

Analiza vrtložnog strujanja u okruglom zdencu

Čajić, Petar

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:454132>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-21**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Petar Čajić

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.

Student:

Petar Čajić

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se prijateljima i kolegama na podršci tokom studija ali najveće zasluge pripadaju roditeljima koji nažalost više nisu s nama. Isto tako, koristim priliku zahvaliti se mentoru prof. dr. sc. Zdravku Viragu koji je svojim znanjem i savjetima uvelike pomogao pri izradi ovoga rada. Svakako moram spomenuti i doc. dr. sc. Severina Krizmanića čiji su savjeti bili od velike pomoći.

Petar Čajić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Petar Čajić**

Mat. br.: 0035194628

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza vrtložnog strujanja u okruglom zdencu**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Vortex flow analysis in a round well**

Opis zadatka:

Parkovi se ukrašavaju zdencima, u kojima se može ostvariti cirkulacijsko strujanje vode. Zdenac s ravnim dnom ima oblik valjka promjera D , u kojem se nalazi voda do visine H . Voda se dovodi u zdenac protokom Q pomoću mlaznica smještenim ispod slobodne površine, po obodu zdenca, a odvodi kroz otvor u središtu dna zdenca. Visina h toga otvora, mjereno od dna, definira visinu H vode u zdencu. Radi ljepote efekata na slobodnoj površini vode, mlaznice se zakreću u tangencijalnom smjeru (vektor brzine mlaza čini kut α u odnosu na radijalni smjer), tako da se ostvari vrtložno strujanje, a u mlaz je moguće dodati i malo zraka koji će doprinijeti vizualizaciji toga strujanja. Zadatak je simulirati stacionarno vrtložno strujanje u zdencu uz pretpostavku osnosimetričnog strujanja, u kojem se protok iz mlaznica raspoređuje kontinuirano po obodu zdenca.

U radu je potrebno:

- 1) Kratko opisati korišteni matematički model i numerički postupak u simulaciji strujanja vode u zdencu, te pripadajuće rubne uvjete.
- 2) Iz dobivenog polja brzine, njegovom integracijom, odrediti izgled trajektorija čestica fluida od izlaza iz mlaznice do izlaza iz zdenca.
- 3) Grafički prikazati utjecaj Q i α na razliku kuta (iz cilindarskog koordinatnog sustava) koji prevali čestica fluida pri slobodnoj površini od izlaza iz mlaznice do izlaza iz zdenca.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
30. studenog 2016.

Rok predaje rada:
1. rok: 24. veljače 2017.
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2017.
3. rok: 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 27.2. - 03.03. 2017.
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2017.
3. rok: 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr.sc. Zdravko Virag

Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA	VI
POPIS OZNAKA	VII
SAŽETAK	VIII
SUMMARY	IX
1. UVOD	1
2. TEORIJSKE OSNOVE	2
2.1. Osnovne jednačbe dinamike fluida	2
2.1.1. Zakon očuvanja mase	3
2.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja	3
2.1.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja	3
2.1.4. Zakon očuvanja energije	3
2.1.5. Drugi zakon termodinamike	3
2.1.6. Integralni oblik zakona očuvanja fizikalnog svojstva za proizvoljni gibajući volumen	4
2.2. Turbulencija	4
2.2.1. Vremensko osrednjavanje transportnih jednačbi	5
2.2.2. Model turbulencije	6
2.2.2.1. $k-\omega$ SST model turbulencije	6
3. NUMERIČKO RJEŠAVANJE	8
3.1. Metoda konačnih volumena	9
3.2. Numeričke sheme	12
3.2.1. Uzvodna shema	12
3.2.2. Linearna uzvodna shema	12
4. NUMERIČKA SIMULACIJA ZADANOG STRUJANJA	14
4.1. Primjena rješavača <i>interFoam</i>	14
4.1.1. Geometrijski model	14
4.1.2. Mreža konačnih volumena	15
4.1.3. Rubni uvjeti	17
4.1.3.1. Određivanje parametara modela turbulencije	17
4.1.4. Postavke proračuna	19
4.1.5. Rezultati	19

4.2.	Primjena rješavača <i>simpleFoam</i>	20
4.2.1.	Geometrijski model	20
4.2.2.	Mreža konačnih volumena	21
4.2.3.	Rubni uvjeti	21
4.2.4.	Postavke proračuna	21
4.2.5.	Rezultati	23
4.3.	Usporedba rezultata dvaju rješavača	23
5.	ANALIZA REZULTATA	26
5.1.	Trajektorija čestice fluida	26
5.2.	Grafički prikaz ovisnosti puta čestice fluida na slobodnoj površini	33
5.3.	Analiza utjecaja protoka Q i kuta α na opisani kut čestice fluida na slobodnoj površini	34
6.	ZAKLJUČAK	38
	LITERATURA	39
	PRILOZI	40

POPIS SLIKA

Slika 2.1	Primjer turbulentnog strujanja	4
Slika 3.1	Tijek numeričkog rješavanja [1]	8
Slika 3.2	Dio proračunske domene [1].	10
Slika 3.3	Dio diskretiziranog prostora [1]	12
Slika 3.4	Nefizikalne oscilacije rješenja u blizini diskontinuiteta [1]	13
Slika 4.1	Geometrijski model zdenca.	14
Slika 4.2	Geometrijski model za rješavanje zadanog strujanja rješavačem <i>interFoam</i>	15
Slika 4.3	Mreža konačnih volumena za rješavanje zadanog strujanja rješavačem <i>interFoam</i> .	16
Slika 4.4	Prikaz odnosa veličina konačnih volumena u pretpostavljenoj zoni slobodne površine.	16
Slika 4.5	Polje α dobiveno rješavačem <i>interFoam</i>	19
Slika 4.6	Polje brzine dobiveno rješavačem <i>interFoam</i>	20
Slika 4.7	Geometrijski model za rješavanje zadanog strujanja rješavačem <i>simpleFoam</i>	20
Slika 4.8	Mreža konačnih volumena za rješavanje zadanog strujanja rješavačem <i>simpleFoam</i>	21
Slika 4.9	Polje brzine dobiveno rješavačem <i>simpleFoam</i>	23
Slika 4.10	Usporedba radijalnih komponenti brzina po duljini	24
Slika 4.11	Usporedba tangencijalnih komponenti brzina po duljini	24
Slika 4.12	Usporedba radijalnih komponenti brzina po visini	25
Slika 4.13	Usporedba tangencijalnih komponenti brzina po visini	25
Slika 5.1	Trajektorija čestice fluida odabrane na dnu ulaznog presjeka.	26
Slika 5.2	Trajektorija čestice fluida odabrane na vrhu ulaznog presjeka	27
Slika 5.3	Recirkulacijska zona strujanja	27
Slika 5.4	Recirkulacijska zona strujanja nad poljem brzine.	28
Slika 5.5	Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 12,096$ l/s	29
(a)	Kut $\alpha = 78,69^\circ$	29
(b)	Kut $\alpha = 75,963^\circ$	29
(c)	Kut $\alpha = 71,562^\circ$	29
(d)	Kut $\alpha = 63,432^\circ$	29
Slika 5.6	Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 10,364$ l/s	30
(a)	Kut $\alpha = 78,69^\circ$	30
(b)	Kut $\alpha = 75,963^\circ$	30
(c)	Kut $\alpha = 71,562^\circ$	30
(d)	Kut $\alpha = 63,432^\circ$	30
Slika 5.7	Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 8,64$ l/s	31
(a)	Kut $\alpha = 78,69^\circ$	31

(b) Kut $\alpha = 75,963^\circ$	31
(c) Kut $\alpha = 71,562^\circ$	31
(d) Kut $\alpha = 63,432^\circ$	31
Slika 5.8 Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 6,048$ l/s	32
(a) Kut $\alpha = 78,69^\circ$	32
(b) Kut $\alpha = 75,963^\circ$	32
(c) Kut $\alpha = 71,562^\circ$	32
(d) Kut $\alpha = 63,432^\circ$	32
Slika 5.9 Ovisnost opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini o kutu α i protoku Q	33
Slika 5.10 Ovisnost opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini o protoku Q i kutu α	34
Slika 5.11 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 6,048$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$	35
(a) Radijalna komponenta brzine	35
(b) Tangencijalna komponenta brzine	35
Slika 5.12 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 6,048$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$	35
(a) Radijalna komponenta brzine	35
(b) Tangencijalna komponenta brzine	35
Slika 5.13 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 8,64$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$	35
(a) Radijalna komponenta brzine	35
(b) Tangencijalna komponenta brzine	35
Slika 5.14 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 8,64$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$	36
(a) Radijalna komponenta brzine	36
(b) Tangencijalna komponenta brzine	36
Slika 5.15 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 10,364$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$	36
(a) Radijalna komponenta brzine	36
(b) Tangencijalna komponenta brzine	36
Slika 5.16 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 10,364$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$	36
(a) Radijalna komponenta brzine	36
(b) Tangencijalna komponenta brzine	36
Slika 5.17 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 12,096$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$	37
(a) Radijalna komponenta brzine	37

(b) Tangencijalna komponenta brzine	37
Slika 5.18 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 12,096$ l/s te	
$\alpha = 78,69^\circ$	37
(a) Radijalna komponenta brzine	37
(b) Tangencijalna komponenta brzine	37

POPIS TABLICA

Tablica 1	Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač <i>interFoam</i>	18
Tablica 2	Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač <i>interFoam</i>	18
Tablica 3	Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač <i>simpleFoam</i>	22
Tablica 4	Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač <i>simpleFoam</i>	22
Tablica 5	Ovisnost opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini o protoku Q i kutu α	33

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	$[m^2]$	površina konačnog volumena
c_v	$[J/kg K]$	specifični toplinski kapacitet
D	$[kg/s]$	jačina difuzije
F	$[kg/s]$	jačina konvekcije
f_i	$[N/kg]$	komponente vektora specifične masene sile
J_j	$[-]$	vektor fluksa fizikalne veličine
l_t	$[m]$	duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju
\bar{k}	$[J/kg]$	kinetička energija turbulencije
p	$[N/m^2]$	tlak
\bar{p}	$[N/m^2]$	statistički osrednjeno polje tlaka
p'	$[N/m^2]$	pulzirajući dio polja tlaka
Re	$[-]$	Reynoldsov broj
t	$[s]$	vrijeme
v_i	$[m/s]$	komponente vektora brzine strujanja
\bar{v}_i	$[m/s]$	osrednjeni dio vektora brzine strujanja
v'_i	$[m/s]$	pulzirajući dio polja vektora brzine strujanja
v_n	$[m/s]$	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale
v_t	$[m/s]$	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
α	$[-]$	kut, indikatorska funkcija
δ_{ji}	$[-]$	Kroneckerov simbol
Σ_{ji}	$[N/m^2]$	tenzor viskoznih naprezanja
φ	$[-]$	polje fizikalne veličine
Δn	$[m]$	udaljenost između čvorova konačnog volumena
Γ	$[kg/ms]$	koeficijent difuzije
Γ_t	$[kg/ms]$	koeficijent turbulentne difuzije
μ	$[Pa s]$	dinamička viskoznost
μ_t	$[kg/ms]$	turbulentna viskoznost
ρ	$[kg/m^3]$	gustoća
ν	$[m^2/s]$	kinematička viskoznost
ω	$[s^{-1}]$	specifična brzina disipacije

SAŽETAK

U ovom radu analizirano je vrtložno strujanje u zdenca oblika valjka u koji se ubrizgava voda kroz horizontalno postavljene mlaznice. Cilj ovog rada je odrediti utjecaj kuta α kojeg zatvara svaka mlaznica u odnosu na radijalni smjer i protoka Q na kut kojeg čestica fluida opisuje na slobodnoj površini. Potrebno je i iz proračunom dobivenog polja brzine, njegovom integracijom, odrediti trajektoriju čestice fluida od izlaza iz mlaznice do izlaza iz zdenca.

Proračunava se vrtložno strujanje uz pretpostavku osnosimetričnog strujanja gdje je protok iz mlaznica kontinuirano raspoređen po ulaznom presjeku (obodu). Geometrijski modeli su izrađeni u programskom paketu *Salome*, izrada mreža konačnih volumena učinjena je u programskom paketu *cfMesh*, a proračuni su izvršeni pomoću programskog paketa *OpenFOAM*.

U radu je prikazan i proračun proveden nestacionarnim rješavačem *interFoam* programskog paketa *OpenFOAM* kako bi se modelirao položaj slobodne površine na temelju koje je određena proračunska domena za stacionarni rješavač istog programskog paketa *simpleFoam*. Ujedno su rezultati oba proračuna analizirana te se za određivanje navedenih ciljeva rada opravdano koristi rješavač *simpleFoam*.

Analizom zadanog strujanja utvrđeno je da kut koji opisuje čestica fluida na slobodnoj površini raste s porastom protoka Q i kuta α zbog povećanja tangencijalne komponente brzine u odnosu na radijalnu komponentu.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida; metoda konačnih volumena; vrtložno strujanje; slobodna površina

SUMMARY

In this thesis vortex flow in a round well is analyzed where water is injected through horizontally placed nozzles. The aim of this thesis is to determine the influence of the relative angle between each nozzle and radial direction α and the fluid flow Q on a angle described by a fluid particle on a free surface. Another goal of this thesis is to determine the trajectory of a fluid particle from the exit of a nozzle to the exit of a well by integrating calculated velocity field.

Vortex flow under the assumption of an axi-symmetric flow is calculated where the flow from the nozzles is continuously distributed on an inlet surface. Geometry models are created in the software package *Salome*, finite volume meshes are generated in the software package *cfMesh* and the calculations are made in the software package *OpenFOAM*.

A transient solver, *interFoam*, from the software package *OpenFOAM* is used, for the goals of this thesis, to model free surface to determine the computational domain for the stationary solver from the same software package, *simpleFoam*. Results from both solvers are analyzed but the stationary solver *simpleFoam* is used for further analysis.

The analysis of described fluid flow determined that the angle which the fluid particle describes on the free surface is increased as the fluid flow Q and angle α grow due to rise in circular component of velocity relative to radial component.

Keywords: Computational fluid dynamics; finite volume method; vortex flow; free surface

1. UVOD

Analiza zadanog vrtložnog strujanja problem je dinamike fluida koja zbog složenih matematičkih modela, koji su opisani parcijalnim diferencijalnim jednažbama, najčešće ne nudi analitičko rješenje problema. Razvoj računalnih resursa omogućio je i razvoj računalnih alata za numeričko (približno) rješavanje problema dinamike fluida. Navedeni numerički pristup naziva se računalna dinamika fluida.

Računalna dinamika fluida temeljena je na teorijskim principima, gdje se parcijalne diferencijalne jednažbe koje definiraju zadane probleme diskretiziraju na algebarske jednažbe rješive računalom. Odabrana metoda numeričkog rješavanja je metoda konačnih volumena, koja uz diferencijalne jednažbe diskretizira i proračunsku domenu na konačan broj volumena čiji broj ovisi o dostupnim računalnim resursima ali i željenom vremenu trajanja proračuna. Numeričko rješavanje sa sobom nužno veže i određenu pogrešku koju definira kvaliteta korištenog matematičkog modela te odabrane metode diskretizacije jednažbi i prostora zbog čega je potrebno numeričko rješenje validirati eksperimentalnim podacima. Unatoč pojavi greške, koja je zadovoljavajuće mala, numeričko rješavanje je sve zastupljenije jer daje uvid u čitavo polje strujanja.

U ovom radu je pomoću računalne dinamike fluida određen utjecaj protoka i kuta između svake mlaznice i radijalnog smjera na put koji pređe čestica fluida na slobodnoj površini primjenom matematičkog modela nestlačivog stacionarnog strujanja fluida. Na temelju dobivenih rezultata zaključuje se kako s porastom kuta α i protoka Q raste i opisani kut čestice fluida na slobodnoj površini jer tangencijalna komponenta brzine raste u odnosu na radijalnu komponentu.

2. TEORIJSKE OSNOVE

Kako bi se promatrani problem uopće mogao riješiti potrebno je izmodelirati njegov fizikalni, odnosno matematički model. Fizikalni model obuhvaća niz za promatrani problem značajnih pretpostavki kojima se aproksimira stvarni svijet, a matematički model je što jednostavniji matematički zapis istog. Krajnji cilj modeliranja je što točniji fizikalni uz što jednostavniji matematički model.

Prilikom razmatranja promatranog problema usvaja se pretpostavka, pošto je područje strujanja dovoljno veliko u odnosu na međumolekularni razmak, da je fluid kontinuum, odnosno zamišljena tvar koja u potpunosti ispunjava prostor te zadržava fizikalna svojstva i za slučaj infinitezimalno malog volumena. Također, pretpostavlja se da je fluid izotropan što znači da su mu sva fizikalna svojstva jednaka u svim smjerovima. Usvojena je i pretpostavka o homogenosti fluida što definira jednakost fizikalnih svojstava u svakoj točki fluida. Kako je jedan od zadataka ovog rada odrediti put koji će čestica fluida prevaliti na slobodnoj površini, pretpostavit će se stacionarno strujanje. Stlačivost fluida pri promatranom strujanju je zanemariva pa se pretpostavlja nestlačivost fluida.

Promatrano strujanje opisuju osnovne jednažbe dinamike fluida uz koje je potrebno i modelirati turbulenciju. Osnovne jednažbe dinamike fluida su: zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja momenta količine gibanja te zakon očuvanja energije uz koji se definira i drugi zakon termodinamike. Modeliranje turbulencije je jedan zaseban problem u mehanici fluida, a za opisivanje turbulencije u promatranom strujanju korišten je pristup temeljen na *Reynolds*-ovom osrednjavanju jednažbi.

2.1. Osnovne jednažbe dinamike fluida

Osnovne jednažbe dinamike fluida su:

- zakon očuvanja mase,
- zakon očuvanja količine gibanja,
- zakon očuvanja momenta količine gibanja,
- zakon očuvanja energije,
- drugi zakon termodinamike.

Navedeni zakoni fizike izvorno su definirani za zatvoreni termodinamički sustav, a u dinamici fluida će se primijeniti na materijalni volumen $V_{M(t)}$ koji se sastoji od jednih te istih čestica, a s vremenom mu se, u općem slučaju, mijenja položaj u prostoru, oblik i veličina. Prvo će se definirati navedeni zakoni fizike za materijalni volumen u konzervativnom obliku, a zatim će se definirati opći integralni oblik zakona očuvanja fizikalnog svojstva za proizvoljni gibajući volumen.

2.1.1. Zakon očuvanja mase

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli. Konzervativni diferencijalni zapis ovog fizikalnog zakona je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (2.1)$$

2.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen. Konzervativni diferencijalni zapis ovog fizikalnog zakona je

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

2.1.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Kako za promatrani problem možemo tvrditi da u fluidu nema momenata raspodijeljenih po površini materijalnog volumena ili unutar samog volumena, ovaj zakon se svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$.

2.1.4. Zakon očuvanja energije

Zakon očuvanja energije za materijalni volumen glasi: Brzina promjene zbroja kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom. Konzervativni diferencijalni zapis ovog fizikalnog zakona je

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j e)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i + \frac{\partial \sigma_{ji} v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (2.3)$$

2.1.5. Drugi zakon termodinamike

Ovaj zakon definira fizikalnost, odnosno jednosmjernost termodinamičkih procesa. Entropija izoliranog sustava mora rasti ili ostati jednaka, a radi li se o otvorenom termodinamičkom sustava produkcija entropije mora biti pozitivna ili jednaka nuli. Da bi se ovaj zakon mogao primijeniti potrebno je definirati sve ostale veličine stanja u procesu, što dopušta rješavanje ovog zakona neovisno o preostalim navedenim zakonima.

2.1.6. Integralni oblik zakona očuvanja fizikalnog svojstva za proizvoljni gibajući volumen

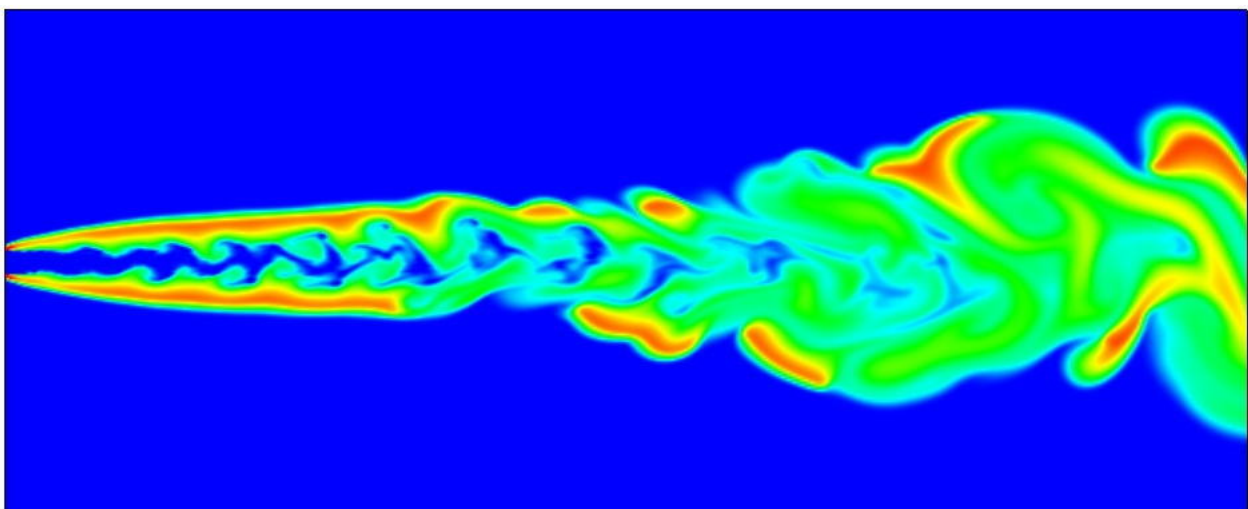
Ekstenzivnu fizikalnu veličinu \mathcal{F} (masa, energija, količina gibanja, entropija i sl.) možemo definirati po jediničnoj masi kako bi izrazili specifično fizikalno svojstvo $\varphi = d\mathcal{F}/dm$ ili po jediničnom volumenu $\Phi = d\mathcal{F}/dV$.

Brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva \mathcal{F} unutar materijalnog volumena jednaka je izvoru ili ponoru tog fizikalnog svojstva, gdje izvor može biti raspodijeljen po prostoru ili po površini materijalnog volumena.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \varphi dV + \int_{S(t)} \left[\rho (v_j - u_j) \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] n_j dS = \int_{V(t)} S_\varphi dV. \quad (2.4)$$

2.2. Turbulencija

Turbulentno strujanje fluida je strujanje fluida kod kojeg male perturbacije ne slabe u vremenu. Iskustveno je utvrđeno da odnosom inercijskih i viskoznih sila, Reynoldsov broj, utvrđujemo radi li se o stabilnom ili nestabilnom strujanju, odnosno laminarnom ili turbulentnom strujanju. Važno je spomenuti kako ne postoji jedan kritični Reynoldsov broj koji označuje početak prelaska iz laminarnog u turbulentno strujanje, već njegov iznos zavisi od parametara specifičnim promatranom strujanju. Povećavanjem Reynoldsovog broja strujanje postaje kaotično te se prijenos fizikalnih svojstava vrši u svim smjerovima, a ne samo u smjeru strujanja kako se i može vidjeti na slici 2.1.



Slika 2.1 Primjer turbulentnog strujanja

Zbog stohastičkog karaktera turbulentno strujanje rješavamo numerički pa se turbulencije modeliraju. Kao kod Reynoldsova broja, ne postoji idealni i opći model turbulencije već se oni odabiru prema promatranom strujanju. Pri rješavanju zadanog strujanja korišten je model turbulencije koji se temelji na *Boussinesq*-ovoj hipotezi prema kojoj se uz tenzor turbulentnog *Reynolds*-ovog naprezanja modelira i tenzor viskoznih naprezanja gdje je molekularna viskoznost zamijenjena

turbulentnom.

2.2.1. Vremensko osrednjavanje transportnih jednadžbi

Svako fizikalno polje φ prikazano je zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela, odnosno

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'. \quad (2.5)$$

U spomenute fizikalne zakone kojima je definirano strujanje fluida potrebno je uvrstiti jednadžbu (2.5), no kako nas zanima osrednjeno rješenje koristit će se izrazi gdje su fizikalne veličine vremenski osrednjene.

Jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje glasi:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.6)$$

a jednadžba količine gibanja za osrednjeno strujanje, uz zanemarivanje masenih sila, glasi:

$$\frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v'_i v'_j} \right]. \quad (2.7)$$

Skup jednadžbi (2.6) i (2.7) naziva se *Reynolds*-ovim jednadžbama.

Analizom članova u jednadžbi (2.7) je jasno kako se može gledati samo vremenski osrednjeno strujanje jer se u jednadžbi količine gibanja, zbog nelinearnog konvektivnog člana, nalazi i član kojeg opisuju veličine pulsirajućeg strujanja $-\rho \overline{v'_i v'_j}$. Taj član označuje turbulentnu difuziju količine gibanja, a naziva se turbulentnim ili *Reynolds*-ovim naprezanjima. Tenzor *Reynolds*-ovih naprezanja je tenzor drugog reda:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{v'_1 v'_1} & -\rho \overline{v'_1 v'_2} & -\rho \overline{v'_1 v'_3} \\ -\rho \overline{v'_2 v'_1} & -\rho \overline{v'_2 v'_2} & -\rho \overline{v'_2 v'_3} \\ -\rho \overline{v'_3 v'_1} & -\rho \overline{v'_3 v'_2} & -\rho \overline{v'_3 v'_3} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Analizom *Reynolds*-ovih jednadžbi jasno je kako ima više nepoznanica nego jednadžbi pa se moraju definirati i dodatne relacije. Dodatnim raspisivanjem korelacija brzina broj nepoznanica bi samo rastao, stoga se definiraju modeli turbulencija za koje su poželjne odlike točnost, univerzalnost, jednostavnost i razumno vrijeme rješavanja.

2.2.2. Model turbulencije

Model turbulencije usklađuje broj jednačbi i broj nepoznanica koje se javljaju u *Reynolds*-ovim jednačbama modelirajući član pulsirajućeg strujanja pomoću koeficijent turbulentne viskoznosti. Svaki model turbulencije se razvija da bude što točniji i jednostavniji, a temelji se na eksperimentalnim rezultatima.

Prilikom rješavanja zadanog strujanja korišten je $k-\omega$ SST model turbulencije.

2.2.2.1. $k-\omega$ SST model turbulencije

Ovaj se model sastoji od dvije jednačbe kojima je sustav jednačbi osrednjenog strujanja fluida u potpunosti definiran, odnosno zatvoren. Spomenute dvije jednačbe su parcijalne diferencijalne gdje jedna opisuje transport turbulentne kinetičke energije k (2.10), a druga opisuje specifičnu brzinu disipacije turbulencije ω (2.11). SST (Shear Stress Transport) formulacija je koja kombinira dva modela turbulencije, $k-\omega$ i $k-\varepsilon$. U području uz stjenke koristi se $k-\omega$ model koji se pokazao točnijim, a $k-\varepsilon$ model se koristi u području strujanja daleko od stjenke čime se izbjegava osjetljivost $k-\omega$ modela turbulencije na turbulentna svojstva ulaznog mlaza.

Jednačbe spomenutog modela kao i korišteni koeficijenti preuzeti su iz [3].

Turbulentna viskoznost fluida

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}. \quad (2.9)$$

Kinetička energija turbulencije

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(v + \sigma_k v_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]. \quad (2.10)$$

Specifična brzina disipacije

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(v + \sigma_\omega v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \quad (2.11)$$

Standardni koeficijenti i pomoćni izrazi:

$$P_k = \min \left(\tau_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, 10 \beta^* k \omega \right), \quad (2.12)$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^k \omega y}, \frac{500v}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega y^2}} \right] \right\}^4 \right\}, \quad (2.13)$$

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^k \omega y}, \frac{500v}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\}, \quad (2.14)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right), \quad (2.15)$$

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1), \quad (2.16)$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad (2.17)$$

$$\alpha_2 = 0,44, \quad (2.18)$$

$$\beta_1 = \frac{3}{40}, \quad (2.19)$$

$$\beta_2 = 0,0828, \quad (2.20)$$

$$\beta^* = \frac{9}{100}, \quad (2.21)$$

$$\sigma_{k1} = 0,85, \quad (2.22)$$

$$\sigma_{k2} = 1, \quad (2.23)$$

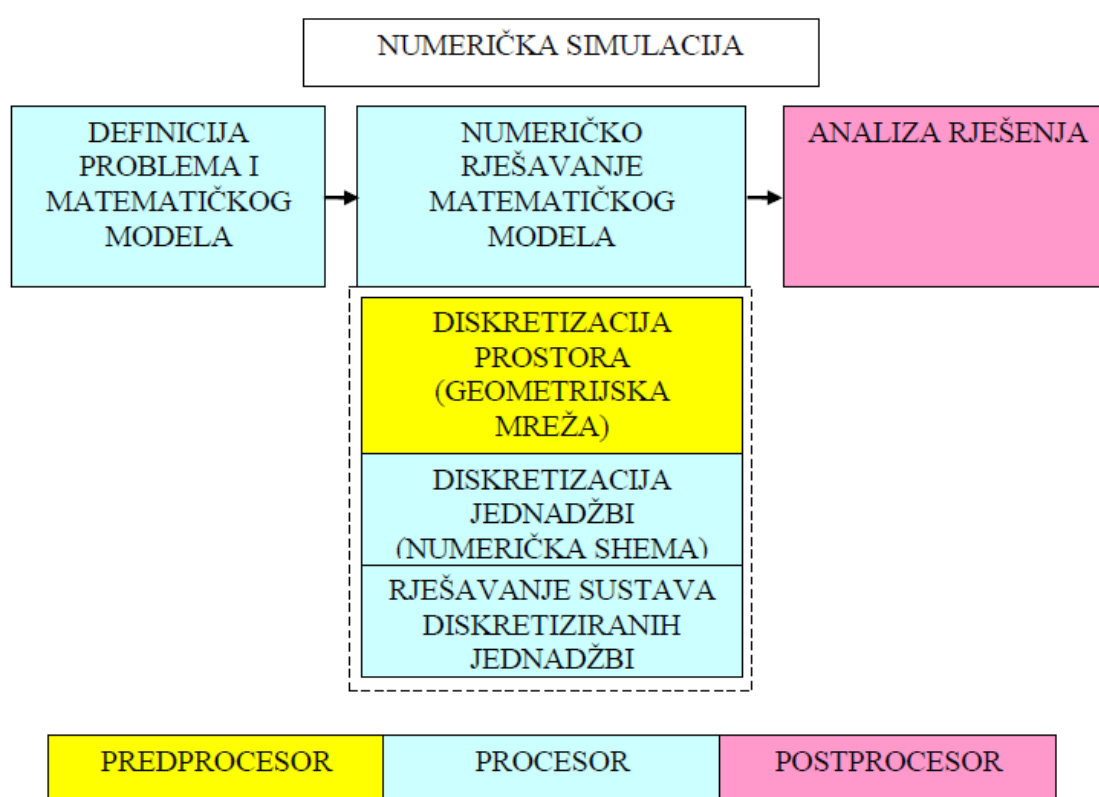
$$\sigma_{\omega 1} = 0,5, \quad (2.24)$$

$$\sigma_{\omega 2} = 0,865. \quad (2.25)$$

3. NUMERIČKO RJEŠAVANJE

Problemi mehanike fluida rješavaju se na analitički, eksperimentalno i numerički. Rješenja dobivena numeričkim rješavanjem nisu egzaktna već imaju neko odstupanje, što se pravilnim odabirom parametara proračuna (numerička metoda rješavanja, matematički model, numeričke sheme, itd.), može svesti na zadovoljavajuću točnost. Iako numeričko rješavanje generira neki stupanj greške, ovaj način rješavanja ima veliku prednost u tome što se kao rezultat dobiju čitava polja fizikalnih veličina, naravno u konačnom broju točaka.

Numeričko rješavanje se dijeli na tri faze: diskretizacija prostora, diskretizacija jednadžbi matematičkog modela i rješavanje sustava diskretiziranih jednadžbi.



Slika 3.1 Tijek numeričkog rješavanja [1]

Kako bi se matematički model mogao riješiti potrebno je prostor strujanja, odnosno proračunsku domenu diskretizirati na način koji je definiran numeričkom metodom rješavanja, u ovom radu je to metoda konačnih volumena. Potrebno je jednadžbe matematičkog modela diskretizirati odabranim numeričkim shemama te na kraju je potrebno taj sustav diskretiziranih jednadžbi i riješiti.

U nastavku poglavlja će se pobliže objasniti metoda konačnih volumena te korištene numeričke sheme. Parametri, kao i algoritmi spomenutih rješavača (*simpleFoam* i *interFoam*) programskog paketa *OpenFOAM* se mogu pogledati u [4].

3.1. Metoda konačnih volumena

Matematički model strujanja opisan je *Reynolds*-ovim jednađbama, (2.6) i (2.7), te dodatnim jednađbama odabranog modela turbulencije. Dakle, matematički model strujanja opisan je parcijalnim diferencijalnim jednađbama za koje ne postoji analitičko rješenje što je i razlog za upotrebu numeričkih metoda rješavanja. Metoda konačnih volumena temelji se na integriranju transportnih jednađbi, a spomenute parcijalne diferencijalne jednađbe prevodi u sustav linearnih algebarskih jednađbi.

Kontrolni volumen, odnosno domena strujanja, se dijeli na veliki broj konačnih volumena koji u potpunosti ispunjavaju tu domenu ali se nikako ne smiju preklapati. Vrijednosti polja fizikalnih veličina upravo se računaju u konačnim volumenima što znači da su i zakoni očuvanja zadovoljeni za svaki konačni volumen.

Ova numerička metoda je najkorištenija u problemima mehanike fluida, a u prilog joj idu povoljna upotreba memorije i brzina rješavanja.

Jednađbe matematičkog modela imaju oblik opće konvekcijsko-difuzijske jednađbe:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} = S_\varphi, \quad (3.1)$$

gdje prvi član s lijeve strane označava lokalnu promjenu fizikalnog svojstva, drugi član s lijeve strane konvektivni prijenos fizikalnog svojstva, a treći član s lijeve strane označava difuzijski prijenos fizikalnog svojstva. Član s desne strane označava izvor fizikalnog svojstva. Članovi koji označavaju konvekcijski i difuzijski tok fizikalnog svojstva predstavljaju vektore pojedinih tokova koji nisu nužno kolinearni, a čine komponente vektora ukupnog toka fizikalnog svojstva, \mathcal{J} , kroz konačni volumen. Samo normalna komponenta vektora toka $\mathcal{J}_j n_j$ doprinosi protoku fizikalnog svojstva kroz konačni volumen.

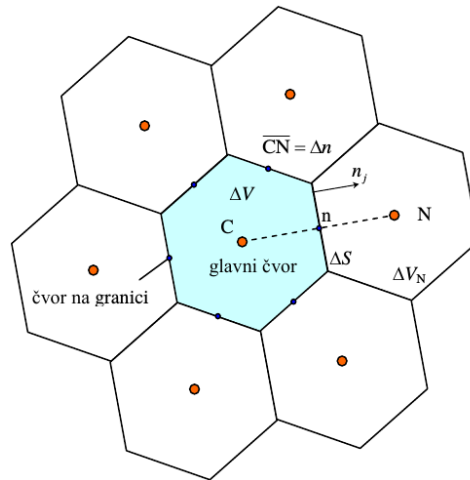
Jednađbu (3.1) se integrira po konačnom volumenu, uz primjenu *Gauss-Ostrogradsky* teorema kojim se volumenski integral može iskazati preko integrala po rubnim površinama promatranog volumena, čime se dobiva jednađba (3.2).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left(\rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV, \quad (3.2)$$

gdje član s lijeve strane označava brzinu promjene sadržaja fizikalnog svojstva u konačnom volumenu, prvi član s desne strane predstavlja protok fizikalnog svojstva kroz granice konačnog volumena, a drugi član s desne strane predstavlja izvor fizikalnog svojstva u konačnom volumenu.

Protok fizikalnog svojstva definiran je kao pozitivan kad se odvija od konačnog volumena prema okolini, a minus ispred prvog člana s desne strane jednađbe (3.2) označava da će u tom slučaju sadržaj fizikalnog svojstva opadati. Važno je napomenuti kako je jednađba (3.2) zadovoljena za svaki konačni volumen proračunske domene.

Na slici 3.2 prikazan je dio proračunske domene koji će pomoći u vizualizaciji pojednostavnjenja članova jednadžbe (3.2).



Slika 3.2 Dio proračunske domene [1]

Član s lijeve strane jednadžbe (3.2) se pod pretpostavkom dovoljno malog konačnog volumena, kako bi se fizikalno svojstvo aproksimiralo linearnom raspodjelom, može pojednostaviti pomoću njegove vrijednosti u težištu konačnog volumena C:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V. \quad (3.3)$$

Drugi član s desne strane jednadžbe (3.2) se može aproksimirati vrijednošću S_C , odnosno aproksimacijom srednje vrijednosti izvorskog člana unutar volumena ΔV , u težištu konačnog volumena C:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = S_C \Delta V. \quad (3.4)$$

Prvi član s desne strane jednadžbe (3.2) predstavlja ukupni vektor toka fizikalnog svojstva kroz konačni volumen čemu doprinosi samo njeno normalna komponenta $\mathcal{I}_j n_j$.

$$\Delta \mathcal{I}_n = \int_{\Delta S} \left(\rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Delta S} \left(\rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \left[\rho (\overline{v_n \varphi})_{\Delta S} - \Gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Delta S} \right]. \quad (3.5)$$

U jednadžbi (3.5) su krajnji članovi koji opisuju konvekcijski i difuzijski protok fizikalnog svojstva φ osrednjeni. Član konvekcijskog protoka fizikalnog svojstva $\rho (\overline{v_n \varphi})_{\Delta S}$ opisan je umnoškom srednje vrijednosti normalne komponente brzine i fizikalnog svojstva u težištu n rubne plohe ΔS . Derivacija fizikalnog svojstva po normalni rubne plohe ΔS opisana je njenom srednjom vrijednošću u težištu n rubne plohe ΔS . Zbog daljnje razrade navedenih članova uvodi se bezdimenzijska koordinata $\tilde{n} = n/\Delta n$ gdje je Δn udaljenost između težišta konačnog volumena C i težišta susjednog konačnog volumena N, na slici 3.2 udaljenost CN. Sada normalnu komponentu protoka fizikalne

veliĉine kroz konaĉni volumen definiramo kao

$$\Delta \mathcal{J}_n = \rho v_{n,n} \Delta S \varphi_n - \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta \tilde{n}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n, \quad (3.6)$$

gdje je $F_n = \rho v_{n,n} \Delta S$ jaĉina konvekcije, a $D_n = \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta \tilde{n}}$ jaĉina difuzije.

U jednadžbi (3.6) nepoznate vrijednosti su srednje vrijednosti fizikalnog svojstva i njegove derivacije u težištu n rubne plohe ΔS . Kako metoda konaĉnih volumena raĉuna vrijednosti fizikalnog svojstva u težištima konaĉnih volumena, vrijednosti na rubnim plohama konaĉnih volumena potrebno je aproksimirati vrijednostima u glavnim ĉvorovima, odnosno vrijednostima u težištima konaĉnih volumena. Navedena aproksimacija se vrši odabranim numeričkim shemama.

Primjenom neke od shema diferencije koje koriste samo ĉvorne vrijednosti φ_C i φ_N jednadžbu (3.6) moŹemo zapisati u obliku

$$\Delta \mathcal{J}_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N), \quad (3.7)$$

gdje koeficijent a_N ovisi o primijenjenom shemi diferencija.

Uvrštavanjem relacija (3.3), (3.4) uz neku vremensku diskretizaciju i (3.6) uzimajući u obzir izraz (3.7) slijedi jednadžba

$$a_C \varphi_C = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} a_N^{nb} \varphi_N^{nb} + b \quad (3.8)$$

Jednadžba (3.8) je linearna algebarska jednadžba koja je, kao Źto se vidi iz priloŹenog, dobivena diskretizacijom izraza (??) te se njenim raspisivanjem za svaki konaĉni volumen proraĉunske domene dobiva sustav linearnih algebarskih jednadžbi. Rješenje sustava jednaŹbi su vrijednosti fizikalnog svojstva φ u težištima konaĉnih volumena, a broj dobivenih rješenja odgovara broju konaĉnih volumena u proraĉunskoj domeni. Navedeni sustav jednadžbi se moŹe zapisati u matriĉnom obliku:

$$[A_{ji}] [\varphi_i] = [b_j], \quad (3.9)$$

gdje je $[A_{ji}]$ matrica sustava u kojoj retke ĉine koeficijenti a_C i a_N^{nb} , a koeficijenti a_C se nalaze na glavnoj dijagonali, $[\varphi_i]$ je vektor nepoznanica, a $[b_j]$ vektor u koji ulaze sve poznate veliĉine, ukljuĉujući i rubne uvjete koje polje φ mora zadovoljavati.

Detaljniji opis metode konaĉnih volumena se moŹe pogledati u [4].

3.2. Numeričke sheme

Kako se u ovom radu koriste uzvodna shema i linearna uzvodna shema onda će se njih i pobliže objasniti.

3.2.1. Uzvodna shema

Navedena numerička shema prvog reda točnosti najjednostavnija je shema diferencija gdje se konvekcijski protok fizikalnog svojstva modelira neovisno o difuzijskom, a difuzijski neovisno o konvekcijskom protoku. Dakle, ova shema diferencija ne uzima u obzir njihovo međudjelovanje.

Ako se transport fizikalnog svojstva konvekcijom vrši od težišta C prema težištu N konačnih volumena prema slici 3.2, jačina konvekcije F je pozitivna, a obratno je negativna. Vrijednosti fizikalnog svojstva φ_n ovisno o predznaku jačine konvekcije su:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C \text{ za } F > 0 \\ \varphi_N \text{ za } F < 0 \end{cases} . \quad (3.10)$$

Difuzijski transport se modelira shemom centralnih razlika

$$-D \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = -D(\varphi_N - \varphi_C) . \quad (3.11)$$

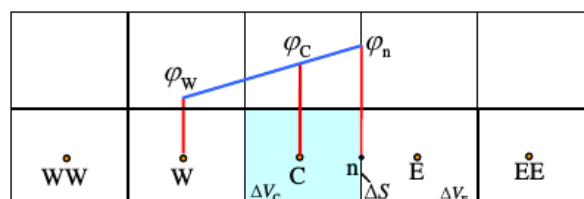
Konačni izraz transporta fizikalnog svojstva kroz konačni volumen, uz pretpostavku pozitivne jačine konvekcije F , glasi

$$\Delta \mathcal{J}_n = F \varphi_C + D(\varphi_C - \varphi_N) . \quad (3.12)$$

Uzvodna shema rezultira stabilnim rješenjima uz jednostavnu implementaciju te se često koristi pri početku proračuna, a nedostatak ove sheme je unošenje lažne difuzije u dobiveno rješenje.

3.2.2. Linearna uzvodna shema

Navedena shema drugog je reda točnosti, a vrijednost fizikalnog svojstva φ_n određuje se linearnom ekstrapolacijom iz dvaju čvorova uzvodno. Difuzijski transport se također definira shemom centralnih razlika kao i kod uzvodne sheme. Kako bi se lakše interpretirala sljedeća jednadžba prikazat ćemo dio diskretiziranog prostora na slici 3.3.

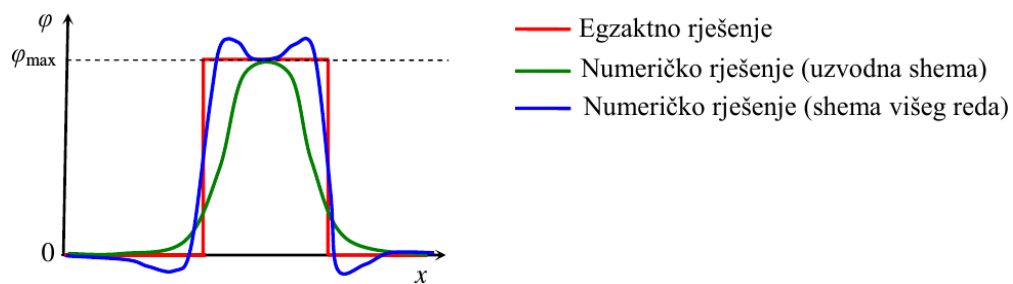


Slika 3.3 Dio diskretiziranog prostora [1]

Vrijednosti fizikalnog svojstva φ_n ovisno o predznaku jačine konvekcije su:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_C^{\text{uzvodno}} = \varphi_C + \frac{1}{2} (\varphi_C - \varphi_W) & \text{za } F > 0 \\ \varphi_E + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_E^{\text{uzvodno}} = \varphi_E + \frac{1}{2} (\varphi_E - \varphi_{EE}) & \text{za } F < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Kako je linearna uzvodna shema drugog reda točnosti ona će, kao i sve druge sheme drugog reda točnosti, uzrokovati nefizikalne oscilacije rješenja u blizini diskontinuiteta što je prikazano na slici 3.4. Kao rješenje opisanog problema koristi se omeđena linearna uzvodna shema kod koje su opisane oscilacije limitirane.



Slika 3.4 Nefizikalne oscilacije rješenja u blizini diskontinuiteta [1]

4. NUMERIČKA SIMULACIJA ZADANOG STRUJANJA

U ovom poglavlju će se ukratko opisati i prikazati geometrijski modeli, mreže konačnih volumena, rubni uvjeti i ostale postavke dvaju rješavača programskog paketa *OpenFOAM*, *interFoam*-a i *simpleFoam*-a.

Iznimno će se u ovom poglavlju prikazati rezultati rješavača *interFoam* kako bi se opisao postupak modeliranja geometrijskog modela koji će se ispuniti konačnim volumenima za rješavanje primjenom rješavača *simpleFoam*.

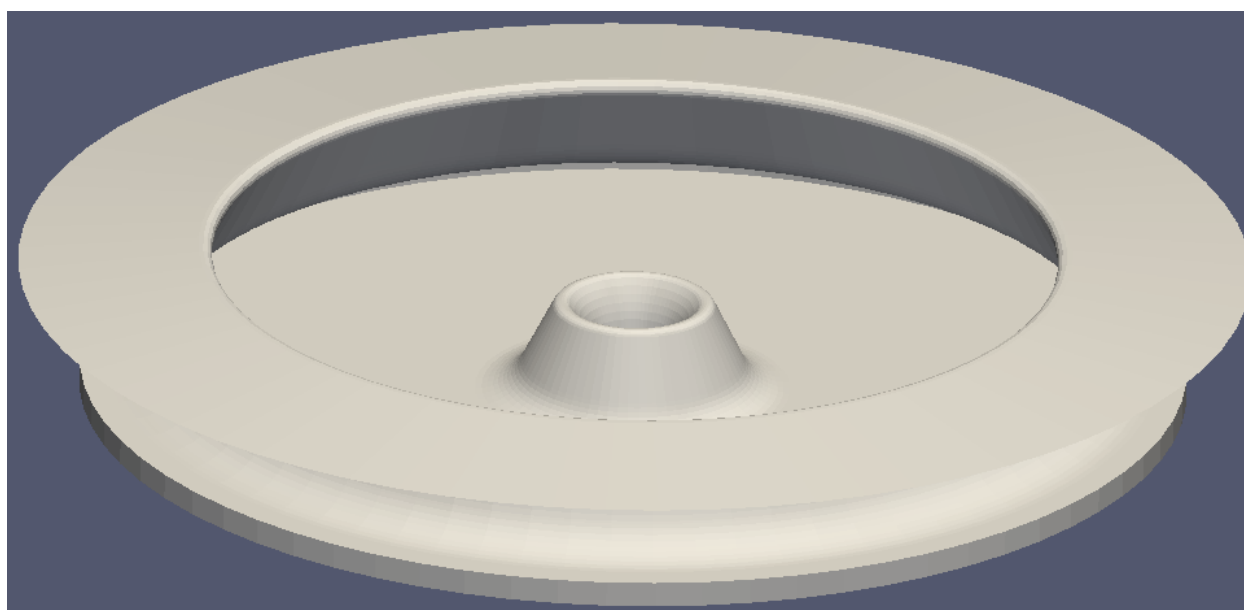
4.1. Primjena rješavača *interFoam*

Ovaj rješavač se primjenjuje pri analizi dvokomponentnog nestlačivog nestacionarnog strujanja fluida koji su razdvojeni slobodnom površinom čiji se oblik određuje veličinama vezanim za površinsku napetost. Prilikom opisivanja postupka rješavanja za ovaj rješavač, α ima značaj indikatorske funkcije čija vrijednost 1 označuje vodu, a vrijednost 0 zrak. Više o rješavaču se može pronaći u [5], [6] i [7].

4.1.1. Geometrijski model

Prilikom izrade geometrijskog modela uvažena je pretpostavka kako je ulaz fluida u zdenac kontinuirano raspodijeljen po obodnoj površini, a isto tako obod nije u potpunosti ravan kao i kod uobičajenih fontana. Radijus oboda na kojem se nalazi ulaz fluida je 1,1 m.

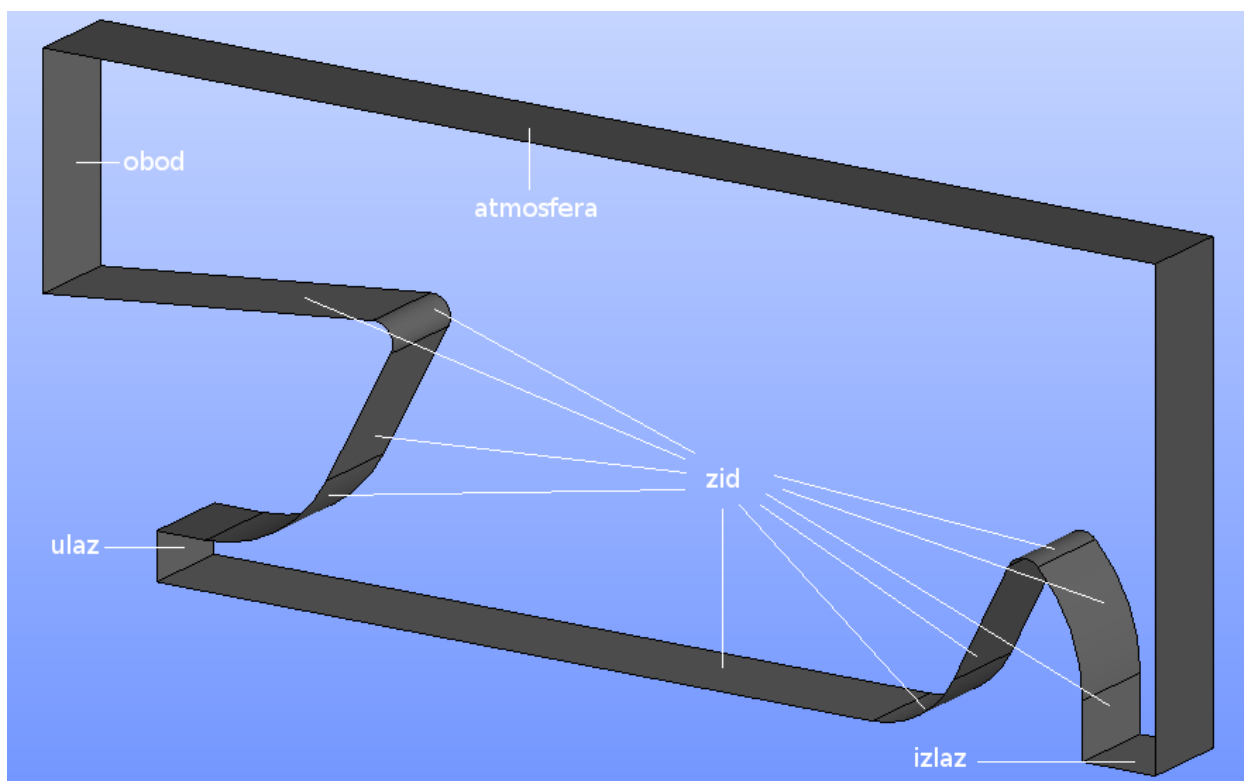
U svrhu vizualizacije zdenca na slici 4.1 prikazan je njegov cjeloviti model.



Slika 4.1 Geometrijski model zdenca

Vodilo računa i o načinu rješavanja zadanog strujanja u programskom paketu *OpenFOAM* gdje rezultatna mreža konačnih volumena treba biti oblika kružnog isječka, a rubne plohe moraju biti modelirane na način da se na njima mogu pripisati potrebni rubnu uvjeti. Kako se mreža konačnih volumena izrađuje funkcijama programskog paketa širokog spektra mogućnosti, *cfMesh*, za njenu izradu je dovoljno izmodelirati geometrijski model prikazan na slici 4.2.

Za izradu geometrijskog modela korišten je programski paket *Salome*.

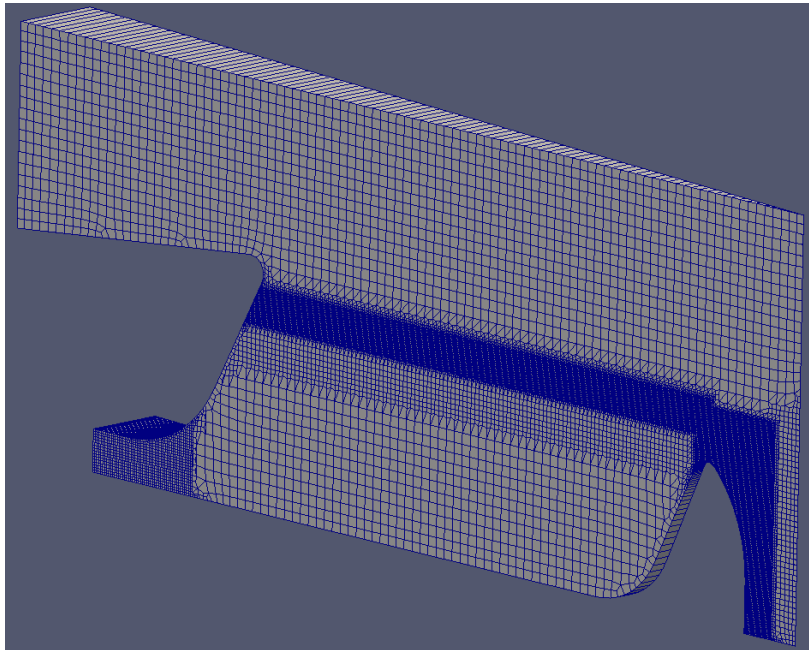


Slika 4.2 Geometrijski model za rješavanje zadanog strujanja rješavačem *interFoam*

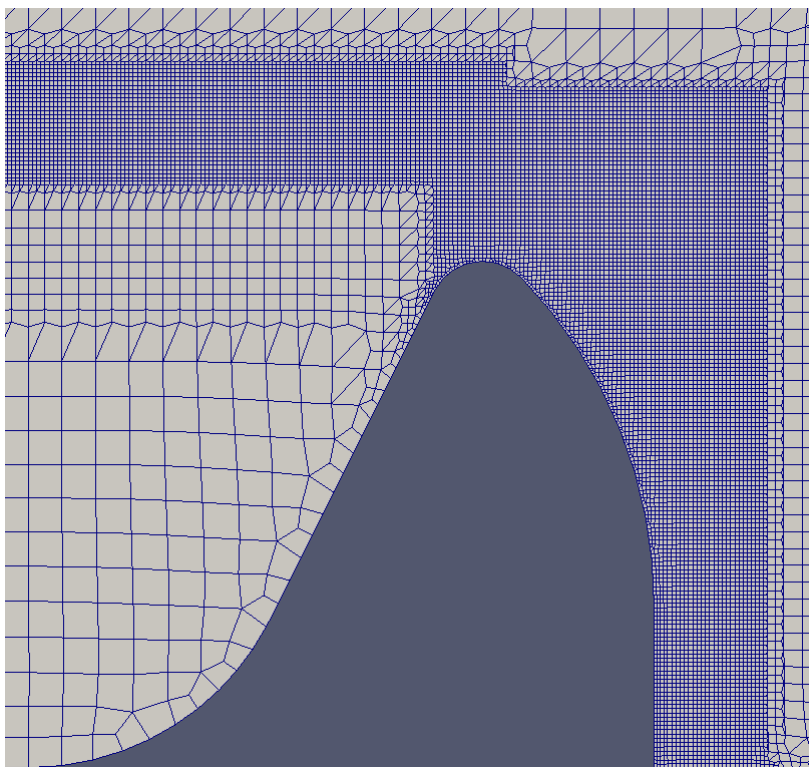
4.1.2. Mreža konačnih volumena

Mreža izrađena pomoću programskog paketa *cfMesh* prikazana na slici 4.3 sastoji se od 31630 ćelija gdje prevladavaju heksaedarski volumeni uz prisustvo piramidnih te poliedarskih volumena. Najmanji volumeni se nalaze u zoni u kojoj se očekuje proračunavanje slobodne površine jer primjenjeni rješavač proračunava oštar prijelaz između dvaju fluida.

Više o postavkama i mogućnostima programskog paketa *cfMesh* se može pronaći u [8].



Slika 4.3 Mreža konačnih volumena za rješavanje zadanog strujanja rješavačem *interFoam*



Slika 4.4 Prikaz odnosa veličina konačnih volumena u pretpostavljenoj zoni slobodne površine

4.1.3. Rubni uvjeti

Kako bi se zadano strujanje uspješno analiziralo potrebno je na rubnim plohama proračunske domene zadati rubne uvjete koji opisuju ponašanje fluida u stvarnosti. Zbog navedenog je potrebno ispravno modelirati fizikalni i matematički model strujanja prije pokretanja samog proračuna.

Na ulazu vode u domenu propisane su komponente brzine koje se očekuju kod analize strujanja u nekom okruglom zdenču, a na izlazu vode iz domene u središtu zakrivljenosti zadano je strujanje bez prisutstva gradijenta. Na granici dalje od stjenke zdenca, u radijalnom smjeru, zadano je strujanje zraka bez prisutstva gradijenta. Na svim stjenkama zadani su rubni uvjeti mirujućeg zida te se na rubnoj plohi iznad zdenca zadao totalni tlak.

Zadani rubni uvjeti kao i vrste rubnih ploha prikazane su u tablicama 1 i 2.

4.1.3.1. Određivanje parametara modela turbulencije

Umjesto izravnog definiranja kinetičke energije turbulencija ili *Reynolds*-ovog naprežanja, za zadani problem se zadaju intezitet turbulencije I i duljinska mjera turbulencije l . Intezitet turbulencije se definira kao omjer kvadrata srednjih pulzacija brzine i vremenski osrednjene brzine u smjeru strujanja,

$$I = \frac{u'}{U}. \quad (4.1)$$

Za promatrano strujanje na ulazu se zadaje intezitet turbulencije od 5%. Za početno polje kinetičke energije turbulencije uzimamo vrijednost dobivenu sljedećom relacijom

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2 = 0,0009375 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}. \quad (4.2)$$

Duljinska mjera turbulencije opisuje veličinu vrtloga koji sadržavaju većinu energije u turbulentnom strujanju. Obično se zadaje kao postotak karakteristične duljine promatranog strujanja. Za zadano strujanje se uzima $l = 0,01\text{m}$. a za početno polje specifične brzine disipacije uzimamo vrijednost dobivenu sljedećom relacijom

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{C_\mu^{0,25} l} = 5,59\text{s}^{-1}. \quad (4.3)$$

Dobivene vrijednosti se zadaju i na stjenkama zdenca.

Rubna ploha	Vrsta granice	Rubni uvjet		
		U	p	α
ulaz	<i>patch</i>	<i>fixedValue</i>	<i>fixedFluxPressure</i>	<i>fixedValue</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
obod	<i>patch</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>fixedValue</i>
atmosfera	<i>patch</i>	<i>fixedValue</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>fixedValue</i>
zid	<i>wall</i>	<i>fixedValue</i>	<i>fixedFluxPressure</i>	<i>zeroGradient</i>
ispred	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
iza	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>

Tablica 1 Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač *interFoam*

Rubna ploha	Vrsta granice	Rubni uvjet		
		k	$\nu_t (v_t)$	$\omega (\omega)$
ulaz	<i>patch</i>	<i>turbulentIntensityKineticEnergyInlet</i>	<i>calculated</i>	<i>turbulentMixingLengthFrequencyInlet</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>inletOutlet</i>	<i>calculated</i>	<i>inletOutlet</i>
obod	<i>patch</i>	<i>inletOutlet</i>	<i>calculated</i>	<i>inletOutlet</i>
atmosfera	<i>patch</i>	<i>inletOutlet</i>	<i>calculated</i>	<i>inletOutlet</i>
zid	<i>wall</i>	<i>kqRWallFunction</i>	<i>nutUSpaldingWallFunction</i>	<i>omegaWallFunction</i>
ispred	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
iza	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>

Tablica 2 Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač *interFoam*

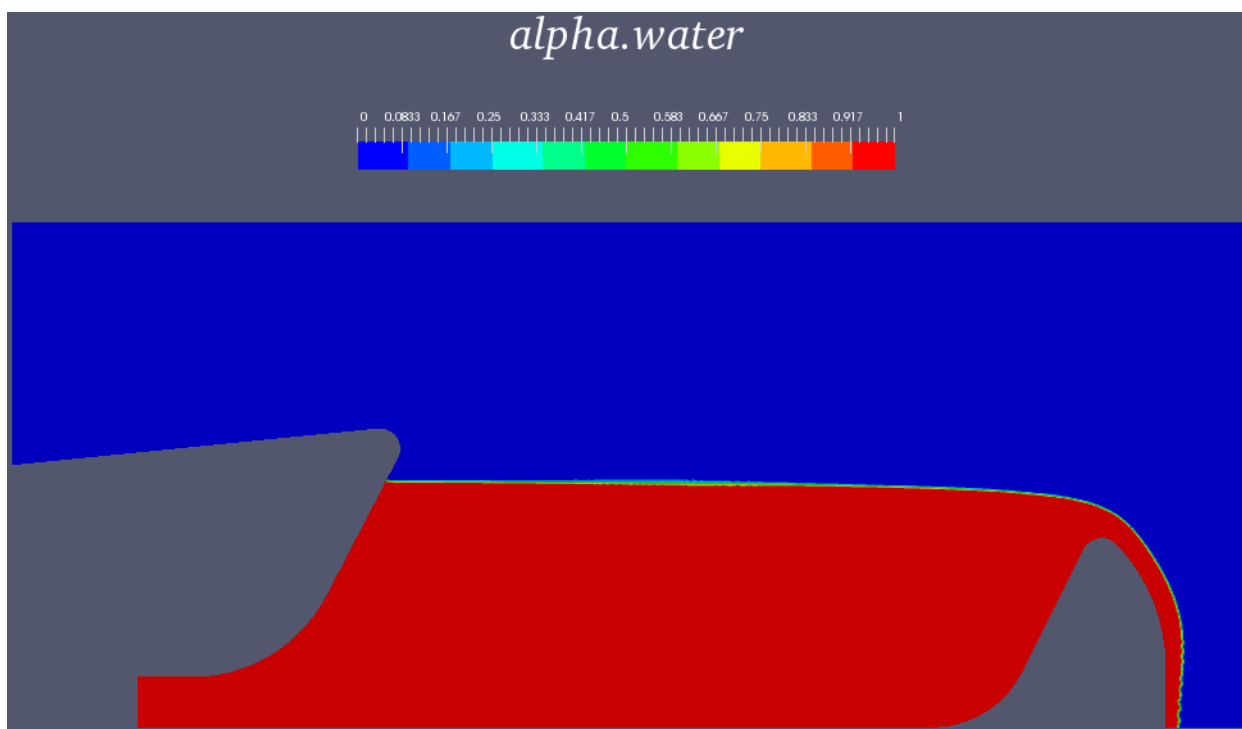
4.1.4. Postavke proračuna

Kako bi ubrzali proces rješavanja na početku proračuna zadajemo sheme prvog reda točnosti kako bi se simulacija stabilizirala, a nakon što se reziduali ne mijenjaju na tri značajne znamenke proračun se nastavlja sa shemama drugog reda točnosti.

Jednadžbu tlaka rješava algebarski višemrežni rješavač GAMG (eng. Generalised Algebraic MultiGrid). Spomenuti rješavač ispravlja greške na grubljim mrežama čiji se rezultati prenose na finiju mrežu kao početno rješenje kako bi se konvergencija brže postigla. Preostale jednadžbe se rješavaju pomoću iterativnog rješavača *smoothSolver* sa simetričnim *Gauss-Seidel* postupkom.

4.1.5. Rezultati

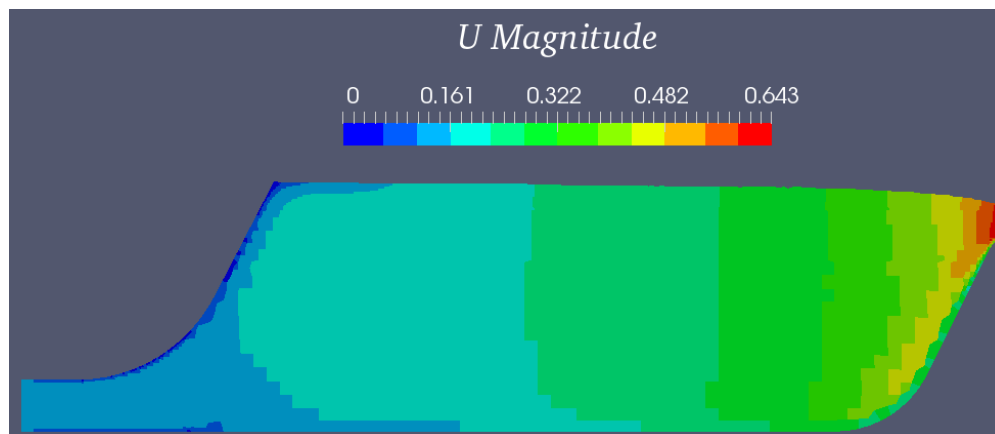
Ovdje će se prikazati rezultati polja brzine i indikacijske veličine α koja služi za opisivanje slobodne površine, odnosno za definiranje koji se fluid nalazi u nekoj ćeliji. Vrijednost indikatorske funkcije α 1 označava vodu, a 0 zrak.



Slika 4.5 Polje α dobiveno rješavačem *interFoam*

S obzirom na mogućnosti postavljanja rubnih ploha za rješavač *simpleFoam*, dobivena slobodna površina će se aproksimirati pravcem od stjenke zdenca do polumjera 0,15 m gdje će se postaviti rubna ploha koja će predstavljati izlaz fluida iz domene.

Kako bi se polje brzine lakše usporedilo sa rezultatima rješavača *simpleFoam*, proračunska domena će se reducirati na oblik koji aproksimira geometrijski model, odnosno mrežu konačnih volumena za spomenuti rješavač. Na slici 4.6 prikazane su vrijednosti iznosa brzine u središtima konačnih volumena.



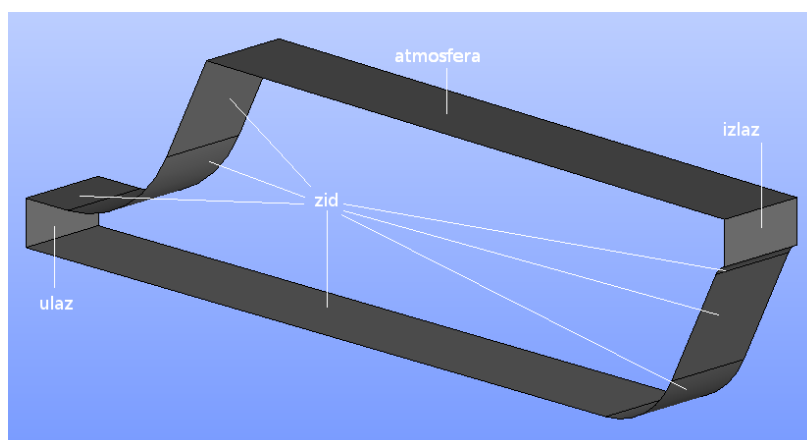
Slika 4.6 Polje brzine dobiveno rješavačem *interFoam*

4.2. Primjena rješavača *simpleFoam*

Ovaj rješavač se primjenjuje pri analizi nestlačivog stacionarnog strujanja fluida. Više o rješavaču se može pronaći u [1] i [7].

4.2.1. Geometrijski model

Geometrijski model je izrađen u programskom paketu *Salome* prema modelu koji je korišten za *interFoam*. Razlika je u tome što rješavač *simpleFoam* može proračunavati samo jedan fluid pa slobodnu površinu moramo implementirati u geometrijski model. U programskom paketu *ParaView* su se očitale koordinate točaka koje će aproksimirati slobodnu površinu sa slike 4.5.

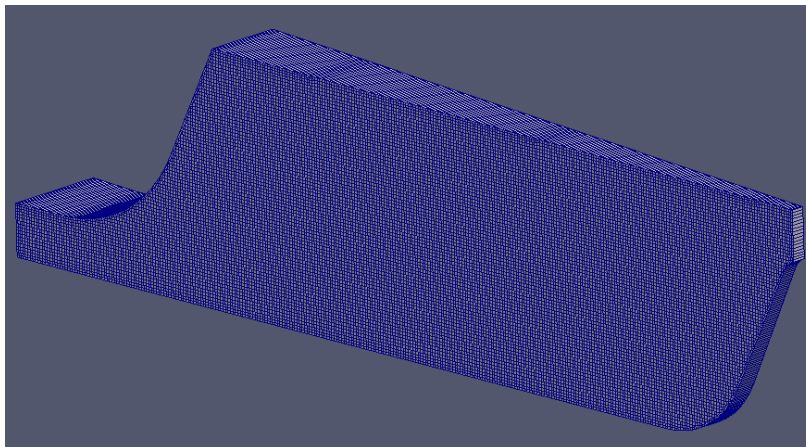


Slika 4.7 Geometrijski model za rješavanje zadanog strujanja rješavačem *simpleFoam*

4.2.2. Mreža konačnih volumena

Mreža izrađena pomoću programskog paketa *cfMesh* prikazana na slici 4.8 sastoji se od 20499 heksaedarskih ćelija.

Više o postavkama i mogućnostima programskog paketa *cfMesh* se može pronaći u [8].



Slika 4.8 Mreža konačnih volumena za rješavanje zadanog strujanja rješavačem *simpleFoam*

4.2.3. Rubni uvjeti

Razlika u odnosu na rubne uvjete za rješavač *interFoam* je zadavanje rubnog uvjeta *slip* na rubnu plohu koja predstavlja slobodna površina te eliminiranje granice koja je služila za omogućavanje nastrojavanja zraka u domenu.

Zadani rubni uvjeti kao i vrste rubnih ploha prikazane su u tablicama 3 i 4.

4.2.4. Postavke proračuna

Postavke proračuna identične su postavkama za rješavač *interFoam*.

Rubna ploha	Vrsta granice	Rubni uvjet	
		U	p
ulaz	<i>patch</i>	<i>fixedValue</i>	<i>fixedFluxPressure</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
atmosfera	<i>patch</i>	<i>slip</i>	<i>slip</i>
zid	<i>wall</i>	<i>fixedValue</i>	<i>fixedFluxPressure</i>
ispred	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
iza	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>

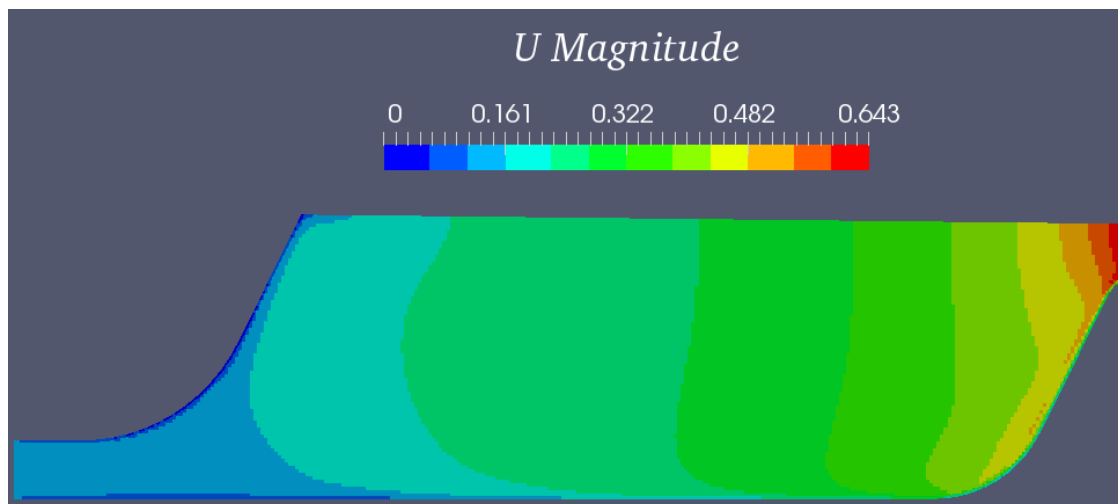
Tablica 3 Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač *simpleFoam*

Rubna ploha	Vrsta granice	Rubni uvjet		
		k	ν_t	ω
ulaz	<i>patch</i>	<i>turbulentIntensityKineticEnergyInlet</i>	<i>calculated</i>	<i>turbulentMixingLengthFrequencyInlet</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>inletOutlet</i>	<i>calculated</i>	<i>inletOutlet</i>
atmosfera	<i>patch</i>	<i>slip</i>	<i>slip</i>	<i>slip</i>
zid	<i>wall</i>	<i>kqRWallFunction</i>	<i>nutUSpaldingWallFunction</i>	<i>omegaWallFunction</i>
ispred	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
iza	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>

Tablica 4 Prikaz zadanih rubnih uvjeta i vrsta granica za rješavač *simpleFoam*

4.2.5. Rezultati

Prikazat će se rezultati polja brzine kako bi se mogli usporediti sa rezultatima na slici 4.6. Na slici 4.9 prikazane su vrijednosti iznosa brzine u središtima konačnih volumena.



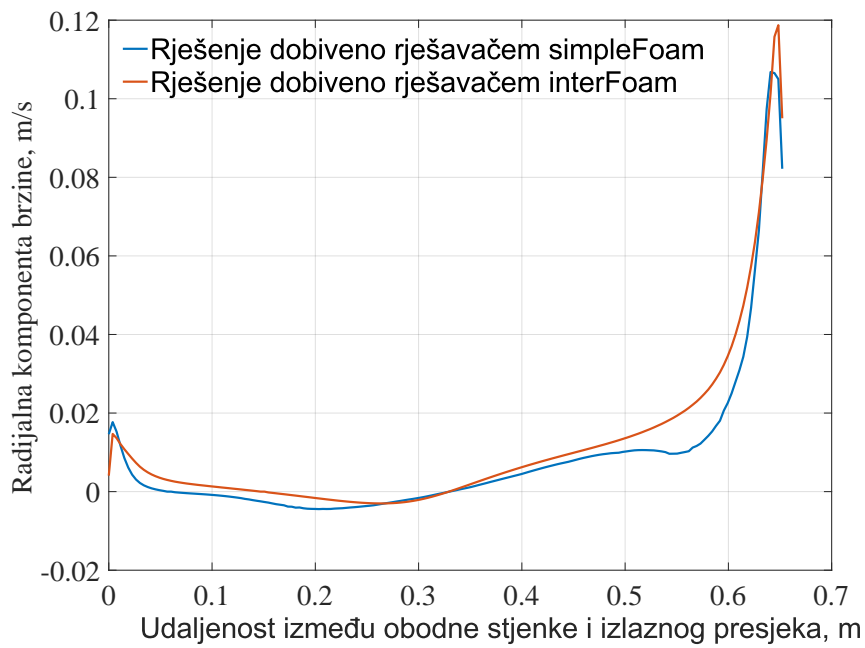
Slika 4.9 Polje brzine dobiveno rješavačem *simpleFoam*

4.3. Usporedba rezultata dvaju rješavača

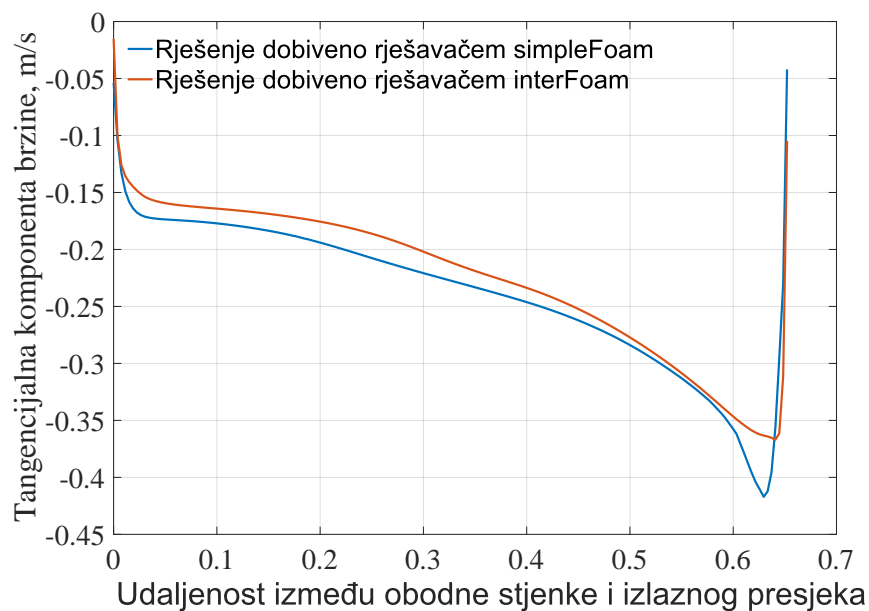
Usporedimo li rezultate sa slike 4.6 i 4.9 vidimo da je trend raspodjele poprilično jednak uz zanemarive razlike s obzirom na utrošeno proračunsko vrijeme koje je potrebno rješavaču *interFoam* (otprilike jedan dan) u odnosu *simpleFoam* (otprilike petnaest minuta). Teško je usporediti rezultate na ovaj način pa će se prikazati cirkularna i radijalna komponenta brzine oba rješavača po visini i duljini.

Odabrana visina je 0,2 m što je par centimetara ispod slobodne površine. Razlog tome je što je izlazni presjek modela koji je riješen *interFoam*-om nešto manji od izlaznog presjeka modela koji se rješava *simpleFoam*-om. Vertikalni presjek odabran je na trećini ukupne udaljenosti između obodne stjenke i izlaznog presjeka, 0,25 m od izlaznog presjeka. Horizontalni presjek odabran je na visini od 0,2 m, a proteže se obodne stjenke do izlaznog presjeka.

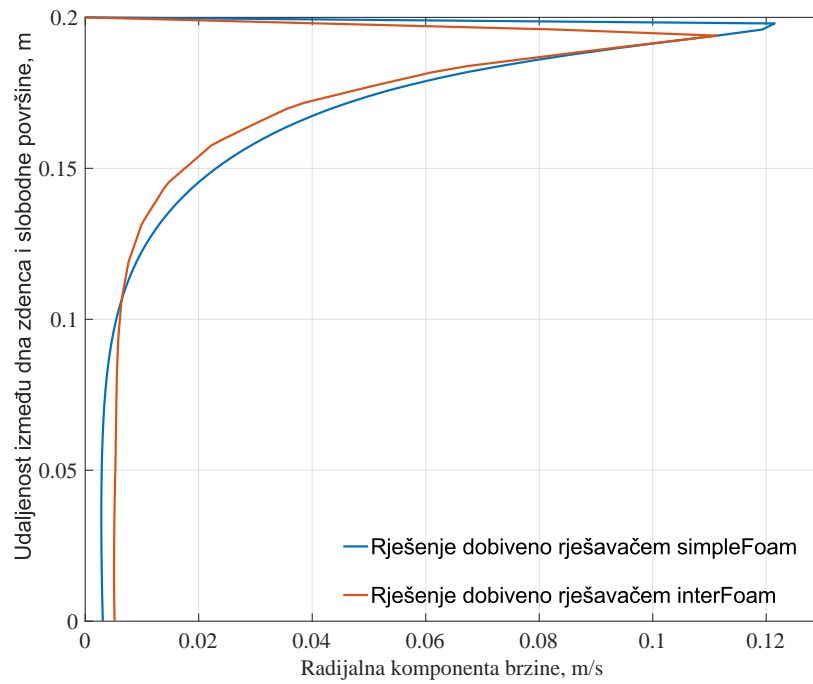
Komponente brzina prikazane su na slikama 4.10 - 4.13 te se jasno vidi kako su razlike rezultata minimalne. Dakle, opravdano je tvrditi kako je strujanje stacionarno te se za potrebe ovog rada koristi rješavač *simpleFoam* te pripadna mreža konačnih volumena prikazana na slici 4.8.



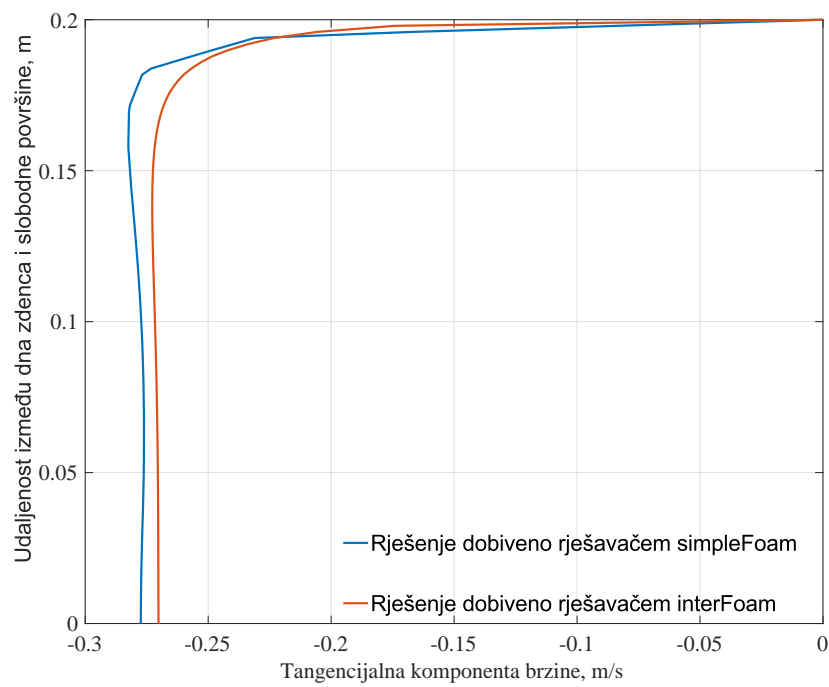
Slika 4.10 Usporedba radijalnih komponenti brzina po duljini



Slika 4.11 Usporedba tangencijalnih komponenti brzina po duljini



Slika 4.12 Usporedba radijalnih komponenti brzina po visini



Slika 4.13 Usporedba tangencijalnih komponenti brzina po visini

5. ANALIZA REZULTATA

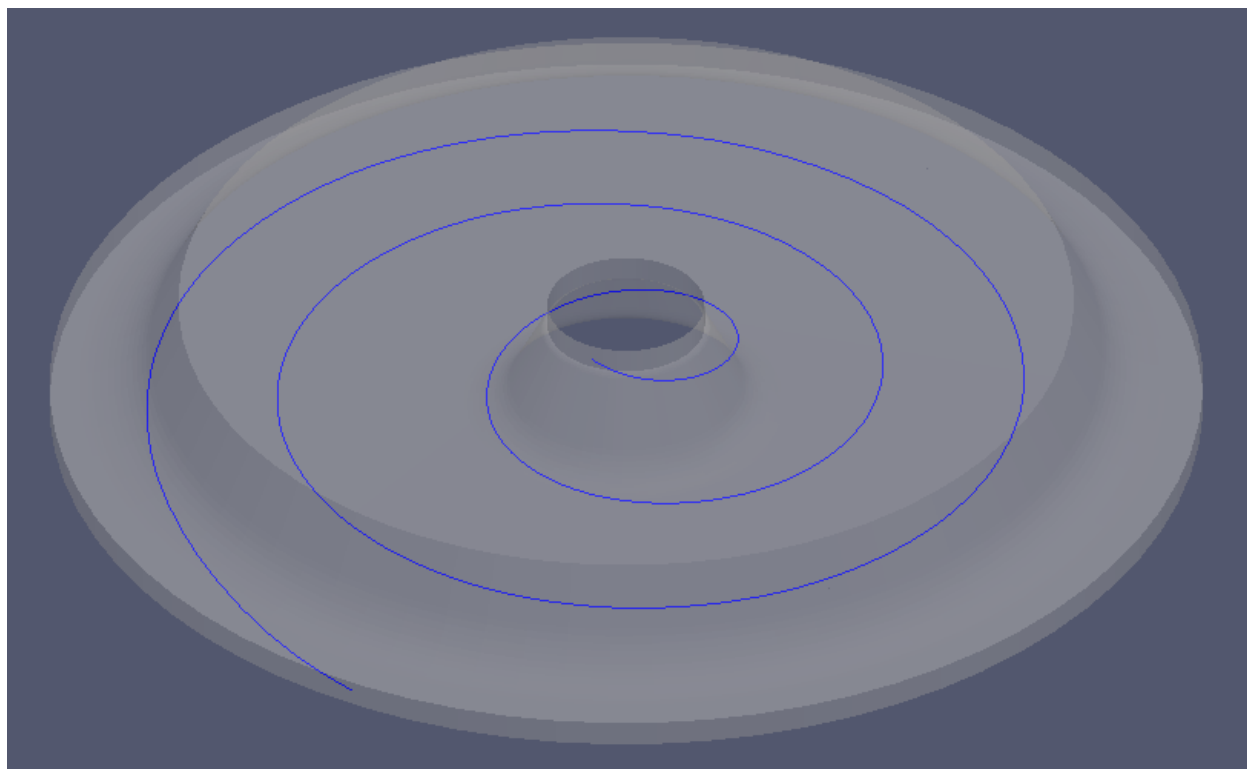
Za potrebe ovog rada urađeno je šesnaest proračuna koristeći rješavač *simpleFoam* na mreži konačnih volumena sa slike 4.8. Rubni uvjeti, kao i postavke proračuna, su navedeni u prethodnom poglavlju, a jedino što se mijenjalo kroz proračune su protok Q i kut α kojeg zatvara svaka mlaznica u odnosu na radijalni smjer.

Proračun se vrši na domeni oblika kružnog isječka pa je protok fluida u proračunskoj domeni manji od onoga za cijeli zdenac. Pošto je središnji kut isječka 5° u proračunu se zadaje protok 72 puta manji od onog za cijeli zdenac. No, prilikom analize rezultata prikazan je ukupan protok zdenca, što treba imati na umu prilikom čitanja grafičke ovisnosti kuta kojeg čestica fluida opisuje na slobodnoj površini u ovisnosti o protoku Q i kutu α .

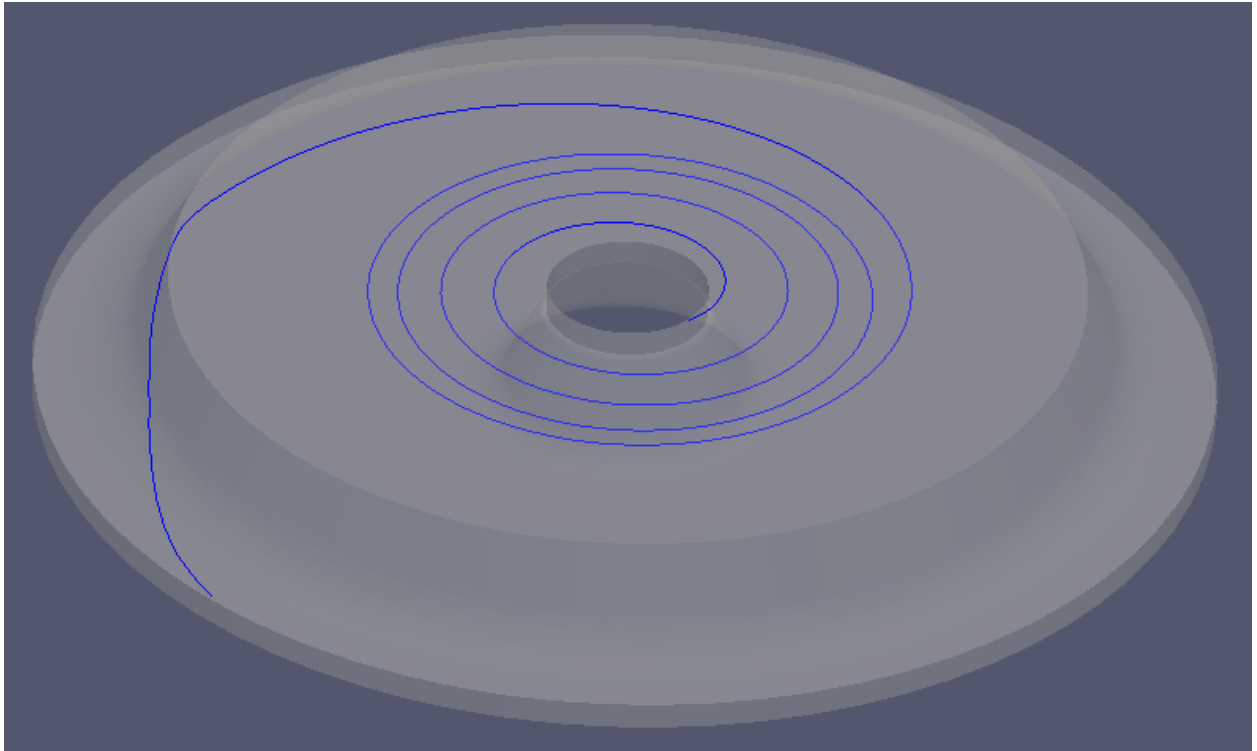
5.1. Trajektorija čestice fluida

Kako je jedan od ciljeva rada prikazati izgled trajektorija čestice fluida od izlaza iz mlaznica do izlaza iz zdenca, prvo će se prikazati polje brzine jednog od šesnaest proračuna te prikazati izgled trajektorija u programskom paketu *ParaView*-u gdje se i vršila integracija polja brzine.

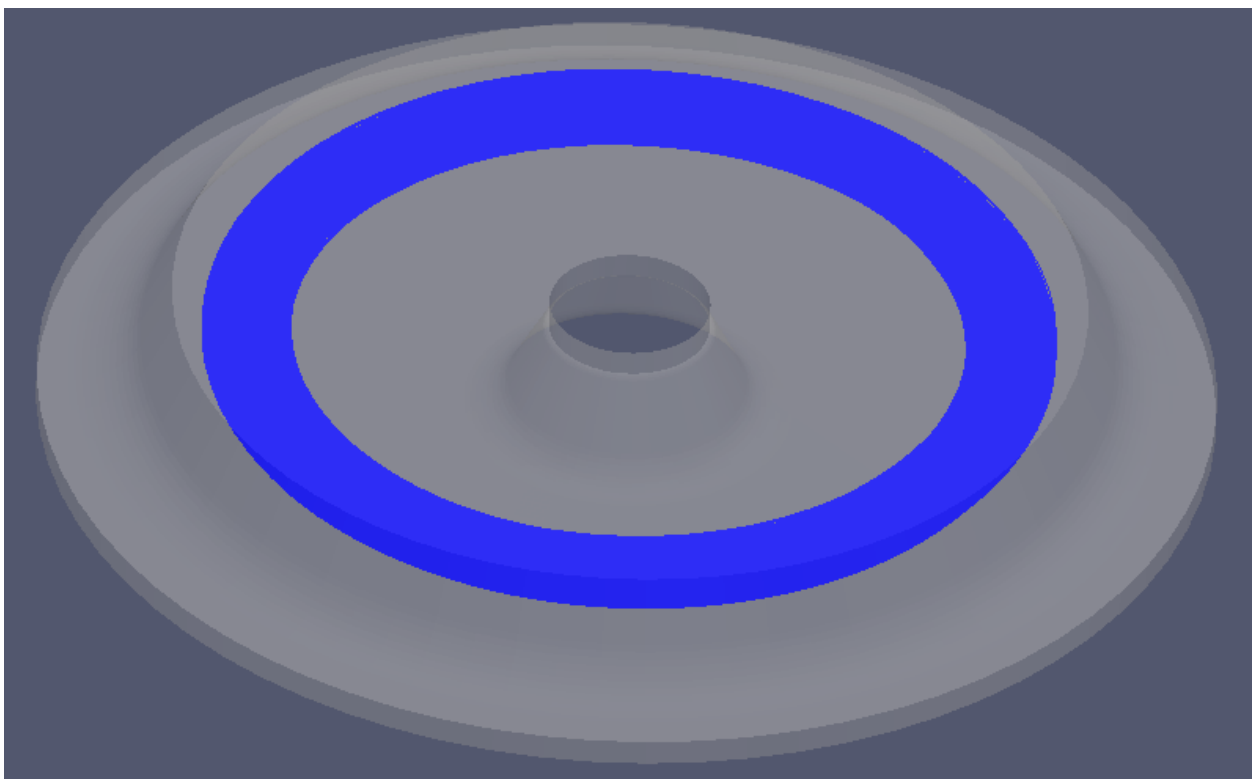
Na slici 4.9 prikazano je polje brzine za protok $Q = 10,364$ l/s te kut $\alpha = 75,963^\circ$ pa će se za taj proračun strujanja prikazati i trajektorije čestice fluida.



Slika 5.1 Trajektorija čestice fluida odabrane na dnu ulaznog presjeka



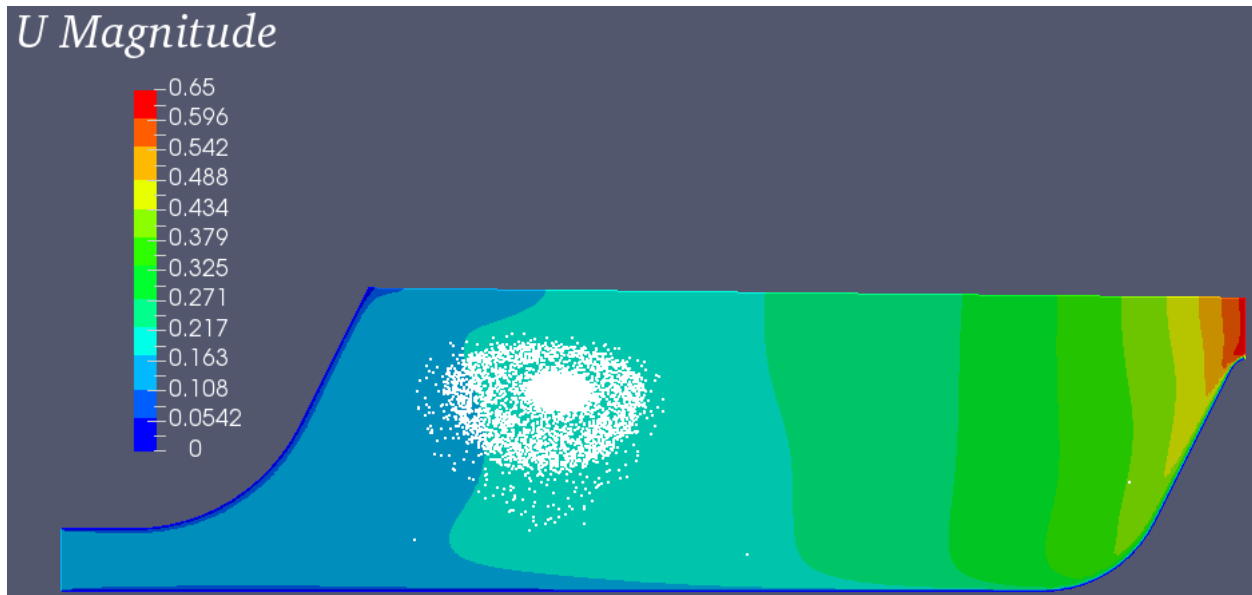
Slika 5.2 Trajektorija čestice fluida odabrane na vrhu ulaznog presjeka



Slika 5.3 Recirkulacijska zona strujanja

Čestice fluida koje se odaberu oko srednje visine ulaznog presjeka će ući u recirkulacijsku zonu strujanja, slika 5.3, koja se pojavljuje uslijed relativno nagle ekspanzije prostora strujanja. Zbog lakše predodžbe recirkulacijska zona (bijela boja) prikazana je i nad poljem brzine, slika 5.4.

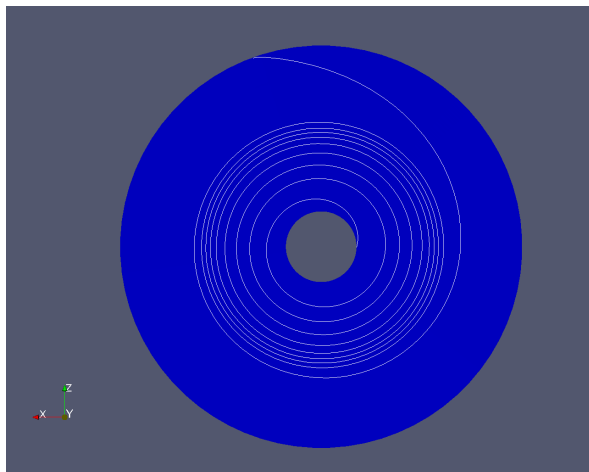
Prizori trajektorija na slikama 5.1 i 5.2 predstavljaju načine na koji će fluid prevaliti put od izlaza



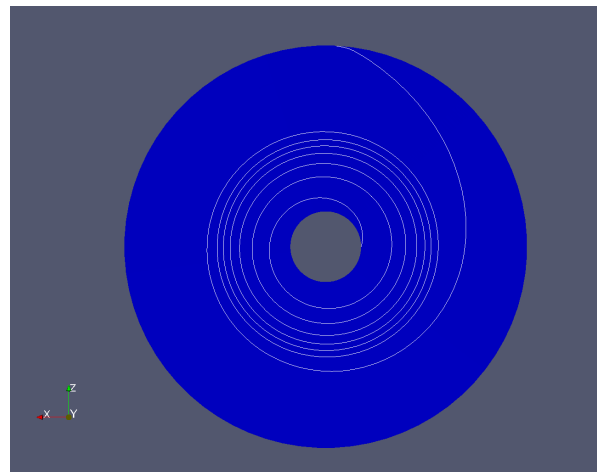
Slika 5.4 Recirkulacijska zona strujanja nad poljem brzine

iz mlaznica do izlaza iz zdenca ukoliko ne uđe u recirkulacijsku zonu.

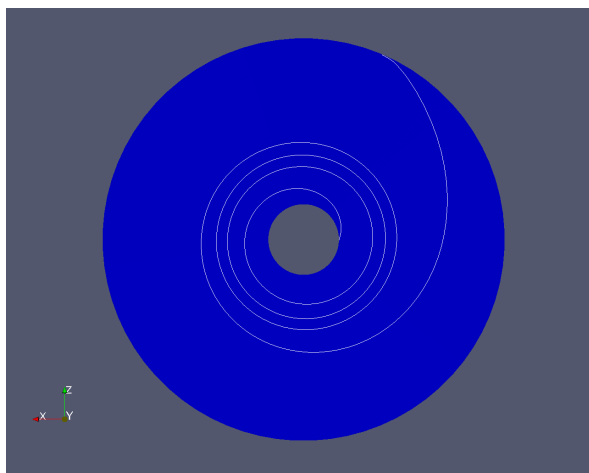
Uz prikazane trajektorije, prikazat će se i trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za svih šesnaest proračuna.



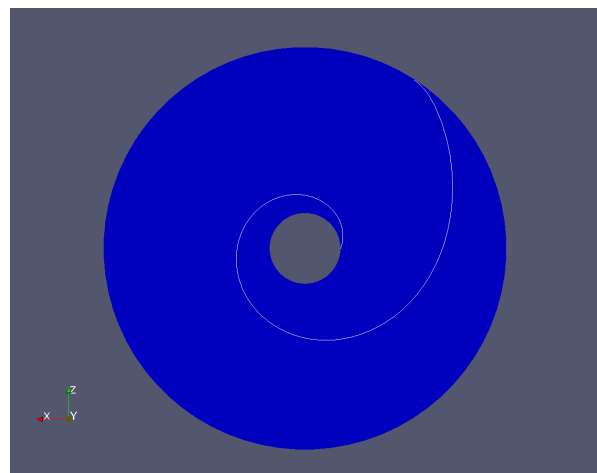
(a) Kut $\alpha = 78,69^\circ$



(b) Kut $\alpha = 75,963^\circ$

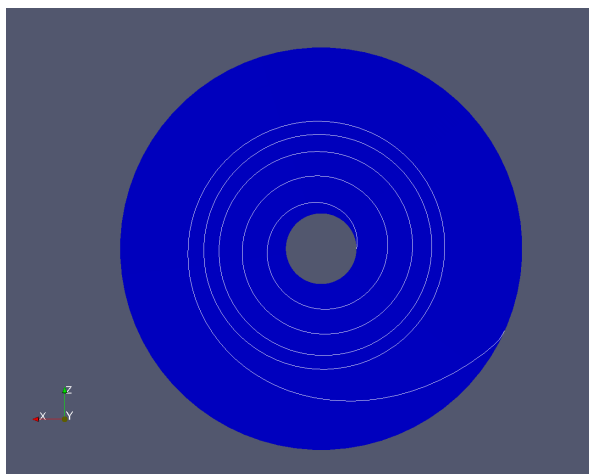


(c) Kut $\alpha = 71,562^\circ$

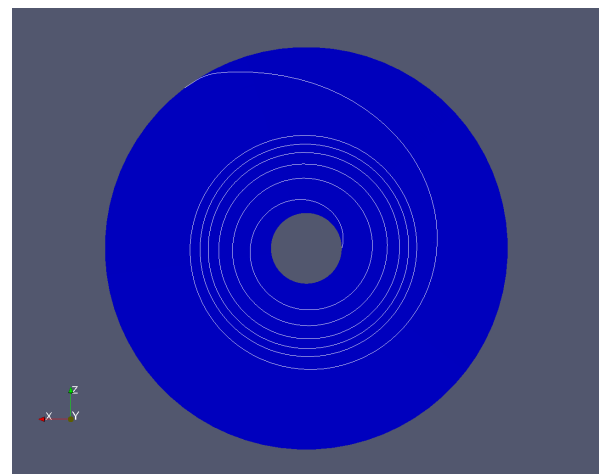


(d) Kut $\alpha = 63,432^\circ$

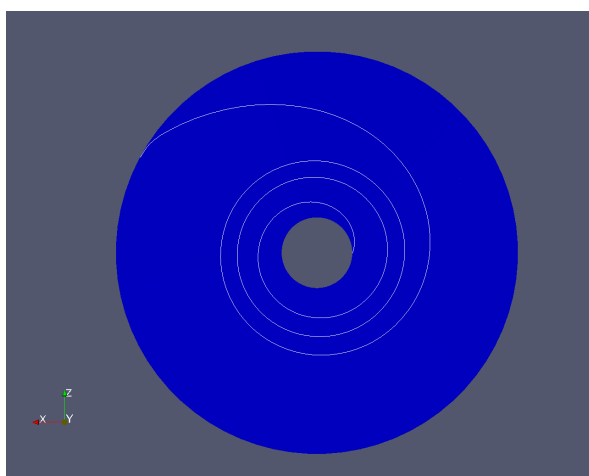
Slika 5.5 Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 12,096$ l/s



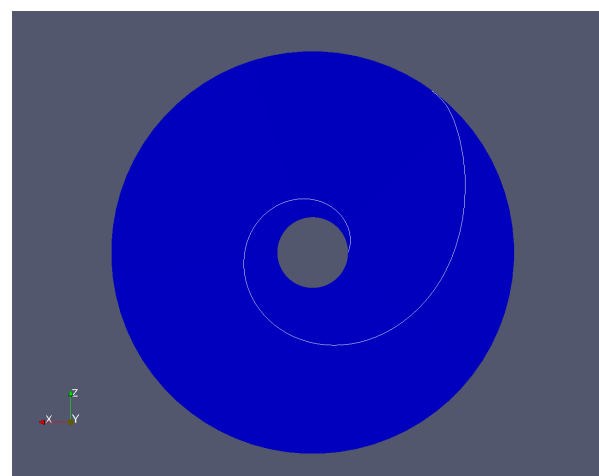
(a) Kut $\alpha = 78,69^\circ$



(b) Kut $\alpha = 75,963^\circ$

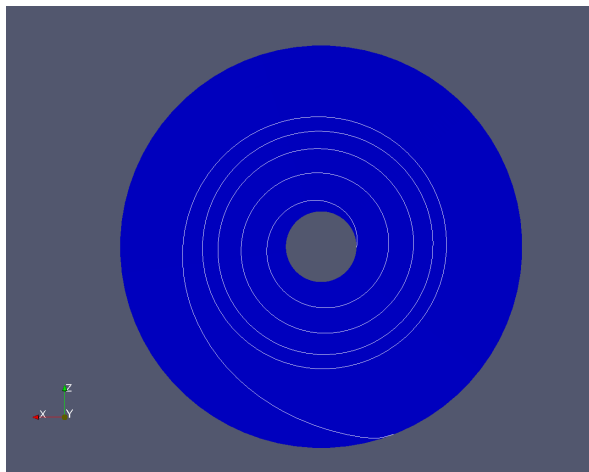


(c) Kut $\alpha = 71,562^\circ$

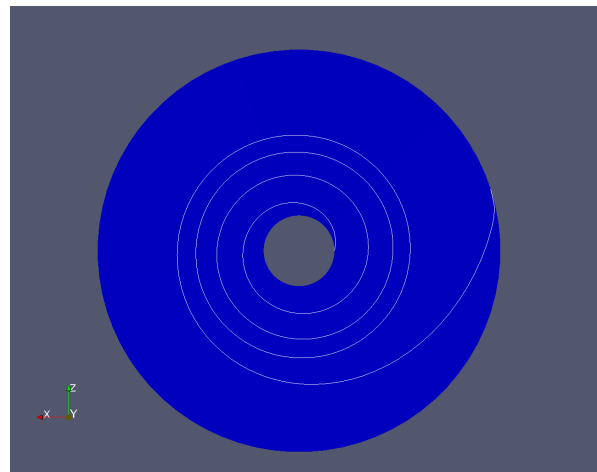


(d) Kut $\alpha = 63,432^\circ$

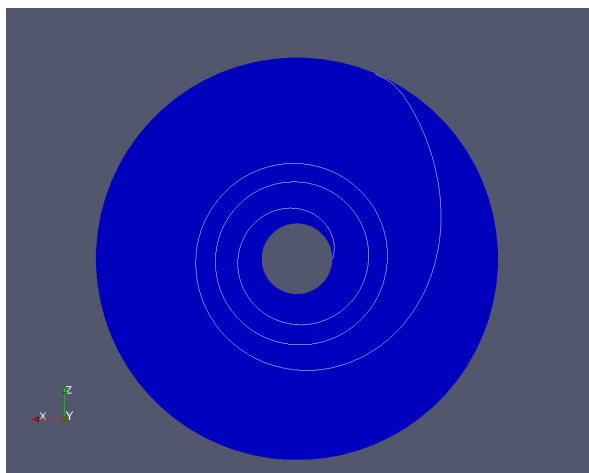
Slika 5.6 Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 10,364$ l/s



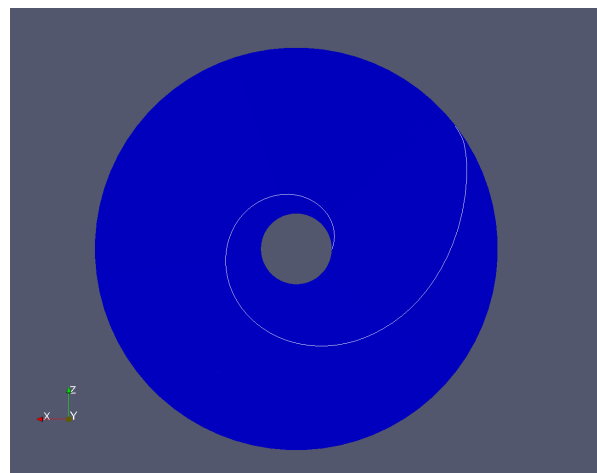
(a) Kut $\alpha = 78,69^\circ$



(b) Kut $\alpha = 75,963^\circ$

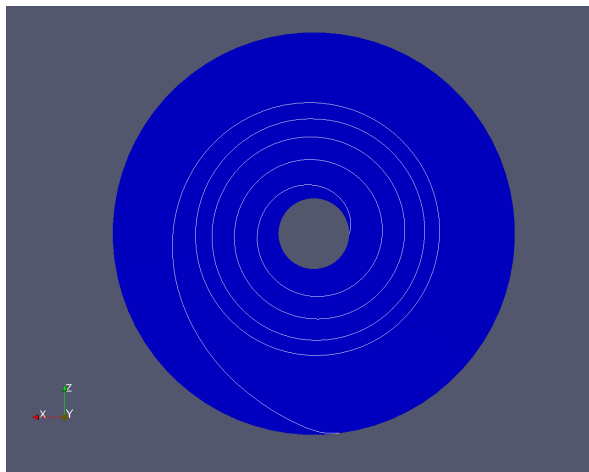


(c) Kut $\alpha = 71,562^\circ$

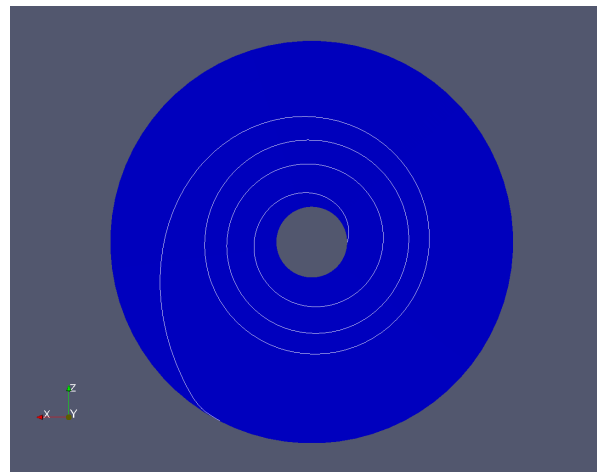


(d) Kut $\alpha = 63,432^\circ$

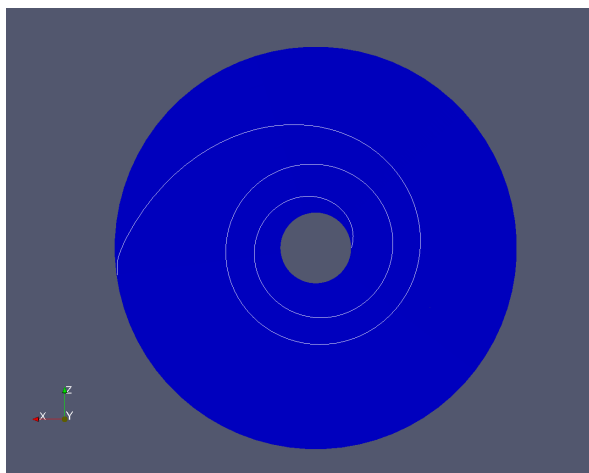
Slika 5.7 Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 8,64$ l/s



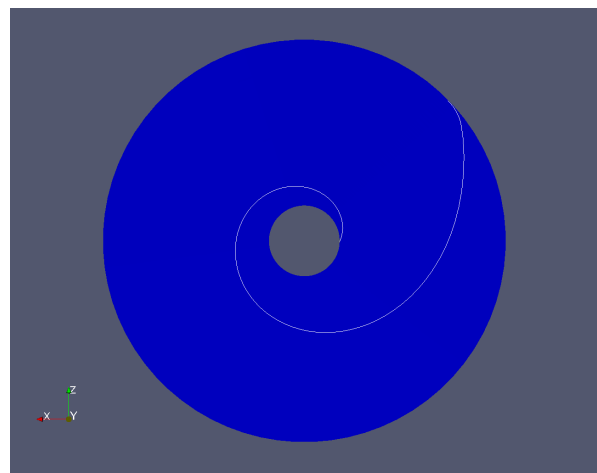
(a) Kut $\alpha = 78,69^\circ$



(b) Kut $\alpha = 75,963^\circ$



(c) Kut $\alpha = 71,562^\circ$



(d) Kut $\alpha = 63,432^\circ$

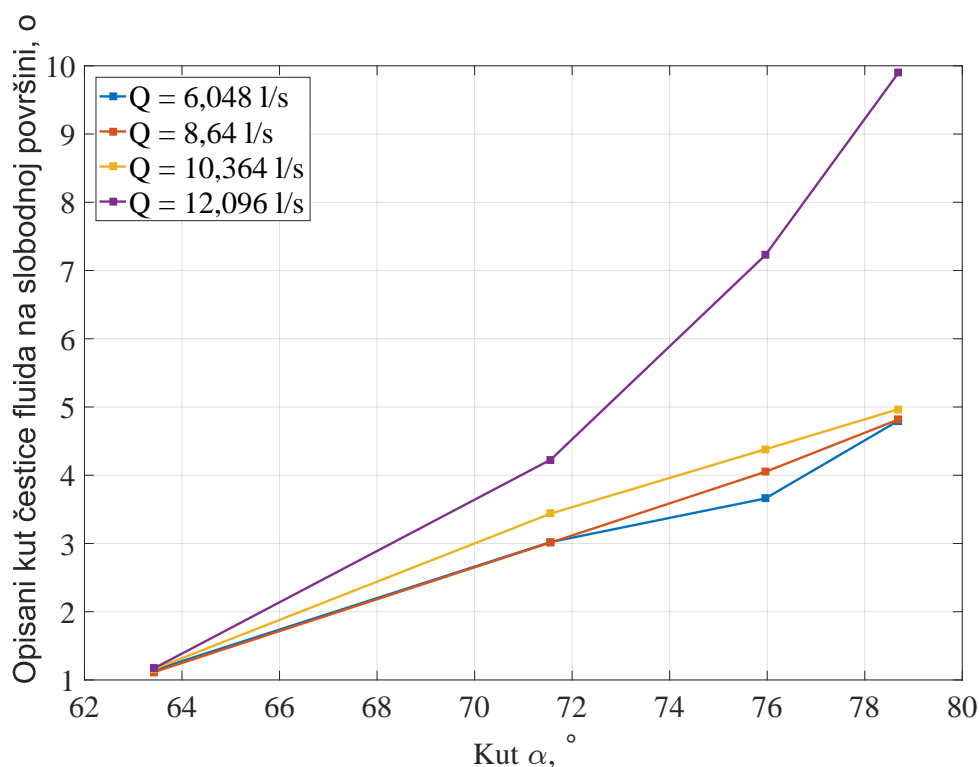
Slika 5.8 Trajektorije čestice fluida na slobodnoj površini za protok $Q = 6,048$ l/s

5.2. Grafički prikaz ovisnosti puta čestice fluida na slobodnoj površini

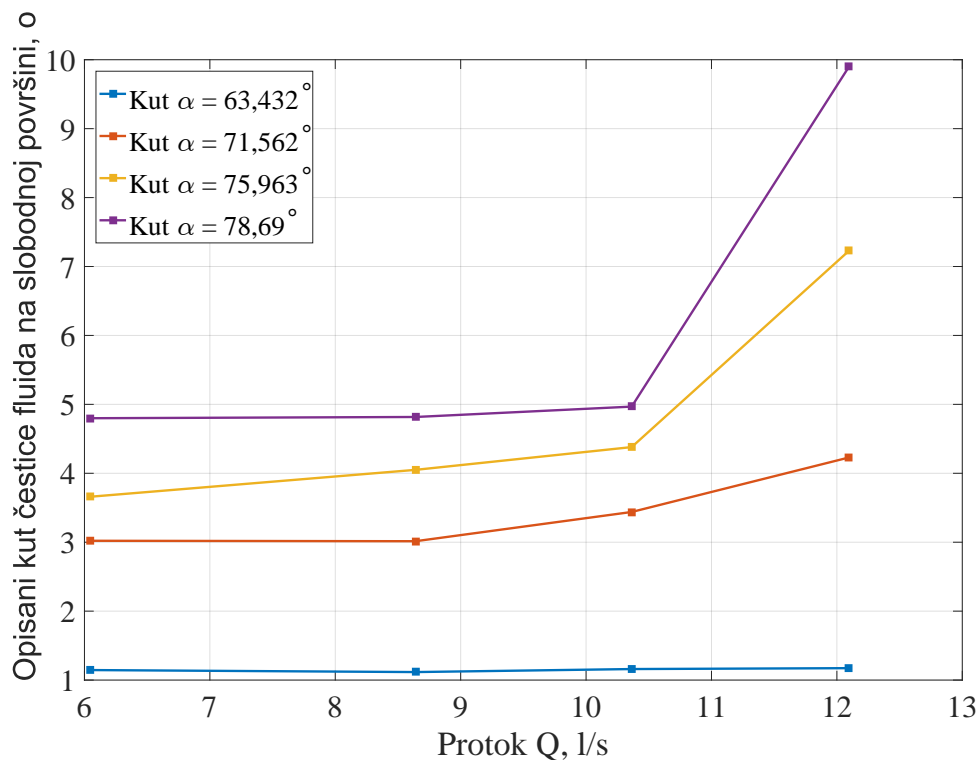
Prije prikazivanja dijagrama, dobiveni rezultati će se prikazati u tablici 5. Treba napomenuti kako su na apscisi tablice prikazani postavljeni kutovi mlaznica u odnosu na radijalni smjer u stupnjevima, a na ordinatu su postavljeni ukupni protoci u zdencu. Rezultantni opisani kut čestice fluida na slobodnoj površini za svaku od kombinacija protoka Q i kuta α upisani su u tablicu 5 iskazano u okretajima.

Q [l/s]	α [°]	5	4	3	2
	$\text{tg } \alpha$	78,69	75,963	71,562	63,432
12,096		9,897	7,227	4,229	1,173
10,364		4,967	4,38	3,439	1,16
8,64		4,817	4,05	3,174	1,116
6,048		4,8	3,66	3,021	1,145

Tablica 5 Ovisnost opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini o protoku Q i kutu α



Slika 5.9 Ovisnost opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini o kutu α i protoku Q



Slika 5.10 Ovisnost opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini o protoku Q i kutu α

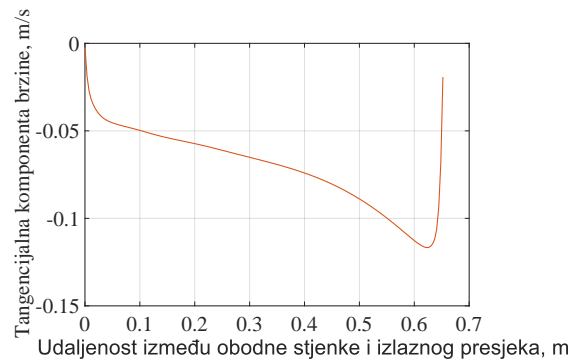
5.3. Analiza utjecaja protoka Q i kuta α na opisani kut čestice fluida na slobodnoj površini

Sa dijagrama na slici 5.9 se vidi kako s porastom kuta kojeg mlaznica zatvara s radijalnim smjerom, uz konstantan protok, raste i kut kojeg čestica fluida opisuje na slobodnoj površini. Također, sa dijagrama na slici 5.10 se vidi kako se s porastom protoka, uz konstantan kut α , povećava i kut kojeg čestica fluida opisuje na slobodnoj površini.

Kako bi odredili razlog ponašanja dobivenih rezultata prikazat će se tangencijalne i radijalne komponente brzine po duljini između obodne stjenke i izlaznog presjeka par centimetara ispod slobodne površine, točnije na visini od 0,2 m. Neće se prikazati komponente brzina za sve proračune već za svaki protok Q uz najmanji i najveći zadani kut α .



(a) Radijalna komponenta brzine

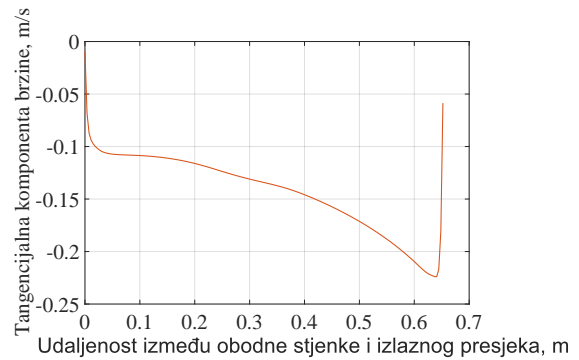


(b) Tangencijalna komponenta brzine

Slika 5.11 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 6,048$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$

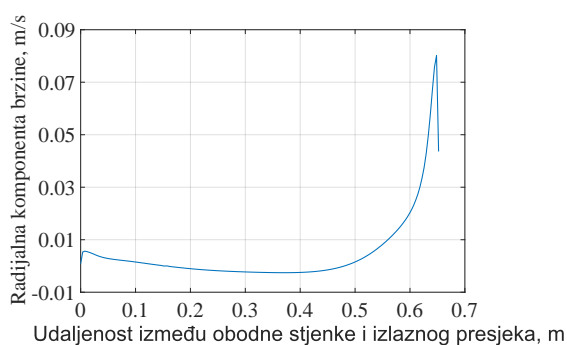


(a) Radijalna komponenta brzine

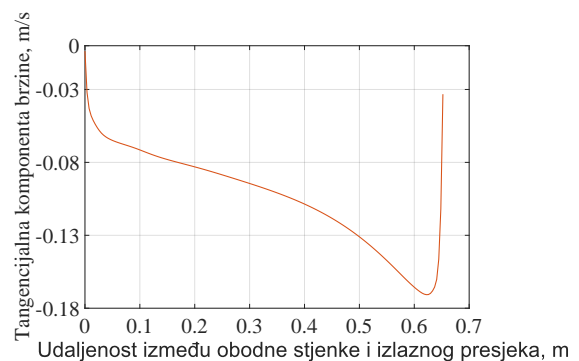


(b) Tangencijalna komponenta brzine

Slika 5.12 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 6,048$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$

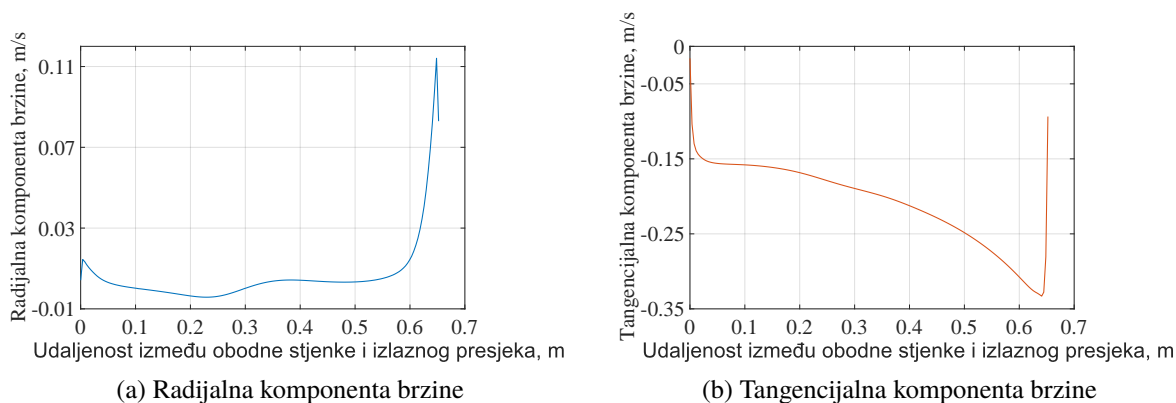


(a) Radijalna komponenta brzine

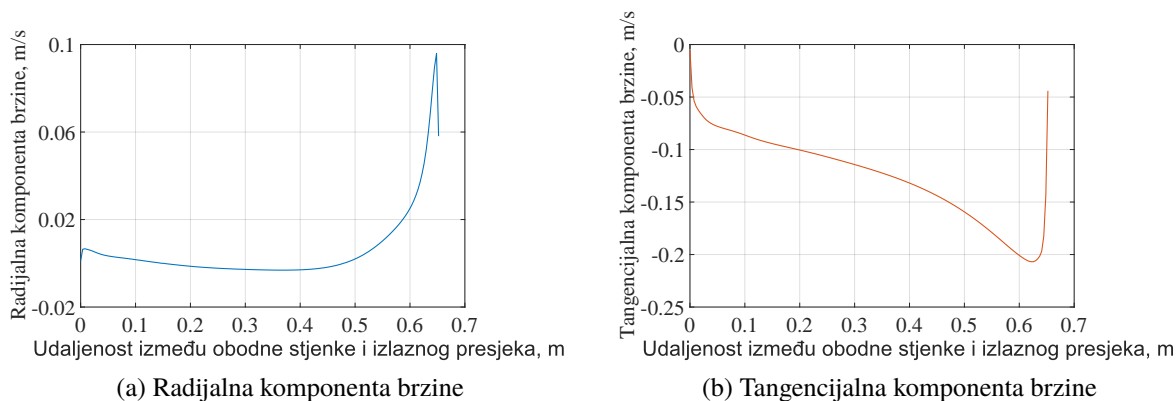


(b) Tangencijalna komponenta brzine

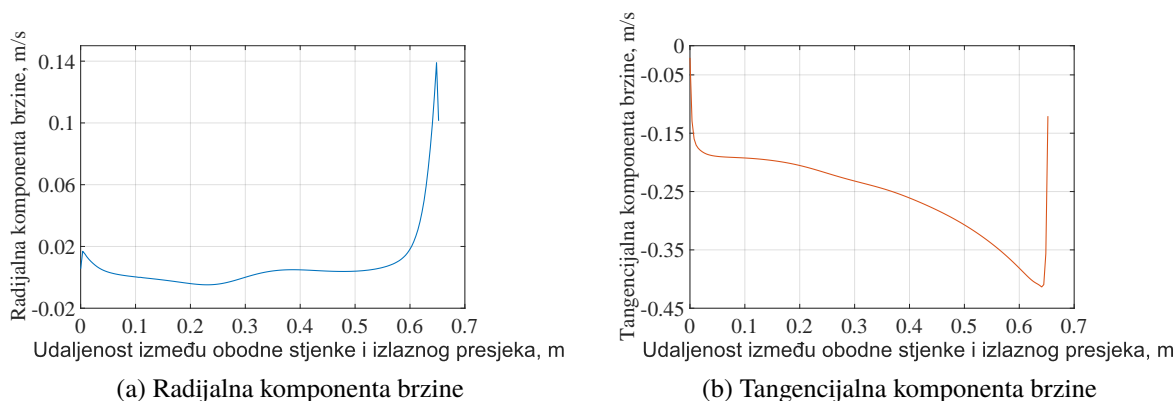
Slika 5.13 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 8,64$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$



Slika 5.14 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 8,64$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$



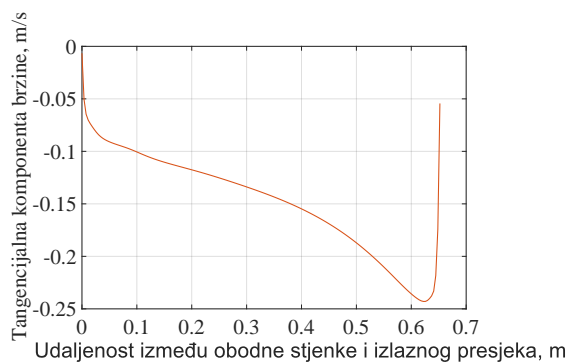
Slika 5.15 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 10,364$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$



Slika 5.16 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 10,364$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$

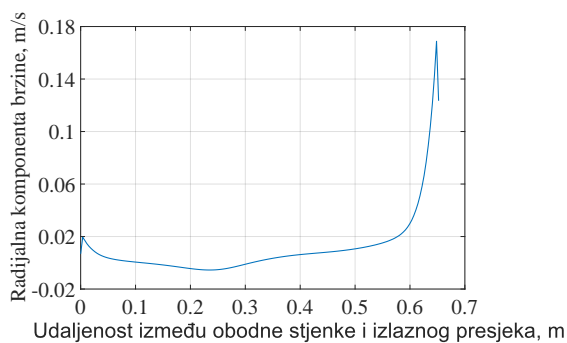


(a) Radijalna komponenta brzine



(b) Tangencijalna komponenta brzine

Slika 5.17 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 12,096$ l/s te $\alpha = 63,432^\circ$



(a) Radijalna komponenta brzine



(b) Tangencijalna komponenta brzine

Slika 5.18 Radijalna i tangencijalna komponenta brzine za zadani protok $Q = 12,096$ l/s te $\alpha = 78,69^\circ$

Razlog porasta opisanog kuta čestice fluida na slobodnoj površini s porastom kuta α i protoka Q se jasno vidi na slikama 5.11 - 5.18. Jasno se vidi kako sa porastom kuta ali i protoka tangencijalna komponenta brzine biva sve dominantnija u odnosu na radijalnu komponentu što uzrokuje jače vrtloženje strujanja.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu se ispitivao utjecaj kuta α kojeg zatvara svaka mlaznica u odnosu na radijalni smjer i protoka Q na put kojeg čestica fluida prijeđe na slobodnoj površini za šesnaest različitih slučajeva. Odabrana su četiri protoka, koji su smisleni za dimenziju zdenca, te isto toliko kuteva α . Proračuni su izvršeni na istoj mreži konačnih volumena na način da se za odabrani protok varirao kut α .

Dobiveni rezultati prikazani u prethodnom poglavlju nam daju uvid u vrtložno strujanje fluida u zdencu opisane geometrije. Grafički prikaz ovisnosti puta kojeg čestica fluida prijeđe na slobodnoj površini o kutu α kojeg zatvara svaka mlaznica u odnosu na radijalni smjer i protoka Q ukazuje na očitu nelinearnost promatranog problema ali i na nedostatak podataka. Šesnaest proračuna nije dovoljno da se precizno odrede navedene ovisnosti veličina, već je potrebno izvršiti mnogo više proračuna.

Koristeći istu mrežu za sve varijacije protoka Q i kuta α svjesno je unesena pogreška u dobivene rezultate. Razlog tome je što modeliranju geometrijskog modela prethodi izvršavanje proračuna rješavačem *interFoam*, kako bi se odredio položaj slobodne površine koja se aproksimira pravcem, za što je potrebno mnogo više vremena kako bi rješenje konvergiralo.

Dobiveni rezultati ukazuju na način promjene puta kojeg čestica fluida prijeđe na slobodnoj površini te mogu poslužiti kao ulazni podaci za proračun strujanja čiji matematički model opisuje dvofazno strujanje.

LITERATURA

- [1] Virag, Z., Džijan, I., Računalna dinamika fluida, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2014.
- [2] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I., Mehanika fluida II, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2015.
- [3] Menter, F.R., Zonal Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows, AIAA Paper 93-2906, 1993.
- [4] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M., The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics, Springer, 2015.
- [5] Marić, T., Završni rad, Numerička studija udara kapljice u kose površine, Zagreb, 2008.
- [6] Damián, S. M., Doctoral Thesis, An extended mixture model for the simultaneous treatment of short and long scale interfaces, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hidricas, Universidad Nacional del Litoral, 2013.
- [7] *OpenFOAM* User Guide, 2017.
- [8] Juretić, F., *cfMesh* User Guide, 2015.
- [9] Sorić, J., Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.

PRILOZI

- [1] CD-R disc