

# Validacija modela turbulencije na primjerima strujanja na aeroprofilima i krilima s prijelazom iz laminarnog u turbulentni režim

---

Delić, Fran

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:672208>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-28**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# **ZAVRŠNI RAD**

**Fran Delić**

Zagreb, 2017.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

**Validacija modela turbulencije na primjerima strujanja na  
aeroprofilima i krilima s prijelazom iz laminarnog u  
turbulentni režim**

Mentor:  
Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak, dipl. ing.

Student:  
Fran Delić

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Ovom prilikom htio bih se zahvaliti profesoru Hrvoju Jasaku na mentorstvu, strpljenju i ukazanom povjerenju tokom izrade rada kao i na znanju stečenom iz područja računalne dinamike fluida.

Također se zahvaljujem asistentima Tessi Uroić, Inni Gatinu i Vuku Vukčeviću čija su pomoć, iskustvo i nesebična pomoć učinila pisanje ovog rada mnogo lakšim.

Zahvaljujem se i kolegama iz sobe 816. koji su moj boravak na 8. katu učinili produktivnijim i zabavnijim.

Istinski Vam hvala,  
Fran Delić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Fran Delić** Mat. br.: 0035190751

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Validacija modela turbulencije na primjerima strujanja na aeroprofilima i krilima s prijelazom iz laminarnog u turbulentni režim**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Validation of Transition Turbulence Models on Airfoils and Wings**

Opis zadatka:

Strujanje fluida oko brojnih tipova aeroprofila i krila uključuje značajne efekte povezane s prelaskom iz laminarnog u turbulentni režim strujanja. Numerička analiza karakteristika takvih aerodinamičkih komponenata posebno je zahtjevna, jer standardni modeli turbulencije nisu u stanju predvidjeti točku tranzicije strujanja, pa tako ni globalne karakteristike profila.

U novije vrijeme, tranzicijski modeli turbulencije su predloženi u literaturi i implementirani u rješavačima strujanja, ali njihova točnost i granice primjene u industrijskim aplikacijama još uvijek nisu potpuno jasne.

U ovom radu ispitat će se točnost simulacije strujanja fluida koje uključuje prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim na primjerima aerodinamičkih komponenti u 2-D i 3-D korištenjem konvencionalnih i tranzicijskih modela turbulencije.

U radu je potrebno izvršiti sljedeće korake:

- Izvršiti pregled literature vezane uz problematiku simulacije tranzicijskog strujanja i identificirati modele koji su po formulaciji u stanju predvidjeti prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim;
- Opisati teorijsku osnovu turbulentnog modela čija formulacija predviđa simulaciju prijelaznog režima strujanja, prikazati i fizikalno objasniti sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje se rješavaju, kao i rubne uvjete na varijable turbulencije;
- Izabrati dvije geometrije (aeroprofil i krilo) kod kojih strujanje sadrži prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim, a za koje je moguće identificirati pouzdane eksperimentalne ili numeričke podatke za usporedbu;
- Izraditi proračunsku mrežu za izabrane geometrije korištenjem alata Pointwise;
- Provesti simulaciju stacionarnog strujanja fluida na izabranim geometrijama koristeći k-omega SST model (Menter) i jedan od novih modela turbulencije koji uključuju simulaciju prijelaznog režima;
- Opisati dobivene rezultate, s fokusom na usporedbu lokalnih svojstava strujanja i globalne procjene sile uzgona i otpora.

U tekstu rada potrebno je navesti korištenu literaturu i eventualnu pomoć pri izradi rada.

Zadatak zadan:

30. studenog 2016.

Rok predaje rada:

**1. rok:** 24. veljače 2017.

**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2017.

**3. rok:** 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:

**1. rok:** 27.2. - 03.03. 2017.

**2. rok (izvanredni):** 30. 06. 2017.

**3. rok:** 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:

Prof, dr. sc. Hrvoje Jasak

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Ivica Smojver

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Priroda laminarnog, tranzicijskog i turbulentnog strujanja</b>	<b>2</b>
2.1	Laminarno strujanje . . . . .	2
2.2	Prijelazno strujanje . . . . .	3
2.2.1	Prirodna tranzicija . . . . .	4
2.2.2	Premosna tranzicija . . . . .	4
2.2.3	Tranzicija uzrokovana odvajanjem . . . . .	4
2.3	Turbulentno strujanje . . . . .	5
2.4	Lokalni i globalni utjecaj tranzicije . . . . .	6
2.4.1	Uzgon . . . . .	7
2.4.2	Otpor . . . . .	8
2.4.3	Otpor trenja . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Matematički model</b>	<b>10</b>
3.1	Osnovni zakoni dinamike fluida . . . . .	10
3.2	Osnovni fizikalni zakoni viskoznog nestlačivog strujanja fluida . . . . .	11
3.3	Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednadžbe . . . . .	12
3.4	Modeli turbulentne viskoznosti . . . . .	14
3.4.1	$k - \omega$ SST model turbulencije . . . . .	15
3.4.2	$kkl - \omega$ model turbulencije . . . . .	18
3.5	Zakon zida . . . . .	23
3.5.1	Laminarno strujanje . . . . .	24
3.5.2	Turbulentno strujanje . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Postavke numeričkih simulacija</b>	<b>25</b>
4.1	Numerička simulacija metodom kontrolnih volumena . . . . .	25
4.2	Diskretizacija domene . . . . .	25
4.2.1	Aerospatiale A-airfoil . . . . .	26
4.2.2	SAAB 32 krilo . . . . .	26
4.3	Rubni uvjeti . . . . .	27
4.3.1	Aerospatiale A-profil . . . . .	28
4.3.2	SAAB 32 krilo . . . . .	31
4.4	Numeričke sheme . . . . .	31
4.5	Pokretanje simulacije . . . . .	31

---

<b>5</b>	<b>Rezultati numeričkih simulacija</b>	<b>32</b>
5.1	Aerospatiale A-profil . . . . .	32
5.1.1	$k-\omega$ SST model turbulencije . . . . .	32
5.1.2	$kkL-\omega$ model turbulencije . . . . .	34
5.1.3	Utjecaj tranzicije na globalna svojstva . . . . .	36
5.1.4	Osjetljivost numeričke mreže . . . . .	37
5.2	SAAB 32 krilo . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>41</b>
	<b>Bibliografija</b>	<b>43</b>

## Popis slika

1	Reynoldsovi crteži koji prikazuju stabilno (a), nestabilno (b) i nestabilno strujanje osvjetljeno iskrom (c) (Reynolds, 1887). . . . .	2
2	Proces prirodne tranzicije i njezin utjecaj na granični sloj (Schlichting, 1979). . . . .	3
3	Razvoj laminarnog separacijskog mjehurića (lijevo; O’Meara and Mueller, 1987) i njegov utjecaj na raspored tlaka (desno; Lee et al., 2006). . . . .	5
4	Odvanje strujanja pri velikim napadnim kutevima. . . . .	6
5	Odvajanje strujanja pri laminarnom (lijevo) i turbulentnom (desno) strujanju. Crvene strelice označuju lokaciju odvajanja. . . . .	7
6	Odvanje strujanja pri velikim napadnim kutevima. . . . .	7
7	Ovisnost otpora o brzini. . . . .	8
8	Vremensko (Reynoldsovo) osrednjavanje. . . . .	12
9	Profil brzine u blizini zida [wikipedia] . . . . .	23
10	High Reynolds pristup (lijevo) i Low Reynolds pristup (desno) . . . . .	26
11	Numerička mreža za profil. . . . .	27
12	Numerička mreža za krilo . . . . .	28
13	Polje brzine i tlaka oko profila dobiveno $k - \omega$ SST modelom za $\alpha = 13,3^\circ$ . . . . .	32
14	Rezultati simulacije s $k - \omega$ SST modelom za $\alpha = 13,3^\circ$ . . . . .	33
15	Strujanje oko profila s $kkL - \omega$ modelom turbulencije za $\alpha = 13,3^\circ$ . . . . .	34
16	Rezultati $kkL - \omega$ simulacije za profil. . . . .	35
17	Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za $c_f$ pri $\alpha = 13,3^\circ$ . . . . .	36
18	Rezultati $kkL - \omega$ simulacije za profil. . . . .	37
19	Osjetljivost rezultata na numeričku mrežu za $\alpha = 13,3^\circ$ . . . . .	37
20	Polje brzine i tlaka oko krila za $\alpha = 4,8^\circ$ . . . . .	38
21	Rezultati numeričkih simulacija strujanja oko krila za $\alpha = 4,8^\circ$ . . . . .	39
22	Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za $c_f$ pri $\alpha = 4,8^\circ$ . . . . .	40



**Popis tablica**

1	Konstante u $k - \omega$ SST modelu turbulencije . . . . .	17
2	Konstante u $kkL - \omega$ modelu turbulencije . . . . .	22
3	Poznate vrijednosti opstrujavanja profila . . . . .	28
4	Rubni uvjeti za opstrujavanje profila s $k - \omega$ SST modelom . . . . .	29
5	Rubni uvjeti za opstrujavanje profila s $kkL - \omega$ modelom . . . . .	30
6	Korištene numeričke sheme . . . . .	31

## Popis oznaka

### Latinska slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$A_{BP}, A_{NAT}, A_{TS}, A_0, A_v, A_S$	-	Koeficijenti $kkL - \omega$ modela
$arg_1$	-	Varijabla spajanja
$a_1$	-	Koeficijent
$C$	-	Konstanta
$C_p$	-	Koeficijent tlaka
$C_\mu$	-	Konstanta
$C_{BP,crit}, C_{\alpha,\Theta}, C_{NAT,crit}, C_{\tau,l}, C_{NC}$	-	Koeficijenti $kkL - \omega$ modela
$C_{R,NAT}, C_{\omega R}, C_{l1}, C_\lambda, C_{\omega 1}, C_{\omega 3}$	-	Koeficijeni $kkL - \omega$ modela
$C_{l2}, C_{\mu,std}, C_R, P_r, C_{SS}, C_{INT}, C_{TS,crit}$	-	Koeficijenti $kkL - \omega$ modela
$c$	m	Dužina tetive
$c_d$	-	Koeficijent trenja
$c_f$	-	Koeficijent otpora trenja
$c_l$	-	Koeficijent uzgona
$D$	-	Destrukcija turbulencije
$D_f$	N/m	Otpor trenja po jedinici duljine
$F_1$	-	Funkcija spajanja
$F_2$	-	Funkcija spajanja
$\bar{f}$	-	Vremenski osrednjen dio veličine
$f'$	-	Pulsirajući dio veličine
$f_{\tau,l}$	-	Pomoćna funkcija
$f_{NAT,crit}$	-	Pomoćna funkcija
$f_{SS}, f_W, f_{INT}, f_\omega$	-	Prigušne funkcije
$g_i$	$m/s^2$	Član masene sile
$I$	-	Intenzitet turbulencije
$k$	$m^2/s^2$	Turbulentna energija
$k_{T,l}$	$m^2/s^2$	Turbulencija velikih skala
$k_{T,s}$	$m^2/s^2$	Turbulencija malih skala
$k_{TOT}$	-	Ukupna kinetička energija
$L$	m	Dužina
$L_i$	N/m	Uzgon po jedinici duljine

$Ma$	-	Machov broj
$q_\infty$	Pa	Dinamički tlak neporemećenog strujanja
$P$	Pa	Tlak na profilu
$P_\infty$	Pa	Tlak neporemećenog strujanja
$p$	$m^2/s^2$	Tlak podijeljen s gustoćom
$\bar{p}$	Pa	Vremenski osrednjena komponenta tlaka
$p'$	Pa	Pulsirajuća komponenta tlaka
$R$	-	Prijenos energije
$Re$	-	Reynoldsov broj
$Re_{crit}$	-	Kritični Reynoldsov broj
$Re_T$	-	Turbulentni Reynoldsov broj
$Re_\Omega$	-	Pomoćni Reynoldsov broj
$S$	-	Apsolutna vrijednost tenzora naprezanja
$S_{ij}$	-	Tenzor naprezanja
$T$	s	Period osrednjavanja
$Ta$	m/s	Brzina zvuka
$T_{U_\infty}$	-	Intenzitet turbulencije
$t$	s	Vrijeme
$\bar{u}_i$	m/s	Vremenski osrednjena komponenta brzine
$u'$	m/s	Pulsirajuća komponenta brzine
$u_i$	m/s	Komponenta brzine
$u^+$	-	Bezdimenzijska brzina
$\overline{u'_i u'_j}$	-	Tenzor Reynoldsovih naprezanja
$V$	m/s	Brzina
$V_\infty$	m/s	brzina neporemećenog strujanja
$x_t$	m	Udaljenost tranzicije od početka profila
$x_i$	m	Os u Kartezijском koordinatnom sustavu
$\bar{x}, \bar{z}$	m	Koordinatni sustav u smjeru neporemećene brzine fluida
$y^+$	-	Bezdimenzijska udaljenost od stijenke

## Grčka slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha$	$^{\circ}$	Napadni kut
$\alpha_T$	$m^2/s$	Turbulentna difuznost
$\alpha_{\Theta}$	$m^2/s$	Turbulentna toplinska difuznost
$\beta$	-	Koeficijent spajanja
$\beta_{TS}$	-	Pomoćna funkcija
$\beta_{BP}, \phi_{BP}$	-	Funkcije za određivanje početka premosne tranzicije
$\beta_{NAT}, \phi_{NAT}$	-	Funkcije za određivanje početka prirodne tranzicije
$\beta_2, \beta^*$	-	Konstanta
$\beta^*$	-	Konstanta
$\gamma$	-	Koeficijent spajanja
$\delta$	m	Debljina graničnog sloja
$\Delta y$	m	Udaljenost do sljedeće točke od zida
$\delta_{ij}$	-	Kroneckerova delta
$\varepsilon$	$m^2/s^3$	Turbulentna disipacija
$\kappa$	-	Konstanta
$\kappa_K$	-	von Kármánova konstanta
$\lambda_{eff}$	m	Efektivna turbulentna dužinska skala
$\mu$	$Pa \cdot s$	Dinamička viskoznost
$\nu$	$m^2/s$	Kinematička viskoznost
$\nu_{T,l}$	$m^2/s$	Viskoznost velikih skala
$\nu_{T,s}$	$m^2/s$	Viskoznost malih skala
$\nu_t/\nu$	-	Omjer turbulentne viskoznosti
$\rho$	$kg/m^3$	Gustoća
$\rho_{\infty}$	$kg/m^3$	Gustoća fluida u neporemećenom strujanju
$\sigma_{k1}$	-	Konstanta
$\sigma_k, \sigma_{\omega}$	-	Koeficijenti $kkL - \omega$ modela
$\sigma_{\omega 2}$	-	Koeficijent

---

$\tau$	s	Varijabla vremena osrednjavanja
$\tau_w$	$N/m^2$	Smično naprezanje na zidu
$\overline{\tau_{0l}}$	-	Bezdimenzijsko smično naprezanje na zidu pri laminarnom strujanju
$\overline{\tau_{0t}}$	-	Bezdimenzijsko smično naprezanje na zidu pri turbulentnom strujanju
$\phi_1$	-	Konstante uz zid
$\phi_2$	-	Konstante dalje od zida
$\omega$	1/s	Specifična disipacija
$\Omega$	-	Apsolutna vrijednost rotacijskog tenzora
$\Omega_{ij}$	-	Rotacijski tenzor

## Sažetak

Tema ovog rada je validacija tranzicijskog modela turbulencije numeričkom simulacijom i usporedbom s poznatim eksperimentalnim rezultatima. Za razliku od standardnih modela turbulencije, tranzicijski modeli su u stanju predvidjeti prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim strujanja.

Opisat će se priroda laminarnog, turbulentnog i prijelaznog strujanja i matematički izrazi koji u potpunosti opisuju strujanje fluida. U svrhu pojednostavljenja jednažbi, uvest će se pretpostavke i modeli turbulencije.

Za potrebe numeričke simulacije metodom kontrolnih volumena objasnit će se diskretizacija prostora, numeričke sheme i rubni uvjeti. Kao tranzicijski model odabran je  $kkL - \omega$  model turbulencije. Rezultati novog tranzicijskog modela također će se uspoređivati s  $k - \omega$  SST modelom turbulencije, poznatim i dobro istraženim modelom. Budući da je određivanje tranzicije od velike važnosti u zrakoplovstvu, točnost simulacije će se provjeravati na profilu i krilu zrakoplova. Istražit će se i utjecaj tranzicije na lokalna svojstva strujanja i globalnu procjenu sile uzgona i otpora.

Numerički proračuni će se raditi u programskom paketu foam-extend te će se u sklopu rada u njega implementirati  $kkL - \omega$  model turbulencije.

*Ključne riječi: CFD, RANS, foam-extend, tranzicijsko strujanje, kkL-omega, k-omega SST*

## Abstract

The subject of this final thesis will be the validation a transitional turbulence model by comparing the results of a numerical simulation with known experimental results. In contrast to standard turbulence models, transitional models are capable od predictiong laminar to turbulent transition.

Firstly, we will describe the nature of laminar, turbulent and transitional flow as well as the mathematical expressions used to fully describe fluid flow. In order to simplify the expressions, we will describe the assumptions and turbulence models to be used.

Numerical simulations will be based on the finite volume method, so the domain discretization, numerical schemes and boudary conditions used will be explained in detail. The transitional model used in this paper will be the  $kkL - \omega$ . The results will also be compared to the well known and investigated  $k - \omega$  SST turbulence model. Considering the importance of laminar to turbulent transition in aviation, the validation will be made on an aircraft airfoil and wing. The influence of transition on lift and drag coefficients, as well as the local flow properties, will be investigated.

Numerical simulations will be done in foam-extend in which the  $kkL - \omega$  turbulence model will be implemented.

*Key words: CFD, RANS, foam-extend, laminar-turbulent transition, kkL-omega, k-omega SST*

# 1 Uvod

Ispravno modeliranje tranzicije strujanja u graničnom sloju iz laminarnog u turbulentno od velike je važnosti u zrakoplovstvu. Vjerodostojno određivanje uzgona i otpora zrakoplova i krila dovodi do lakše optimizacije geometrije i smanjene potrošnje goriva, a poznavanje ponašanja fluida u okolini kritičnih napadnih kuteva dovodi do povećanja sigurnosti zrakoplova. Eksperimentalne metode su skupe i postoje mjerenja samo za određene uvjete strujanja pa se stoga poseže za numeričkim simulacijama. Najčešće korištene simulacije u mehanici fluida su:

- Direktne numeričke simulacije (DNS) koje rješavaju puni raspon turbulentnih skala te su stoga izrazito skupe,
- Simulacije velikih vrtloga (LES) gdje se veliki turbulentni vrtlozi razriješeni na proračunskoj mreži i vremenskoj skali, dok se manji modeliraju,
- Uprosječene Navier-Stokesove jednačbe (RANS) kod kojih se Navier-Stokesove jednačbe uprosječavaju te rješavaju pomoću modela turbulencije.

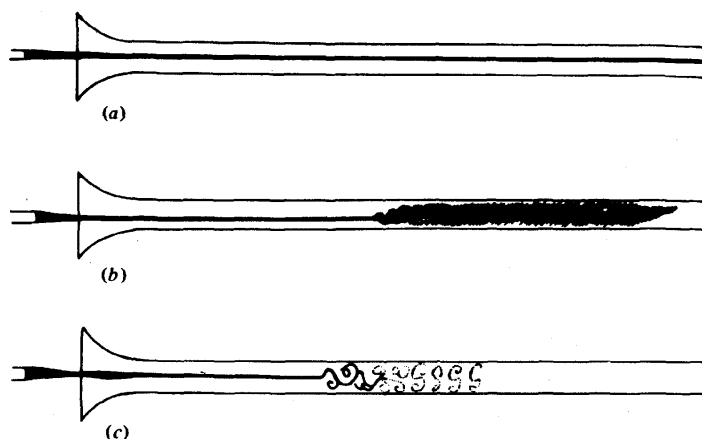
Modeliranje turbulencije najčešće se ostvaruje iskustvenim određivanjem lokacije tranzicije te pretpostavljanjem laminarnog strujanja ispred, odnosno turbulentnog iza lokacije tranzicije ili spregom turbulentnih modela s empirijskim relacijama za tranziciju. Algebarski modeli su sposobni opisati tranziciju ali zahtjevaju informaciju o integralnim veličinama (debljina graničnog sloja) te se samim time teško implementiraju u rješavače.

RANS metode su jednosatvne, dobro istražene, robusne i lako se mogu implementirati u postojeće numeričko okruženje. Zbog toga je odabran  $kkL - \omega$  model turbulencije [1] koji je sposoban odrediti tranziciju. Korištenje modela tranzicije omogućuje nam rješavanje strujanja za različite rubne uvjete bez prethodnih empirijskih podataka o lokaciji tranzicije što čini model univerzalnim i jednostavnim za korištenje. Osim usporedbe s eksperimentalnim podacima kako bi se ispitala točnost,  $kkL - \omega$  model turbulencije usporedit će se i s  $k - \omega$  SST modelom turbulencije kako bi se usporedila globalna svojstva toka sa i bez tranzicije.



## 2 Priroda laminarnog, tranzicijskog i turbulentnog strujanja

Prvi opis različitih režima strujanja javlja se u radu Osbornea Reynoldsa iz 1883. godine. U svom poznatom eksperimentu Reynolds pušta boju u prozirnu cijev s promjenjivim protokom fluida te promatra razvoj strujanja (slika 1).



**Slika 1:** Reynoldsovi crteži koji prikazuju stabilno (a), nestabilno (b) i nestabilno strujanje osvijetljeno iskom (c) (Reynolds, 1887).

Pri malim brzinama promatrano strujanje je stabilno dok povećanjem brzine postaje nestabilno. Osvjetljavanjem pomoću iskre Reynolds primjećuje određeni set vrtloga. Također, zaključuje da brzina nije jedini parametar koji određuje oblik strujanja te empirijski određuje veličine koje utječu na razvoj toka. Veličine grupira u bezdimenzijski Reynoldsov broj:

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}, \quad (1)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $V$  brzina,  $L$  dužina i  $\mu$  dinamička viskoznost. Reynoldsov broj predstavlja omjer između inercijskih i viskozničkih sila i glavni je kriterij prijelaza laminarnog u turbulentno strujanje. Ovisno o njegovoj vrijednosti raspoznavamo sljedeće režime strujanja.

### 2.1 Laminarno strujanje

Strujanje pri kojemu su strujnice glatke krivulje koje se gibaju pravilno u slojevima nazivamo laminarno strujanje (slika 1 (a)). Pri malim vrijednostima Reynoldsova broja prevladavaju viskozne sile u odnosu na inercijske sile i time sprječavaju nastanak turbulencije. Svojstva laminarnog toka su:

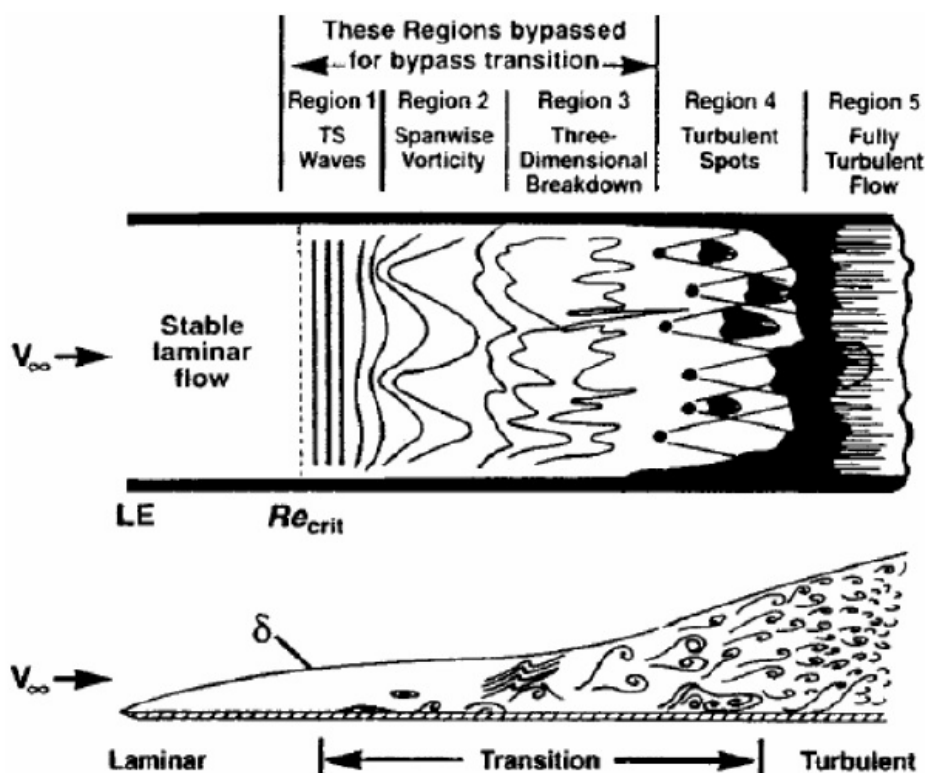
- Nepostojanje vrtloga i turbulencije,

- Linearnost,
- Mali koeficijent prijelaza topline,
- Mali koeficijent otpora trenja,
- Separacija pri manjim gradijentima tlaka [2].

Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje nije trenutno već je proces čije trajanje i oblik ovise o uvjetima toka. Na tranziciju primarno utječe Reynoldsov broj međutim utjecaj imaju i obrada površine, intenzitet turbulencije i gradijent tlaka [3]. Područje u kojem se ovo događa zovemo prijelazno strujanje.

## 2.2 Prijelazno strujanje

Prijelaz strujanja iz laminarnog u turbulentno složena je pojava koja ima utjecaj na rad mnogih uređaja u primjeni, poput aksijalnih turbina, vjetroturbina i zrakoplova [4].



Slika 2: Proces prirodne tranzicije i njezin utjecaj na granični sloj (Schlichting, 1979).

Tranziciju možemo podijeliti u nekoliko dijelova (slika 2) prikazuje proces tranzicije pri čemu su  $V_\infty$  brzina neporemećenog strujanja,  $Re_{crit}$  kritični Reynoldsov broj na kojemu počinje tranzicija, a  $\delta$  debljina graničnog sloja. Strujanje počinje kao laminarno te vanjski poremećaji

poput turbulencije neporemećenog strujanja ili zvučni valovi ulaze u laminarni granični sloj. Ovaj postupak naziva se prihvaćanje (eng. "receptivity"). Nakon ulaska poremećaja u granični sloj pri kritičnom Reynoldsovom broju započinje tranzicija koja se odvija na sljedeće načine [5].

### 2.2.1 Prirodna tranzicija

U slučaju visokih  $Re$  brojeva i malog intenziteta turbulencija ( $T_{U\infty} < 1\%$ ) nakon određene udaljenosti dolazi do razvoja nepravilnosti u odnosu na laminarno strujanje. Nastavak strujanja dovodi do razvoja primarnih nestabilnosti poput dvodimenzionalnih valova (područje 1 na slici 2). Ovi valovi u smjeru strujanja nazivaju se Tollmien–Schlichting (TS) valovi. Viskozitet destabilizira TS valove i njihovu dvodimenzionalnost [6] (područja 2 i 3 na slici 2) što uzrokuje prestanak njihovog rasta i kaskadiranje energije u sve manje i manje valove. Ovo vodi do sekundarne nestabilnosti i do nastajanja turbulentnih čvorišta (područje 4 na slici 2). Turbulentna čvorišta uzrokuju nastajanje turbulencije te je strujanje uskoro potpuno turbulentno (područje 5 na slici 2). Prirodna tranzicija javlja se kod lopatica vjetroturbina, helikoptera i ventilatora mlaznog motora kao i kod vanjskog opstrujavanja tijela [4].

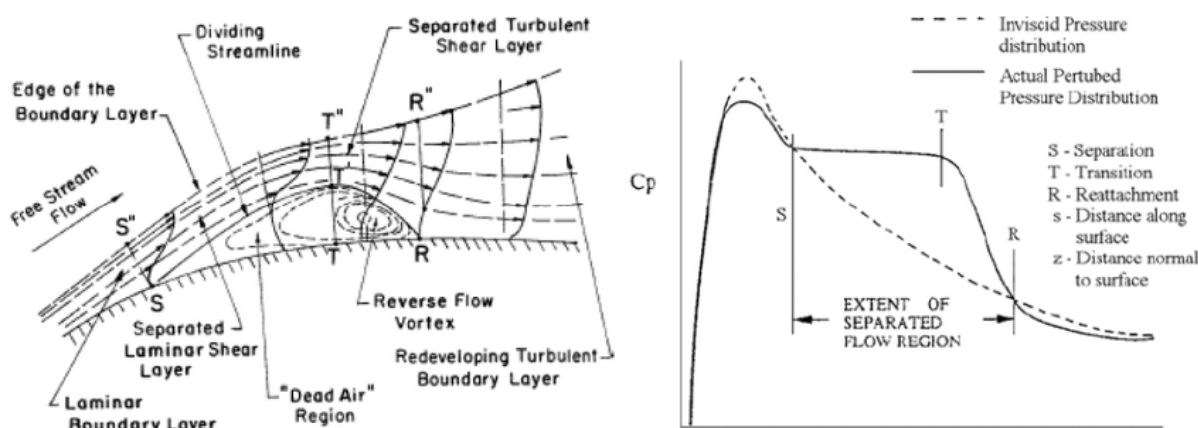
### 2.2.2 Premosna tranzicija

U slučaju da su vanjski poremećaji veći ( $1\% < T_{U\infty} < 10\%$ ) [4], preskače se razvoj TS valova i njihov rast (područja 1-3 na slici 2) te odmah dolazi do stvaranja čvorišta turbulencije i prijelaza strujanja u turbulentno [7]. Sukladno tome tranzicija se odvija ranije. Tipični primjeri ove tranzicije su kod turbostrojeva i unutarnjeg opstrujavanja. Zbog ovog zaobilaska klasičnih mehanizama ovaj prijelaz naziva se premosna (eng. "bypass") tranzicija.

### 2.2.3 Tranzicija uzrokovana odvajanjem

Pri opstrujavanju profila kod niskih Reynoldsovih brojeva ( $10^4 < Re < 10^6$ ) i suprotnog gradijenta tlaka može doći do tranzicije zbog odvajanja strujanja. Ova vrsta tranzicije veoma je česta kod tankih profila, turbostrojeva i vjetroturbina [4].

Prikaz tranzicije uzrokovane odvajanjem vidi se na slici 3 (lijevo). Tok počinje laminarno te zbog suprotnog gradijenta tlaka dolazi do odvajanja graničnog sloja (točka S). Nizvodno od te točke tok možemo podijeliti u dva područja [chalmers]. Prvo područje nalazi se između strujnice ST'R i profila te oblikuje laminarni separacijski mjehurić (eng. "laminar separation bubble"). Mjerenja su pokazala da se unutar mjehurića javlja jako cirkularno strujanje (Sandham, 2008). Drugo područje, koje se nalazi iznad mjehurića pa sve do strujnice S''T''R'', je odvojeni laminarni granični sloj. Na lokaciji T'' on postaje nestabilan dolazi do



**Slika 3:** Razvoj laminarnog separacijskog mjehurića (lijevo; O'Meara and Mueller, 1987) i njegov utjecaj na raspored tlaka (desno; Lee et al., 2006).

tranzicije. Tranzicija uzrokuje nagli porast transporta količine gibanja što dovodi do prestanka suprotnog toka i ponovnog spajanja strujanja u točki R i formiranja turbulentnog graničnog sloja nizvodno. Iako laminarni separacijski mjehurić nema veliki utjecaj na raspodjelu tlaka na profilu (slika 3 desno) on uzrokuje prijevremenu tranziciju i negativno utječe na performanse profila.

### 2.3 Turbulentno strujanje

Porastom Reynoldsovog broja inercijske sile rastu u odnosu na viskozne te strujanje postaje turbulentno. Putanje strujnica postaju nepravilne te dolazi do intenzivnog miješanja slojeva. Pri velikim vrijednostima Reynoldsovog broja utjecaj viskoznosti može se zanemariti svugdje osim neposredno uz stijenku. Karakteristike turbulentnog strujanja su [8]:

- Nestacionarnost,
- Trodimenzionalnost,
- Vrtloženje,
- Nelinearnost,
- Veliki koeficijent prijelaza topline,
- Veliki koeficijent otpora trenja,
- Separacija pri većim gradijentima tlaka [2].

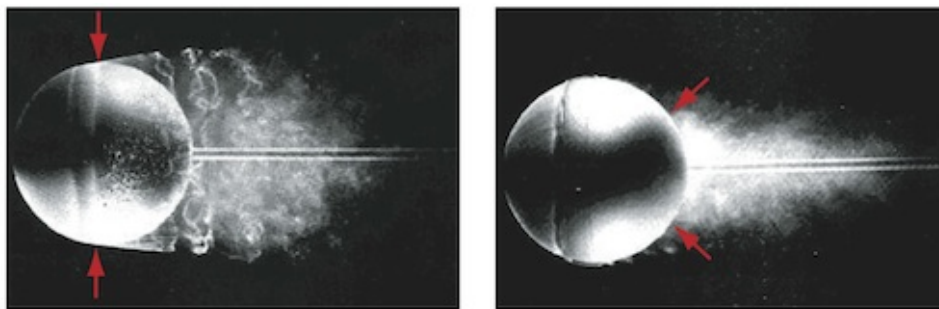
## 2.4 Lokalni i globalni utjecaj tranzicije

Većina strujanja u stvarnom svijetu su turbulentna. Ovo je posebno izraženo u zrakoplovstvu jer fluid oko zrakoplova (zrak) ima malu kinematsku viskoznost te su brzine u zrakoplovstvu relativno velike. Zbog ovoga tranzicija počinje nakon kratke udaljenosti te se područje laminarnog i tranzicijskog strujanja u proračunima često zanemaruje sa svrhom pojednostavljenja proračuna. Ovisno o režimu leta ovo će uzrokovati manju ili veću pogrešku. Ispravno određivanje tranzicije od velike je važnosti ne samo zbog određivanja otpora nego i zbog određivanja ponašanja tokom odvajanja strujanja. Odvajanje strujanja je pojava u kojoj dolazi do usporavanja i odvajanja graničnog sloja pri suprotnom gradijentu tlaka. Odvajanje strujanja na profilima događa se pri velikim napadnim kutevima te uzrokuje nagli gubitak uzgona (eng. "stall")(slika 4). Zajedno s činjenicom da su veliki napadni kutevi karakteristični za manevre u blizini zemlje, poput polijetanja i slijetanja, pravilno određivanje tranzicije doprinosi i sigurnosti zrakoplova.



**Slika 4:** Odvajanje strujanja pri velikim napadnim kutevima.

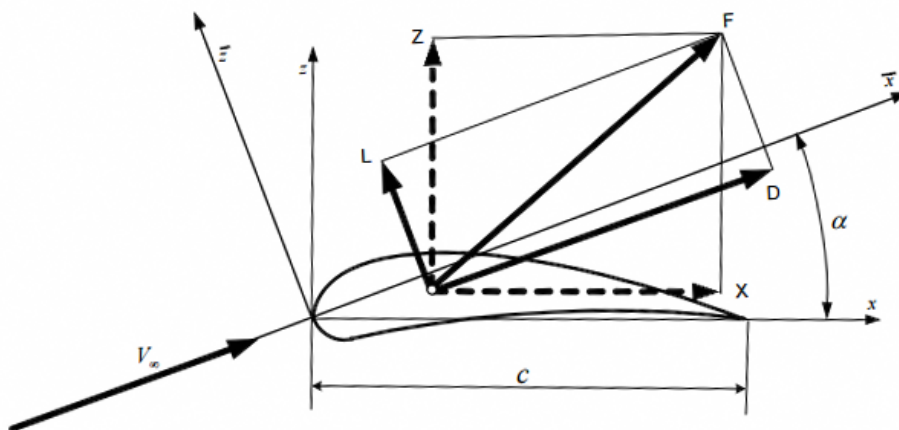
Odvajanje strujanja ovisi o režimu strujanja te se odvija prije pri laminarnom nego turbulentnom strujanju (slika 5). Turbulentni granični sloj je rušniji te dolazi do separacije pri većim gradijentima tlaka [9]. U ovom odjeljku definirat ćemo najvažnije veličine za zrakoplovstvo, uzgon i otpor, njihove koeficijente, kao i utjecaj tranzicije na iste.



**Slika 5:** Odvajanje strujanja pri laminarnom (lijevo) i turbulentnom (desno) strujanju. Crvene strelice označuju lokaciju odvajanja.

### 2.4.1 Uzgon

Uzgon se javlja kao posljedica raspodjele tlaka na profilu tj. porasta tlaka s donje te pada tlaka s gornje strane. Ova razlika tlaka djeluje na površinu profila tj. krila te uzrokuje silu okomitu na smjer neporemećene struje. Smjer neporemećene struje definira koordinatni sustav  $(\bar{x}, \bar{z})$  (slika 6).



**Slika 6:** Odvanje strujanja pri velikim napadnim kutevima.

Uzgon kod profila se često izražava pomoću bezdimenzijskog koeficijenta uzgona  $c_l$ :

$$c_l = \frac{L_i}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} c} = \frac{L_i}{q_\infty c} = \oint C_p d\bar{x}, \quad (2)$$

pri čemu je  $L_i$  uzgon po jedinici duljine,  $c$  duljina tetive, a  $q_\infty$  dinamički (referentni) tlak neporemećenog strujanja

$$: q_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}. \quad (3)$$

Također, koeficijent uzgona možemo izraziti pomoću bezdimenzijskog koeficijenta tlaka  $C_p$ :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{q_\infty}. \quad (4)$$

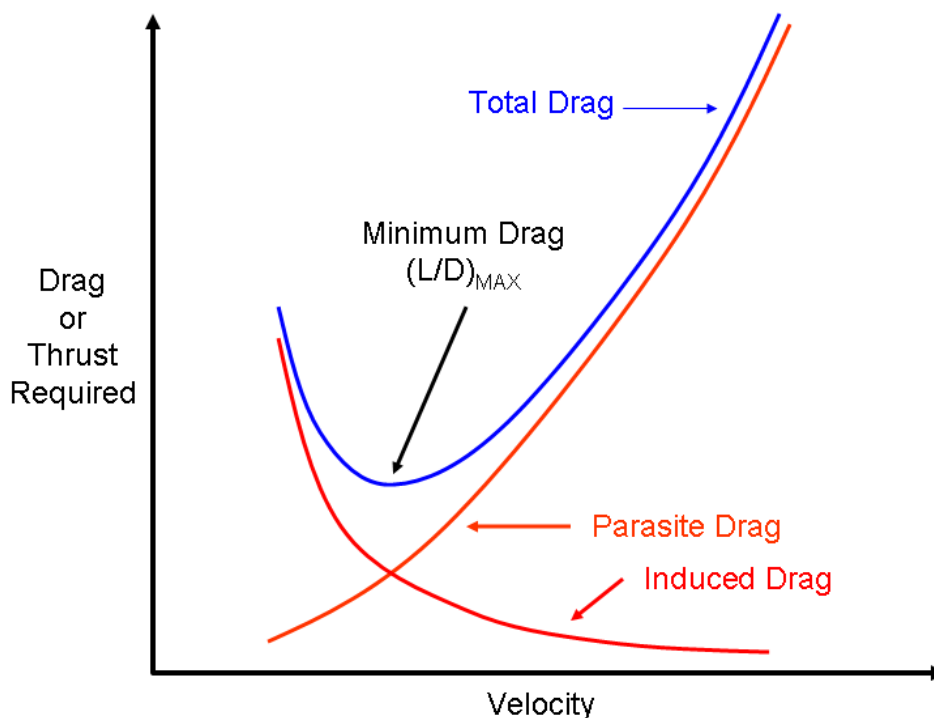
gdje je  $P$  tlak na profilu, a  $P_\infty$  tlak neporemećenog strujanja.

## 2.4.2 Otpor

Otpor je sila koja nastaje uslijed toka fluida oko nekog tijela. Smjer djelovanja otpora je u smjeru neporemećene brzine strujanja. Ukupni otpor zrakoplova može se podijeliti na dvije vrste otpora [10]:

- Nulti otpor (eng. "Parasite drag") koji je skup svih otpora koji su posljedica gibanja predmeta kroz fluid,
  - Otpor trenja koji je posljedica viskoznih sila koje djeluju po površini profila tj. krila,
  - Otpor oblika koji je posljedica rasporeda tlaka po površini profila,
  - Otpor interferencije koji nastaje kao posljedica intereferencije strujnica dva različita dijela zrakoplova,
  - Valni otpor koji je posljedica nastajanja udarnih valova.
- Inducirani otpor (eng. "Induced drag") kao posljedica vrtloga na vrhovima krila koji nastaju uslijed razlike tlakova gornjeg i donjeg dijela krila.

Valni otpor je zanemariv u podzvučnom području te se stoga neće razmatrati u ovome radu. Ovisnost otpora trenja i induciranog otpora vidi se na slici 7.



Slika 7: Ovisnost otpora o brzini.

Otpor trenja je kvadratno proporcionalan brzini zrakoplova, dok je inducirani otpor obrnuto proporcionalan. Inducirani otpor nije direktno ovisan o brzini nego o napadnom kutu. Povećanjem brzine smanjuje se napadni kut potreban za horizontalni let što uzrokuje pad induciranog otpora. Suma nultog i induciranog otpora je ukupni otpor koji ima minimum u presjecištu spomenutih otpora. Pri ovoj brzini zrakoplov treba najmanju silu za horizontalni let. Istraživanja [11] su pokazala da u podzvučnom strujanju pri malim napadnim kutevima prevladava otpor trenja. Zajedno s induciranim otporom oni čine 85% ukupnog otpora zrakoplova. Također, iz slike 7 kao i iz izvora [12] procjenjuje se da je ukupni utjecaj otpora trenja na otpor krila oko 50%. Zbog toga će se u ovom radu naglasak staviti na utjecaj tranzicije na iznos otpora trenja.

### 2.4.3 Otpor trenja

Strujanje viskoznog fluida po površini tijela uzrokuje smična naprezanja. Otpor uzrokovan smičnim naprezanjima nazivamo otpor trenja. Režim strujanja ima veliki utjecaj na iznos smičnih naprezanja te je otpor trenja znatno manji kod laminarnog strujanja. Koeficijent otpora trenja je definiran izrazom:

$$c_f = \frac{D_f}{\frac{\rho V_\infty^2}{2} c} = \frac{\tau_w}{q_\infty}, \quad (5)$$

gdje je  $D_f$  otpor trenja po jedinici duljine, a  $\tau_w$  lokalno smično naprezanje na zidu (profilu). Analitičke metode računanja koeficijenta otpora trenja temelje se na iskustvenom određivanju lokacije tranzicije te pretpostavljanju laminarnog strujanja ispred i turbulentnog strujanja iza mjesta tranzicije [10]. Također se pretpostavlja da je tranzicija trenutna te da je profil turbulentnog graničnog sloja isti kao da je imao početak u ishodištu  $c = 0$ . Uzimajući to u obzir dolazimo do izraza

$$c_f = \int_0^{x_t} \bar{\tau}_{0l} d\bar{x} + \int_{x_t}^c \bar{\tau}_{0t} d\bar{x}. \quad (6)$$

Izrazi  $\bar{\tau}_{0l}$  i  $\bar{\tau}_{0t}$  predstavljaju bezdimenzijska smična naprezanja na površini, dok je  $x_t$  udaljenost tranzicije od početka profila. Ovo su empirijski izrazi kao npr. zakon trećeg stupnja profila brzine za laminarno opstrujavanje i zakon 1/7 profila brzine za turbulentno opstrujavanje.



### 3 Matematički model

Ovo poglavlje započinje kratkim opisom osnovnih zakona dinamike fluida te uvedenim pretpostavkama za nestlačivo viskozno strujanje. Zatim je objašnjeno Reynoldsovo osrednjavanje te skup jednadžbi koji se dobije tim postupkom, tzv. osrednjene Navier-Stokesove jednadžbe. Nakon toga će se uvesti Boussinesqova hipoteza te opisati modele koji će se koristiti u ovome radu. Sve jednadžbe biti će izražene u indeksnoj notaciji.

#### 3.1 Osnovni zakoni dinamike fluida

Cilj svake numeričke simulacije je točno opisivanje promatrane pojave što je jednostavnije moguće. U skladu s time, uvest ćemo pretpostavke kako bi skup jednadžbi tj. nepoznanica bio što manji uz uvjet da i dalje vjerodostojno opisuje strujanje. Pretpostavke koje su unesene [13]:

- Jednofazan, izotropan i kemijski inertan fluid,
- Simetričnost tenzora naprezanja,
- Adijabatsko strujanje,
- Zanemariv utjecaj stlačivosti,
- Konstantan viskozitet neovisan o temperaturi,
- Newtonski fluid.

Pretpostavili smo da je fluid jednofazan, homogen te kemijski inertan. Ove pretpostavke su valjane za strujanje zraka oko profila, tj. krila. Također, pretpostavljena je simetričnost tenzora naprezanja te time eliminirana jednadžba momenta količine gibanja jer ne nosi nikakvu novu informaciju u odnosu na jednadžbu očuvanja količine gibanja. Pretpostavljanjem adijabatskog strujanja iz skupa jednadžbi možemo ispustiti energetsku jednadžbu. Parametar koji nam govori o stlačivosti fluida zovemo Machov broj:

$$\text{Ma} = \frac{V_\infty}{a}. \quad (7)$$

Machov broj je bezdimenzijska veličina koja nam govori o odnosu brzine neporemećenog strujanja  $U_\infty$  i brzine zvuka u mediju  $a$ . Za strujanja gdje je fluid zrak strujanje se smatra nestlačivim pri brzinama manjim od  $\text{Ma} = 0,3$ . U ovom radu strujanja će biti pri malim brzinama pa možemo pretpostaviti konstantu gustoću. Nadalje, pretpostavljeno je da fluid ima konstantan viskozitet neovisan o temperaturi. Konačno, uvodi se pretpostavka da je fluid Newtonski što znači da su smična naprezanja linearno proporcionalna dinamičkoj viskoznosti

i derivaciji brzine deformacije. Smična naprezanja kod Newtonskih fluida računaju se po sljedećoj formuli:

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}, \quad (8)$$

gdje je  $u$  komponenta brzine paralelna sa smjerom smičnog naprezanja a  $n$  smjer okomit na brzinu.

### 3.2 Osnovni fizikalni zakoni viskoznog nestlačivog strujanja fluida

Uvođenjem navedenih pretpostavki dobiva se sustav parcijalnih diferencijalnih jednačbi koje opisuju viskozno nestlačivo strujanje fluida:

- Jednadžba kontinuiteta (jednadžba očuvanja mase)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (9)$$

- Jednadžba očuvanja količine gibanja

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (10)$$

gdje su

$$p = \frac{P}{\rho}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (11)$$

pri čemu je  $\nu$  dinamička viskoznost,  $g_i$  gravitacijsko ubrzanje, a  $p$  tlak podijeljen s gustoćom.

Jednadžbe očuvanja količine gibanja (10) često se naziva Navier-Stokesova jednačba. Članovi u jednačbi očuvanja količine gibanja, s lijeve na desnu stranu:

- Nestacionarni član,
- Konvekcijski član,
- Difuzijski član,
- Član masene sile,
- Član gradijenta tlaka,

Ovaj sustav jednačbi sastoji se od jedne skalarne i jedne vektorske jednačbe koji zajedno s nepoznatim vektorom brzine  $u_i$  i skalarom tlaka  $p$  daje zatvoreni sustav jednačbi. Da bi se

sustav riješio, potrebno je izračunati polje brzine što nije jednostavno zbog spregnutosi polja brzine i tlaka te činjenice da tlak nije eksplicitno izražen u jednažbi kontinuiteta niti u jednažbi količine gibanja. Također, problem nastaje i zbog nelinearnosti u konvektivnom članu u jednažbi količine gibanja. Kako bi se to riješilo, pri diskretizaciji se ovaj član linearizira, a nelinearnost se rješava iterativno.

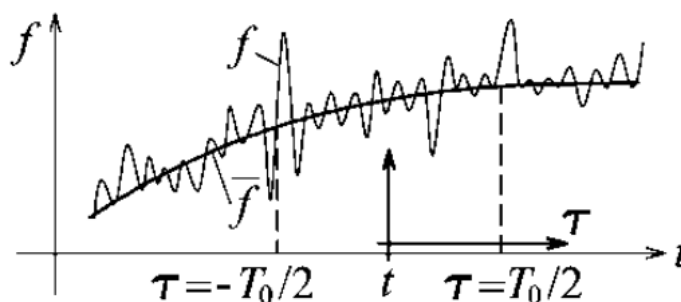
### 3.3 Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednažbe

Veličine u turbulentnom strujanju pokazuju slučajne promjene u vremenu i prostoru što čini analitičko opisivanje turbulencije nemogućim. Numerička mreža, kao i vremenski korak, potrebni za potpuno numeričko opisivanje turbulencije trebali bi biti veoma mali što bi zahtjevalo veliki računalni trošak. Također, za strojarske primjene najčešće nije nužno poznavanje trenutnih nego integralnih veličina poput protoka, ukupnih sila otpora i slično. Kako bi se izbjeglo zahtjevno računanje nakon kojeg bi se izvršilo uprosječavanje vrijednosti dolazi se do ideje da se izvrši uprosječavanje samih Navier-Stokesovih jednažbi.

Najčešće osrednjavanje je osrednjavanje po vremenu koje se naziva Reynoldsovo uprosječavanje [13]. Bilo koju veličinu u turbulentnom strujanju može se opisati vremenski osrednjenim dijelom  $\bar{f}$  i pulsirajućim dijelom  $f'$  (slika 8). Ukupna vrijednost u bilo kojem trenutku jednaka je sumi osrednjenog  $\bar{f}$  i pulsirajućeg dijela  $f'$ :

$$f = \bar{f} + f'. \quad (12)$$

Vremenski osrednjena vrijednost računa se pomoću formule



Slika 8: Vremensko (Reynoldsovo) osrednjavanje.

$$\bar{f}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x_i, t - \tau) \cdot d\tau \quad (13)$$

gdje je  $T$  period osrednjenja, a  $\tau$  je varijabla vremena osrednjavanja. Primjenom gore navedena pravila, komponente polja brzine  $u_i$  i polje tlaka  $p$  može se prikazati zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad p = \bar{p} + p'. \quad (14)$$

Korištenjem pravila osrednjavanja te uvrštavanjem jednadžbe (14) u jednadžbu (9) dolazimo do jednadžbe kontinuiteta za nestlačivo osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (15)$$

Jednadžbe kontinuiteta i osrednjena jednadžba očuvanja količine gibanja vrlo su slične, pri čemu je jedina razlika u tome da je u jednadžbi (15) korištena osrednjena brzina. U ovoj jednadžbi nema niti jedna pulsirajuća vrijednost te se ne vidi izravan utjecaj turbulencije.

Uvrštavanjem izraza (14) u jednadžbu (10) dolazimo do jednadžbe količine gibanja za osrednjeno nestlačivo strujanje:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \overline{u'_i u'_j} \right) \right]. \quad (16)$$

Sustav vremenski osrednjenih nestlačivih jednadžbi kontinuiteta (15) i količine gibanja (16) naziva se Reynoldsovim jednadžbama.

Jednadžba količine gibanja za osrednjeno nestlačivo strujanje (16) razlikuje se od nestlačive jednadžbe količine gibanja u sljedećem:

- zanemaren je član masene sile  $g_i$ ,
- korištene su osrednjene vrijednosti komponenti brzine i tlaka,
- pojavljuje se dodatni član  $\overline{u'_i u'_j}$ .

Dodatni član  $\overline{u'_i u'_j}$  pojavljuje se kao posljedica nelinearnosti Navier-Stokesovih jednadžbi te se sastoji isključivo od pulsirajućih vrijednosti. Ovaj član predstavlja utjecaj turbulencije na difuziju količine gibanja, te se naziva turbulentna ili Reynoldsova naprezanja.

Tenzor Reynoldsovih naprezanja je simetričan nelinearan tenzor drugog reda s šest nepoznanica oblika:

$$\overline{u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} u'_1 u'_1 & u'_1 u'_2 & u'_1 u'_3 \\ \vdots & u'_2 u'_2 & u'_2 u'_3 \\ \text{simetrično} & \dots & u'_3 u'_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Ideja iza Reynoldsovog uprosječavanja je opisivanje toka uz pomoć uprosječenih veličina. Međutim, uvedene je šest dodatnih nepoznanica, komponenti Reynoldsovog tenzora, koje su pulsirajuće vrijednosti. Ovime je sustav otvoren tj. sadrži više nepoznanica od jednadžbi, te stoga nema jednoznačno rješenje. Osrednjavanjem Reynoldsovog tenzora uvode se dodatne 22 nepoznanice čime dodatno otežavamo rješavanje sustava. Kako bi se uskladio broj nepoznanica i jednadžbi i opisalo strujanje isključivo pomoću osrednjenih vrijednosti, potrebno je Reynoldsov tenzor modelirati tako da je isključivo funkcija osrednjenog strujanja. Ovaj problem poznat je kao "closure problem" [8].

### 3.4 Modeli turbulentne viskoznosti

U svrhu zatvaranja Reynoldsovih jednadžbi Bousinesq uvodi koncept turbulentne viskoznosti. Na ovaj način povezuje Reynoldsov tenzor s uprosječenom brzinom. Uz to, šest nepoznanica u Reynoldsovom tenzoru prelaze u jedno nepoznato skalarno polje turbulentne viskoznosti  $\nu_t$ :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (18)$$

pri čemu je  $\delta_{ij}$  Kroneckerova delta, a  $k$  specifična turbulentna energija koja je jednaka

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (19)$$

Pretpostavkom nestlačivog strujanja:

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (20)$$

dolazimo do prikaza Reynoldsovog tenzora pomoću turbulentne viskoznosti za nestlačivo strujanje

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (21)$$

Dimenzijskom analizom dolazimo do zaključka da je za pravilno određivanje turbulentne viskoznosti potrebna skala brzine i skala duljine (ili vremena).

Specifična turbulentna energija  $k$  je najčešća skala brzine te predstavlja energiju pulsirajućeg dijela strujanja. Specifična turbulentna disipacija  $\varepsilon$  predstavlja brzinu kojom turbulentna energija disipira u toplinu te se često koristi kao skala duljine. Specifična disipacija (po volumenu i vremenu)  $\omega$  je najčešće korištena vremenska skala.

Prije opisa načina određivanja skala, istaknute su prednosti i nedostaci Bousinesqove pretpostavke. S pozitivne strane, ova pretpostavka omogućuje da se tenzorsko Reynoldsovo polje pojednostavi na skalarno polje čime se eliminira pet nepoznanica. S negativne strane, Bousinesqova hipoteza nije nužno fizikalno ispravna. Pojednostavljanjem tenzora

pretpostavlja se izotropičnost turbulencije. Modeli s turbulentnom viskoznošću pokazuju lošije rezultate na kompleksnim geometrijama kao i u strujanjima s velikim ubrzanjem/usporavanjem [Wilcox].

Modele dijelimo s obzirom na način određivanja različitih skala. Po broju dodatnih jednadžbi za određivanje skala modele s turbulentnom viskoznošću dijelimo na [8]:

- Algebarski modeli ( modeli bez jednadžbi),
- Modeli s jednom jednadžbom,
- Modeli s dvije jednadžbe,
- Modeli s tri jednadžbe.

Kod algebarskih modela potrebno je odrediti obje skale ovisno o toku, dok kod modela s jednom jednadžbom najčešće pridodana transportna jednadžba turbulentne energije  $k$ , dok se dužinska skala određuje iz neke od dimenzije toka.

Tema ovog rada biti će kompletni modeli, koji imaju dvije dodatne transportne jednadžbe, jednu za turbulentne energije  $k$ , te drugu za turbulentnu disipaciju  $\varepsilon$  ili specifičnu disipaciju  $\omega$ . Modeli s dvije jednadžbe najjednostavniji su kompletni modeli jer se ne oslanjaju na dimenzije toka za određivanje skala [8]. Zbog ovoga su primjenjivi na razna strujanje bez prethodnog poznavanja strukture turbulencije.

Modeli s tri jednadžbe posjeduju tri dodatne transportne jednadžbe, dvije za određivanje skala, a treću za određivanje nekog svojstva toka.

### 3.4.1 $k - \omega$ SST model turbulencije

Povijesno gledano, prvi komercijalno korišteni model s dvije jednadžbe u CFD-u bio je  $k - \varepsilon$  model turbulencije [8]. Kao što je vidljivo iz imena, ovaj model rješava dvije dodatne transportne jednadžbe, jednu za turbulentnu energiju  $k$ , te drugu za turbulentnu disipaciju  $\varepsilon$ . Prednost modela je mala osjetljivost na ulazne rubne uvjete. Međutim, pokazalo se da model daje loše rezultate u slučaju suprotnog gradijenta tlaka, pojave česte u zrakoplovstvu [14]. Također, javljaju se numerički problemi pri rješavanju viskoznog podsloja graničnog sloja.

Odabirom dužinske skale umjesto vremenske dolazimo do  $k - \omega$  modela turbulencije koji ima dodatne jednadžbe za turbulentnu energiju  $k$  i specifičnu disipaciju  $\omega$ . Ovaj model pokazuje bolje rezultate pri suprotnim gradijentima tlaka. Također, numerički je stabilan kod rješavanja viskoznog podsloja zbog nedostatka prigušnih funkcija i jednostavnog Dirichlet rubnog uvjeta za zid (više o vrstama rubnih uvjeta u literaturi [15]). Nedostatak  $k - \omega$  je velika osjetljivost na rubne uvjete, pogotovo na rubne uvjet za  $\omega$ .

Kako bi se iskoristile prednosti i eliminirali nedostaci oba modela, Menter [14] predlaže

spajanje ova dva modela u jedan. Taj novi model koristio bi  $k - \omega$  model u blizini zida, iskorištavajući prednosti nedostatka prigušnih funkcija i numeričku stabilnost tog modela, dok se dalje od zida koristi funkcije spajanja, čime se model postupno prebacuje u  $k - \varepsilon$  model turbulencije i koristi u ostatku domene. Time se postiže manja ovisnost o rubnim uvjetima. Kako bi prijelaz između modela bio moguć, potrebno je transformirati  $k - \varepsilon$  model u  $k - \omega$  formulaciju. Ovaj model zove se "baseline (BSL)  $k - \omega$ ".

Iako bolji od osnovnih modela, BSL  $k - \omega$  model i dalje pokazuje slaba rješenja u slučaju suprotnog gradijenta tlaka. Po uzoru na Johnson-King model [16] Menter uvodi pretpostavku da je turbulentno smično naprezanje proporcionalno turbulentnoj kinetičkoj energiji u logaritamskom i poremećenom dijelu turbulentnog graničnog sloja. Zbog ovoga, turbulentni viskozitet je limitiran kako bi se očuvala ova proporcionalnost. Ime ovog modela je  $k - \omega$  SST (eng. "Shear Stress Transport") te je jedan od najkorištenijih turbulentnih modela s dvije jednačbe. Često je korišten u industriji te su njegove prednosti i nedostaci dobro istraženi.  $k - \omega$  SST model turbulencije nije u sposobnosti predvidjeti tranziciju nego pretpostavlja početak razvijanja turbulentnog graničnog sloja s nastrujavanjem fluida na stijenku.

Transportna jednačba za turbulentnu energiju  $k$  je:

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (22)$$

dok je jednačba za specifičnu disipaciju  $\omega$ :

$$\frac{D\rho \omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (23)$$

Turbulentna viskoznost  $\nu_t$  računa se pomoću izraza:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)}, \quad (24)$$

gdje je  $\Omega$  apsolutna vrijednost rotacijskog tenzora:

$$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad (25)$$

$\Omega_{ij}$  rotacijski tenzor:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right), \quad (26)$$

i  $F_2$  funkcija:

$$F_2 = \tanh\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega}\right)\right) \quad (27)$$

Skup varijabli  $\phi_1$  uzet je iz  $k - \omega$  modela te vrijedi u području do zida, dok je skup varijabli  $\phi_2$  uzet iz standardnog  $k - \varepsilon$  modela te vrijedi u području dalje od zida. varijable glatko prelaze u iz vrijednosti  $\phi_1$  u vrijednosti  $\phi_2$  pomoću formule:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad (28)$$

gdje je  $F_1$  funkcija spajanja:

$$F_1 = \tanh \left[ (\arg_1^4) \right]. \quad (29)$$

Funkcija će se definirati pomoću varijable  $\arg_1$ :

$$\arg_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}; \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right); \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right), \quad (30)$$

gdje je  $CD_{k\omega}$ :

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right). \quad (31)$$

Konstante  $\phi_1$  i  $\phi_2$  mogu se naći u tablici 1

**Tablica 1:** Konstante u  $k - \omega$  SST modelu turbulencije

$\phi_1$			
	$\sigma_{k1} = 0,5$	$\sigma_{\omega 2} = 0,5$	$\beta_1 = 0,07508$
	$\beta^* = 0,09$	$\kappa = 0,41$	$\gamma = \beta_1 / \beta^* - \sigma_{\omega 1} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}$
$\phi_2$			
	$\sigma_{k1} = 1,0$	$\sigma_{\omega 2} = 0,856$	$\beta_2 = 0,0828$
	$\beta^* = 0,09$	$\kappa = 0,41$	$\gamma = \beta_2 / \beta^* - \sigma_{\omega 2} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}$

### Rubni uvjeti

Rubni uvjeti na zidu su svi postavljeni u nula, osim specifične disipacije  $\omega$  koja se računa po formuli:

$$\omega = \sqrt{\omega_{vis}^2 + \omega_{log}^2} \quad (32)$$

gdje su:

$$\omega_{vis} = \frac{6 \nu}{\beta_1 (\Delta y)^2}, \quad (33)$$

$$\omega_{log} = \frac{k^{0,5}}{\kappa C_{\mu}^{0,25} (\Delta y)^2}, \quad (34)$$

gdje je  $\Delta y$  udaljenost čvora do sljedećeg čvora u smjeru od zida.



### 3.4.2 $kkl - \omega$ model turbulencije

U prošlom potpoglavlju opisan je  $k - \omega$  SST model, često korišten i pouzdan model. Međutim, ovaj model je potpuno turbulentan što znači da pretpostavlja nastanak turbulentnog graničnog sloja odmah na početku strujanja uz zid. Kako bi mogli prikazati tranziciju iz laminarnog u turbulentni režim strujanja potrebno je odabrati model koji je sposoban modelirati laminarno strujanje na početku toka uz zid, odrediti lokaciju tranzicije te modelirati turbulentni tok nakon te lokacije. Uz to, model treba koristiti samo globalna svojstva te biti jednostavno implementiran u postojeće numeričko okruženje. U skladu s time, odabran je tranzicijski model  $kkL - \omega$  opisan u radu [1]. U sklopu ovog rada ovaj model je implementiran u foam-extend 4.0, verziju OpenFOAM-a koju razvija zajednica. Također je važno napomenuti da u originalnom članu [1] ima nekoliko tiskarskih pogreški u matematičkim izrazima. Ovo je ispravio J. Furst u radu [17] te je opisani, kao i implementirani model, ispravljen u skladu s time. Zbog preglednosti u tekstu će biti napomenute pogreške.

$kkL - \omega$  je tranzicijski model turbulencije s tri dodatne transportne jednadžbe. Suma laminarne kinetičke energije  $k_L$  i turbulentne kinetičke energije  $k_T$  daje energetska skalu dok specifična disipacija  $\omega$  određuje vremensku tj. dužinsku skalu. Parametar  $k_L$  predstavlja turbulentnu kinetičku energiju, koja raste u smjeru toka zbog energije primljene od slobodnog strujanja kroz razne mehanizme (više u potpoglavlju Prijelazno Strujanje). Laminarna kinetička energija raste dok ne dođe do kritične vrijednosti, nakon čega počinje tranzicija te turbulentno strujanje. Dakle, pomoću parametra  $k_L$  model automatski određuje lokaciju tranzicije.

Dodatne transportne jednadžbe su:

$$\frac{Dk_T}{Dt} = P_{k_T} + R_{BP} + R_{NAT} - \omega k_T - D_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mathbf{v} + \frac{\alpha_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right], \quad (35)$$

$$\frac{Dk_L}{Dt} = P_{k_L} - R_{BP} - R_{NAT} - D_L + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathbf{v} \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right], \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} = & C_{\omega 1} \frac{\omega}{k_T} P_{k_T} + \left( \frac{C_{\omega R}}{f_W} - 1 \right) \frac{\omega}{k_T} (R_{BP} + R_{NAT}) - C_{\omega 2} \omega^2 \\ & + C_{\omega 3} f_{\omega} \alpha_T f_W^2 \frac{\sqrt{k_T}}{d^3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mathbf{v} + \frac{\alpha_T}{\sigma_{\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Izrazi u jednadžbama 35 i 36 opisuju redom: produkciju (P), prijenos energije (R), disipitaciju (D) i difuziju. U jednadžbi (37) članovi s lijeve na desnu su: produkcija, tranzicijska produkcija koja služi smanjivanju dužinske skale tokom tranzicije, disipacija, izraz koji uzrokuje smanjivanje dužinske skale u vanjskim regijama turbulentnog sloja te gradijent transportnih izraza.

Ukupna kinetička energija suma je laminarne i turbulentne kinetičke energije:

$$k_{TOT} = k_L + k_T. \quad (38)$$

Radi boljeg razumijevanja, pojedinačno će se objasniti članove u transportnim jednadžbama.

### Disipacija

Anizotropnu disipaciju blizu zida izražavamo

$$D_T = \nu \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_i}, \quad (39)$$

$$D_L = \nu \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_i}. \quad (40)$$

### Prijenos energije

Ovi članovi predstavljaju mehanizam tranzicije strujanja. Tranzicija se događa prijenosom energija iz  $k_L$  u  $k_t$  sa istodobnim smanjenjem turbulentne dužinske skale iz vrijednosti u slobodnom strujanju u vrijednost u turbulentnom graničnom sloju u ravnoteži.  $R_{BP}$  predstavlja učinak pulsacija u smjeru strujanja koju se razvijaju u turbulenciju tokom premosne tranzicije

$$R_{BP} = C_R \beta_{BP} k_L \omega / f_W, \quad (41)$$

gdje je  $\beta_{BP}$  funkcija koja određuje početak premosne tranzicije

$$\beta_{BP} = 1 - \exp\left(-\frac{\phi_{BP}}{A_{BP}}\right), \quad (42)$$

$$\phi_{BP} = \max\left(\frac{k_T}{\nu \Omega} - C_{BP,crit}, 0\right), \quad (43)$$

$R_{NAT}$  predstavlja prijenos energije pri prirodnoj tranziciji

$$R_{NAT} = C_{R,NAT} \beta_{NAT} k_L \Omega, \quad (44)$$

pri čemu  $\beta_{NAT}$  određuje početak prirodne tranzicije

$$\beta_{NAT} = -\exp\left(-\frac{\phi_{NAT}}{A_{NAT}}\right), \quad (45)$$

$$\phi_{NAT} = \max\left(Re\Omega - \frac{C_{NAT,crit}}{f_{NAT,crit}}, 0\right), \quad (46)$$

$$f_{NAT,crit} = 1 - \exp\left(-C_{NC} \frac{\sqrt{k_L} d}{\nu}\right). \quad (47)$$

## Produkcija

Produkcija turbulencije  $P_{k_T}$  je definirana kao

$$P_{k_T} = \nu_{T,s} S^2, \quad (48)$$

gdje je  $\nu_{T,s}$  turbulentna viskoznost malih skala

$$\nu_{T,s} = f_\nu f_{INT} C_\mu \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff}, \quad (49)$$

koja ovisi o efektivnoj turbulentnoj kinetičkoj energiji malih skala

$$k_{T,s} = f_{SS} f_W k_T, \quad (50)$$

i  $S$  apsolutna vrijednost tenzora naprezanja:

$$S_{ij} = \sqrt{0,5 S_{ij} S_{ij}}, \quad (51)$$

pri čemu je  $S_{ij}$  tenzor naprezanja:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (52)$$

Kinematski učinak zida je uključen kroz efektivnu turbulentnu dužinsku skalu  $\lambda_{eff}$  i prigušne funkcije  $f_W$

$$\lambda_{eff} = \min(C_\lambda d, \lambda_T), \quad (53)$$

$$\lambda_T = \sqrt{k_T} \omega, \quad (54)$$

$$f_W = \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (55)$$

pri čemu je  $d$  udaljenost od zida. U originalnom članku netočno je ispušten eksponent  $2/3$ . Također definiramo izraze

$$f_v = 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{Re_T}}{A_v}\right), \quad (56)$$

$$Re_T = \frac{f_w^2 k_T}{\nu \omega}, \quad (57)$$

$$f_{SS} = \exp\left[-\left(\frac{C_{ss} \nu \Omega}{k_T}\right)^2\right], \quad (58)$$

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_S \left(\frac{S}{\omega}\right)}, \quad (59)$$

$$f_{INT} = \min\left(\frac{k_T}{C_{INT}(k_T + k_L)}, 1\right). \quad (60)$$

U originalnom članku je napisana pogrešna formulacija s  $k_L$  u brojniku. Produkcija turbulencije  $P_{k_L}$  je definirana kao

$$P_{k_T} = \nu_{T,l} S^2 \quad (61)$$

pri čemu se smatra da je produkcija laminarne kinetičke energije  $k_L$  posljedica turbulencije velikih skala u blizini zida

$$k_{T,l} = k_T - k_{T,s}, \quad (62)$$

pri čemu je

$$\nu_{T,l} = \min\left\{f_{\tau,l} C_{l1} \frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu} \sqrt{k_{T,l}} \lambda_{eff} + \beta_{TS} C_{l2} Re_\Omega d^2 \Omega, \frac{k_L + k_{T,l}}{2S}\right\}, \quad (63)$$

$$Re_\Omega = \frac{d^2 \Omega}{\nu} \quad (64)$$

$$\beta_{TS} = 1 - \exp\left(-\frac{\max(Re_\Omega - C_{TS,crit}, 0)^2}{A_{TS}}\right) \quad (65)$$

$$f_{\tau,l} = 1 - \exp\left(-C_{\tau,l} \frac{k_{T,l}}{\lambda_{eff}^2 \Omega^2}\right). \quad (66)$$

Turbulentna kinematička viskoznost koja će se upotrebljavati u jednadžbi količine gibanja je

$$\nu_T = \nu_{T,l} + \nu_{T,s} \quad (67)$$

Turbulentna difuznost  $\alpha_T$  je

$$\alpha_T = f_v C_{\mu,std} \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff} \quad (68)$$

a prigušna funkcija  $f_\omega$  je:

$$f_\omega = 1 - \exp \left[ -0,41 \cdot \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^4 \right]. \quad (69)$$

Turbulentna toplinska difuznost je

$$\alpha_\Theta = f_W \frac{k_T}{k_T + k_L} \frac{v_{T,s}}{Pr} + (1 - f_W) C_{\alpha,\theta} \sqrt{k_T} \lambda_{eff}. \quad (70)$$

Koeficijent  $C_{\omega 2}$  je netočno napisan u originalnom članku te iznosi

$$C_{\omega 2} = 0,92 f_W^2 \quad (71)$$

**Tablica 2:** Konstante u  $kkL - \omega$  modelu turbulencije

$A_0 = 4,04$	$C_{INT} = 0,75$	$C_{\omega 1} = 0,44$
$A_S = 2,12$	$C_{TS,crit} = 1000$	$C_{\omega 3} = 0,3$
$A_V = 6,75$	$C_{R,NAT} = 0,02$	$C_{\omega R} = 1,5$
$A_{BP} = 0,6$	$C_{I1} = 3,4 \cdot 10^{-6}$	$C_\lambda = 2,495$
$A_{NAT} = 200$	$C_{I2} = 10 \cdot 10^{-10}$	$C_{\mu,std} = 0,09$
$A_{TS} = 200$	$C_R = 0,12$	$P_r = 0,85$
$C_{BP,crit} = 1,2$	$C_{\alpha,\Theta} = 0,035$	$\sigma_k = 1$
$C_{NC} = 0,1$	$C_{SS} = 1,5$	$\sigma_\omega = 1,17$
$C_{NAT,crit} = 1250$	$C_{\tau,l} = 4360$	

### Rubni uvjeti

Na zidovima vrijedi rubni uvjet za turbulentnu  $k_T$  i laminarnu kinetičku energiju  $k_L$ :

$$k_T = k_L = 0. \quad (72)$$

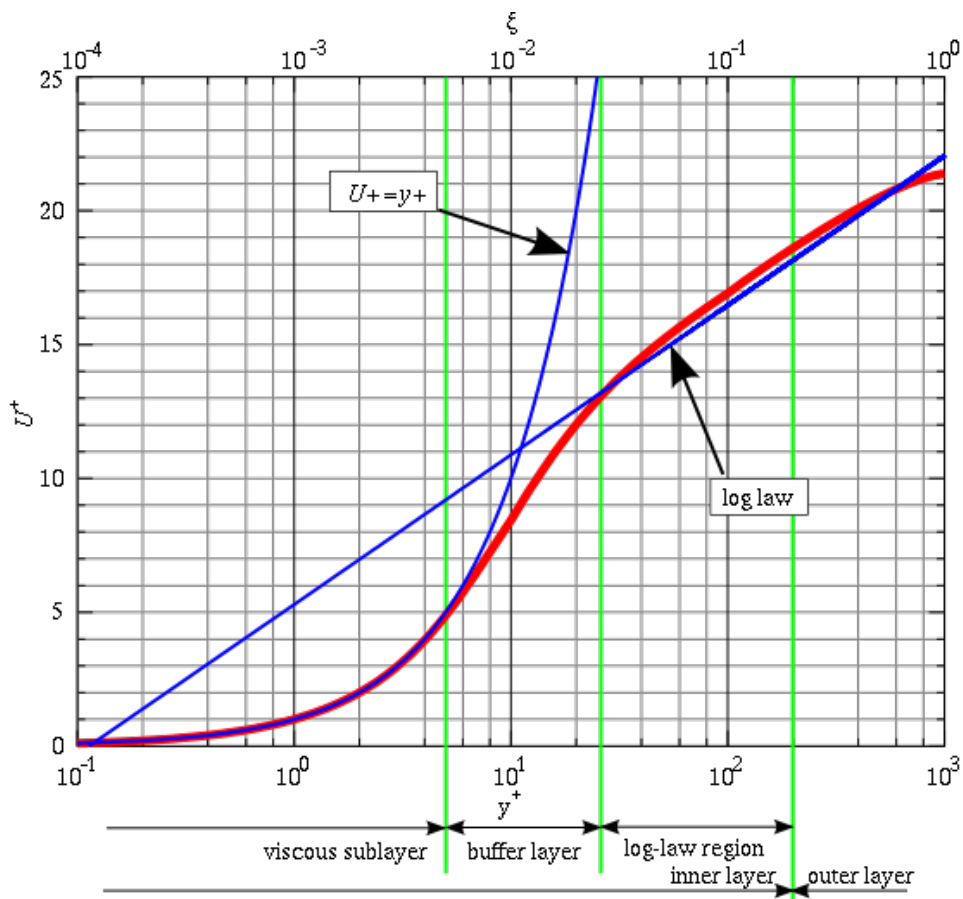
Rubni uvjet za specifičnu disipaciju  $\omega$  na zidu je:

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \quad (73)$$

gdje je  $n$  smjer normale na zid.

### 3.5 Zakon zida

Pri optjecanju tijela, brzina se mijenja od  $u_\infty$  u neporemećenom strujanju do nula na samoj stijenci. Kako bi se pravilno opisala brzina u odnosu na udaljenost od stjenke koristimo zakon zida [13]. Slika 9 prikazuje profil brzine u turbulentnom graničnom sloju.



Slika 9: Profil brzine u blizini zida [wikipedia]

Profil brzine opisat ćemo uz pomoć bezdimenzijske brzine  $u^+$ :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \tag{74}$$

i bezdimenzijske udaljenosti od stijenke:

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}, \tag{75}$$

pri čemu je  $u$  brzina paralelna sa stijenkom,  $y$  udaljenost od stijenke, a  $u_\tau$  brzina trenja koje je jednaka:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \tag{76}$$

### 3.5.1 Laminarno strujanje

Kod laminarnog strujanja za profil brzine od stijenke do debljine graničnog sloja  $\delta$  vrijedi:

$$u^+ = y^+. \quad (77)$$

### 3.5.2 Turbulentno strujanje

Turbulentni granični sloj možemo podijeliti u dva dijela, unutrašnji i vanjski. Unutrašnji granični sloj čini 10 – 15% ukupne debljine graničnog sloja dok ostatak čini vanjski granični sloj. Unutrašnji granični sloj dijeli se na:

- Linearni podsloj koji se proteže od stijenke do  $y^+ = 3-5$ . Kao i kod laminarnog strujanja, za profil brzine vrijedi  $u^+ = y^+$ .
- Prijelazni sloj koji se proteže od  $y^+ = 5$  do  $y^+ = 40$ . Rezultati eksperimenta pokazuju da se ovo područje ne može opisati linearnim ni logaritamskim profilom nego je prijelaz između ta dva profila.
- Inercijalni podsloj koji se proteže od  $y^+ = 40$  do  $y^+$  nekoliko tisuća. Rezultati eksperimenta pokazuju dobro poklapanje s logaritamskim profilom brzine. U skladu s time, profil brzine opisujemo jednačinom:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad (78)$$

gdje se von Kármánova konstanta  $\kappa$  i konstanta  $C$  određuju mjerenjima.

## 4 Postavke numeričkih simulacija

Validacija  $kkL - \omega$  modela turbulencije vršit će se na dvije geometrije, profilu "Aerospatiale A-airfoil" i dijelu krila pod kutom s zrakoplova SAAB 32. Ove geometrije su odabrane zbog dostupnih eksperimentalnih [1] [18] i numeričkih [1] podataka za podzvučno strujanje kod kojeg se pojavljuje tranzicija. U ovom poglavlju objasnit će se odabir dva slučaja na kojima će se raditi validacija  $kkL - \omega$  modela turbulencije. Opisat će se metoda kontrolnih volumena, način diskretizacije domene i numeričke sheme korištene u simulacijama. Navest će se početni uvjeti strujanja, rubni uvjeti i relacije kojima ćemo odrediti nepoznate parametre strujanja.

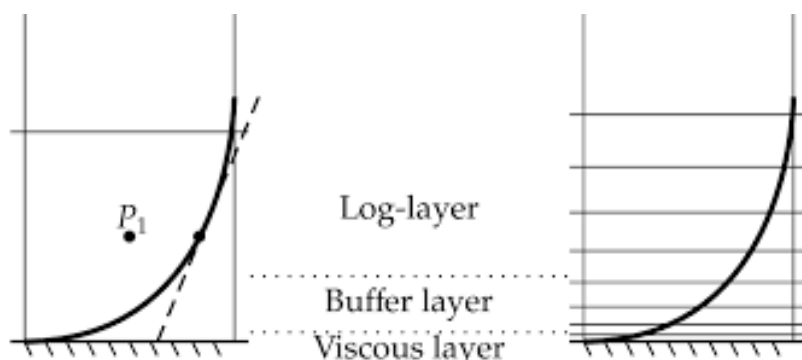
### 4.1 Numerička simulacija metodom kontrolnih volumena

Navier-Stokesove jednačbe u potpunosti opisuju strujanje fluida, ali zbog nelinearnosti analitičko rješenje postoji u veoma malenom broju slučajeva te je zato potrebno koristiti numeričke metode. Najčešće korištena metoda u mehanici fluida je metoda kontrolnih volumena [15] u kojoj se domena strujanja fluida diskretizira u konačan broj kontrolnih volumena za koje vrijede diferencijalne jednačbe koje opisuju strujanje fluida. Pretpostavlja se linearna raspodjela fizikalnih veličina unutar kontrolnog volumena što znači da je za računanje integrala po volumenu dovoljno poznavati vrijednosti u težištu kontrolnog volumena. Diskretizirane jednačbe očuvanja mase i očuvanja količine gibanja daju sustav algebarskih jednačbi koji se zbog nelinearnosti rješava iterativno.

### 4.2 Diskretizacija domene

Metoda kontrolnih volumena zahtjeva diskretizaciju računalne domene u kontrolne volumene. Veličina matrice koju je potrebno riješiti jednaka je broju kontrolnih volumena te stoga predstavlja kompromis između točnosti i ekonomičnosti. Veća gustoća ćelija potrebna je u područjima s većim gradijentima fizikalnih veličina, npr. uz zid. Pristup u kojemu se visina prve ćelije određuje tako da je središte prve ćelije u linearnom podsloju ( $y^+ < 1$ ) zove se "Low Reynolds" pristup. Kako bi se smanjio broj ćelija uz zid moguće je koristiti i "High Reynolds" pristup u kojem je središte prve ćelije u inercijskom podsloju ( $30 < y^+ < 50$ ), a profili fizikalnih veličina se modeliraju do stijenke (slika 10)[ref].





Slika 10: High Reynolds pristup (lijevo) i Low Reynolds pristup (desno)

U slučaju prijelaznog strujanja stvarni profili fizikalnih veličina se znatno razlikuju od modeliranih te će se stoga koristiti "Low Re" pristup. Numeričke mreže korištene u simulacijama napravljene su u komercijalnom programskom paketu *Pointwise*.

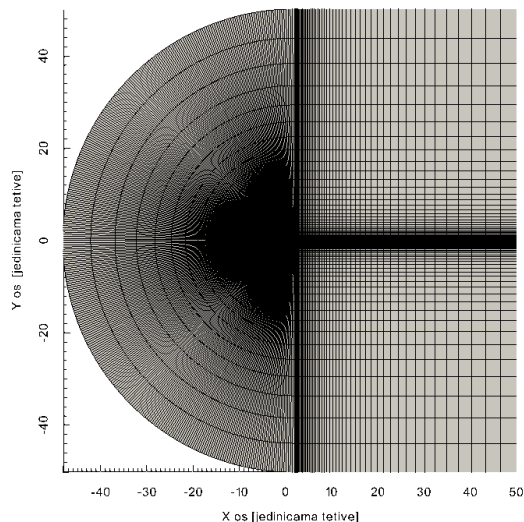
#### 4.2.1 Aerospatiale A-airfoil

Za strujanje oko profila napravljena je strukturirana numerička mreža oblika C-domene (eng. "C-Grid") s približno 43.000 kontrolnih volumena. Ulaz u domenu postavljen je 50 duljina tetiva ispred profila kako strujanje oko profila ne bi imalo utjecaja na ulazno strujanje. Izlaz iz domene postavljen je 50 duljina tetiva iza kako bi se strujanju omogućilo da se potpuno razvije i da iščežnu gradijenti fizikalnih veličina (slika 11a). Osim male visine prve ćelije kako bi  $y^+ < 1$  (slika 11d), potreban je dovoljno velik broj čvorova na konturi profila (slika 11c) kako bi se osigurala gustoća mreže na ulaznom i izlaznom bridu, ali i na dijelu profila gdje će se dogoditi tranzicija.

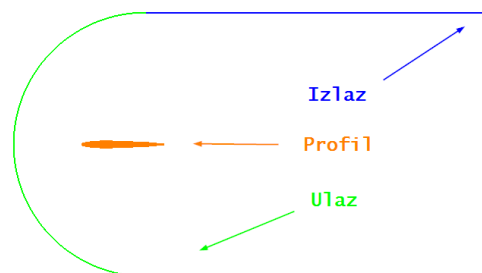
Slika 11b prikazuje granice domene.

#### 4.2.2 SAAB 32 krilo

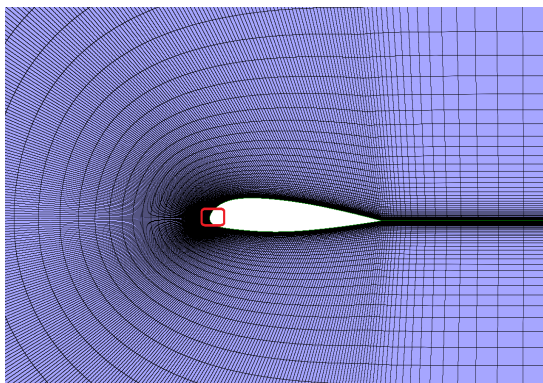
U skladu s ispitivanjima u zračnom tunelu, odabrana geometrija predstavlja vanjsku polovicu SAAB 32 krila. Završetak krila je pojednostavljen te je pretpostavljen odsječen završetak umjesto povijenog prema natrag [18]. Radijus ispred profila je duljine jedne korijenske tetive dok je domena široka dva poluraspona promatranog dijela krila (slika 12a). Slike 12c i 12d prikazuju NACA 64A010 profil u korijenu i gustoću mreže. Zbog velike gustoće mreže u normalnom i tangencijalnom smjeru od krila, odabran je manji broj čvorova po rasponu krila u kojem se smjeru očekuju manji gradijenti. Slika 12b prikazuje granice domene.



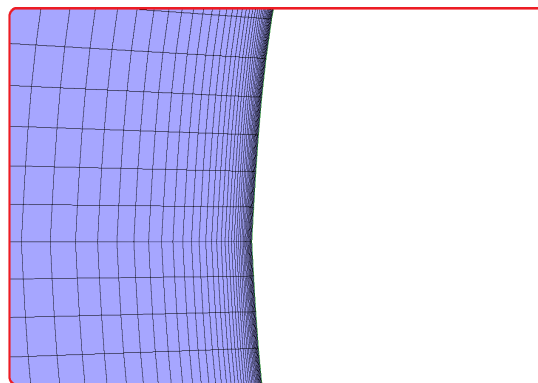
(a) Veličina mreže,



(b) Granice domene,



(c) Gustoća mreže oko profila,



(d) Gustoća mreže na napadnom rubu.

Slika 11: Numerička mreža za profil.

### 4.3 Rubni uvjeti

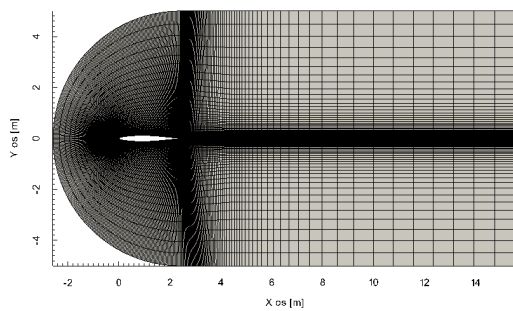
Rubni uvjeti imaju veliki utjecaj na rezultate simulacije te u skladu s time moraju biti pravilno zadani. Parametri turbulencije na ulazu često nisu potpuno poznati te ih je potrebno procijeniti, iskustveno ili pomoću empirijskih relacija. Intenzitet turbulencije  $I$  definiran je kao:

$$I = \frac{u'}{u}, \quad (79)$$

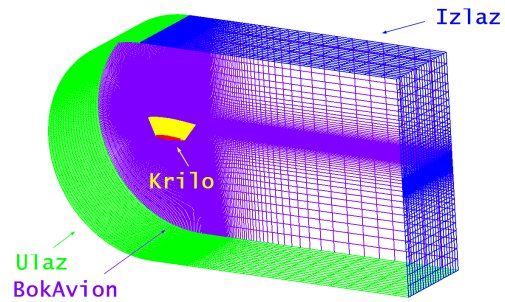
gdje je  $u$  vremenski osrednjena brzina, a  $u'$  pulsirajuća brzina. Za vanjsko strujanje vrijednosti  $I$  su između 0,05% i 2%, dok za unutrašnje strujanje mogu biti i 10%.

Turbulentna energija  $k$  može se procijeniti uz pomoć formule:

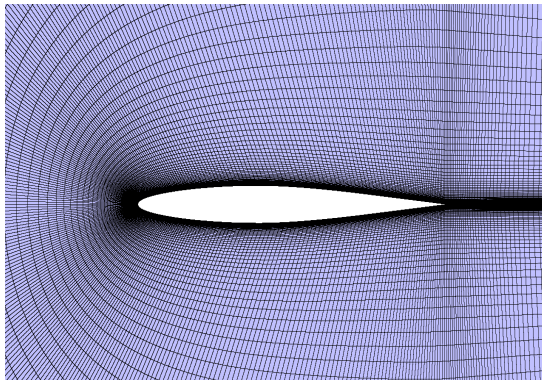
$$k = \frac{3}{2} (Iu)^2. \quad (80)$$



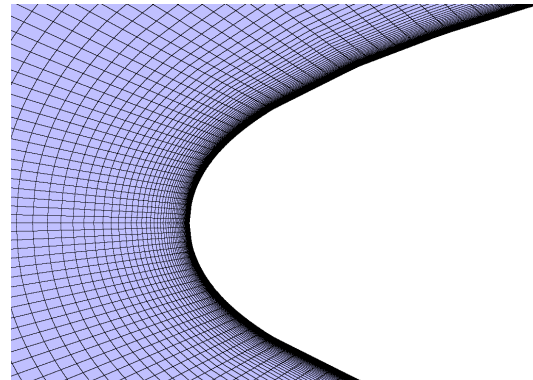
(a) Veličina mreže



(b) Granice domene



(c) Gustoća mreže oko profila



(d) Gustoća mreže na naperednom rubu

**Slika 12:** Numerička mreža za krilo

Specifična disipacija  $\omega$  dobiva se iz formule:

$$\omega = \left(\frac{k}{\nu}\right) \left(\frac{\nu_t}{\nu}\right)^{-1}, \quad (81)$$

pri čemu je  $\rho$  gustoća,  $\nu$  viskoznost i  $\nu_t$  turbulentna viskoznost. Član  $\nu_t/\nu$  je omjer turbulentne viskoznosti, te se za strujanje u zračnim tunelima preporučuju vrijednosti između 1 i 10.

### 4.3.1 Aerospatiale A-profil

Popis poznatih vrijednosti za slučaj strujanja oko profila zadan je u tablici 3.

**Tablica 3:** Poznate vrijednosti opstrujavanja profila

$Re_c$	Ma	$\alpha$ [°]	$I$	$\frac{\nu_t}{\nu}$
$2 \cdot 10^6$	0,15	13,3	0,2%	10

gdje je  $Re_c$  Reynoldsov broj za dužinu tetive,  $Ma$  Machov broj,  $\alpha$  napadni kut nastrojavanja

**Tablica 4:** Rubni uvjeti za opstrujavanje profila s  $k - \omega$  SST modelom

Ime (vrsta)	Polje	Rubni uvjet	Iznos
Ulaz ("patch")			
	brzina $u$	Miješani	(49.68 11.74 0)
	tlak $p$	von Neuman	
	turbulentna energija $k$	Miješani	1.23e-5
	specifična disipacija $\omega$	Miješani	61.25
Izlaz ("patch")			
	brzina $u$	Miješani	(49.68 11.74 0)
	tlak $p$	von Neuman	
	turbulentna energija $k$	Miješani	0
	specifična disipacija $\omega$	Miješani	0
Profil (zid)			
	brzina $u$	Dirichlet	(0 0 0)
	tlak $p$	von Neuman	
	turbulentna energija $k$	Dirichlet	0
	specifična disipacija $\omega$	Dirichlet	850
Bokovi (prazno)			

zraka,  $I$  intenzitet turbulencije i  $\nu_t/\nu$  omjer turbulentne viskoznosti. Rubni uvjeti za simulaciju sa  $k - \omega$  SST modelom turbulencije pokazani su u tablici 4, dok su rubni uvjeti za simulaciju sa  $kkL - \omega$  modelom turbulencije pokazani u tablici 5.

Osim Dirichletovih rubnih uvjeta koji propisuju vrijednost na rubu domene i von Neumanovih koji propisuju vrijednost gradijenta na rubu domene, korišteni su i miješani rubni uvjeti koji su kombinacija vrijednosti varijable i gradijenta. Miješani rubni uvjeti zadaju tip rubnog uvjeta ovisno o orijentaciji protoka kroz granicu. U slučaju da je protok fluida u granicu domene zadani je iznos iz tablice 4 tj. 5, dok je za slučaj protoka fluida van domene zadan von Neumanov rubni uvjet kojime se zadaje vrijednost gradijenta nula.

**Tablica 5:** Rubni uvjeti za opstrujavanje profila s  $kkL - \omega$  modelom

Ulaz ("patch")			
brzina $u$	Miješani	(49.68 11.74 0)	
tlak $p$	von Neuman		
turbulentna kinetička energija $k_t$	Miješani	1.23e-5	
laminarna kinetička energija $k_l$	Miješani	0	
specifična disipacija $\omega$	Miješani	61.25	
Izlaz ("patch")			
brzina $u$	Miješani	(49.68 11.74 0)	
tlak $p$	von Neuman		
turbulentna kinetička energija $k_t$	Miješani	0	
laminarna kinetička energija $k_l$	Miješani	0	
specifična disipacija $\omega$	Miješani	0	
Profil (zid)			
brzina $u$	Dirichlet	(0 0 0)	
tlak $p$	von Neuman		
turbulentna kinetička energija $k_t$	Dirichlet	0	
laminarna kinetička energija $k_l$	Dirichlet	0	
specifična disipacija $\omega$	Dirichlet	850	
Bokovi (prazno)			
sva polja	type	empty	

### 4.3.2 SAAB 32 krilo

Jedini poznati parametri strujanja za krilo su brzina  $u = 20$  m/s i napadni kut  $\alpha = 4,8^\circ$ . Ulazni parametri turbulencije su pretpostavljeni koristeći formule 79-81. Zbog nepoznavanja turbulentnih veličina i njihovog utjecaja na tranziciju, intenzitet turbulencije  $I$  odabran je u rasponu od 0,01% do 2%, a odnos turbulentne viskoznosti  $\nu_t/\nu$  od 0,1 do 20. Granice domene su sve istog tipa osim bočnih granica na kojima je zadan simetričan rubni uvjet. Budući da jednačba 23 ne rješava  $\omega$  do zida nego koristi jednačbu 33 moguće je korištenje zidne funkcije za  $\omega$  kako bi se automatski izračunala vrijednost.

## 4.4 Numeričke sheme

Tablica 6 prikazuje numeričke sheme diskretizacije korištene u simulacijama.

**Tablica 6:** Korištene numeričke sheme

<b>Vremenska shema</b>	stacionarno strujanje
<b>Sheme gradijenata</b>	
zadane postavke	Gauss linearne
<b>Sheme divergencije</b>	
zadane postavke	Gauss uzvodne
$\text{div}((\nu_{\text{Eff}} * \text{dev}(T(\text{grad}(U))))))$	Gauss linearne
<b>Laplacian Scheme</b>	
zadane postavke	Gauss linearne ispravljene
<b>Interpolacijske sheme</b>	
zadane postavke	linearne
<b>Sheme gradijenta normale površine</b>	
zadane postavke	ispravljene

## 4.5 Pokretanje simulacije

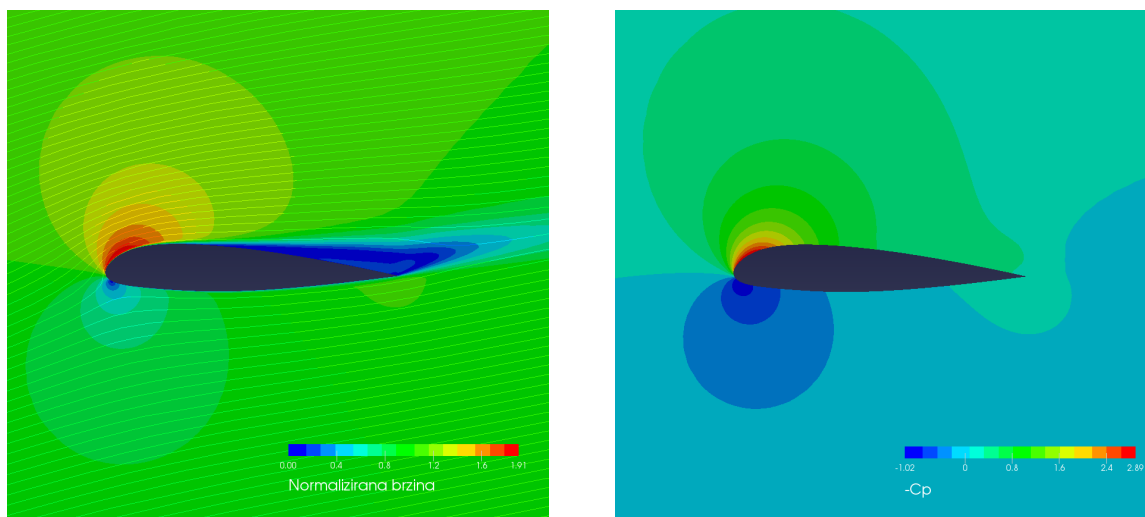
Polje brzine je inicijalizirano rješavanjem potencijalnog optjecanja. Korišteni rješavač za stacionarno nestlačivo strujanje je "simpleFoam" koji spreg tlaka i brzine vrši pomoću SIMPLE algoritma [19].

## 5 Rezultati numeričkih simulacija

### 5.1 Aerospatiale A-profil

#### 5.1.1 $k-\omega$ SST model turbulencije

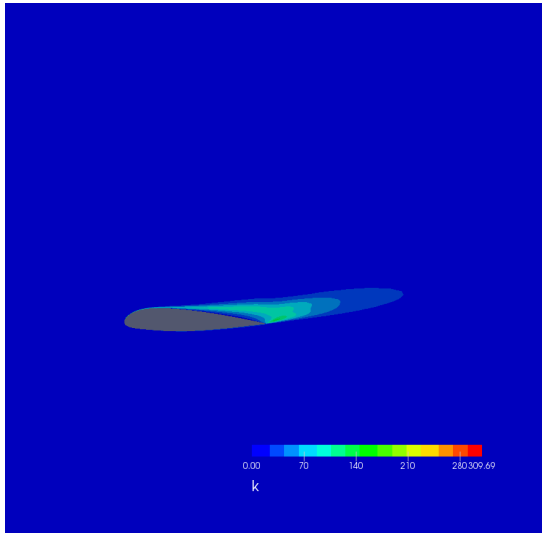
Normalizirano polje brzine i tlaka oko profila dobiveno korištenjem  $k-\omega$  SST modela turbulencije prikazano je na slikama 13a i 13b. Slika 14c prikazuje područje recirkulacije sa strujnicama unutar njega i komponentu brzine u smjeru longitudinalne osi. Rezultati simulacije prikazuju razvitak turbulentnog graničnog sloja koji se odvaja na približno 50% duljine tetive profila. Slika 14a prikazuje polje turbulentne energije  $k$ , a slika 14b polje turbulentne viskoznosti oko profila. Cirkulacijsko strujanje mijenja smjer koeficijenta otpora  $c_f$  što je vidljivo na dijagramu 17. Koeficijent uzgona  $c_l = 1,124$  i koeficijent otpora  $c_d = 0,097$  zajedno s poljem brzine ukazuju na slom uzgona. Zadovoljavajuća konvergencija koeficijenata  $c_l$  i  $c_d$  postignuta je nakon 1000 iteracija što je vidljivo na slici 14d.



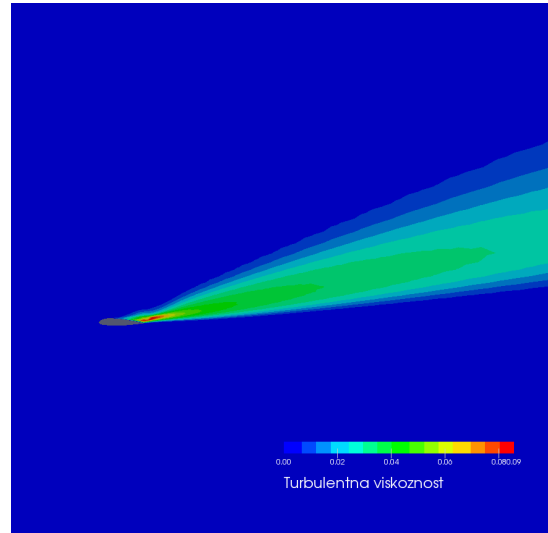
(a) Normalizirano polje brzina sa strujnicama,

(b) Polje koeficijenta tlaka.

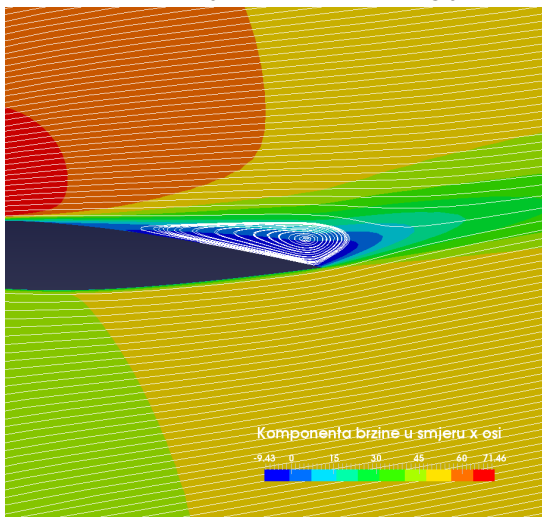
**Slika 13:** Polje brzine i tlaka oko profila dobiveno  $k-\omega$  SST modelom za  $\alpha = 13,3^\circ$ .



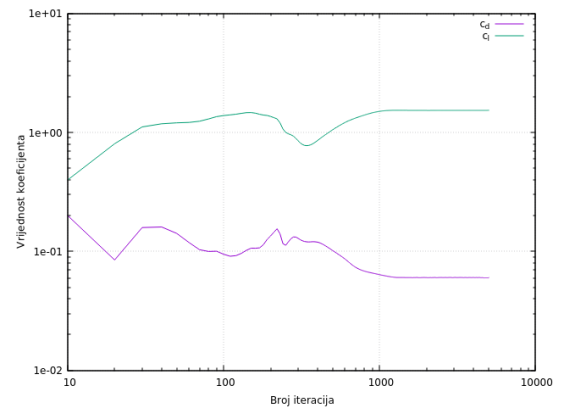
(a) Polje turbulentne energije,



(b) Polje turbulentne viskoznosti.



(c) Odvajanje strujanja,



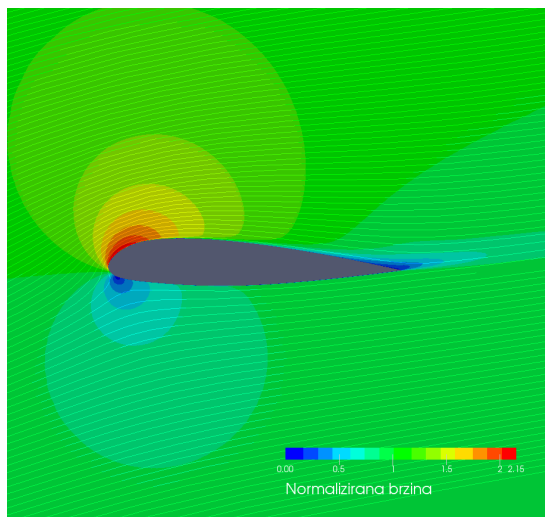
(d) Konvergencija koeficijenata uzgona i otpora.

**Slika 14:** Rezultati simulacije s  $k - \omega$  SST modelom za  $\alpha = 13,3^\circ$

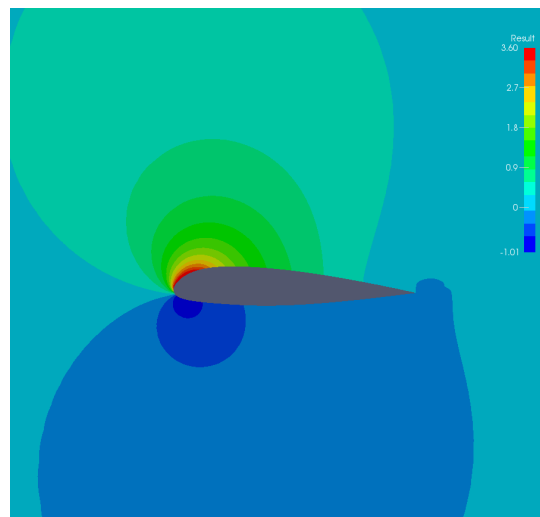


### 5.1.2 $kkL - \omega$ model turbulencije

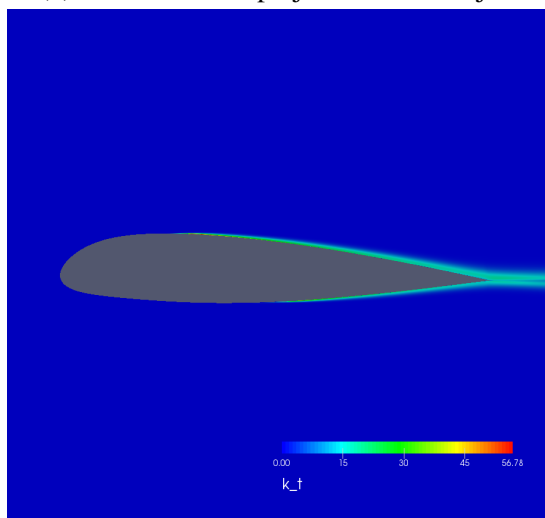
Slike 15a i 15b prikazuju normalizirano polje brzine i tlaka oko profila dobiveno simulacijom sa  $kkL - \omega$  modelom turbulencije. Područje tranzicije raspoznaje se naglim porastom koeficijenta otpora trenja  $c_f$  (slika 16a) koji će biti više izražen za veće napadne kuteva, a manje za manje napadne kuteve (slika 16c).



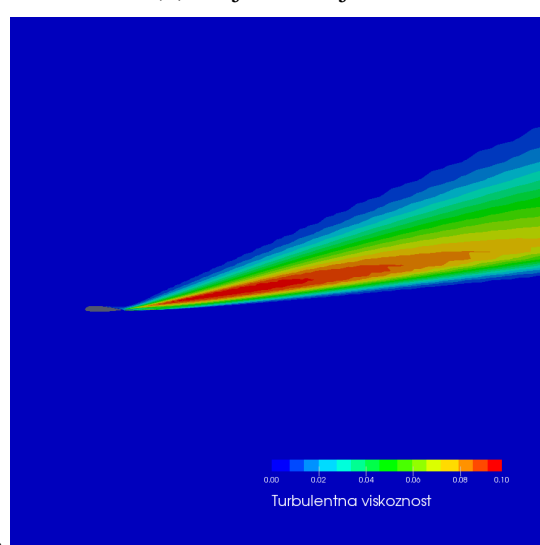
(a) Normalizirano polje brzine sa strujnicama,



(b) Polje koeficijenta tlaka.



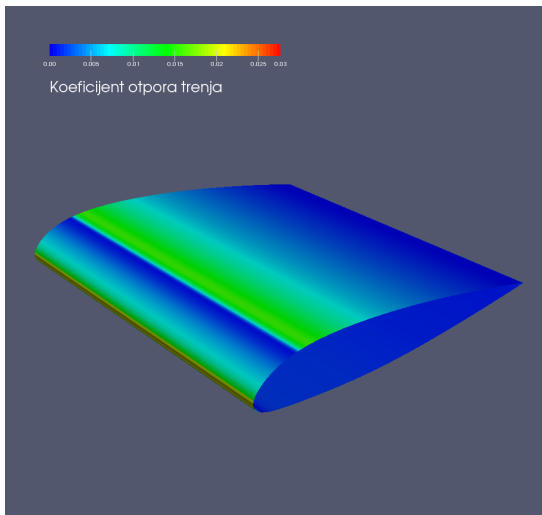
(c) Prirast turbulentne kinetičke energije na gornjaci i donjaci uslijed tranzicije za  $\alpha = 0$ ,



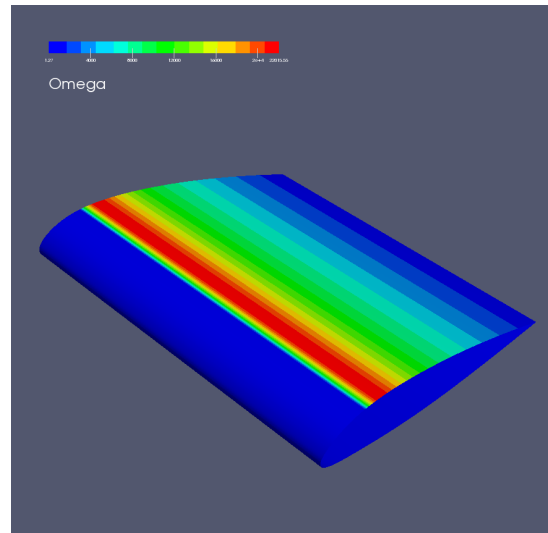
(d) Polje turbulentne viskoznosti.

**Slika 15:** Strujanje oko profila s  $kkL - \omega$  modelom turbulencije za  $\alpha = 13,3^\circ$ .

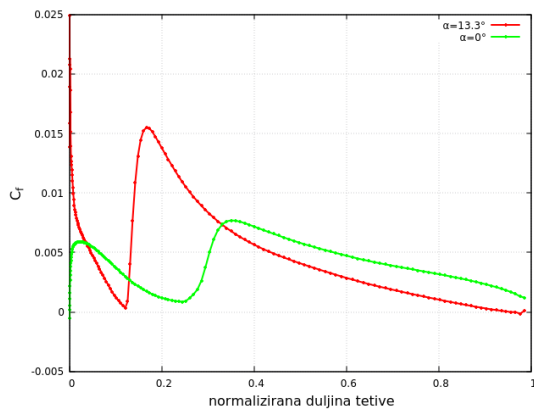
Naglo povećanje laminarne kinetičke energije  $k_l$  i turbulentne kinetičke energije  $k_t$  također je indicija tranzicije. Slika 15c prikazuje tranziciju na gornjaci i donjaci pri opstrujavanju profila za kut  $\alpha = 0^\circ$ . Vrijednosti  $\omega$  na profilu vidljive su na slici 16b. Konvergencija koeficijenata  $c_l$  i  $c_d$  potvrđuje konvergenciju simulacije (slika 16d).



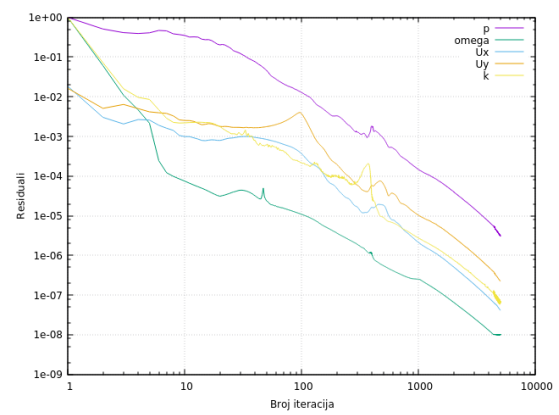
(a) Koficijent otpora trenja,



(b) Specifična disipacija  $\omega$ ,



(c) Oblik koficijenta otpora trenja za  $\alpha = 0^\circ$  i za  $\alpha = 13,3^\circ$ ,

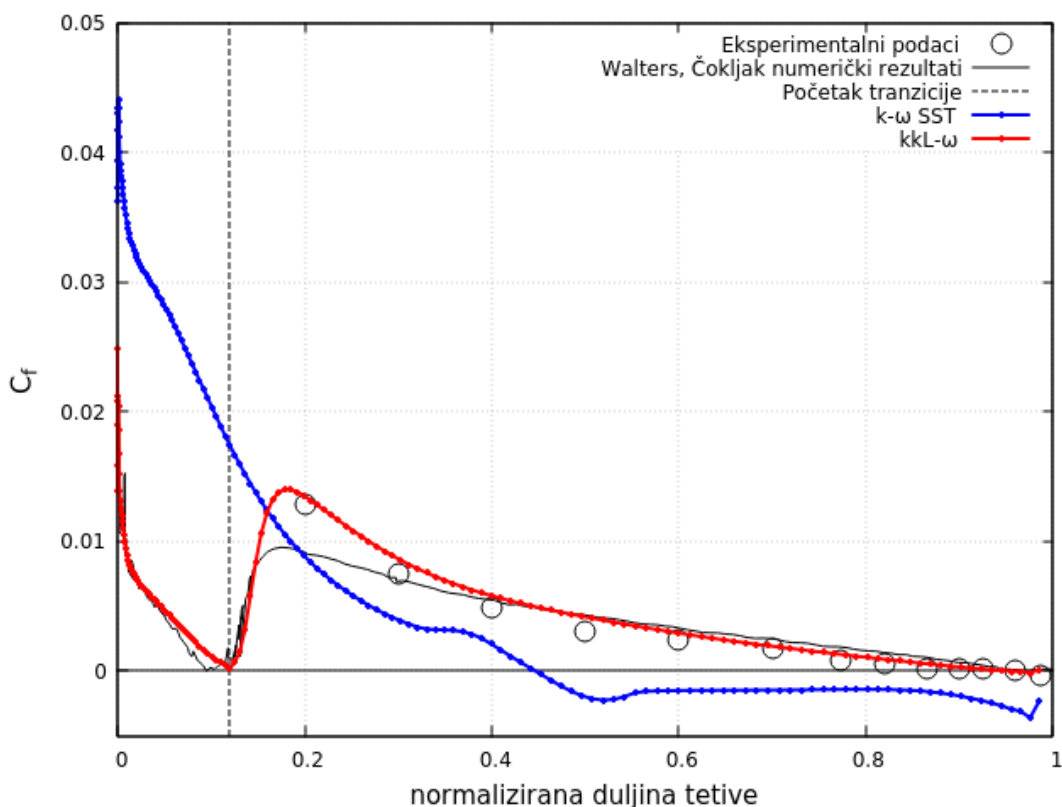


(d) Konvergencija reziduala.

Slika 16: Rezultati  $kkL - \omega$  simulacije za profil.

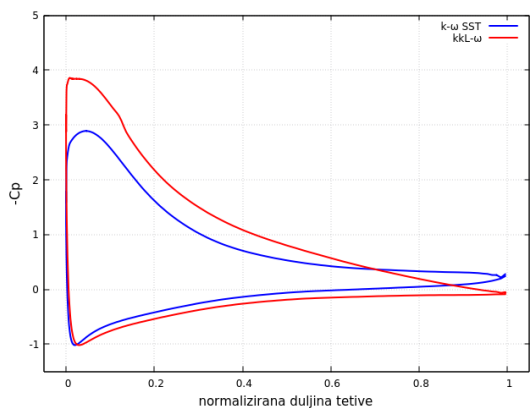
### 5.1.3 Utjecaj tranzicije na globalna svojstva

Pri prijelazu iz laminarnog u turbulentno strujanje dolazi do naglog povećanja koeficijenta otpora trenja. Usporedba koeficijenata otpora trenja dobivenih  $k - \omega$  SST i  $kkL - \omega$  modelima turbulencije s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima iz literature [1] vidljiva je na dijagramu 17. Rezultati  $kkL - \omega$  modela turbulencije pokazuju veliku sličnost s eksperimentalnim rezultatima. Važno je napomenuti da su numerički rezultati [1] dobiveni uporabom komercijalnog programa Fluent na mreži s dvostruko većim brojem kontrolnih volumenta.

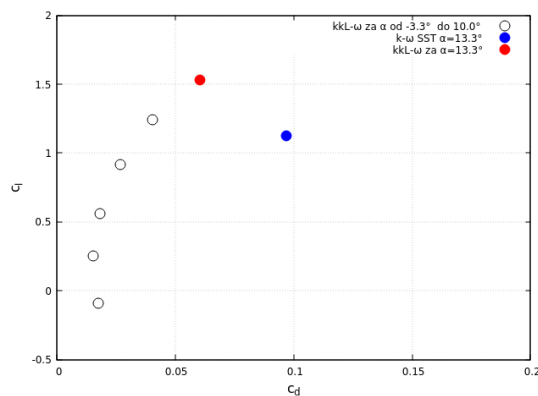


Slika 17: Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za  $c_f$  pri  $\alpha = 13,3^\circ$ .

Iz dijagrama tlaka (slika 18a) vidljivo je da  $k - \omega$  SST model daje slične vrijednosti tlaka na donjaci gdje nema tranzicije, a umanjene na gornjaci gdje se javlja tranzicija. Posljedica ovoga je smanjen uzgon i povećan otpor pri istim uvjetima opstrujavanja (plava točka na slici 18b). Crne točke na slici 18b čine polaru profila za kuteve  $\alpha$  između  $-3,3^\circ$  i  $10^\circ$  koristeći  $kkL - \omega$  model pri čemu je crvena točka vrijednost za  $\alpha = 13,3^\circ$ .



(a) Usporedba koeficijent tlaka,

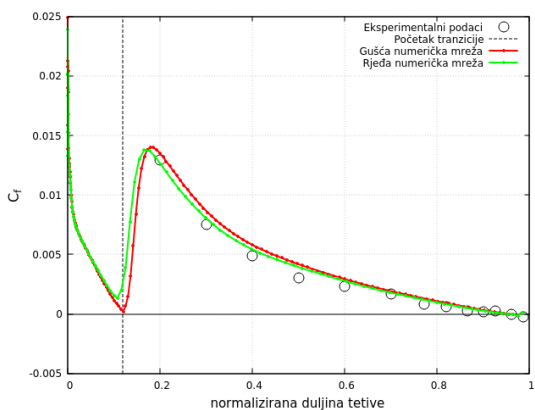


(b) Polara profila.

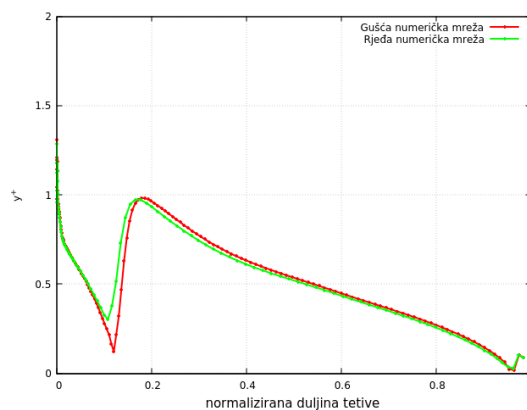
Slika 18: Rezultati  $kkl-\omega$  simulacije za profil.

### 5.1.4 Osjetljivost numeričke mreže

Kako bi se provjerio utjecaj mreže na rezultate napravljena je dodatna numerička mreža za profil. Mreža ima iste dimenzije i  $y^+$  kao i prijašnja mreža s time da umjesto 300 ima 200 čvorova po profilu čime se broj ćelija smanjio za približno 25%, s 43.000 na 33.000. Utjecaj gustoće mreže na računanje tranzicije prikazano je pomoću koeficijenta  $c_f$  na dijagramu 19a. Dijagram 19b prikazuje usporedbu bezdimenzijske udaljenost od stjenke  $y^+$  za dvije mreže.



(a) Usporedba koeficijenata otpora trenja,

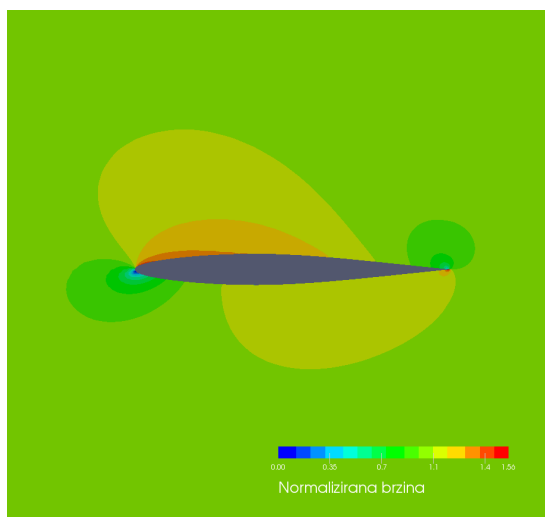


(b) Usporedba bezdimenzijske udaljenosti  $y^+$ .

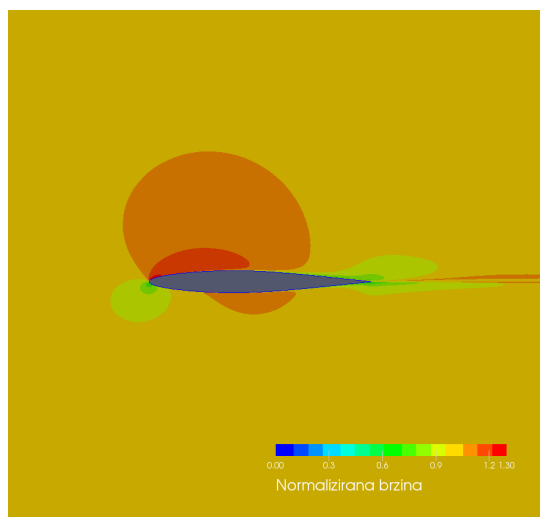
Slika 19: Osjetljivost rezultata na numeričku mrežu za  $\alpha = 13,3^\circ$ .

## 5.2 SAAB 32 krilo

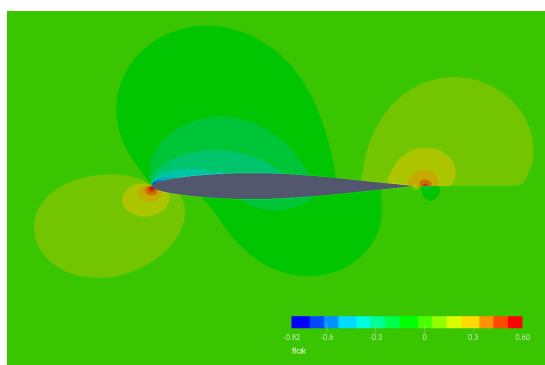
Slika 20 prikazuje usporedbu polja brzine i tlaka za  $k - \omega$  SST i  $kkL - \omega$  model turbulencije sa ulaznim parametrima turbulencije istima kao i kod opstrujavanja profila, pri čemu je intenzitet turbulencije  $I = 0,2\%$  i odnos turbulentne viskoznosti  $\nu_t/\nu = 10$ . Presjek na 50% raspona krila odabran je zbog dostupnih eksperimentalnih podataka [17] i izmjerene tranzicije na donjaci krila.



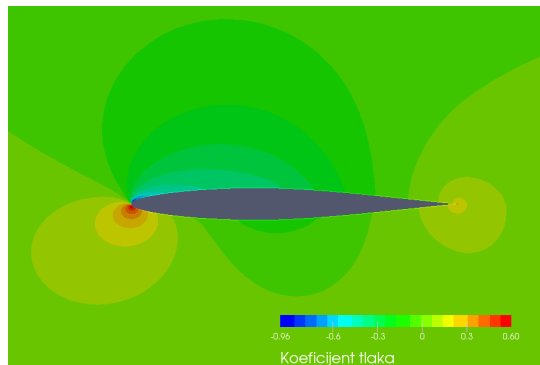
(a) Polje brzine dobiveno  $k - \omega$  SST modelom,



(b) Polje brzine dobiveno  $kkL - \omega$  modelom,



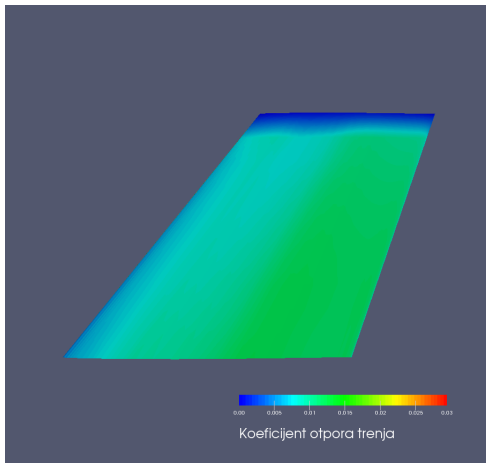
(c) Polje tlaka dobiveno  $k - \omega$  SST modelom,



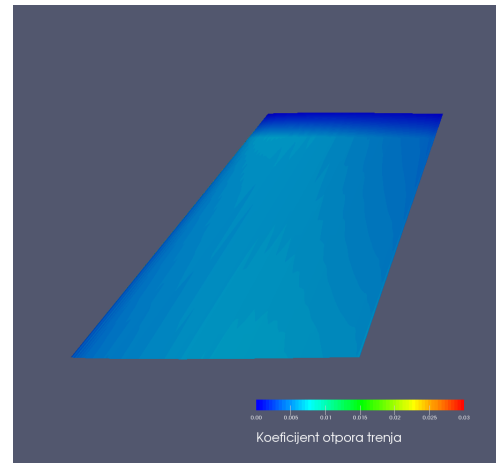
(d) Polje tlaka dobiveno  $kkL - \omega$  modelom.

**Slika 20:** Polje brzine i tlaka oko krila za  $\alpha = 4,8^\circ$

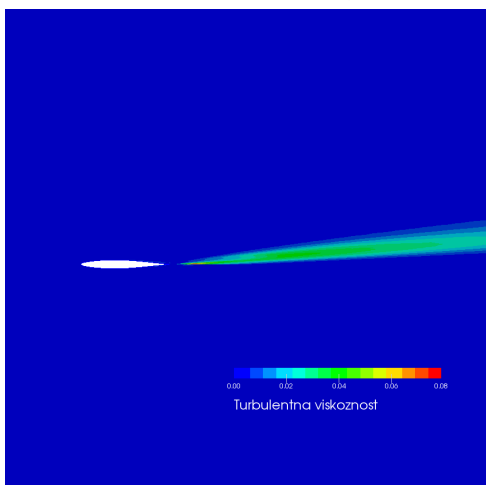
Numeričke simulacije s  $kkL - \omega$  modelom napravljene su za široki raspon ulaznih turbulentnih veličina, međutim model nije uspio prikazati tranziciju. Slike 21a i 21b prikazuju koeficijenata smičnog naprezanja na donjaci krila, dok su polja turbulentne viskoznosti vidljiva na slikama 21c i 21d. Turbulentna energija  $k$  za  $k - \omega$  SST model je prikazana na slici 21e, dok je turbulentna kinetička energija  $k_t$  dobivena s  $kkL - \omega$  modelom turbulencije prikazana na slici 21f. Usporedba eksperimentalnih mjerenja koeficijenta otpora trenja na donjaci s rezultatima numeričke simulacija vidljiva je na slici 22.



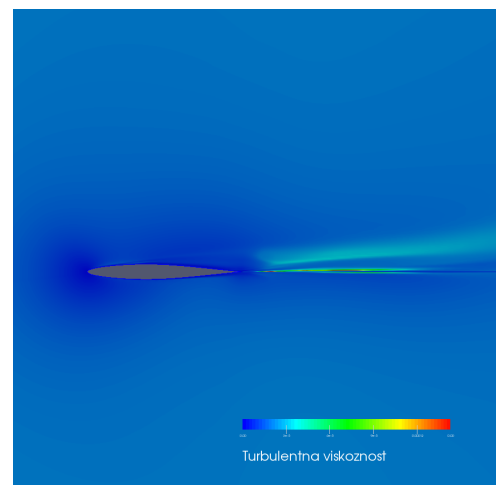
(a) Koeficijent otpora trenja na donjaci krila dobiven  $k - \omega$  SST modelom,



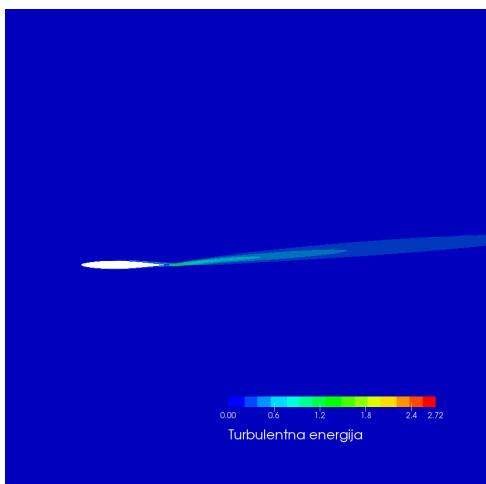
(b) Koeficijent otpora trenja na donjaci krila dobiven  $kkL - \omega$  modelom.



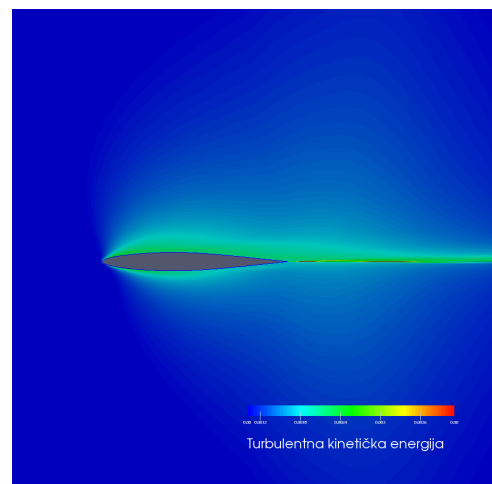
(c) Turbulentna viskoznost dobivena  $k - \omega$  SST modelom,



(d) Turbulentna viskoznost dobivena  $kkL - \omega$  modelom,

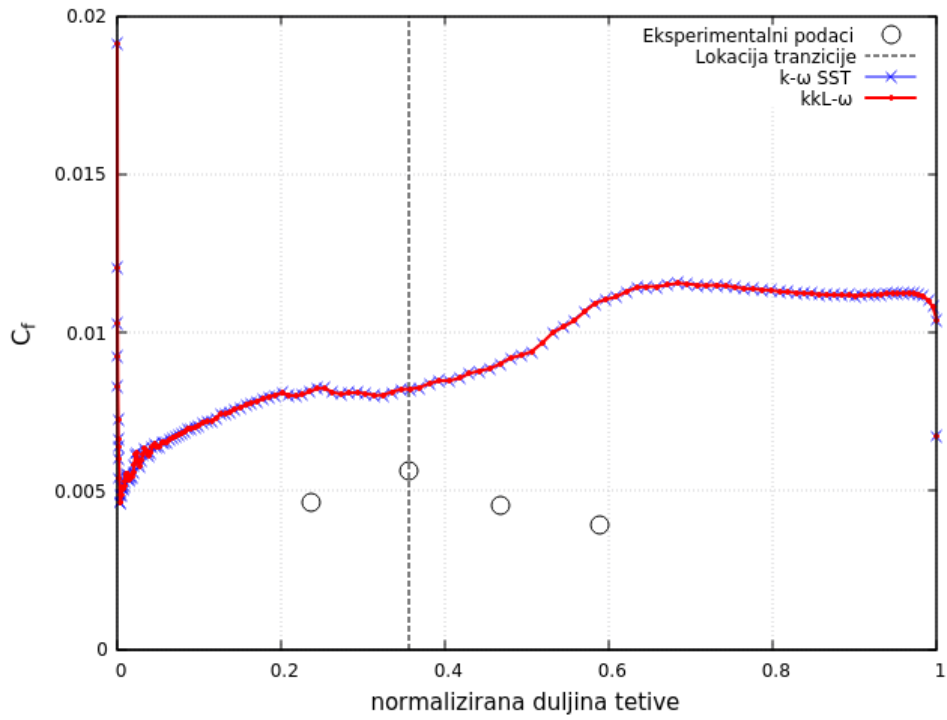


(e) Turbulentna energija dobivena  $k - \omega$  SST modelom,



(f) Turbulentna kinetička energija dobivena  $kkL - \omega$  modelom.

**Slika 21:** Rezultati numeričkih simulacija strujanja oko krila za  $\alpha = 4,8^\circ$



Slika 22: Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za  $c_f$  pri  $\alpha = 4,8^\circ$ .

## 6 Zaključak

Validacija  $kkL - \omega$  tranzicijskog modela turbulencije radila se na profilu i krilu. Rezultati numeričke simulacije na profilu pokazuju dobro pokapanje sa eksperimentalnim mjerenjima. Usporedbom rezultata simulacija s  $kkL - \omega$  i  $k - \omega$  SST modelima turbulencije vidljiv je utjecaj tranzicije na globalna svojstva uzgona i otpora.  $kkL - \omega$  model nije moguće validirati za raspon napadnih kuteva zbog nedostatka eksperimentalnih podataka, ali numeričke simulacije daju fizikalne i očekivane rezultate.

Usporedba eksperimentalnih mjerenja s rezultatima trodimenzionalne simulacije oko krila ukazuje na nemogućnost predviđanja tranzicije graničnog sloja iz laminarnog u turbuleni pomoću  $kkL - \omega$  modela turbulencije.  $kkL - \omega$  model turbulencije pretpostavlja razvitak turbulentnog graničnog sloja na početku krila umjesto na približno 35%. Ovo je vidljivo zbog poklapanja rezultata s  $k - \omega$  SST modelom koji pretpostavlja trenutni razvitak turbulentnog graničnog sloja nastrujavanjem fluida na krilo. Mogući razlozi krive procjene tranzicije  $kkL - \omega$  modela turbulencije su:

- Kompleksna trodimenzionalna geometrija,
- Zanemarivanje utjecaja zida zračnog tunela u numeričkim simulacijama,
- Krivo procjenjeni ulazni parametri turbulencije.

U daljnjem radu trebalo bi se ispitati ponašanje  $kkL - \omega$  model turbulencije na jednostavnim trodimenzionalnim geometrijama kao npr. pravokutnim krilima bez sužavanja. Također,  $kkL - \omega$  model omogućuje simuliranje stlačivog strujanja pa je stoga potrebno izvršiti validaciju pri uvjetima u kojima se javlja stlačivo strujanje čime bi se omogućilo korištenje modela u industrijske svrhe.



## Literatura

- [1] Walters, D. K. and Cokljat, D., “A three-equation eddy-viscosity model for Reynolds-averaged Navier–Stokes simulations of transitional flow,” *Journal of fluids engineering*, Vol. 130, No. 12, 2008, pp. 121401.
- [2] Tennekes, H. and Lumley, J. L., *A First Course in Turbulence*, Vol. 3, McGraw-Hill New York, 2006.
- [3] Casalis, D. A. G., “Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows,” *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 36, 2000.
- [4] Eggenspieler, G., “Modelling laminar-turbulent transition processes,” Tech. rep., Technical report, ANSYS, 2011.
- [5] Sveningsson, A., “Transition Modelling-A Review,” Tech. rep., Citeseer, 2006.
- [6] White, F. M. and Corfield, I., *Viscous fluid flow*, Vol. 3, McGraw-Hill New York, 2006.
- [7] Genc, M. S., Karasu, I., Acikel, H. H., Akpolat, M. T., and Genc, M., “Low Reynolds number flows and transition,” *Low Reynolds Number Aerodynamics and Transition, Genc, MS Ed.; InTech: Rijeka, Croatia*, 2012, pp. 1–28.
- [8] Wilcox, D. C. et al., *Turbulence modeling for CFD*, Vol. 2, DCW industries La Canada, CA, 1998.
- [9] Gokdepe, M., *Turbulence models for the numerical prediction of transitional flows with RANSE*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2015.
- [10] Janković, *Mehanika leta zrakoplova*.
- [11] Thomas, A. S., Saric, W. S., Braslow, A. L., Bushnell, D., Lock, R., Hackett, J., et al., “Aircraft Drag Prediction and Reduction,” Tech. rep., DTIC Document, 1985.
- [12] Braslow, A. L., “A history of suction-type laminar flow control with emphasis on flight research,” 1999.
- [13] Zdravko Virag, Mario Šavar, I. D., *Mehanika fluida II*.
- [14] Menter, F., “Zonal two equation kw turbulence models for aerodynamic flows,” *23rd fluid dynamics, plasmadynamics, and lasers conference*, 1993, p. 2906.
- [15] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M., et al., *The finite volume method in computational fluid dynamics*, Springer, 2016.

- 
- [16] Johnson, D. A. and King, L., "A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers," *AIAA journal*, Vol. 23, No. 11, 1985, pp. 1684–1692.
- [17] Furst, J., "Numerical simulation of transitional flows with laminar kinetic energy," *Engineering Mechanics*, Vol. 20, No. 5, 2013, pp. 379–388.
- [18] Bertelrud, A., "Experimental and Computational Investigation of a Swept-Wing Flow at Subsonic Speeds," *Journal of Aircraft*, Vol. 16, No. 11, 1979, pp. 742–748.
- [19] Greenshields, C. J., "Openfoam user guide," *OpenFOAM Foundation Ltd, version*, Vol. 3, No. 1, 2015.