

Neizrazito prediktivno upravljanje mobilnim robotom

Ceraj, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:189296>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Luka Ceraj

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Dubravko Majetić

Student:

Luka Ceraj

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. Dr. sc. Dubravku Majetiću i prof. Dr. sc. Josipu Kasaću na pomoći i savjetima prilikom same izrade diplomskog rada, te prof. Dr. sc. Mladenu Crnekoviću na pomoći i savjetima vezanim za rad u laboratoriju s mobilnim robotima.

Također, zahvaljujem se kolegama Benjaminu Ivasoviću, Matiji Prširu, Davidu Rupčiću, Tei Braunu, Dominiku Sremiću, te ostalima koji su mi na bilo koji način pomagali i podupirali me tijekom cijelog trajanja studija.

Na kraju, zahvaljujem se svojoj obitelji, rodbini i prijateljima na potpori koju su mi pružili tijekom studija.

Luka Ceraj



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Luka Ceraj**

Mat. br.: 0035173603

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Neizrazito prediktivno upravljanje mobilnim robotom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Mobile robot fuzzy predictive control**

Opis zadatka:

Temeljem estimiranih stanja, mobilni će robot predviđati položaj drugog mobilnog robota u budućem trenutku te će temeljem estimiranog položaja u što kraćem vremenu pokušati sustići drugog mobilnog robota u gibanju. Korištenjem izvedenog estimatora stanja, mobilnim robotom treba upravljati pomoću neizrazitog analitičkog regulatora.

U radu treba načiniti slijedeće:

1. Projektirati neizraziti analitički fuzzy regulator za upravljanje mobilnim robotom.
2. Izvesti algoritam predikcije putanje mobilnog robota tako da putanja dobivena prediktivnim algoritmom služi kao referentna putanja drugom mobilnom robotu, a koji slijedi putanju prvog mobilnog robota estimiranu za zadano vrijeme u budućnosti.
3. Provesti simulacije algoritma za različite putanje prvog mobilnog robota i različita vremena predikcije.
4. Izvedeni algoritam upravljanja testirati u laboratoriju na realnim mobilnim robotima.
5. Izvesti zaključke rada.

Zadatak zadan:
19. siječnja 2017.

Rok predaje rada:
23. ožujka 2017.

Predviđeni datum obrane:
29., 30. i 31. ožujka 2017.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Dubravko Majetić

Prof. dr. sc. Biserka Runje

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA	VII
POPIS OZNAKA	VIII
SAŽETAK	IX
SUMMARY	X
1. UVOD	1
2. MOBILNI ROBOTI	2
2.1. Mobilni roboti eMIR – educational Mobile Intelligent Researcher	4
2.2. Matematički model mobilnog robota	7
3. NEIZRAZITA (FUZZY) LOGIKA	10
3.1. Neizraziti skupovi	12
3.1.1. Klasični (izraziti) skupovi	12
3.1.2. Definicija neizrazitih skupova	13
3.1.2.1. Oblici funkcija pripadnosti	13
3.1.2.2. Karakteristike funkcija pripadnosti	15
3.1.3. Jezične (lingvističke) varijable	16
3.1.4. Operacije s neizrazitim skupovima	16
3.1.5. Neizrazite relacije	17
3.1.6. Kompozicija neizrazitih relacija	18
3.2. Osnove neizrazite logike	19
3.2.1. Klasična (dvoznačna) logika	19
3.2.2. Višeznačna logika	20
3.2.3. Neizrazita logika i neizrazite logičke operacije	22
3.3. Neizraziti sustavi	23
3.3.1. Sinteza neizrazitog regulatora za upravljanje mobilnim robotom	24
3.3.2. Sinteza analitičkog fuzzy regulatora za slijeđenje referentne trajektorije	28
4. ESTIMACIJA PARAMETARA	31
5. REZULTATI SIMULACIJE	35
5.1. Rezultati simulacije za zadane upravljačke varijable prvog mobilnog robota $u_{11} = 0.125 \text{ m/s}$ i $u_{12} = 0.0 \text{ rad/s}$	36
5.1.1. Međusobno isto orijentirani mobilni roboti za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota	37
5.1.1.1. Vremenski horizont predikcije $T = 1 \text{ s}$	37
5.1.1.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3 \text{ s}$	39
5.1.1.3. Vremenski horizont predikcije $T = 5 \text{ s}$	41
5.1.2. Međusobno okomito orijentirani mobilni roboti za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota	43
5.1.2.1. Vremenski horizont predikcije $T = 1 \text{ s}$	43
5.1.2.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3 \text{ s}$	45

5.1.3. Suprotno orijentirani mobilni roboti za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota.....	47
5.1.3.1. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 1$ s.....	37
5.1.3.2. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 3$ s.....	49
5.2. Rezultati simulacije za zadane upravljačke varijable prvog mobilnog robota $u_{11} = 0.125$ m/s i $u_{12} = -0.1$ rad/s.....	51
5.2.1. Međusobno isto orijentirani mobilni roboti za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota.....	53
5.2.1.1. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 1$ s.....	53
5.2.1.2. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 3$ s.....	55
5.2.2. Međusobno okomito orijentirani mobilni roboti za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota.....	57
5.2.2.1. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 1$ s.....	57
5.2.2.2. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 3$ s.....	59
5.2.3. Suprotno orijentirani mobilni roboti za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota.....	60
5.2.3.1. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 1$ s.....	60
5.2.3.2. <i>Vremenski horizont predikcije</i> $T = 3$ s.....	62
6. REZULTATI EKSPERIMENTA.....	65
6.1. Rezultati eksperimenta za pravocrtnu putanju prvog mobilnog robota.....	66
6.2. Rezultati eksperimenta za polukružnu putanju prvog mobilnog robota.....	69
7. ZAKLJUČAK.....	72
LITERATURA.....	74

POPIS SLIKA

Slika 2.1.	Mobilni robot (lijevo) i industrijski robot (desno)	2
Slika 2.2.	Mobilni roboti eMIR	4
Slika 2.3.	Struktura mobilnog robota	5
Slika 2.4.	Mobilni robot u horizontalnoj ravnini	7
Slika 3.1.	Najčešći oblici funkcija pripadnosti	14
Slika 3.2.	Trapezoidna funkcija pripadnosti	14
Slika 3.3.	Usporedba operacija s klasičnim (lijevo) i neizrazitim (desno) skupovima	17
Slika 3.4.	Tijek procesa u neizrazitom sustavu	24
Slika 3.5.	Neizrazite varijable pozicije (lijevo) i orijentacije (desno) mobilnog robota u koordinatnom sustavu	25
Slika 3.6.	Prikaz pravila ponašanja u koordinatnom sustavu	27
Slika 3.7.	Slijeđenje referentne trajektorije	29
Slika 3.8.	Vektorski produkt	30
Slika 5.1.	Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota definirane tablicom 5.2. (lijevo - isto orijentirani roboti, sredina - okomito orijentirani roboti, desno - suprotno orijentirani roboti)	37
Slika 5.2.	Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s	38
Slika 5.3.	Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s	38
Slika 5.4.	Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s	39
Slika 5.5.	Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s	40
Slika 5.6.	Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s	40
Slika 5.7.	Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s	41
Slika 5.8.	Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 5$ s	42
Slika 5.9.	Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 5$ s	42
Slika 5.10.	Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 5$ s	43
Slika 5.11.	Putanje međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s	44

Slika 5.12. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	44
Slika 5.13. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	45
Slika 5.14. Putanje međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	46
Slika 5.15. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	46
Slika 5.16. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	47
Slika 5.17. Putanje suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	48
Slika 5.18. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 1$ s.....	48
Slika 5.19. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	49
Slika 5.20. Putanje suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	50
Slika 5.21. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 3$ s.....	50
Slika 5.22. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	51
Slika 5.23. Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota definirane tablicom 5.3. (lijevo - isto orijentirani roboti, sredina - okomito orijentirani roboti, desno - suprotno orijentirani roboti).....	52
Slika 5.24. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	53
Slika 5.25. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	54
Slika 5.26. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	54
Slika 5.27. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	55

Slika 5.28. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	56
Slika 5.29. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	56
Slika 5.30. Putanje međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	57
Slika 5.31. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	58
Slika 5.32. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	58
Slika 5.33. Putanje međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	59
Slika 5.34. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	59
Slika 5.35. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	60
Slika 5.36. Putanje suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	61
Slika 5.37. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 1$ s.....	61
Slika 5.38. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s.....	62
Slika 5.39. Putanje suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	63
Slika 5.40. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 3$ s.....	63
Slika 5.41. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s.....	64
Slika 6.1. Početni uvjeti za pravocrtno gibanje prvog mobilnog robota	66
Slika 6.2. Putanje mobilnih robota dobivene simulacijom za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota	67
Slika 6.3. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota dobivene regulatorom za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota	67
Slika 6.4. Gibanje robota bez predikcije (lijevo) i sa predikcijom (desno).....	68
Slika 6.5. Početni uvjeti za polukružno gibanje prvog mobilnog robota.....	69

Slika 6.6. Putanje mobilnih robota dobivene simulacijom za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota	69
Slika 6.7. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota dobivene regulatorom za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota.....	70
Slika 6.8. Gibanje robota bez predikcije (lijevo) i sa predikcijom (desno).....	71

POPIS TABLICA

Tablica 2.1.	Tehnički podaci mobilnih robota eMIR	5
Tablica 3.1.	Tablica istinitosti za skup vrijednosti $\{0, 1\}$	20
Tablica 3.2.	Tablica istinitosti za skup vrijednosti $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$	21
Tablica 5.1.	Početni uvjeti i parametri simulacija	35
Tablica 5.2.	Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota u xy ravnini za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota	36
Tablica 5.3.	Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota u xy ravnini za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota.....	52

POPIS OZNAKA

D [mm] - promjer kotača mobilnog robota

L [mm] - razmak između kotača mobilnog robota

v_{max} [m/s] - maksimalna translacijska brzina mobilnog robota

ω_{max} [rad/s] - maksimalna rotacijska brzina mobilnog robota

ω_L [rad/s] - rotacijska brzina lijevog kotača

ω_R [rad/s] - rotacijska brzina desnog kotača

x [m] - pozicija mobilnog robota na x -osi

y [m] - pozicija mobilnog robota na y -osi

Θ [rad] - kut orijentacije mobilnog robota

u_1 [m/s] - upravljačka veličina za translacijsku brzinu mobilnog robota

u_2 [rad/s] - upravljačka veličina za rotacijsku brzinu mobilnog robota

no [m] - norma udaljenosti mobilnog robota od cilja

vp - normirani vektorski produkt

k_1, k_2, k_3 - parametri analitičkog neizrazitog regulatora

μ - pojačanje adaptivnog estimatora

η - pojačanje filtera

T [s] - vremenski horizont predikcije

c [%] - korekcijski faktori

SAŽETAK

Mogućnost predikcije, tj. predviđanja nekog događaja u budućnosti na temelju stečenih znanja i prijašnjih iskustava već desetljećima ima važnu ulogu u velikom broju znanstvenih i neznastvenih disciplina. Predikcija u strojarstvu ima široku primjenu, a posebno u robotici. U ovom radu je prikazan jedan takav primjer. U sustav mobilnog robota biti će implementiran estimator stanja koji će na temelju poznate pozicije estimirati vrijednosti brzine i akceleracije. Na temelju estimiranih podataka mobilni robot će 'predviđati' položaj drugog mobilnog robota u nekom zadanom budućem trenutku, te će na temelju estimiranog položaja pokušati sustići svoj cilj, tj. drugog mobilnog robota, u svrhu skraćivanja potrebne putanje i što je važnije, proteklog vremena. Mobilni robot je upravlján pomoću analitičkog neizrazitog regulatora uz korištenje estimatora stanja. Provedene su simulacije za različite referentne putanje i različita vremenska horizonta predikcije, te različite početne pozicije i orijentacije robota. Po jedan slučaj za svaku definiranu putanju je izveden u laboratoriju na realnim mobilnim robotima.

Ključne riječi:

predikcija

mobilni roboti

referentna putanja

fuzzy logika

neizraziti sustav

analitički fuzzy regulator

estimator stanja

prediktivni algoritam

SUMMARY

The possibility of prediction, i.e., prediction of a future event on the basis of acquired knowledge and previous experiences for decades has had an important role in a number of scientific and non-scientific disciplines. Prediction in mechanical engineering is widely used, especially in robotics. This paper presents one such example. The mobile robot system will be implemented with state estimator that will, given the known position estimate the value of speed and acceleration. Based on estimated data robot will 'predict' the position of the second mobile robot at a given future time, and will on the basis of the estimated position try to catch up with its target, i.e., second mobile robot, in order to shorten the necessary path and more importantly, the time elapsed. Mobile robot is controlled by analytical fuzzy controller using the state estimator. Simulations were performed for different reference trajectories and different time horizons of prediction, and different starting positions and orientations of the robots. One case for each defined path is performed in the laboratory with the real mobile robots.

Key words:

prediction

mobile robots

reference trajectory

fuzzy logic

fuzzy system

analytical fuzzy controller

state estimator

predictive algorithm

1. UVOD

Mogućnost predikcije, tj. predviđanja nekog događaja u budućnosti na temelju stečenih znanja i prijašnjih iskustava već desetljećima ima važnu ulogu u velikom broju znanstvenih i neznastvenih disciplina. Predikcija se koristi u statistici, ekonomiji, meteorologiji, financijama, vojnoj industriji, sportu, matematici, računalstvu, geologiji, strojarstvu i mnogim drugim znanostima.

Predikcija u strojarstvu ima široku primjenu, a posebno u robotici. U ovom radu će biti prikazan jedan takav primjer. U sustav mobilnog robota biti će implementiran estimator stanja koji će na temelju poznate pozicije estimirati vrijednosti brzine i akceleracije. Na temelju estimiranih podataka mobilni robot će 'predviđati' položaj drugog mobilnog robota u nekom zadanom budućem trenutku, te će na temelju estimiranog položaja pokušati sustići svoj cilj, tj. drugog mobilnog robota, u svrhu skraćivanja potrebne putanje i što je važnije, proteklog vremena. Mobilni robot je upravlján pomoću analitičkog neizrazitog regulatora uz korištenje estimatora stanja.

U idućem poglavlju biti će ukratko objašnjeni mobilni roboti, njihova svrha, izvedba, te način rada, i na kraju kratak prikaz mobilnih robota eMIR iz Laboratorija za strojarску automatiku koji će se koristiti prilikom provedbe eksperimenta.

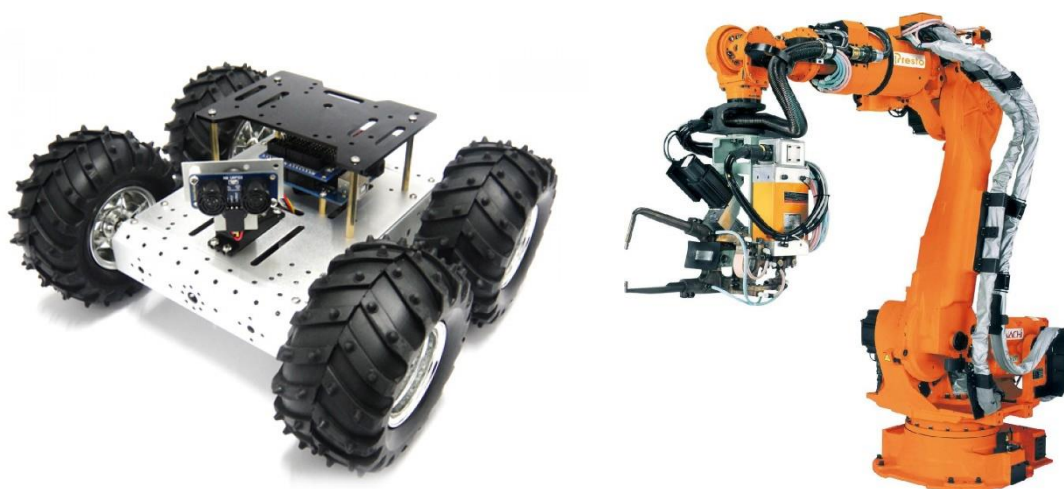
Nakon toga, u 3. poglavlju biti će objašnjene osnove neizrazite logike i neizrazitih sustava, te će biti dan primjer sinteze običnog i analitičkog neizrazitog regulatora koji će upravljati mobilnim robotom.

Slijedi poglavlje u kojem je prikazan način rada prediktivnog algoritma (estimatora stanja) koji estimira zadanu referentnu putanju za neki definirani vremenski horizont u budućnosti.

U predzadnjem poglavlju biti će prikazani rezultati provedenih simulacija (sveukupno 13), a u posljednjem poglavlju biti će ukratko opisan provedeni eksperiment i dobiveni rezultati.

2. MOBILNI ROBOTI

Mobilni roboti (Slika 2.1. lijevo) su automatski strojevi koji, uz pomoć kotača ili nekog drugog uređaja za pokretanje, imaju sposobnost samostalnog kretanja u svom okruženju i nisu fiksirani na jednome mjestu, za razliku od industrijskih robota (Slika 2.1. desno) koji uglavnom miruju i pričvršćeni su za fiksnu podlogu, a koriste fleksibilne zglobove ruke i mehanizam hvataljke za obavljanje neke radnje u prostoru [1].



Slika 2.1. Mobilni robot (lijevo) i industrijski robot (desno)

Mobilni roboti mogu biti 'autonomni' (engl. AMR – Autonomous Mobile Robot), što znači da su sposobni navigirati kroz nekontroliranu okolinu bez upotrebe fizičkih ili elektromehaničkih uređaja za navođenje, a isto tako mogu se i oslanjati na uređaje za navođenje koji im omogućuju kretanje po predefiniciranoj putanji u relativno kontroliranom prostoru (engl. AGV – Autonomous Guided Vehicle) [1].

Osnovni dijelovi mobilnog robota su kontrolna jedinica, upravljački softver, aktuatori i senzori. Kontrolna jedinica je obično mikroprocesor, ugrađeni mikrokontroler ili osobno računalo. Upravljački softver može biti ili programski jezik s razine assemblera ili neki od programskih jezika više razine (poput C, C++, Pascal i dr.). Senzori koje koristi robot s razlikuju s obzirom na zahtjeve robota, pa mogu biti senzori za mjerenje položaja, mjerenje brzine i ubrzanja, mjerenje sile, senzori opipa, ultrazvučni senzori i drugi [2,3]. Aktuatori su u većini slučajeva elektromotori.

Mobilni roboti imaju nekoliko podjela:

a) Prema okruženju u kojem se kreću se dijele na:

- Kopneni ili kućni roboti se obično nazivaju bespilotna kopnena vozila (engl. UGVs – Unmanned Ground Vehicles). Uglavnom se kreću pomoću kotača ili gusjenica, ali mogu imati i dvije ili više nogu za kretanje.
- Dostavni i transportni roboti prenose materijal i opremu kroz radnu okolinu.
- Zračni roboti se obično nazivaju bespilotna zračna vozila (engl. UAVs – Unmanned Aerial Vehicles).
- Podvodni roboti se obično nazivaju autonomna podvodna vozila (engl. AUVs – Autonomous Underwater Vehicles).
- Polarni roboti, dizajnirani za navigaciju po ledenim površinama [1].

b) Prema uređaju koji koriste za kretanje:

- Roboti s nogama; s nogama sličnim čovjeku (androidi) ili s nogama sličnim životinjama.
- Roboti s kotačima.
- Roboti s gusjenicama [3].

c) Prema načinu navigacije:

- Ručno upravljani roboti su potpuno pod kontrolom operatera uz pomoć joystick-a ili nekog drugog upravljačkog uređaja, koji može biti priključen direktno na robota ili povezan bežičnom vezom, ili povezan s računalom ili nekim drugim uređajem. Uglavnom se koriste kako bi se zaštitio operater.
- Zaštićeni ručno upravljani roboti mogu osjetiti i izbjeći prepreku u slučaju nepažnje operatera, ali inače navigiraju kao i obični ručno upravljani roboti.
- Mobilni roboti koji prate liniju su jedni od najranijih autonomnih vođenih vozila (AGVs). Kreću se prateći liniju naslikanu ili ugrađenu u pod ili strop ili električne vodove na podu. Nisu u mogućnosti zaobilaziti prepreke, nego se zaustave i čekaju kada im je put blokiran.
- Autonomni roboti s slučajnim kretanjem se u osnovi odbijaju od prepreka, bez obzira je li ih senzor 'osjetio' ili nije.
- Autonomno vođeni robot zna barem neke informacije o svom položaju u prostoru i kako doći do različitih ciljeva ili točaka na putu. Znanje o svom trenutnom položaju i orijentaciji dobiva računanjem, preko jednog ili više

senzora poput enkodera, kamere, lasera, sustava za pozicioniranje i dr. U realnom vremenu prikupljaju podatke s senzora i računaju putanju do iduće točke. Takvi roboti su obično dio veće mreže, povezani s ostalim senzorskim i kontrolnim sustavima.

- Roboti s kliznom autonomijom su roboti sposobni kombinirati više razina navigacije, od ručne pa do autonomne navigacije [1].

Mobilni roboti su zastupljeni u industriji, kućanstvima, poljoprivredi, medicini, koriste se u vojne svrhe, u uslužnim djelatnostima, za rehabilitaciju i pomoć nepokretnim osobama, u istraživanju svemira podmorja i planeta itd. Postaju sve češća pojava u industrijskim, a i u komercijalnim okruženjima. U bolnicama se već niz godina koriste za pomicanje opreme. U skladištima robe se koriste cijeli sustavi mobilnih robota koji prenose robu s zaliha do mjesta za otpremu. U domaćinstvima mobilni roboti služe za zabavu ali i kućanske poslove poput usisavanja ili vrtlarstva. Mobilni roboti su jedna od glavnih tema trenutnog istraživanja, pa zato skoro svako veće sveučilište na svijetu ima laboratorij koji se bavi istraživanjem mobilnih robota [1].

2.1. Mobilni roboti eMIR – educational Mobile Intelligent Researcher

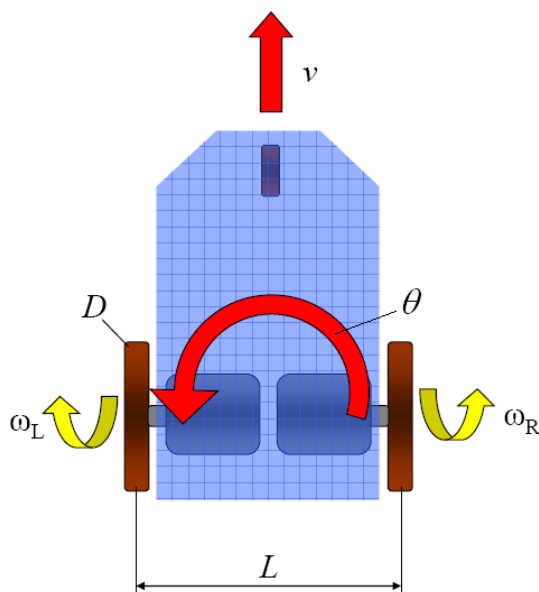
Dio ovog rada je i provođenje eksperimenta na realnim mobilnim robotima. U tu svrhu biti će korišteni mobilni roboti u Laboratoriju za strojarsku automatiku, eMIR – educational Mobile Intelligent Researcher (slika 2.2.).



Slika 2.2. Mobilni roboti eMIR (slika preuzeta iz [4])

Prema podjeli u prethodnom poglavlju, ovi roboti spadaju u grupu ručno upravljanih kopnenih bezpilotnih vozila koji se kreću uz pomoć kotača.

Sva tri robota se kreću pomoću tri kotača. Dva stražnja kotača su fiksna i imaju ulogu pogonskih kotača, svaki kotač je pogonjen vlastitim elektromotorom, a treći kotač je rotacioni, služi za skretanje robota i nije pogonjen. Na slici 2.3. prikazana je mehanička struktura robota.



Slika 2.3. Struktura mobilnog robota (slika preuzeta iz [3])

Svaki robot je opremljen s 6 senzora udaljenosti (3 s prednje, 2 s bočne i jedan s stražnje strane robota) i bluetooth uređajem za komunikaciju. Roboti mogu biti upravljani pomoću joystick-a, preko programa za upravljanje ili preko seta naredbi koje se serijskom vezom šalju pomoću nekog drugog programa. U tablici 2.1 prikazani su neki osnovni tehnički podaci o robotima [4].

Tablica 2.1. Tehnički podaci mobilnih robota eMIR [4]

Dimenzije robota [mm]	300 x 250
Promjer kotača D [mm]	80
Razmak između kotača L [mm]	240
Maksimalni broj okretaja kotača Ω [rad/s]	4.5 (0.75 okr/s)
Maksimalna translacijska brzina v_{max} [m/s]	0.185
Maksimalna rotacijska brzina ω_{max} [rad/s]	$\pi/2$

Motori	IG – 32GM, Ø32 x 80, 24 V
Stupanj redukcije N	71
Enkoder	Dvokanalni, 7 impulsa po okretaju (x 71 = 497 ukupno)
Driver	LMD18200 (max 3A) - PWM
Senzori	Sharp GP2Y0A21YK0F i Sharp GP2Y0D810Z0F
Komunikacija	Bluetooth, WRL – 09434 i WRL - 00582
Upravljački program	eMIR Robot Manager V7
Baterija	12 V, 2.2 Ah
Maksimalna potrošnja	450 mA

Brzinu kotača regulira 8 – bitni mikrokontroler Atmel AT89C51ID2 (ED2, RE2). Brzina kotača se mjeri svakih 260 ms, a postavna veličina se računa svakih 100 ms [4].

Prilikom provođenja eksperimenta korišten je treći navedeni način upravljanja robotima, tj. preko drugog programa, pa iz tog razloga slijedi kraće objašnjenje načina slanja naredbi. Naredbe robotima se šalju u obliku znakovnog stringa od 10 bajtova koji općenito izgleda ovako (bez razmaka između bajtova):

$$\# \text{ NN aa bb CS /} \quad (2.1)$$

gdje su:

- # - početak naredbe
- NN – broj naredbe (npr. 01 definiranje brzine robota, 05 aktivacija senzora, itd.)
- aa – prvi argument naredbe
- bb – drugi argument naredbe
- CS – Check Sum (iznos Check Sum mora biti $\text{CS} = 256 - (\text{NN} + \text{aa} + \text{bb})$)
- / - kraj naredbe [4].

Svi parametri naredba zadaju se u heksadecimalnom obliku, tako da npr. naredba za zadavanje translacijske i rotacijske brzine u iznosu 50 % maksimalne brzine izgleda ovako:

$$\# 01\ 32\ 32\ 9B / \quad (2.2)$$

gdje 01 označava naredbu za definiranje brzine, 32 50 % translacijske brzine u heksadecimalnom obliku, 32 50 % rotacijske brzine u heksadecimalnom obliku i 9B Check Sum dobiven kao $CS = 256 - (01 + 50 + 50) = 155$, što je 9B u heksadecimalnom obliku.

Ukoliko robot 1 sekundu ne primi nikakvu naredbu automatski će se zaustaviti, a nakon 120 sekundi bez primljene naredbe će se isključiti. Robot će se također isključiti ako napon baterije padne ispod 10.5 V [4]. Roboti imaju mogućnosti priključivanja kamere i drugih uređaja.

Slijedi objašnjenje diferencijalne strukture mobilnih robota koja je neophodna za projektiranje regulatora.

2.2. Matematički model mobilnog robota

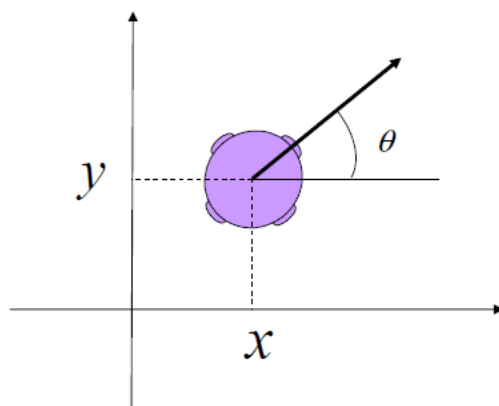
U prethodnom poglavlju dan je općenit opis mobilnih robota i robota eMIR na kojima je proveden eksperiment. Za projektiranje regulatora za upravljanje robotima potrebno je opisati kinematički model mobilnog robota. U tu svrhu korištena je najjednostavnija moguća struktura – diferencijalna struktura mobilnog robota. Radi jednostavnosti korištena je diferencijalna struktura mobilnih robota eMIR. Kod takve strukture robota translacijska i rotacijska brzina samog robota određuju se na temelju razlika brzina lijevog i desnog kotača. Na slici 2.3. prikazana je mehanička, a i diferencijalna struktura mobilnog robota iz koje se mogu dobiti izrazi za translacijsku i rotacijsku brzinu mobilnog robota [3]:

$$v = \frac{D(\omega_R + \omega_L)}{4}, \quad (2.3)$$

$$\omega = \frac{D(\omega_R - \omega_L)}{2L}, \quad (2.4)$$

gdje su:

- D - promjer kotača robota
- ω_L - rotacijska brzina lijevog kotača
- ω_R - rotacijska brzina desnog kotača
- L - udaljenost između lijevog i desnog kotača.



Slika 2.4. Mobilni robot u horizontalnoj ravnini (slika preuzeta iz [6])

Kod mobilnih robota postoji problem upravljivosti. Iz predhodnog poglavlja je već poznato da mobilni roboti imaju samo dva aktuatora, tj. dva pogonska kotača, a prema slici 2.4. vidljivo je da imaju 3 stupnja slobode gibanja: po osi x , po osi y , te rotaciju oko vlastite osi. To znači da je broj stupnjeva slobode gibanja robota veći od broja upravljivih stupnjeva slobode gibanja, tj. postoje gibanja koja mobilni roboti ne mogu napraviti (npr. bočno gibanje). Zbog tog problema mobilni roboti spadaju u skupinu podaktuiranih mehaničkih sustava [5].

Postavi li se mobilni robot u horizontalnoj ravnini kao na slici 2.4. njegove trenutne koordinate u ravnini i zakretni kut su dani sljedećim izrazima [2, 3]:

$$x = \int v \cos(\theta) dt, \quad (2.5)$$

$$y = \int v \sin(\theta) dt, \quad (2.6)$$

$$\theta = \int \omega dt. \quad (2.7)$$

Derivacijom izraza (2.5), (2.6) i (2.7) po vremenu t dobiva se:

$$\dot{x} = v \cos(\theta), \quad (2.8)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta), \quad (2.9)$$

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (2.10)$$

Uvođenjem upravljačkih varijabli u_1 i u_2 umjesto translacijske, odnosno rotacijske brzine u izraze (2.8), (2.9) i (2.10) dobivaju se konačni izrazi pomoću koji će mobilni robot biti upravljan od strane neizrazitog regulatora:

$$\dot{x} = u_1 \cos(\theta), \quad (2.11)$$

$$\dot{y} = u_1 \sin(\theta), \quad (2.12)$$

$$\dot{\theta} = u_2. \quad (2.13)$$

Izrazi (2.11), (2.12) i (2.13) nazivaju se kinematičkim jednadžbama mobilnog robota [2]. Pomoću njih će biti projektiran analitički neizraziti regulator provedena estimacija parametara. Trenutne koordinate x , y i θ prvog mobilnog robota biti će ulazne veličine za estimator, koji će kao svoj izlaz davati estimiranu putanju prvog mobilnog robota, a ti estimirani parametri će biti ulaz neizrazitog regulatora, čije će izlazne veličine biti upravljačke varijable u_1 i u_2 drugog mobilnog robota.

U idućem poglavlju biti će opisano projektiranje neizrazitog regulatora, ali će prvo biti rečeno nešto o samoj neizrazitoj logici.

3. NEIZRAZITA (FUZZY) LOGIKA

Znanje o nekom razmatranom problemu može se podijeliti u objektivno znanje, reprezentirano najčešće matematičkim jednadžbama formiranim na temelju osnovnih fizikalnih zakona i subjektivno znanje, reprezentirano lingvističkim informacijama koje je praktički nemoguće izraziti primjenom tradicionalnog matematičkog formalizma. Primjeri objektivnog znanja su obične diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamičke procese u mehanici, parcijalne diferencijalne jednadžbe koje opisuju toplinske procese, konvolucijski model koji opisuje komunikacijski kanal, itd. Primjer subjektivnog znanja je sljedeće pravilo pri vožnji automobilom: ako je nailazeće vozilo jako daleko i ako vozilo ispred vozi jako sporo onda treba dodati srednje jaki gas i prijeći vozilo ispred sebe. Iz navedenog primjera očigledno je da za upravljanje složenim tehničkim sustavom, kakav je npr. automobil, nije nužno poznavanje njegovog matematičkog modela nego određenog skupa iskustvenih pravila. Navedeno pravilo sadrži subjektivne jezične pojmove poput 'daleko', 'sporo', 'jako' i bilo bi ga nemoguće implementirati klasičnim upravljačkim algoritmima koji operiraju preciznim numeričkim podacima [6].

Motiviran problematikom upravljanja složenim sustavima Lofti Zadeh 1965. godine uvodi koncept neizrazitih skupova (engl. fuzzy sets). Zadeh je uočio da ljudi imaju sposobnost analize i razumijevanja nepreciznih koncepata koje u principu ne razumiju (npr. sposobnost vožnje automobila bez razumijevanja njegovog dinamičkog modela). Problemi nastaju kada se to znanje pokuša reprezentirati numerički. Problem precizne reprezentacije znanja uočen je u raznim područjima ljudskog znanja, od socijalnih do tehničkih znanosti. Zadeh je pretpostavljao da je sposobnost analize i izvođenja uzročno-posljedičnih veza na temelju nepreciznih (neizrazitih) koncepata ključno svojstvo ljudskog misaonog procesa, a s obzirom da se ne može izraziti numerički, uvodi teoriju neizrazitih skupova. Teorija neizrazitih skupova u mogućnosti je baratati sa neodređenošću i višeznačnosti lingvističkih izraza i može lingvističke izraze preslikati u neizrazite skupove koji mogu biti interpretirani kompjuterskim jezicima [6].

Neizraziti skupovi predstavljaju nadgradnju na klasičnu teoriju skupova. U klasičnoj teoriji skupova element ili pripada ili ne pripada skupu. U teoriji neizrazitih skupova element može imati određeni stupanj pripadnosti nekom skupu (ili više njih). Na taj način je moguće adekvatno izraziti subjektivne, neprecizne jezične pojmove poput 'daleko', 'sporo', itd. Poput klasične logike koja se zasniva na klasičnoj teoriji skupova, tako se i neizrazita logika

zasniva na teoriji neizrazitih skupova. Na taj način, neizrazita logika postaje poopćenje klasične logike u kojoj logičke tvrdnje mogu poprimiti samo dva stanja: istinito i lažno. U neizrazitoj logici logički izrazi mogu poprimiti stupnjevane vrijednosti između laži (0) i istine (1). Na taj način neizrazita logika postaje pogodna za aproksimativno rezoniranje zasnovano na nepotpunim i nepreciznim podacima [6].

Klasična logika je adekvatna za ocjenu kategoričkih tvrdnji poput npr. "Osoba A je muškarac", koja može poprimiti logičke vrijednosti 0 ili 1, dok tvrdnje poput npr. "Osoba A je visoka" ne spadaju u kategoričke tvrdnje s obzirom da je pojam 'visok' subjektivan pojam. Ako je osoba A visoka 2.25 m istinitost prethodne tvrdnje mogla bi se ocijeniti s logičkom vrijednosti 1, a ako je osoba A visoka 1.35 m istinitost te tvrdnje mogla bi se ocijeniti s logičkom vrijednosti 0. Problem je koju logičku vrijednost dodijeliti prethodnoj tvrdnji ako je osoba A visoka 1.75 m, 1.82 m, itd. Jedini način primjene klasične (binarne, dvoznačne) logike na prethodni primjer je da se striktno definira pojam visoko, npr. 'visoki ljudi su oni s visinom iznad 1.80 m', ali primjena takve definicije u nekom ekspertnom sustavu s pravilom 'da za obavljanje nekog posla odgovarajuća osoba mora biti visoka' ima za posljedicu da je osoba s visinom od 1.35 m jednako neadekvatna kao i osoba s visinom 1.79 m [6].

Ljudsko (ekspertno) znanje i rezoniranje uglavnom je zasnovano na subjektivnim (nepreciznim, nespecificiranim) pojmovima i pravilima ponašanja poput gore navedenih. Prilikom vožnje automobila čovjek ne dodaje gas na osnovu matematičkog algoritma s točnim vrijednostima brzina i udaljenosti između vozila, pa iz toga slijedi da je neizrazita logika metodologija za ugradnju strukturiranog ljudskog znanja, izraženog riječima, u algoritme koji simuliraju ljudsko rezoniranje [6].

Neizrazita logika u početku je dočekana sa skepsom u akademskoj zajednici, tako da tek sredinom 1970-tih počinje doživljavati značajniju afirmaciju i to najviše u Japanu. Iako je L. Zadeh, tvorac neizrazite logike, prvenstveno očekivao primjenu na području društveno-ekonomskih znanosti te lingvistici, najviše primjena je zabilježeno na području neizrazite regulacije tehničkih sustava. Među poznatijim primjenama neizrazite logike su:

- upravljanje podzemnom željeznicom (Sendai – Japan, 1984),
- sustav automatskog slijetanja zrakoplova (SAD, 1987),
- prvi neizraziti ekspertni sustav za vrednovanje kredita (Njemačka, 1977),
- neizraziti ekspertni sustav za dijagnozu bolesti (Omron – Japan, 1986),
- prvi neizraziti mikroprocesor (SAD – Bell Labs, 1985).

Tijekom 1990-tih dolazi do prave eksplozije komercijalnih aplikacija temeljenih na neizrazitoj logici od kojih su najpoznatije:

- upravljanje automobilskim motorom (Nissan),
- upravljanje robotima (Hirota, Fuji Electric, Toshiba, Omron),
- automatsko upravljanje branom hidroelektrane (Tokyo Electric Power),
- sustav za rano upozoravanje na potrese (Seismology Bureau of Metrology, Japan),
- sustav za dijagnozu raka (Kawasaki Medical School),
- sustav za ocjenu burzovnih aktivnosti (Yamaichi, Hitachi).

Pored navedenih, najbrojnije su primjene neizrazitih regulatora u upravljanju kućanskim uređajima poput perilice za rublje, usisivača, mikrovalnih pećnica, video kamera, elektroničkih igračaka, itd. [6]

3.1. Neizraziti skupovi

3.1.1. Klasični (izraziti) skupovi

U klasičnoj teoriji skupova, skup definiramo kao zbir nekih elemenata koji zadovoljavaju neka svojstva [6, 7]:

$$A = \{ x \mid x \text{ zadovoljava neko svojstvo } \}. \quad (3.1)$$

Ako se radi o konačnom broju elemenata skup se obično označava kao kolekcija svih njegovih elemenata

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \}. \quad (3.2)$$

Obično se skupovi tretiraju kao podskupovi nekog univerzalnog skupa U (engl. universe), odnosno $A \subset U$. Pripadnost elementa nekom skupu može se definirati pomoću karakteristične funkcije ili funkcije pripadnosti $\mu_A(x)$ koja ima dvije vrijednosti: 1 ako element pripada skupu i 0 ako element ne pripada skupu:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \in A \\ 0 & \text{ako } x \notin A \end{cases}. \quad (3.3)$$

Na ovaj način, svaki skup A unutar univerzalnog skupa U jedinstveno je definiran pomoću funkcije pripadnosti $\mu_A(x)$. Univerzalni skup ima funkciju pripadnosti $\mu_U(x)$ koja je jednaka 1, $\mu_U(x) = 1$. Prazan skup \emptyset ima funkciju pripadnosti $\mu_{\emptyset}(x) = 0$. Klasični skupovi, kod kojih funkcija pripadnosti poprima samo dvije vrijednosti, $\mu_A(x) = \{0, 1\}$, nazivaju se još i izraziti skupovi (engl. crisp sets) [6, 7].

3.1.2. Definicija neizrazitih skupova

Rečeno je da kod klasičnih (izrazitih) skupova funkcija pripadnosti može imati samo dvije vrijednosti, 0 ili 1. Ako se pretpostavi da funkcija pripadnosti može imati bilo koju vrijednost u intervalu $[0, 1]$ tada koncept pripadnosti skupu nije više izrazit (ili 1 ili 0) nego postaje neizrazit (engl. fuzzy) u smislu da predstavlja djelomičnu pripadnost, odnosno stupanj pripadnosti [6].

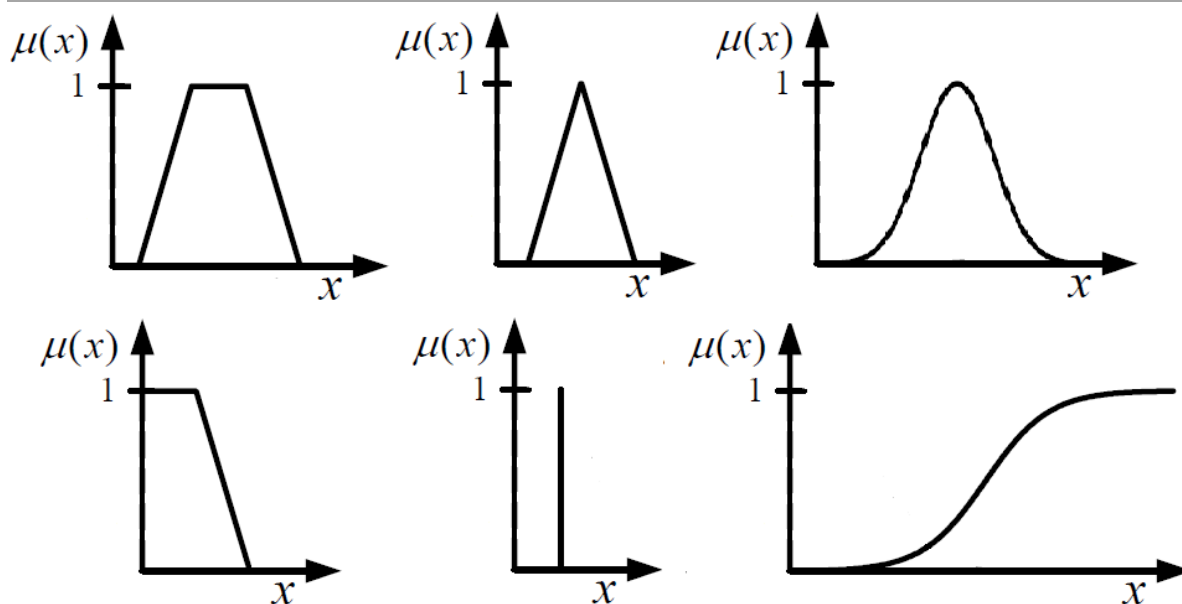
Definiran je klasičan skup $A \subset U$. Neizraziti skup A definiran je kao skup uređenih parova

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in A, \mu_A(x) \in [0, 1]\}, \quad (3.4)$$

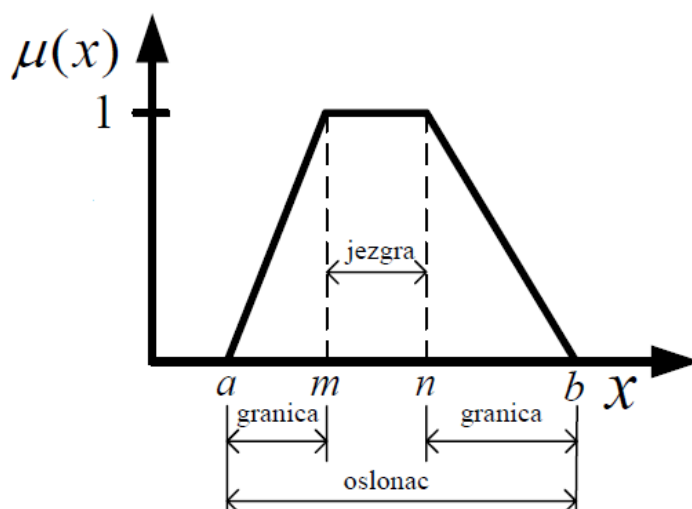
gdje je $\mu_A(x)$ funkcija pripadnosti. Funkcija $\mu_A(x)$ određuje stupanj pripadnosti svakog elementa $x \in A$ neizrazitom skupu A , tj. svakom elementu klasičnog skupa A pridružen je realni broj $\mu_A(x)$ u intervalu $[0, 1]$. U skladu s navedenom definicijom, neizraziti skup je formalno jednak njegovoj funkciji pripadnosti $\mu_A(x)$ te je uobičajeno da se neizraziti skup identificira sa njegovom funkcijom pripadnosti [6, 7].

3.1.2.1. Oblici funkcija pripadnosti

U teoriji neizrazitih skupova element može biti član više neizrazitih skupova, kao posljedica međusobnog preklapanja funkcija pripadnosti. Funkcije pripadnosti mogu imati različite oblike. Izbor oblika funkcija pripadnosti pojedinih neizrazitih skupova je subjektivan i ovisan o razmatranom problemu. Funkcije pripadnosti neizrazitih skupova su uvijek normalizirane, što znači da je maksimalna vrijednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici. Najčešće se koriste funkcije pripadnosti prikazane na slici 3.1. Većina funkcija mogu se razmatrati kao specijalni slučajevi trapezoidne funkcije pripadnosti (slika 3.2.) [6, 7].



Slika 3.1. Najčešći oblici funkcija pripadnosti



Slika 3.2. Trapezoidna funkcija pripadnosti

Na slici 3.2. prikazana je trapezoidna funkcija pripadnosti. Iz slike je vidljivo da je:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x < a; x > b \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{ako } a \leq x \leq m \\ 1 & \text{ako } m \leq x \leq n \\ \frac{b-x}{b-n} & \text{ako } n \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.5)$$

U slučaju kada je $m = n$ trapezoidna funkcija postaje trokutna funkcija pripadnosti, za $a = m$ i $b = n$ trapezoidna funkcija postaje pravokutna funkcija pripadnosti (izraziti skup), a za $a = m = n = b$ dobiva se tzv. singleton [6, 7].

3.1.2.2. Karakteristike funkcija pripadnosti

Bez obzira na različitost mogućih oblika funkcija pripadnosti, bitno je samo nekoliko njihovih karakterističnih svojstava i veličina [6, 7]:

- Visina neizrazitog skupa A je najveća vrijednost funkcije pripadnosti:

$$hgt(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x). \quad (3.6)$$

Neizraziti skup se naziva normalan kada je $hgt(A) = 1$, a subnormalan kada je $hgt(A) < 1$.

- Oslonac (engl. support) neizrazitog skupa je izraziti skup koji sadrži sve elemente univerzalnog skupa U za koje je funkcija pripadnosti neizrazitog skupa A veća od nule:

$$supp(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}. \quad (3.7)$$

- Jezgra (engl. core) neizrazitog skupa A je izraziti skup koji sadrži sve elemente univerzalnog skupa U za koje je funkcija pripadnosti neizrazitog skupa A jednaka jedinici:

$$core(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}. \quad (3.8)$$

- Granica (engl. boundary) neizrazitog skupa A je izraziti skup koji sadrži sve elemente univerzalnog skupa U za koje je $0 < \mu_A(x) < 1$:

$$bnd(A) = \{x \in U \mid 0 < \mu_A(x) < 1\}. \quad (3.9)$$

- Dva neizrazita skupa su slična ako vrijedi:

$$supp(A) = supp(B) \text{ i } core(A) = core(B). \quad (3.10)$$

- Ako oslonac normalnog neizrazitog skupa sadrži samo jedan element x_0 , odnosno:

$$supp(A) = core(A) = \{x_0\}, \quad (3.11)$$

tada se takav skup zove singleton [6, 7]. Navedena karakteristična svojstva prikazana su na slici 3.2.

3.1.3. Jezične (lingvističke) varijable

Jezične varijable su varijable koje kao vrijednosti poprimaju riječi ili rečenice. Npr. 'visina' je jezična varijabla koja može poprimiti jezične vrijednosti 'nisko', 'visoko', 'vrlo visoko', itd. 'Životna dob' je jezična varijabla koja može poprimiti jezične vrijednosti 'vrlo mlad', 'mlad', 'sredovječan', 'star', 'vrlo star'. Jezična varijabla zapisuje se na slijedeći način:

$$[x, T(x), X, M], \quad (3.12)$$

gdje su:

- x - ime jezične varijable,
- $T(x)$ - prostor jezičnih vrijednosti koje varijabla x može poprimiti, tj. prostorneizrazitih skupova definiranih nad područjem X (npr. 'mlad', 'star'),
- X - kvantitativno područje razmatranja varijable x nad kojim ona poprima lingvističke vrijednosti (npr. od nula do sto godina),
- M - semantička funkcija koja povezuje prostor $T(x)$ s područjem X (funkcije pripadnosti pojedinih jezičnih vrijednosti) [6, 7].

3.1.4. Operacije s neizrazitim skupovima

Za rad s neizrazitim skupovima potrebno je definirati osnovne operacije. Operacije s neizrazitim skupovima dobivaju se kao direktna generalizacija operacija s klasičnim skupovima [6, 7]. Definirana su dva neizrazita skupa A i B u univerzalnom skupu U :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1]\}, \quad (3.13)$$

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in U, \mu_B(x) \in [0, 1]\}. \quad (3.14)$$

Operacije sa skupovima A i B definiraju se preko njihovih funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$:

- Jednakost - neizraziti skupovi A i B su jednaki ako za svaki $x \in U$ vrijedi:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x). \quad (3.15)$$

- Sadržaj (inkluzija) - neizraziti skup A je sadržan unutar skupa B ($A \subseteq B$) ako za svaki $x \in U$ vrijedi:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x). \quad (3.16)$$

- Presjek - presjek neizrazitih skupova A i B ($A \cap B$) definiran je sa

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in U. \quad (3.17)$$

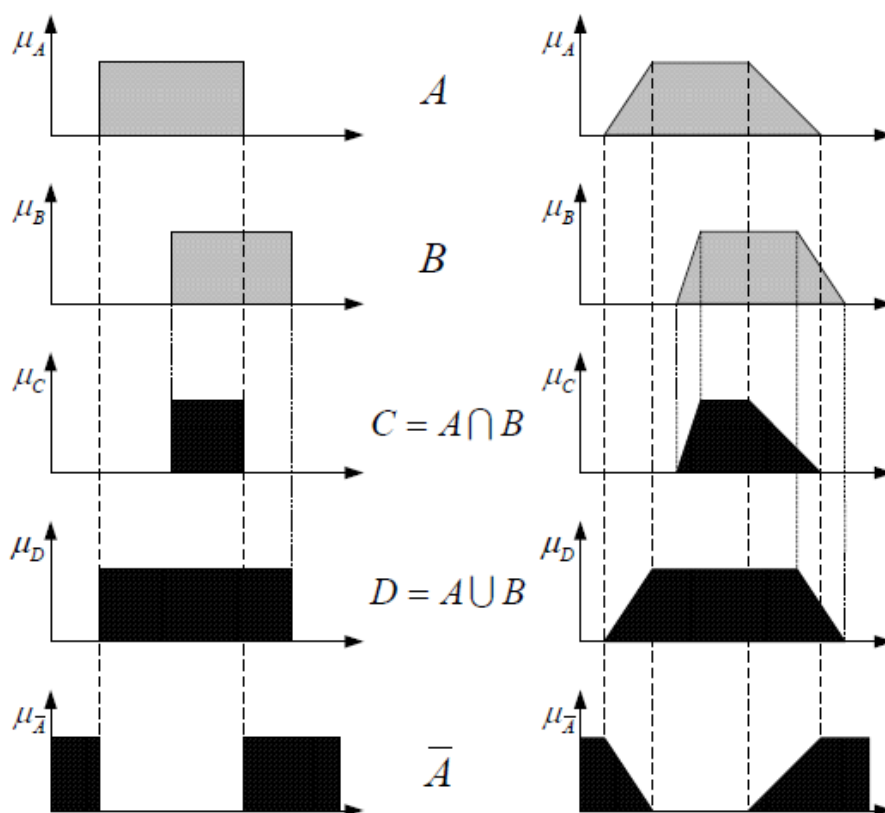
- Unija - unija neizrazitih skupova A i B ($A \cup B$) definirana je sa

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in U. \quad (3.18)$$

- Komplement - komplement neizrazitog skupa A (\bar{A}) definiran je sa

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in U. \quad (3.19)$$

Motivacija za prethodno navedene definicije operacija s neizrazitim skupovima ilustrirana je na slici 3.3. Ako operacije s klasičnim skupovima definiramo preko (izrazitih) funkcija pripadnosti (slika 3.3., lijevo) tada dobivamo prethodno navedene definicije za presjek, uniju i komplement. Iste te definicije vrijede i za neizrazite skupove (slika 3.3., desno). Međutim, za neizrazite skupove ne vrijede izrazi $A \cup \bar{A} = U$ i $A \cap \bar{A} = \emptyset$, odnosno $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = 1$ i $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) = 0$, koji su temeljna svojstva klasične teorije skupova [6, 7].



Slika 3.3. Usporedba operacija s klasičnim (lijevo) i neizrazitim (desno) skupovima (slika preuzeta iz [6])

3.1.5. Neizrazite relacije

Kako bi se u potpunosti iskoristio puni potencijal teorije neizrazitih skupova, potrebno je uvesti još neke koncepte poput neizrazitih relacija. Prethodne operacije s neizrazitim skupovima odnose se na elemente istog skupa. U klasičnoj teoriji skupova relacija se definira kao prisustvo ili odsustvo veze, tj. interakcije među elementima dva ili više skupova; neizrazita relacija definira se kao stupanj prisustva ili odsustva veze među elementima dva ili više skupova. Neki primjeri binarnih neizrazitih relacija su: "x je mnogo veći nego y", "x je sličan y", itd. U teoriji neizrazitog upravljanja neizrazite relacije su obično implikacije poput "AKO je x jako veliki TADA je y jako mali" [6, 7].

Neizrazita binarna relacija je neizraziti skup (funkcija pripadnosti) nad univerzalnim skupom koji čini Cartesijски produkt:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}, \quad (3.20)$$

gdje su A i B podskupovi univerzalnih skupova U_1 i U_2 . Neizrazita relacija na skupu $A \times B$ definira se kao skup

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in A \times B, \mu_R(x, y) \in [0, 1]\}, \quad (3.21)$$

gdje je $\mu_R(x, y)$ funkcija pripadnosti koja definira stupanj povezanosti (relacije, interakcije) elemenata $x \in A$ i $x \in B$. Definicija relacije predstavlja generalizaciju definicije za neizrazite skupove sa dvodimenzionalnog prostora $(x, \mu_A(x))$, na trodimenzionalni prostor $((x, y), \mu_R(x, y))$, gdje je relacija isto identificirana s njenom funkcijom pripadnosti. S obzirom da je relacija neizraziti skup, za nju vrijede sve operacije (presjek, unija, itd.) koje vrijede i za neizrazite skupove [6, 7].

3.1.6. Kompozicija neizrazitih relacija

Neizrazite relacije mogu biti međusobno kombinirane pomoću kompozicije [6, 7]. Ako su zadane relacije:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in A \times B \subseteq U_1 \times U_2\}, \quad (3.22)$$

$$S = \{((y, z), \mu_S(y, z)) \mid (y, z) \in A \times C \subseteq U_2 \times U_3\}, \quad (3.23)$$

njihova kompozicija je:

$$T = R \circ S = \{(x, z), \mu_T(x, z) \mid (x, z) \in A \times C \subseteq U_1 \times U_3\}, \quad (3.24)$$

gdje je funkcija pripadnosti kompozicije definirana sa:

$$\mu_T(x, z) = \max_{y \in B} \{ \min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \} \}. \quad (3.25)$$

Operacija kompozicije je također moguća između relacije i neizrazitog skupa, npr. kompozicija neizrazitog skupa A i relacije R :

$$T = A \circ S = \{(y, \mu_T(y)) \mid y \in B \subseteq U_2\}, \quad (3.26)$$

gdje je funkcija pripadnosti kompozicije definirana sa:

$$\mu_T(y) = \max_{x \in A} \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_R(x, y) \} \}. \quad (3.27)$$

Operacija kompozicije služi za neizrazito uzročno-posljedično rezoniranje na temelju više međusobno povezanih propozicija (npr. iz $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3$ slijedi $p_1 \rightarrow p_3$) [6].

3.2. Osnove neizrazite logike

3.2.1. Klasična (dvoznačna) logika

U klasičnoj logici propozicija može biti ili istinita (1) ili lažna (0). Zato se može reći da je klasična logika dvoznačna logika koja ima slijedeći skup vrijednosti istinitosti (engl. truth value set) $T_2 = \{0, 1\}$. Složena propozicija sadrži dvije ili više jednostavnih propozicija spojenih s jednom ili više logičkih veza. Definirane su propozicije p i q i čije vrijednosti istinitosti pripadaju skupu $\{0, 1\}$. Postoji nekoliko osnovnih logičkih veza (logičkih operacija) među propozicijama [6, 7]:

- Konjunkcija (logičko množenje, AND) je istinita kada su p i q istiniti:

$$p \wedge q = \min \{p, q\}. \quad (3.28)$$

- Disjunkcija (logičko zbrajanje, OR) je istinita kada su ili p ili q istiniti:

$$p \vee q = \max \{p, q\}. \quad (3.29)$$

- Negacija (NOT) je istinita kada je p lažna i obrnuto:

$$\bar{p} = 1 - p. \quad (3.30)$$

- Implikacija (uvjetna propozicija, THEN) je istinita u svim slučajevima osim kada je p istinita a q lažna:

$$p \rightarrow q = \min \{1, 1 + p - q\}. \quad (3.31)$$

U slučaju implikacije propozicija naziva se premisa dok se propozicija naziva zaključak (posljedica).

Prethodno navedene logičke operacije mogu se prikazati primjenom tablice istinitosti. U tablici 3.1. su prikazane vrijednosti istinitosti svih logičkih operacija u ovisnosti o svim mogućim kombinacijama logičkih vrijednosti od p i q .

Tablica 3.2. Tablica istinitosti za skup vrijednosti {0, 1}

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	\bar{p}	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

Klasična logika se može formulirati primjenom klasične teorije skupova, tako da postoji korespondencija između logičkih operatora i operacija sa skupovima. Navedena korespondencija garantira da za svaki rezultat iz teorije skupova postoji odgovarajući ekvivalentni rezultat u klasičnoj logici, i obrnuto (\wedge i \cap , \vee i \cup , \rightarrow i \subseteq , negacija je ista) [6, 7].

3.2.2. Višeznačna logika

Kao što je već spomenuto u prethodnim poglavljima, u klasičnoj logici postoje određene proturječnosti i paradoksi koji su se tijekom razvoja matematike pokušavali razriješiti na različite načine. Tipičan primjer takvih logičkih paradoksa je propozicija "Ja sam lažljivac". Jedan od načina prevazilaženja proturječnosti dvoznačne logike je uvođenje višeznačne logike. Sada će se razmotriti troznačna logika koju je uveo Lukasiewicz 1920.g. Pretpostavlja se da logička vrijednost propozicije može biti istinita (označena sa 1), lažna (označena sa 0) i neutralna ili neodređena (označena sa $\frac{1}{2}$). Drugim riječima, postoji skup vrijednosti istinitosti [6, 7]:

$$T_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}. \quad (3.32)$$

P i q propozicije, a logički operatori su definirani kao u klasičnoj logici. U tablici 3.2. prikazane su vrijednosti istinitosti svih logičkih operacija u ovisnosti o svim mogućim kombinacijama logičkih vrijednosti od p i q .

Tablica 3.2. Tablica istinitosti za skup vrijednosti $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	\bar{p}	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
0	0	0	0	1	1

Iz tablice 3.2. vidljivo je da troznačna logika generalizacija klasične dvoznačne logike (ako se izbacе retci tablice koji sadrže logičku vrijednost $\frac{1}{2}$ dobiva se tablica istinitosti klasične dvoznačne logike). U sustavu troznačne logike moguće je razriješiti mnoge paradokse dvoznačne logike poput propozicije "Ja sam lažljivac" (koja u troznačnoj logici ima vrijednost $\frac{1}{2}$) [6].

Moguća je daljnja generalizacija troznačne logike na višeznačnu logiku (Lukasiewiczzeva n -značna logika) gdje su vrijednosti istinitosti reprezentirane s n racionalnih brojeva u intervalu $[0, 1]$:

$$T_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}. \quad (3.33)$$

Ako se vrijednosti istinitosti reprezentiraju s realnim brojevima u intervalu $[0, 1]$, tako da skup vrijednosti istinitosti postaje $T_\infty = [0, 1]$, dobiva se beskonačnoznačna logika (engl.infinite-valued logic) koja se također naziva i standardna Lukasiewiczzeva logika [6].

3.2.3. Neizrazita logika i neizrazite logičke operacije

U prethodnim poglavljima pokazano je da su neizraziti skupovi poopćenje klasičnih skupova. Također, beskonačnoznačna logika je poopćenje klasične dvoznačne logike. Pokazano je da postoji korespondencija između teorije skupova i logike. Stoga se neizrazita logika može razmatrati kao proširenje beskonačnoznačne logike u smislu uključivanja neizrazitih skupova i neizrazitih relacija u sustav beskonačnoznačne logike. Neizrazita logika se fokusira na lingvističke varijable s ciljem omogućavanja aproksimativnog rezoniranja s nepreciznim propozicijama. Ona na neki način simulira proces ljudskog razmišljanja baziran na neodređenim i nepreciznim pojmovima [6, 7]. Definirani su neizraziti skupovi A i B :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in A \subseteq U_1\}, \quad (3.34)$$

$$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y \in B \subseteq U_2\}. \quad (3.35)$$

Propozicije u kanonskom obliku definirane su kao:

$$p \triangleq x \text{ je } A, \quad q \triangleq y \text{ je } B. \quad (3.36)$$

Iz izraza (3.36) može se reći da je propozicija jednostavna izjava koja tvrdi da neki element pripada nekom skupu. Stupanj istinitosti (tr) propozicija u izrazu (3.36) reprezentiran je funkcijama pripadnosti $\mu_A(x)$ i $\mu_B(y)$:

$$\text{tr}(p) = \mu_A(x), \quad \text{tr}(q) = \mu_B(y). \quad (3.37)$$

Neizrazite logičke operacije s propozicijama definirane su na potpuno analogan način kao u klasičnoj logici [6]:

- Konjunkcija (neizrazito logičko množenje, AND) - stupanj istinosti (tr) od $p \wedge q$ definiran je kao:

$$p \wedge q = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \}, \quad x \in U_1, \quad y \in U_2, \quad (3.38)$$

tj. neizrazito logičko množenje definirano je funkcijom pripadnosti neizrazite relacije definirane direktnim \min produktom.

- Disjunkcija (neizrazito logičko zbrajanje, OR) - stupanj istinosti od $p \vee q$ definiran je kao:

$$p \vee q = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \}, \quad x \in U_1, \quad y \in U_2, \quad (3.39)$$

tj. neizrazito logičko množenje definirano je funkcijom pripadnosti neizrazite relacije

definirane direktnim *max* produktom.

- Negacija (NOT) - neizrazita negacija od p definirana je kao:

$$\bar{p} = 1 - \mu_A(x), \quad x \in U_1. \quad (3.40)$$

- Implikacija (neizrazita uvjetna propozicija, THEN) - stupanj istinitosti od $p \rightarrow q$ definiran je kao:

$$p \rightarrow q = \min \{1, 1 + \mu_B(x) - \mu_A(x)\}, \quad x \in U_1, \quad y \in U_2. \quad (3.41)$$

Treba naglasiti da prethodno navedene definicije neizrazitih logičkih operacija nisu jedinstvene. Moguće su slijedeće alternativne definicije neizrazitog logičkog množenja i zbrajanja [6]:

$$p \wedge q = \mu_A(x) \mu_B(y) \quad (3.42)$$

$$p \vee q = \mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) \mu_B(y). \quad (3.43)$$

Također, za neizrazitu implikaciju postoji najmanje deset različitih definicija, od kojih navodimo najčešće korištenu Mamdanijevu koja se koristi kod neizrazitih regulatora [6]:

$$p \rightarrow q = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad (3.44)$$

3.3. Neizraziti sustavi

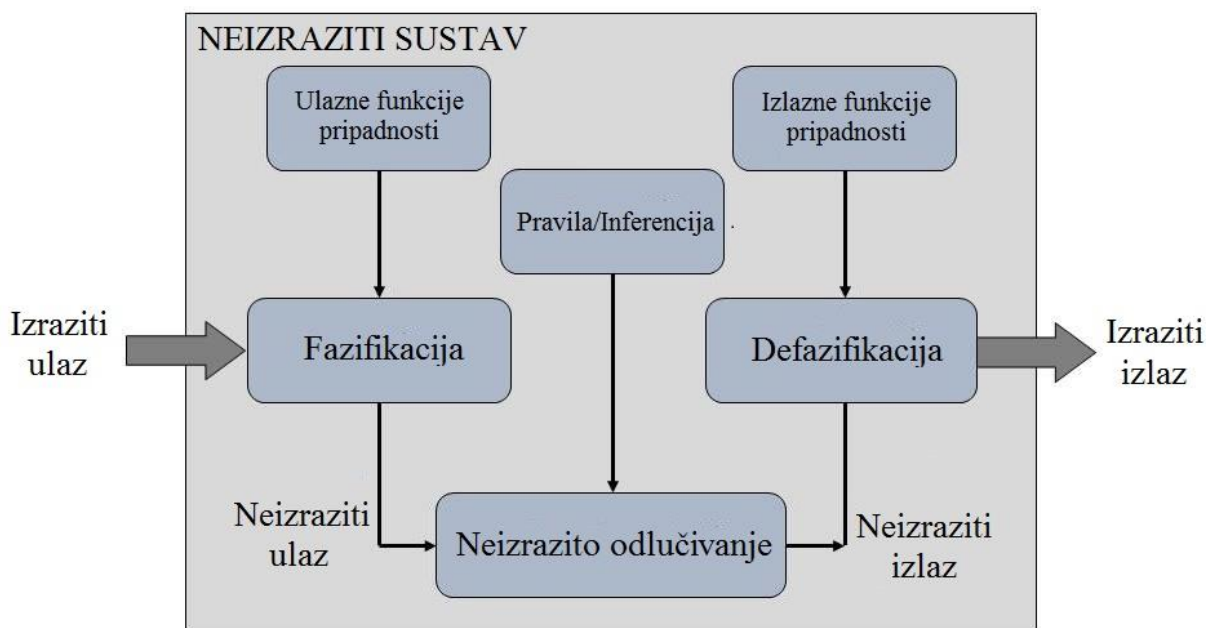
Neizraziti skupovi, kojima se opisuju neprecizni pojmovi, i neizrazita logika, kao formalna metodologija rezoniranja, čine osnovu neizrazitih sustava. Neizraziti sustavi je skupni naziv za neizrazite ekspertne sustave, neizrazitu teoriju odlučivanja, neizrazito upravljanje, itd. Osnovu svih neizrazitih sustava čine slijedeća tri postupka [6,7]:

1. Omekšavanje ili fazifikacija (engl. fuzzyfication) - proces transformiranja ulaznih izrazitih vrijednosti u stupnjeve pripadnosti ulaznih neizrazitih skupova. Središnji dio tog postupka je redom određivanje ulaznih i izlaznih (jezičnih) varijabli, određivanje područja definicije navedenih varijabli, te određivanje broja i oblika funkcija pripadnosti koje prekrivaju područje definicije pojedinih jezičnih varijabli.
2. Inferencija ili proces odlučivanja - proces transformiranja ulaznih neizrazitih skupova u neizrazite izlazne skupove. Središnji dio tog postupka je određivanje baze pravila

ponašanja u obliku IF - THEN pravila. Baza pravila ponašanja predstavlja formalizirani oblik znanja eksperta ili operatera.

- Izoštavanje ili defazifikacija (engl. defuzzification) - postupak transformiranja neizrazitih izlaznih skupova u izrazite izlazne vrijednosti. Taj postupak je nužan kod neizrazitih regulatora s obzirom da izvršni član (aktuator) može raditi samo s izrazitim vrijednostima [6, 7].

Na slici 3.4. prikazan je tijek procesa s sva tri postupka u neizrazitom sustavu.



Slika 3.4. Tijek procesa u neizrazitom sustavu

U idućem poglavlju biti će prikazan gore opisani postupak na primjeru sinteze neizrazitog regulatora za upravljanje mobilnim robotom, te nakon toga sinteza neizrazitog regulatora za slijeđenje referentne trajektorije.

3.3.1. Sinteza neizrazitog regulatora za upravljanje mobilnim robotom

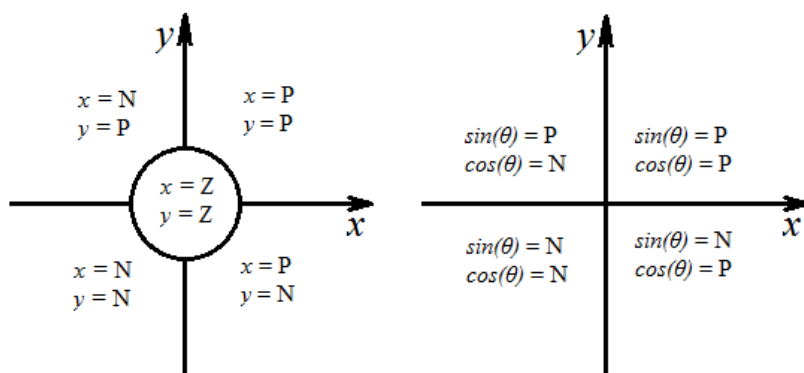
Proces prikazan u prethodnom poglavlju biti će objašnjen na primjeru sinteze neizrazitog regulatora za upravljanjem mobilnim robotom. Osim što je ovaj primjer prethodi sintezi analitičkog fuzzy regulatora, koja će biti objašnjena u idućem poglavlju, primjer je zanimljiv s obzirom da je upravljanje vozilom svakome intuitivno jasno. Kinematički model mobilnog robota definiran je izrazima (2.8), (2.9) i (2.10) i objašnjen u poglavlju 2.2. Iako je kinematički model relativno jednostavan, može se pokazati (Brockettov teorem [9]) da ne

postoji kontinuirana statička povratna veza koja može stabilizirati mobilnog robota u proizvoljnoj poziciji i orijentaciji. Stoga je navedeni problem sa stanovišta teorije upravljanja prilično netrivialan, bez obzira na prividnu jednostavnost matematičkog modela [6].

Problem koji se razmatra je stabilizacija mobilnog robota u ishodištu koordinatnog sustava. Drugim riječima, mobilnog robota iz bilo kojeg položaja i bilo koje orijentacije treba dovesti do središta koordinatnog sustava pomoću neizrazitog regulatora u povratnoj vezi. Ulazi neizrazitog regulatora su položaj i orijentacija mobilnog robota, a izlazi su translacijska i rotacijska brzina mobilnog robota [6].

Prvi korak je definiranje jezičkih vrijednosti pozicije robota x i y . Definiraju se tri jezičke vrijednosti: P – pozitivno, N – negativno i Z – nula. Pomoću navedenih jezičkih vrijednosti mogu se definirati u kojem kvadrantu koordinatnog sustava se robot nalazi (slika 3.5. lijevo) [6]:

- 1. kvadrant - $x = P, y = P,$
- 2. kvadrant - $x = N, y = P$
- 3. kvadrant - $x = N, y = N,$
- 4. kvadrant - $x = P, y = N,$
- Ishodište - $x = Z, y = Z.$



Slika 3.5. Neizrazite varijable pozicije (lijevo) i orijentacije (desno) mobilnog robota u koordinatnom sustavu

Orijentacija robota se također definira prema kvadrantima [6]:

- 1. kvadrant - $\theta = 0^\circ \div 90^\circ$
- 2. kvadrant - $\theta = 90^\circ \div 180^\circ$
- 3. kvadrant - $\theta = 180^\circ \div 270^\circ$
- 4. kvadrant - $\theta = 270^\circ \div 360^\circ.$

S obzirom da kut θ može biti izvan definiranih intervala ($\theta = 0^\circ \div 360^\circ$), elegantniji način definiranja orijentacije robota je na osnovu vrijednosti $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$. Za $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ definiraju se jezične vrijednosti P – pozitivno i N – negativno. Korištenjem definiranih vrijednosti može se odrediti orijentacija robota po kvadrantima za bilo koji kut θ (slika 3.5. desno) [6]:

- 1. kvadrant - $\sin(\theta) = P$ i $\cos(\theta) = P$
- 2. kvadrant - $\sin(\theta) = P$ i $\cos(\theta) = N$
- 3. kvadrant - $\sin(\theta) = N$ i $\cos(\theta) = N$
- 4. kvadrant - $\sin(\theta) = N$ i $\cos(\theta) = P$.

Za upravljačke varijable u_1 i u_2 pretpostavljaju se iste jezične vrijednosti kao i za poziciju mobilnog robota, P – pozitivno, N – negativno i Z – nula [6].

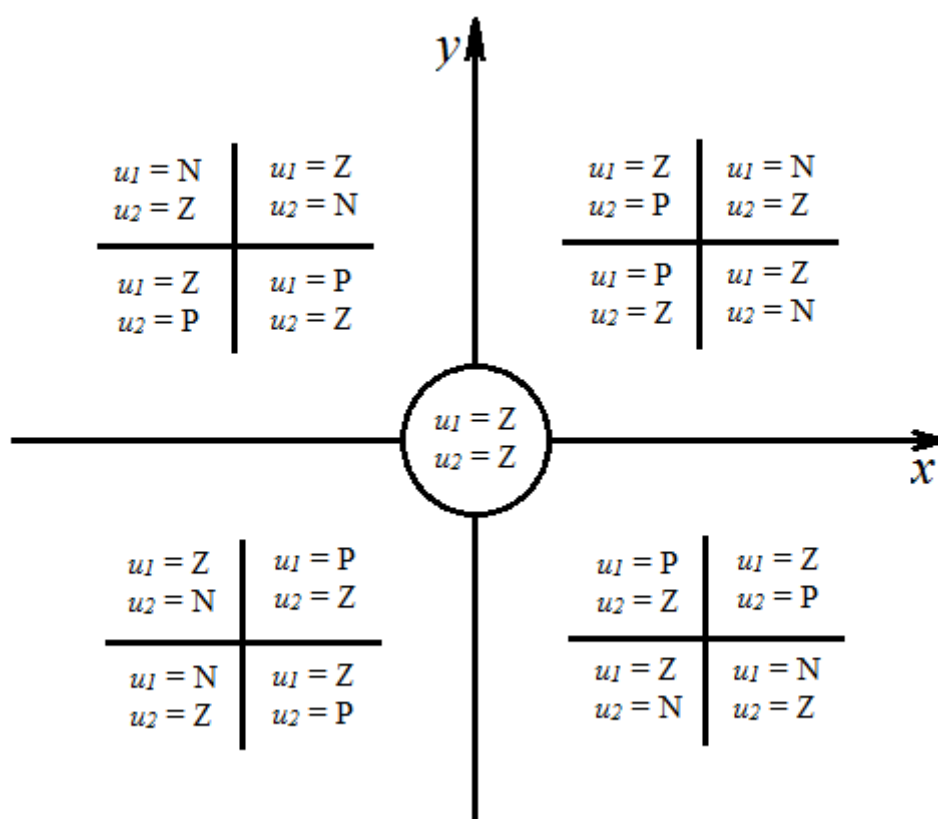
Pravilima ponašanja definira se veza između ulaznih i izlaznih varijabli. Osnovna ideja pravila ponašanja je da [6]:

- 1) u slučaju kada je robot usmjeren prema ishodištu koordinatnog sustava translacijska brzina je pozitivna ($u_1 = P$), a rotacijska brzina iščezava ($u_2 = Z$),
- 2) u slučaju kada je robot usmjeren prema ishodištu koordinatnog sustava translacijska brzina je negativna ($u_1 = N$), a rotacijska brzina iščezava ($u_2 = Z$),
- 3) u slučaju kada je robot orijentiran u smjeru kazaljke na satu (u odnosu na ishodište koordinatnog sustava) translacijska brzina iščezava ($u_1 = Z$), a rotacijska brzina je negativna ($u_2 = N$),
- 4) u slučaju kada je robot orijentiran u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (u odnosu na ishodište koordinatnog sustava) translacijska brzina iščezava ($u_1 = Z$), a rotacijska brzina je pozitivna ($u_2 = P$),
- 5) kada je robot u ishodištu ($x = Z$ i $y = Z$) tada i translacijska i rotacijska brzina iščezavaju ($u_1 = Z$ i $u_2 = Z$) [6].

Kada se prva četiri pravila primjene na četiri kvadranta u kojima se robot može nalaziti dobivaju se 16 pravila ponašanja. Njima se dodaje peto pravilo zaustavljanja tako da se sve skupa dobivaju 17 pravila ponašanja (slika 3.6.) [6]. Eksplicitni prikaz pravila ponašanja mobilnog robota implementiranih u regulator općenito izgleda ovako [6]:

1. IF $x = P$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = N$, $u_2 = Z$,
2. IF $x = P$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = P$,

3. IF $x = P$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = P$, $u_2 = Z$,
4. IF $x = P$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = N$,
5. IF $x = N$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = N$,
6. IF $x = N$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = N$, $u_2 = Z$,
7. IF $x = N$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = P$,
8. IF $x = N$ AND $y = P$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = P$, $u_2 = Z$,
9. IF $x = N$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = P$, $u_2 = Z$,
10. IF $x = N$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = N$,
11. IF $x = N$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = N$, $u_2 = Z$,
12. IF $x = N$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = P$,
13. IF $x = P$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = P$,
14. IF $x = P$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = P$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = P$, $u_2 = Z$,
15. IF $x = P$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = N$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = N$,
16. IF $x = P$ AND $y = N$ AND $\sin(\theta) = N$ AND $\cos(\theta) = P$ THEN $u_1 = N$, $u_2 = Z$,
17. IF $x = Z$ AND $y = Z$ THEN $u_1 = Z$, $u_2 = Z$ [6].



Slika 3.6. Prikaz pravila ponašanja u koordinatnom sustavu

3.3.2. Sinteza analitičkog fuzzy regulatora za slijedenje referentne trajektorije

U prethodnom poglavlju prikazan je primjer sinteze neizrazitog regulatora za pozicioniranje mobilnog robota u ishodištu koordinatnog sustava. Kao dio zadatka ovog rada potrebno je projektirati neizraziti regulator koji upravlja mobilnim robotom tako da robot slijedi unaprijed zadanu referentnu trajektoriju.

Značajan problem kod konvencionalnih neizrazitih regulatora je problem eksponencijalnog porasta broja pravila ponašanja s porastom broja ulazno-izlaznih varijabli sustava. Posljedica toga je da primjena klasičnih neizrazitih regulatora na multivarijabilne sustave poput robota, postaje vrlo zahtjevna sa stanovišta računske kompleksnosti kao i kompleksnosti same sinteze regulatora. Analitički neizraziti regulator nadilazi navedeni problem uvođenjem analitičke funkcije za određivanje centara izlaznih neizrazitih skupova, umjesto definicije baze pravila ponašanja. Analitička funkcija omogućava direktan postupak nelinearnog preslikavanja ulaznih varijabli na centre izlaznih neizrazitih skupova, koji se jednostavno implementira u regulacijskom algoritmu. Na taj način broj ulaznih i izlaznih varijabli kao i broj neizrazitih skupova nije ograničen eksponencijalnim rastom broja pravila ponašanja s obzirom da nema baze pravila ponašanja. [10]

Zbog gore navedenih razloga, u ovom primjeru, umjesto klasičnog fuzzy regulatora, kod kojeg se upravljački zakoni mobilnog robota dobivaju preko niza pravila, biti će korišten analitički fuzzy regulator, kod kojeg se upravljački zakoni dobivaju pomoću sljedećeg algoritma [10, 11]:

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{j=1}^n y_{C_j}(x_j) \omega_j(x_j) I_j}{\sum_{j=1}^n \omega_j(x_j) I_j}, \quad (3.45)$$

gdje su x_1, \dots, x_n ulazne varijable,

$$\omega_j(x_j) = \sum_{i=1}^{N_j} s_{ji}(x_j), \quad (3.46)$$

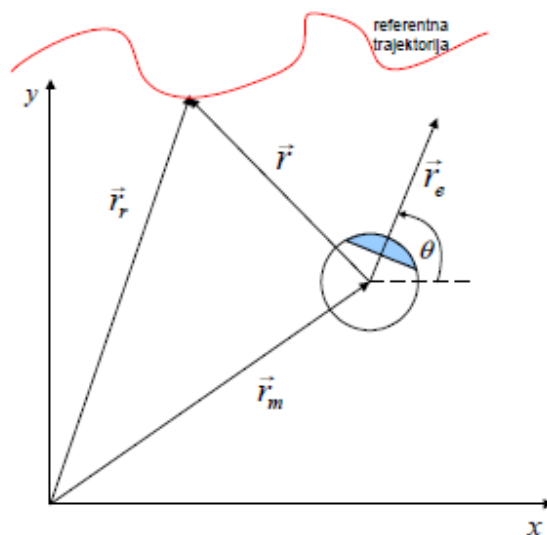
predstavlja aktivacijsku funkciju izlaznog neizrazitog skupa u obliku sum - prod operatora nad funkcijama pripadnosti ulaznih neizrazitih skupova $s_{ji}(x_j)$, dok

$$y_{C_j}(x_j) = K_{C_j} \left(1 - \frac{\omega_j(x_j)}{N_j} \right) \text{sign}(x_j), \quad (3.47)$$

predstavlja poziciju centara izlaznih neizrazitih skupova, gdje je K_{C_j} pojačanje centara izlaznih neizrazitih skupova, N_j je broj neizrazitih skupova koji pripadaju j -toj ulaznoj

varijabli, a L_j je površina j -tog izlaznog neizrazitog skupa [10].

Kako bi se provela sinteza analitičkog neizrazitog regulatora prvo će biti opisana sinteza običnog fuzzy regulatora s bazom pravila ponašanja, a tek onda sinteza analitičkog fuzzy regulatora. Na slici 3.7. prikazani su mobilni robot i neka proizvoljno zadana referentna trajektorija u koordinatnom sustavu.



Slika 3.7. Slijeđenje referentne trajektorije (slika preuzeta iz [6])

Veličine označene na slici 3.7. su redom [6]:

- pozicija mobilnog robota:

$$\vec{r}_m = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (3.48)$$

- referentna pozicija pokretnog cilja:

$$\vec{r}_r = x_r(t)\vec{i} + y_r(t)\vec{j}, \quad (3.49)$$

- udaljenost robota od cilja:

$$\vec{r} = \vec{r}_r - \vec{r}_m = (x_r - x)\vec{i} + (y_r - y)\vec{j}, \quad (3.50)$$

- orijentacija mobilnog robota:

$$\vec{r}_e = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}, \quad (3.51)$$

gdje su x_r i y_r koordinate točke na referentnoj trajektoriji, x i y koordinate mobilnog robota, a θ orijentacija mobilnog robota [6].

Kao ulazne varijable neizrazitog regulatora se definiraju norma udaljenosti robota od cilja no , te normirani vektorski produkt orijentacije i udaljenosti vp . U svakom trenutku udaljenost, tj. norma udaljenosti mobilnog robota od odgovarajuće točke na referentnoj

trajektoriji može se dobiti iz izraza:

$$no = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}, \quad (3.51)$$

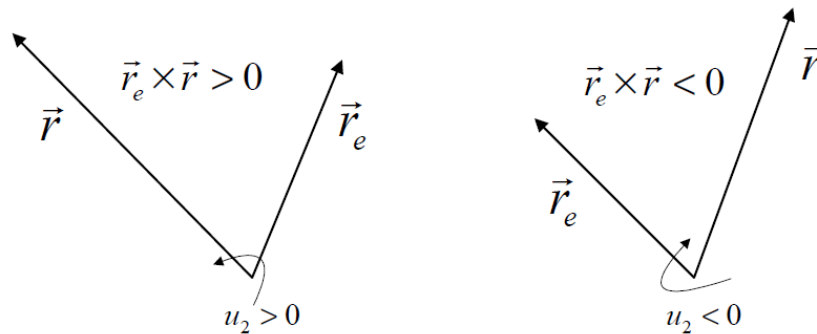
dok se normirani vektorski produkt dobiva iz izraza:

$$vp = \frac{\vec{r}_e \times \vec{r}}{\|\vec{r}\| + \varepsilon}, \quad (3.52)$$

gdje je ε neki mali broj (npr. 0.001) kako bi se spriječilo dijeljenje s nulom, a brojnik se računa prema izrazu [6]:

$$\vec{r}_e \times \vec{r} = (y_r - y) \cos(\theta) - (x_r - x) \sin(\theta). \quad (3.53)$$

Na slici 3.8. prikazani su slučajevi kada je izraz (3.53) veći i manji od nule. Iz slike je vidljivo da su vektorski produkt vp i rotacijska brzina robota u_2 proporcionalni. Isto se može reći i za normu udaljenosti no i translacijsku brzinu robota u_1 .



Slika 3.8. Vektorski produkt (slika preuzeta iz [6])

Stoga, pomoću izraza (3.51) i (3.52) definira se baza pravila ponašanja neizrastitog regulatora:

1. IF ($vp = P$) THEN ($u_2 = P$),
2. IF ($vp = N$) THEN ($u_2 = N$),
3. IF ($vp = Z$) THEN ($u_2 = Z$),
4. IF ($no = P$) AND ($vp = Z$) THEN ($u_1 = P$),
5. IF ($no = N$) AND ($vp = Z$) THEN ($u_1 = N$),
6. IF ($no = Z$) AND ($vp = Z$) THEN ($u_1 = Z$),
7. IF [($no = P$) OR ($no = N$) OR ($no = Z$)] AND (vp NOT Z) THEN ($u_1 = Z$),

gdje su P - pozitivno, N - negativno, Z - zero (nula). Prva tri pravila odnose se na rotacijsku brzinu robota u_2 i definiraju se pomoću vektorskog produkta vp . Sljedeća tri pravila odnose

se na translacijsku brzinu u_1 i definiraju se pomoću norme udaljenosti no na sličan način kao i pravila za rotacijsku brzinu, ali za razliku od njih imaju dodatan uvjet, a to je da vektorski produkt vp mora biti nula. Sedmo pravilo definira da dok je vektorski produkt orijentacije i udaljenosti vp različit od nule translacijska brzina mora biti jednaka nuli.

Kod analitičkog neizrazitog regulatora gore navedenih sedam pravila se na sljedeći način. Prva tri gore definirana pravila, kao što je već naglašeno predstavljaju proporcionalnost između no i u_2 . Isto se može i reći za sljedeća tri pravila ali bez AND dijela pravila koji se odnosi na vektorski produkt vp . Takav odnos translacijske i rotacijske brzine robota i norme udaljenosti i vektorskog produkta može se zapisati matematički kao:

$$u_1 = V_{max} * no, \quad (3.54)$$

$$u_2 = \Omega_{max} * vp, \quad (3.55)$$

gdje su:

- V_{max} - maksimalna translacijska brzina mobilnog robota
- Ω_{max} - maksimalna rotacijska brzina mobilnog robota.

Izrazi (3.54) i (3.55) predstavljaju analitički neizraziti regulator. U izraz (3.55) dodaje se funkcija $\tanh()$ kako bih se postigao bolji odziv regulatora:

$$u_2 = \Omega_{max} * \tanh(k_1 * vp), \quad (3.56)$$

gdje je k_1 parametar regulatora. Drugi dio 4., 5. i 6. pravila (AND $vp = z$) i sedmo pravilo realiziraju se dodavanjem $\tanh()$ i eksponencijalne funkcije u izraz (3.54):

$$u_1 = V_{max} * \tanh(k_2 * no) * e^{-k_3(vp)^2}, \quad (3.57)$$

gdje su k_2 i k_3 parametri regulatora. Eksponencijalna funkcija u (3.57) osigurava da translacijska brzina u_1 bude što manja kada je vektorski produkt vp velik, tj. kada je rotacijska brzina u_2 velika, što je u principu definirano sedmim pravilom. Izraz (3.56) zamjenjuje prva tri pravila koja se odnose na rotacijsku brzinu mobilnog robota, dok izraz (3.57) zamjenjuje preostala četiri pravila koja se odnose na translacijsku brzinu mobilnog robota.

Kao što se vidi iz navedenih pravila, generalna ideja analitičkog neizrazitog regulatora je da se mobilni robot prvo pravilno orijentira u odnosu na referentnu trajektoriju (dominantnija rotacijska brzina u_2), a zatim krene prema njoj (dominantnija translacijska brzina u_1) [6, 10].

4. ESTIMACIJA PARAMETARA

U svrhu predikcije kretanja nekog objekta, tj. u svrhu skraćivanja potrebne putanje i vremena puta korišteni su estimatori parametara; jedan estimator za estimaciju po x -osi, a drugi za estimaciju po y -osi. Predikcija kretanja temelji se na pretpostavci da je mjerljiva samo pozicija objekta u koordinatnoj ravnini, $x(t)$, $y(t)$, a brzina i akceleracija $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ se estimiraju filterima za estimaciju brzine (derivacije).

Pretpostavlja se da je dinamiku sustava približno moguće opisati P2 članom (MDS sustav) [12]:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0, \quad (4.1)$$

za x -os, te

$$\ddot{y} + b_1\dot{y} + b_0y = 0, \quad (4.2)$$

za y -os. Potrebno je odrediti nepoznate parametre na temelju poznate pozicije. Formira se funkcija cilja Hopfieldove neuronske mreže s linearnim aktivacijskim funkcijama [10, 13] za obje osi:

$$J_x(\hat{a}_1, \hat{a}_0) = \frac{1}{2} (\ddot{x} + \hat{a}_1\dot{x} + \hat{a}_0x)^2, \quad (4.3)$$

$$J_y(\hat{b}_1, \hat{b}_0) = \frac{1}{2} (\ddot{y} + \hat{b}_1\dot{y} + \hat{b}_0y)^2, \quad (4.4)$$

gdje su \hat{a}_1 , \hat{a}_0 , te \hat{b}_1 , \hat{b}_0 estimirani parametri. Derivacijom izraza (4.3) i (4.4) po estimiranim parametrima dobiva se kontinuirani gradijentni algoritam po nepoznatim parametrima [13]:

$$\dot{\hat{a}}_1 = -\mu \frac{\partial J_x}{\partial \hat{a}_1}, \quad \dot{\hat{a}}_0 = -\mu \frac{\partial J_x}{\partial \hat{a}_0}, \quad (4.5)$$

$$\dot{\hat{b}}_1 = -\mu \frac{\partial J_y}{\partial \hat{b}_1}, \quad \dot{\hat{b}}_0 = -\mu \frac{\partial J_y}{\partial \hat{b}_0}, \quad (4.6)$$

gdje je μ pojačanje adaptivnog estimatora, koji vodi do diferencijalnih jednadžbi za estimaciju parametara (kontinuirani algoritam učenja [13]):

$$\dot{\hat{a}}_1 = -\mu (\ddot{x} + \hat{a}_1\dot{x} + \hat{a}_0x) \dot{x}, \quad \dot{\hat{a}}_0 = -\mu (\ddot{x} + \hat{a}_1\dot{x} + \hat{a}_0x) x. \quad (4.7)$$

$$\hat{b}_1 = -\mu (\dot{y} + \hat{b}_1 \dot{y} + \hat{b}_0 y) \dot{y}, \quad \hat{b}_0 = -\mu (\dot{y} + \hat{b}_1 \dot{y} + \hat{b}_0 y) y. \quad (4.8)$$

Uvede li se supstitucija $\ddot{x} = z_2$ i $\dot{x} = z_1$, te $\ddot{y} = p_2$ i $\dot{y} = p_1$, gdje su $z_1, z_2, p_1, i p_2$ varijable koje estimiraju brzinu i akceleraciju dobiva se [13]:

$$\hat{a}_1 = -\mu (z_2 + \hat{a}_1 z_1 + \hat{a}_0 x) \dot{x}, \quad \hat{a}_0 = -\mu (z_2 + \hat{a}_1 z_1 + \hat{a}_0 x) x, \quad (4.9)$$

$$\hat{b}_1 = -\mu (p_2 + \hat{b}_1 p_1 + \hat{b}_0 y) \dot{y}, \quad \hat{b}_0 = -\mu (p_2 + \hat{b}_1 p_1 + \hat{b}_0 y) y. \quad (4.10)$$

Za estimaciju brzine i akceleracije po x i y koordinatnim osima koriste se sliding- mode filteri prvog reda definirani izrazima [14]:

$$z_1 = -\eta \text{sign}(w_1 - x), \quad z_2 = -\eta \text{sign}(w_2 - z_1), \quad (4.11)$$

$$\dot{w}_1 = z_1, \quad \dot{w}_2 = z_2, \quad (4.12)$$

$$p_1 = -\eta \text{sign}(r_1 - y), \quad p_2 = -\eta \text{sign}(r_2 - p_1), \quad (4.13)$$

$$\dot{r}_1 = p_1, \quad \dot{r}_2 = p_2, \quad (4.14)$$

gdje je η pojačanje filtera. Funkcija $\text{sign}(x)$ aproksimira se s $\tanh(gx)$, gdje je parametar ispod $\tanh()$ funkcije dovoljno velik (100 - 1000) zato što linearni filteri (bez funkcije signum) ne rade dobro u kombinaciji s adaptacijom parametara. Zbog filtera za estimaciju brzine tranzientni odzivi su izraženiji (preskoci preko referentne vrijednosti) što povećava pogrešku predikcije. To se može reducirati uvođenjem saturacije na estimirane parametre:

$$\hat{a}_{1s} = \text{Sat}(\hat{a}_1, \hat{a}_{1max}), \quad \hat{a}_{0s} = \text{Sat}(\hat{a}_0, \hat{a}_{0max}), \quad (4.15)$$

$$\hat{b}_{1s} = \text{Sat}(\hat{b}_1, \hat{b}_{1max}), \quad \hat{b}_{0s} = \text{Sat}(\hat{b}_0, \hat{b}_{0max}), \quad (4.16)$$

gdje saturacijska funkcija ima slijedeći oblik [15]:

$$\text{Sat}(x, x_{max}) = \begin{cases} x & 0 \leq x < x_{max} \\ x_{max} & x \geq x_{max} \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad (4.17)$$

za x -os, te:

$$\text{Sat}(y, y_{max}) = \begin{cases} y & 0 \leq y < y_{max} \\ y_{max} & y \geq y_{max} \\ 0 & y < 0 \end{cases}, \quad (4.18)$$

za y -os.

Estimaciju trajektorije moguće je dobiti korištenjem saturiranih estimiranih parametara:

$$\ddot{\bar{x}} + \hat{a}_{1s}\dot{\bar{x}} + \hat{a}_{0s}\bar{x} = 0, \quad (4.19)$$

$$\ddot{\bar{y}} + \hat{b}_{1s}\dot{\bar{y}} + b_{0s}\bar{y} = 0, \quad (4.20)$$

gdje su $\bar{x}(t)$ i $\bar{y}(t)$ estimacije realnih trajektorija $x(t)$ i $y(t)$. Za predikciju je bitno da se mogu procijeniti $\bar{x}(t + T)$ i $\bar{y}(t + T)$, gdje je T neki vremenski horizont u budućnosti. Vrijednosti izraza $\bar{x}(t + T)$ i $\bar{y}(t + T)$ se približno određuju iz rješenja jednadžbi $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}$ i $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_2\mathbf{y}$ linearnih, vremenski invarijantnih, homogenih sustava [12]:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}_2 t} \mathbf{y}_0. \quad (4.22)$$

Iz izraza (4.21) i (4.22) prilagođenih za izraze $\bar{x}(t + T)$ i $\bar{y}(t + T)$ dobiva se predikcija u budućnost za vremenski horizont T :

$$\bar{\mathbf{x}}(t + T) = e^{\mathbf{A}_1(t+T)} \bar{\mathbf{x}}_0 = e^{\mathbf{A}_1 t} e^{\mathbf{A}_1 T} \bar{\mathbf{x}} = e^{\mathbf{A}_1(t)T} \bar{\mathbf{x}}(t), \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t + T) = e^{\mathbf{A}_2(t+T)} \bar{\mathbf{y}}_0 = e^{\mathbf{A}_2 t} e^{\mathbf{A}_2 T} \bar{\mathbf{y}} = e^{\mathbf{A}_2(t)T} \bar{\mathbf{y}}(t), \quad (4.22)$$

gdje su $e^{\mathbf{A}_1(t)T}$ i $e^{\mathbf{A}_2(t)T}$ matrice prijelaza ili fundamentalne matrice, a $\mathbf{A}_1(t)$ i $\mathbf{A}_2(t)$ matrice koeficijenata sustava [12]:

$$\mathbf{A}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{a}_0(t) & -\hat{a}_1(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{A}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{b}_0(t) & -\hat{b}_1(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}(t) \\ \dot{\bar{y}}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Slijedi prikaz rezultata dobivenih simulacijom za različite referentne putanje mobilnog robota. Referentna putanja zadaje se prvom mobilnog robotu. Drugi mobilni robot, preko estimatora stanja dobiva estimiranu putanju u nekom budućem vremenskom horizontu T i uz pomoć analitičkog fuzzy regulatora slijedi estimiranu putanju.

5. REZULTATI SIMULACIJE

Simulacija gibanja mobilnih robota je provedena za nekoliko različitih referentnih putanja, nekoliko različitih vremena predikcije, te različite početne orijentacije drugog mobilnog robota. Rezultati će biti prikazani za sve kombinacije referentnih putanja, vremena predikcije i orijentacije. Za svaku simulaciju biti će prikazane putanje mobilnih robota, promjena upravljačkih varijabli drugog mobilnog robota koji prati estimiranu putanju, te vrijeme potrebno da drugi robot sustigne prvog. Radi usporedbe biti će zajedno prikazana gibanja mobilnog robota sa i bez prediktivnog algoritma, prikazanog u poglavlju 4, kako bi se pokazala vremenska razlika u gibanju robota. Prediktivni algoritam biti će prikazan plavom bojom, a reaktivni (bez predikcije) crvenom bojom na slikama. U tablici 5.1. prikazane su korištene vrijednosti parametara estimatora i analitičkog fuzzy regulatora.

Tablica 5.3. Početni uvjeti i parametri simulacija

Parametar	Iznos
v_{max} - maksimalna translacijska brzina [m/s]	0.125 (oko 70 % max.)
ω_{max} - maksimalna rotacijska brzina [rad/s]	$\pi/4$ (oko 50 % max.)
Pojačanje adaptivnog estimatora μ	20
Pojačanje filtera za estimaciju brzine η	40
Parametar ispod ' $\tanh()$ ' funkcije filtera za estimaciju brzine KK	600
Parametar koji definira nagib funkcije ' $\tanh()$ ' analitičkog fuzzy regulatora kk_1	20
Parametar koji definira nagib funkcije ' $\tanh()$ ' analitičkog fuzzy regulatora kk_2	20
Parametar koji definira nagib funkcije ' $\tanh()$ ' analitičkog fuzzy regulatora kk_3	20

Početne koordinate mobilnih robota, vremena predikcije i trajanja simulacije biti će navedene za svaki slučaj zasebno.

Putanja prvog mobilnog robota zadaje se preko njegovih upravljačkih varijabli u_1 i u_2 i izračunava se pomoću izraza (2.11), (2.12) i (2.13).

Kako bi simulacija bila što bolje odgovarala kasnije provedenom eksperimentu, uzeta su u obzir prilikom provođenja simulacija sva fizička ograničenja prisutna u laboratoriju (stvarne brzine robota, dimenzije robota, dimenzije radnog okruženja robota, itd.).

Ako se translacijska i rotacijska brzina drugog mobilnog robota zadaju da budu veće od translacijske i rotacijske brzine prvog mobilnog robota, logično je zaključiti da će drugi robot uvijek sustići prvog robota. Iz tog razloga brzine oba robota su istog iznosa, kako bi se odredilo koliko zapravo prediktivni algoritam 'ubrzava' kretanje drugog mobilnog robota. Definiran je radijus hvatanja prvog mobilnog robota od 30 cm pomoću kojeg se vidi koliko blizu je drugi mobilni robot prišao prvom mobilnom robotu.

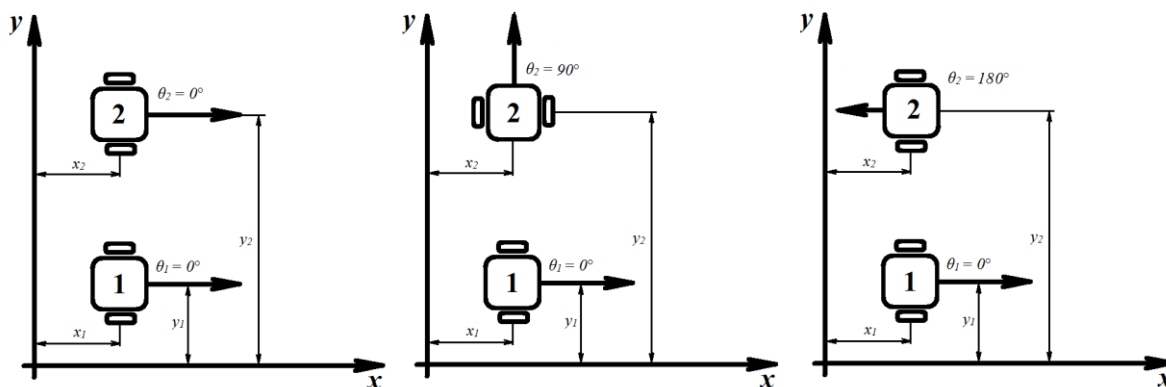
5.1. Rezultati simulacije za zadane upravljačke varijable prvog mobilnog robota $u_{11} = 0.125 \text{ m/s}$ i $u_{12} = 0.0 \text{ rad/s}$

Zadane su upravljačke varijable prvog mobilnog robota $u_{11} = 0.125 \text{ m/s}$ i $u_{12} = 0.0 \text{ rad/s}$. Tako definirane upravljačke varijable rezultiraju putanjom mobilnog robota po pravcu. Simulacija je provedena za dva ili tri vremenska horizonta predikcije i tri različite početne orijentacije drugog mobilnog robota: u smjeru prvog mobilnog robota, okomito na smjer prvog mobilnog robota i u suprotnome smjeru u odnosu na prvog mobilnog robota. U tablici 5.2. prikazane su početne pozicije mobilnih robota.

Tablica 5.2. Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota u xy ravnini za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota

Početna pozicija i orijentacija u koordinatnom sustavu xy	Iznos	
Početna pozicija prvog robota u x – osi, $x_1 [m]$	0.3	
Početna pozicija prvog robota u y – osi, $y_1 [m]$	0.3	
Početna orijentacija prvog robota, $\theta_1 [rad]$	0.0	
Početna pozicija drugog robota u x – osi, $x_2 [m]$	0.3	
Početna pozicija drugog robota u y – osi, $y_2 [m]$	0.8	
Početna orijentacija drugog robota, $\theta_2 [rad]$	isto orijentirani roboti	0.0
	okomito orijentirani roboti	$\pi/2$
	suprotno orijentirani roboti	π

Na slici 5.1. skicirane su početne pozicije robota definirane u tablici 5.2.



Slika 5.1. Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota definirane tablicom 5.2.

(lijevo - isto orijentirani roboti, sredina - okomito orijentirani roboti, desno - suprotno orijentirani roboti)

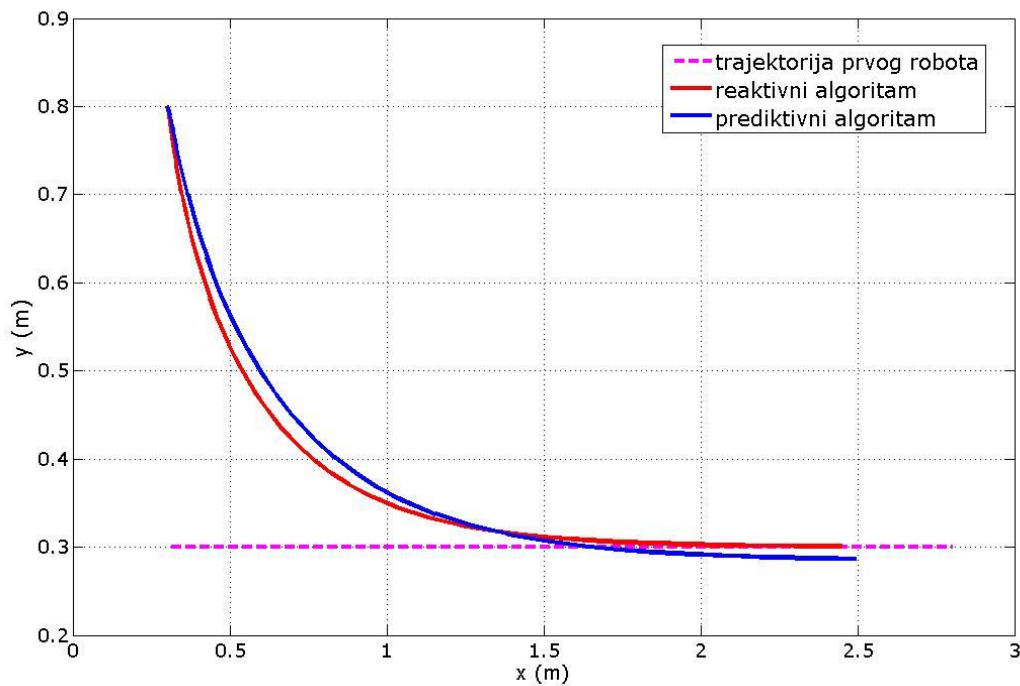
Slijedi prikaz rezultata simulacija. Kao što je već rečeno, biti će usporedno prikazana gibanja mobilnih robota uz korištenje prediktivnog algoritma izvedenog u 4. poglavlju, i bez prediktivnog algoritma (reaktivni algoritam) kod kojeg je prisutno samo upravljanje mobilnim robotom pomoću analitičkog neizrazitog regulatora.

5.1.1. Međusobno isto orijentirani mobilni roboti za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota

Za ovako definirane početne položaje i početne orijentacije robota, provedene su simulacije za horizont predikcije od 1, 3 i 5 s.

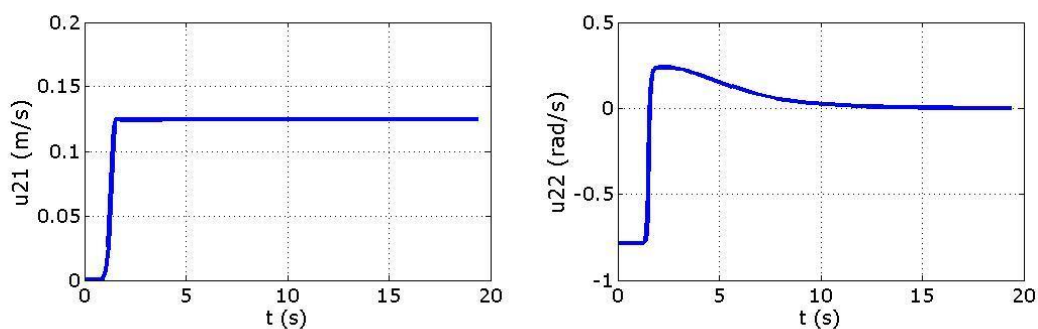
5.1.1.1. Vremenski horizont predikcije $T = 1$ s

Na slici 5.2. prikazana je trajektorija prvog mobilnog robota, trajektorija robota bez prediktivnog algoritma, i trajektorija robota s prediktivnim algoritmom koji prati estimiranu trajektoriju prvog robota. Trajanje simulacije je 20 s. Iz slike je vidljivo da estimacija trajektorije u budućnosti bila dobra, te da robot s prediktivnim algoritmom dođe bliže prvom robotu nego u slučaju bez predikcije. Također je vidljivo da je robot s prediktivnim algoritmom otprilike dosegao radijus hvatanja prvog robota od 30 cm, dok je robot bez prediktivnog algoritma došao na otprilike 35 cm od prvog mobilnog robota.



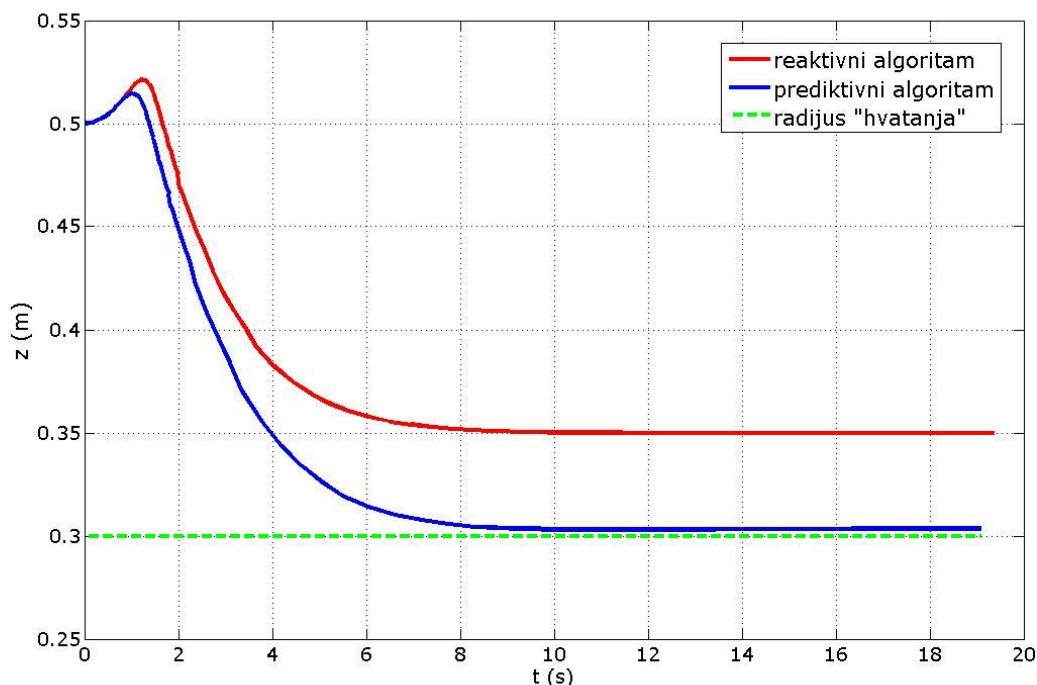
Slika 5.2. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Slika 5.3. prikazuje promjenu upravljačkih varijabli drugog mobilnog robota u_{21} i u_{22} dobivenih izrazima (3.57) i (3.56) u vremenu koje će biti korištene kasnije prilikom provođenja eksperimenta.



Slika 5.3. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Na slici 5.4. prikazana je udaljenost između prvog i drugog mobilnog robota z [m], dobivena pomoću izraza (3.51), u slučaju kada se ne koristi, i kada se koristi prediktivni algoritam.



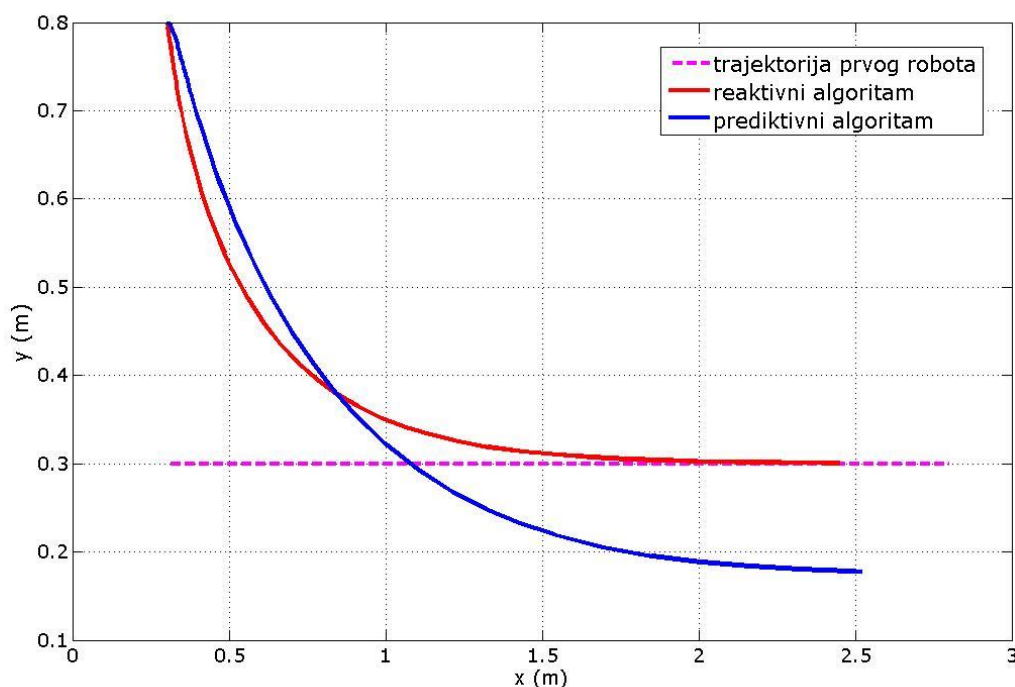
Slika 5.4. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Graf na slici jasnije pokazuje razliku u udaljenosti između mobilnih robota nego slika 5.2. i vidi se da robot bez prediktivnog algoritma uopće ne sustigne prvog mobilnog robota, za razliku od robota s prediktivnim algoritmom koji ga sustigne nakon nekih 8 s.

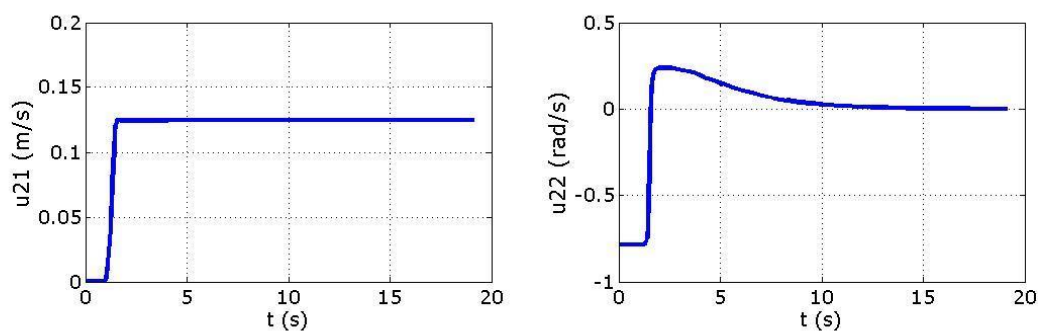
5.1.1.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3$ s

Na slici 5.5. prikazana je trajektorija prvog mobilnog robota, trajektorija robota bez prediktivnog algoritma, i trajektorija robota s prediktivnim algoritmom koji prati estimiranu trajektoriju prvog robota. Trajanje simulacije je 20 s. Iz slike je vidljivo da estimacija trajektorije u budućnosti bila dobra, te da se robot s prediktivnim algoritmom približi prvom robotu za razliku u slučaju bez predikcije.

Slika 5.6. prikazuje promjenu upravljačkih varijabli drugog mobilnog robota u_{21} i u_{22} dobivenih izrazima (3.57) i (3.55) u vremenu.



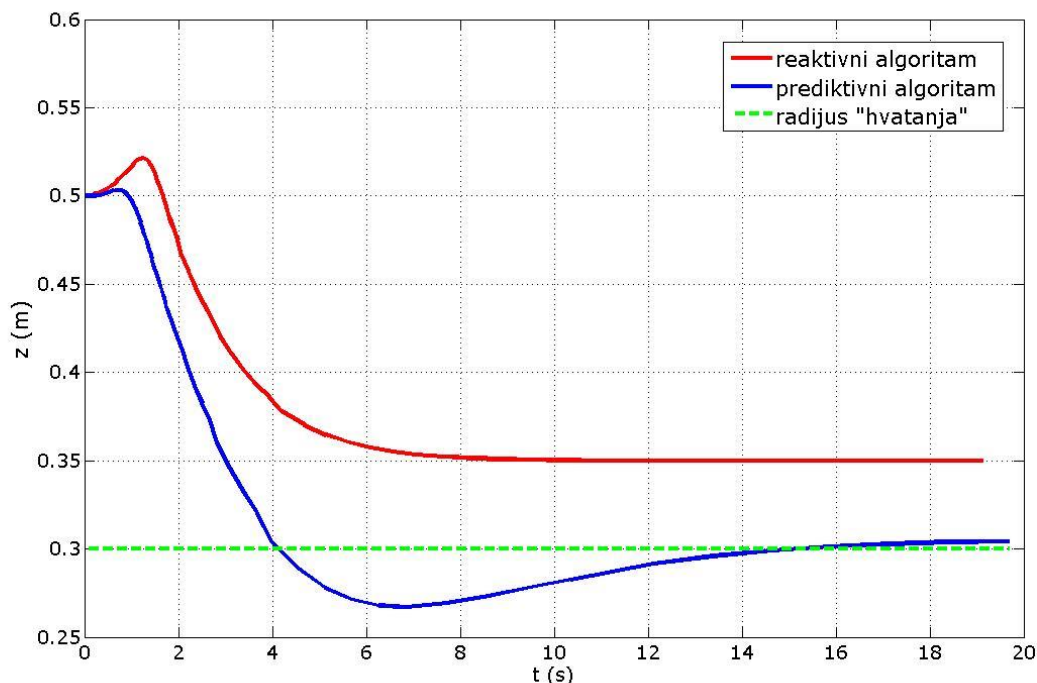
Slika 5.5. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s



Slika 5.6. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

Na slici 5.7. prikazana je udaljenost između prvog i drugog mobilnog robota z [m], dobivena pomoću izraza (3.51), u slučaju kada se ne koristi, i kada se koristi prediktivni algoritam. Na slici je vidljivo da robot bez prediktivnog algoritma uopće ne sustigne prvog mobilnog robota, za razliku od robota s prediktivnim algoritmom koji ga sustigne nakon nekih 4 s, međutim zbog većeg vremena predikcije nego u prethodnom primjeru prediktivni

algoritam počinje griješiti, te se drugi robot počinje udaljavati od prvog mobilnog robota nakon određenog vremena.



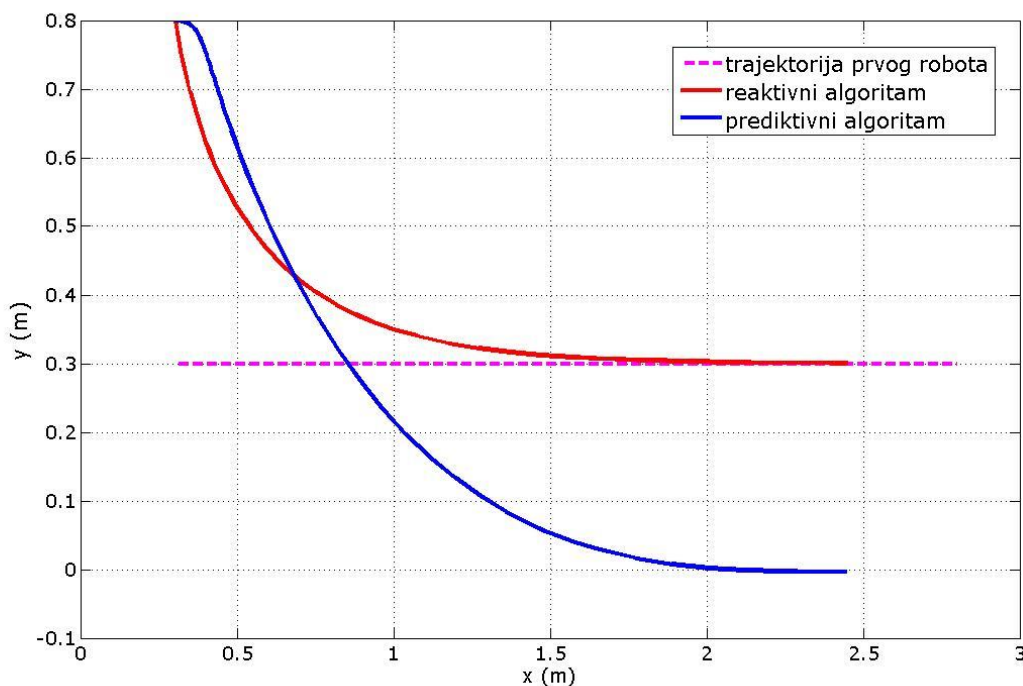
Slika 5.7. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

Taj problem je moguće riješiti prebacivanjem upravljačkog algoritma s prediktivnog na reaktivni, ili kao što je i napravljeno u eksperimentu, zaustavljanjem algoritma kada drugi robot sustigne prvog robota.

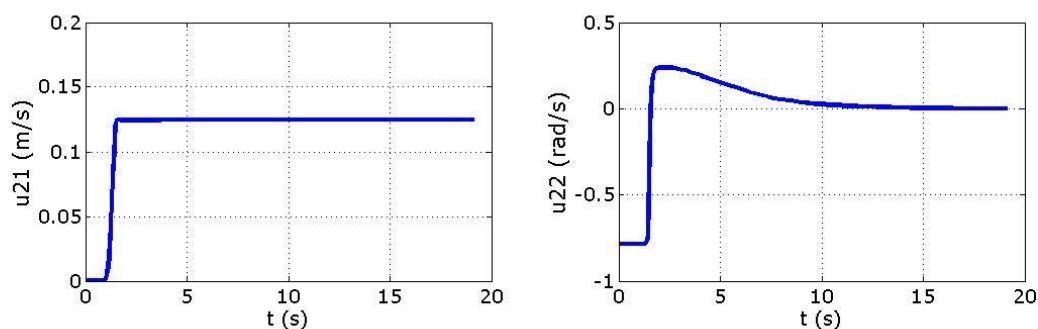
5.1.1.3. Vremenski horizont predikcije $T = 5$ s

Na slici 5.8. prikazane su trajektorije mobilnih robota za predikciju od 5 s. Trajanje simulacije je 20 s. Iz slike je vidljivo da estimacija trajektorije u budućnosti bila dobra, te da robot s prediktivnim algoritmom dođe bliže prvom robotu nego u slučaju bez predikcije.

Na slici 5.9. prikazane su promjene upravljačkih varijabli drugog mobilnog robota u_{21} i u_{22} dobivenih izrazima (3.57) i (3.56) u vremenu. Slika 5.10. prikazuje udaljenost između prvog i drugog mobilnog robota z [m], dobivenu pomoću izraza (3.51), u slučaju kada se ne koristi, i kada se koristi prediktivni algoritam.



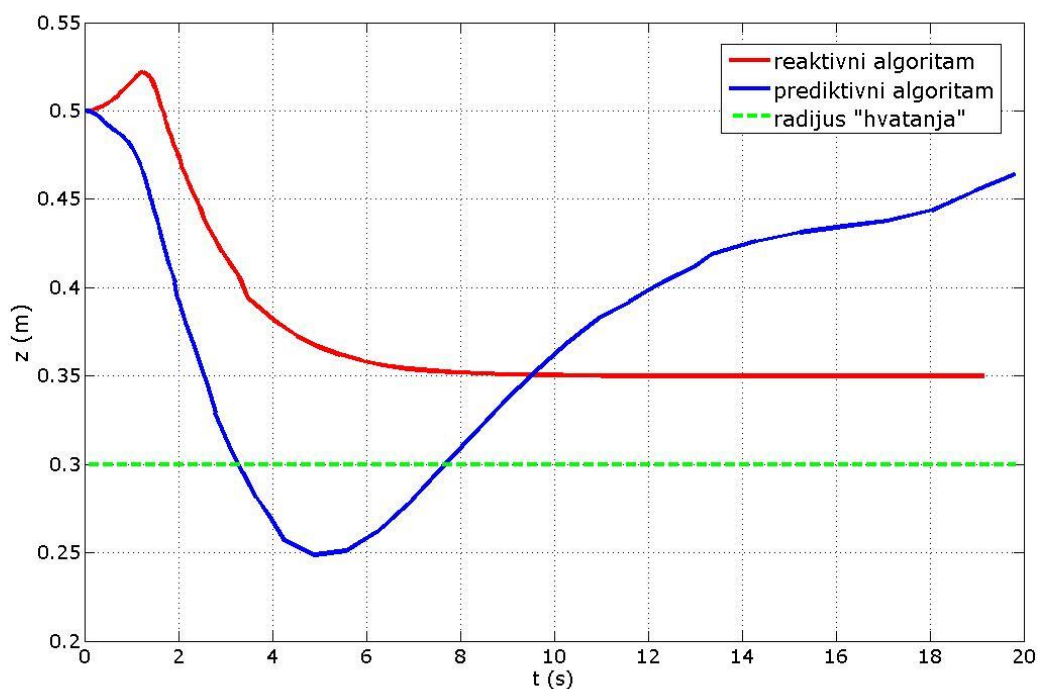
Slika 5.8. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 5$ s



Slika 5.9. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 5$ s

Robot s prediktivnim algoritmom sustigne prvog robota za malo više od 3 s, ali zbog još većeg vremena predikcije nego u prethodnom primjeru prediktivni algoritam počinje još više griješiti, te se nakon 5 s drugi robot počinje udaljavati od prvog mobilnog robota. Taj problem je moguće riješiti prebacivanjem upravljačkog algoritma s prediktivnog na reaktivni nakon 10 s, kada udaljenost između prvog robota i robota s prediktivnim algoritmom postane veća nego

udaljenost između prvog robota i robota bez prediktivnog algoritma, ili kao što je i napravljeno u eksperimentu, zaustavljanjem algoritma kada drugi robot sustigne prvog robota kako ne bi došlo do kolizije.



Slika 5.10. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 5$ s

Slijedi prikaz rezultata simulacije za međusobnu okomitu orijentaciju (slika 5.1.) mobilnih robota, za vremenske horizonte predikcije 1 i 3 s.

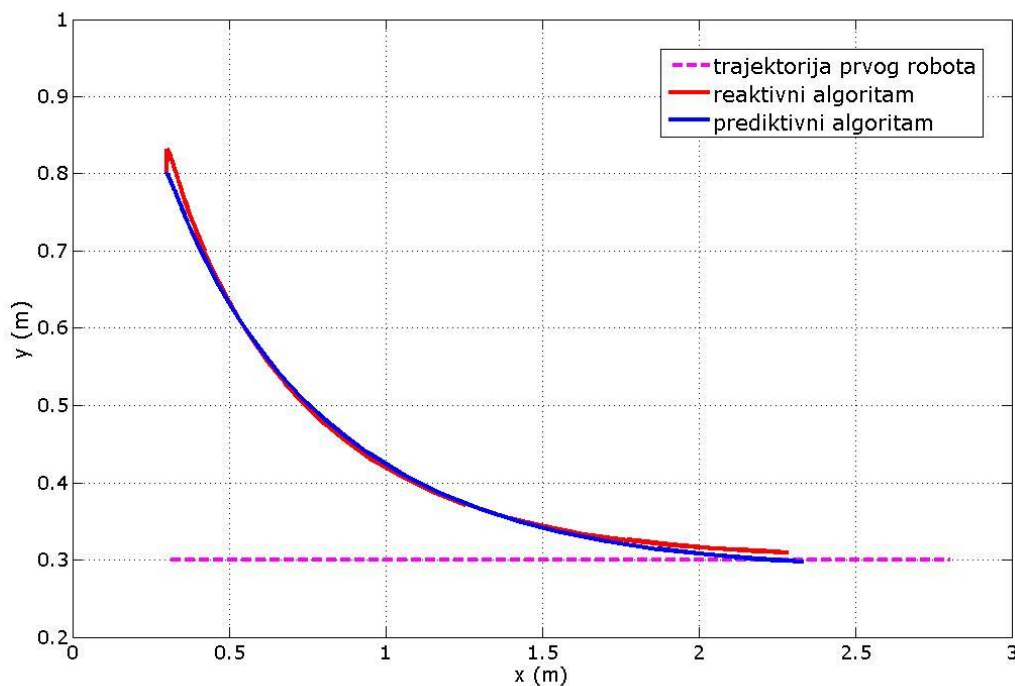
5.1.2. Međusobno okomito orijentirani mobilni roboti za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota

U ovom slučaju robot koji prati drugog mobilnog robota je pozicioniran okomito na njega, na način da je usmjeren od prvog robota.

5.1.2.1. Vremenski horizont predikcije $T = 1$ s

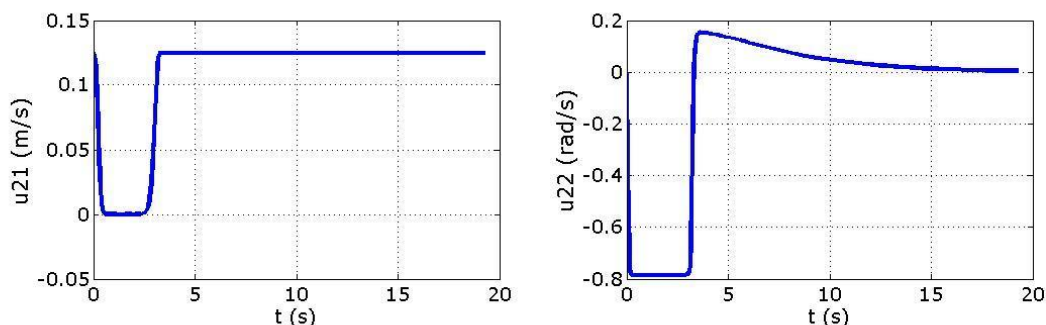
Na slici 5.10. prikazane su trajektorije mobilnih robota. Trajanje simulacije je 20 s. Iz slike je vidljivo da je jedina prednost estimacije trajektorije u budućnosti bila na početku

simulacije, kada se robot s prediktivnim algoritmom prvo zarotira a zatim krene s gibanjem prema prvom robotu, dok se robot bez prediktivnog algoritma krene gibati po pravcu, a naknadno se zarotira kako bi uhvatio putanju prvog robota.



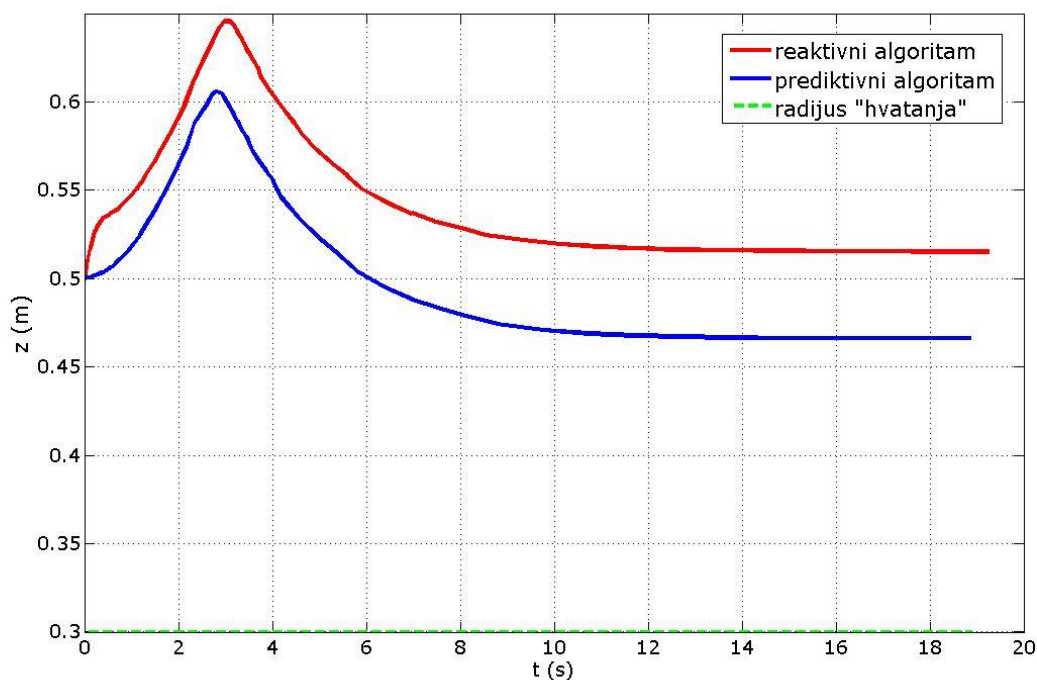
Slika 5.11. Putanje međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtne gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Slika 5.12. prikazuje promjene upravljačkih varijabli drugog mobilnog robota u_{21} i u_{22} dobivenih izrazima (3.57) i (3.56) u vremenu.



Slika 5.12. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtne gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Na slici 5.13. prikazana je udaljenost između prvog i drugog mobilnog robota z [m].



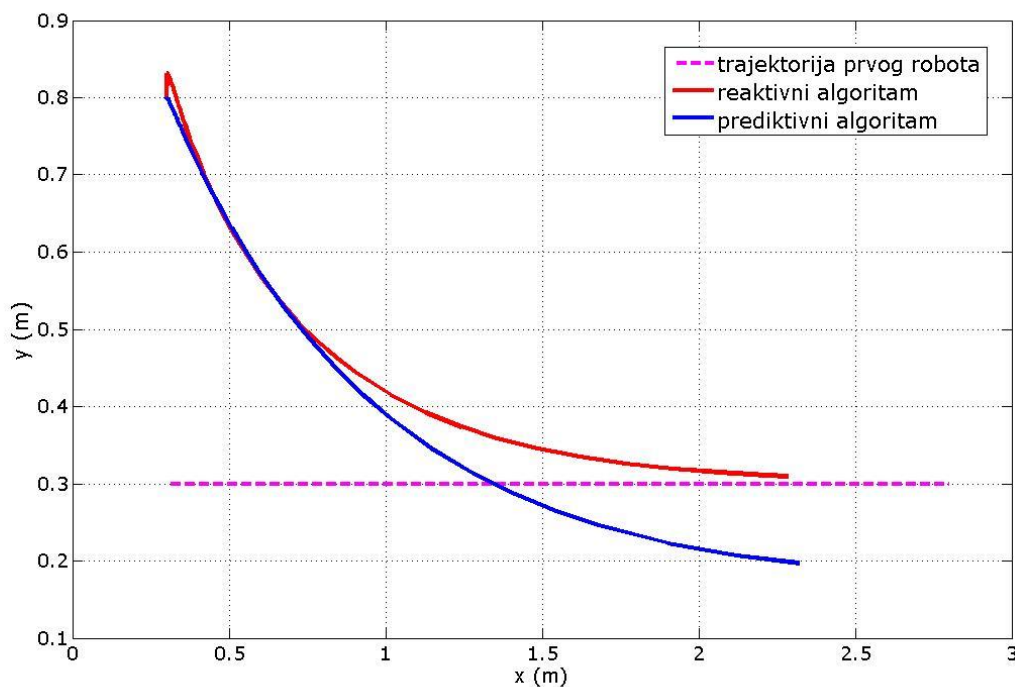
Slika 5.13. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Iz slike je vidljivo da robot ni sa ni bez prediktivnog algoritma ne uspijeva dostići radijus hvatanja prvog mobilnog robota od 30 cm, ali svejedno robot s prediktivnim algoritmom dođe bliže prvom robotu (udaljenost oko 47 cm) nego robot bez prediktivnog algoritma (udaljenost oko 52 cm) .

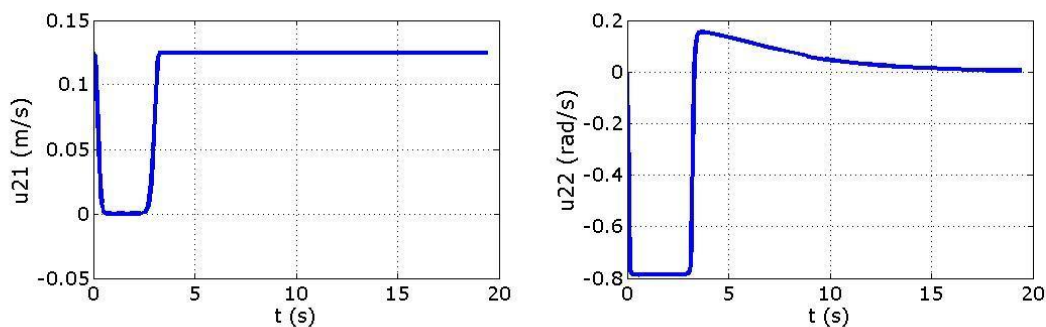
5.1.2.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3$ s

Na slici 5.14. prikazana je trajektorija prvog mobilnog robota, trajektorija robota bez prediktivnog algoritma, i trajektorija robota s prediktivnim algoritmom koji prati estimiranu trajektoriju prvog robota. Trajanje simulacije je 20 s. Iz slike je vidljivo da se sustav ponaša na isti način kao i kod horizonta predikcije od 1 s.

Slika 5.15. prikazuje promjene upravljačkih varijabli drugog mobilnog robota u_{21} i u_{22} dobivenih izrazima (3.57) i (3.56) u vremenu.

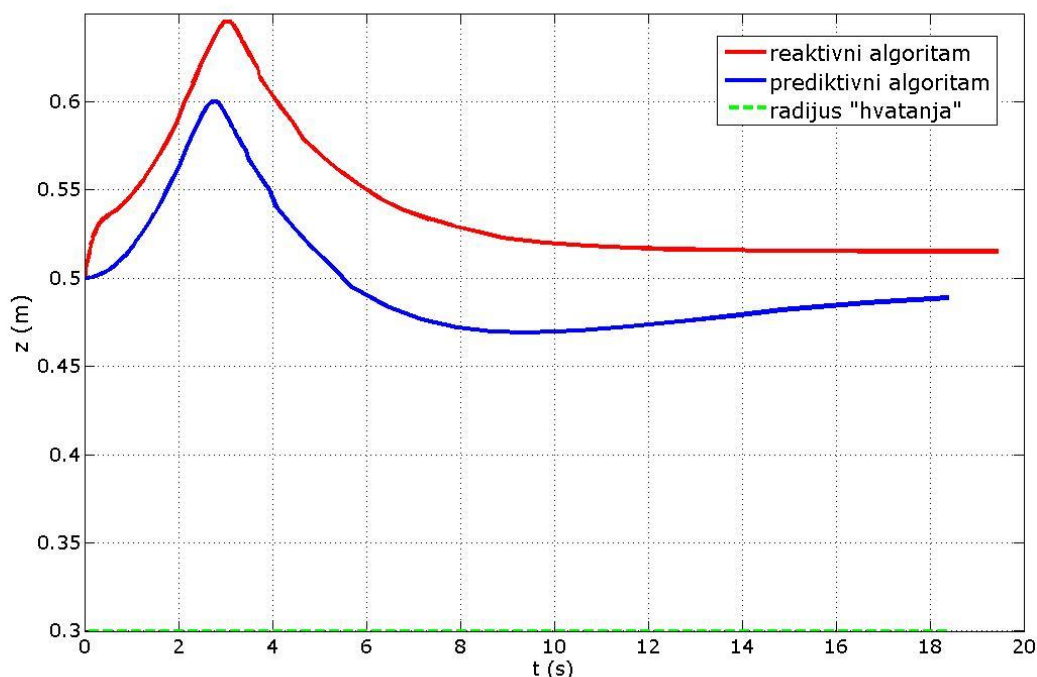


Slika 5.14. Putanje međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s



Slika 5.15. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

Na slici 5.16. prikazana je udaljenost između prvog i drugog mobilnog robota z [m]. Iz slike je vidljivo da robot ni sa ni bez prediktivnog algoritma ne uspijeva dostići radijus hvatanja prvog mobilnog robota od 30 cm, a i nakon nekog vremena robot s prediktivnim algoritmom se počinje udaljavati.



Slika 5.16. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito orijentiranih mobilnih robota ($\pi/2$) u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

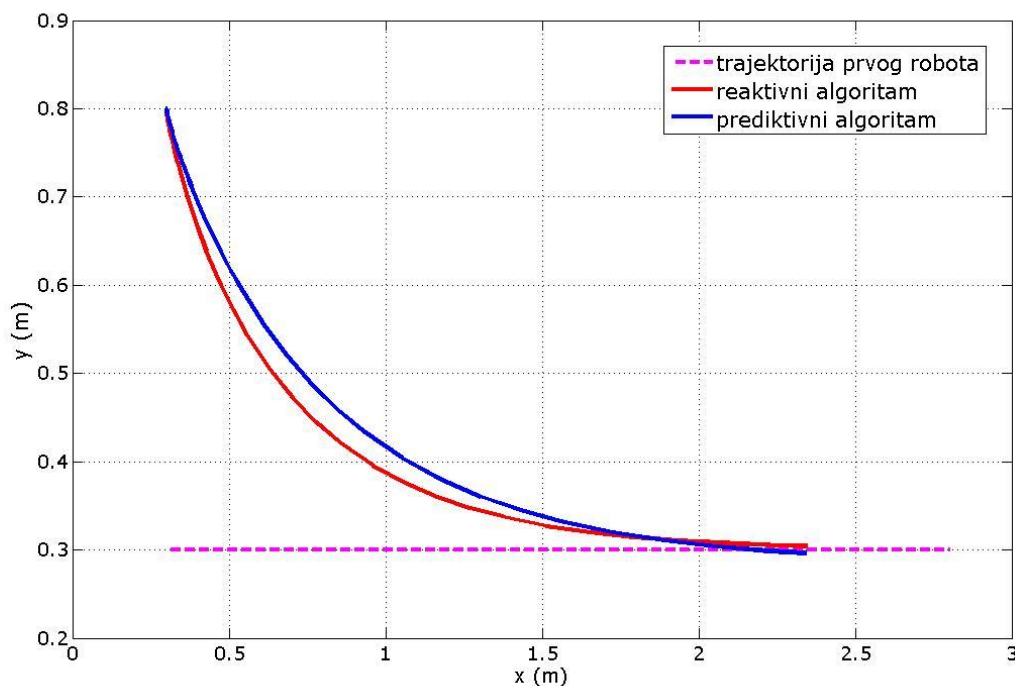
Slijedi prikaz rezultata simulacije za međusobnu suprotnu orijentaciju (slika 5.1.) mobilnih robota, za vremenske horizonte predikcije 1 i 3 s.

5.1.3. *Suprotno orijentirani mobilni roboti za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota*

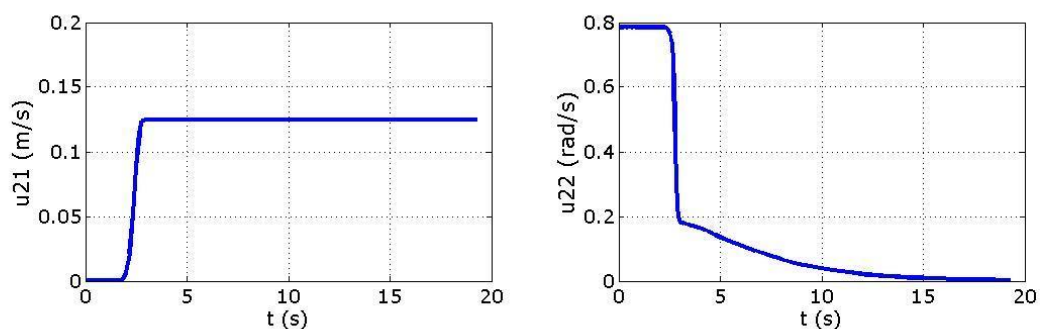
5.1.3.1. *Vremenski horizont predikcije $T = 1$ s*

Slika 5.17. prikazuje putanje prvog mobilnog robota, putanju robota bez prediktivnog algoritma i putanju robota s prediktivnim algoritmom koji prati estimiranu trajektoriju prvog robota. Trajanje simulacije je 20 s. Zbog ovakve početne orijentacije mobilnih robota robot s prediktivnim algoritmom je čak i nešto lošiji u početku nego bez prediktivnog algoritma. Tek u drugom dijelu simulacije odziv postaje bolji, ali nedovoljno da nadoknadi prethodni zaostatak, tako da u ovom slučaju prediktivni algoritam je ustvari nepotreban. Robot s i bez prediktivnog algoritma ne uspijeva sustići prvog mobilnog robota.

Na slici 5.18. prikazane su upravljačke varijable drugog mobilnog robota dobivene pomoću analitičkog neizrazitog regulatora.

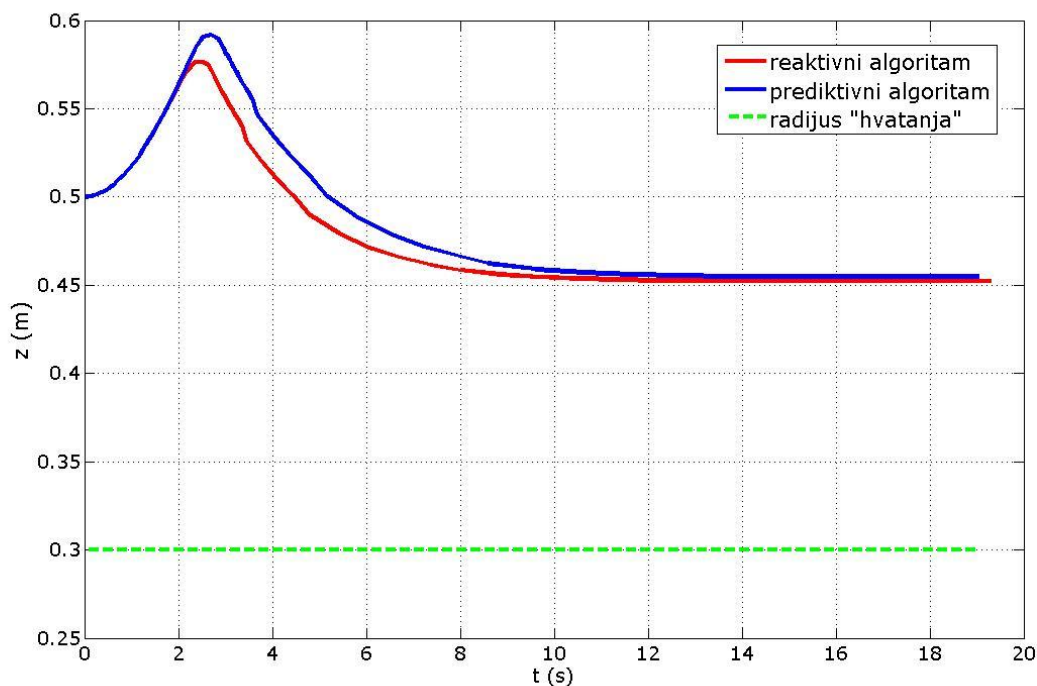


Slika 5.17. Putanje suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s



Slika 5.18. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 1$ s

Slika 5.19. potvrđuje da je prediktivni algoritam lošiji u ovom slučaju od reaktivnog algoritma, te da je udaljenost između dva robota manja s reaktivnim algoritmom, ali svejedno ne doseže radijus hvatanja prvog robota od 30 cm.



Slika 5.19. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Prikazom ovog slučaja orijentacije za vremenski horizont predikcije od 3 s koji slijedi, pokazuje se koliko horizont predikcije utječe na pogrešku.

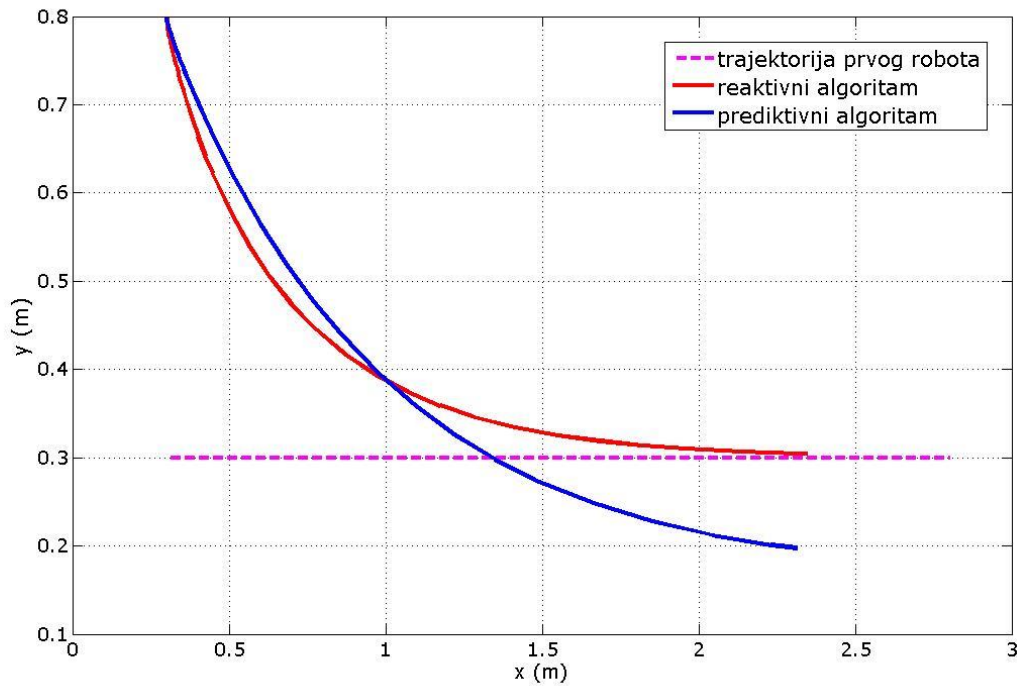
5.1.3.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3$ s

Slika 5.20. prikazuje putanje mobilnog robota. Trajanje simulacije je 20 s. Zbog ovakve početne orijentacije mobilnog robota robot s prediktivnim algoritmom je čak i nešto lošiji u početku nego bez prediktivnog algoritma. S povećanjem vremenskog horizonta predikcije robot s prediktivnim algoritmom se sve više udaljava od prvog mobilnog robota. Robot s i bez prediktivnog algoritma ne uspijeva sustići prvog mobilnog robota.

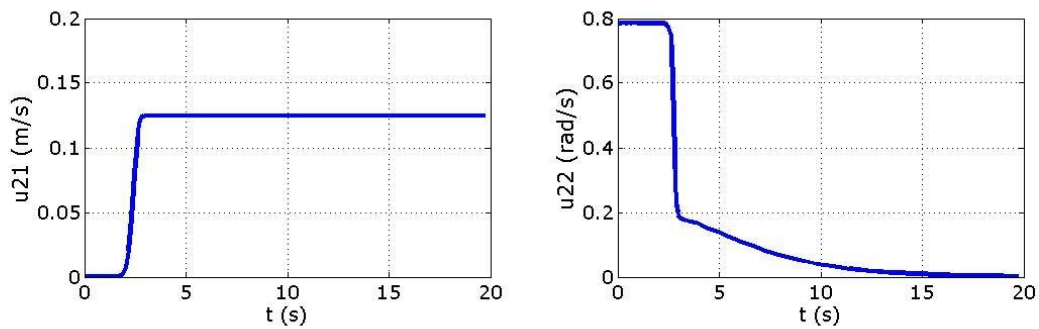
Na slici 5.21. prikazane su upravljačke varijable drugog mobilnog robota u vremenu, dobivene preko izraza (3.57) i (3.56) pomoću analitičkog neizrazitog regulatora.

Slika 5.22. pokazuje da udaljenost između robota s većim horizontom predikcije počinje rasti i robot se sve više udaljava od svog cilja.

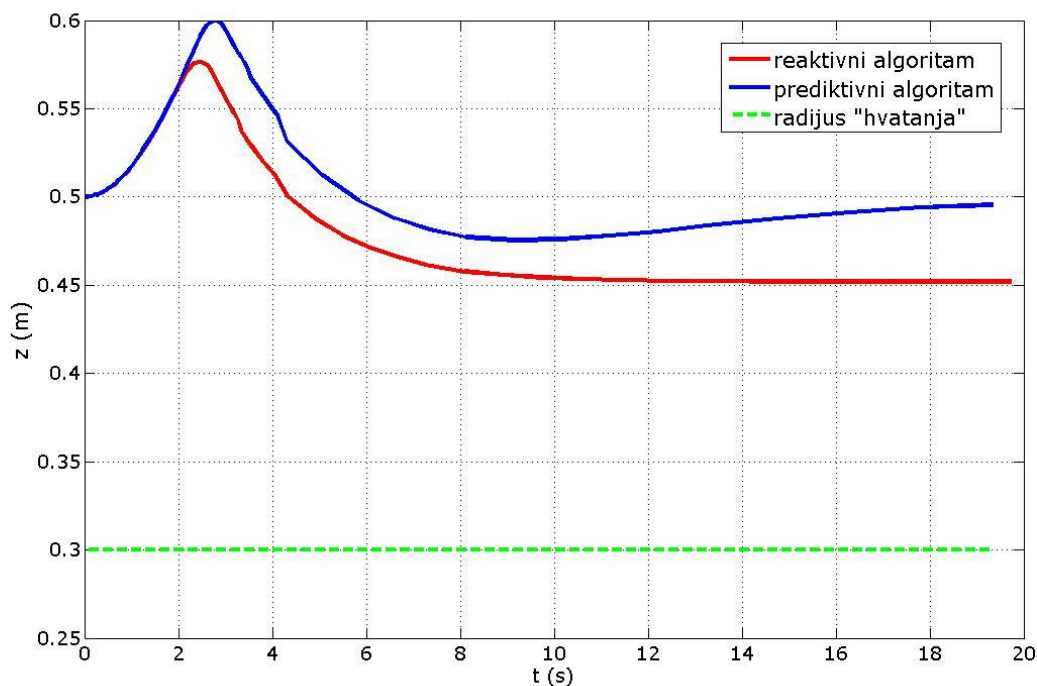
Smanjivanjem horizonta predikcije putanja robota s prediktivnim algoritmom se sve više poklapa s putanjom robota bez prediktivnog algoritma.



Slika 5.20. Putanje suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s



Slika 5.21. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 3$ s



Slika 5.22. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

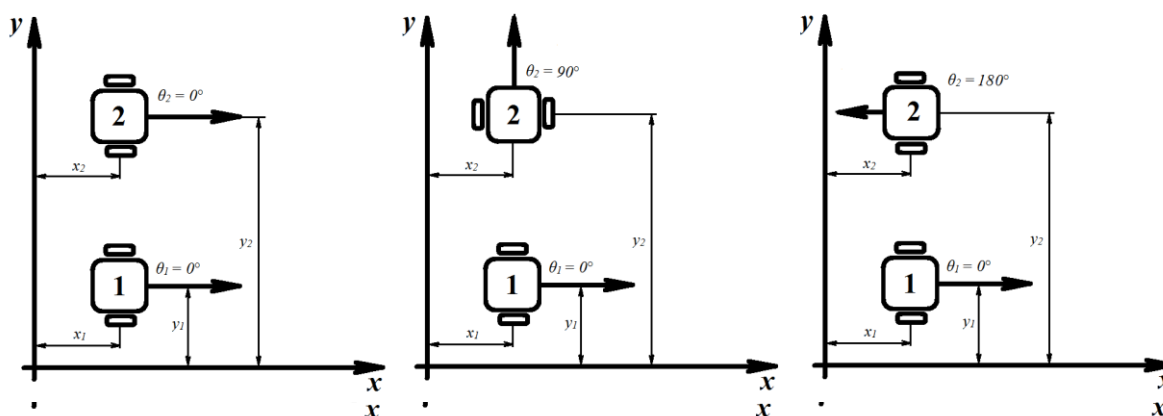
Slijedi prikaz rezultata simulacije za polukružnju putanju prvog mobilnog robota, za tri orijentacije i vremenske horizonte predikcije od 1 i 3 s.

5.2. Rezultati simulacije za zadane upravljačke varijable prvog mobilnog robota $u_{11} = 0.125$ m/s i $u_{12} = -0.1$ rad/s

Zadane su upravljačke varijable prvog mobilnog robota $u_{11} = 0.125$ m/s i $u_{12} = -0.1$ rad/s. Tako definirane upravljačke varijable rezultiraju polukružnom putanjom mobilnog robota. Simulacija je provedena za dva vremenska horizonta predikcije od 1 i 3 s i tri različite početne orijentacije drugog mobilnog robota: u smjeru prvog mobilnog robota, okomito na smjer prvog mobilnog robota i u suprotnome smjeru u odnosu na prvog mobilnog robota. U tablici 5.3. prikazane su početne pozicije mobilnih robota. Na slici 5.23. prikazane su početne pozicije i orijentacije mobilnih robota.

Tablica 5.3. Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota u xy ravnini za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota

Početna pozicija i orijentacija u koordinatnom sustavu xy		Iznos
Početna pozicija prvog robota u x – osi, x_1 [m]		0.3
Početna pozicija prvog robota u y – osi, y_1 [m]		1.5
Početna orinetacija prvog robota, θ_1 [rad]		0.0
Početna pozicija drugog robota u x – osi, x_2 [m]		0.3
Početna pozicija drugog robota u y – osi, y_2 [m]		0.3
Početna orijentacija drugog robota, θ_2 [rad]	isto orijentirani roboti	0.0
	okomito orijentirani roboti	$\pi/2$
	suprotno orijentirani roboti	π



Slika 5.23. Početne pozicije i orijentacije mobilnih robota definirane tablicom 5.3.

(lijevo - isto orijentirani roboti, sredina - okomito orijentirani roboti, desno - suprotno orijentirani roboti)

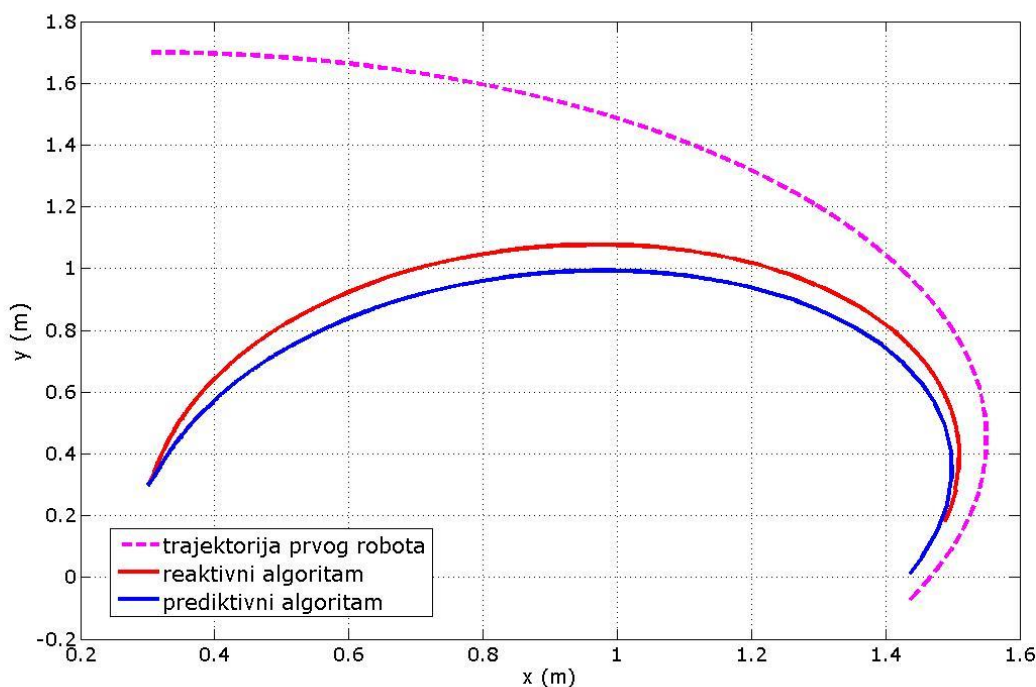
Slijedi prikaz rezultata simulacija za zadanu referentnu putanju. Ponovno se naglašava, biti će usporedno prikazana gibanja mobilnih robota uz korištenje prediktivnog algoritma (plava boja) izvedenog u 4. poglavlju , i bez prediktivnog algoritma (reaktivni algoritam, crvena boja) kod kojeg je prisutno samo upravljanje mobilnim robotom pomoću analitičkog neizrazitog regulatora.

5.2.1. Međusobno isto orijentirani mobilni roboti za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota

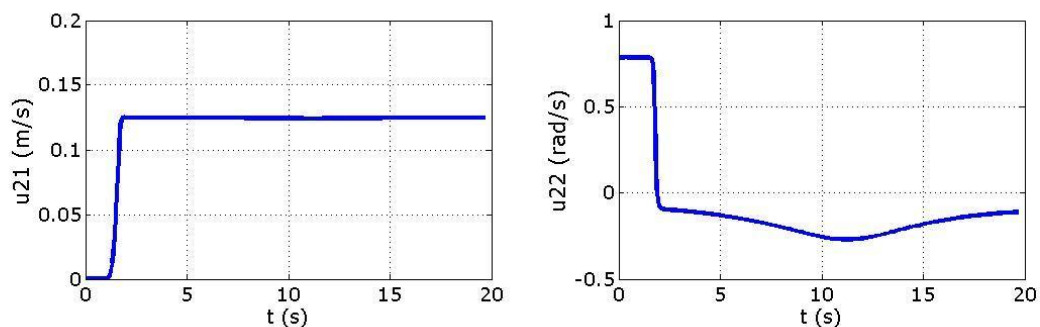
5.2.1.1. Vremenski horizont predikcije $T = 1$ s

Na slici 5.24. prikazane su putanje prvog mobilnog robota i mobilnih robota sa i bez prediktivnog algoritma. Prema slici se vidi da je robot s prediktivnim algoritmom došao puno bliže prvom mobilnom robotu nego robot bez prediktivnog algoritma. Slika 5.25. prikazuje promjenu upravljačkih veličina u_{21} i u_{22} drugog mobilnog robota u vremenu za opisani slučaj.

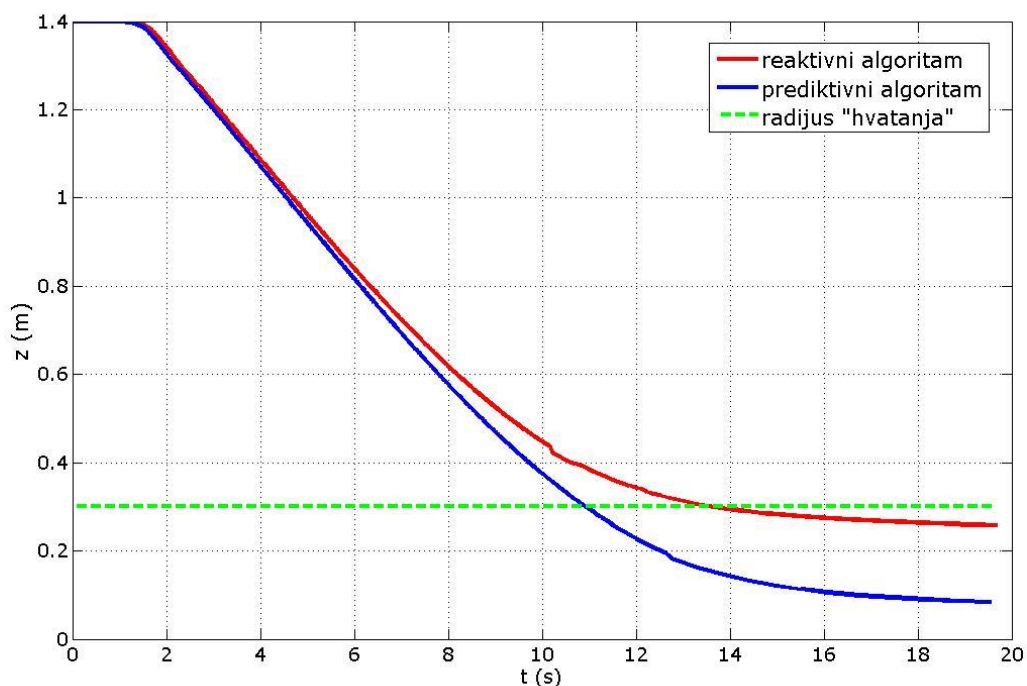
Iz slike 5.26. je vidljivo da drugi mobilni robot u oba slučaja dostigne radijus hvatanja prvog mobilnog robota od 30 cm. Robot s prediktivnim algoritmom otprilike nakon 11 s sustigne prvog robota, dok robot bez prediktivnog algoritma prvog robota sustiže oko 2 s kasnije.



Slika 5.24. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s



Slika 5.25. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 1$ s

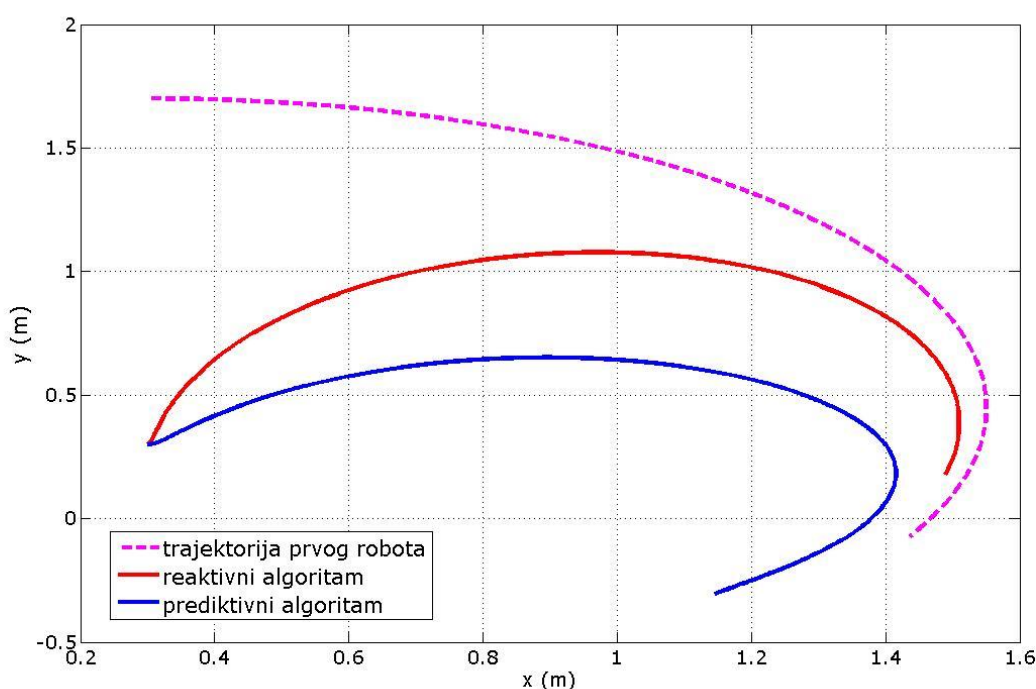


Slika 5.26. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Na sljedećem primjeru, za vremenski horizont predikcije od 3 s, za ovako zadane početne pozicije i orijentacije mobilnih robota biti će prikazan zanimljiv slučaj kada drugi mobilni robot uz korištenje prediktivnog algoritma uspijeva preći prvog mobilnog robota.

5.2.1.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3$ s

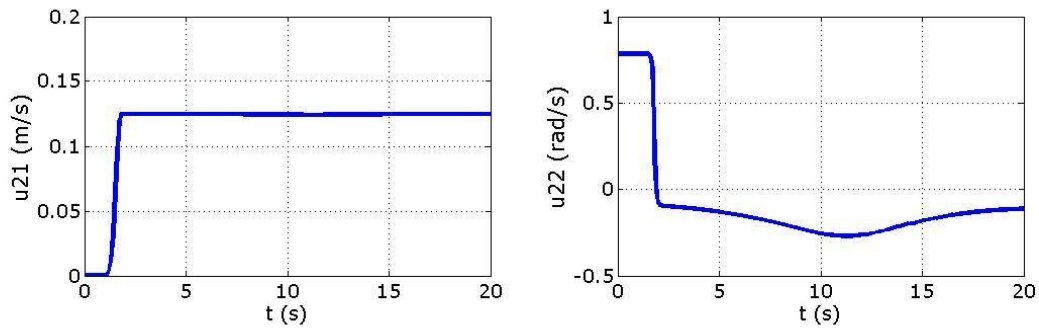
Slika 5.27. prikazuje putanje mobilnih robota za zadani slučaj. Simulacija traje 20 s. Slika pokazuje da je prediktivni algoritam drugog mobilnog robota predaleko estimirao putanju prvog mobilnog robota i potpuno ga promašio. Robot s prediktivnim algoritmom je čak i prešao prvog mobilnog robota. Ovaj slučaj je vrlo zanimljiv s obzirom da je cilj prediktivnog algoritma sustizanje prvog robota, tj. smanjenje udaljenosti između robota ispod radijusa hvatanja, što u ovom primjeru nije slučaj.



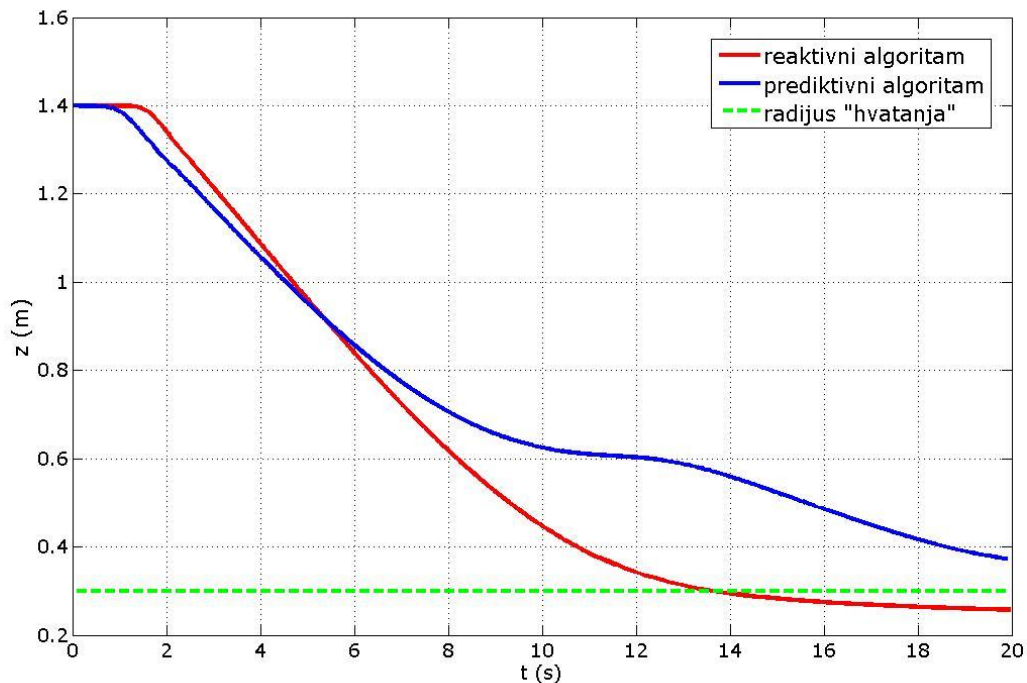
Slika 5.27. Putanje isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

Na slici 5.28. prikazane su promjene upravljačkih varijabli u_{21} i u_{22} drugog mobilnog robota u vremenu za opisani slučaj.

Na slici 5.29. prikazana je udaljenost između prvog i drugog mobilnog robota z [m], dobivena pomoću izraza (3.51), u slučaju kada se ne koristi, i kada se koristi prediktivni algoritam. Graf na slici pokazuje da robot s prediktivnom algoritmom uopće ne sustigne prvog mobilnog robota ni nakon 20 s, za razliku od robota bez prediktivnog algoritma koji ga sustigne nakon nekih 13 s, ali ga zato pretekne.



Slika 5.28. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 3$ s



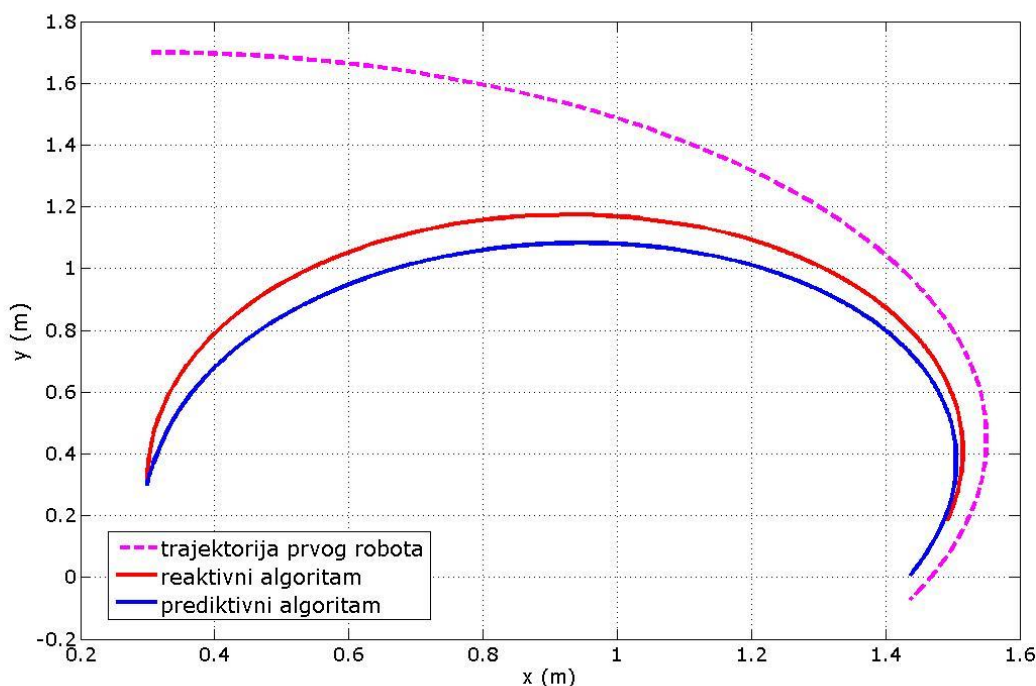
Slika 5.29. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj isto orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

Slijedi prikaz rezultata simulacije za međusobnu suprotnu orijentaciju (slika 5.23.) mobilnih robota, za vremenske horizonte predikcije 1 i 3 s.

5.2.2. Međusobno okomito orijentirani mobilni roboti za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota

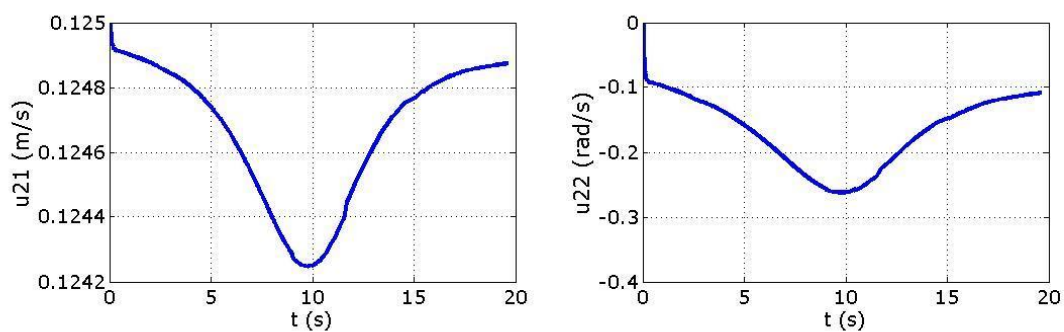
5.2.2.1. Vremenski horizont predikcije $T = 1$ s

Na slici 5.30. prikazane su putanje mobilnih robota. Prema slici ovaj slučaj je gotovo identičan slučaju kada su mobilni roboti bili isto orijentirani. Slika 5.31. prikazuje promjene upravljačkih varijabli u_{21} i u_{22} drugog mobilnog robota u vremenu za opisani slučaj.

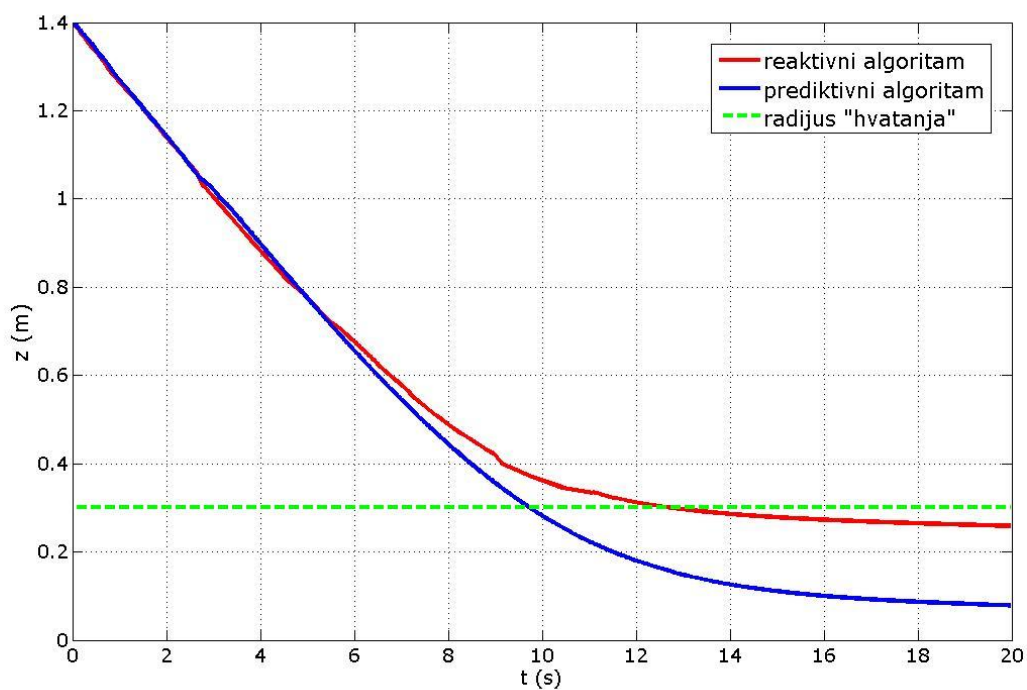


Slika 5.30. Putanje međusobno okomito ($\pi/2$) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Prema slici 5.32. drugi mobilni robot u oba slučaja dostigne radijus hvatanja prvog mobilnog robota od 30 cm, kao i u slučaju iste orijentacije mobilnih robota, s time da robot s prediktivnim algoritmom otprilike nakon 9 s sustigne prvog robota, dok robot bez prediktivnog algoritma prvog robota sustiže oko 2 do 3 s kasnije, što znači da je drugi mobilni robot uz ovakvu orijentaciju oko 2 s brži nego kada je orijentiran isto kao i prvi robot.



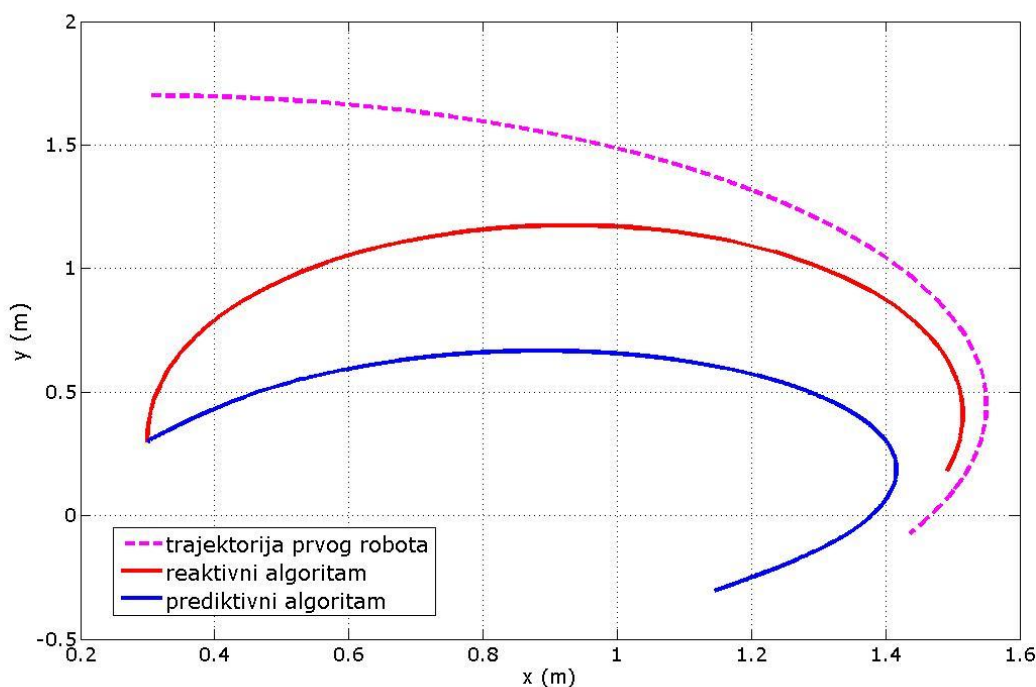
Slika 5.31. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito ($\pi/2$) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 1$ s



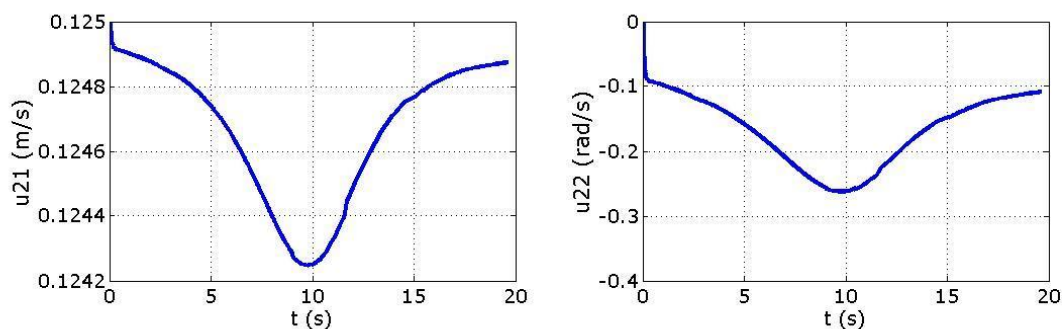
Slika 5.32. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito ($\pi/2$) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

5.2.2.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3$ s

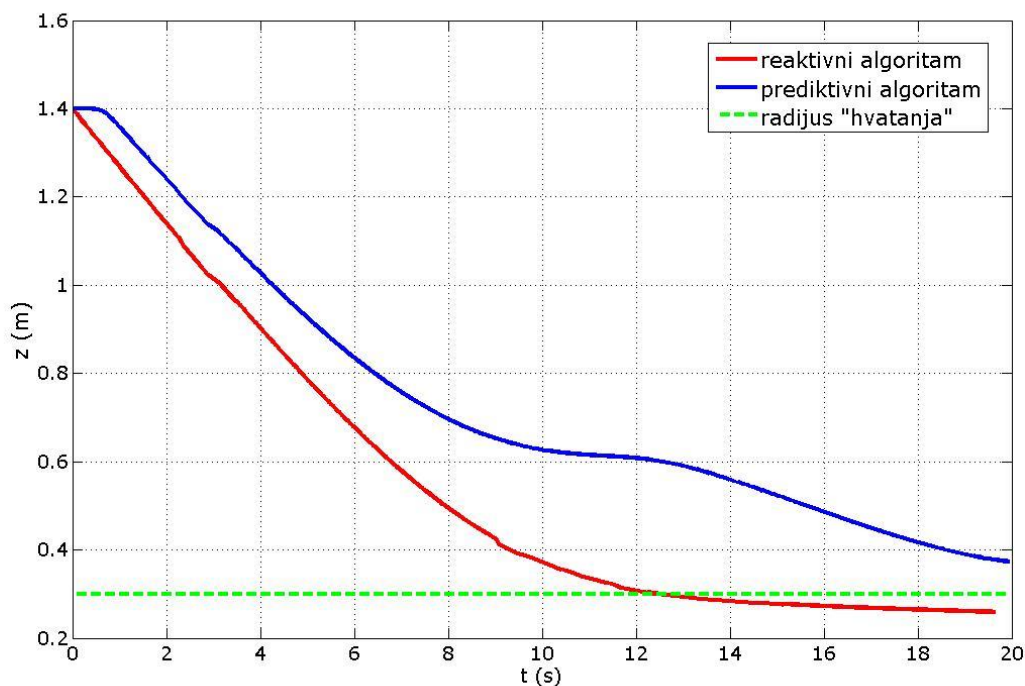
Slika 5.33. prikazuje putanje mobilnih robota. Trajanje simulacije je 20 s. Ovaj slučaj je također jako sličan slučaju kada su mobilni roboti bili isto orijentirani. I u ovom slučaju drugi robot potpuno promašuje prvog robota. Slika 5.34. prikazuje upravljačke varijable.



Slika 5.33. Putanje međusobno okomito ($\pi/2$) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s



Slika 5.34. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno okomito ($\pi/2$) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 3$



Slika 5.35. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno okomito ($\pi/2$) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

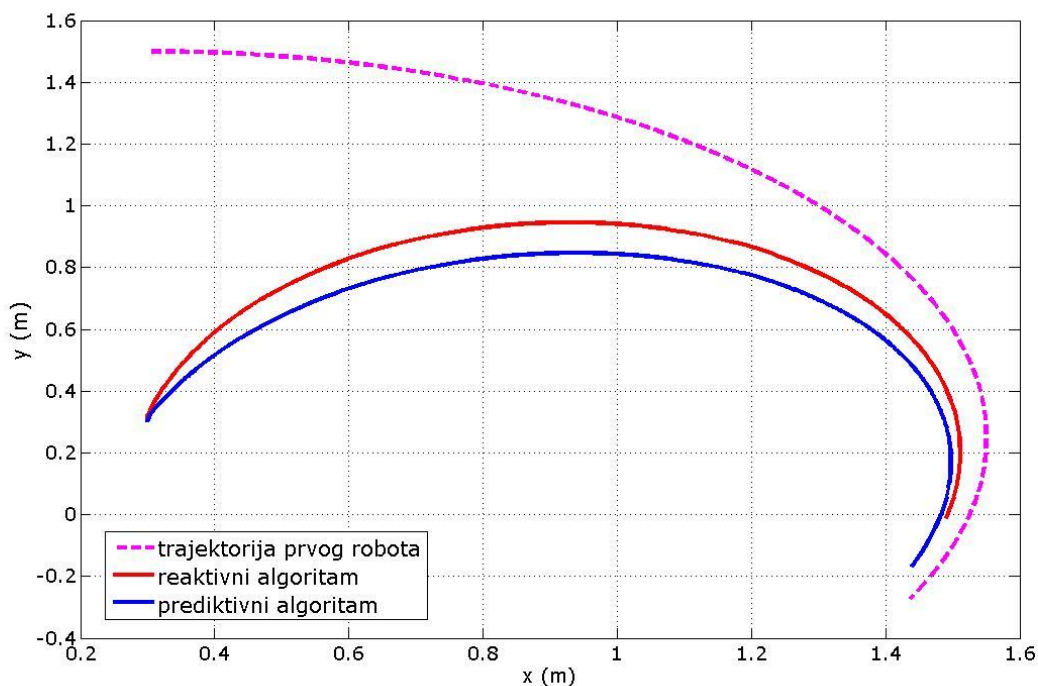
U slučaju kada se roboti međusobno suprotno orijentiraju ponavlja se ista situacija kada su roboti isto i međusobno okomito orijentirani, i za vremenski horizont predikcije od 1 s i za vremenski horizont predikcije od 3 s.

5.2.3. *Suprotno orijentirani mobilni roboti za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota*

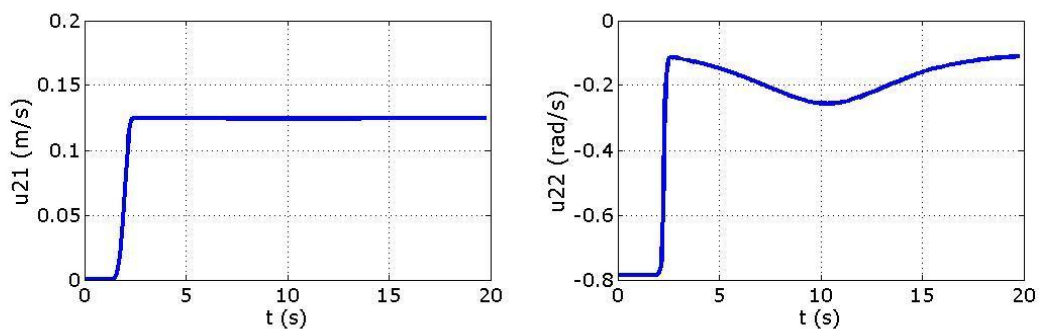
5.2.3.1. *Vremenski horizont predikcije $T = 1$ s*

Kao što je već rečeno, za ovakve početne pozicije i orijentacije robota ponavlja se gotovo identičan slučaj kao i kod prethodna dva primjera za polukružno gibanje mobilnog robota (isto i okomito orijentirani roboti, slika 5.23.) uz isti vremenski horizont predikcije.

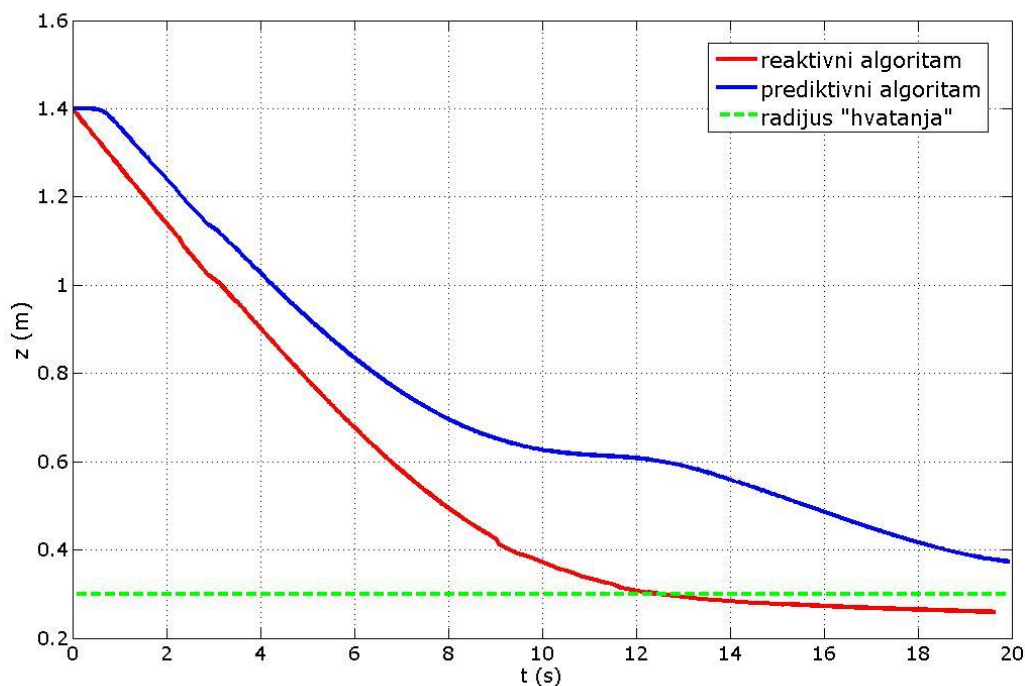
Na slici 5.36. prikazane su putanje mobilnih robota, slika 5.37. prikazuje promjenu upravljačkih veličina u_{21} i u_{22} drugog mobilnog robota u vremenu, a slika 5.38. prikazuje udaljenost između mobilnih robota u vremenu.



Slika 5.36. Putanje međusobno suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s



Slika 5.37. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 1$ s



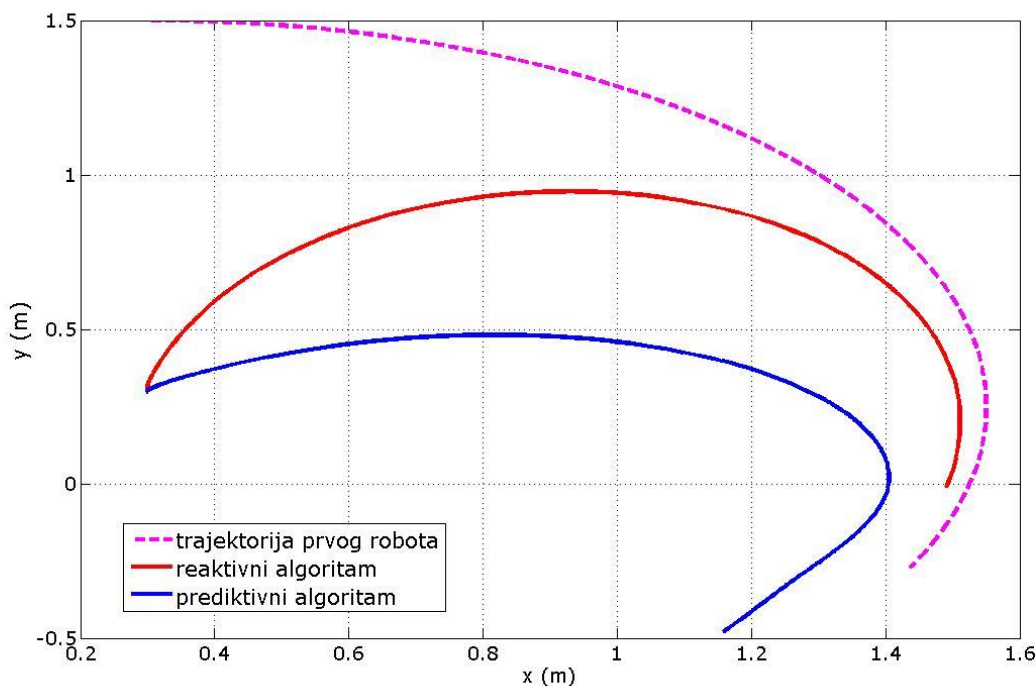
Slika 5.38. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 1$ s

Na sljedećem primjeru, za vremenski horizont predikcije od 3 s, za ovako zadane početne pozicije i orijentacije mobilnih robota biti će prikazan već viđeni slučaj kada drugi mobilni robot uz korištenje prediktivnog algoritma uspijeva prestići prvog mobilnog robota ali uz male promjene.

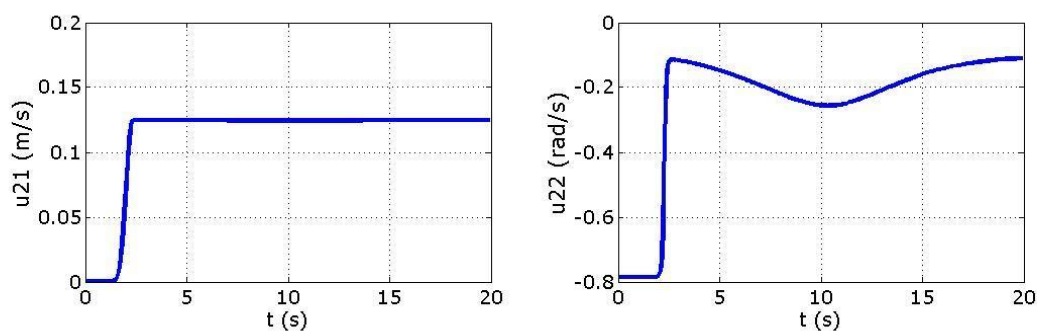
5.2.3.2. Vremenski horizont predikcije $T = 3$ s

Kao što je već rečeno, za ovakve početne pozicije i orijentacije robota ponavlja se gotovo identičan slučaj kao i kod prethodna dva primjera za polukružno gibanje mobilnog robota (isto i okomito orijentirani roboti, slika 5.23.) uz isti vremenski horizont predikcije, ali uz male promjene. Pri kraju simulacije iz slike 5.39. vidi se da prediktivni algoritam počinje grješiti i krivo estimira kružnu putanju, te se drugi mobilni robot počinje gibati po pravcu.

Na slici 5.39. prikazane su putanje mobilnih robota, slika 5.40. prikazuje promjenu upravljačkih veličina u_{21} i u_{22} drugog mobilnog robota u vremenu, a slika 5.41. prikazuje udaljenost između mobilnih robota u vremenu.



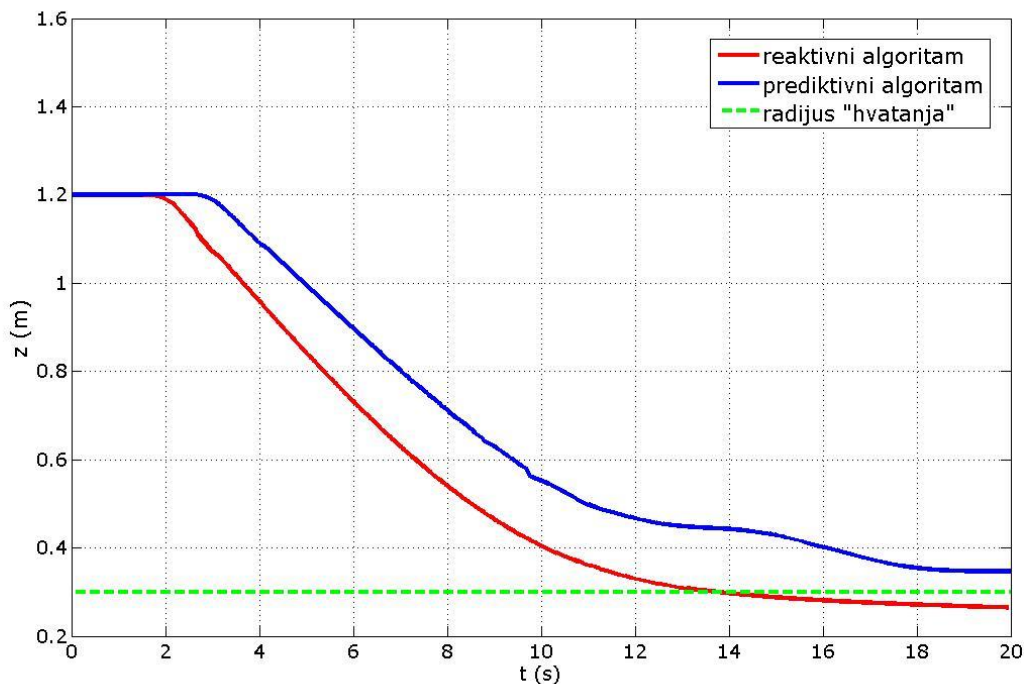
Slika 5.39. Putanje međusobno suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju sa i bez prediktivnog algoritma za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s



Slika 5.40. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota za slučaj međusobno suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, polukružnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta $T = 3$ s

Naime, greška u estimaciji događa se zbog prevelikog horizonta predikcije. Kod predikcije u budućnost dobivene izrazima (4.21) i (4.22) pretpostavlja se da su matrice A_1 i A_2 definirane izrazima (4.23) i (4.24) vremenski invarijantne. U stvarnosti su one vremenski ovisne, te ta promjena utječe na točnost predikcije. Što je zadana putanja kompliciranija, s

većim promjenama, promjene u matricama A_1 i A_2 su sve veće, pa iz tog razloga prediktivni algoritam za kompliciranije putanje i veće horizonte predikcije sve više i više griješi u estimaciji.



Slika 5.41. Udaljenosti između mobilnih robota za slučaj međusobno suprotno (π) orijentiranih mobilnih robota u početnom položaju, pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota i vremenskog horizonta predikcije $T = 3$ s

U idućem poglavlju slijedi prikaz rezultata eksperimenta. Ukratko će biti opisano što je sve napravljeno u sklopu eksperimenta, neke bitne razlike između simulacije i eksperimenta i na koji način je eksperiment proveden. Eksperiment će biti proveden za obje putanje mobilnih robota, uz jednu početnu orijentaciju i jedan vremenski horizont predikcije.

6. REZULTATI EKSPERIMENTA

Eksperiment je proveden u Laboratoriju za strojarску automatiku na Fakultetu strojarstva i brodogradnje na mobilnim robotima eMIR prikazanim u 2. poglavlju ovoga rada. Provedena su dva eksperimenta: jedan za pravocrtnu putanju prvog mobilnog robota, međusobno okmitu orijentaciju mobilnih robota (slika 5.1.) i vremenski horizont predikcije od 2 s, a drugi za polukružnu putanju prvog mobilnog robota, međusobnu okomitu orijentaciju mobilnih robota (slika 5.23.) i vremenski horizont predikcije 1 s. U eksperimentu će se pokušati ostvariti gibanja mobilnih robota dobivena simulacijom za navedene slučajeve.

Već je navedeno da su u simulaciju uključena fizička ograničenja prisutna u laboratoriju, ali u nekim slučajevima zbog potrebe simulacije ta ograničenja su prekoračena. Prilikom provođenja eksperimenta to neće biti slučaj. Postoji nekoliko bitnih razlika između simulacije i eksperimenta:

1. U simulaciji mobilni roboti su reprezentirani točkom dok u stvarnom svijetu roboti imaju dimenzije (tablica 2.1.) koje se moraju uračunati prilikom provođenja eksperimenta.
2. Radni prostor robota u simulaciji je beskonačan, u stvarnosti njihov radni prostor je ograničen na dimenzije radnog stola koje su 2 x 4 m.
3. Sami mobilni roboti nisu savršeni, postoje mnoge sustavne greške koje utječu na gibanje robota (npr. proklizavanje kotača, nesavršenost aktuatora itd.). Zbog navedenih razloga mobilni roboti griješe prilikom gibanja. Te pogreške se djelomično kompenziraju korekcijskim faktorima za gibanje robota koji su određeni eksperimentalno.

Gibanja mobilnih robota se ostvaruju konstantnim slanjem naredbi u obliku izraza **(2.1)**. Nakon što robot primi naredbu, giba se zadanom translacijskom i rotacijskom brzinom 1 s. Kako bi se simuliralo gibanje dobiveno simulacijom, prvom mobilnom robotu se svake sekunde šalje naredba kojom mu se zadaju translacijska i rotacijska brzina, definirane u poglavljima 5.1. i 5.2. da bi se dobila željena putanja. Translacijska i rotacijska brzina drugog mobilnog robota se dobivaju uzorkovanjem odziva dobivenog od analitičkog neizrazitog regulatora svake sekunde, prikazanog slikama u poglavlju 5. za svaki pojedini slučaj (grafovi koji prikazuju translacijsku i rotacijsku brzinu u_{21} i u_{22} drugog mobilnog robota).

Tako dobivene brzine robota ne mogu se direktno slati mobilnim robotima, nego se prvo moraju prebaciti u oblik definiran izrazom (2.1). Ta pretvorba se ostvaruje sljedećim algoritmom:

1. Definiraju se maksimalna translacijska i rotacijska brzina mobilnog robota (tablica 2.1.).
2. Definiraju se korekcijski faktori za translaciju i rotaciju prvog i drugog mobilnog robota c_1 , c_2 , c_3 i c_4 .
3. Brzine koje se trebaju poslati mobilnim robotima se definiraju kao postoci maksimalnih brzina i ispravljene su korekcijskim faktorima:

$$u_{11_postotak} = (u_{11}/v_{max}) * (100\% + c_1), \quad (6.1)$$

$$u_{12_postotak} = (u_{12}/\omega_{max}) * (100\% + c_2), \quad (6.2)$$

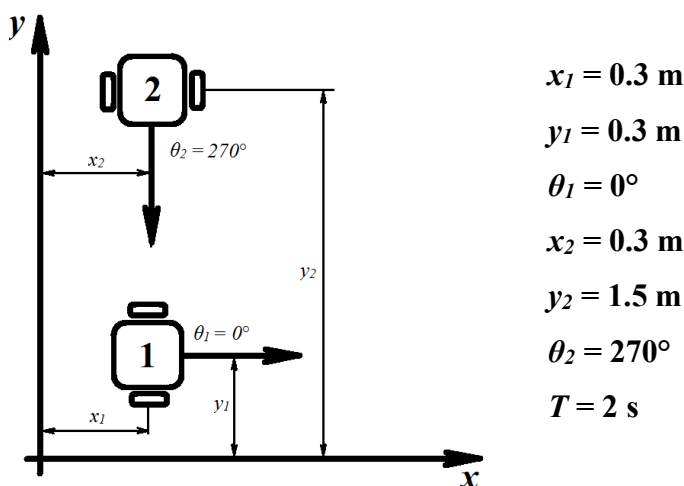
$$u_{21_postotak} = (u_{21}/v_{max}) * (100\% + c_3), \quad (6.3)$$

$$u_{22_postotak} = (u_{22}/\omega_{max}) * (100\% + c_4). \quad (6.4)$$

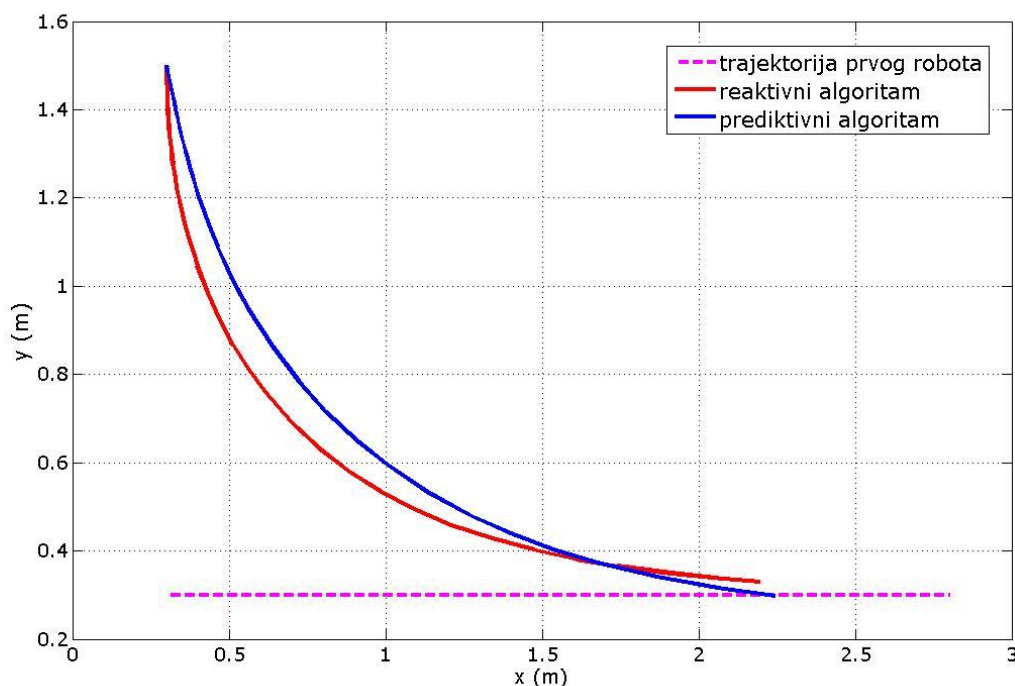
4. Brzine dobivene kao postoci se zaokružuju na najbližu cijelobrojnu vrijednost.
5. Dobivene zaokružene vrijednosti se pretvaraju odgovarajuće u heksadecimalne vrijednosti.
6. Računa se Check Sum definiran kao dio izraza (2.1).
7. Sastavlja se string od 10 bajtova definiran izrazom (2.1) i kao takav se šalje robotu.

6.1. Rezultati eksperimenta za pravocrtnu putanju prvog mobilnog robota

Na slici 6.1. prikazani su početni uvjeti eksperimenta. Slika 6.2. prikazuje simulaciju putanja mobilnih robota za zadane početne uvjete. Trajanje simulacije je 20 s.

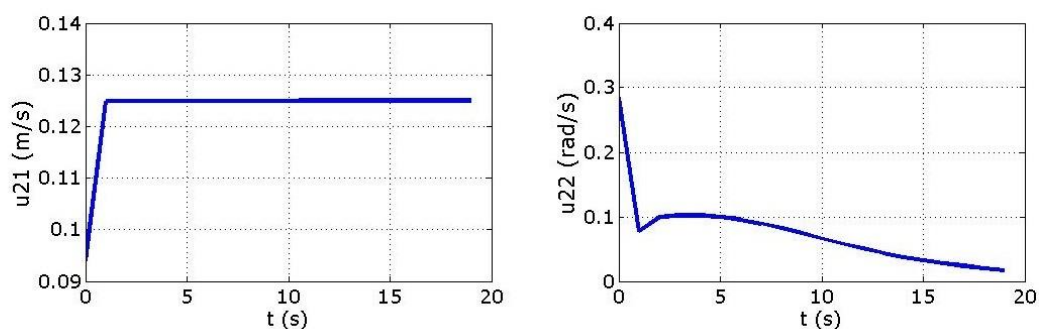


Slika 6.1. Početni uvjeti za pravocrtno gibanje prvog mobilnog robota



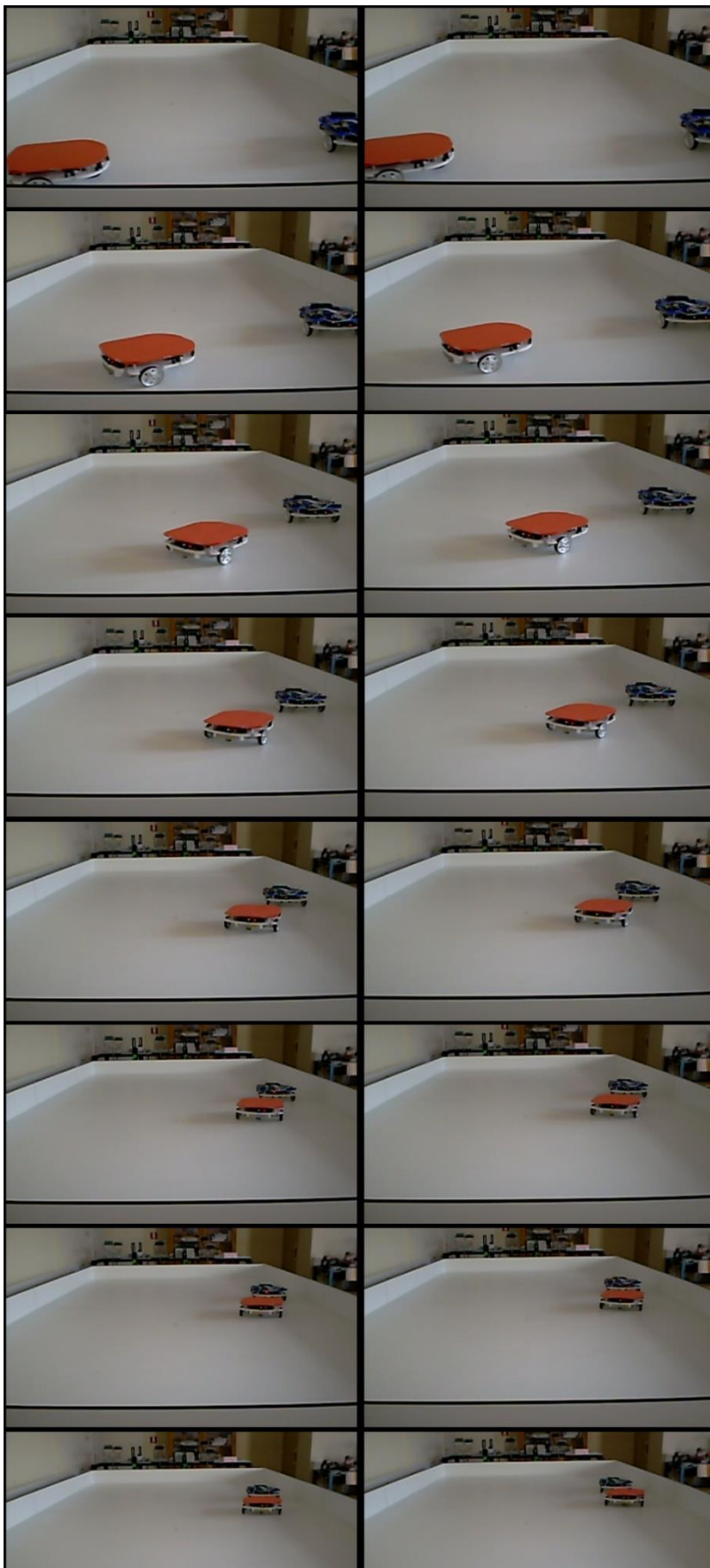
Slika 6.2. Putanje mobilnih robota dobivene simulacijom za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota

Slika 6.3. prikazuje promjene upravljačkih varijabli u_{21} i u_{22} koje se uzorkuju i šalju robotu.



Slika 6.3. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota dobivene regulatorom za slučaj pravocrtnog gibanja prvog mobilnog robota

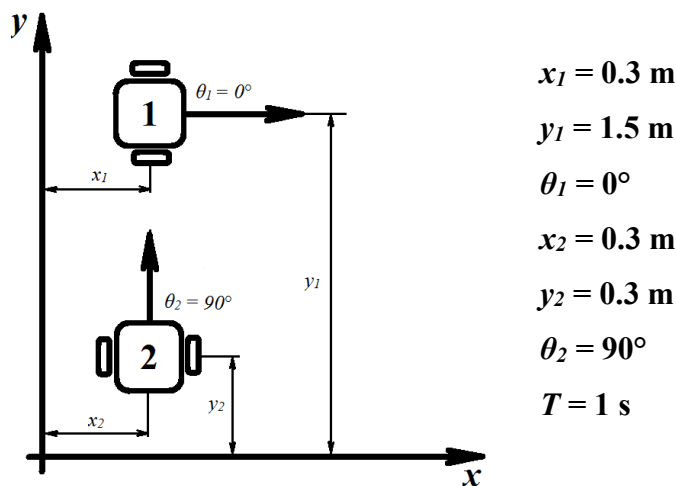
Na slici 6.4. prikazani su položaji stvarnih mobilnih robota u istim vremenskim trenucima za slučaj kada se ne koristi (lijevo) i kada se koristi (desno) prediktivni algoritam. Pogled na slikama je iz smjera y -osi. Iz slika se vidi da se robot s prediktivnim algoritmom (desno) kreće malo direktnijom putanjom nego robot bez prediktivnog algoritma, što je dobiveno i simulacijom. Također, robot s prediktivnim algoritmom se kao i na simulaciji malo više približio prvom robotu i bio direktno iza njega. Iz ovih zapažanja se može zaključiti da su roboti dosta dobro pratili zadane putanje.



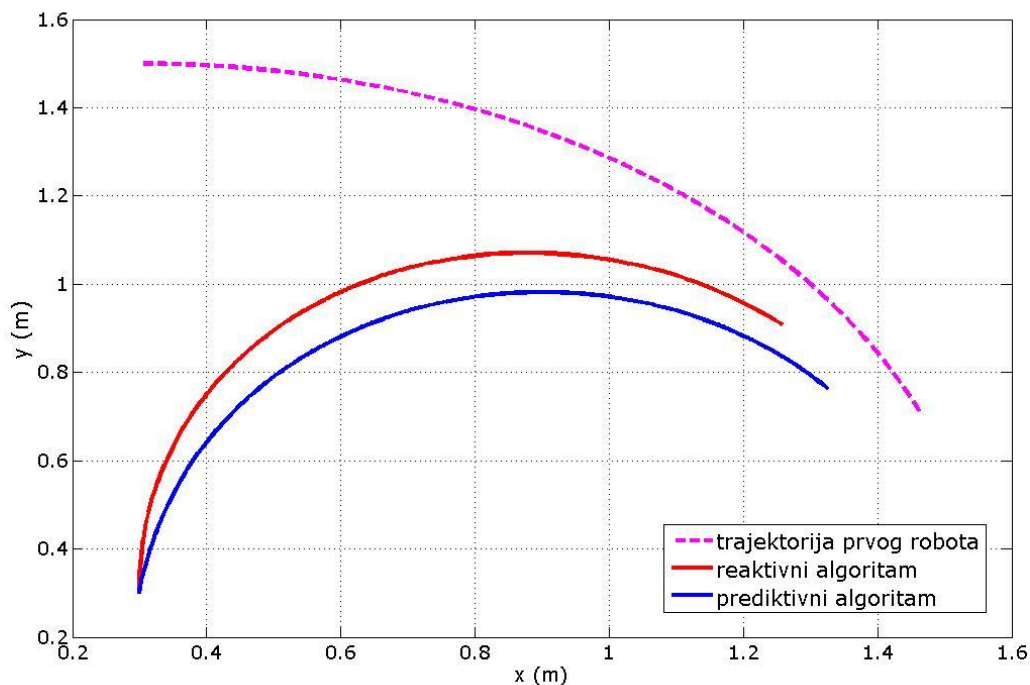
Slika 6.4. Gibanje robota bez predikcije (lijevo) i sa predikcijom (desno)

6.2. Rezultati eksperimenta za polukružnu putanju prvog mobilnog robota

Na slici 6.5. prikazani su početni uvjeti eksperimenta. Slika 6.6. prikazuje simulaciju putanja mobilnih robota za zadane početne uvjete. Trajanje simulacije je 12 s.

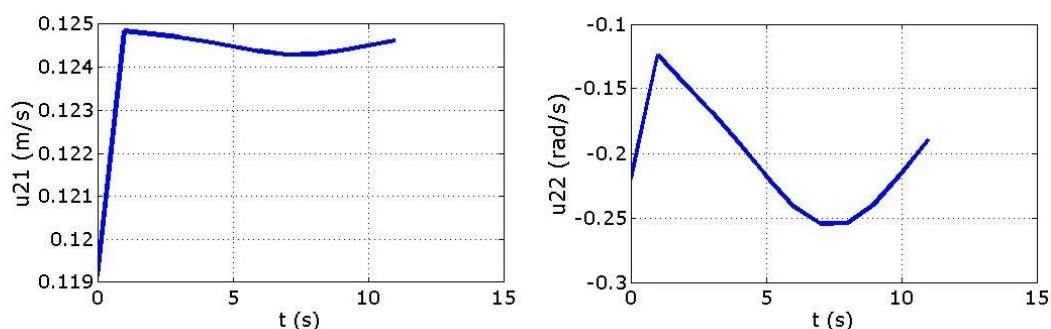


Slika 6.5. Početni uvjeti za polukružno gibanje prvog mobilnog robota



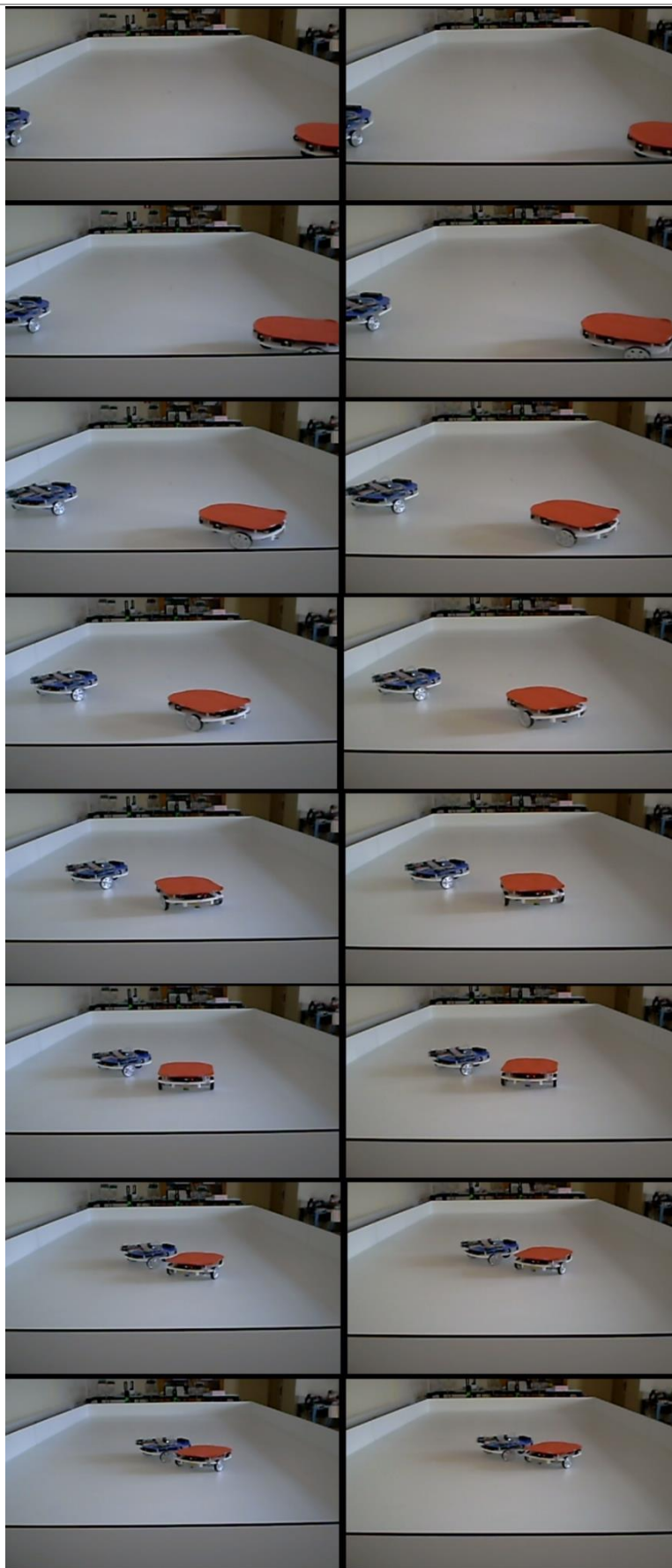
Slika 6.6. Putanje mobilnih robota dobivene simulacijom za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota

Slika 6.7. prikazuje promjene upravljačkih varijabli u_{21} i u_{22} koje se uzorkuju i šalju robotu.



Slika 6.7. Upravljačke varijable drugog mobilnog robota dobivene regulatorom za slučaj polukružnog gibanja prvog mobilnog robota

Na slici 6.4. prikazani su položaji stvarnih mobilnih robota u istim vremenskim trenucima za slučaj kada se ne koristi (lijevo) i kada se koristi (desno) prediktivni algoritam. Pogled na slikama je iz smjera y -osi. Iz slika se vidi da robot s prediktivnim algoritmom (desno) prilikom gibanja malo više skreće kod rotacije nego robot bez prediktivnog algoritma, što je dobiveno i simulacijom. Također, robot s prediktivnim algoritmom je kao i što je dobiveno simulacijom bio malo udaljeniji od prvog robota, ali se zato više približio prednjem djelu prvog mobilnog robota. Iz ovih zapažanja se može zaključiti da su roboti dosta dobro pratili zadane putanje, makar se već mogu uočiti manje pogreške u gibanjima robota zbog veće kompleksnosti zadanih putanja i samih nesavršenosti mobilnih robota.



Slika 6.8. Gibanje robota bez predikcije (lijevo) i sa predikcijom (desno)

7. ZAKLJUČAK

Mogućnost predikcije ima sve veću važnost u svim neznanstvenim i znanstvenim disciplinama, pa tako i u strojarstvu. Od svih grana strojarstva, predikcija u robotici se posebno ističe. Upravo iz tog razloga tema ovoga rada je bila prikazati jedan takav slučaj. U pomoć prediktivnog algoritma (estimator stanja) i analitičkog neizrazitog regulatora za upravljanje mobilnim robotom nastojalo se pokazati koliko bi se skratilo vrijeme potrebno da mobilni robot sustigne drugog mobilnog robota ako predviđa u nekom određenom vremenskom horizontu gdje se njegov cilj nalazi. Radi bolje evaluacije roboti su se gibali istim brzinama. Slučaj je simuliran za dvije putanje, pravocrtnu i polukružnu, uz korištenje i bez korištenja estimatora stanja, te različite početne pozicije i orijentacije robota.

Prema dobivenim podacima može se zaključiti da za jednostavne putanje robot može prilično dobro i s većom estimacijom slijediti putanju, što za posljedicu ima kraći, a s time i brži put do cilja nego bez estimacije. Kod složenije putanje estimator može predviđati s manjim vremenskim horizontom, što je i za očekivati. Sam analitički neizraziti regulator prilično dobro radi i uspijeva uhvatiti sve potrebne putanje. Prediktivni algoritam koji na temelju poznate pozicije estimira brzinu i ubrzanje robota i računa poziciju robota u zadanom vremenu u budućnost, u nekim slučajevima ne radi baš najbolje. Pošto su brzine robota iste, uspješnost predikcije jako ovisi o početnim pozicijama, orijentacijama i smjeru kretanja robota, i rezultati su dosta nepredvidivi. U nekim slučajevima robot koji je koristio prediktivni algoritam je čak kasnio za robotom bez prediktivnog algoritma (u slučaju suprotne orijentacije mobilnih robota kod pravocrtne referentne trajektorije), dok je kod polukružne referentne trajektorije, uz dovoljno velik vremenski horizont predikcije, uspio i preći svoj cilj, ali nije postigao definirani radijus hvatanja prvog mobilnog robota.

U sklopu rada je proveden i eksperiment u Laboratoriju za strojarsku automatiku na Fakultetu strojarstva i brodogradnje na realnim mobilnim robotima. Sve provedene simulacije su bile prilagođene uvjetima u laboratoriju kako bi se eksperiment usporedio s simulacijom. Napravljena su dva eksperimenta; za pravocrtnu i polukružnu putanju, i za svaki eksperiment usporedba između gibanja robota sa i bez prediktivnog algoritma. Robotima su se serijskom bluetooth komunikacijom slale naredbe za translacijske i rotacijske brzine dobivene pomoću analitičkog fuzzy regulatora, čime se se ostvarivala zadana gibanja. Uz sve svoje sustavne nesavršenosti roboti su prilično dobro pratili zadane trajektorije dobivene simulacijom.

Problem je bio što su zbog spore komunikacije i drugih faktora kretanje robota bile diskontinuirane prilikom provođenja eksperimenta. Zbog tog diskontinuiteta nije bilo moguće procijeniti je li robot uz korištenje prediktivnog algoritma imao kraće vrijeme kretanja nego bez njega, jedino se može utvrditi je li došao bliže svom cilju.

Taj problem bi vjerojatno bilo moguće riješiti nekim drugim oblikom komunikacije i boljom hardverskom podrškom, gdje bi se u tom slučaju mogla ugraditi i povratna veza između robota kako bi se dobili bolji rezultati. Također, uz bolje mobilne robote i rezultati eksperimenta bi bili bolji. Neizraziti analitički regulator je prilično dobro pratio zadane trajektorije i radio svoj dio posla, ali bi zato bolji prediktivni algoritam bio dobra nadogradnja na ovaj sustav. Zaključno, ima dosta prostora za poboljšanja.

LITERATURA

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Mobile_robot
- [2] J. Kasać, „Neizrazito i digitalno upravljanje“, interna skripta, FSB, Zagreb, 2015.
- [3] M. Crneković, „Industrijski i mobilni roboti“, interna skripta, FSB, Zagreb, 2014.
- [4] M. Crneković, Tehnički podaci mobilnih robota eMIR
- [5] <https://en.wikipedia.org/wiki/Underactuation>
- [6] J. Kasać, „Neizrazita logika“, interna skripta, FSB, Zagreb, 2015.
- [7] C. Schmid, *DynLAB, Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems, Part III: System Control*, Bochum: Leonardo da Vinci, 2004.
- [8] S. H. Zak, *Systems and control*, New York, Oxford university press, 2003.
- [9] Michot, Marc, "Brockett's necessary conditions and the stabilization of nonlinear control systems", 2011. Master's Theses, dostupno na:
<http://pqdtopen.proquest.com/results.html?keywords=Brockett%27s%20theorem>
- [10] J. Kasać, „Vođenje tehničkih sustava“, interna skripta, FSB, Zagreb, 2015.
- [11] B. M. Novaković, D. Scap, D. Novaković, „An analitic approach to fuzzy robot control synthesis“, in *Engineering Applications of Artificial Intelligence, Volume 13, Issue 1*, February 2000.
- [12] J. Kasać, „Opća teorija sustava“, interna skripta, FSB, Zagreb, 2015.
- [13] J. Kasać, „Hopfieldove neuronske mreže“, interna skripta, FSB, Zagreb, 2015.
- [14] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi, *Sliding mode control in electro-mechanical systems, second edition*, Boca Raton, CRC Press, 2009.
- [15] https://en.wikipedia.org/wiki/Saturation_arithmetic