

# Oblikovanje srpastih lopatica aksijalnog ventilatora

---

**Filipović, Petar**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:906670>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-11**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Petar Filipović**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**OBLIKOVANJE SRPASTIH  
LOPATICA AKSIJALNOG  
VENTILATORA**

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Željko Tuković

Student:

Petar Filipović

Zagreb, 2016.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Petar Filipović**

Mat. br.: 0035188405

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Oblikovanje srpastih lopatica aksijalnog ventilatora**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Design of sickle blades of axial flow fan**

Opis zadatka:

Aksijalni ventilatori sa srpastim lopaticama koriste se u sustavima hlađenja i ventilacije, a karakteristični su po tome što ostvaruju velike protoke uz vrlo nisku emisiju buke. Profili lopatica ovih ventilatora vrlo su tanki i obično imaju oblik kružnog luka, a srednja linija lopatice povinuta je u smjeru rotacije što lopatici daje srpasti oblik.

U sklopu završnog rada potrebno je izraditi računalni program za oblikovanje srpastih lopatica aksijalnog ventilatora primjenom metode konformnog preslikavanja. Uz standardne ulazne podatke za projektiranje ventilatora (protok fluida, prirast zaustavnog tlaka i broj okretaja) potrebno je također zadati oblik srednje linije lopatice te zakone promjene duljine tetive profila i debljine profila od korjena do vrha lopatice. Program kao rezultat treba dati površinu tlačne i potlačne strane lopatice u obliku skupa diskretnih točaka koje se nalaze na odgovarajućim površinama. Provjeru rada programa treba provesti na primjeru koji će biti naknadno dogovoren s mentorom.

U tekstu završnog rada potrebno je navesti korištenu literaturu i eventualnu pomoć tijekom izrade.

Zadatak zadan:  
25. studenog 2015.


Rok predaje rada:  
**1. rok:** 25. veljače 2016  
**2. rok (izvanredni):** 20. lipnja 2016.  
**3. rok:** 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 29.2., 02. i 03.03. 2016.  
**2. rok (izvanredni):** 30. 06. 2016.  
**3. rok:** 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatak zadao:

  
Izv.prof.dr.sc. Željko Tuković

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tokom studija i navedenu literaturu.

Htio bih se iskreno zahvaliti svom mentoru, prof. dr. sc. Željko Tuković, na velikoj pomoći i strpljenju.

Petar Filipović

# Sadržaj

Sadržaj	ii
Popis slika	v
Popis tablica	vii
Popis oznaka	viii
Sažetak	xii
Summary	xiii
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Dvodimenzionalno strujanje kroz rešetku</b>	<b>3</b>
2.1 Potencijalno nestlačivo strujanje . . . . .	3
2.1.1 Cauchy-Riemannovi uvjeti . . . . .	4
2.2 Konformno preslikavanje . . . . .	5
2.2.1 Kompleksni potencijal . . . . .	6
2.2.2 Interpretacija konformnog preslikavanja . . . . .	8
2.2.3 Primjena konformnog preslikavanja na ravnu rešetku . . . . .	10
2.2.4 Konformno preslikavanje zakrivljenih profila u obliku kružnog luka . . . . .	13
2.3 Analiza strujanja . . . . .	14
2.3.1 Zakon promjene aksijalne brzine strujanja . . . . .	15
2.3.2 Zakon promijene specifične energije . . . . .	17
2.3.3 Brzine strujanja, trokuti brzina i kutovi toka . . . . .	19
2.3.4 Weingov faktor . . . . .	20
<b>3 Geometrija lopatice</b>	<b>22</b>
3.1 Korekcije i geometrijski kutovi . . . . .	22
3.2 Konstrukcija profila . . . . .	24
3.2.1 Proračun kružnog luka . . . . .	24
3.2.2 Oblik srednje linije . . . . .	29
3.2.3 Mapiranje profila na cilindričnu površinu . . . . .	32
<b>4 Rezultati</b>	<b>34</b>
4.1 Primjer proračuna . . . . .	34

---

5 Zaključak	41
Literatura	42

# Popis slika

1.1	Primjer aksijalnog ventilatora sa srpastim lopaticama [1] . . . . .	2
2.1	Mreža prije konformnog preslikavanja . . . . .	5
2.2	Mreža nakon konformnog preslikavanja funkcijom $z^2$ . . . . .	6
2.3	Mreža nakon konformnog preslikavanja funkcijom $z^3 + z^2 + z$ . . . . .	6
2.4	Konformno preslikavanje profila [2] . . . . .	8
2.5	Konformno preslikavanje ravne rešetke [2] . . . . .	10
2.6	Strujanje kroz rešetku [2] . . . . .	12
2.7	Zakon promjene aksijalne brzine . . . . .	15
2.8	Promjena specifične energije . . . . .	18
2.9	Trokut brzina za ulazni i izlazni brid . . . . .	19
3.1	Ovisnost $\Delta\beta_1$ o omjeru $s/l$ i $\beta_m$ . . . . .	23
3.2	Ovisnost $\Delta\beta_1$ o $\beta_m$ . . . . .	24
3.3	Profil u obliku kružnog luka . . . . .	25
3.4	Konstrukcija profila . . . . .	26
3.5	Postupak dodavanja debljine profila . . . . .	28
3.6	Raspodjela profila duž $z$ osi po zakonitosti kružnog luka . . . . .	30



---

3.7	Parametri kružnog luka . . . . .	31
3.8	Grafički prikaz postupka mapiranja . . . . .	32
4.1	Funkcijska promjena aksijalne brzine . . . . .	35
4.2	Funkcijska promjena specifične energije . . . . .	36
4.3	Promjena kutova toka . . . . .	37
4.4	Ovisnost Weinig-ovog faktora . . . . .	37
4.5	Promjena geometrijskih kutova . . . . .	38
4.6	Promjena duljine tetive i razmaka između lopatica . . . . .	38
4.7	Promjena maksimalne debljine lopatice . . . . .	39
4.8	Prikaz dobivene lopatice . . . . .	40
4.9	Prikaz dobivene lopatice . . . . .	40

# Popis tablica

4.1	Ulazne veličine . . . . .	34
4.2	Izlazne veličine . . . . .	36

# Popis oznaka

$a$	radijus cilindra	m
$a$	visina lopatice	m
$a$	duljina tetive kružnog luka	m
$d$	visina trokutastog isječka kružnog luka	m
$dx$	prirast položaja točke zbog dodavanja debljine	m
$dy$	prirast položaja točke zbog dodavanja debljine	m
$F$	kompleksni potencijal	$\text{m}^2/\text{s}$
$h$	visina kružnog luka	m
$k$	broj točaka na presjeku	-
$l$	duljina tetive lopatice	m
$l$	duljina kružnog luka	m
$m$	broj presjeka	-
$n$	brzina vrtnje ventilatora	$\text{min}^{-1}$
$n_{sec}$	brzina vrtnje ventilatora	$\text{sec}^{-1}$
$Q$	jačina izvora ili ponora	$\text{m}^2/\text{s}$
$Q$	volumenski protok fluida	$\text{m}^3/\text{s}$
$r$	modul točke	m
$r$	radijus profila lopatice	m
$R$	radijus zakrivljenja kružnog luka	m
$s$	debljina profila	m
$sc$	koeficijent nagiba tangente	-
$s_{max}$	maksimalna debljina profila	m
$scMod$	korekcija koeficijenta nagiba tangente	-
$S$	razmak između lopatica	m

$t$	razmak između lopatica	m
$u$	tangencijalna komponenta brzine	m/s
$v$	apsolutna brzina strujanja	m/s
$v_a$	aksijalna komponenta brzine	m/s
$v_u$	tangencijalna komponenta brzine	m/s
$V$	brzina strujanja	m/s
$V_\infty$	brzina strujanja neporemećenog polja	m/s
$w$	apsolutna brzina strujanja	m/s
$W$	kompleskna brzina	m/s
$z$	broj lopatica	-
$\alpha$	kut između krajnje točke kružnog luka i $y$ osi	°
$\alpha_0$	kut između referentne točke i $x$ osi	°
$\alpha_k$	kut između $k$ -te točke i $x$ osi	°
$\beta_{0k}$	kut između $k$ -te točke i $x$ osi	°
$\beta$	kut između tetive i $y$ osi	°
$\beta$	kut profila u obliku kružnog luka	°
$\beta$	kut toka	°
$\gamma$	jačina vrtloga	m <sup>2</sup> /s
$\gamma$	kut između $x$ osi i točke $k/2$	°
$\Gamma$	jačina vrtloga	m <sup>2</sup> /s
$\Delta\alpha$	kut kružnog luka	°
$\Delta\beta$	korekcijska veličina	°
$\Delta\beta_0$	prirast kuta kod proračuna profila	°
$\Delta\beta_1$	pomoćna veličina za određivanje korekcije	°
$\Delta p$	totalni prirast tlaka	Pa
$\varepsilon$	kut zakreta strujanja	°
$\eta$	iskoristivost ventilatora	-
$\theta$	kut zakreta lopatice	°
$\theta_\infty$	kut zakreta lopatice	°
$\lambda$	srednji kut	°

$\mu$	jakost dipola	$\text{m}^3/\text{s}$
$\mu$	Weiningov faktor	-
$\nu$	korekcijski faktor	-
$\rho$	gustoća fluida	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\rho_0$	polarna koordinata centra kružnog luka	m
$\Phi$	potencijal brzine	$\text{m}^2/\text{s}$
$\varphi$	kut između spojnice centra kružnog luka i $x$ osi	$^\circ$
$\Psi$	funkcija toka	$\text{m}^2/\text{s}$
$\omega$	kutna brzina	rad

### Bezdimenzijske

#### veliĉine

$DDv_a$	bezdimenzijska udaljenost	-
$DDuv_u$	bezdimenzijska udaljenost	-
$rv_a$	relativna aksijalna brzina	-
$\delta r$	bezdimenzijska udaljenost	-
$\xi$	bezdimenzijska udaljenost	-
$\tau$	karakteristika konformnog preslikavanja	-

### Donji indeksi

1	ulazni brid lopatice
2	izlazni brid lopatice
$avg$	srednje
$b$	poĉetak
$c$	centar
$e$	kraj
$h$	korijen lopatice
$i$	i-ti profil lopatice
$l$	ulazni brid lopatice
$m$	srednje

<i>s</i>	vrh lopatice
<i>t</i>	izlazni brid lopatice

**Gornji indeksi**

<i>'</i>	prva korekcija
<i>''</i>	geometrijski kut

## SAŽETAK

U ovom radu je izrađen računalni program za oblikovanje srpastih lopatica aksijalnog ventilatora. Pretpostavljeno je da profil lopatice od korijena do vrha ima oblik kružnog luka, te je za matematički opis strujanja oko takvog profila odabrana tzv. Weinig-ova metoda. Kod te metode se potencijalno strujanja kroz turbinsku rešetku sastavljene od kružnih lukova opisuje primjenom metode konformnog preslikavanja. Da bi se osiguralo uspješno oblikovanje lopatice i za aksijalne ventilatore kod kojih, zbog nepovoljnog odnosa između vanjskog i unutarnjeg promjera nije moguće osigurati radijalnu ravnotežu na izlazu iz rotora, uvedena je mogućnost definiranja zakonitosti promjene aksijalne brzine fluida i specifične predane energije od korijena do vrha lopatice koje odstupaju od uobičajenih zakonitosti. Srpasti oblik lopatice određen je oblikom srednje linije lopatice. Definiran je parametarski oblik srednje linije kod kojeg se prikladnim odabirom parametara oblik linije može mijenjati od ravnog do uvijenog u smjeru rotacije. Na kraju definiran je postupak oblikovanja lopatice tako da se ravni profili dobiveni primjenom Weinig-ove metode slažu uzduž srednje linije lopatice te se vrši njihovo mapiranje na odgovarajuću cilindričnu površinu. Na kraju rada je dan primjer proračuna s prikazom dobivene lopatice.

Ključne riječi: aksijalni ventilator, srpaste lopatice, konformno preslikavanje, Weinig-ova metoda, profiliranje lopatica

## SUMMARY

In this work, a computer program for design of sickle blades of an axial fan is developed. It is assumed that blade profile from a hub to a shroud has a shape of a circular arc and for mathematical analysis of a flow around this type of a profile the Weinig's method is applied. In this method, potential flow through a cascade of blades is analysed with the conformal transformation method. In order to ensure successful development of a blade for an axial fan, which has an unfavourable ratio of shroud and hub radius, for which it is not possible to achieve radial equilibrium at the outlet of a rotor, principles of change for an axial component of the velocity and specific energy is introduced which deviates from standard principles. Sickle shape of a blade is defined by the form of a mean line. One parametric mean line form is defined wherein changing parameters cause the mean line to change from a simple straight profile to a profile which is curved in the direction of rotation. At the end straight profiles calculated by a Weinig's method are distributed along blade mean line and mapping on cylindrical surface is done. At the end of a paper example of calculation with the figure of calculated blade is given.

Key words: axial fan, sickle blades, conformal transformation, Weinig's method, design of blades



# Uvod

Aksijalni ventilatori sa srpastim lopaticama (slika 1.1) uglavnom se koriste u sustavima hlađenja i ventilacije, gdje moraju osigurati relativno velike protoke uz nisku razinu buke. Relativno velika duljina tetive profila lopatice omogućava da se željeni protok i prirast tlaka ostvare uz minimalni broj lopatica i nisku brzinu vrtnje što je osnovni preduvjet za osiguravanje niske razinu buke. Na žalost mala brzina vrtnje te nešto niži promjeri od onih preporučenih za zadane projektne parametre ne dozvoljavaju primjenu standardnih metoda u projektiranju ovakvih ventilatora. Naime budući da se u takvim uvjetima ne može osigurati potrebni zakret toka od korijena prema vrhu lopatice definiran primjenom zakonitosti slobodnog vrtloga mora se vrlo često odstupiti od uvjeta radijalne ravnoteže. Tako je osnovni preduvjet za proračun ovih ventilatora definiranje zakonitosti promjene predane energije fluidu od korijena do vrha lopatice koja treba biti takva da u graničnom slučaju kada je to moguće prijeđe u zakonitost koja rezultira s radijalnom ravnotežom toka na izlazu iz rotora.

U radu je pretpostavljeno da profil lopatice od korijena do vrha ima oblik kružnog luka te je za matematički opis strujanja oko takvog profila odabrana tzv. Weinig-ova metoda kod koje se potencijalno strujanja kroz dvodimenzionalnu turbinsku rešetku sastavljenu od lopatica u obliku kružnih lukova opisuje primjenom konformnog preslikavanja. Tako je u prvom dijelu rada prikazan matematički model potencijalnog strujanja temeljen na metodi konformnog preslikavanja. Nakon toga je dan postupak proračuna profila lopatice primjenom prethodno spomenute Weinig-ove metode. Definiran je matematički model

srednje linije lopatice koji treba osigurati srpasti oblik lopatice, te je prikazan postupak slaganja profila uzduž srednje linije koji rezultira s trodimenzionalnim modelom lopatice srpastog oblika.



SLIKA 1.1: Primjer aksijalnog ventilatora sa srpastim lopicama [1]

# Dvodimenzionalno strujanje kroz rešetku

## 2.1 Potencijalno nestlačivo strujanje

U mehanici fluida potencijalno strujanje jest ono strujanje koje se sastoji samo od translacijskog gibanja i deformacije. Drugim riječima možemo reći da je potencijalno strujanje neviskozno i bezvrtložno strujanje. Pokazano je, da u uvjetima gdje su viskozne sile zanemarive, vrijedi model potencijalnog strujanja. Model potencijalnog strujanja primjenjuje se kod analize opstrujavanja tijela, analize strujanja fluida na samom početku uzrokovano gibanjem tijela. Model potencijalnog strujanja se primjenjuje i u teoriji turbostrojeva i aerodinamici. Sustav jednačbi koji opisuje potencijalno strujanje je:

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (2.2)$$

U jednačbi 2.1,  $\Psi$  predstavlja funkciju toka, dok u jednačbi 2.2,  $\Phi$  predstavlja potencijal brzine. Rješavanjem ovog sustava jednačbi (2.1 i 2.2) dolazi se do rješenja koja su našla praktičnu i široku primjenu u industriji. Optjecanje tijela, strujanje kroz rešetku turbostroja i optjecanje oko krila aviona su neki od primjera primjene.

Analiza strujanja oko profila lopatice ili konstruiranje profila lopatice može se odrediti primjenom modela potencijalnog strujanja. Rješavanje modela potencijalnog strujanja primijenjenog na lopaticu turbostroja dobiva se korištenjem metoda za rješavanje potencijalnog strujanja. Metode na raspolaganju su: metoda konformnog preslikavanja, metoda singulariteta, numeričke metode i grafičke metode. Dalje će biti detaljnije opisana metoda konformnog preslikavanja budući da se tom metodom došlo do rješenja problema.

### 2.1.1 Cauchy-Riemannovi uvjeti

Budući da je strujanje kroz rešetku dvodimenzionalno, može se kazati da se slika strujanja ponavlja u ravninama paralelnim s  $oxy$ . Također, na pojedinim strujnicama vrijedi da je  $\Psi = konst.$  te iz toga slijedi da je  $d\Psi = 0$ . Jednadžba strujnice glasi:

$$V_x dy - V_y dx = 0 \quad (2.3)$$

Iz jednadžbe 2.3 slijedi da je  $V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ . Uz uvjet da je  $V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$  i  $V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  dobiva se traženi odnos između funkcije toka  $\Psi$  i potencijala brzine  $\Phi$ :

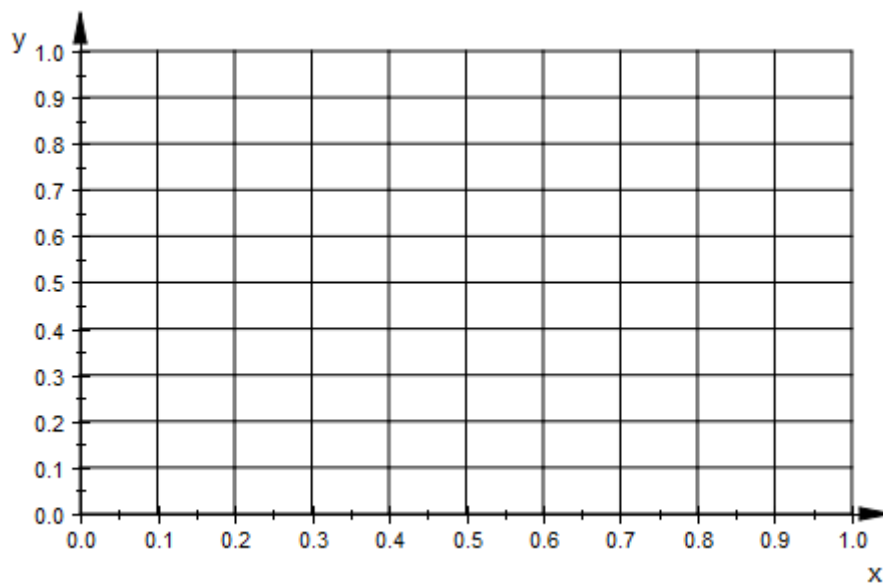
$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

Jednadžbe 2.4 i 2.5 predstavljaju Cauchy-Riemannove uvjete.

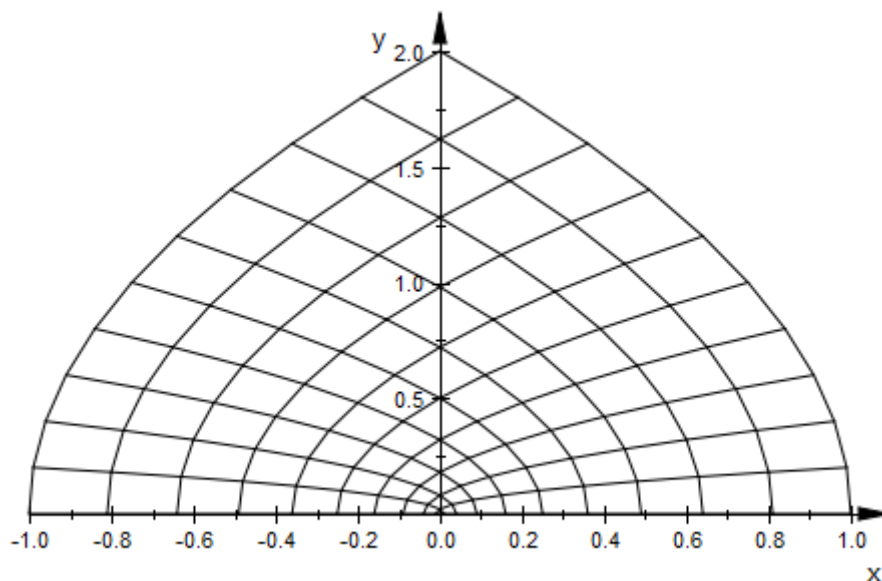
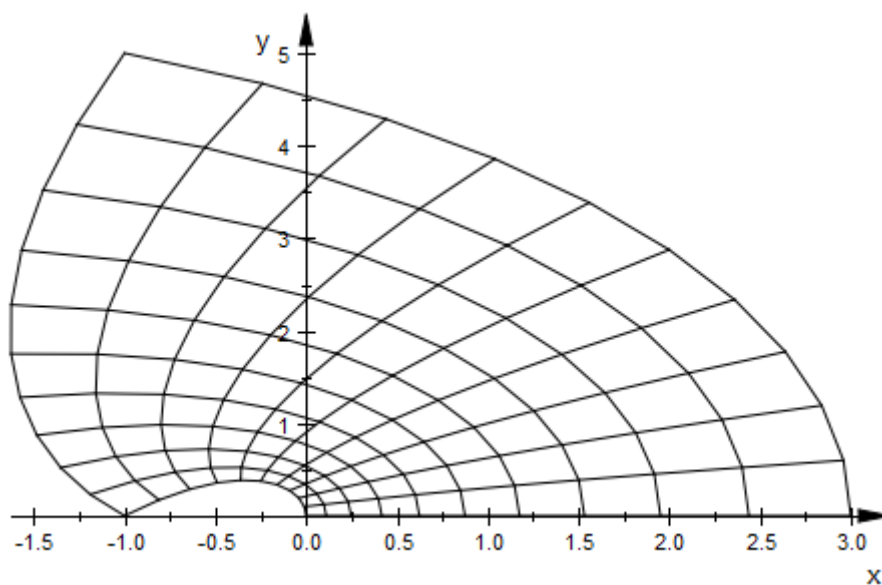
## 2.2 Konformno preslikavanje

Konformno preslikavanje je jedno od područja u kompleksnoj analizi. Matematički gledano to je funkcija koja preslikavanjem, npr. ravnine ili nekog tijela, čuva lokalne kutove. Pritom, sama veličina originalne slike ne mora nužno ostati ista. Metoda konformnog preslikavanja je izuzetno korisna kod analize potencijalnog strujanja oko aeroprofila, lopatica ventilatora ili cilindra. Ovom se metodom, kod konstruiranja profila lopatice, potencijalno strujanje oko cilindra razvija u strujanje kroz rešetku lopatica turbostroja, dok se kod analize strujanja oko profila lopatice strujanje kroz rešetku lopatice transformira u potencijalno strujanje oko cilindra. Primjer konformnog preslikavanja mreže (Slika 2.1) funkcijama  $z^2$  i  $z^3 + z^2 + z$  prikazan je na slikama 2.2 i 2.3. Vidi se na slikama kako su lokalni kutovi



SLIKA 2.1: Mreža prije konformnog preslikavanja

između dvaju linija očuvani ne i veličina same slike.

SLIKA 2.2: Mreža nakon konformnog preslikavanja funkcijom  $z^2$ SLIKA 2.3: Mreža nakon konformnog preslikavanja funkcijom  $z^3 + z^2 + z$ 

### 2.2.1 Kompleksni potencijal

Kako je pokazano u poglavlju 2.1.1, funkcija toka  $\Psi$  i potencijal brzine  $\Phi$  zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete (2.4 i 2.5). Stoga, funkcija toka i

potencijal brzine definiraju kompleksni potencijal:

$$F = \Phi + i\Psi \quad W = \frac{dF}{dz} = V_x - iV_y \quad (2.6)$$

gdje je  $F$  kompleksni potencijal, a  $W$  kompleksna brzina. Osnovna rješenja potencijalnog ravninskog strujanja u mehanici fluida su:

1. Paralelno strujanje brzinom  $\vec{V} = (V_x, V_y)$ .

$$\Phi = V_x x + V_y y \quad \Psi = V_x y - V_y x \quad F = (V_x - iV_y)z \quad (2.7)$$

2. Izvor ( $Q > 0$ ) ili ponor ( $Q < 0$ ), kapaciteta  $Q$ , smještenog u  $z = z_0 = x_0 + iy_0$

$$\Phi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \Psi = \pm \frac{Q}{2\pi} \Theta \quad F = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.8)$$

Ovdje su potencijal brzine i funkcija toka prikazani u polarnim koordinatama. Tako da je:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y - y_0}{x - x_0} \right)$$

3. Vrtlog jačine  $\Gamma$  smješten u  $z = z_0$ . Pozitivna cirkulacija  $\Gamma$  je u smjeru suprotnome kazaljci na satu.

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \Theta \quad \Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad F = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.9)$$

4. Dipol jačine  $\mu$  smješten u  $z = z_0$ . Orijentacija dipola je u smjeru kuta  $\alpha$ . Kut  $\alpha$  je kut koji zatvara spojnica izvor-ponor sa x-osi.

$$\Phi = -\frac{\mu \cos(\alpha - \Theta)}{2\pi r} \quad \Psi = -\frac{\mu \sin(\alpha - \Theta)}{2\pi r} \quad F = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{z - z_0} \quad (2.10)$$

Budući da su Laplaceove jednačbe (2.1 i 2.2) linearne, za njih vrijedi svojstvo superpozicije. Svojstvo superpozicije kaže da je zbroj dvaju rješenja Laplaceove jednačbe također rješenje Laplaceove jednačbe. To omogućuje da

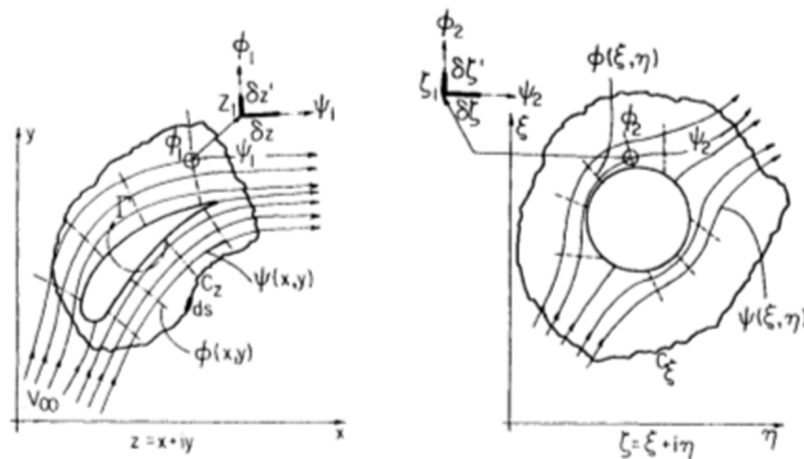
kombinacijom osnovnih strujanja (paralelno strujanje, izvor, ponor, vrtlog i dipol) dobijemo složenija strujanja kao što su npr., bezciklacijsko optjecanje kružnog cilindra i ciklacijsko optjecanje kružnog cilindra. Ciklacijsko optjecanje cilindra dobije se kombinacijom paralelnog strujanja, dipola i vrtloga  $\Gamma$ . Kompleksni potencijal ciklacijskog optjecanja kružnog cilindra, radijusa  $a$ , dobije se zbrajanjem (svojstvo superpozicije) kompleksnih potencijala pojedinih komponenta strujanja (paralelno strujanje, dipol i vrtlog).

$$F(z) = Vz + V\frac{a^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z) \tag{2.11}$$

Dok kompleksna brzina  $W$  glasi:

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = V\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi z} \tag{2.12}$$

### 2.2.2 Interpretacija konformnog preslikavanja



SLIKA 2.4: Konformno preslikavanje profila [2]

Fizikalno, funkcija  $\zeta = \zeta(z)$  ima, za svaku vrijednost varijable  $z$  u kompleksnoj ravnini  $z$ , odgovarajuću vrijednost varijable  $\zeta$  u kompleksnoj ravnini  $\zeta$ . Funkcija  $\zeta(z)$  se zove "preslikavajućom" funkcijom. Preslikavanje je



konformno kada je očuvan kut između bilo kojih dviju krivulja koje prolaze kroz točku  $z$  ( u kojoj vrijedi  $d\zeta/dz \neq 0$ ). Na slici 2.4 je prikazana fizikalna ravnina  $z$ , koja sadrži aeroprofil zajedno sa strujnicama i linijama potencijala brzine. Krivulje  $\Phi_1$  i  $\Psi_1$  sijeku se pod pravim kutom. Odgovarajuće krivulje u ravnini  $\zeta$  su  $\Phi_2$  i  $\Psi_2$ . Ako su  $\delta z$  i  $\delta z'$  infinitezimalne duljine krivulja  $\Phi_1$  i  $\Psi_1$ , u točki  $z_1$  u  $z$  ravnini, tada su infinitezimalne duljine, u odgovarajućoj točki  $\zeta_1$  u  $\zeta$  ravnini duž krivulja  $\Phi_2$  i  $\Psi_2$ ,  $\delta\zeta$  i  $\delta\zeta'$ . Odnos između infinitezimalnih duljina  $\delta z$  i  $\delta\zeta$  može se prikazati preko:

$$\delta\zeta = \frac{d\zeta(z)}{dz} \delta z \quad \arg \delta\zeta = \arg \left( \frac{d\zeta(z)}{dz} \right)_{z_1} + \arg \delta z \quad (2.13)$$

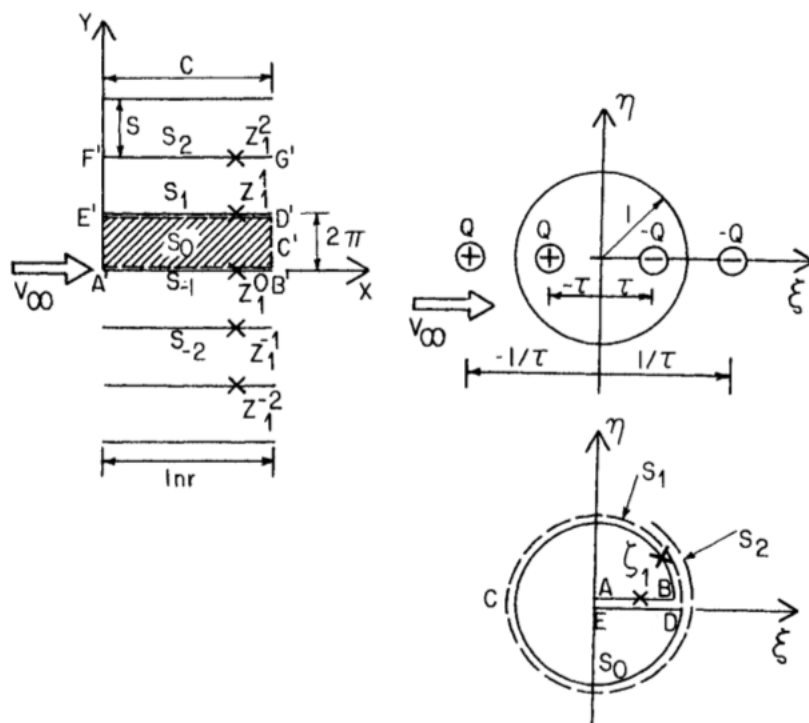
U ovoj jednadžbi,  $(d\zeta(z)/dz)_{z_1}$  je lokalni faktor skaliranja. Budući da je funkcija  $\zeta(z)$  analitička (to su funkcije koje su derivabilne) ona ne ovisi o smjeru  $\delta z$ . Zato su svi infinitezimalni elementi koji prolaze kroz točku skalirani sa istim faktorom. Promotrimo sada preslikavanje aeroprofila u neki oblik oko kojeg je strujanje poznato. Neka funkcija  $\zeta(z)$  preslikava aeroprofil u krug. U ovom trenutku je funkcija  $\zeta(z)$  nepoznata. Promatrajući proizvoljno strujanje možemo reći da se kompleksni potencijal prikazuje kao:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (2.14)$$

Strujnice i krivulje  $\Phi = konst.$  se sijeku pod pravim kutom i zajedno tvore ortogonalnu mrežu. Preslikavanjem strujanja u ravninu  $\zeta$  dobijemo

$$F[z(\zeta)] = \Phi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] + i\Psi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.15)$$

Jednadžba 2.15 predstavlja kompleksni potencijal strujanja u  $\zeta$  ravnini dobiven preslikavanjem strujanja iz  $z$  ravnine. Kako je preslikavanje konformno, očuvani su kutovi između krivulja, tako da krivulje u  $\zeta$  ravnini koje odgovaraju strujnicama i krivuljama  $\Phi = konst.$  u  $z$  ravnini, isto tvore ortogonalnu mrežu. Ako sa  $W_z$  i



SLIKA 2.5: Konformno preslikavanje ravne rešetke [2]

$W_\zeta$  označimo kompleksne brzine u  $\zeta$  ravnini, tada dobijemo:

$$W_z = V_x - iV_y = \frac{dF}{dz} \quad W_\zeta = V'_x - iV'_y = \frac{dF}{d\zeta} \quad \frac{W_\zeta}{W_z} = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{d\zeta/dz} \quad (2.16)$$

Zadnji izraz u jednačbi 2.16 skalira brzine.

### 2.2.3 Primjena konformnog preslikavanja na ravnu rešetku

Promotrimo ravnu ploču u  $z$  ravnini i cilindar u  $\zeta$  ravnini prikazani na slici 2.5. Optjecanje cilindra jediničnog radijusa u  $\zeta$  ravnini, može se prikazati postavljanjem izvora ( $Q > 0$ ) i ponora ( $Q < 0$ ) na udaljenosti  $1/\tau$  i  $-1/\tau$  od ishodišta. Kako bi se stjenka cilindra podudarala sa strujnicom, potrebno je izvor ( $Q > 0$ ) i ponor ( $Q < 0$ ) smjestiti unutar cilindra na udaljenost  $\tau$  i  $-\tau$  od ishodišta. Kompleksni potencijal za ovo strujanje dobije se na osnovu jednačbe

2.15 i svojstva superpozicije.

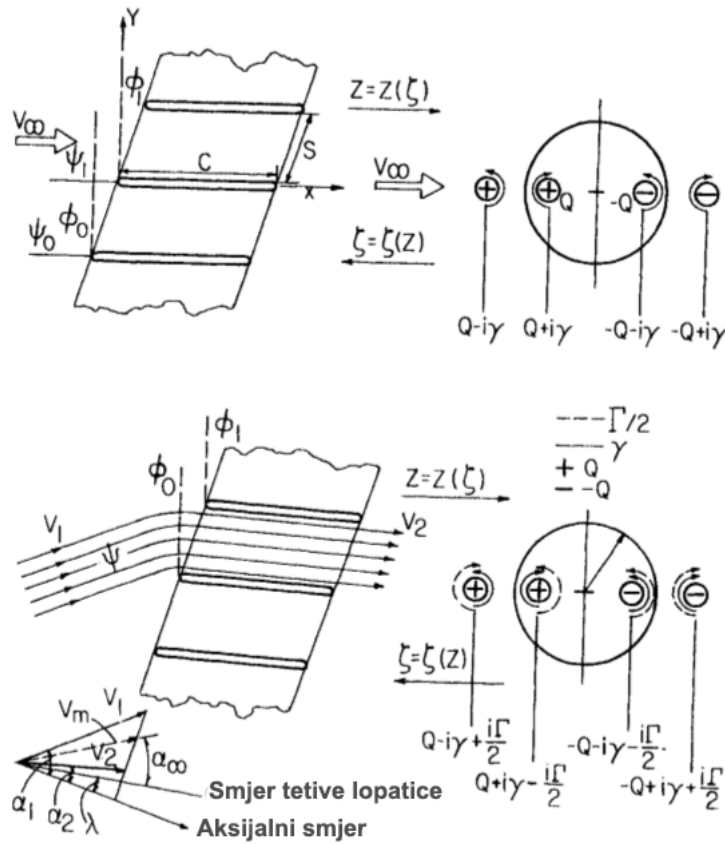
$$F(\zeta) = \frac{V_\infty S}{2\pi} \left[ \ln \frac{\zeta + 1/\tau}{\zeta - 1/\tau} + \ln \frac{\zeta + \tau}{\zeta - \tau} \right] \quad (2.17)$$

gdje umnožak  $V_\infty S$  predstavlja jačinu izvora  $Q$ . Veličina  $S$  predstavlja razmak između lopatica dok  $V_\infty$  predstavlja brzinu strujanja podalje od cilindra. Kompleksni potencijal paralelnog strujanja u  $z$  ravnini je  $V_\infty z$ . Funkcija  $[F(\zeta)/V_\infty]$  preslikava ravnu rešetku u krug u  $\zeta$  ravnini. Točke  $\zeta = \pm 1/\tau$  smještene su na  $\pm\infty$  u  $z$  ravnini. Numeričke vrijednosti strujnih funkcija i funkcija toka su očuvane i u  $\zeta$  ravnini zato što je preslikavanje konformno kao i karakteristike singulariteta. Prolazeći kroz bilo koji singularitet (npr., izvor u točki  $\zeta = -1/\tau$  dobivamo jačinu izvora,  $Q = V_\infty S$  koja odgovara volumenskom protoku kroz šrafirani dio visine  $S$  u smjeru  $x$  osi odnosno kroz površinu omeđenu točkama  $A'B'$  i  $D'E'$ . Prolazeći kroz singularitet drugi puta, jačina izvora se povećava za  $Q$  što odgovara protoku kroz površinu omeđenu  $D'E'$  i  $F'G'$ . Lako se može zamisliti ponavljanje ovog postupka sa beskonačnim brojem ravnih ploča. Svaki puta kada  $\zeta$  presječe liniju  $DE$  prelazi s trenutne ploče na sljedeću ovisno o tome smanjuje li se ili povećava  $\zeta$ . Te ploče se kreću od  $0$  do  $2\pi$ ,  $2\pi$  do  $4\pi \dots$

Ovaj korak je temeljan za svako preslikavanje rešetke i uključuje preslikavanje rešetke sa beskonačnim brojem lopatica (jednako razmaknutih prolaza kroz koje je strujanje isto) u Riemannovu površinu u  $\zeta$  ravnini. Ovaj postupak se može primijeniti i na preslikavanje vrtloga jačine  $\Gamma$ . Ako je rešetka pod kutom, to se odražava na vrijednosti potencijala brzine,  $\Phi$ , i strujne funkcije,  $\Psi$ , od ulaznog brida jedne lopatice do ulaznog brida druge lopatice. Ako sa nulom označimo referentnu lopaticu, a lopaticu u pozitivnom smjeru  $y$  osi s jedan, dobivamo razliku strujnih funkcija i potencijala brzine između dvije lopatice.

$$\Psi_1 - \Psi_0 = SV_\infty \cos \lambda = Q \quad \Phi_1 - \Phi_0 = SV_\infty \sin \lambda = \gamma \quad (2.18)$$

Takvo strujanje se može proizvesti dodavanjem vrtloga jačine  $\gamma$  na strujanje analizirano prije. Stoga će u ravnini  $\zeta$  strujanje biti definirano složenim



SLIKA 2.6: Strujanje kroz rešetku [2]

singularitetima (vrtlog i izvor/ponor),  $Q - i\gamma = SV_\infty e^{i\lambda}$ ,  $Q + i\gamma$ ,  $-(Q + i\gamma)$  i  $-(Q - i\gamma)$  u točkama  $-1/\tau$ ,  $-\tau$ ,  $\tau$  i  $1/\tau$  u odnosu na središte kruga. Što će za posledicu imati da je stjenka kruga također strujnica. Funkcija konformnog preslikavanja  $[F(\zeta)/V_\infty]$ , beskonačne rešetke koja se sastoji od ravnih ploča nagnute za kut  $\lambda$ :

$$z = \frac{S}{2\pi} \left[ e^{-i\lambda} \ln \frac{\zeta + 1/\tau}{\zeta - 1/\tau} + e^{i\lambda} \ln \frac{\zeta + \tau}{\zeta - \tau} \right] \quad (2.19)$$

Karakteristika konformnog preslikavanja  $\tau$  se može odrediti izjednačavanjem duljine tetive lopatice u  $z$  ravnini sa odgovarajućom vrijednosti u  $\zeta$  ravnini. Ulazni i izlazni brid su singularitet i u njima vrijedi da je  $dz/d\zeta = 0$ . Deriviranjem jednadžbe 2.19 po  $\zeta$  i izjednačavanjem s nulom, uz  $\zeta = e^{i\theta}$ ,

dobijemo položaj ulaznog (engl., leading) i izlaznog (engl. trailing) brida.

$$\tan \Theta_l = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \tan \lambda, \quad \Theta_l = \Theta_t + \pi, \quad z_t - z_l = x_t - x_l = l \quad (2.20)$$

Preko jednadžbe 2.20 dolazimo do veze između srednjeg kuta  $\lambda$ , odnosa  $l/S$  i karakteristike konformnog preslikavanja  $\tau$ .

$$\begin{aligned} \frac{l}{S} = \frac{2}{\pi} \cos \lambda \ln \frac{\sqrt{1 + 2\tau^2 \cos 2\lambda + \tau^4} + 2\tau \cos \lambda}{1 - \tau^2} \\ + \sin \lambda \tan^{-1} \frac{2\tau \sin \lambda}{\sqrt{1 + 2\tau^2 \cos 2\lambda + \tau^4}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

## 2.2.4 Konformno preslikavanje zakrivljenih profila u obliku kružnog luka

Efekt zakrivljenja, kod profila sa zakrivljenom srednjom linijom, je taj da se u ravnini preslikavanja centar cilindra pomakne iz ishodišta koordinatnog sustava. Postoje znatne poteškoće, kako fizikalne tako i matematičke, kod primjene metode konformnog preslikavanja na rešetku sastavljenu od zakrivljenih profila zbog napadnog kuta i susjednih profila. Weinig je predložio jednostavniju i približnu metodu za analizu strujanja kroz rešetku sastavljenu od zakrivljenih tankih profila. Weinig-ova aproksimacija jednaka je pojednostavljenoj metodi singulariteta. U ovom slučaju, singulariteti su raspodijeljeni duž cijele duljine tetive. Tangencijalni rubni uvjet koji vrijedi za skeletnicu, također vrijedi duž cijele tetive. Weinig-ova metoda, na preslikavanje ravne rešetke koje je prikazano prije, dodaje još jedan kompleksni potencijal na strujanje u  $\zeta$  ravninu kako bi stjenka zakrivljenog profila postala strujnica. Učinak zakrivljenja može se postići dodavanjem kompleksnoga potencijala, jačine  $\pm iSV_m e^{i\lambda}/R$ . Ovdje veličina  $R$  označuje radijus zakrivljenja profila (slika 3.4). Kompleksni potencijal dodatnog člana glasi:

$$F(\zeta) = \frac{iV_m S e^{i\lambda}}{2\pi R} \ln \frac{\zeta + \tau}{\zeta - \tau} \quad (2.22)$$

Pokazano je, da je realni dio ovog kompleksnog potencijala jednak  $\ln(V/V_M)$ , a da je imaginarni dio posljedica zakrivljenja. Budući da je poznat ukupni kompleksni potencijal (jednadžba 2.22) moguće je odrediti brzine u ravnini gdje je smještena rešetka. Weinig je dao izraze pomoću kojih je moguće izračunati brzine i omjer kuta zakreta strujanja i kuta zakreta lopatice. Ti izrazi vrijede za slučaj rešetke sastavljene od tankih profila koji imaju zakrivljenje u obliku kružnog luka. Omjer kuta zakreta strujanja ( $\varepsilon$ ) i kuta zakreta lopatice ( $\theta$ ) dan je sljedećim izrazom:

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{2S}{\pi l} \cos \lambda \ln \frac{\tau^2 + 1}{\tau^2 - 1} \quad (2.23)$$

Gdje se vrijednost karakteristike konformnog preslikavanja odredi iz jednadžbe 2.21.

## 2.3 Analiza strujanja

Sljedeći korak u postupku profiliranja geometrije lopatice je određivanje trokuta brzina. Očitavanjem vrijednosti pojedinih komponenti brzina strujanja iz trokuta brzina, dolazi se do vrijednosti kutova toka,  $\beta_1$  na ulaznom bridu lopatice i  $\beta_2$  na izlaznom bridu lopatice. Pomoću tih veličina se dolazi do potrebne veličine srednjeg kuta,  $\lambda$ , koji se koristi u jednadžbi 2.23 za određivanje Weinig-ovog faktora  $\mu$  pomoću kojega se računaju konačni korigirani geometrijski kutovi. Kako je napomenuto u uvodu, zbog specifičnosti ventilatora potrebno je bilo odstupiti od standardnog proračuna i uvesti neke promjene. Definiranjem zakona promjene aksijalne brzine strujanja i specifične energije, od korijena prema vrhu riješio se problem radijalne ravnoteže. U nastavku će biti prikazan postupak kojim se definirala nova promjena navedenih veličina. Također, treba spomenuti da je sama lopatica od korijena do vrha podijeljena na  $m$  presjeka. To je učinjeno da bi geometrija lopatice bila što točnija. Tako su se sve veličine, koje se računaju za korijen i vrh lopatice, računale i na svakom presjeku. Promjena radijusa od korijena do vrha lopatica definirana je linearnom raspodjelom:

$$\Delta r = \frac{r_s - r_h}{m} \quad r(i) = r_h + (i - 1)\Delta r \quad (2.24)$$

za  $i = 1 \dots (m + 1)$ .

### 2.3.1 Zakon promjene aksijalne brzine strujanja

Prosječna aksijalna brzina definirana je kao:

$$v_{a,avg} = \frac{Q}{\pi(r_s^2 - r_h^2)} \quad (2.25)$$

Član u brojniku predstavlja volumenski protok, a član u nazivniku površinu.

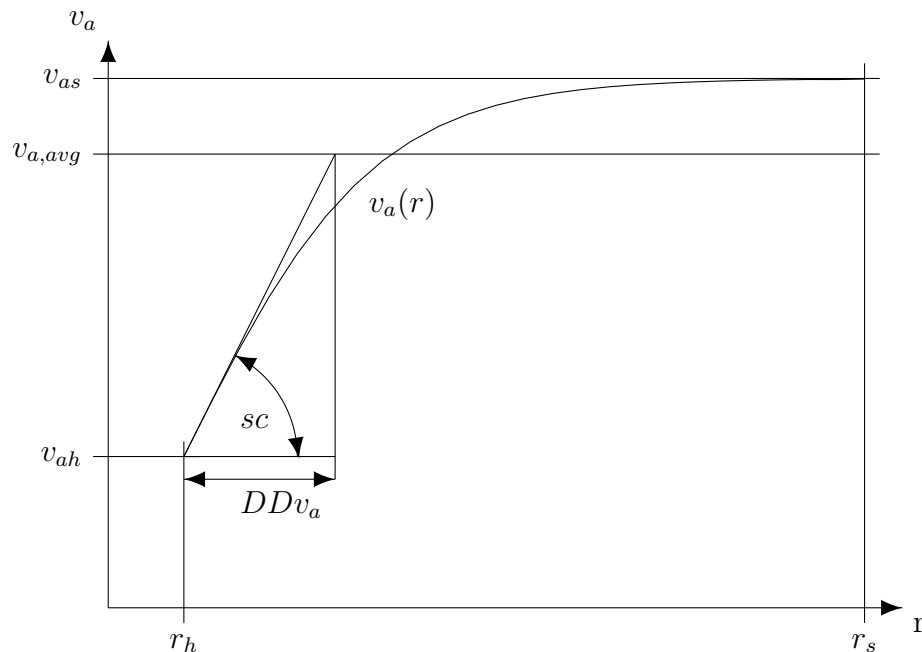
Relativne aksijalne brzine u korijenu i vrhu iznose:

$$rv_{ah} = \frac{v_{ah}}{v_{a,avg}} \quad rv_{as} = \frac{v_{as}}{v_{a,avg}} \quad (2.26)$$

Funkcija kojom je definirana raspodjela aksijalne brzine je izabrana proizvoljno.

$$v_a(r) = a + b \tanh[c(r - r_h)] \quad (2.27)$$

Općenita funkcijska promjena (jednadžba 2.27) prikazana je na slici 2.7. Uvjeti



SLIKA 2.7: Zakon promjene aksijalne brzine

koje mora zadovoljiti funkcija 2.27 su:

1. za  $r = r_h$ ; prva derivacija je jednaka koeficijentu nagiba tangente  $sc$ ;  

$$\frac{dv_a(r)}{dr} = sc$$
2. za  $r = r_s$ ;  $v_a(r) = v_{as}$
3. površina ispod krivulje  $v_a(r)$  odgovara površini ispod linije  $v_{a,avg}$ , površina ispod krivulje predstavlja protok  $Q$  koji mora ostati isti neovisno o zakonu promjene aksijalne brzine

Zadnje navedeni uvjet se koristi za određivanje relativnih brzina strujanja u korijenu,  $rv_{ah}$  i vrhu,  $rv_{ah}$ , lopatice. Pod pretpostavkom da je poznata relativna brzina strujanja  $rv_{ah}$  u korijenu, uz poštivanje uvjeta da je protok za bilo koju definiranu raspodjelu isti, pomoću metode bisekcije pronalazi se rješenje  $rv_{as}$  koje uz ostale veličine odgovara zadanom uvjetu. Vrijednost koeficijenta nagiba tangente računa se prema sljedećem izrazu:

$$sc = \frac{1}{DDv_a} \frac{v_{a,avg} - v_{ah}}{r_s - r_h} \quad (2.28)$$

Veličina  $v_{ah}$  slijedi iz jednadžbe 2.26 dok veličina  $DDv_a$  (dimless dimension) u nazivniku predstavlja bezdimenzijsku udaljenost od radijusa korijena. To je ustvari radijus na kojem tangenta iz početne točke siječe liniju  $v_{a,avg}$  (slika 2.7). Nadalje, korekcija koeficijenta nagiba tangente je:

$$scMod = \frac{sc}{v_{as} - v_{ah}} \quad (2.29)$$

Na kraju, funkcija koja definira zakon promjene aksijalne komponente brzine strujanja od korijena do vrha, uz tražene uvjete, glasi:

$$v_a(r) = v_{ah} + (v_{as} - v_{ah}) \tanh[scMod(r - r_h)] \quad (2.30)$$



### 2.3.2 Zakon promijene specifične energije

U standardnom proračunu se pretpostavlja da je iznos predane specifične energije konstantan od korijena do vrha lopatice. Kako je već spomenuto prije, zbog nemogućnosti postizanja radijalne ravnoteže potrebno je bilo redefinirati zakon promijene specifične energije. Postupak je isti kao i kod definiranja raspodjele aksijalne brzine. Prosječna specifična energija, računa se kao:

$$(uv_u)_{avg} = \frac{\Delta p_{tot}}{\rho\eta}, \quad (2.31)$$

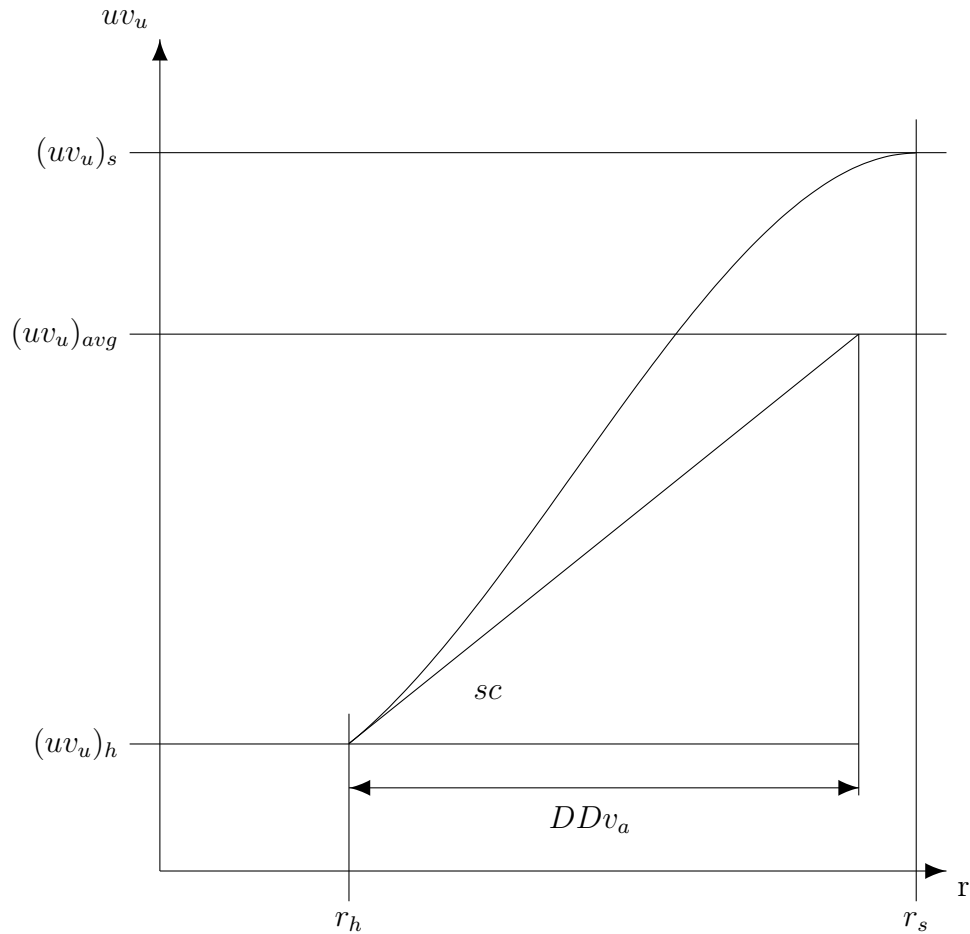
gdje je u brojniku totalni prirast tlaka,  $\Delta p_{tot}$ , a u nazivniku je umnožak vrijednosti gustoće fluida,  $\rho$ , i iskoristivosti ventilatora,  $\eta$ . Funkcija kojom je definirana raspodjela je također odabrana proizvoljno, u ovom slučaju je to polinom trećeg stupnja.

$$uv_u(r) = a(r - r_h)^3 + b(r - r_h)^2 + c(r - r_h) + d \quad (2.32)$$

Općenita funkcijska promjena specifične energije prikazana je na slici 2.8. Uvjeti koje mora zadovoljavati funkcija 2.32:

1. za  $r = r_h$ ;  $uv_u(r) = (uv_u)_h$
2. za  $r = r_h$ ; prva derivacija je jednaka koeficijentu nagiba tangente;  $\frac{d(uv_u(r))}{dr} = \tan \alpha = sc$
3. za  $r = r_s$ ; prva derivacija je jednaka nuli;  $\frac{d(uv_u(r))}{dr} = 0$ ;
4. površina ispod krivulje  $uv_u(r)$  mora biti jednaka površini ispod linije  $(uv_u)_{avg}$ , ukupna specifična energija mora ostati ista neovisno o načinu promijene specifične energije između korijena i vrha

Slično kao i kod određivanja relativnih brzina strujanja u korijenu  $rv_{ah}$  i vrhu  $rv_{as}$ , vrijednost specifične energije koja se prenese u vrhu lopatice se određuje pomoću metode bisekcije uz uvjet da je specifična energija konstanta (uvjet 4). Također,



SLIKA 2.8: Promjena specifične energije

pretpostavlja se da je tangencijalna brzina u korijenu poznata te se ona određuje iz slike 2.9 uz ograničavanje vrijednosti kuta toka na izlazu lopatice . Određivanjem nepoznatih koeficijenata  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  dobije se oblik funkcije kojom je definirana raspodjela ukupne energije.

$$uv_u(r) = (uv_u)_h + sc(r - r_h) + a(r - r_h)^2 + b(r - r_h)^3 \quad (2.33)$$

Gdje su  $a$  i  $b$  nove konstante, a  $sc$  je vrijednost koeficijenta nagiba tangente (slope coefficient). Vrijednost koeficijenta nagiba tangente računa se istom jednadžbom kao i koeficijent nagiba tangente za raspodjelu aksijalne brzine.

$$sc = \frac{1}{DDuv_u} \frac{(uv_u)_{avg} - (uv_u)_h}{r_s - r_h} \quad (2.34)$$

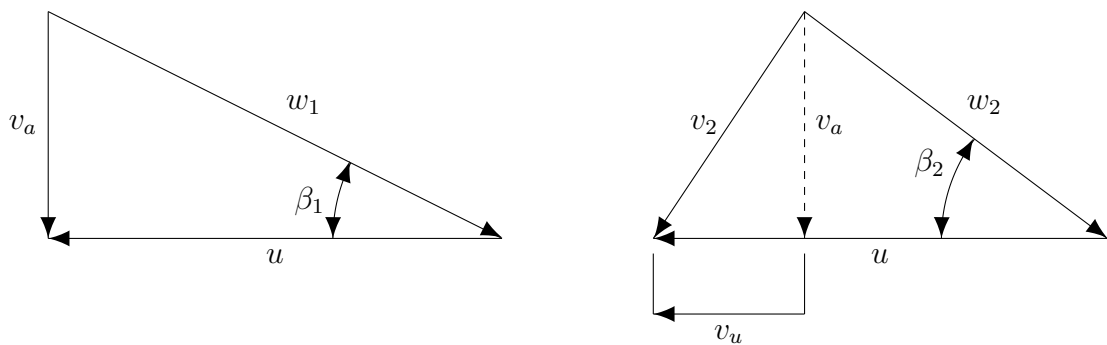
Veličina  $DDuv_u$  također predstavlja bezdimenzijsku udaljenost od radijusa korijena na kojem tangenta povučena iz početne točke  $(r_h, (uv_u)_h)$  siječe liniju  $(uv_u)_{avg}$  (slika 2.8). Konstante  $a$  i  $b$  glase:

$$a = \frac{3((uv_u)_s - (uv_u)_h) - 2sc(r_s - r_h)}{(r_s - r_h)^2} \quad (2.35)$$

$$b = \frac{0.5sc(r_s - r_h) - ((uv_u)_h - (uv_u)_s)}{0.5(r_s - r_h)^3} \quad (2.36)$$

### 2.3.3 Brzine strujanja, trokuti brzina i kutovi toka

Nakon definiranja funkcijskih promjena aksijalne brzine strujanja i specifične energija od korijena do vrha, mogu se nacrtati trokuti brzina. Trokuti brzina za ulazni i izlazni brid, sa svim svojim komponentama prikazan je na slici 2.9. Kako



SLIKA 2.9: Trokut brzina za ulazni i izlazni brid

se vidi iz slike, aksijalna komponenta brzine,  $v_a$ , je konstantna na ulazu i izlazu, dok se njezina promjena od korijena do vrha definirala u prethodnom poglavlju. Također, obodna brzina  $u$  je konstantna na ulaznom i izlaznom bridu. Obodnu brzinu za pojedini presjek moguće je izračunati na sljedeći način:

$$u = r\omega \quad (2.37)$$

Gdje je  $\omega = 2\pi n_{sec}$ , kutna brzina, a  $r$  radijus pojedinog presjeka definiranog na način koji je spomenut u početku ovog djela. Aksijalna brzina se računa prema

prethodno definiranoj promjeni, jednadžba 2.30. Energija koja se prenese na pojedinom presjeku se odredi iz jednadžbe 2.33. Tangencijalna komponenta apsolutne brzine strujanja, za pojedini presjek, računa se iz sljedećeg izraza:

$$v_u = \frac{uv_u}{u} \quad (2.38)$$

Određivanjem svih komponenata trokuta brzina, moguće je odrediti kutove toka  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{v_a}{u} \quad \beta_2 = \tan^{-1} \frac{v_a}{u - v_u} \quad (2.39)$$

Vrijednost srednjeg kuta,  $\beta_m$ , mjeren od osi okomite na smjer aksijalne brzine  $v_a$ , računa se prema:

$$\beta_m = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad (2.40)$$

Dok kut zakreta lopatice  $\theta_{\text{inf}}$  iznosi:

$$\theta_{\text{inf}} = \beta_2 - \beta_1 \quad (2.41)$$

### 2.3.4 Weinig-ov faktor

Određivanjem kutova toka,  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , moguće je odrediti korekcijske faktore, pomoću kojih se odrede konačni geometrijski kutovi,  $\beta_1''$  i  $\beta_2''$ . Postupak određivanja korekcija za kutove toka prikazan je u nastavku. Potrebno je prvo iz jednadžbe 2.23 odrediti Weinig-ov faktor  $\mu$ . Veličina  $t/l$  je zadana, a veličina  $\lambda$  je srednji kut toka mjeren od osi koja je paralelna sa smjerom aksijalnog strujanja, dok je kut  $\beta_m$  također srednji kut, ali mjeren od osi okomite na smjer aksijalnog strujanja. Odnos između ta dva kuta je sljedeći:

$$\lambda = 90 - \beta_m \quad (2.42)$$

Kutovi su izraženi u stupnjevima. Potrebno je još odrediti veličinu konformnog preslikavanja  $\tau$ . Vrijednost karakteristike konformnog preslikavanja  $\tau$ , dobije se iz jednadžbe 2.21. Omjer  $l/t$  predstavlja omjer između duljine tetive lopatice i

razmaka između lopatice. Treba još jedanput spomenuti da se sve veličine računaju za pojedini presjek lopatice  $i$ . Raspodjela duljine tetive lopatice  $l$  od korijena do vrha lopatice definirana je polinom drugog stupnja.

$$l(r) = a + b(r - r_h) + c(r - r_h)^2 \quad (2.43)$$

Gdje su koeficijenti  $a$ ,  $b$  i  $c$  redom:

$$a = l_h \quad b = sc \frac{l_s - l_h}{r_s - r_h} \quad c = \frac{l_s - a - b(r_s - r_h)}{(r_s - r_h)^2} \quad (2.44)$$

Veličina  $sc$  predstavlja koeficijent nagiba tangente povučene u točki  $(r_h, l_h)$ . Promjena duljine tetive lopatice također je definirana proizvoljno. Razmak između lopatica na pojedinom presjeku definiran je kao:

$$t = \frac{2\pi r}{z} \quad (2.45)$$

Veličina  $z$  u ovoj jednadžbi predstavlja broj lopatica. Sada se može, kako je to već spomenuto, odrediti vrijednost karakteristike konformnog preslikavanja  $\tau$  iz jednadžbe 2.21. Postupak je slijedeći:

1. Potrebno je izjednačiti jednadžbu 2.21 sa nulom, to se učini jednostavno, tako da se omjer  $l/t$  prebaci na desnu stranu.
2. Traži se vrijednost  $\tau$  za koju ta jednadžba poprima vrijednost nula, dakle traži se nul točka te funkcije pomoću metode bisekcije.

Sada je jednostavno potrebno odrediti  $\mu$  faktor iz jednadžbe 2.23 uvrštavanjem brojeva  $u$  tu jednadžbu.

# Geometrija lopatice

## 3.1 Korekcije i geometrijski kutovi

Nakon izračuna Weinig-ovog faktora moguće je izračunati korekcijske faktore i geometrijske kutove. Korekcijski faktor  $\nu$  računa se prema izrazu:

$$\nu = \frac{\theta_\infty}{2} \frac{1 - \mu}{\mu} \quad (3.1)$$

Korigirani kutovi toka potom iznose:

$$\beta'_1 = \beta_1 - \nu \quad \beta'_2 = \beta_2 + \nu \quad (3.2)$$

Druga korekcija, ona zbog debljine profila, računa se prema sljedećoj jednadžbi:

$$\beta''_1 = \beta'_1 + \Delta\beta \quad \beta''_2 = \beta'_2 + \Delta\beta \quad (3.3)$$

Korekcija  $\Delta\beta$  određuje se iz sljedeće jednadžbe:

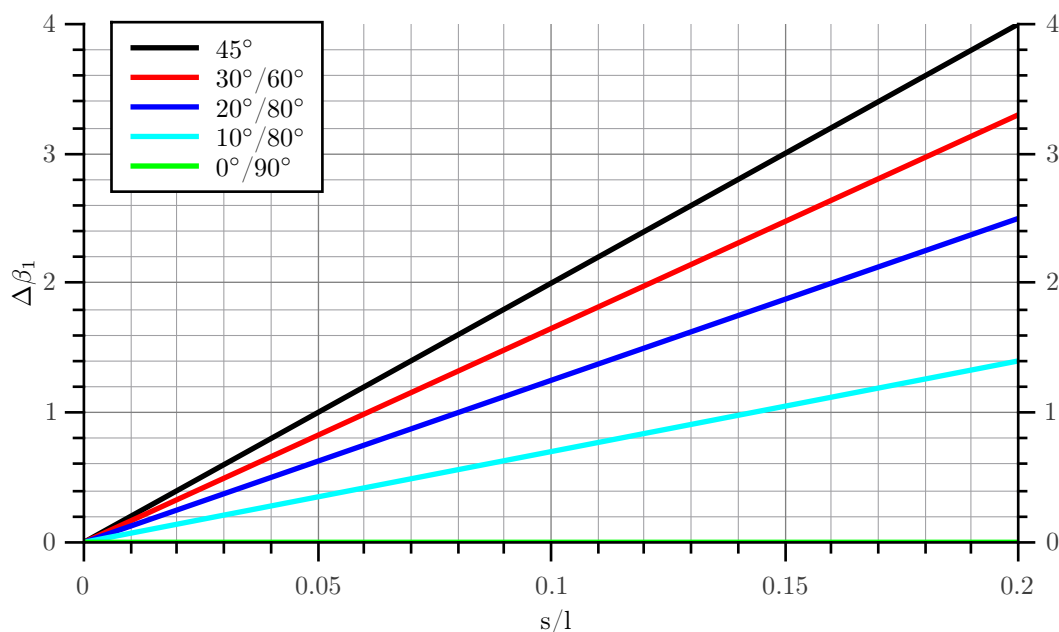
$$\Delta\beta = \Delta\beta_1 \left(\frac{l}{t}\right)^2 \quad (3.4)$$

Vrijednost veličine  $\Delta\beta_1$  određuje se iz grafa na slici 3.1. Na slici je prikazana ovisnost veličine  $\Delta\beta_1$  o omjeru  $s/l$ . Veličina  $l$ , kako je prije rečeno, je duljina tetive lopatice na pojedinom presjeku, dok veličina  $s$  predstavlja maksimalnu debljinu profila lopatice na pojedinom presjeku. Promjena debljine lopatice od vrha do

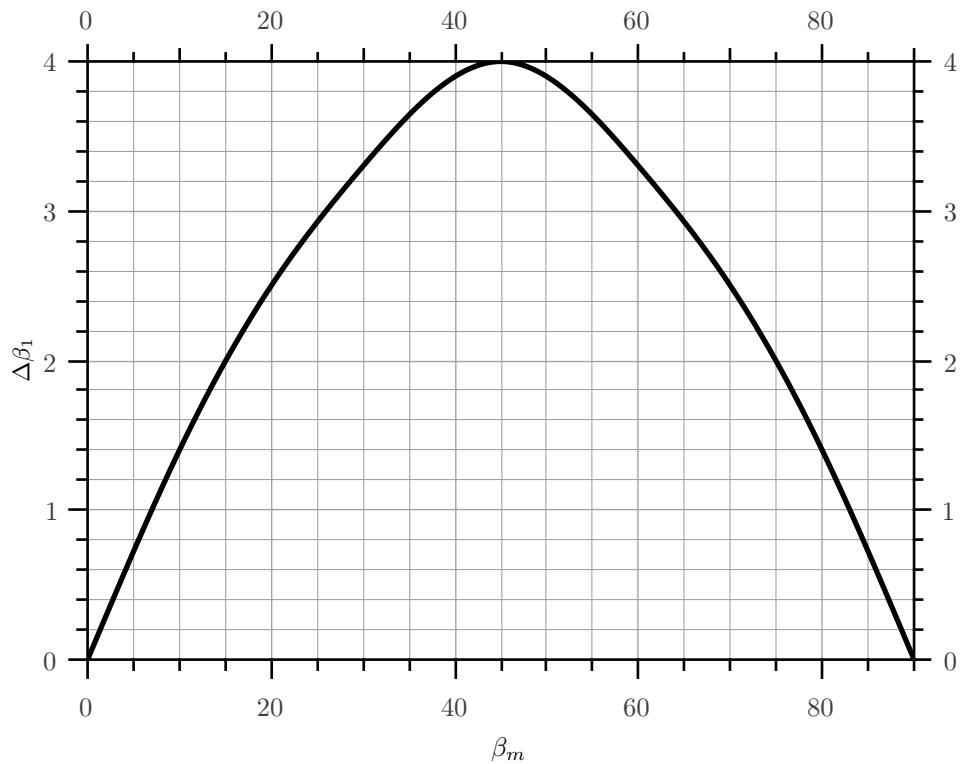
korijena lopatice je linearna.

$$s(r) = s_h + \frac{s_s - s_h}{r_s - r_h}(r - r_h) \quad (3.5)$$

Linije na slici 3.1 su parametarski prikazane za različite vrijednosti kuta  $\beta_m$ . Postupak određivanja vrijednosti veličine  $\Delta\beta_1$  je dan u nastavku. Budući da su linije dane parametarski za određene vrijednosti kuta  $\beta_m$ , te nije za očekivati da će se vrijednost kuta koji je dobiven poklapati sa vrijednosti kuta koji definira jedan od pravaca, najprije se za vrijednost omjera  $s/l = 0.2$  i za navedene vrijednosti kuta  $\beta_m$  ( $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  i  $45^\circ$ ) očita vrijednost  $\Delta\beta_1$ . Iz očitanih vrijednosti se zatim provede "spline" interpolacija. Pretpostavilo se da je krivulja koja opisuje ovisnost  $\Delta\beta_1$  o  $\beta_m$ , pri vrijednosti  $s/l = 0.2$ , polinom drugog stupnja, odnosno kvadratna jednadžba. Ovisnost  $\Delta\beta_1$  o  $\beta_m$  prikazana je na slici 3.2. Za izračunati  $\beta_m$ , prema jednadžbi 2.40 očitamo vrijednost  $\Delta\beta_1$ . Treba imati na umu da je ta vrijednost  $\Delta\beta_1$  za vrijednost omjera  $s/l = 0.2$ . Kako je funkcijska ovisnost  $\Delta\beta_1$  o omjeru  $s/l$  linearna, tada se lagano pomoću linearne



SLIKA 3.1: Ovisnost  $\Delta\beta_1$  o omjeru  $s/l$  i  $\beta_m$   
[3]

SLIKA 3.2: Ovisnost  $\Delta\beta_1$  o  $\beta_m$ 

interpolacije dolazi do tražene vrijednosti  $\Delta\beta_1$  za neku vrijednost omjera  $s/l$ .

$$\Delta\beta_1 = \frac{s}{l} \frac{\Delta\beta_1(\beta_m)}{0.2} \quad (3.6)$$

Potom se iz jednadžbe 3.4 odredi vrijednost  $\Delta\beta$ . Uz poznatu vrijednost  $\Delta\beta$  dolazi se do konačnih vrijednosti geometrijskih kutova definiranih jednadžbom 3.3.

## 3.2 Konstrukcija profila

### 3.2.1 Proračun kružnog luka

Profil lopatice je običan kružni luk, te je potrebno definirati parametre koji taj kružni luk određuju. Jedan profil u obliku kružnog luka prikazan je na slici 3.3. Kako su kutovi  $\beta_1''$  i  $\beta_2''$  poznati, lako se dolazi do vrijednosti kuta  $\beta$ .



$$\beta = \frac{\beta_2'' - \beta_1''}{2} \quad (3.7)$$

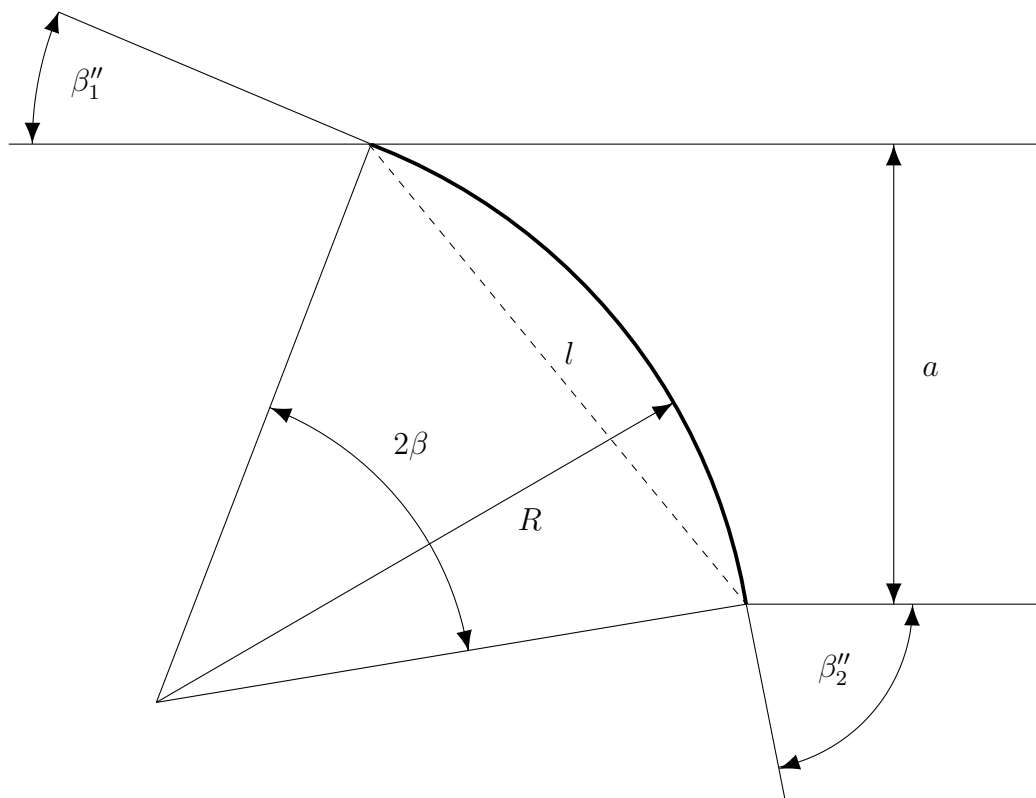
Radijus zakrivljenosti profila određuje se iz sljedećeg izraza:

$$R = \frac{l}{2\beta}, \quad (3.8)$$

gdje je  $l$  duljina tetive lopatice. Na kraju visina lopatice  $a$  iznosi:

$$a = R(\cos \beta_1'' - \cos \beta_2'') \quad (3.9)$$

Određivanjem parametara može se konstruirati profil. Osnovna ideja za konstrukciju profila u obliku kružnog luka je ta, da se kružni luk podijeli na  $k$  točaka. Zatim se za pojedinu točku  $k$ , računa  $x$  i  $y$  koordinata iz poznatih polarnih koordinata te točke (slika 3.4). Postupak se ponavlja za  $m$  presjeka, te se na kraju dobije skup točaka koji definiraju lopaticu. U ovom trenutku lopatica se sastoji samo od centralne linije (skeletnice) na koju je potrebno dodati



SLIKA 3.3: Profil u obliku kružnog luka

debljinu, odnosno podtlačnu i tlačnu stranu. Također, svi profili su zasada smješteni u  $xy$  ravnini. Kako je kružni luk podijeljen na  $k$  točaka, tada prirast kuta  $\Delta\beta_0$  iznosi:

$$\Delta\beta_0 = \frac{2\beta}{k} \quad (3.10)$$

Kreće se od ulaznog brida. Polarne koordinate prve točke iznose:  $\beta_{01} = 90 - \beta_1''$  i  $R$ . Koordinate prve točke u kartezijskom koordinatnom sustavu glase:

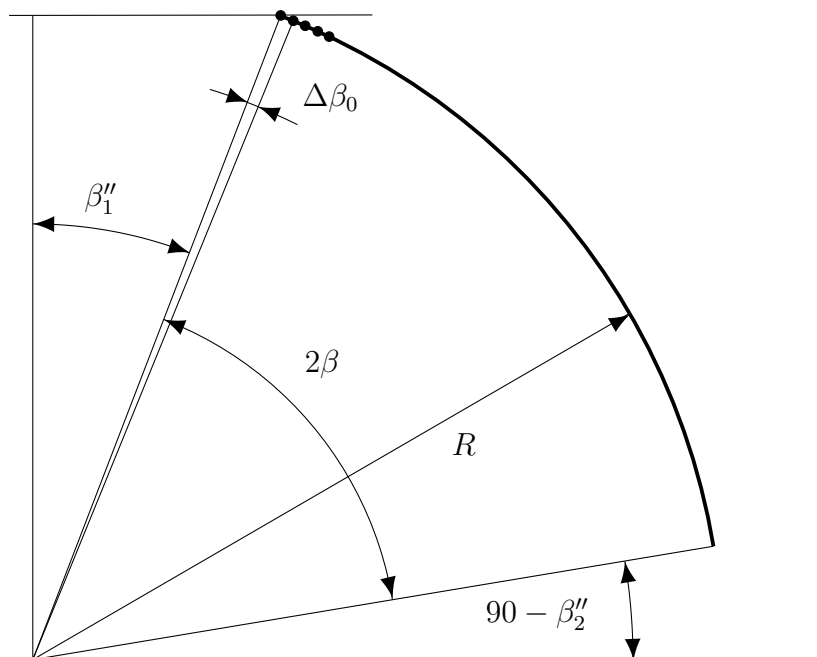
$$x = R \cos \beta_{01} \quad y = R \sin \beta_{01} \quad (3.11)$$

Nakon što je izračunata koordinate prve točke, prelazi se na sljedeću točku. Polarne koordinate druge točke su:

$$\beta_{02} = \beta_{01} + \Delta\beta_0 \quad R \quad (3.12)$$

Zatim se izračunaju koordinate prema jednadžbi 3.11 i opet se prelazi na sljedeću točku. Tako da polarne koordinate  $k$ -te točke glase:

$$\beta_{0k} = \beta_{0k-1} + \Delta\beta_0 \quad R \quad (3.13)$$



SLIKA 3.4: Konstrukcija profila

Postupak se ponavlja dok se ne dođe do zadnje točke. Treba spomenuti da je ulazni brid svih presjeka lopatice smješten u ishodištu koordinatnog sustava. Zgodnim se pokazalo da se u ishodište koordinatnog sustava smjesti centralna točka svih presjeka lopatice. To se učinilo na način da se uzela vrijednost  $x$  i  $y$  koordinate točke smještene na  $k/2$ , te se potom svim ostalim točkama dodala ili oduzela ta vrijednost.

Sljedeći korak je dodavanje debljine na centralnu liniju lopatice. Raspodjela debljine profila od ulaza do izlaza definirana je kvadratnom jednadžbom:

$$s(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 \quad (3.14)$$

Veličina  $\xi$  predstavlja bezdimenzijsku udaljenost. Definirana je kao:

$$\xi = \frac{1}{k} \quad (3.15)$$

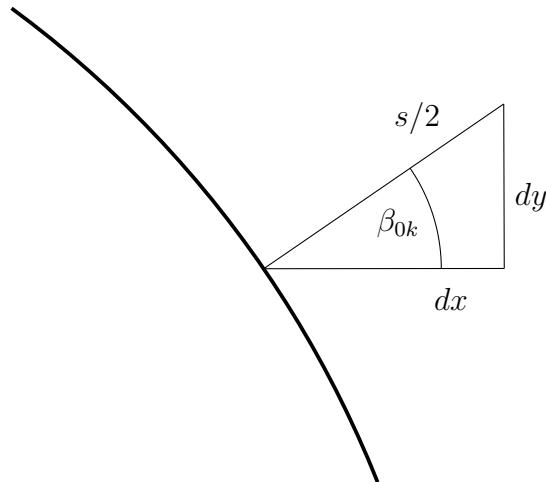
Uvjete koje mora zadovoljiti funkcija 3.14 su:

1. za  $\xi = 0$ ;  $s(\xi) = s_l$
2. za  $\xi = \xi_{max}$ ;  $s(\xi) = s_{max}$
3. za  $\xi = \xi_{max}$ ; prva derivacija funkcije 3.14 je jednaka nuli;  $\frac{ds(\xi)}{d\xi} = 0$
4. za  $\xi = 1$ ;  $s(\xi) = s_t$

Veličine  $s_l$  i  $s_t$  predstavljaju debljinu profila na ulaznom (leading) i izlaznom (trailing) bridu. Računaju se iz sljedećeg izraza:

$$s_l = s_{max} r_{s_l} \quad s_t = s_{max} r_{s_t} \quad (3.16)$$

Veličine  $r_{s_l}$  i  $r_{s_t}$  su relativne debljine profila, te se smatraju poznatima. Veličina  $s_{max}$  definirana je jednadžbom 3.5. Nakon što se definirala raspodjela debljine po profilu od ulaznog do izlaznog brida, sljedeći je korak izračunati novi skup točaka koji će definirati tlačnu i podtlačnu stranu lopatice. Postupak je sličan kao i kod



SLIKA 3.5: Postupak dodavanja debljine profila

određivanja centralne linije. Kreće se od ulaznog brida i prve točke. Kut koji zatvara radijus, u prvoj točki, s  $x$  osi iznosi  $\beta_{01} = 90 - \beta_1''$ . Potom je potrebno dodati pola vrijednosti  $s(\xi)$  u smjeru normale i u smjeru suprotnome od normale. Postupak je prikazan na slici 3.5. Zatim se iz jednostavnih trigonometrijskih odnosa izračuna prirast  $dx$  i  $dy$ , te se izračunate vrijednosti  $dx$  i  $dy$  dodaju na postojeće vrijednosti koordinata  $x$  i  $y$ . Jednadžbe glase:

$$dx = \frac{s}{2} \cos \beta_{0k} \quad dy = \frac{s}{2} \sin \beta_{0k} \quad (3.17)$$

Tlačna strana se dobije oduzimanjem  $dx$  i  $dy$  od postojećih koordinata, a podtlačna strana se dobije zbrajanjem  $dx$  i  $dy$  sa postojećim koordinatama.

### 3.2.2 Oblik srednje linije

Kako je već spomenuto, profili su trenutno smješteni u  $xy$  ravnini na način da je centralna linija, u točki  $k/2$  smještena u ishodište. Sljedeći korak u postupku profiliranja profila lopatice jest dodavanje  $z$  koordinate svakom od profila. U uvodu je rečeno da se oblikom srednje linije definira karakterističan srpasti izgled lopatice. U nastavku će biti prikazan i objašnjen postupak definiranja srednje linije. Oblik srednje linije je kružni luk, te je stoga potrebno definirati parametre kružnog luka po kojim će se zatim raspodijeliti profili. Osnovna ideja za raspodjelu profila jest ta da se za svaki profil izračuna pomak referentne točke, odnosno da se referentna točka smjesti na srednju liniju, a zatim se sve ostale točke pomaknu za isti pomak kao i referentna točka. Referentna točka profila je na vrijednosti varijable  $k/2$ .

Oblik srednje linije prikazan je na slici 3.6. Početak i kraj kružnog luka određeni su koordinatama:

$$x_b = 0; z_b = r_h \quad x_e = r_s \sin \alpha; z_e = r_s \cos \alpha \quad (3.18)$$

Kut  $\alpha$  je poznat. Kut koji zatvara tetiva kružnog luka  $a$  s  $y$  osi iznosi:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{x_e}{z_e - z_b} \quad (3.19)$$

Parametri kružnog luka prikazani su na slici 3.7. Preporučena visina kružnog luka  $h$  iznosi:

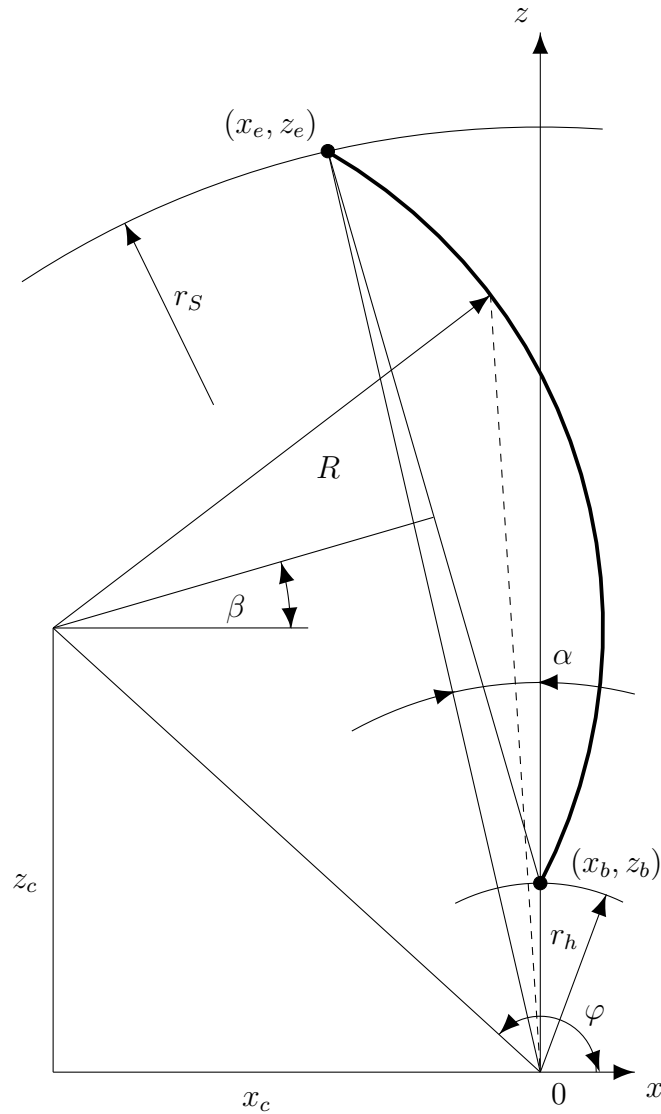
$$h = \frac{1}{2} \alpha r_s \quad (3.20)$$

Duljina tetive  $a$  kružnog luka određuje se iz izraza:

$$a = \sqrt{(z_e - z_b)^2 + (x_e - x_b)^2} \quad (3.21)$$

Radijus kružnog luka  $R$  određuje se iz izraza:

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{4h} + h \right) \quad (3.22)$$



SLIKA 3.6: Raspodjela profila duž z osi po zakonitosti kružnog luka

Visina trokutastog isječka  $d$  definira se kao:

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{|4R^2 - a^2|} \quad (3.23)$$

Nadalje, potrebno je izračunati koordinate centra kružnog luka.

$$\begin{aligned} x_c &= x_b - \frac{1}{2}a \cos \beta - d \sin \beta \\ z_c &= z_b + \frac{1}{2}a \sin \beta - d \cos \beta \end{aligned} \quad (3.24)$$

Zatim je potrebno koordinate centra kružnog luka iz kartezijevog koordinatnog sustava prebaciti u polarni koordinatni sustav:

$$\rho_0 = \sqrt{x_c^2 + z_c^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{x_c}{z_c} \quad (3.25)$$

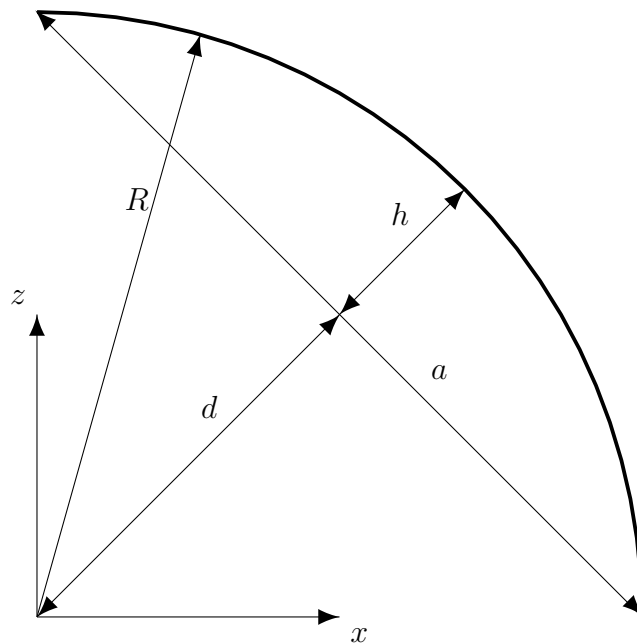
Kut  $\gamma$  što ga zatvara linija koja spaja ishodište koordinatnog sustava sa točkom  $k/2$  profila proračunatnog za radijus  $r_i$  i pozitivnom smjerom  $x$  osi, određuje se iz kosinusovog poučka:

$$\gamma = \varphi + \cos^{-1} \frac{\rho_0^2 + r_i^2 - R^2}{2\rho_0 r_i} \quad (3.26)$$

Na kraju, položaj točke se računa iz izraza:

$$x_{k/2} = r_i \sin \gamma \quad z_{k/2} = r_i \cos \gamma \quad (3.27)$$

Budući da se koristio programski paket Scilab za implemetaciju ovog proračuna,

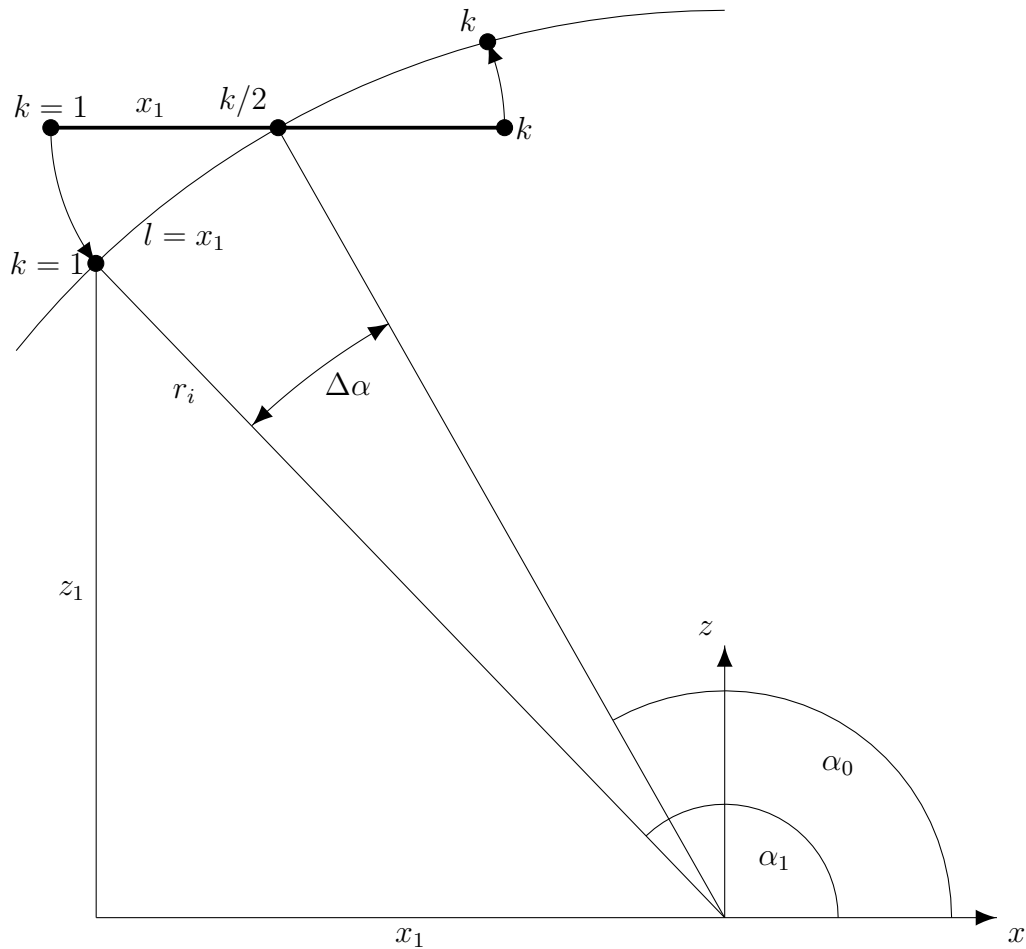


SLIKA 3.7: Parametri kružnog luka

sve su jednadžbe već prilagođene za korištenje u tom programskom paketu.

### 3.2.3 Mapiranje profila na cilindričnu površinu

Na kraju svega potrebno je izvršiti postupak mapiranja profila na cilindričnu površinu. U osnovi, to je pomicanje točke profila na cilindričnu površinu, uz uvjet da duljina kružnog luka odgovara udaljenosti točke u odnosu na referentnu točku. Grafički prikaz postupka mapiranja prikazan je na slici 3.8. Kreće se od



SLIKA 3.8: Grafički prikaz postupka mapiranja

točke  $k=1$ . Kako je prije rečeno, osnovni uvjet koji mora biti zadovoljen jest taj da položaj točke  $k=1$  u odnosu na referentnu točku ( u ovom slučaju to je točka  $k/2$ ) odgovara duljini kružnog luka.

$$l = x_1$$



Kut  $\alpha_0$  određuje se iz poznatih koordinata referentne točke:

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \frac{z_{k/2}}{x_{k/2}} \quad (3.28)$$

Budući da je u prethodnom poglavlju definirana raspodjela srednje linije, referentni kut što ga zatvara radijus u točki  $k/2$  s  $x$  osi je poznat. Radijus i duljina kružnog luka su poznati, te se lako dolazi do vrijednosti kuta  $\Delta\alpha$ .

$$\Delta\alpha = \frac{l}{r_i} \quad (3.29)$$

Tada se računa vrijednost novog kuta  $\alpha_1$  što ga zatvaraju radijus u točki  $k=1$ , ali je sada ta točka prebačena na cilindar.

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \Delta\alpha \quad (3.30)$$

Na kraju, iz trigonometrijskih odnosa dolazi se do vrijednosti novih koordinata točke  $k=1$ .

$$x_1 = r_i \cos \alpha_1 \quad z_1 = r_i \sin \alpha_1 \quad (3.31)$$

Postupak se ponavlja za svih  $k$  točaka i  $m$  profila.

# Rezultati

## 4.1 Primjer proračuna

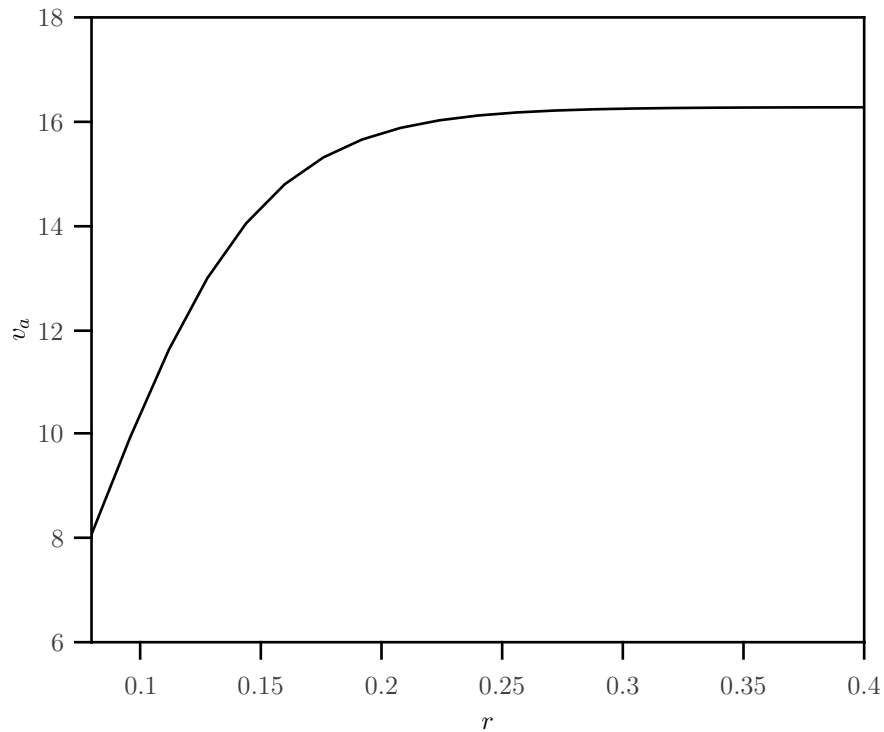
U ovome poglavlju će biti prikazan primjer proračuna prema iznesenoj teoriji u radu. Proračun kreće određivanjem funkcija 2.27 i 2.32. Potrebno je odrediti koeficijente u tim jednadžbama kako bi se definirale promjene aksijalne brzine i ukupne energije od korijena prema vrhu. Ulazni parametri će radi preglednosti biti prikazani tablično. Srednja aksijalna brzina se računa iz izraza 2.25 i ona iznosi  $v_{a,avg}=15,65$  m/s. Aksijalne brzine strujanja u korijenu i vrhu se odrede iz jednadžbe 2.26. Funkcija koja definira promjenu aksijalne brzine od korijena do vrha glasi:

$$v_a(r) = 8,07 + (16,28 - 8,07) \tanh[(14,44(r - 0,08))]$$

Funkcijska promjena aksijalne brzine prikazana je na slici 4.1.

TABLICA 4.1: Ulazne veličine

$Q$	$\Delta p$	$\rho$	$\eta$	$r_h$	$r_s$	$rv_{ah}$	$rv_{as}$	$DDv_a$	$sc$
7,554	196,6	1,2	0,6	0,08	0,4	0,52	1,04	0,2	118,5
$scMod$	$\beta_{2h}$	$u_h$	$v_{uh}$	$(uv_u)_h$	$(uv_u)_s$	$DDuv_u$	$sc$	$m$	$k$
14,44	72,68	8,04	5,53	44,44	366,1	0,9	794	20	50



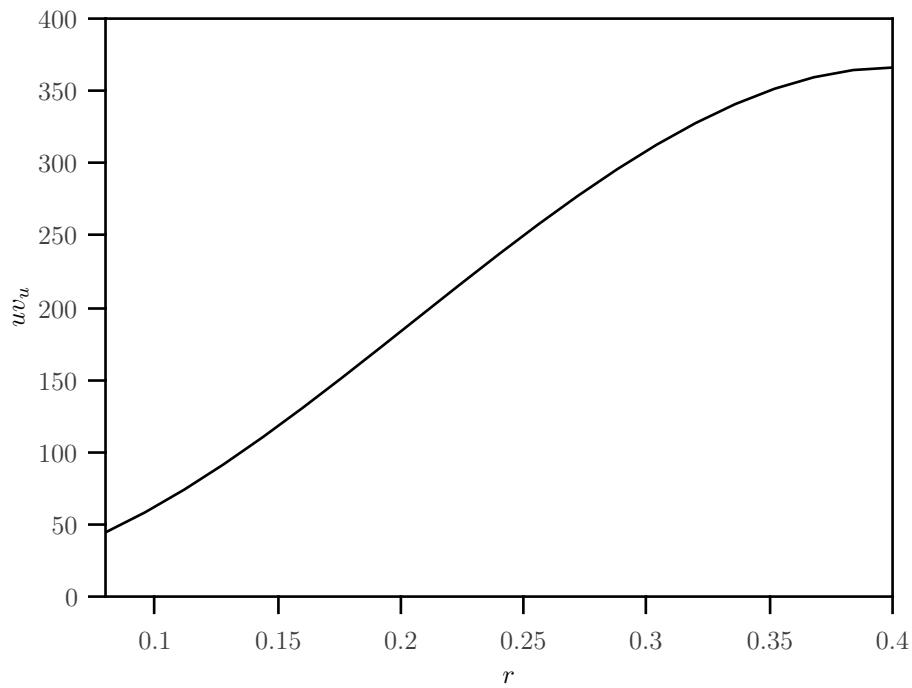
SLIKA 4.1: Funkcijska promjena aksijalne brzine

Dalje je potrebno odrediti koeficijente u jednadžbi 2.32. Prosječna specifična energija određuje se iz jednadžbe 2.31 i iznosi  $(uv_u)_{avg}=273,1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Tangencijalna brzina u korijenu,  $u_h$  računa se iz jednadžbe 2.37. Komponenta brzine  $v_u$  se određuje iz trokuta brzina prema slici 2.9, uz uvjet ograničavanja kuta toka na izlaznom bridu lopatice,  $\beta_{2h}$ . Ukoliko se ne ograniči vrijednost kuta toka na izlazu lopatice, moguće je da geometrijski kut na izlazu lopatice poprimi vrijednost veću od  $90^\circ$ . Polinom trećeg stupnja koji definira promjenu specifične energije, uz vrijednosti koeficijenata prema jednadžbama 2.35 i 2.36, glasi:

$$uv_u(r) = 44,44 + 793,96(r - 0,08) + 4462,49(r - 0,08)^2 - 11881,34(r - 0,08)^3$$

Funkcijska promjena specifične energije prikazana je na slici 4.2.

Rezultati proračuna su zbog preglednosti prikazani tablično i grafički.

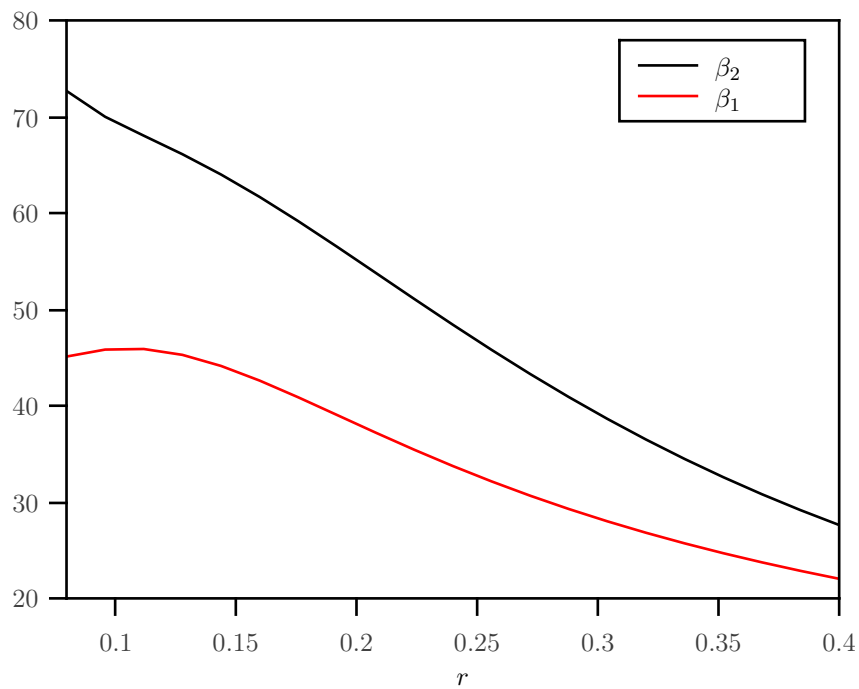


SLIKA 4.2: Funkcijska promjena specifične energije

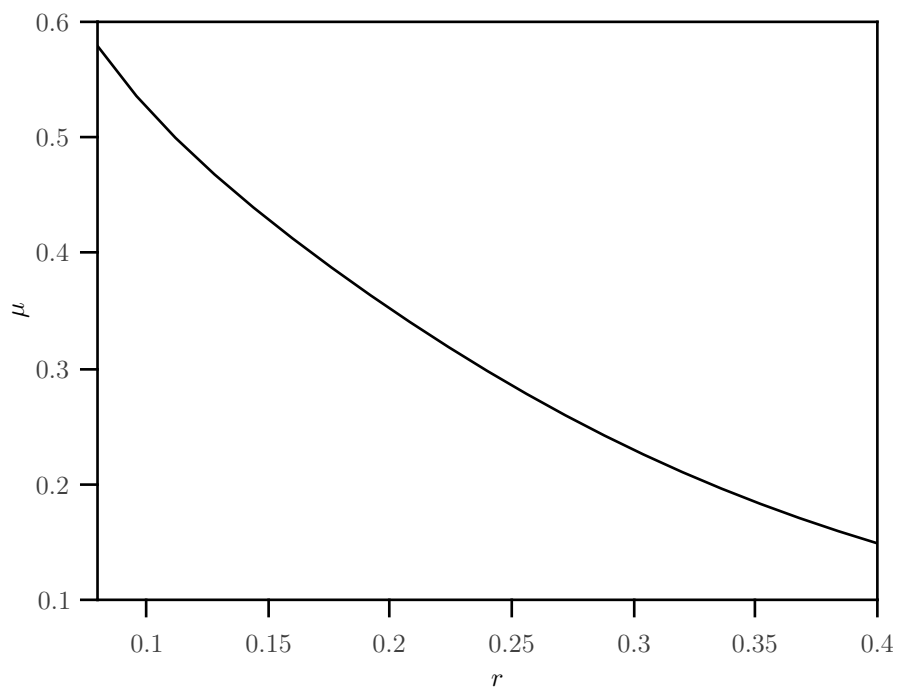
TABLICA 4.2: Izlazne veličine

$r$	$v_a$	$u$	$uv_u$	$v_u$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_m$	$\theta_\infty$
0,0800	8,0714	8,0425	44,438	5,5254	45,103	72,680	58,891	27,577
0,0960	9,9341	9,6510	58,235	6,0341	45,828	69,994	57,911	24,166
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,3840	16,273	38,604	364,41	9,4396	22,857	29,160	26,008	6,3031
0,4000	16,273	40,212	366,13	9,1050	22,033	27,616	24,824	5,5832
$l$	$t$	$s$	$\mu$	$\nu$	$\Delta\beta_1$	$\Delta\beta$	$\beta_1''$	$\beta_2''$
0,0900	0,0838	0,0060	0,5791	10,020	1,1265	1,3001	35,082	82,700
0,0962	0,1005	0,0059	0,5358	10,470	1,0574	0,9684	35,358	80,464
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,1772	0,4021	0,0041	0,1594	16,620	0,3476	0,0675	6,2368	45,780
0,1800	0,4189	0,0040	0,1489	15,958	0,3236	0,0598	6,0744	43,574

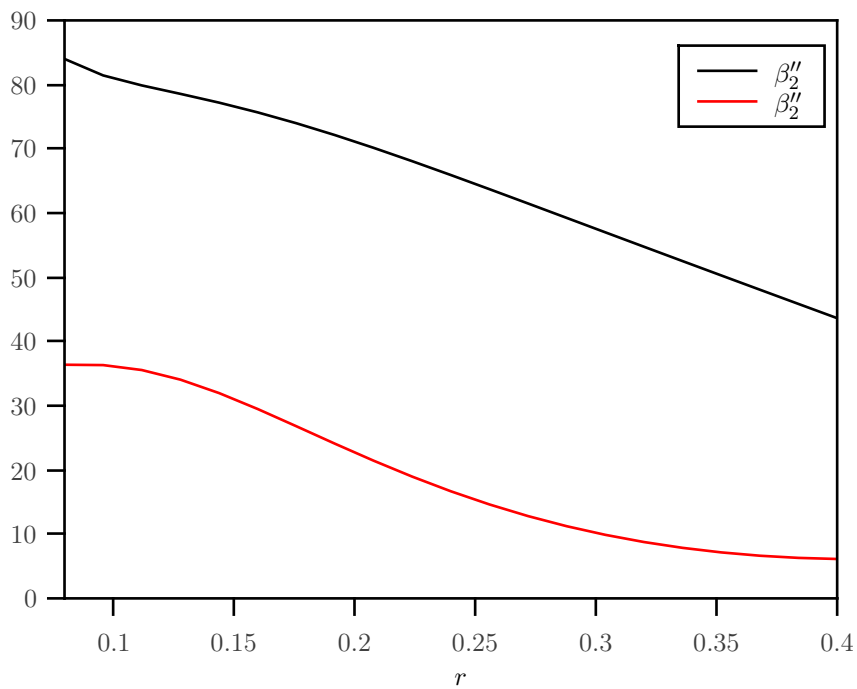
Promjena kutova toka u ovisnosti o radijusu lopatice prikazana je na slici 4.3. Na slici 4.4 je prikazana ovisnost Weingogovog faktora o radijusu lopatice. Na slici 4.5 je prikazana promjena geometrijskih kutova u ovisnosti o radijusu lopatice. Na slici 4.6 prikazan je promjena duljine tetice lopatice i razmaka između lopatica, a na slici 4.7 prikazana je promjena maksimalne debljine lopatice.



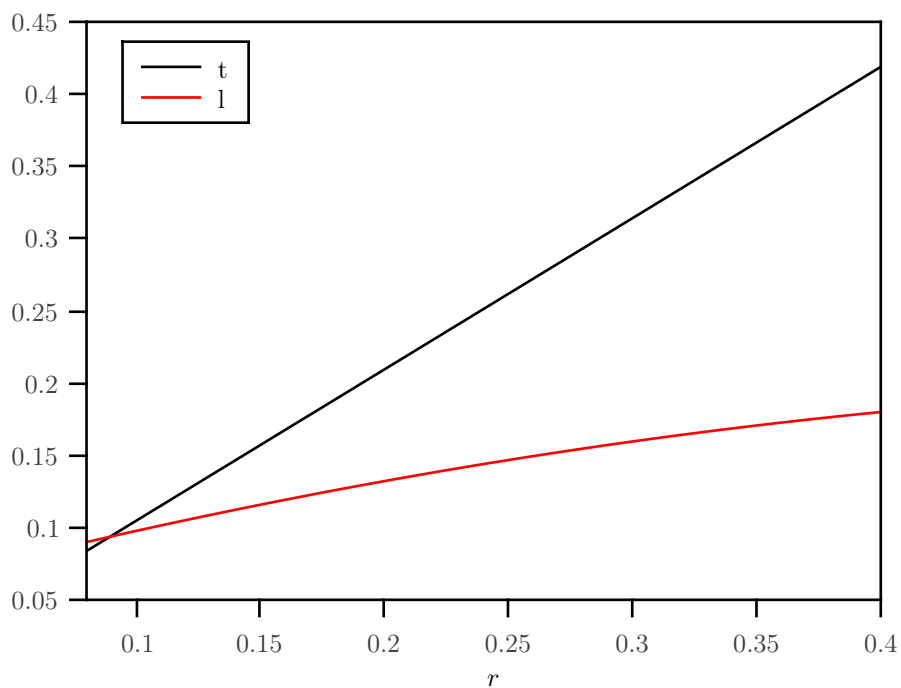
SLIKA 4.3: Promjena kutova toka



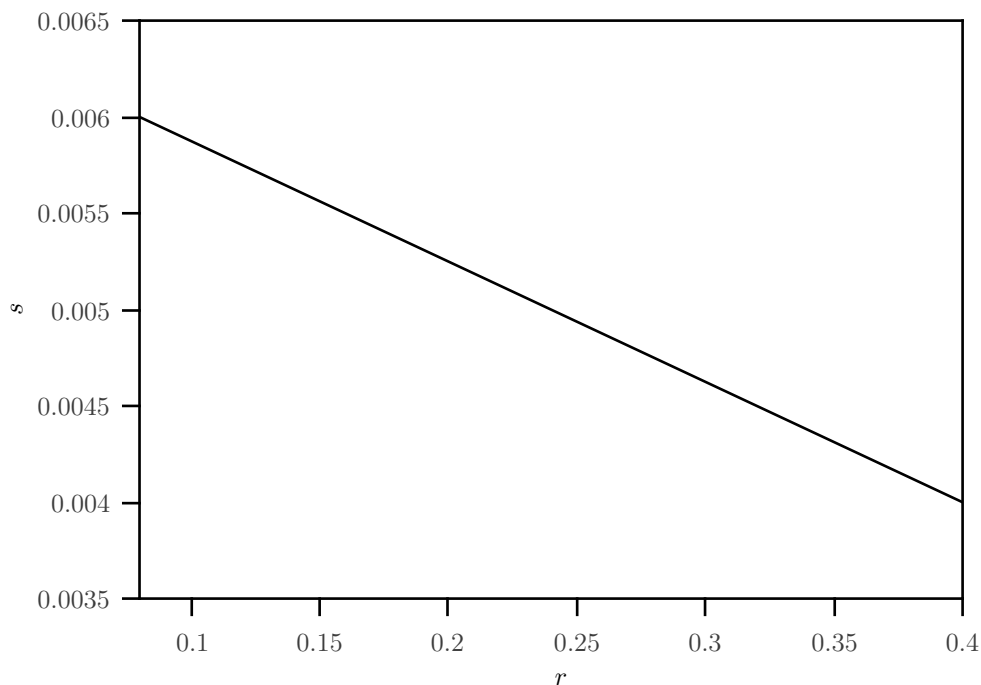
SLIKA 4.4: Ovisnost Weibig-ovog faktora



SLIKA 4.5: Promjena geometrijskih kutova

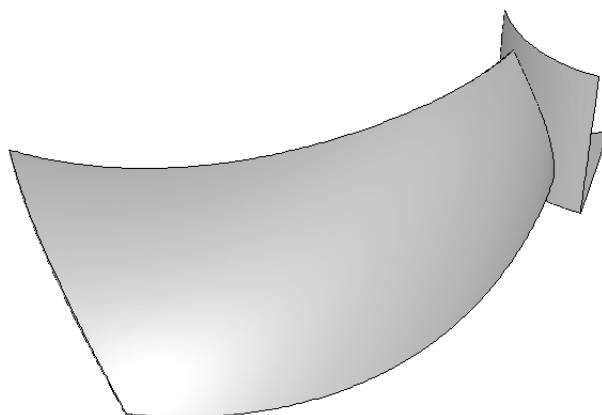


SLIKA 4.6: Promjena duljine tetive i razmaka između lopatica

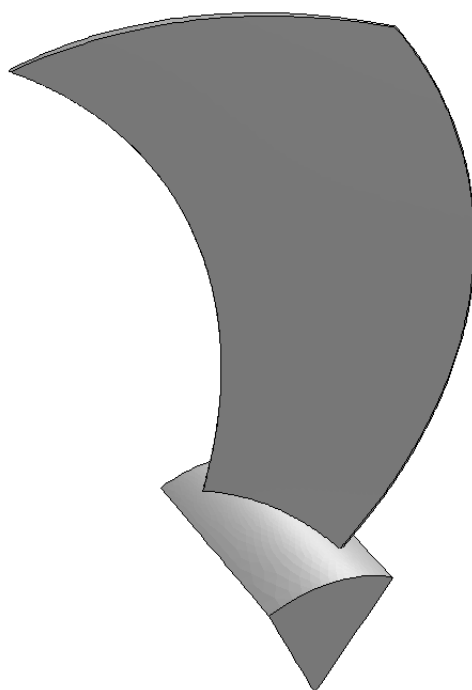


SLIKA 4.7: Promjena maksimalne debljine lopatice

Sljedeći korak u profiliranju lopatice je konstrukcija profila i proračun tlačne i podtlačne strane. Profili se konstruiraju prema teoriji iznesenoj u poglavlju 3.2.1. U ovom trenutku profili su sa svojim ulaznim bridom smješteni u ishodište koordinatnog sustava te je potrebno u ishodište koordinatnog sustava postaviti referentnu točku ( $k/2$ ) na način da se sve točke pomaknu za koordinate točke smještene u  $k/2$ . Sada je proračunati tlačnu i podtlačnu stranu kako je pokazano u 3.2.1. Zatim se definira oblik srednje linije na koji će se zatim raspodijeliti profili. U poglavlju 3.2.2 je detaljno objašnjen ovaj postupak. Na kraju, prema poglavlju 3.2.3 je potrebno provesti postupak mapiranja na cilindričnu površinu. Ovim postupkom je kompletiran proces profiliranja lopatice. Jedna lopatica, dobivena proračunom i postupcima iznesenim u ovom radu, prikazana je na slikama 4.8 i 4.9.



SLIKA 4.8: Prikaz dobivene lopatice



SLIKA 4.9: Prikaz dobivene lopatice



# Zaključak

U sklopu rada razvijen je postupak za profiliranje srpastih lopatica aksijalnog ventilatora. Uz osnovne projektne parametre protoka i prirasta zaustavnog tlak, postupak dozvoljava zadavanje proizvoljnog profila aksijalne brzine i predane specifične energije od korijena prema vrhu lopatice čime se omogućava oblikovanje lopatica i u slučaju kada nije moguće zadovoljiti uvjet radijalne ravnoteže. Srednja linija lopatice parametarski je definirana na način da se odabirom parametra oblik linije može mijenjati od ravnog prema uvijenom u smjeru rotacije rotora. Postupak oblikovanja lopatice implementiran je u računalnom programu Scilab. Rezultat oblikovanja je skup točaka koje definiraju tlačnu i podtlačnu stranu lopatice. U budućem radu potrebno je provjeriti stvarni ostvareni protok i prirast zaustavnog tlaka ventilatora sa srpastom lopaticom primjenom numeričkog modela strujanja.

# Literatura

- [1] <http://www.aircontrolindustries.com/us/technical/industrial-blower-selection/>.
- [2] Budugur Lakshminarayana. *Fluid Dynamics and Heat transfer of Turbomachinery*. John Wiley And Sons, 1996.
- [3] Bruno Eck. *Fans*. Pergamon Press, 1962.
- [4] Željko Tuković. *Osnove turbostrojeva*, skripta, 2006.
- [5] S.L. Dixon and C.A. Hall. *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. Elsevier Inc., 2010.
- [6] Meinhard Schobeiri. *Turbomachinery Flow Physics and Dynamic Performance*. Springer, 2005.
- [7] K. S. Rao. *Numerical methods for scientists and engineers*, 2004.
- [8] K. E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis*, 2001.