

# Progrijavanje troslojne ravne stijenke

---

Đurasević, Sanijo

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:594619>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-04**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Sanjo Đurasević**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Ivanka Boras, dipl. ing.

Student:

Sanijo Đurasević

Zagreb, 2016..

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojoj mentorici prof.dr.sc. Ivanki Boras te dr.sc. Nenadu Ferdeljiju na savjetima prilikom izrade rada. Posebno se zahvaljujem prijateljima i kolegama Josipu Kataviću i Ivanu Batistiću na nesebičnoj pomoći i odvojenom vremenu koje su mi ukazali tijekom preddiplomskog studija. Također se zahvaljujem svojoj obitelji, prijateljima i ostalim kolegama na podršci.

Sanijo Đurasević



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomске ispite

Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:

procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Sanjo Đurasević** Mat. br. : 0036465072

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Progrijavanje troslojne ravne stijenke**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Heating of the three – layer flat wall**

Opis zadatka:

Ravna stijenka (vanjski zid prostorije) sastavljena je od tri sloja: žbuke debljine 5 cm, cigle debljine 25 cm i izolacijskog sloja od stiropora debljine 10 cm. Potrebno je održavati temperaturu zraka u prostoriji 22 °C uz vanjsku temperaturu – 15 °C. Koefficient konvektivnog prijelaza topline na unutrašnjoj strani troslojne stijenke je 8 W/(m<sup>2</sup>K), a na vanjskoj 20 W/(m<sup>2</sup>K). Ako je početna temperatura troslojne stijenke 0 °C potrebno je odrediti:

- Vrijeme postizanja stacionarnog prijenosa topline za sljedeću strukturu troslojne stijenke: žbuka se nalazi s unutrašnje strane, slijedi cigla te izolacija s vanjske strane zida.
- Vrijeme postizanja stacionarnog prijenosa topline za sljedeću strukturu troslojne stijenke: na ciglu s unutrašnje strane postavljena izolacija, a s vanjske strane žbuka.

Zadatak riješiti numerički, koristeći metodu konačnih diferencija. Prikazati postavku problema u diferencijskom obliku uz dodatno pojašnjenje uvjeta numeričke stabilnosti korištene metode.

Dijagramski je potrebno prikazati temperaturni profil u odabranim vremenskim trenucima kao i pripadajuće iznose gustoća i smjerova toplinskih tokova na graničnim površinama zida i to u trenucima u kojima su prikazani i temperaturni profili.

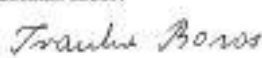
Nadalje je potrebno interpretirati i detaljnije pojasniti dobivene rezultate temperaturnih profila kao i različita vremena postizanja stacionarnih stanja za različiti raspored slojeva u stijenci.

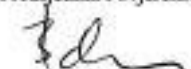
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu kao i eventualnu pomoć mentora.

Zadatak zadan:  
25. studenog 2015.

Rok predaje rada:  
1. rok: 25. veljače 2016  
2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.  
3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.  
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.  
3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatski zadao:  
  
Prof. dr. sc. Ivanka Boras

Predsjednik Povjerenstva:  
  
Prof. dr. sc. Igor Balen

**SADRŽAJ**

POPIS SLIKA .....	2
POPIS OZNAKA .....	3
SAŽETAK.....	4
1. UVOD.....	5
2. DISKRETIZACIJA PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE NESTACIONARNOG 1-D MODELA PROVOĐENJA TOPLINE .....	6
2.1. Formulacija problema na diferencijalnoj razini .....	6
2.2. Prikaz problema u diskretizacijskom obliku .....	9
2.3. Kriterij stabilnosti eksplicitne metode.....	15
2.4. FTCS (Forward Time, Centered Space) shema .....	18
3. ANALIZA I KONTROLA NUMERIČKE POGREŠKE.....	21
3.1. Diskretizacijska pogreška.....	21
3.2. Pogreška zaokruživanja.....	22
4. PRIKAZ I INTERPRETACIJA PRORAČUNA .....	23
4.1. Proračun u slučaju kada je izolacija s vanjske strane.....	23
4.2. Proračun u slučaju kada je izolacija s unutarnje strane .....	27
4.3. Razlika u vremenu postizanja stacionarnosti .....	31
4.4. Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja .....	33
5. ZAKLJUČAK.....	35
LITERATURA.....	36
PRILOZI .....	37
Prilog II .....	38
Prilog III .....	40
Prilog IV .....	41
Prilog V .....	42
Prilog VI.....	43
Prilog VII.....	45
Prilog VIII .....	46
Prilog IX.....	47

**POPIS SLIKA**

Slika 1 Uz rubne uvjete 3. vrste .....	7
Slika 2 Vremensko-prostorna diskretizacija .....	9
Slika 3 Binder-Schmidtova grafička metoda .....	11
Slika 4 Diskretizacija R.U. na $x=0$ .....	12
Slika 5 Diskretizacija R.U. na $x=\delta$ .....	13
Slika 6 Uz objašnjenje kriterija stabilnosti.....	16
Slika 7 Isječak koda za implementaciju FTCS sheme u MATLABU.....	18
Slika 8 "Računalna molekula" toplinske jednadžbe .....	18
Slika 9 FTCS rješenje u trenutku $t=0,5$ za $M=2$ .....	19
Slika 10 FTCS rješenje u $t=1$ za $M=2$ (izražena nestabilnost).....	20
Slika 11 Lokalne i globalne pogreške MKD-a nakon trećeg vremenskog koraka.....	21
Slika 12 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci nakon 30 min u slučaju kad je izolacija s vanjske strane .....	24
Slika 13 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci s rubnim uvjetima 3. vrste (slučaj kada je izolacija s vanjske strane) .....	25
Slika 14 Trenutne vrijednosti gustoće toplinskih tokova na rubnim površinama za slučaj kad je izolacija s vanjske strane zida.....	26
Slika 15 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci nakon 30 min u slučaju kad je izolacija s unutarnje strane .....	28
Slika 16 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci s rubnim uvjetima 3. vrste (slučaj kada je izolacija s unutarnje strane) .....	29
Slika 17 Trenutne vrijednosti gustoće toplinskih tokova na rubnim površinama za slučaj kad je izolacija s unutarnje strane zida.....	30
Slika 18 Temperaturni profili u stacionarnom stanju za oba slučaja .....	32
Slika 19 Usporedba rezultata numeričkog i analitičkog rješenja stacionarnog profila za slučaj kad je izolacija s vanjske strane .....	33
Slika 20 Usporedba rezultata numeričkog i analitičkog rješenja stacionarnog profila za slučaj kad je izolacija s vanjske strane .....	34

**POPIS OZNAKA**

$c$	J/(kg K)	Specifični toplinski kapacitet krutine
$q$	W/m <sup>2</sup>	Gustoća toplinskog toka
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća
$\lambda$	W/(m K)	Toplinska provodnost
$a$	m <sup>2</sup> /s	Temperaturna provodnost
$\delta$	m	Debljina stijenke
$\vartheta$	°C	Temperatura
$\alpha$	W/m <sup>2</sup> K	Koeficijent prijelaza topline
$T$	°C	Temperatura
$Bi$	-	Biotova mrežna značajka
$M$	-	Fourierov broj
$\Delta x$	m	Diskretizacijski prostorni korak
$\Delta t$	s	Diskretizacijski vremenski korak



## SAŽETAK

Tema ovog završnog rada je progrijavanje troslojne ravne stijenke. Ravna stijenka (vanjski zid prostorije) sastavljena je od tri sloja: žbuke debljine 5 cm, cigle debljine 25 cm i izolacijskog sloja od stiropora debljine 10 cm. Potrebno je održavati temperaturu zraka u prostoriji  $22\text{ }^{\circ}\text{C}$  uz vanjsku temperaturu  $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Uz zadane koeficijente konvektivnog prijelaza topline na unutrašnjoj i vanjskoj strani troslojne stijenke te početnu temperaturu troslojne stijenke od  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  bilo je potrebno odrediti vrijeme postizanja stacionarnog prijenosa topline za sljedeće strukture stijenke:

- a) žbuka-cigla-izolacija
- b) izolacija-cigla-žbuka

Prikazana je postavka problema u diferencijskom obliku uz dodatno pojašnjenje uvjeta numeričke stabilnosti korištene metode.

Zadatak je riješen numerički, korištenjem metode konačnih diferencija, dobiveni su temperaturni profili za oba slučaja u različitim vremenima. Na kraju interpretirani su i detaljnije pojašnjeni dobiveni rezultati temperaturnih profila.

## 1. UVOD

Shodno drugom glavnom stavku termodinamike koji dokazuje da se u standardnim uvjetima toplina uvijek spontano prenosi od toplijeg na hladnije tijelo, odnosno od toplijih na hladnije dijelove tijela.

Postoje slučajevi kada je u tehničkoj praksi potrebno intenzivirati prirodnu tendenciju širenja topline, a nekad i spriječavati, primjer potpomaganja širenja topline predstavlja izmjena topline u kotlu od produkata izgaranja u ložištu, s vodom koja isparava u cijevima.

Primjer kada se treba spriječiti prirodno širenje topline predstavlja stambena zgrada koju zimi zagrijavamo i cilj nam je da se što manje topline preda okolišu.

Da bi se ostvarili takvi uvjeti, potrebna su teorijska znanja prijenosa topline. Teorija širenja topline može dati odgovor na sljedeće probleme koji utječu na intenzitet prijenosa topline:

- održavanje temperature u propisanom temperaturnom intervalu
- određivanje temperaturnog polja
- određivanje brzine zagrijavanja ili ohlađivanja promatrane točke.

Ovaj rad opisuje postupak dobivanja temperaturnih profila progrijavanja troslojne ravne stijenke za sljedeće strukture ravne stijenke:

- a) žbuka-cigla-izolacija
- b) izolacija-cigla-žbuka

Temperatura u unutrašnjosti prostorije iznosi  $\vartheta_u = 22 \text{ }^\circ\text{C}$ , a temperatura okoliša je  $\vartheta_v = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Riješenja su dobivena numerički, korištenjem metode konačnih diferencija, te su na kraju uspoređena sa rješenjima dobivenim analitičkim proračunom.

## 2. DISKRETIZACIJA PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE NESTACIONARNOG 1-D MODELA PROVOĐENJA TOPLINE

### 2.1. Formulacija problema na diferencijalnoj razini

Parcijalna diferencijalna jednačina koja opisuje nestacionarno provođenje topline u ravnoj stijenci za 1D slučaj ima oblik, (1)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (1)$$

U toj jednačini, paraboličnog tipa, veličina  $t$  predstavlja vremensku varijablu, dok veličina  $x$  predstavlja prostornu varijablu. Veličina  $a$  predstavlja temperaturnu provodnost (toplinsku difuzivnost) krutine a koja je strukturirana od fizikalnih svojstava krutine  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$ , pa se temperaturnu provodnost krutine računa prema jednačini:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2)$$

Iz jednačine (2) je očigledno da je vremenska promjena temperature krutine izravno proporcionalna njezinoj temperaturnoj provodnosti tj ovisi o toplinskoj provodnosti materijala, gustoći i specifičnom toplinskom kapacitetu.

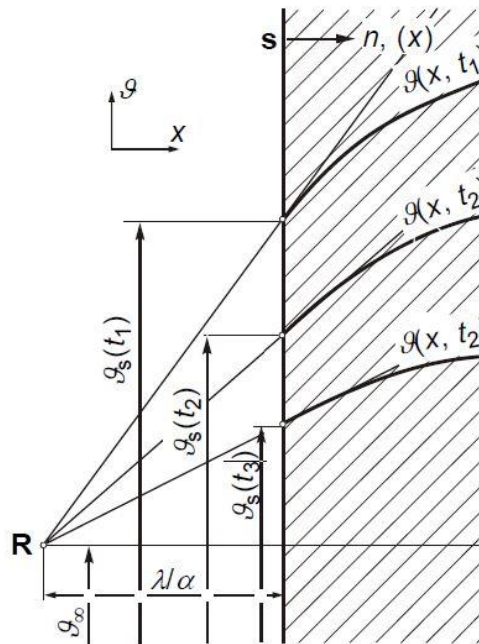
Za definiranje problema na diferencijalnoj razini, jednačini (1) potrebno je pridružiti odgovarajući početni uvjet kao i odgovarajuće rubne uvjete. Početni uvjet opisuje temperaturno polje u trenutku  $t=0$ , matematički zapisano:

$$\vartheta(t = 0) = (\vartheta_p(x))_{t = 0} \quad (3)$$

Ta temperaturna raspodjela može biti zadana kao funkcija, ali se u ovom slučaju radi o jednolikoj temperaturnoj raspodjeli po čitavoj debljini (volumenu) stijenke, pa se takav početni uvjet izražava jednačinom:

$$\vartheta(t = 0) = \vartheta_{poč} = konst. \quad (4)$$

Što se tiče rubnih (graničnih) uvjeta oni se za ovakav geometrijski oblik krutine javljaju na rubnim (graničnim) plohama na  $x = 0$  i  $x = \delta$ . Postoje nekoliko oblika rubnih uvjeta, a u okviru ovog problema uzimaju se rubni uvjeti 3. vrste, koji se shodno oznakama na slici 1, mogu izraziti sljedećim jednadžbama:



Slika 1 Uz rubne uvjete 3. vrste

$$-\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_{x=0} (\vartheta(x=0) - \vartheta_{\infty 0}) \quad (5)$$

$$-\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\delta} = \alpha_{x=\delta} (\vartheta(x=\delta) - \vartheta_{\infty \delta}) \quad (6)$$

Jednadžbe (5) i (6) mogu se zapisati i kao:

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\vartheta(x=0) - \vartheta_{\infty 0}}{\frac{\lambda}{\alpha_0}} \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = \frac{\vartheta(x=\delta) - \vartheta_{\infty\delta}}{\frac{\lambda}{\alpha_{\delta}}} \quad (8)$$

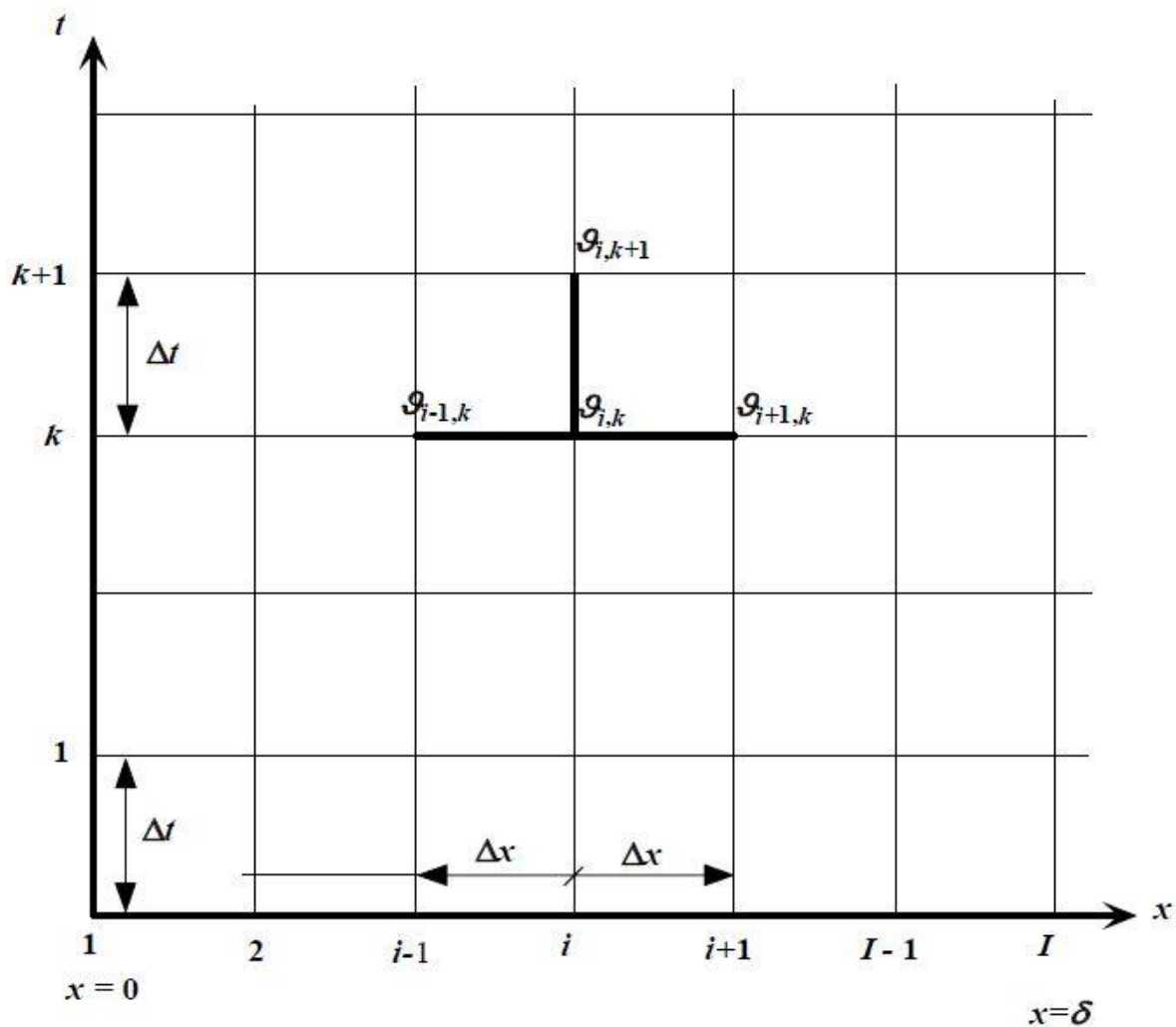
Jednadžbe (7) i (8) prikazuju, shodno slici 1, pozicije tzv. polova  $R_0$  i  $R_{\delta}$  tj. govore da tangenta povučena na trenutnu temperaturnu raspodjelu na mjestu  $x=0$ , mora pogađati pol  $R_0$ , odnosno tangenta povučena na trenutnu temperaturnu raspodjelu na mjestu  $x=\delta$ , mora pogađati pol  $R_{\delta}$ . Ako su veličine  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{\delta}$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta_{\infty 0}$ ,  $\vartheta_{\infty \delta}$  tijekom procesa širenja topline konstantni položaj polova se ne mijenja. Rubni uvjeti mogu biti vremenski promjenjivi, što znači da se tijekom promatranja takvog procesa položaj polova može mijenjati.

Parcijalnom diferencijalnom jednadžbom (1) zajedno s pridruženim početnim uvjetom, jednadžbama (3) i (4), te s pridruženim rubnim uvjetima (5) i (6), u potpunosti je opisan ovaj nestacionarni problem na diferencijalnoj razini. Integralno analitičko rješenje ovog problema veoma je komplicirano i u literaturi se može pronaći samo za određene specijalne slučajeve.

Razvojem računala i prikladnih numeričkih metoda omogućeno je rješavanje ovog i sličnih nestacionarnih problema. Prikladne numeričke metode su: metoda konačnih diferencija (MKD), metoda konačnih elemenata (MKE) i metoda kontrolnih volumena (MKV). Svaka od navedenih metoda ima svoje prednosti i područje primjene. U okviru rješavanja ovog problema koristi se metoda konačnih diferencija.

## 2.2. Prikaz problema u diskretizacijskom obliku

Za prikaz problema u diferencijskom obliku, koristeći MKD, vremensko-prostorni kontinuum se podijeli na diskretizacijsku prostornu koordinatu  $\Delta x$  i diskretizacijsku vremensku koordinatu  $\Delta t$ , kako je prikazano na slici 2.



Ako se za prostorni korak uzme  $\Delta x$ , a za vremenski  $\Delta t$  tada se jednačbu (1) može napisati u diferencijalnom obliku:

$$\Delta_t \vartheta = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \Delta_x^2 \vartheta \quad (9)$$

pri čemu  $\Delta_t \vartheta$  označuje prirast temperature neke točke u vremenskom intervalu  $\Delta t$ . U zadanom trenutku  $t$  označuje  $\Delta_x t$  temperaturnu razliku dviju ravnina razmaknutih za  $\Delta x$ , dok  $\Delta_x^2 \vartheta$

označuje razliku dviju prostorno razmaknutih vrijednosti  $\Delta_x t$ . Neka je u ravnini čvora  $i$  ( $i\Delta x$ ) u trenutku  $k\Delta t$  temperatura  $\vartheta_{i,k}$ , pa se prema slici 2 i po definiciji mogu napisati sljedeći diferencijski oblici:

$$\Delta_t \vartheta = \vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k} \quad (10)$$

$$\Delta_x \vartheta = \vartheta_{i+1,k} - \vartheta_{i,k} \quad (11)$$

$$\Delta_x^2 \vartheta = (\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k}) - (\vartheta_{i,k} - \vartheta_{i-1,k}) = \vartheta_{i+1,k} + \vartheta_{i-1,k} - 2\vartheta_{i,k} \quad (12)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (10) i (12) u jednadžbu (1) dobiva se za numerički proračun važna jednadžba

$$\vartheta_{i,k+1} = M(\vartheta_{i-1,k} + \vartheta_{i+1,k}) + (1 - 2M)\vartheta_{i,k} \quad (13)$$

pri čemu je veličina  $M$ , koja se naziva mrežni *Fourierov* broj, jednaka

$$M = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (14)$$

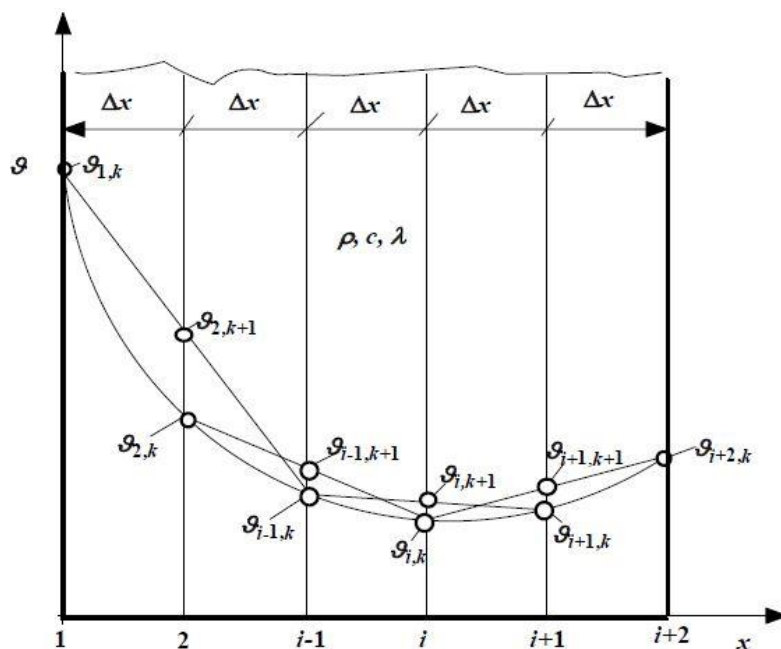
Diferencijalna jednadžba (13) vrijedi sa sve unutrašnje čvorove ravne stijenke, čiji je broj  $i=1,2,3,\dots,I-1$ , i ona predstavlja eksplicitni zapis. Vidljivo je iz jednadžbe (13) da čim je ta formulacija kompletirana, i kada je specificiran početni uvjet, do rješenja nestacionarnog problema se dolazi "marširanjem" u vremenu koristeći vremenski korak  $\Delta t$ .

Prema kriteriju stabilnosti odabire se odgovarajući vremenski korak  $\Delta t$  i čvorišne temperature iz početnog uvjeta, smatrajući te temperature kao prethodno rješenje  $\vartheta_{i,k}$  u  $t=0$ , koristeći jednadžbu (13) možemo izračunati temperature u svim čvorovima  $\vartheta_{i,k+1}$  u sljedećem vremenskom intervalu  $t=\Delta t$ . Dobiveno rješenje u trenutku  $t=\Delta t$  koristimo kao prethodno rješenje  $\vartheta_{i,k}$  da bi odredili novo rješenje  $\vartheta_{i,k+1}$  u vremenu  $t=2\Delta t$ . Taj se postupak ponavlja dok se ne "promaršira" kroz cjelokupni vremenski intervalni skup.

Zanimljivo je rješenje koje proizlazi iz jednadžbe (13) za slučaj da je  $M = \frac{1}{2}$ . U tom se slučaju dobije sljedeća jednakost

$$\vartheta_{i,k+1} = \frac{\vartheta_{i+1,k} + \vartheta_{i-1,k}}{2} \quad (15)$$

koja pokazuje da je temperatura unutrašnjeg čvora u sljedećem vremenskom intervalu jednaka aritmetičkoj sredini temperatura susjednih čvorova u prethodnom vremenskom intervalu. To se grafički rješava spajanjem vrijednosti temperatura susjednih čvorova kako je prikazano na slici 3. Ovaj postupak naziva se Binder-Schmidtova grafička metoda.



Slika 3 Binder-Schmidtova grafička metoda



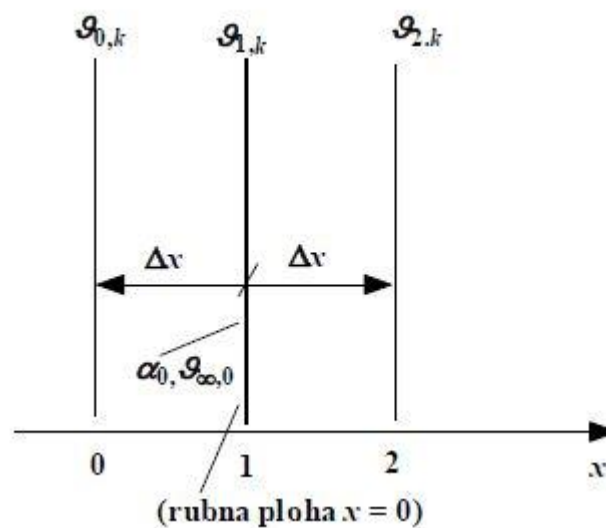
Ovaj problem je moguće svesti i na implicitnu formulaciju metode konačnih diferencija.

Taj implicitni zapis ima oblik

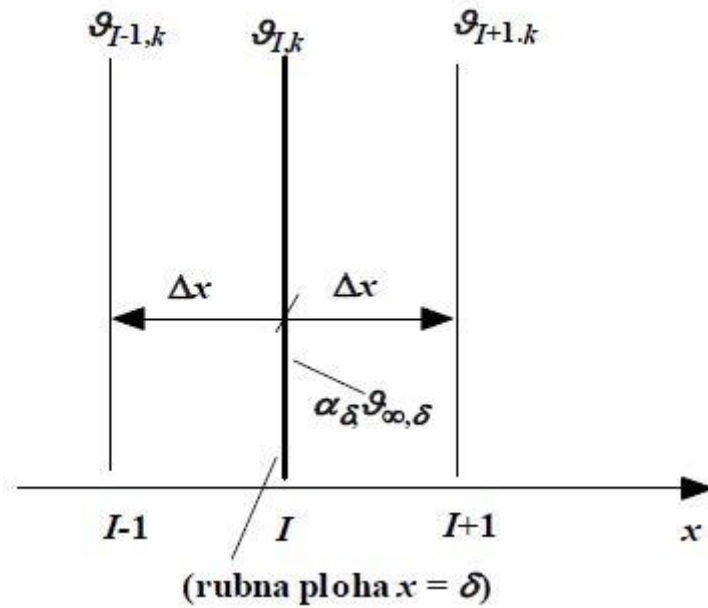
$$M\vartheta_{i-1,k+1} - (1 + 2M)\vartheta_{i,k+1} + M\vartheta_{i+1,k+1} + \vartheta_{i,k} = 0 \quad (16)$$

Prednost implicitne metode je ta što je ona bezuvjetno stabilna metoda, ali zahtjeva rješavanje sustava algebarskih jednačbi čiji broj odgovara broju  $I-1$  unutrašnjih čvorova, a što nije slučaj kod eksplicitne metode.

Bilo da se primjenjuje implicitnu ili eksplicitnu metodu za svaki od unutrašnjih čvorova dobiva se po jedna jednačba. Ostale dvije jednačbe dobiju se iz propisanih rubnih uvjeta (5) i (6) koje se također trebaju diskretizirati. Na slici 4 i 5 prikazana je diskretizacija rubnih uvjeta na  $x=0$  i  $x=\delta$ .



Slika 4 Diskretizacija R.U. na  $x=0$

Slika 5 Diskretizacija R.U. na  $x=\delta$ 

Diskretizacijom jednadžbe (5) ona poprima oblik

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{1,k} = \frac{\vartheta_{2,k} - \vartheta_{0,k}}{2\Delta x} = \alpha_0(\vartheta_{1,k} - \vartheta_{\infty 0}) \quad (17)$$

Odakle se dobiva temperatura  $\vartheta_{0,k}$  uz prethodno formiranje *Biotove mrežne značajke*

$$Bi_0^* = \frac{\alpha_0 \Delta x}{\lambda} \quad (18)$$

$$\vartheta_{0,k} = \vartheta_{2,k} - 2Bi_0^*(\vartheta_{1,k} - \vartheta_{\infty 0}) \quad (19)$$

Primjenivši zapis na rubni čvor 1, slika 4, slijedi jednadžba

$$\vartheta_{1,k+1} = \vartheta_{1,k} + M(\vartheta_{2,k} + \vartheta_{0,k} - 2\vartheta_{1,k}) \quad (20)$$

koju se može preobličiti na

$$\vartheta_{1,k+1} = M\vartheta_{0,k} + (1 - 2M)\vartheta_{1,k} + M\vartheta_{2,k} \quad (21)$$

Uvrštavanjem jednačbe (20) u (21) dobva se konačan oblik izraza za temperaturu u čvoru 1 u vremenu  $k+1$ .

$$\vartheta_{1,k+1} = [1 - 2M(1 + Bi_0^*)]\vartheta_{1,k} + 2M\vartheta_{2,k} + 2MBi_0^*\vartheta_{\infty,0} \quad (22)$$

Analognim postupkom diskretizacije rubnog uvjeta jednačbe (6) za  $I$ -ti rubni čvor dobiva se jednačba  $I$ -tog rubnog čvora u vremenu  $k+1$

$$\vartheta_{I,k+1} = [1 - 2M(1 + Bi_\delta^*)]\vartheta_{I,k} + 2M\vartheta_{I-1,k} + 2MBi_\delta^*\vartheta_{\infty,\delta} \quad (23)$$

pri čemu je

$$Bi_\delta^* = \frac{\alpha_\delta \Delta x}{\lambda} \quad (24)$$

Sustavom diferencijalnih jednačbi (13), (22) i (23) u potpunosti je opisan ovaj nestacionarni problem na diferencijalnoj razini. Korištenjem eksplicitne metode, marširanjem po vremenu moguće je u svakom trenutku dobiti temperaturu u svim čvorovima.

Potrebno je naglasiti da eksplicitna metoda nije bezuvjetno numerički stabilna te je potrebno ispitati kriterije za koje eksplicitna metoda postaje numerički stabilna.

### 2.3. Kriterij stabilnosti eksplicitne metode

Eksplicitna metoda nije bezuvjetno numerički stabilna, pa je najveća vrijednost vremenskog koraka  $\Delta t$  ograničena kriterijom stabilnosti te metode. Ukoliko vremenski korak nije dovoljno mali, dobivena rješenja mogu oscilirati i divergirati od analitičkih rješenja.

Da bi se to spriječilo odabrani vremenski korak mora biti manji ili jednak od vrijednosti dobivene iz kriterija stabilnosti. Taj je kriterij ispunjen ukoliko su koeficijenti u izrazima za  $\vartheta_{i,k}$  i  $\vartheta_{i,k+1}$  jednaki ili veći od nule.

Potrebno je identificirati jednadžbu s najmanjim primarnim koeficijentom, jer je taj koeficijent relevantan za određivanje vremenskog koraka. Kad se odredi tu vrijednost, ona će zadovoljiti kriterij stabilnosti za sve ostale jednadžbe promatranog sustava.

Ako se promatra čista kondukcija, tada kriterij stabilnosti slijedi iz jednadžbe (13)

$$1 - 2M \geq 0 \quad (25)$$

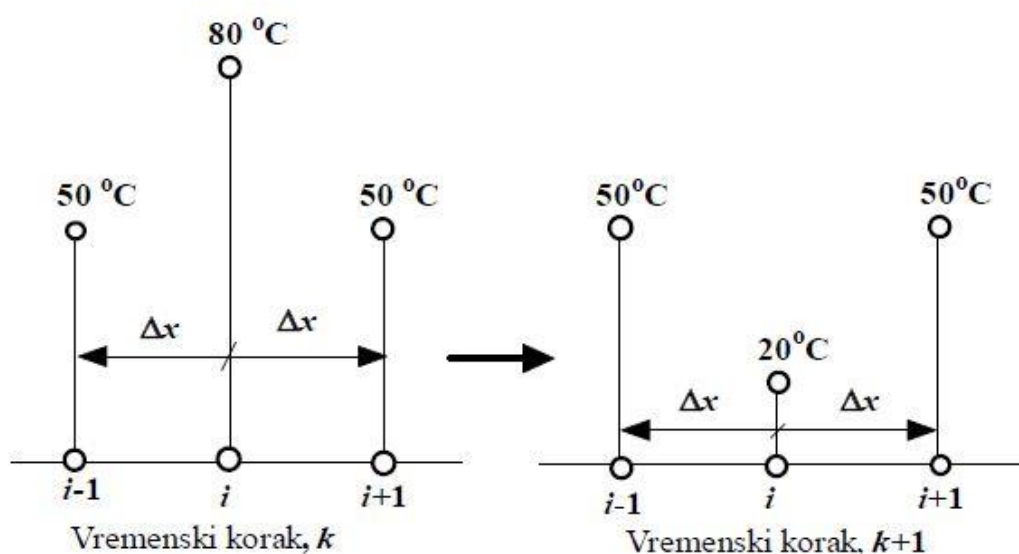
odnosno

$$M = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (26)$$

iz čega slijedi vrijednost vremenskog koraka  $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2a} \quad (27)$$

Radi lakšeg pojašnjenja pretpostavimo da su u trenutku  $k$  temperature  $\vartheta_{i-1,k} = \vartheta_{i+1,k} = 50^\circ\text{C}$  međusobno jednake, ali manje od temperature  $\vartheta_{i,k} = 80^\circ\text{C}$ . U sljedećem trenutku očekujemo temperaturu u čvoru  $i$  između ovih vrijednosti, ali ako se uzme vrijednost  $M \geq 0.5$  (npr.  $M = 1$ ) temperatura u čvoru  $i$  bit će niža od temperatura u susjednim čvorovima, slika 6, što će biti fizikalno nemoguće (II. zakon termodinamike). Zahtjev da nova temperatura čvora  $i$  ostane iznad vrijednosti temperatura u susjednim čvorovima, nužno zahtjeva da vrijednost  $M$  bude ispod 0,5.



Slika 6 Uz objašnjenje kriterija stabilnosti

Prethodno objašnjen kriterij stabilnosti eksplicitne metode diferencijalne jednadžbe odnosio se na čistu jednodimenzijsku kondukciju kroz ravnu stijenku. Ako se radi o rubnim uvjetima 3. vrste, tada se kriterij stabilnosti mora ispitati i za taj slučaj.

I u ovom slučaju svi koeficijenti iz jednadžbi (22) i (23) moraju biti pozitivni. Iz tog zahtjeva i jednadžbe (22) slijedi jednadžba

$$M \leq \frac{1}{2(1 + Bi_0^*)} \quad (28)$$

odakle slijedi da vremenski korak mora biti

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a \left(1 + \frac{\alpha_0 \Delta x}{\lambda}\right)} \quad (29)$$

Iz jednadžbe (23) slijedi sljedeći kriterij stabilnosti

$$M \leq \frac{1}{2(1 + Bi_{\delta}^*)} \quad (30)$$

iz kojeg se dobiva izraz za vremenski korak

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a \left(1 + \frac{\alpha_{\delta} \Delta x}{\lambda}\right)} \quad (31)$$

Usporedbom kriterija stabilnosti (26), (28) i (30) može se zaključiti da su zadnja dva restriktivnija tj. daju manje vrijednosti vremenskog koraka  $\Delta t$  nego u slučaju čiste kondukcije.

Sukladno zaključku proizlazi da će vrijednost vremenskog koraka  $\Delta t$  biti nužno vezana na jednadžbe (28) i (30). i za specificiranje vrijednosti uzima se onaj vremenski korak koji ispadne manji.

Za zadani zadatak i vrijednosti  $\Delta x = 0,01$  m,  $a = 1,36 * 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ ,  $\alpha = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ ,  $\lambda = 0,035 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$  dobiva se sljedeća vrijednost vremenskog koraka

$$\Delta t \leq \frac{(0,01)^2}{2 * 1,36 * 10^{-6} * \left(1 + \frac{20 * 0,01}{0,035}\right)} \leq 5,47 \text{ s} \quad (32)$$

Odabire se vremenski korak  $\Delta t = 5$  s koji zadovoljava kriterij stabilnosti.

## 2.4. FTCS (Forward Time, Centered Space) shema

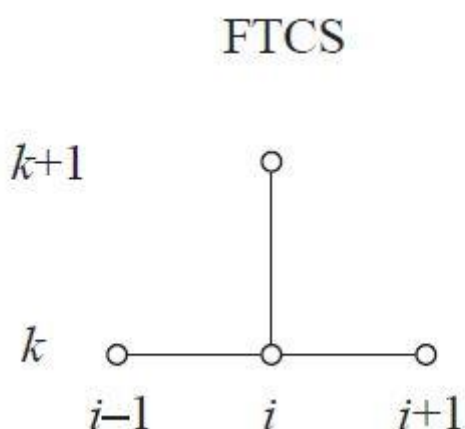
Jednadžbe (13), (22) i (23) predstavljaju FTCS aproksimaciju toplinske jednadžbe.

FTCS shema je vrlo jednostavna za implementaciju zato što vrijednosti temperatura  $\vartheta_{i,k+1}$  mogu biti izračunate u sljedećem vremenskom trenutku neovisno jedna o drugoj. Za slučaj čiste kondukcije rješenje je sadržano u dvije petlje: vanjska petlja po vremenskim intervalima, i unutarnja petlja po svim unutrašnjim čvorovima. Dio koda na slici 7 pokazuje jednostavnost implementacije FTCS sheme.

```
% --- Definiranje konstanti i inicijalnih uvjeta
L = ... % duljina domene u x smjeru
tmax = ... % konačno vrijeme
nx = ... % broj čvorova u x smjeru
nt = ... % broj vremenskih koraka
dx = L/(nx-1);
dt = tmax/(nt-1);
r = alpha*dt/dx^2; r2 = 1 - 2*r;
% --- Petlja po vremenu
t = 0
u = ... % inicijalni uvjet
for m=1:nt
    uold = u; % priprema za sljedeći korak
    t = t + dt;
    for i=2:nx-1
        u(i) = r*uold(i-1) + r2*uold(i) + r*uold(i+1);
    end
end
```

Slika 7 Isječak koda za implementaciju FTCS sheme u MATLABU

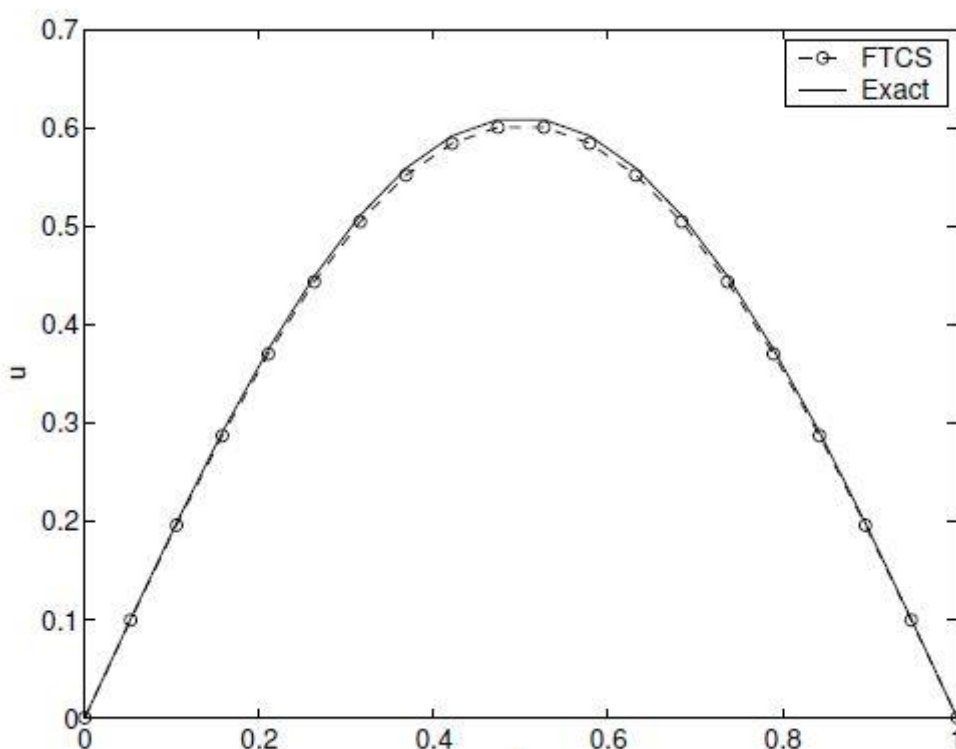
Jednadžba (13) može se predočiti "računalnom molekulom" prikazanom na slici 8



Slika 8 "Računalna molekula" toplinske jednadžbe

Važno je uočiti da u FTCS shemi temperatura  $\vartheta_{i,k+1}$  ne ovisi o temperaturama  $\vartheta_{i-1,k+1}$  i  $\vartheta_{i+1,k+1}$ .

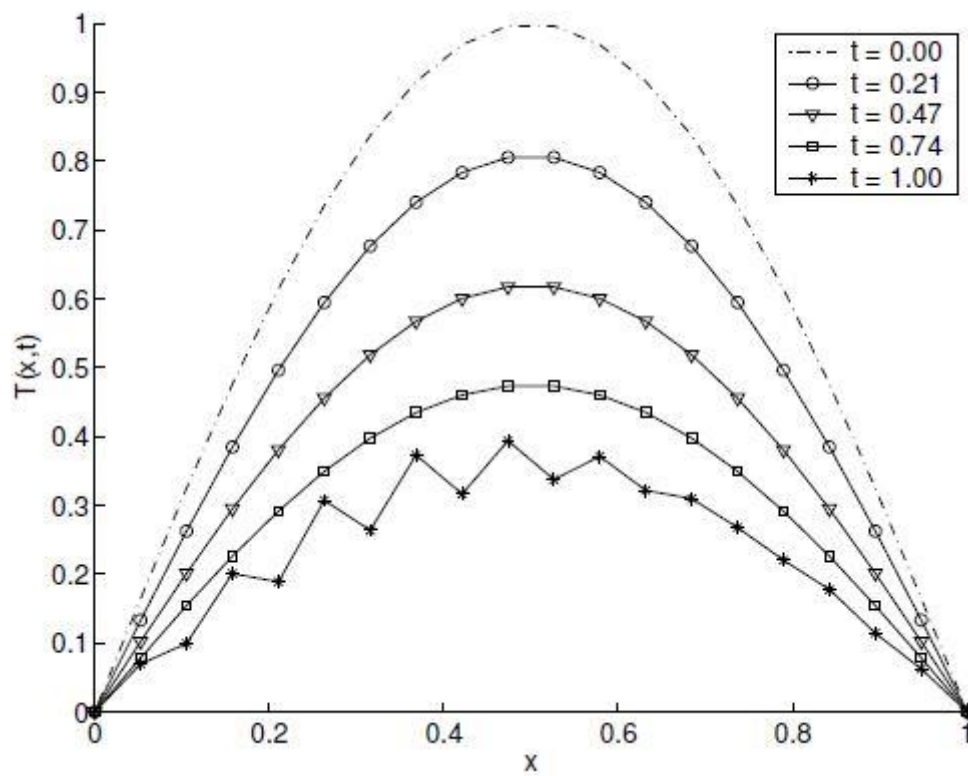
Što se tiče stabilnosti ove metode, vrijede kriteriji stabilnosti koji su ranije navedeni u ovom radu. Na slici 9 prikazan je primjer dobivenog temperaturnog profila za čistu kondukciju u ravnoj stijenci te koliko se taj profil razlikuje od onog dobivenog egzaktnim rješenjem.



Slika 9 FTCS rješenje u trenutku  $t=0,5$  za  $M=2$

Izgleda da je rješenje stabilno bez obzira što nije poštovan uvjet (25), no to je samo zbog toga što simulacija nije trajala dovoljno vremena da nestabilnost postane vidljiva kao što je to slučaj na slici 10.





Slika 10 FTCS rješenje u  $t=1$  za  $M=2$  (izražena nestabilnost)

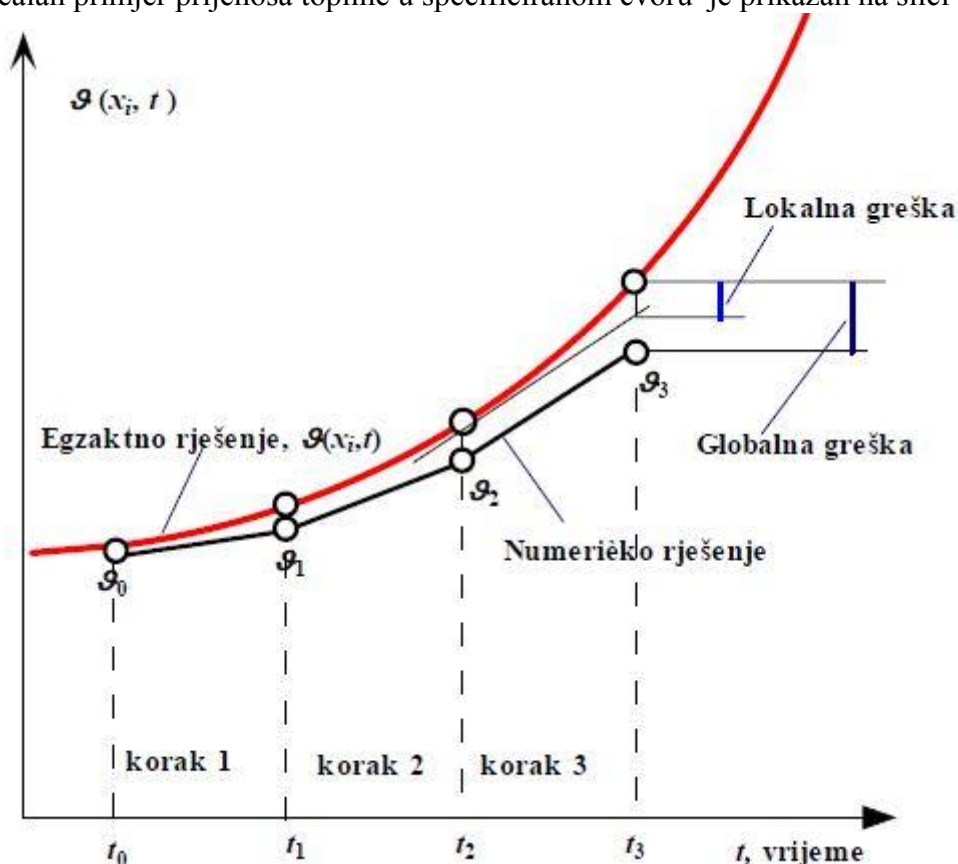
### 3. ANALIZA I KONTROLA NUMERIČKE POGREŠKE

Ako se na nekom modelu provede usporedba između egzaktnog rješenja i onog dobivenog numeričkom metodom, može se uočiti da numeričko rješenje može biti blizu egzaktnog rješenja, ali i ne mora. Ta razlika posljedica je pogreške koja je uvedena u numerički način proračuna, a ima dva uzroka:

- Pogreška diskretizacije – uzrokovana aproksimacijama korištenim u formulaciji numeričke metode
- Pogreška zaokruživanja – ishodište ima u samom računalu, budući da računalo ima konačan broj znamenaka, pa ono samo obavlja proces zaokruživanja

#### 3.1. Diskretizacijska pogreška

Diskretizacijska pogreška je uvedena u numeričke metode zbog zamjene derivacija diferencijama, ili u promatranom slučaju temperature između dva susjedna čvora povezane su pravcem. Realan primjer prijenosa topline u specificiranom čvoru je prikazan na slici 11.



Slika 11 Lokalne i globalne pogreške MKD-a nakon trećeg vremenskog koraka

U početnom trenutku rješenja se ne razlikuju no povećanjem vremena  $t$  numeričko se rješenje razlikuje od egzaktnog. Razlika između ova dva rješenja u vremenu  $t=\Delta t$  javlja se samo zbog aproksimacije u prvom vremenskom koraku, i takvu se pogrešku naziva *lokalnom diskretizacijskom pogreškom*. Povećanjem vremenskih koraka javlja se akumuliranje lokalne diskretizacijske pogreške pa se ukupna pogreška diskretizacije naziva *globalnom diskretizacijskom pogreškom*.

### **3.2. Pogreška zaokruživanja**

Računalo koristi konačan broj znamenaka za prikaz broja, i za većinu taj broj iznosi 7 za običnu preciznost, a 15 za dvostruku preciznost što iziskuje više memorije i više vremena za računanje. Osobito je velika pogreška zaokruživanja ako se radi o oduzimanju dva bliska decimalna broja, npr.  $a=44444,12345$  i  $b=44444,12032$ . Ako računalo radi u običnoj preciznosti, zaokružiti će oba broja na  $a=b=44444,12$  i dati će rezultat  $a-b=0$ , dok je stvarni rezultat  $a-b=0,00313$ .

Ova pogreška naziva se pogreškom zaokruživanja. Ta je pogreška proporcionalna broju proračuna koje računalo izvede tokom rješavanja promatranog problema. U problemima proračuna kod kojih se koristi metoda konačnih diferencija taj se broj proračuna povećava smanjenjem vremenskog ili prostornog koraka.

Kako se globalna pogreška smanjuje smanjenjem vremenskog ili prostornog koraka diskretizacije, a pogreška zaokruživanja time se povećava, mora postojati optimalna veličina vremensko-prostornog koraka za koju se dobije minimalnu ukupnu pogrešku numeričkog proračuna, što je domena iskusnih programerskih inženjera.

## 4. PRIKAZ I INTERPRETACIJA PRORAČUNA

### 4.1. Proračun u slučaju kada je izolacija s vanjske strane

Prikazani model i rješenje nestacionarnog temperaturnog polja u ravnoj stijenci dobiveno je korštenjem koda u Matlabu.

U ovom slučaju promatrana je ravna stijenska debljine 400 mm koja se sastoji od:

- a) žbuke debljine 50 mm  $\left(\lambda = 0,814 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \rho = 1800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 737 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right)$
- b) cigle debljine 250 mm  $\left(\lambda = 0,558 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \rho = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 1047 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right)$
- c) izolacije debljine 100 mm  $\left(\lambda = 0,035 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \rho = 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 1300 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right)$

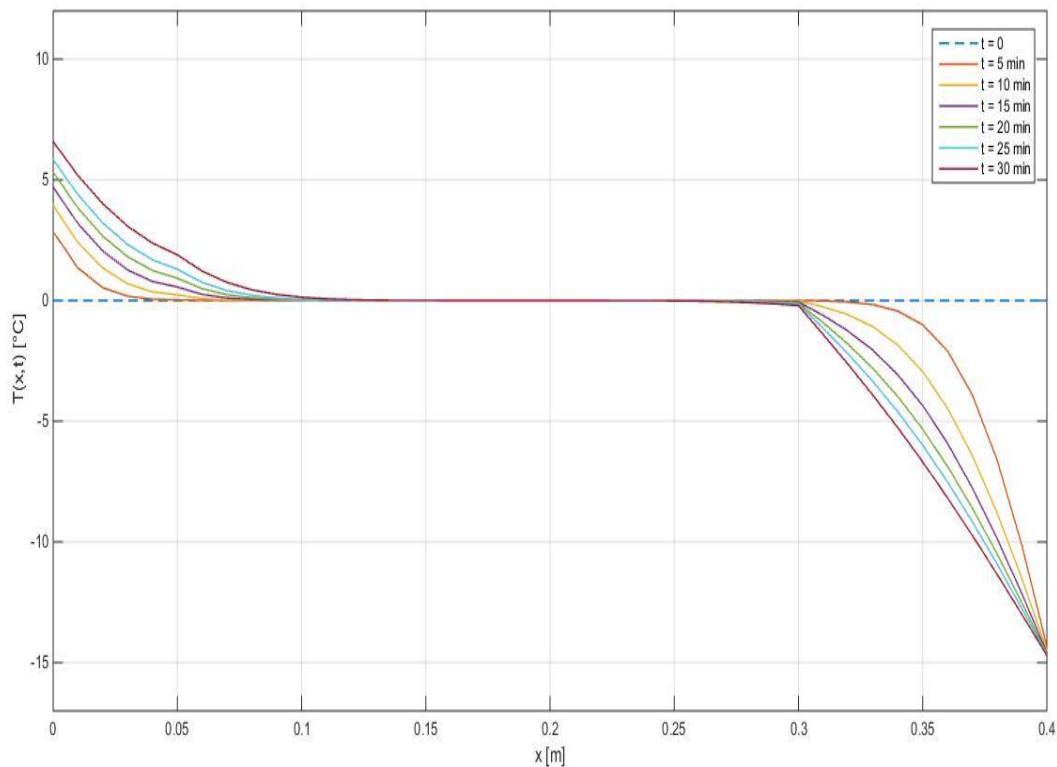
Stijenska je podjeljena na 40 segmenata, prostorni korak  $\Delta x$  iznosi 10 mm, broj čvorova u stijenci je 41. Zadana je i početna temperaturna distribucija  $(x, t = 0) = 0^\circ\text{C}$  što znači da je to početna temperatura u svim čvorovima. Zadani su rubni uvjeti 3. vrste na obje granične površine zida uz zadane vrijednosti koeficijenata prijelaza topline  $\alpha_u = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$  i  $\alpha_v = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ .

Uz to zadana je i temperatura na kojoj je potrebno održavati unutrašnjost prostorije  $\vartheta_u = 22^\circ\text{C}$  i temperatura vanjske okoline  $\vartheta_v = -15^\circ\text{C}$ .

U ovom se slučaju radi o realnom problemu, naime ovaj zid predstavlja realni dio građevinskog objekta za stanovanje ili neku drugu namjenu u kojem je potrebno održavati unutrašnju temperaturu na određenoj vrijednosti. U sklopu rješavanja ovog problema potrebno je pronaći, prema odabranom kriteriju stabilnosti, vrijeme potrebno da se približimo stacionarnom stanju.

Trenutak postizanja stanja dovoljno bliskog stacionarnom stanju kontroliran je pomoću trenutne vrijednosti gustoće toplinskog toka i gustoće toplinskog toka u stacionarnom stanju, pri čemu je  $\varepsilon \leq 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , odabran je ovaj uvjet pošto je na slikama 14 i 17 vidljivo da se linije gustoća toplinskih tokova asimptotski približavaju vrijednosti od  $10,54 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ .

Proračun je za 1. i 41. čvor rađen prema jednadžbama (22) i (23), a za sve ostale čvorove prema jednadžbi (13). Za čvorove koji se nalaze na spoju dva različita materijala postavljen je dodatni uvjet o jednakosti temperatura u tom čvoru,  $T_L = T_D$ .



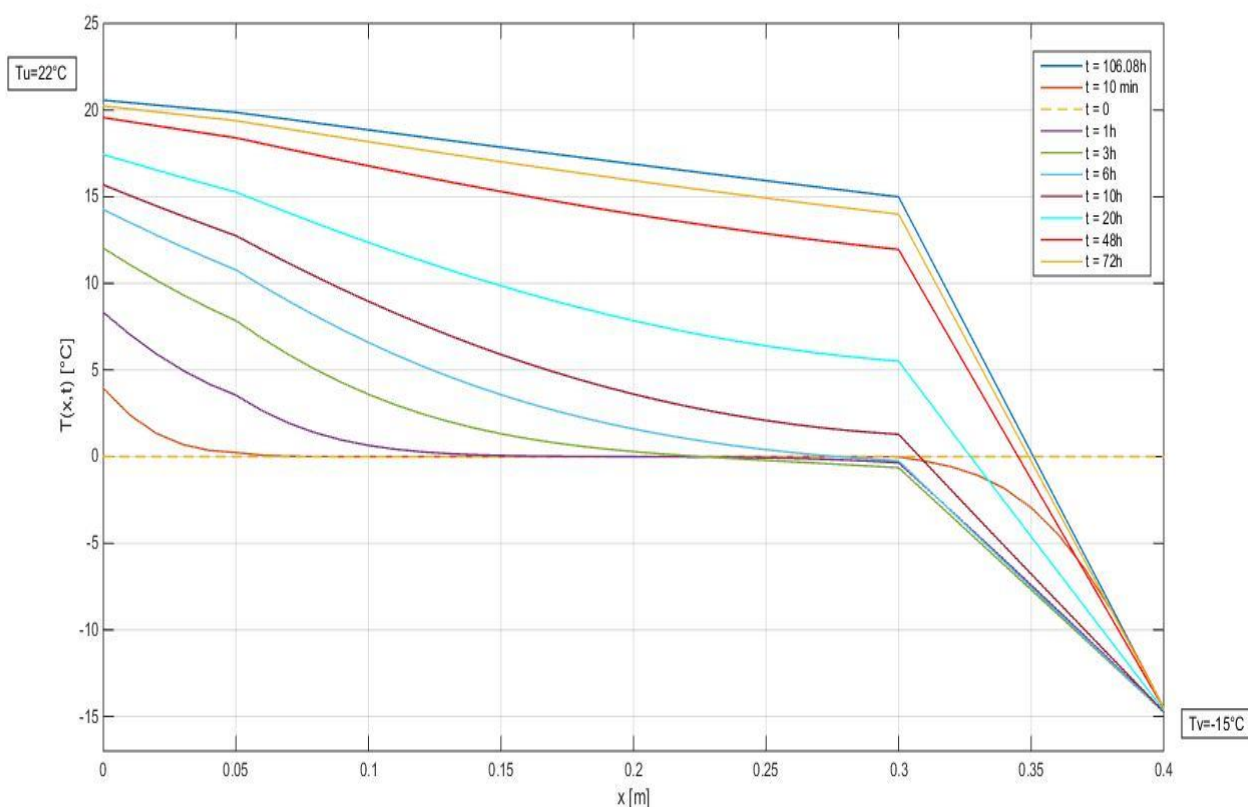
**Slika 12 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci nakon 30 min u slučaju kad je izolacija s vanjske strane**

Dijagram na slici 12 prikazuje nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci za prvih 30 minuta simulacije. Iz dijagrama je jasno vidljivo da je u početku puno brža promjena temperature u zadnjem čvoru naspram one u prvom čvoru. Razlog tome leži u razlici vrijednosti temperaturne provodnosti žbuke i izolacije. Vrijednost temperaturne provodnosti žbuke iznosi  $a_1 = 6,136 * 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ , a izolacije  $a_3 = 1,346 * 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ . Razmotri li se fizikalna interpretacija temperaturne provodnosti, što je moguće iz matematičkog zapisa koji glasi  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ , koje govori o mogućnosti materijala da provede toplinsku energiju relativno prema njegovoj mogućnosti da zadrži tu energiju, jasno proizlazi zaključak da izolacijski materijal korišten u ovom slučaju ima veću sposobnost akumuliranja toplinske energije naspram mogućnosti provođenja što ujedno i objašnjava zašto se temperatura u zadnjem čvoru tako brzo promjeni u odnosu na

temperaturu u prvom čvoru. Gustoća toplinskog toka koja dođe iz unutrašnjosti prostorije provodi se kroz žbuku puno brže nego kroz izolacijski materijal.

Drugi razlog je razlika u iznosima koeficijenta prijelaza topline,  $\alpha_v$  je više nego dvostruko veći od  $\alpha_u$ , što također ima utjecaj na ovu brzu promjenu temperature u zadnjem čvoru naspram one u prvom. Na prikazanom dijagramu jasno je vidljivo da je toplinski tok usmjeren prema van što je lako pojasniti s obzirom da je temperatura u prostoriji viša od inicijalne temperature, a inicijalna je većeg iznosa od temperature vanjske okoline. Isto tako iz dijagrama je vidljivo da većina središnjeg dijela stjenke u prvih 30 minuta zadržava temperaturu od  $0^\circ\text{C}$  tj. taj dio se još nije počeo progrijavati.

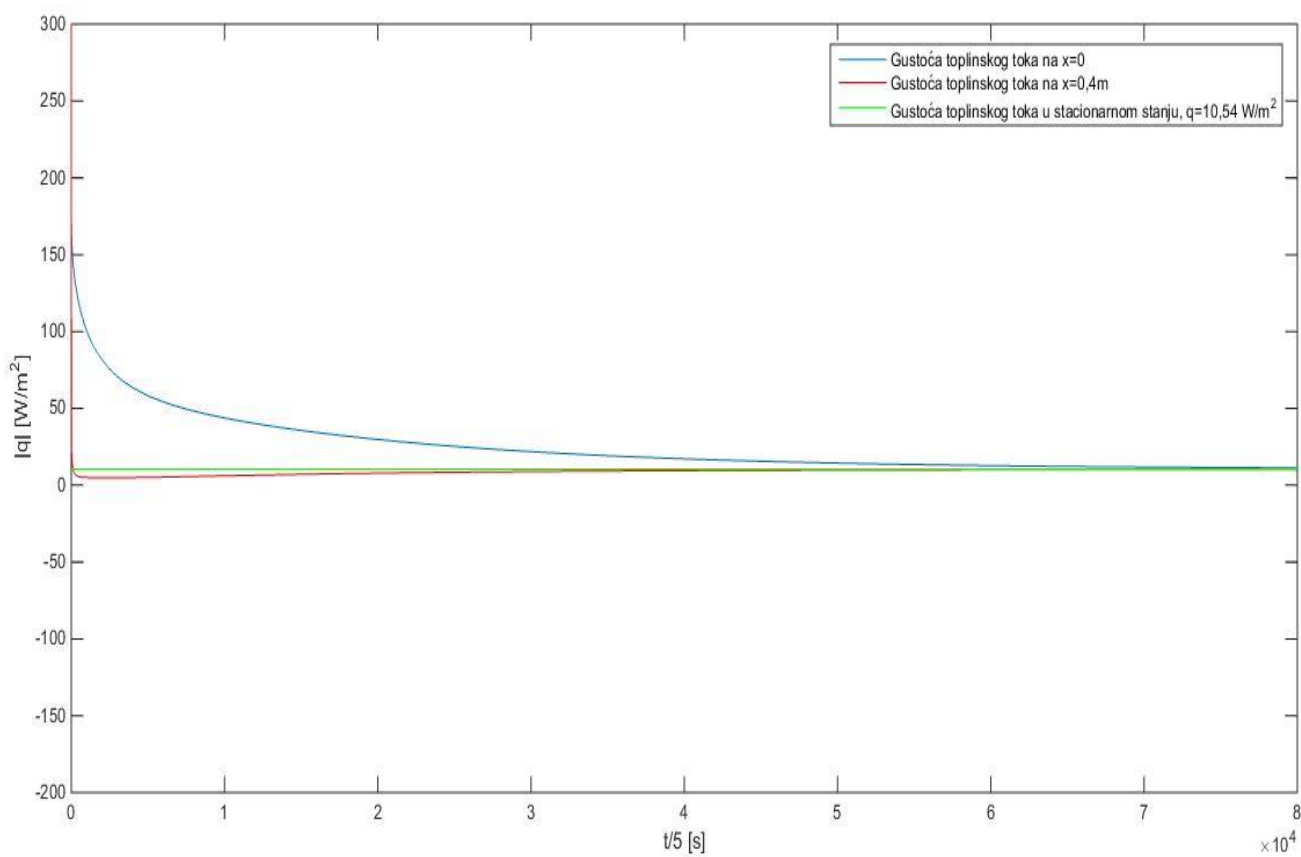
Prema gore navedenom kriteriju stacionarnosti, u ovom slučaju stacionarnost se postiže nakon 106,08 h što je prikazano na slici 13.



**Slika 13 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stjenici s rubnim uvjetima 3. vrste (slučaj kada je izolacija s vanjske strane)**

Iz dijagrama na slici 13 jasno je vidljivo da je i nakon postizanja stacionarnog stanja gustoća toplinskog toka usmjerena od lijevog prema desnom rubu. Vidi se i da se stacionarno stanje postiže nakon relativno dugo vremena (106,08 h) što je posljedica male temperaturne provodnosti žbuke, opeke, a posebice izolacijskog materijala za koji je u ovom slučaju uzet polistiren (stiropor).

Sa vanjske i unutarnje strane stijenke se radi o izmjeni topline slobodnom konvekcijom. Mali iznosi koeficijenata prijelaza topline sa vanjske i pogotovo unutarnje stranje isto tako imaju utjecaj na relativno dug vremenski period postizanja stacionarnog stanja u promatranom slučaju ovog problema.



**Slika 14** Trenutne vrijednosti gustoće toplinskih tokova na rubnim površinama za slučaj kad je izolacija s vanjske strane zida

Na slici 14 prikazane su gustoće toplinskih tokova na rubnim površinama zida. Plava linija označava trenutnu gustoću toplinskog toka na  $x = 0$ , a crvena linija označava trenutnu gustoću toplinskog toka na  $x = \delta$ .

Jasno je vidljivo da su razlike toplinskih tokova najveće na početku, a kako vrijeme procesa širenja topline prolazi te razlike su sve manje izražene te se linije asimptotski približavaju stacionarnom stanju. U ovom slučaju u početku je veća apsolutna vrijednost gustoće toplinskog toka na rubnoj plohi  $x = 0$ . To je posljedica relativno dobre provodnosti žbuke naspram izolacijskog materijala na vanjskoj strani koji sprječava da veći iznos gustoće toplinskog toka bude predan okolišu.

#### 4.2. Proračun u slučaju kada je izolacija s unutarnje strane

U ovom slučaju promatrana je ravna stijenka debljine 400 mm koja se sastoji od:

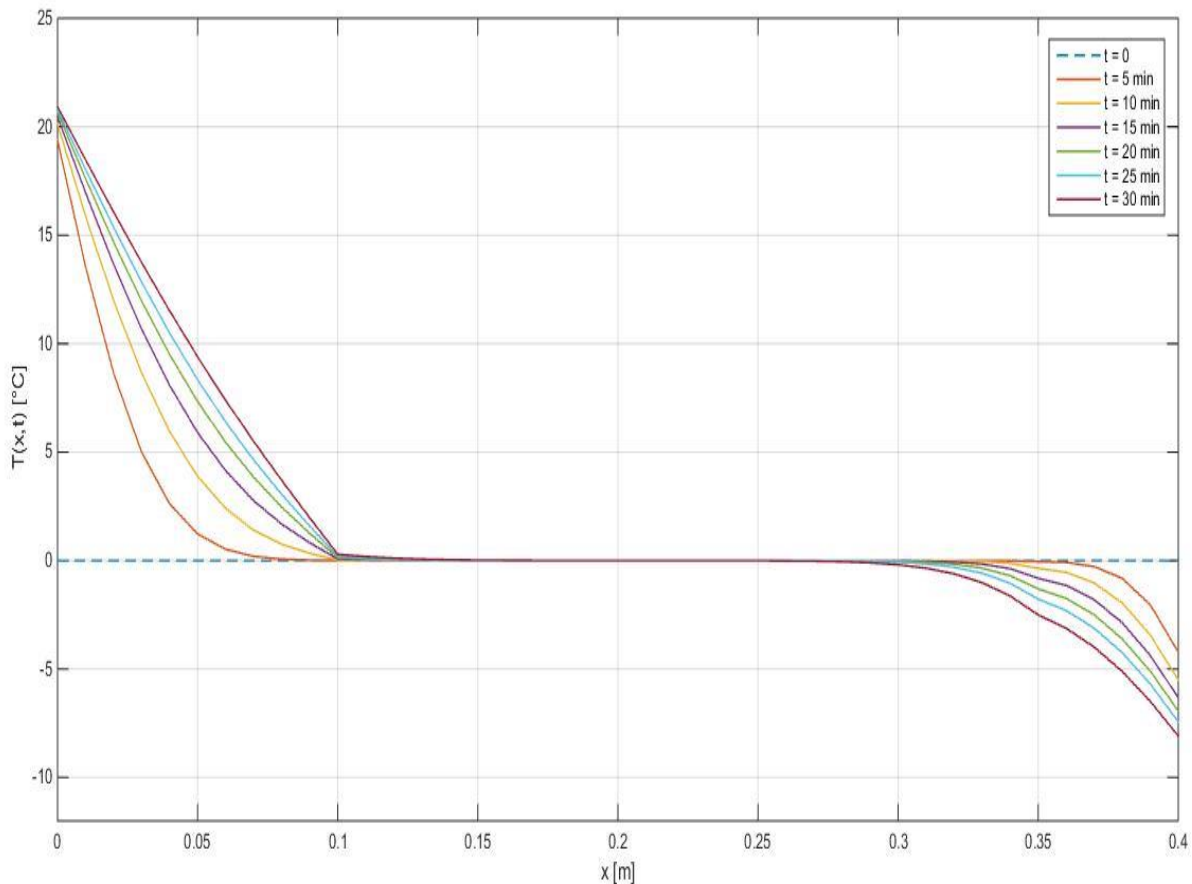
- a) izolacije debljine 100 mm  $\left(\lambda = 0,035 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \rho = 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 1300 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right)$
- b) cigle debljine 250 mm  $\left(\lambda = 0,558 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \rho = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 1047 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right)$
- c) žbuke debljine 50 mm  $\left(\lambda = 0,814 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \rho = 1800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 737 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right)$

Stijenka je podjeljena na 40 segmenata, prostorni korak  $\Delta x$  iznosi 10 mm, broj čvorova u stijenci je 41. Zadana je i početna temperaturna distribucija  $(x, t = 0) = 0^\circ\text{C}$  što znači da je to početna temperatura u svim čvorovima. Zadani su rubni uvjeti 3. vrste na obje granične površine zida uz zadane vrijednosti koeficijenata prijelaza topline  $\alpha_u = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$  i  $\alpha_v = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ .

Praktički svi podaci su isti, jedina razlika je u razmješčaju slojeva u stijenci. U ovom slučaju izolacija se nalazi s unutarnje strane zida, a žbuka s vanjske strane.

Dijagram na slici 15 prikazuje nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci za prvih 30 minuta simulacije za slučaj kada se izolacija nalazi s unutrašnje strane zida. Iz dijagrama je jasno vidljivo da je, suprotno od prethodnog slučaja, u početku puno brža promjena temperature u prvom čvoru naspram one u zadnjem čvoru. Razlika leži u različitim vrijednostima





**Slika 15 Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci nakon 30 min u slučaju kad je izolacija s unutarnje strane**

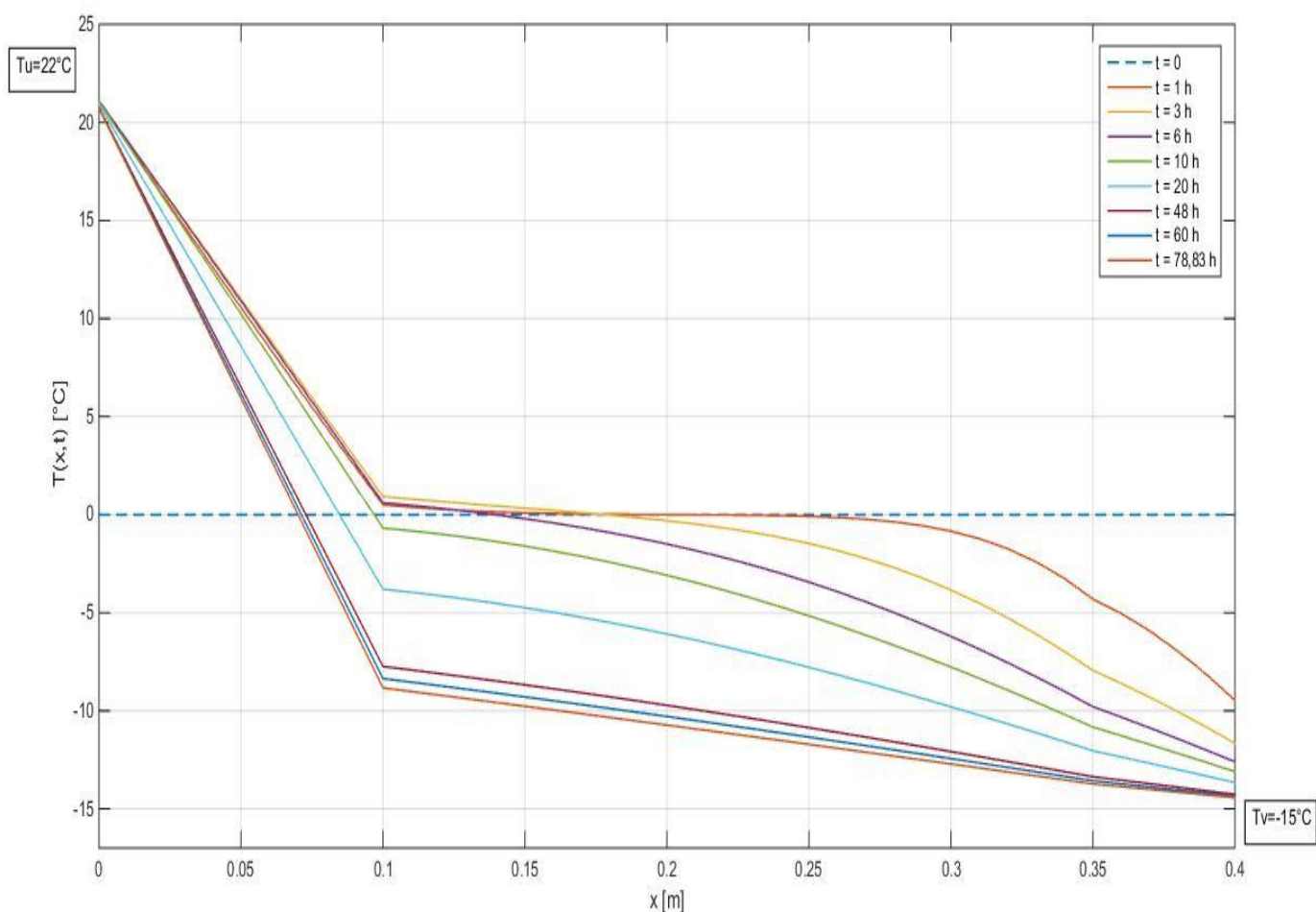
temperaturnih provodnosti izolacije i žbuke. Za polistiren ona iznosi  $a_1 = 1,346 * 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ , a za žbuku  $a_3 = 6,1366 * 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ .

Slično kao i nakon razmatranja u prvom slučaju jasno proizlazi zaključak da izolacijski materijal ima malu sposobnost akumuliranja toplinske energije, a isto tako i mogućnost provođenja što ujedno i objašnjava zašto se temperatura u prvom čvoru tako brzo promjeni u odnosu na temperaturu u zadnjem čvoru. Isto tako iz dijagrama je vidljivo da u većem dijelu središnjeg sloja nema značajne promjene temperature od inicijalne, ili je uopće nema.

Isto tako može se zamjetiti da je gustoća toplinskog toka od početka procesa usmjerena od lijeve prema desnoj plohi. Razlog leži u tome što je inicijalna temperatura niža od temperature unutar prostorije, ali je viša od temperature s vanjske strane zida tako da lijevi dio stijenke od početka predaje toplinu okolišu koji je na nižoj temperaturi.

Trenutak postizanja stanja dovoljno bliskog stacionarnom stanju kontroliran je pomoću trenutne vrijednosti gustoće toplinskog toka i gustoće toplinskog toka u stacionarnom stanju, pri čemu je  $\varepsilon \leq 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , kao i u prethodnom slučaju.

Prema navedenom kriteriju stacionarnosti, u ovom slučaju stacionarnost se postiže nakon 78,83 h što je prikazano na slici 16.

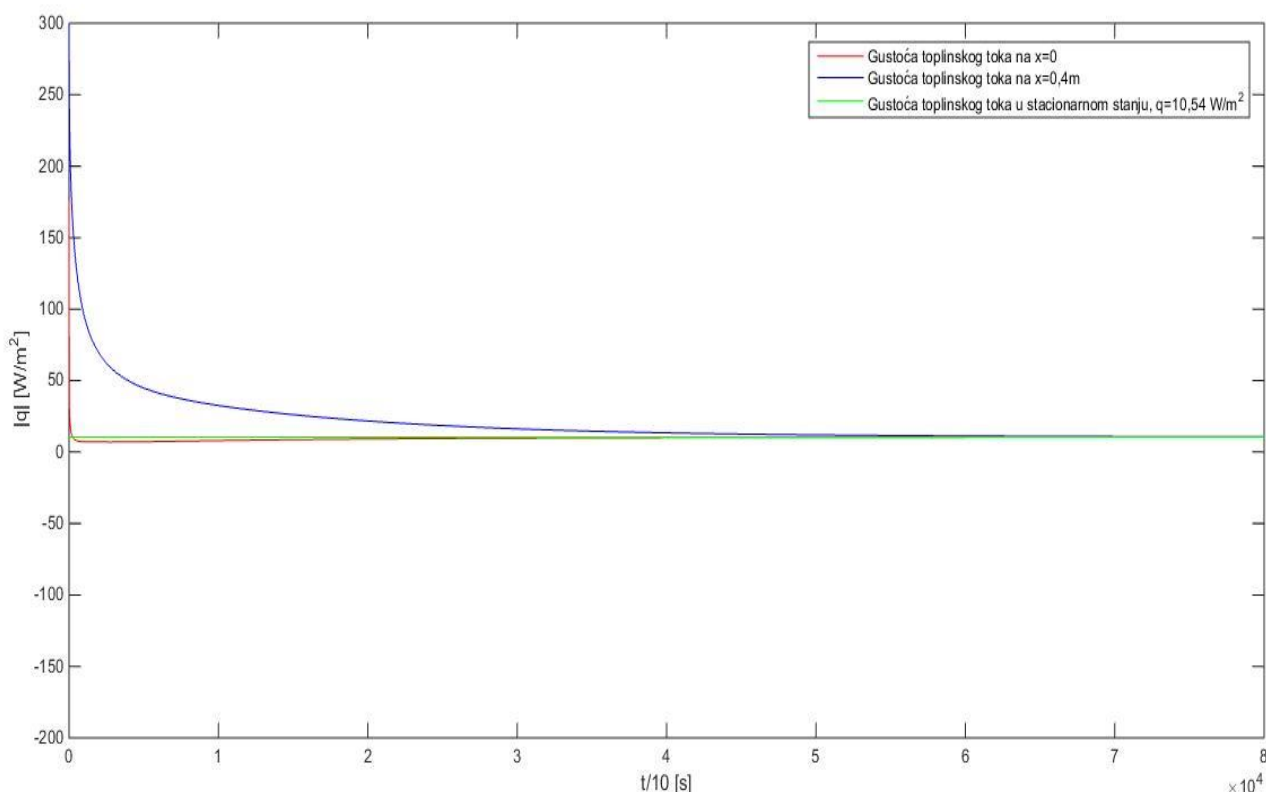


**Slika 16** Nestacionarno temperaturno polje u ravnoj stjenici s rubnim uvjetima 3. vrste (slučaj kada je izolacija s unutarnje strane)

Iz dijagrama na slici 16 slijede slični zaključci kao i u prvom slučaju. Jasno je vidljivo da je i nakon postizanja stacionarnog stanja gustoća toplinskog toka usmjerena od lijevog prema desnom rubu.

Vidi se i da se stacionarno stanje postiže nakon relativno dugo vremena (78,83 h) što je posljedica male temperaturne provodnosti žbuke, opeke, a posebice izolacijskog materijala polistirena. Sa vanjske i unutarnje strane stijenke možemo reći da se radi o izmjeni topline slobodnom konvekcijom. Mali iznosi koeficijenata prijelaza topline sa vanjske i pogotovo unutarnje stranje isto tako imaju utjecaj na relativno dug vremenski period postizanja stacionarnog stanja u promatranom slučaju ovog problema.

Ako uzmemo u obzir i temperaturnu razliku između temperature u unutrašnjosti prostorije i vanjske temperature koja iznosi  $\Delta\theta = 37^{\circ}\text{C}$  uz navedene toplinske otpore i male koeficijente prijelaza topline postaje sasvim jasno da je potrebno toliko vremena da se uspostavi stacionarno



stanje.

**Slika 17** Trenutne vrijednosti gustoće toplinskih tokova na rubnim površinama za slučaj kad je izolacija s unutarnje strane zida

Na slici 17 prikazane su trenutne vrijednosti gustoće toplinskog toka na rubnim plohama. Iz dijagrama je vidljivo da su najveće promjene na početku ovog procesa, a nakon određenog vremena linije asimptotski teže stacionarnom stanju. U ovom slučaju na početku je veća apsolutna vrijednost gustoće toplinskog toka na rubnoj plohi  $x = \delta$ , razlog tome je taj što se sada puno više toka predaje okolišu tj. zid se hladi pošto je u ovom slučaju s vanjske strane žbuka koja ne djeluje kao toplinski izolator. Kao i u prethodnom slučaju, ako se ne gleda apsolutnu vrijednost, predznak gustoće toplinskog toka na  $x = 0$  je pozitivan, a na  $x = \delta$  negativan.

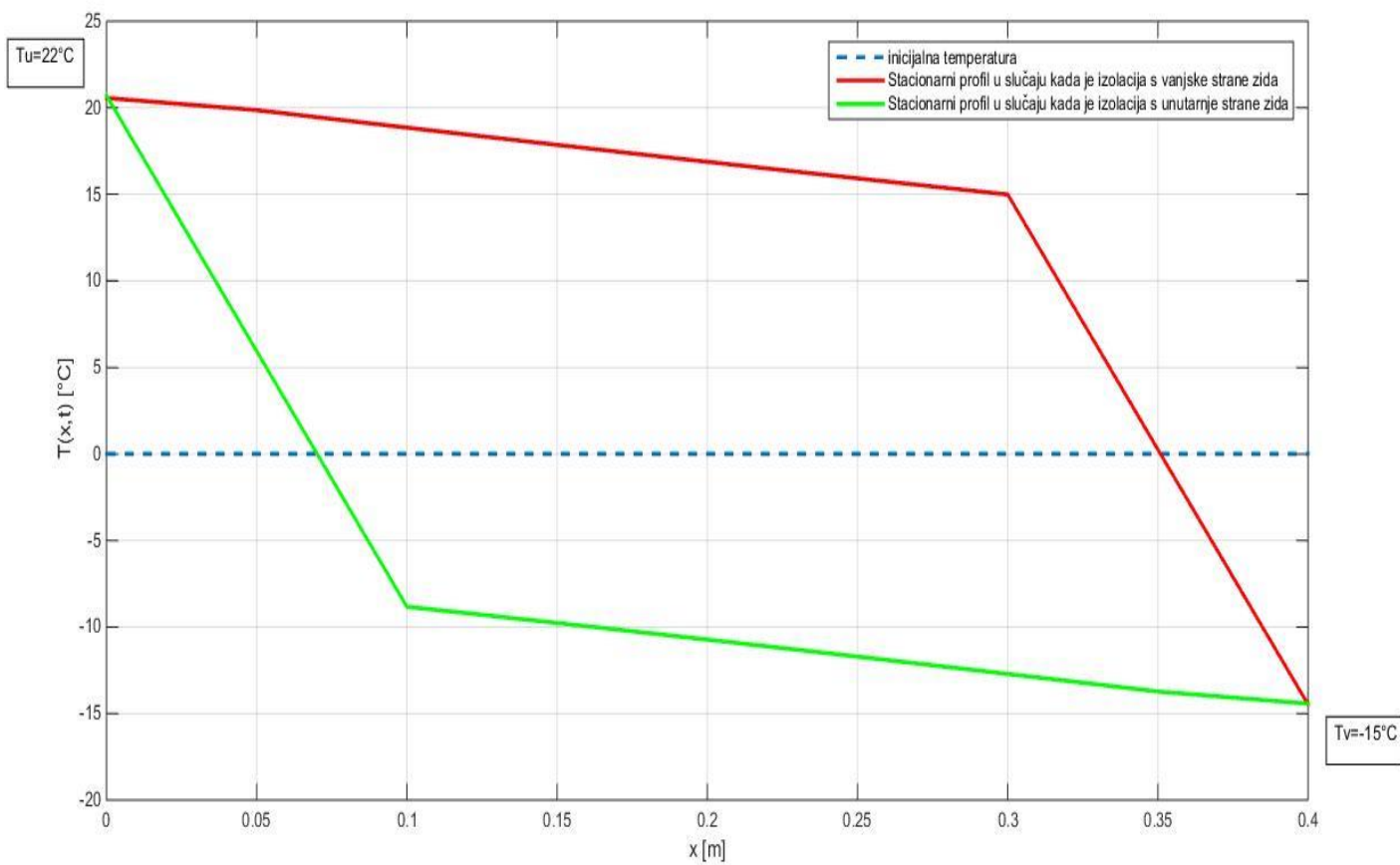
### **4.3. Razlika u vremenu postizanja stacionarnosti**

U ova dva primjera proračuna došlo se do različitih vremena postizanja stacionarnosti. Jedino što je drugačije u ta dva slučaja je položaj sloja izolacije i žbuke. U prvom slučaju izolacija se nalazila s vanjske, a žbuka s unutarnje strane zida. U drugom slučaju izolacija je bila s unutarnje strane zida, a žbuka s vanjske strane prema okolišu. Iz ovoga možemo zaključiti da je taj razmještaj razlog zašto je stacionarnost postignuta u različito vrijeme za svaki od slučajeva.

Proračunom za prvi slučaj dobiveno je vrijeme postizanja stacionarnosti  $t = 106,08$  h, a proračunom za drugi slučaj  $t = 78,83$  h.

Iz ovih podatak dobiveno je da se stacionarnost u drugom slučaju, kada je izolacija s unutarnje strane postigne za približno 27,25 h ranije nego u slučaju izolacije s vanjske strane zida.

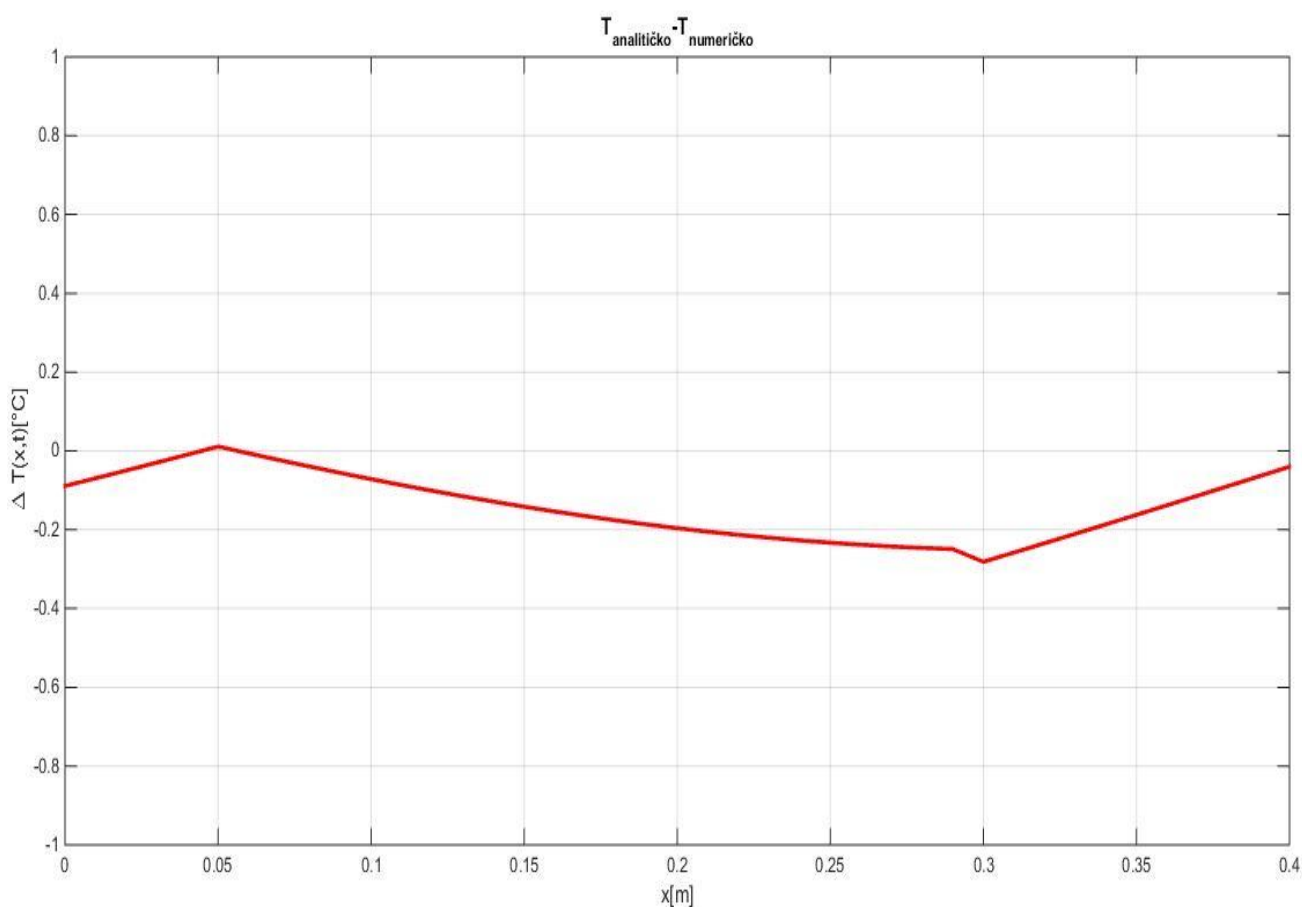
Razlog leži u tome što veoma hladna okolina brže ohladi zid u slučaju kad je izolacija s unutarnje strane. Prema temperaturnom profilu u stacionarnom stanju, slika 18, vidi se da su temperature u čvorovima niže od onih koje su postignute u stacionarnom stanju za slučaj kada je izolacija s vanjske strane, što ujedno sugerira na činjenicu da u drugom slučaju praktički nema akumulirane topline u zidu. Kada je izolacija s unutarnje strane zida, gustoća toplinskog toka iz prostorije teže prolazi prema drugim slojevima u zidu tj. prostorija se prije zagrije i lakše ju je održavati na potrebnoj temperaturi.



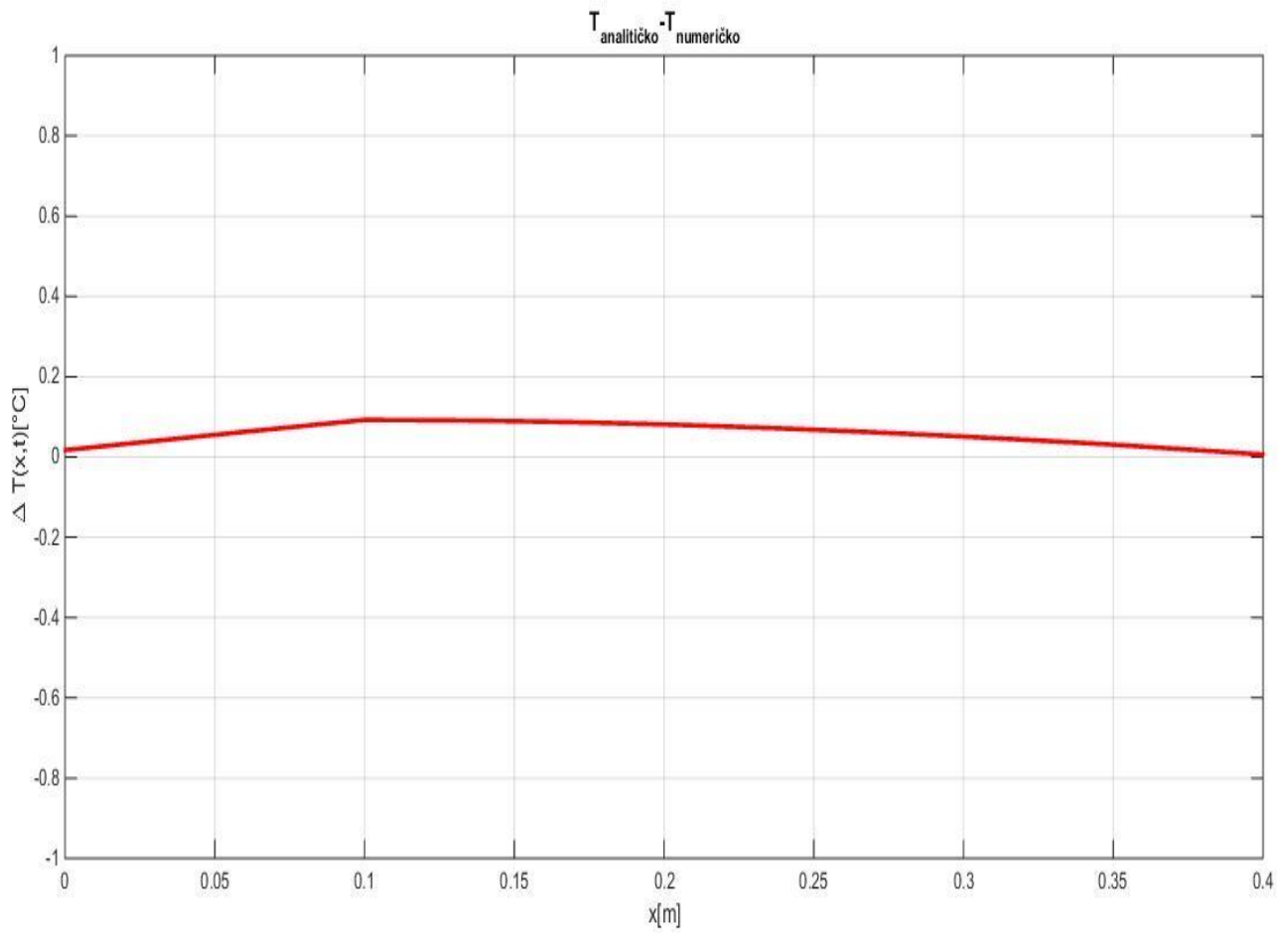
Slika 18 Temperaturni profili u stacionarnom stanju za oba slučaja

#### 4.4. Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja

Na slici 19 i slici 20 prikazani su grafovi koji pokazuju odstupanja numeričkog rješenja, za dobivene stacionarne profile temperatura, od analitičkog rješenja. Iz dijagrama je jasno vidljivo da su razlike minimalne, ta da ovaj numerički model rješavanja nestacionarnog problema toplinske jednadžbe daje zadovoljavajuće rezultate.



**Slika 19** Usporedba rezultata numeričkog i analitičkog rješenja stacionarnog profila za slučaj kad je izolacija s vanjske strane



**Slika 20** Usporedba rezultata numeričkog i analitičkog rješenja stacionarnog profila za slučaj kad je izolacija s vanjske strane

## 5. ZAKLJUČAK

U radu su prikazani diskretizacijski oblici parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline u ravnoj stijenci, kao i diskretizacijski oblici rubnih uvjeta 3. vrste dobiveni korištenjem metode konačnih diferencija. Prikazana je postavka problema na diferencijskom obliku uz dodatno pojašnjenje uvjeta numeričke stabilnosti. Za analizu su bila odabrana dva slučaja, koja su se sastojala od istih materijala drugačijeg rasporeda u stijenci, sa zadanim rubnim i početnim uvjetom. Približavanje nestacionarnog polja stacionarnom kontroliralo se temperaturnim kriterijem.

Iz rada je vidljivo drugačije ponašanje i temperaturni profili za ova dva slučaja. Za rješavanje problema nestacionarnog temperaturnog polja korišten je matlabov kod, a stijenka je bila podjeljena na 40 segmenata i sadržavala je ukupno 41 čvor. Za vremenski korak izabran je

$\Delta t = 5 \text{ s}$  koji zadovoljava uvjet numeričke stabilnosti. Numerička rješenja približno stacionarnog temperaturnog polja dosta dobro opisuju ovaj problem u odnosu na analitička rješenja.

Također u radu je vidljiva razlika u vremenu postizanja stacionarnosti za slučaj kada je izolacija s vanjske ili unutarnje strane. Razlog tome pronađen je u različitim vrijednostima temperaturne provodnosti (omjeru sposobnosti provođenja i akumulacije topline) promatranih materijala te je iz dobivenih rezultata da se približno stacionarno temperaturno polje postigne ranije za slučaj kad je izolacija s unutarnje strane promatrane stijenke.

U oba slučaja bilo je potrebno relativno dugo vremena da se postigne približno stacionarno stanje, razlozi tome su: male vrijednosti temperaturne provodnosti sva tri materijala i male vrijednosti koeficijenta prijelaza topline s obje strane ravne stijenke.

Ovaj slučaj ujedno je i realan primjer problema smještaja razmještaja izolacije u stambenim i poslovnim zgradama te se iz navedenog razmatranja problema ujedno može zaključiti da je postavljanje izolacije s vanjske strane dobro zbog toga što sprječava toplinske gubitke te progrijani zid ujedno može grijati prostoriju nakon isključenja izvora topline unutar prostorije. Prednost postavljanja izolacije s unutarnje strane leži u činjenici da se puno prije postigne željena temperatura u prostoriji, bez da se griju zidovi.



**LITERATURA**

- [1] Galović, A.: Termodinamika II, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogranje, Ivana Lučića 5, Zagreb 2010.
- [2] Bošnjaković, F.: Nauka o toplini, Svezak I, II i III, Graphis, Zagreb, 2012.
- [3] Cengel, Y. A.: Heat transfer, A practical approach, Mc Graw - Hill, Boston, 2003.
- [4] Halasz B., Galović, A., Boras I.: Toplinske tablice, Fakultet strojarstva i brodogranje, Ivana Lučića 5, Zagreb 2010.
- [5] Galović, A.: Diskretizacija parcijalne diferencijalne jednačbe nestacionarnog 1 - D modela provođenja topline, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje
- [6] Finite-Difference Approximations to the Heat Equation, Gerald W. Recktenwald, March 6, 2011

## **PRILOZI**

- I. CD-R disc
- II. izolacijaV.m
- III. quV.m
- IV. stac\_q\_v.m
- V. T\_vani\_greska.m
- VI. izolacijaU.m
- VII. quU.m
- VIII. stac\_q\_u.m
- IX. T\_unutra\_greska.m

**Prilog II**

## izolacijaV.m

```
% Kod za racunanje temperatura u cvorovima kada je izolacija s vanjske
% strane
```

```
clc
clear all
nx = 41;
nt = 80000;
dx = 0.01;
dt = 5;
tmax = 400000;
L = 0.4;
a1 = 6.136 * 10^(-7);
a2 = 4.441 * 10^(-7);
a3 = 1.346 * 10^(-6);
M1 = a1 * (dt/(dx^2));
M2 = a2 * (dt/(dx^2));
M3 = a3 * (dt/(dx^2));
Bi0 = 0.09828;
BiL = 5.7143;
Tu = 22;
Tv = -15;
lambda1 = 0.814;
lambda2 = 0.558;
lambda3 = 0.035;
ro1=1800; ro2=1200; ro3=20; c1=737; c2=1047; c3=1300;

% Stvaranje polja za pohranu podataka
x = linspace(0,L,nx)';
t = linspace(0,tmax,nt);
T = zeros(nx,nt);

% Vremenska petlja /FTCS shema/
for m=2:nt
    for i=1
        T(i,m) = (1-2*M1*(1+Bi0))*T(i,m-1)+2*M1*T(i+1,m-1)+2*M1*Bi0*Tu;
    end
    for i=2:5
        T(i,m) = M1*(T(i-1,m-1)+T(i+1,m-1))+(1-2*M1)*T(i,m-1);
    end
    for i=6
        T(i,m) = (T(i-1,m-1)*lambda1+T(i+1,m-
1)*lambda2)/(lambda1+lambda2);
    end
    for i=7:30
        T(i,m) = M2*(T(i-1,m-1)+T(i+1,m-1))+(1-2*M2)*T(i,m-1);
    end
end
```

```

for i=31
    T(i,m) = (T(i-1,m-1)*lambda2+T(i+1,m-
1)*lambda3)/(lambda3+lambda2);
end
for i=32:nx-1
    T(i,m) = M3*(T(i-1,m-1)+T(i+1,m-1))+(1-2*M3)*T(i,m-1);
end
for i=41
    T(i,m) = (1-2*M3*(1+BiL))*T(i,m-1)+2*M3*(T(i-1,m-1)+BiL*Tv));
end

end

%plot(x,T(:,25000))
%hold on

%Plotanje
lineSymb = char('b-.', 'k-o', 'm-v', 'b-s', 'k*-', 'm-d', 'b-+', 'k-<', 'm-h');
nsymb = size(lineSymb,1);
% Plot T(x,t): svaki put drugacija krivulja i simbol
for j=1:719:length(t)
hold on
isymb = 1 + rem(j-1,nsymb); % ciklicki indeks za stil linije
plot(x,T(:,j),lineSymb(isymb,:));
% Kreiranje string matrice za legendu.
s = sprintf('t = %4.2f',t(j));
if j==1
legstr = s;
else
legstr = char(legstr,s);
end
end
%hold off
legend(legstr,2); xlabel('x[m]'); ylabel('T(x,t) [°C]');

figure
filename = 'animacija.gif'; % datoteka za spremanje slike
for j=1:59:length(t)
plot(x,T(:,j));
xlabel('Pozicija')
ylabel('Temperatura [°C]')
text(0.1,-6,sprintf('t = %1.2f s',t(j))); % tekstualna notacija
svakog koraka
frame = getframe(1);
im = frame2im(frame); %pretvori frame u sliku
[imind,cm] = rgb2ind(im,256);

% sliku pretvara u animirani gif.
if j == 1;
imwrite(imind,cm,filename,'gif', 'Loopcount',inf);
else
imwrite(imind,cm,filename,'gif','WriteMode','append');
end
end
end

```

**Prilog III****quV.m**

```
% Kod za računanje toplinskih tokova za slučaj kada je izolacija s
vanjske
% strane

clc
clear qu qv
alfau = 8;
alfav = 20;
m = 0;
n = 0;
p = 0;
lambda1 = 0.814;
lambda2 = 0.558;
lambda3 = 0.035;
dx1 = 0.05; dx2 = 0.25; dx3 = 0.1;
maxiter = nt;

% Gustoća toplinskog toka na x=0
for i = 1:maxiter
    m = m+1;
    qu(i) = (Tu-T(1,m))/((1/alfau));
end

% Gustoća toplinskog toka na x=0.4m
for i = 1:maxiter
    n = n+1;
    qv(i) = (T(41,n)-Tv)/((1/alfav));
end

% Gustoća toplinskog toka u stacionarnom stanju
for i = 1:maxiter
    q(i) = (Tu-
Tv)/((1/alfau)+(dx1/lambda1)+(dx2/lambda2)+(dx3/lambda3)+(1/alfav));
end

figure
plot(qu)
hold on
plot(qv)
plot(q)
```

**Prilog IV****stac\_q\_v.m**

```
%Određivanje vremena postizanja stacionarnosti kada je izolacija s  
%vanjske strane
```

```
clc  
clear err  
maxiter = nt;  
m=1;  
for iter = 1:maxiter  
    m = m+1;  
    err(iter) = abs(q(1,1) - qu(:,m));%Razlika između prethodna dva  
    if err(iter)< 1  
        break;  
    end  
end  
end  
pom = (iter*5)/3600;  
X=['Vrijeme postizanja stacionarnosti:', num2str(pom), 'h'];  
disp(X)
```

## Prilog V

### T\_vani\_greska.m

```
clc
x=0:0.01:0.4;
y=zeros(41,1);
T_vani=T(:,end);

% Računanje pogreške u čvorovima
for i=1:1:6
y(i,1)=20.68-((20.68-19.89)/0.05).*x(1,i);
end
for i=7:1:31
y(i,1)=19.89-((19.89-15.31)/0.25).(x(1,i)-0.05);
end
for i=31:1:41
y(i,1)=15.34-((15.31+14.473)/0.1).(x(1,i)-0.3);
end
Diff=T_vani-y;
plot(x,Diff,'r','LineWidth',2)
xlabel('x[m]'); ylabel('\Delta T(x,t)[°C]'); title('T_{analitičko}-
T_{numeričko}')
grid on
```

**Prilog VI****izolacijaU.m**

```
% Kod za računanje temperatura u èvorovima kada je izolacija s vanjske
% strane
```

```
clc
clear all
nx = 41;
nt = 80000;
dx = 0.01;
dt = 5;
tmax = 400000;
L = 0.4;
a1 = 1.346 * 10^(-6);
a2 = 4.441 * 10^(-7);
a3 = 6.136 * 10^(-7);
M1 = a1 * (dt/(dx^2));
M2 = a2 * (dt/(dx^2));
M3 = a3 * (dt/(dx^2));
Bi0 = 2.2857;
BiL = 0.2457;
Tu = 22;
Tv = -15;
lambda1 = 0.035;
lambda2 = 0.558;
lambda3 = 0.814;
ro1=1800; ro2=1200; ro3=20; c1=737; c2=1047; c3=1300;

% Stvaranje polja za pohranu podataka
x = linspace(0,L,nx)';
t = linspace(0,tmax,nt);
T = zeros(nx,nt);

% Vremenska petlja /FTCS shema/
for m=2:nt
    for i=1
        T(i,m) = (1-2*M1*(1+Bi0))*T(i,m-1)+2*M1*T(i+1,m-1)+2*M1*Bi0*Tu;
    end
    for i=2:10
        T(i,m) = M1*(T(i-1,m-1)+T(i+1,m-1))+(1-2*M1)*T(i,m-1);
    end
    for i=11
        T(i,m) = (T(i-1,m-1)*lambda1+T(i+1,m-
1)*lambda2)/(lambda1+lambda2);
    end
    for i=12:35
        T(i,m) = M2*(T(i-1,m-1)+T(i+1,m-1))+(1-2*M2)*T(i,m-1);
    end
    for i=36
```



```

    T(i,m) = (T(i-1,m-1)*lambda2+T(i+1,m-
1)*lambda3)/(lambda3+lambda2);
    end

    for i=37:nx-1
        T(i,m) = M3*(T(i-1,m-1)+T(i+1,m-1))+(1-2*M3)*T(i,m-1);
    end
    for i=41
        T(i,m) = (1-2*M3*(1+BiL))*T(i,m-1)+2*M3*((T(i-1,m-1)+BiL*Tv));
    end

end

%Plotanje
lineSymb = char('b-.','k-o','m-v','b-s','k*-','m-d','b-+','k-<','m-h');
nsymb = size(lineSymb,1);
% Plot T(x,t): svaki put drugacija krivulja i simbol
for j=1:719:length(t)
    hold on
    isymb = 1 + rem(j-1,nsymb); % ciklicki indeks za stil linije
    plot(x,T(:,j),lineSymb(isymb,:));
    % Kreiranje string matrice za legendu.
    s = sprintf('t = %4.2f',t(j));
    if j==1
        legstr = s;
    else
        legstr = char(legstr,s);
    end
end
%hold off
legend(legstr,2); xlabel('x[m]'); ylabel('T(x,t) [°C]');

figure
filename = 'animacija.gif'; % datoteka za spremanje slike
for j=1:59:length(t)
    plot(x,T(:,j));
    xlabel('Pozicija')
    ylabel('Temperatura [°C]')
    text(0.1,-6,sprintf('t = %1.2f s',t(j))); % tekstualna notacija
svakog koraka
    frame = getframe(1);
    im = frame2im(frame); %pretvori frame u sliku
    [imind,cm] = rgb2ind(im,256);

    % sliku pretvara u animirani gif.
    if j == 1;
        imwrite(imind,cm,filename,'gif', 'Loopcount',inf);
    else
        imwrite(imind,cm,filename,'gif','WriteMode','append');
    end
end
end

```

**Prilog VII****quU.m**

```
% Kod za računanje toplinskih tokova za slučaj kada je izolacija s
% unutarnje strane

clc
clear qu qv
alfau = 8;
alfav = 20;
m = 0;
n = 0;
p = 0;
lambda1 = 0.035;
lambda2 = 0.558;
lambda3 = 0.814;
dx1 = 0.1; dx2 = 0.25; dx3 = 0.05;
maxiter = nt;

% Gustoća toplinskog toka na x=0
for i = 1:maxiter
    m = m+1;
    qu(i) = (Tu-T(1,m))/((1/alfau));
end

% Gustoća toplinskog toka na x=0.4m
for i = 1:maxiter
    n = n+1;
    qv(i) = (T(41,n)-Tv)/((1/alfav));
end

% Gustoća toplinskog toka u stacionarnom stanju
for i = 1:maxiter
    q(i) = (Tu-
Tv)/((1/alfau)+(dx1/lambda1)+(dx2/lambda2)+(dx3/lambda3)+(1/alfav));
end

figure
plot(qu)
hold on
plot(qv)
plot(q)
```

**Prilog VIII**

stac\_q\_u.m

```
%Određivanje vremena postizanja stacionarnosti kada je izolacija s  
%unutarnje strane
```

```
clc  
clear err  
maxiter = nt;  
m=1;  
for iter = 1:maxiter  
    m = m+1;  
err(iter) = abs(q(1,1) - qv(:,m));%Razlika između prethodna dva  
    if err(iter)< 1  
        break;  
    end  
end  
pom = (iter*5)/3600;  
X=['Vrijeme postizanja stacionarnosti:',num2str(pom),'h'];  
disp(X)
```

**Prilog IX****T\_unutra\_greska.m**

```
clc
x=0:0.01:0.4;
y=zeros(41,1);
T_unutra=T(:,end);

% Računanje pogreške u čvorovima
for i=1:1:10
y(i,1)=20.68-((20.68+9.177)/0.1).*x(1,i);
end
for i=11:1:37
y(i,1)=-9.177-((-9.177+13.843)/0.25).*(x(1,i)-0.1);
end
for i=37:1:41
y(i,1)=-13.843-((-13.843+14.473)/0.05).*(x(1,i)-0.35);
end
Diff=T_unutra-y;
plot(x,Diff,'r','LineWidth',2)
xlabel('x[m]'); ylabel('\Delta T(x,t)[°C]'); title('T_{analitičko}-
T_{numeričko}')
grid on
```