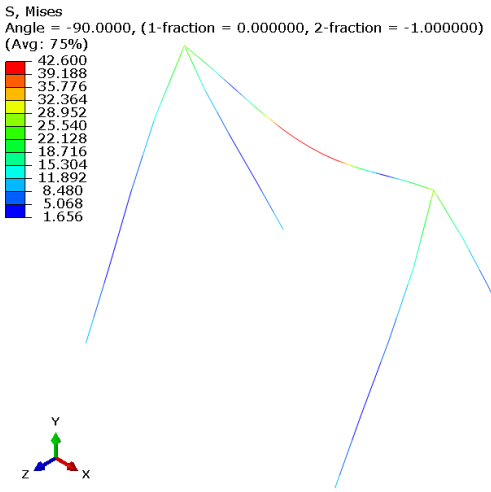
Usporedba deformiranog u odnosu na nedeformirani oblik ljuljačke za zadano opterećenje prikazan je na [Slika 61].



Slika 61. Usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika konstrukcije

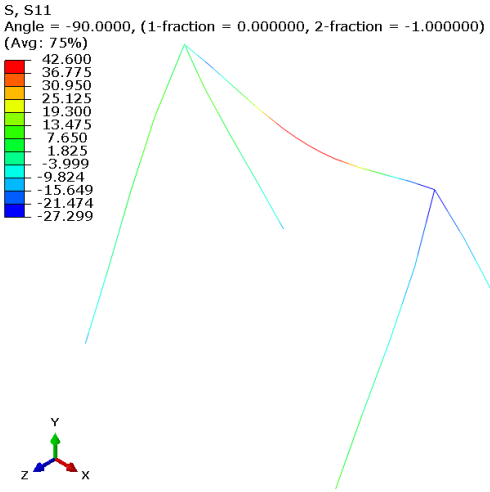
6.2.1.1. Raspodjela naprezanja

Na [Slika 62] prikazana je raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu*.



Slika 62. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu* u N/mm^2

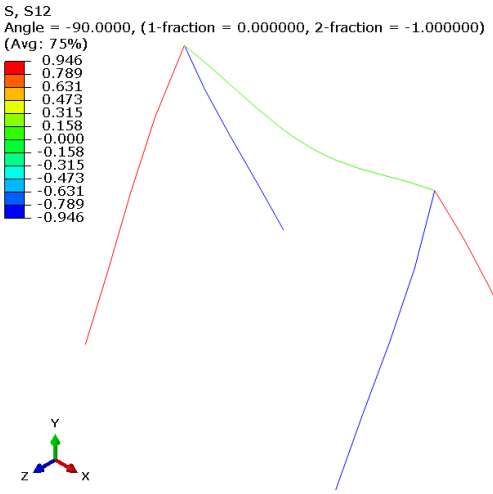
Na [Slika 63] nalazi se raspodjela normalnih naprezanja.



Slika 63. Raspodjela normalnih naprezanja u N/mm^2

Na [Slika 64] prikazana je raspodjela tangencijalnih naprezanja pri čemu se može primijetiti kako su tangencijalna naprezanja relativno malog iznosa pa nemaju prevelik utjecaj na ekvivalentno naprezanje baš kao i u prethodnom primjeru.

Iako je i ovdje normalno naprezanje dominantno, uvjet čvrstoće će se provjeriti uzimajući u obzir ekvivalentno naprezanje koje prema [Slika 62] iznosi 42,6 N/mm^2.



Slika 64. Raspodjela tangencijalnih naprezanja u N/mm^2

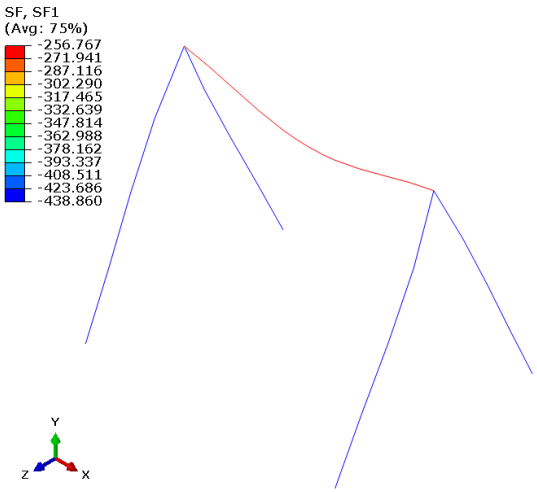
Faktor sigurnosti za ovaj slučaj opterećenja iznosi:

$$S = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{\sigma_{\text{ekv}}} = 3{,}5. \qquad \textbf{(6.34)}$$

Iako je uvjet čvrstoće zadovoljen, može se primijetit kako su naprezanja veća nego u prethodnom slučaju. Razlog tome je djelovanje centrifugalne sile koja povećava napetost lanaca pa raste ukupno opterećenje koje djeluje na horizontalnu gredu.

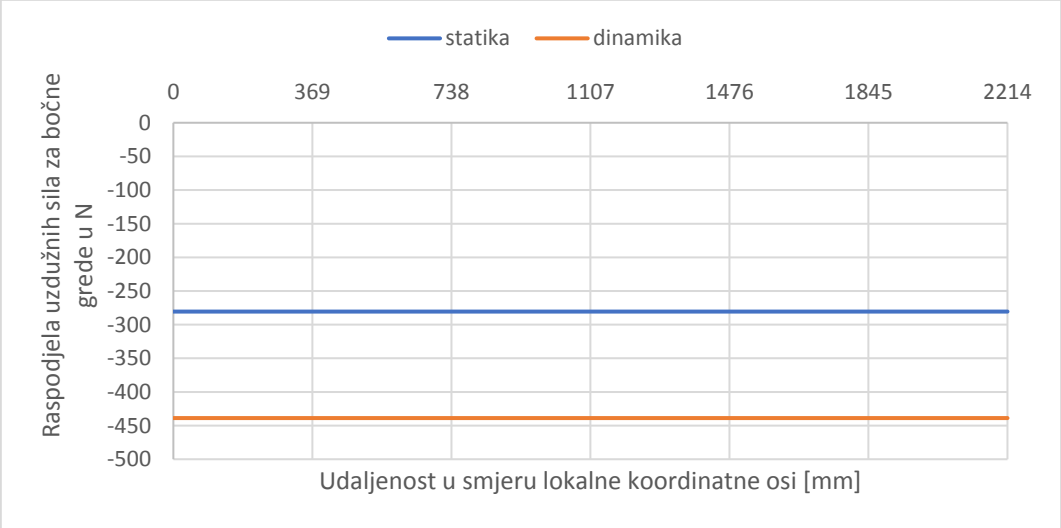
6.2.1.2. Raspodjela unutarnjih sila i momenata

Na [Slika 65] prikazana je raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi.



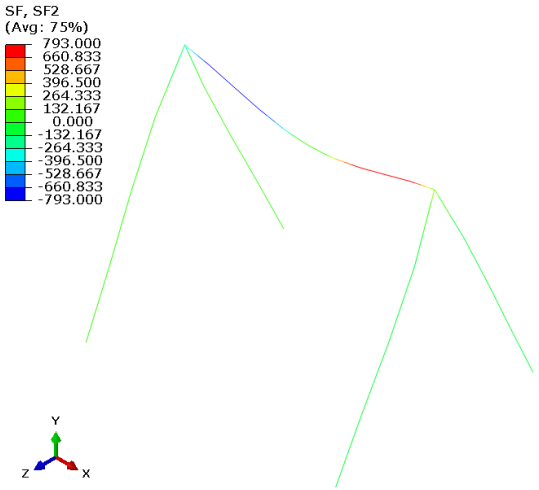
Slika 65. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N

Ako se rezultati na [Slika 65] usporede s prethodnim slučajem opterećenja za isti položaj konstrukcije, tj. sa statičkim opterećenjem [Slika 50], može se primijetiti veći iznos uzdužne sile na bočnim gredama što je jasno posljedica većeg opterećenja u odnosu na prethodni slučaj. Usporedba uzdužnih sila u bočnim gredama za slučaj statičkog i dinamičkog opterećenja bez otklona prikazana je na [Slika 66].



Slika 66. Raspodjela uzdužnih sila za bočne grede u N

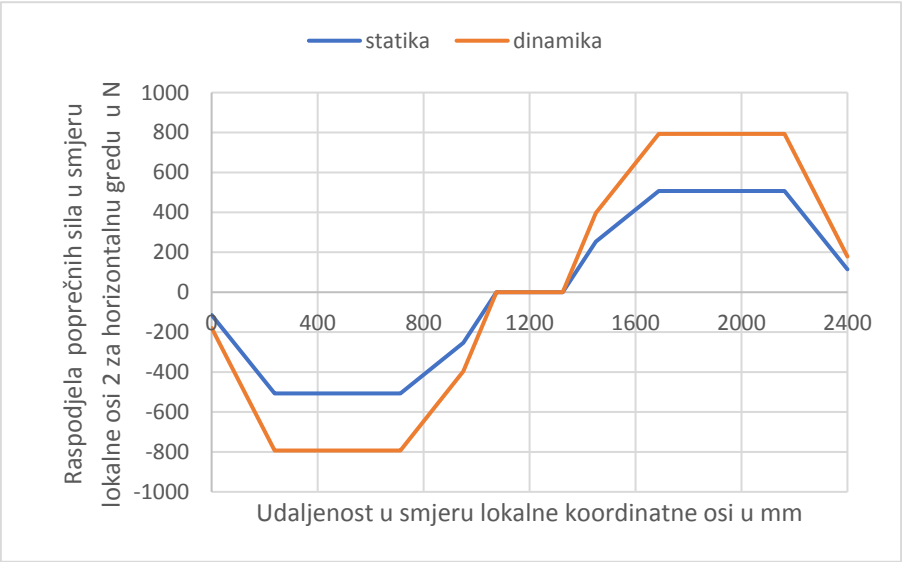
Na [Slika 67] prikazana je raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2.



Slika 67. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 u N

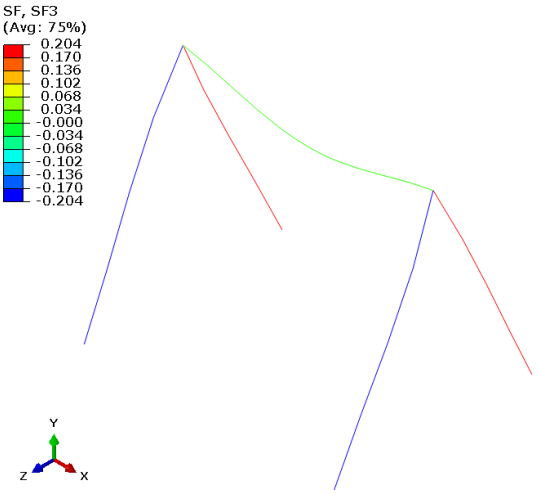
Na [Slika 67] može se vidjeti kako poprečne sile u smjeru lokalne koordinatne osi najviše djeluju na horizontalnu gredu i pritom su antisimetrično raspoređene kao i pri statičkom opterećenju za isti položaj.

Na [Slika 68] može se ponovno primijetiti porast iznosa poprečne sile na horizontalnoj gredi s obzirom na slučaj statičkog opterećenja.



Slika 68. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 za horizontalnu gredu u N

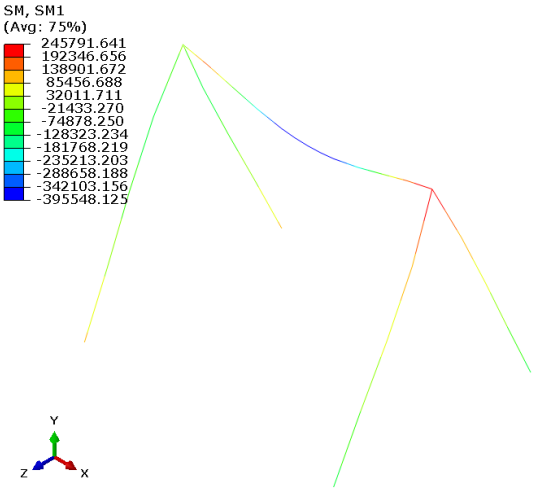
Na [Slika 69] prikazana je raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 pri čemu se može primijetiti kako poprečne sile u smjeru lokalne osi 1 baš kao i u slučaju statičkog opterećenja nemaju veliki utjecaj pa se neće posebno razmatrati.



Slika 69. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 u N

Na [Slika 70] nalazi se raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1.

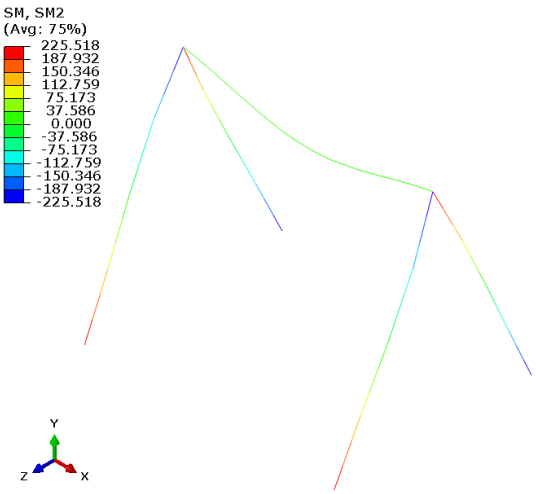
Ponovno se može primijetiti simetrična raspodjela momenata savijanja s obzirom na ravninu simetrije *XY* u globalnom koordinatnom sustavu.



Slika 70. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1 u Nmm

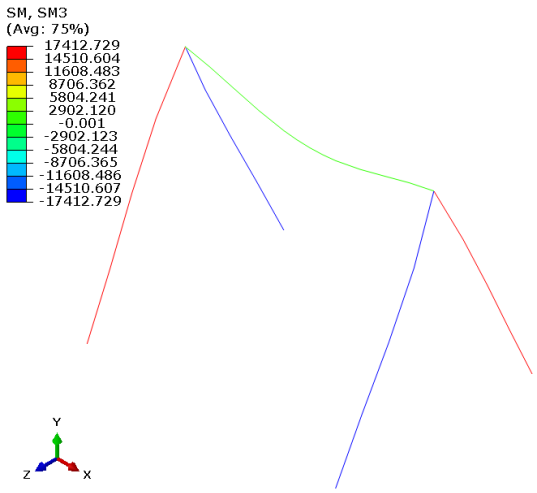
Za ovaj slučaj opterećenja može se uočiti značajno povećanje momenta savijanja što je posljedica djelovanja dodatnog opterećenja, tj. sile inercije.

Na [Slika 71] nalazi se raspodjela momenta savijanja oko lokalne osi 2 pri čemu se može primijetiti kako su unutarnji momenti oko lokalne osi 2 malo veći u odnosu na slučaj statičkog opterećenje, ali su i dalje zanemarivo malog iznosa pa se neće posebno razmatrati.



Slika 71. Raspodjela momenta savijanja oko lokalne osi 2 u Nmm

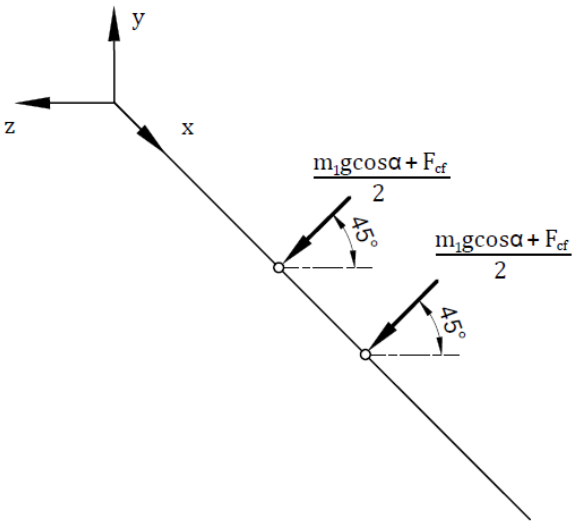
Na [Slika 72] nalazi se raspodjela momenata uvijanja u odnosu na lokalni koordinatni sustav pri čemu se može uočiti povećanje momenta uvijanja u odnosu na slučaj statičkog opterećenja. Međutim, najveći moment uvijanja iznosi 17,4 Nm, a to je i dalje zanemarivo mala vrijednost.



Slika 72. Raspodjela momenata uvijanja u Nmm

6.2.2. Dinamičko opterećenje uz otklon od 45°

Na [Slika 73] nalazi se prikaz opterećenja koja djeluju na horizontalnu gredu.



Slika 73. Opterećenje na horizontalnu gredu

Prema [Slika 59] može se zaključiti kako na napetost lanaca utječe centrifugalna sila i samo jedna komponenta težine sjedišta, pa je ukupna napetost lanaca:

$$F_{\mathrm{N}} = m_1 g \cos\alpha + F_{\mathrm{cf}} = 1000 \cos 45° + 585{,}7 = 1293 \text{ N}, \tag{6.35}$$

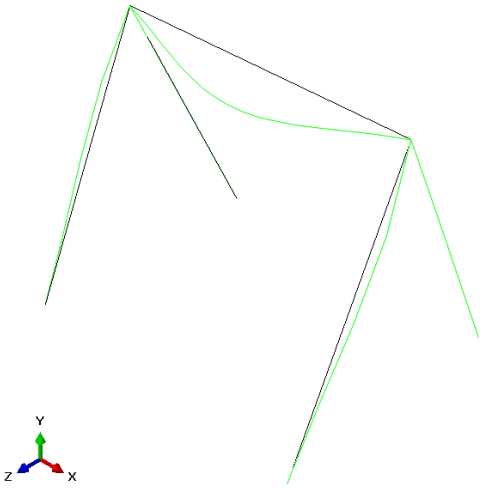
pri čemu je napetost svakog od lanaca prema [Slika 73] jednaka:

$$\frac{m_1 g \cos\alpha + F_{\mathrm{cf}}}{2} = 646{,}5 \text{ N}. \tag{6.36}$$

Ovako izračunato opterećenje unosi se kao ulazni podatak za analizu putem programskog paketa *Abaqus*, a rezultati analize komentirat će se u nastavku i usporediti s rješenjima koja su dobivena za dinamičko opterećenje bez otklona.

Također, da bi usporedba bila vjerodostojnija i ovdje će se konstrukcija diskretizirati s 14 grednih elemenata B32.

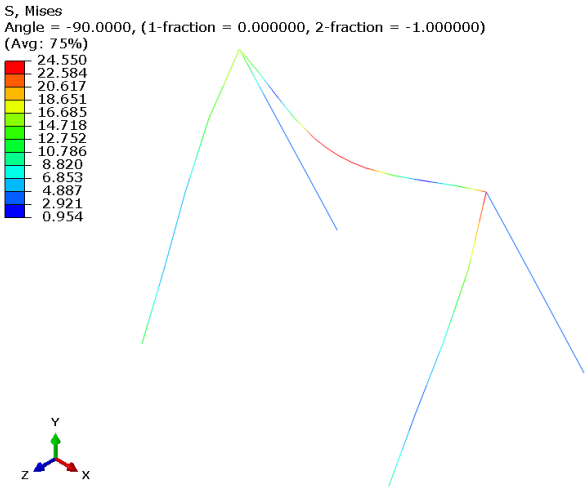
Usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika konstrukcije može se vidjeti na [Slika 74].



Slika 74. Usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika

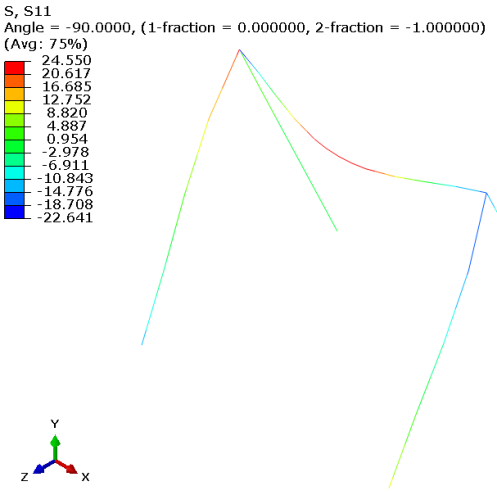
6.2.2.1. Raspodjela naprezanja

Na [Slika 75] prikazana je raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu*.



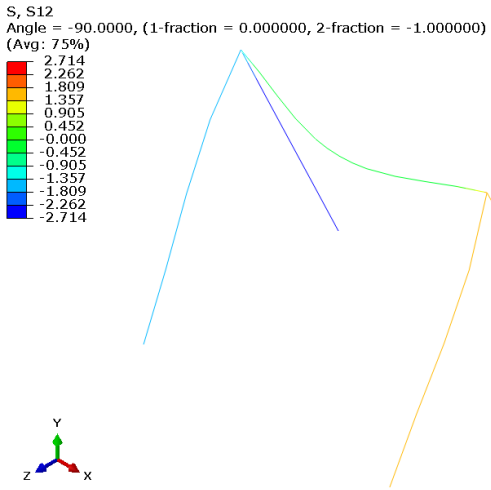
Slika 75. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema *von Misesu* u N/mm^2

Na [Slika 76] nalazi se raspodjela normalnih naprezanja.



Slika 76. Raspodjela normalnih naprezanja u N/mm^2

Na [Slika 77] prikazana je raspodjela tangencijalnih naprezanja.



Slika 77. Raspodjela tangencijalnih naprezanja u N/mm^2

Sa [Slika 77] može se zaključiti kako su tangencijalna naprezanja nešto većeg iznosa u odnosu na prethodne slučajeve opterećenja, ali su i dalje relativno malog iznosa pa nemaju prevelik utjecaj na ekvivalentno naprezanje.

Uvjet čvrstoće provjerit će se uzimajući u obzir ekvivalentno naprezanje koje prema [Slika 75] iznosi 24,55 N/mm^2.

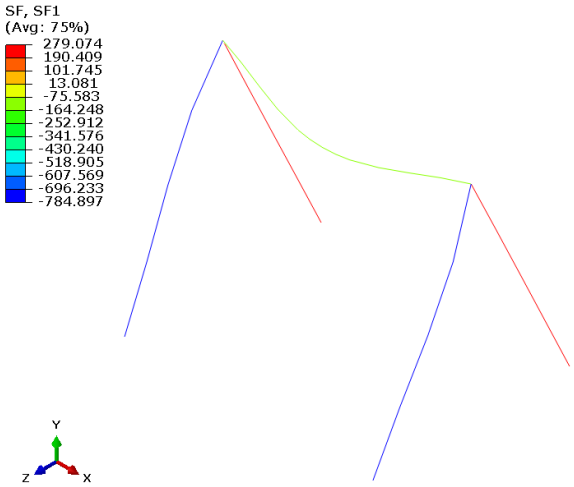
Faktor sigurnosti za ovaj slučaj opterećenja iznosi:

$$S = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{\sigma_{\text{ekv}}} = 6{,}1. \qquad \textbf{(6.37)}$$

Obzirom na faktor sigurnosti može se zaključiti kako je prema kriteriju čvrstoće ovo najpovoljniji slučaj opterećenja.

6.2.2.2. Raspodjela unutarnjih sila i momenata

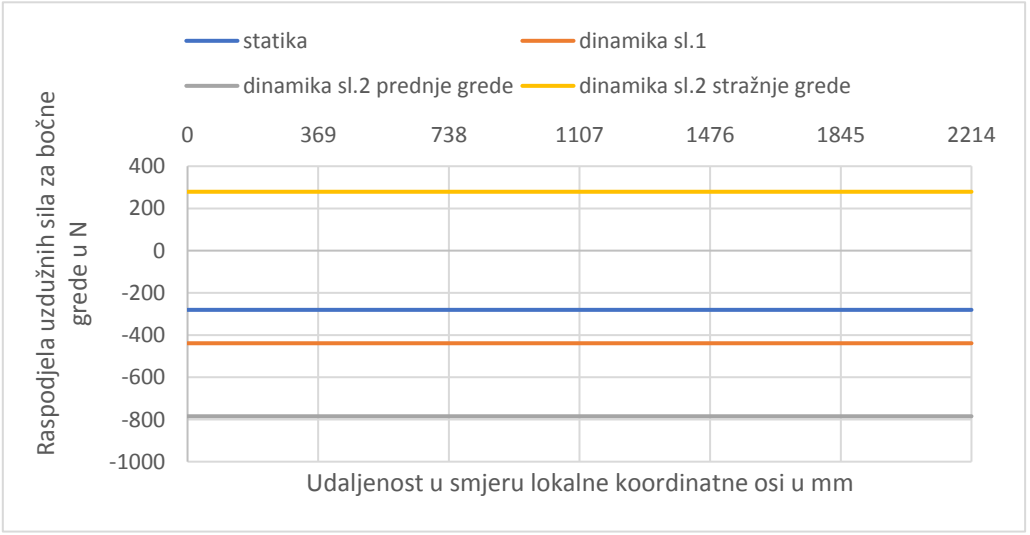
Na [Slika 78] prikazana je raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi.



Slika 78. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N

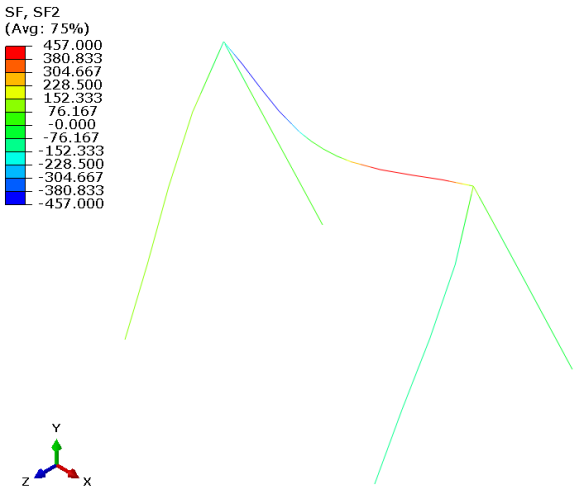
Ako rezultate na [Slika 78] usporedimo s prethodnim slučajem opterećenja konstrukcije, tj. s dinamičkim opterećenjem bez otklona [Slika 65], može se primijetiti veći iznos uzdužnih sila na prednjim gredama, dok su stražnje grede za ovaj slučaj opterećene vlačno.

Usporedba uzdužnih sila u bočnim gredama za sva tri slučaja opterećenja prikazana je na [Slika 78].



Slika 79. Raspodjela uzdužnih sila u smjeru lokalne koordinatne osi u N

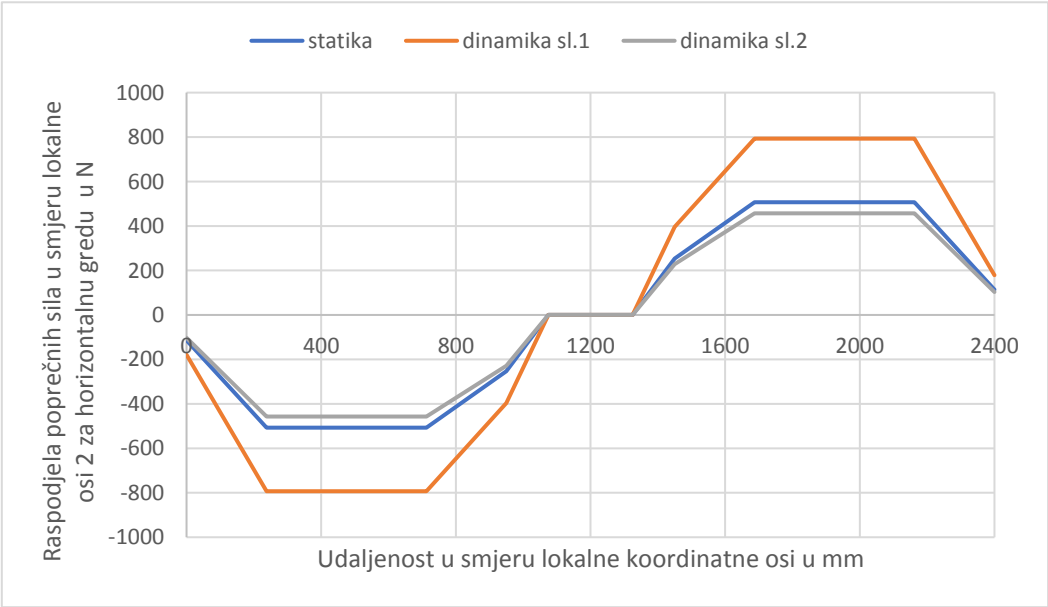
Na [Slika 80] prikazana je raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2.



Slika 80. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 u N

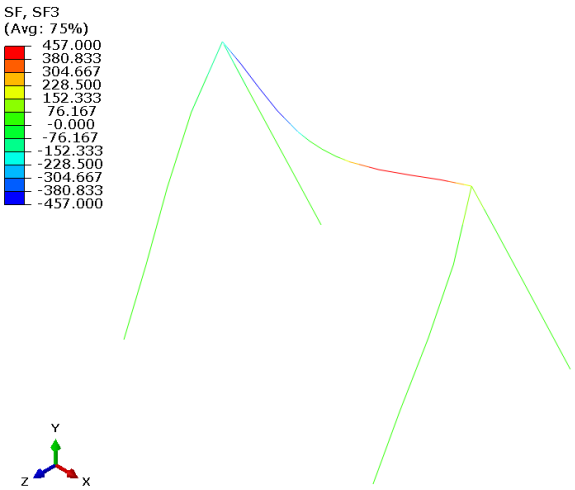
Na [Slika 80] može se vidjeti kako poprečne sile u smjeru lokalne osi 2 najviše djeluju na horizontalnu gredu i pritom su antisimetrično raspoređene kao i pri prethodnim slučajevima opterećenja.

Na [Slika 81] prikazana je raspodjela poprečne sile na horizontalnoj gredi s obzirom na sva tri slučaja opterećenja. Može se primijetiti kako je iznos poprečne sile najmanji za ovaj slučaj opterećenja.



Slika 81. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 2 za horizontalnu gredu u N

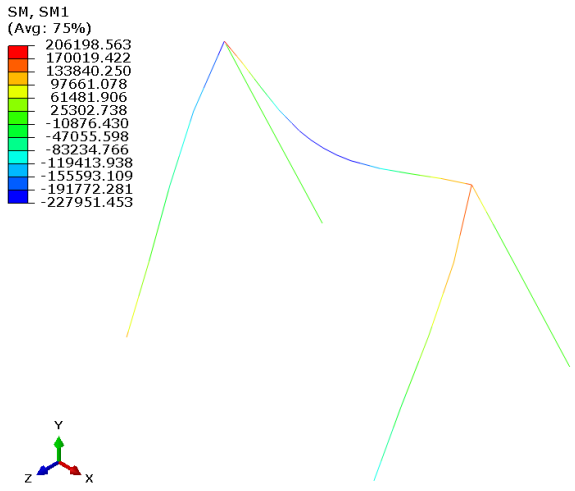
Na [Slika 82] prikazana je raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1.



Slika 82. Raspodjela poprečnih sila u smjeru lokalne osi 1 u N

Po prvi puta i poprečna sila u smjeru lokalne osi 1 ima značajan iznos. Razlog je što je sjedište otklonjeno od početnog položaja za 45° pa se uzdužne sile koje uzrokuju napetost lanaca nalaze pod kutom pa se na horizontalnoj gredi javlja i horizontalna komponenta opterećenja.

Na [Slika 83] nalazi se raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1.

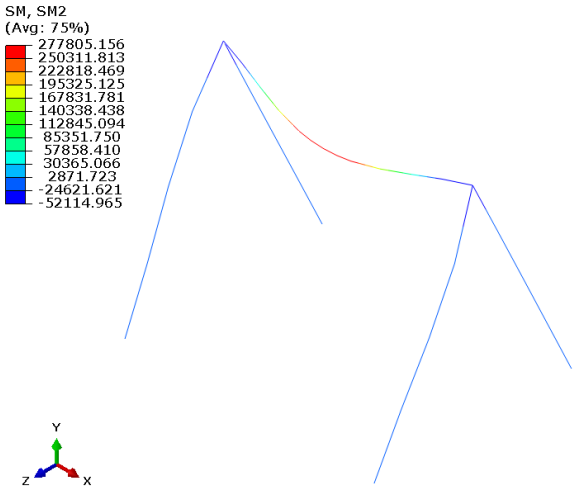


Slika 83. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 1 u Nmm

Raspodjela momenata savijanja s obzirom na ravninu simetrije *XY* u globalnom koordinatnom sustavu više nije simetrična.

Može se uočiti kako su iznosi momenata savijanja za ovaj slučaj dinamičkog opterećenja manji nego za prethodni slučaj. Isto tako može se primijetiti kako se prednje grede više opterećene na savijanje u odnosu na stražnje.

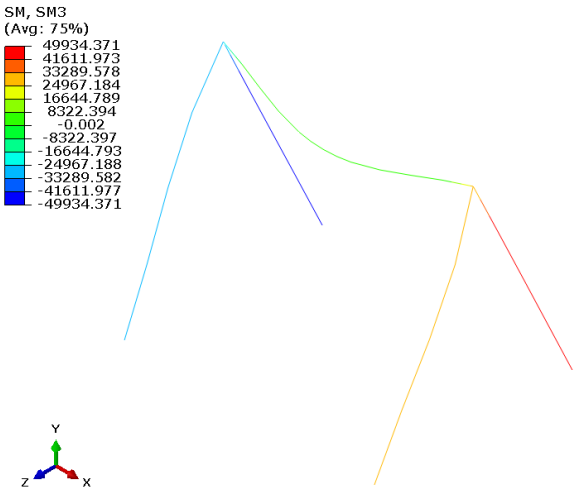
Na [Slika 84] nalazi se raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 2.



Slika 84. Raspodjela momenata savijanja oko lokalne osi 2 u Nmm

Po prvi puta momenti savijanja oko lokalne osi 2 dobivaju značajnije vrijednosti. Razlog je što opterećenje na gornjoj gredi, osim komponente u vertikalnom smjeru ima i komponentu u horizontalnom smjeru koja utječe na savijanje oko lokalne osi 2.

Na [Slika 85] nalazi se raspodjela momenata uvijanja u odnosu na lokalni koordinatni sustav.



Slika 85. Raspodjela momenata uvijanja u Nmm

Na [Slika 85] može se uočiti povećanje momenta uvijanja u odnosu na slučaj statičkog i dinamičkog opterećenja u položaju bez otklona. Iako su i za ovaj slučaj momenti uvijanja malog iznosa u odnosu na momente savijanja, više nisu zanemarivog iznosa, a najveći moment uvijanja u iznosu od 50 Nm može se iščitati za stražnje grede.

Nadalje, obzirom na taj iznos i prethodno izračunati faktor sigurnosti jasno je da uvjet čvrstoće nije narušen i da konstrukcija može podnijeti i veća opterećenja.

7. ZAKLJUČAK

U radu je provedena numerička analiza metalne konstrukcije ljuljačke. Zbog lakše i brže provedbe proračuna izostavljena su pojedina opterećenja kojima je ova konstrukcija inače izložena, a nemaju preveliki utjecaj na konačne rezultate.

Prilikom numeričke analize koristio se programski paket *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Kako bi se pokazala ispravnost programskog paketa, izvršena je verifikacija na jednostavnom primjeru prostorne gredne konstrukcije.

Analiza je prvotno provedena za slučaj statičkog opterećenja prilikom čega se izvršila usporedba analitičkih rezultata dobivenih matričnom metodom pomaka uz pomoć programskog paketa *Matlab* i numeričkih rezultata dobivenih pomoću programskog paketa *Abaqus*. Usporedbom dobivenih rezultata uočena je inženjerski prihvatljiva relativna razlika istih, na temelju čega se donio zaključak o ispravnosti provedene analize. Također, na temelju te usporedbe odabran je gredni konačni element s kojim se provodila daljnja numerička analiza.

Za numeričku analizu je odabran gredni element B32 za kojeg je karakteristična kvadratna interpolacija. Radi se o takozvanoj *Timoshenkovoj* (posmično fleksibilnoj) gredi koja opisuje i kutne deformacije.

Nadalje, analiza se provela i za slučaj dinamičkog opterećenja, tj. za slučaj u kojem je djelovanje inercijske sile uzeto u obzir, ali uz primjenu kvazistatičkog pristupa. Takav slučaj opterećenja analizirao se za dva položaja, odnosno kada se prilikom njihanja sjedište, koje je lancima vezano za konstrukciju ljuljačke, nalazi u položaju bez otklona, tj. u vertikalnom položaju i u položaju s otklonom od 45° od vertikale.

Nakon izvršene analize može se zaključiti kako je konstrukcija predimenzionirana. Naime, maksimalno ekvivalentno naprezanje javilo se u slučaju dinamičkog opterećenja u položaju bez otklona s iznosom od 42,6 N/mm^2. Za taj slučaj opterećenja faktor sigurnosti je iznosio 3,5, a za preostala dva provjeravana slučaja znatno više što ukazuje na višestruko zadovoljeni uvjet čvrstoće.

Također, analiza se provodila s pretpostavljenom masom od 100 kg, tj. opterećenjem od 1000 N što je u stvarnosti puno veće opterećenje od onog kojem je konstrukcija izložena. Da se u obzir uzelo „stvarno“ opterećenje, uvjet čvrstoće bi nesumnjivo bio zadovoljen s iznimno velikim faktorom sigurnosti.

Kao razlog predimenzioniranosti može se navesti slobodna procjena gabarita konstrukcije kao i poprečnog presjeka profila cijevi.

Za eventualnu rekonstrukciju predlože se odabir greda s manjom površinom poprečnog presjeka i/ili greda manjih aksijalnih dimenzija ako se konstrukcija izvodi samo za korištenje jednoj osobi, tj. samo s jednim sjedištem ili se može na ovakvu konstrukciju dodati još jedno sjedište.

Međutim, predimenzioniranost u slučaju ovakve konstrukcije nije nikako naodmet obzirom da se radi o sustavu koji je velikim dijelom u upotrebi od strane djece za čiju se sigurnost vrijedi pobrinuti.

LITERATURA

[1] http://31.45.242.218/HZN/Todb.nsf/wFrameset2?OpenFrameSet&Frame=Down&Src=%2FHZN%2FTodb.nsf%2Fcd07510acb630f47c1256d2c006ec863%2Fedfea588cf7a86fec12572b90027a0a3%3FOpenDocument%26AutoFramed; dostupno 8.1.2018.

[2] https://www.flickr.com/photos/45777493@N06/4394579596/sizes/l; dostupno 8.1.2018.

[3] https://kids.britannica.com/students/assembly/view/142041; dostupno 8.1.2018.

[4] http://stiri.tvr.ro/cel-mai-vizitat-monument-din-lume-turnul-eiffel-implineste-125-de-ani_42357_foto.html#view; dostupno 8.1.2018.

[5] https://hr.wikipedia.org/wiki/Konstrukcijski_%C4%8Delik; dostupno 8.1.2018.

[6] https://bib.irb.hr/datoteka/899781.PK_spojeno_v4.pdf; dostupno 8.1.2018.

[7] Pustaić, P.; Tonković, Z.; Wolf, H.: Mehanika deformabilnih tijela, FSB, Zagreb 2014.

[8] http://www.pegazet.ag.rs/arhiva/prilozi/download/resetkasti_nosaci.pdf

[9] https://www.webgradnja.hr/katalog/16248/rotirajuca-korpa-tip-8123/; dostupno 12.1.2018.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Swing_(seat); dostupno 12.1.2018.

[11] https://www.linkedin.com/pulse/nominal-width-pipelines-comparison-dn-inch-william-; dostupno 15.1.2018.

[12] http://www.wikiwand.com/hr/Cijev; dostupno 15.1.2018.

[13] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb, 1970.

[14] Sorić, J.; Metoda konačnih elemenata, Tehnička knjiga Zagreb, 2004.

[15] Dassault Systèmes Simulia, *ABAQUS* 6.13; https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/

[16] http://abaqus.software.polimi.it/v6.14/books/usb/default.htm?startat=pt06ch28s01alm01.html; dostupno 5.2.2018

[17] Mathworks, *MATLAB* R2015a; https://www.mathworks.com/products/matlab.html

[18] https://hr.wikipedia.org/wiki/Centrifugalna_i_centripetalna_sila; dostupno 17.2.2018.

PRILOZI

I. CD-R disc