

# Proračun koeficijenta otpora i tlaka za optjecanje cilindra podkritičnim Reynoldsovim brojem

---

**Batistić, Ivan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:935128>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-31**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**

**Ivan Batistić**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Dr. sc. Dubravko Matijašević

Student:

Ivan Batistić

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći pritom znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru na svojoj pomoći, komentarima i utrošenom vremenu što je bilo od neprocjenjive važnosti.

Ivan Batistić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ivan Batistić**

Mat. br.: 0035190660

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

**Proračun koeficijenata otpora i tlaka za optjecanje cilindra  
podkritičnim Reynoldsovim brojem**

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

**Drag and pressure coefficient calculation for subcritical Reynolds  
number flow around a cylinder**

Opis zadatka:

Poznat je problem kritičnosti odabira modela turbulencije, za rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi osrednjenih Reynoldsovih osrednjavanjem (RANS), u svrhu proračuna strujanja s podkritičnim Reynoldsovim brojem.

Cilj ovog rada je proračun opstrujavanja cilindra podkritičnim Reynoldsovim brojem s dva RANS modela turbulencije pri tri vrijednosti Reynoldsovog broja. Potrebno je usporediti rezultate proračuna u vidu:

1. Tablične usporedbe koeficijenta otpora
2. Grafičke usporedbe koeficijenta tlaka na stjenci cilindra.

U radu je potrebno navesti popis korištene literature.

Zadatak zadan:

25. studenog 2015.

Rok predaje rada:

1. rok: 25. veljače 2016
2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.
3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane

1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016
3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016

Zadatak zadao:

Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Predsjednik Povjerenstva

Prof. dr. sc. Igor Balen

**Sadržaj:**

<b>Popis slika</b>	<b>I</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>II</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>III</b>
<b>Sažetak</b>	<b>IV</b>
<b>1 OPĆENITO O MEHANICI FLUIDA</b>	<b>1</b>
1.1 Računalna dinamika fluida - RDF . . . . .	2
1.2 Primjena računalne dinamike fluida . . . . .	2
<b>2 OSNOVNE JEDNAŽBE DINAMIKE FLUIDA</b>	<b>3</b>
2.1 Reynoldsov transportni teorem . . . . .	4
2.2 Zakon očuvanja mase (jednažba kontinuiteta) . . . . .	4
2.3 Zakon očuvanja količine gibanja (jednažba gibanja fluida) . . . . .	4
2.4 Konstitutivne (dopunske) jednažbe . . . . .	5
<b>3 OPTJECANJE TIJELA - TEORIJA GRANIČNOG SLOJA</b>	<b>6</b>
3.1 Popis bezdimenzisjkih značajki karakterističnih za promatrani problem . . . . .	6
3.2 FIZIKALNE POJAVE PRILIKOM OPSTRUJAVANJA CILINDRA . . . . .	8
3.2.1 Laminarno strujanje . . . . .	8
3.2.2 Turbulentno strujanje . . . . .	10
3.2.3 Frenkvencija odvajanja vrtloga . . . . .	10
<b>4 TURBULENCIJA</b>	<b>11</b>
4.1 Reynoldsovo osrednjavanje Navier-Stokesovih jednažbi (RANS) . . . . .	12
4.2 Modeli turbulencije . . . . .	13
4.3 Modeliranje graničnog sloja . . . . .	14
<b>5 METODA KONAČNIH VOLUMENA</b>	<b>16</b>
5.1 Diskretizacija . . . . .	16
5.2 Prostorna diskretizacija . . . . .	16
5.3 Diskretizacija prostornih integrala . . . . .	17
5.3.1 Difuzijski i konvekcijski protok . . . . .	18
5.4 Numeričke sheme . . . . .	20
5.5 Vremenska diskretizacija . . . . .	21
5.6 Rubni uvjeti . . . . .	21
<b>6 METODE RJEŠAVANJA NAVIER-STOKESOVIH JEDNAŽBI</b>	<b>22</b>
6.1 Nepomaknuta mreža . . . . .	23
6.2 Rhie i Chow interpolacija . . . . .	24
6.3 Povezivanje polja brzine i tlaka . . . . .	24
6.4 PISO algoritam . . . . .	25
6.5 Vremensko osrednjavanje polja tlaka i brzine . . . . .	25

<b>7</b>	<b>NUMERIČKA SIMULACIJA</b>	<b>26</b>
7.1	2D PRISTUP . . . . .	26
7.2	3D PRISTUP . . . . .	34
<b>8</b>	<b>ZAKLJUČAK</b>	<b>38</b>

## Popis slika:

1	Podjela Mehanike fluida . . . . .	1
2	Sile pri opstrujavanju tijela . . . . .	6
3	Koeficijenti u ovisnosti o vremenu . . . . .	7
4	Slika strujanja ( $Re \ll 1$ ) . . . . .	8
5	Slika strujanja ( $Re=30$ ) . . . . .	9
6	Slika strujanja ( $Re=195$ ) . . . . .	9
7	Nastajanje vrtloga . . . . .	9
8	Podjela opstrujavanja prema tipu toka . . . . .	10
9	Pristupi u modeliranju turbulencije . . . . .	11
10	Tok energije turbulentnog strujanja . . . . .	11
11	Ponašanje fizikalne veličine $\psi$ u strujanju . . . . .	12
12	Granični sloj u turbulentnom strujanju . . . . .	14
13	Turbulentni granični sloj . . . . .	14
14	Kontrolni volumen . . . . .	17
15	Kontrolni volumen u interakciji s okolinom . . . . .	18
16	Uz definiciju LUDS sheme . . . . .	20
17	Raspored čvorova za nepomaknutu mrežu . . . . .	23
18	Domena proračuna . . . . .	26
19	Diskretizacija područja proračuna oko cilindra . . . . .	26
20	Koeficijenti otpora $C_D$ za Reynoldsov broj 1000 . . . . .	28
21	Koeficijenti otpora $C_D$ za Reynoldsov broj 2000 . . . . .	28
22	Koeficijenti otpora $C_D$ za Reynoldsov broj 3900 . . . . .	28
23	Strujnice osrednjenog strujanja $k - \omega$ SST $Re = 1000$ . . . . .	29
24	Strujnice osrednjenog strujanja $k - kl - \omega$ $Re = 1000$ . . . . .	29
25	Strujnice osrednjenog strujanja <i>Laundry - Sharma</i> $k - \epsilon$ $Re = 1000$ . . . . .	29
26	Definicija kuta $\Theta$ . . . . .	30
27	Koeficijenti tlaka $C_p$ za Reynoldsov broj 1000 . . . . .	30
28	Koeficijenti tlaka $C_p$ za Reynoldsov broj 2000 . . . . .	30
29	Koeficijenti tlaka $C_p$ za Reynoldsov broj 3900 . . . . .	31
30	Koeficijent otpora $\bar{C}_D$ . . . . .	31
31	Usporedba koeficijenta tlaka na $\Theta = 180^\circ$ . . . . .	32
32	Polja turbulentne viskoznosti za $Re = 1000$ . . . . .	33
33	Diskretizacija područja oko cilindra (3D mreža) . . . . .	34
34	Trenutna brzina $U_z$ na $x - z$ ravnini, $z = 2.5$ ( <i>Laundry - Sharma</i> $k - \epsilon$ ), $Re = 1000$ . . . . .	35
35	$\omega_{mag} = 0.5$ , <i>Laundry - Sharma</i> $k - \epsilon$ model, $Re = 1000$ . . . . .	35
36	Koeficijent otpora $C_D$ , $Re = 1000$ . . . . .	36
37	Koeficijenti otpora $k - kl - \omega$ . . . . .	36
38	Razlika u recirkulacijskoj zoni sa <i>Laundry - Sharma</i> $k - \epsilon$ modelom, $Re = 1000$ . . . . .	37
39	Strujnice osrednjenog strujanja $k - kl - \omega$ , $Re = 1000$ . . . . .	37
40	Fotografija pri eksperimentalnom mjerenju $Re = 2000$ [1] . . . . .	37



**Popis tablica:**

1	Broj dodatnih transportnih jednažbi ovisno o modelu turbulencije	13
2	Rubni uvjeti . . . . .	21
3	Konvergencija rješenja . . . . .	27
4	Usporedba vremenski osrednjenog koeficijenta otpora $\overline{C_D}$ . . . . .	27
5	Usporedba vremenski osrednjenog koeficijenta otpora $\overline{C_D}$ . . . . .	34

## Popis oznaka

Oznaka	Opis	Jedinica
$A$	Referentna površina za koeficijent uzgona i otpora	$m^2$
$a_P$	Centralni koeficijent u diskretiziranim jednažbama	
$a_N$	Koeficijent susjednog čvora u diskretiziranim jednažbama	
$C_D$	Bezdimenzijski koeficijent otpora	1
$C_L$	Bezdimenzijski koeficijent uzgona	1
$C_p$	Bezdimenzijski koeficijent tlaka	1
$D$	Promjer cilindra	m
$D$	Jačina difuzije	kg/s
$F$	Jačina konvekcije	kg/s
$f_i$	Komponente vektora specifične masene sile	N/kg
$k$	Kinetička energija turbulencije	J/kg
$l$	Karakteristična duljina turbulentnih fluktacija	m
$l$	Udaljenost između proračunskih čvorova	m
$n$	Jedinični vektor vanjske normale	
$p$	Tlak	N/m <sup>2</sup>
$\bar{p}$	Statistički osrednjeno polje tlaka	N/m <sup>2</sup>
$p'$	Pulsirajući dio polja tlaka	N/m <sup>2</sup>
$Re$	Reynoldsov broj	1
$S$	Površina	m <sup>2</sup>
$S_\varphi$	Izvorski član u općoj konveksijsko-difuzijskoj jednažbi	
$S_f$	Površina stranice ćelije	m <sup>2</sup>
$t$	Vrijeme	s
$T_o$	Vremenski interval	s
$U_{ulaz}$	Ulazna brzina fluida u proračunsku domenu	m/s
$u^+$	Bezdimenzijska brzina	1
$v_i$	Komponente vektora brzine	m/s
$\bar{v}_i$	Osrednjeni dio vektora brzine	m/s
$v'_i$	Pulsirajući dio vektora brzine	m/s
$v_n$	Projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale	m/s
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$x_i$	Pravokutne koordinate	m
$y^+$	Bezdimenzijska udaljenost	1
$\Gamma$	Koeficijent difuzije	kg/ms
$\delta_{ij}$	Kroneckerov simbol	
$\Theta$	Kut	°
$\mu$	Dinamička viskoznost	kg/Pas
$\mu_t$	Turbulentna viskoznost	kg/Pas
$\rho$	Gustoća	kg/m <sup>3</sup>
$\Sigma$	Simetrični tenzor viskoznih naprezanja	N/m <sup>2</sup>
$\sigma_{ij}$	Tenzor naprezanja	N/m <sup>2</sup>
$\Omega$	Mjera volumena ćelije	m <sup>3</sup>
$\partial\Omega$	Zatvoren rub kontrolnog volumena	m <sup>2</sup>

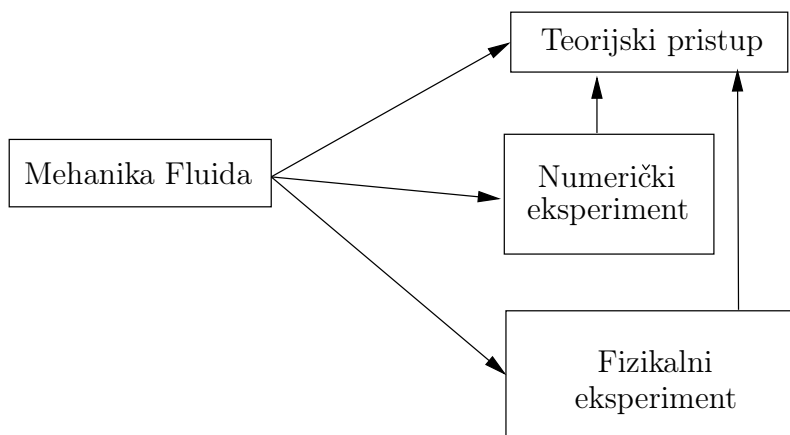
## SAŽETAK

U ovom radu razmatraju se RANS modeli turbulencije za numeričku simulaciju strujanja oko cilindra u području potkritičnih Reynoldsovih brojeva. Potkritičnim područjem naziva se ono područje u kojem se na stijenci ne javlja turbulentni tok fluida pa se za gornju mjeru potkritičnog područja uzima  $Re = 3 \times 10^5$  [2]. S druge strane, donji Reynoldsov broj za koji se javlja turbulentni tok pri opstrujavanju cilindra je  $Re = 190$ , za koji se turbulencija javlja u Karmanovom vrtložnom tragu. Dakle, područje Reynoldsovih brojeva koje se promatra u ovom radu je  $190 \div 3 \times 10^5$ . Iz promatranog područja odabrana su tri Reynoldsova broja: 1000, 2000 i 3900 u kojima su ispitivani modeli turbulencije bazirani na Reynoldsovom osrednjavanju Navier-Stokesovih jednažbi (RANS), te je validirana njihova pouzdanost za dobivanje vremenski osrednjenog koeficijenta otpora i tlaka kao predstavnika veličina značajnih za inženjersku praksu. Korišten je programski paket za numeričke simulacije OpenFOAM [3]. Provedeni numerički pokusi, kao i literatura, pokazuju da se 2D simulacijom ne mogu dobiti upotrebljivi rezultati te da su RANS rezultati 3D simulacija nepouzdana za promatrano područje Reynoldsovih brojeva.

# 1 OPĆENITO O MEHANICI FLUIDA

Po definiciji, fluid je tvar koja se pod djelovanjem ma kako malog tangencijalnog naprezanja neprekidno deformira (struji). Fluide dijelimo, s obzirom na veličinu deformacije, kao posljedicu tlačnog naprezanja na stlačive i nestlačive. Fluid koji se razmatra u mehanici fluida zadovoljava pretpostavku uvjeta kontinuuma, što iz razmatranja isključuje razrijeđene plinove [4, 5]. Mehaniku fluida u gibanju možemo podijeliti na kinematiku fluida koja se bavi zakonima gibanja fluida, i dinamiku fluida koja se bavi silama koje djeluju na fluid [5].

Mehanika fluida je teorijsko eksperimentalna znanost koja se bavi proučavanjem gibanja fluida i silama koje djeluju na fluid. U teorijskom pristupu analizira se matematički model fluida. Analitičko rješenje daje uvid u fiziku nekog problema, a jednom određeno analitičko rješenje neke klase strujanja pogodno je za analizu utjecaja pojedinih parametara u matematičkom modelu [5, 6]. No, takav pristup je značajno ograničen zbog složene prirode problema te se pribjegava eksperimentalnom pristupu. Važno je napomenuti da iza svakog eksperimenta stoji teorija na kojoj će se temeljiti mjerenja. Budući da se u prirodi u većini slučajeva pojavljuje turbulentno strujanje, koje nije moguće opisati analitički zbog njihova kaotičnog ponašanja, u prošlosti se pribjegavalo eksperimentima. Danas, razvojem računala, stvoreni su uvjeti za numeričko rješavanje raznih matematičkih modela što omogućuje da se eksperimenti rade i numerički. Izrečenu podjelu možemo grafički prikazati na sljedeći način:



Slika 1. Podjela Mehanike fluida

- **Numerički eksperiment** - eksperiment koji se provodi numeričkim proračunom na numeričkom modelu.
- **Fizikalni eksperiment** - eksperiment koji se vrši u zračnom tunelu ili u letu, bez obzira radi li se o fizikalnom modelu u mjeri ili prototipu [7].

## 1.1 Računalna dinamika fluida - RDF

Modelska ispitivanja složenijih pojava na fizikalnom modelu skupa su i dugotrajna, kako u pripremi, tako i u izvođenju, te zahtjevna u osiguravanju ponovljivosti. Posebno je potrebno voditi računa o zadovoljavanju uvjeta sličnosti između modela i prototipa koji se često ne mogu u potpunosti zadovoljiti, za razliku od numeričkog pristupa koji to može.

U posljednjih četrdeset godina u inženjersku praksu polako ulazi numeričko ispitivanje fizikalnih pojava kao zamjenski alat za fizikalno ispitivanje. Potrebno je odmah na početku reći da numeričko ispitivanje neće u skoroj budućnosti u cijelosti zamijeniti ispitivanja na fizikalnom modelu. Razvoj i validacija numeričkih modela omogućuje da numeričko eksperimentiranje svakim danom postaje sve pouzdaniji inženjerski "alat", ali oprezan istraživač će rezultate numeričkih simulacija uvijek provjeriti na sličnim dostupnim rezultatima dobivenim fizikalnim ispitivanjima [7].

Računalne simulacije daju kompletniju sliku polja pri strujanju te skraćuju vrijeme i troškove projektiranja. Za razliku od fizikalnog eksperimenta u numeričkom eksperimentu relativno je jednostavno mijenjati geometriju promatranog objekta ili uvjete strujanja. Može se reći da su fizikalni i numerički eksperiment dva komplementarna pristupa koja se međusobno nadopunjuju i jedan drugom pomažu u razvoju.

Tijek numeričke simulacije može se prikazati na sljedeći način:

- Definicija problema i matematičkog modela → PREDPROCESOR
  - Odabir matematičkog modela fizike promatranog problema
  - Zadavanje rubnih uvjeta
  - Diskretizacija promatrane domene
- Numeričko rješavanje matematičkog modela → PROCESOR
  - Diskretizacija jednažbi matematičkog modela
  - Numeričko rješavanje sustava diskretiziranih jednažbi
- Analiza rješenja → POSTPROCESOR
  - Brojčana i vizualna interpretacija rezultata

## 1.2 Primjena računalne dinamike fluida

Računalna dinamika fluida ima jako široku primjenu i njezin nagli rast ima veliki utjecaj na industriju. U ovom radu promatra se strujanje oko cilindra koje je važan problem jer ima široku primjenu u praksi kao što je strujanje oko dimnjaka, dijelova mosta, platforma, podmornica, itd.

## 2 OSNOVNE JEDNAŽBE DINAMIKE FLUIDA

Fizikalni zakoni definirani su za materijalni volumen, a u mehanici fluida izvodi se transportna jednažba za generalnu fizikalnu veličinu.

Tada se promatraju osnovni zakoni na kojima se temelji dinamika fluida:

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja
3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja
4. Zakon očuvanja energije
5. Drugi zakon termodinamike

Ovi zakoni definirani su za zatvoreni termodinamički sustav odnosno materijalni volumen  $V_M(t)$  koji će se uvijek sastojati od istih čestica fluida. Važno je napomenuti da se razmatra homogen, jednofazan i kemijski inertan fluid uz pretpostavku hipoteze kontinuuma. Kod takvog fluida jednažba momenta količine gibanja ne nosi nikakvu novost u odnosu na jednažbu očuvanja količine gibanja osim simetričnosti tenzora naprezanja. Drugi zakon termodinamike je pasivna jednažba i ne trebamo je razmatrati. S obzirom na to da se u ovom radu promatra nestlačiv izotermni tok, može se zanemariti i zakon očuvanja energije.

Preostali relevantni zakoni su:

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja

Računalna dinamika fluida prihvaća formulaciju zakona očuvanja u okviru kontrolnog volumena koji se lako može identificirati.

$$\Omega = \text{proizvoljni fiskni volumen} \quad \partial\Omega = \text{rub područja } \Omega \quad (2.1)$$

Zakone očuvanja poželjno je definirati u obliku u kojem su zavisne varijable specifična svojstva koja ne ovise o količini tvari. Ekstezivna svojstva u takvoj formulaciji dobivaju se množenjem pripadajućih specifičnih svojstava s gustoćom:

$\phi \rightarrow$  ekstezivno svojstvo

$\varphi \rightarrow$  specifično svojstvo

$$\int_V \phi \, dV = \int_V \rho \varphi \, dV \quad (2.2)$$

## 2.1 Reynoldsov transportni teorem

Reynoldsov transportni teorem koristi se za preformulaciju osnovnih zakona s materijalnog volumena na kontrolni volumen, a glasi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_{\partial \Omega} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.3)$$

*Brzina promjene sadržaja  $\phi$  unutar materijalnog volumena  $V_M$  jednaka je brzini promjene sadržaja  $\phi$  unutar kontrolnog volumena i brzini promjene sadržaja  $\phi$  uslijed protjecanja fluida kroz granice kontrolnog volumena.*

## 2.2 Zakon očuvanja mase (jednažba kontinuiteta)

Zakon očuvanja mase, za materijalni volumen, riječima glasi: *Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli* [6].

Matematički zapis ovog zakona:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho dV = 0. \quad (2.4)$$

Korištenjem Reynoldsovog transportnog teorema to možemo zapisati u obliku:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV + \oint_{\partial \Omega} \rho v_j n_j dS. \quad (2.5)$$

Primjenom teorema Gauss-Ostrogradsky prelazi se na integral po volumenu  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} dV = 0. \quad (2.6)$$

Obzirom da (2.6) vrijedi za bilo koji volumen  $\Omega$ , slijedi diferencijalni konzervativni oblik jednažbe kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (2.7)$$

Ako nema promjene volumena čestice fluida radi se o nestlačivom strujanju pa diferencijalna jednažba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.8)$$

## 2.3 Zakon očuvanja količine gibanja (jednažba gibanja fluida)

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen, riječima glasi: *Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen* [6].

Matematički zapis zakona uz primjenu Reynoldsovog transportnog teorema glasi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho v_i dV = \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \oint_{\partial \Omega} \rho v_i v_j n_j dS = \int_{\Omega} \rho f_i dV + \oint_{\partial \Omega} \sigma_i dS. \quad (2.9)$$

Ako primijenimo vezu između vektora i tenzora naprezanja  $\sigma_i(n_j) = n_j\sigma_{ji}$  i Gauss-Ostrogradsky teorem dobivamo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} dV = \int_{\Omega} \rho f_i dV + \int_{\Omega} \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} dV, \quad (2.10)$$

iz čega proizlazi konzervativni diferencijalni zapis zakona količine gibanja koji glasi:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (2.11)$$

Za promatrano strujanje utjecaj gravitacije je zanemaren tj.  $f_i = 0$ , te preostaje modelirati tenzor naprezanja  $\sigma_{ij}$ . Za to nam je potrebna konstitutivna (dopunska) jednažba.

## 2.4 Konstitutivne (dopunske) jednažbe

### Tenzor naprezanja za Newtonovski fluid

Tenzor naprezanja dekomponira se u sferni i devijatroski dio

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji} \quad (2.12)$$

gdje je  $\delta_{ji}$  Kroneckerov delta simbol (jedinični tenzor), a  $\Sigma_{ji}$  simetrični tenzor viskoznih naprezanja. Newtonov zakon viskoznosti uspostavlja linearnu vezu između simetričnog dijela tenzora naprezanja i tenzora brzine deformacije:

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \mu_V - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} = 2\mu D_{ji} + \left( \mu_V - \frac{2}{3}\mu \right) D_{kk} \delta_{ji}. \quad (2.13)$$

Za promatrano nestlačivo strujanje divergencija polja brzine iznosi nula, pa slijedi:

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 2\mu D_{ji}. \quad (2.14)$$

Sada se zakon očuvanja količine gibanja za fluid konstantne gustoće  $\rho$  i viskoznosti  $\mu$  može zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial(v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.15)$$

gdje je:

$$p = \frac{p}{\rho} - \text{kinematički tlak} \quad (2.16)$$

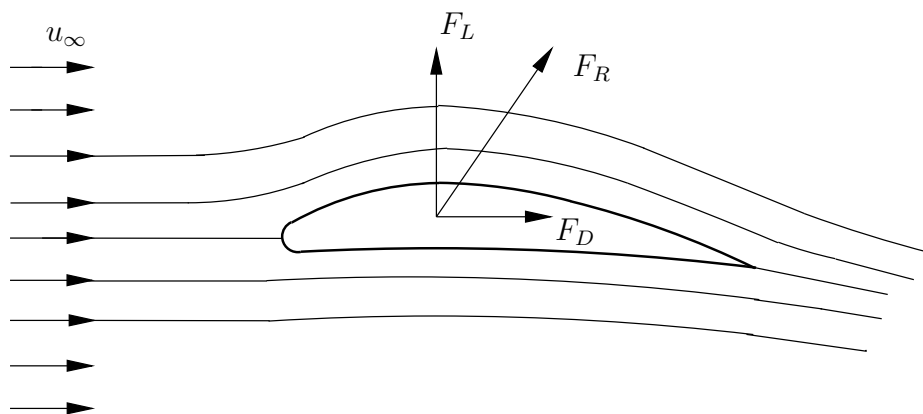


### 3 OPTJECANJE TIJELA - TEORIJA GRANIČNOG SLOJA

U praksi se najčešće razmatra gibanja određenog tijela kroz fluid. Naša glavna zadaća je određivanje sila koje djeluju na tijelo. U većini slučajeva kordinatni sustav veže se za tijelo kao da fluid nastrujava, a tijelo miruje. Silu na tijelo stvaraju viskoznost fluida i razlika tlaka. Kako bi se dobila sila, integriraju se naprezanja po površini tijela. Matematički zapis izrečenog glasi :

$$F_i = \int_S \sigma_{ji} n_j dS = - \int_S p n_i dS + \int_S \Sigma_{ji} n_j dS \quad (3.1)$$

U realnim slučajevima, i jedna i druga komponenta u jednažbi (3.1) daju doprinos sili. Kod ravninskog strujanja rezultatna sila ima dvije komponente, kako je prikazano na slici 2.



Slika 2. Sile pri opstrujavanju tijela

#### 3.1 Popis bezdimenzisjkih značajki karakterističnih za promatrani problem

Sila u smjeru strujanja ima indeks D i označava silu otpora (engl. "Drag"). Druga sila je okomira na smjer strujanja i ima oznaku L te označava silu uzgona (engl. "Lift").

Sada je koeficijent otpora i uzgona:

$$\text{koeficijent otpora } C_D = \frac{F_D}{q_\infty A}, \quad (3.2)$$

$$\text{koeficijent uzgona } C_L = \frac{F_L}{q_\infty A}, \quad (3.3)$$

gdje je  $A$  referentna površina, a  $q_\infty$  dinamički tlak. Koeficijent tlaka odnos je statičkog i dinamičkog tlaka:

$$\text{koeficijent tlaka } C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}. \quad (3.4)$$

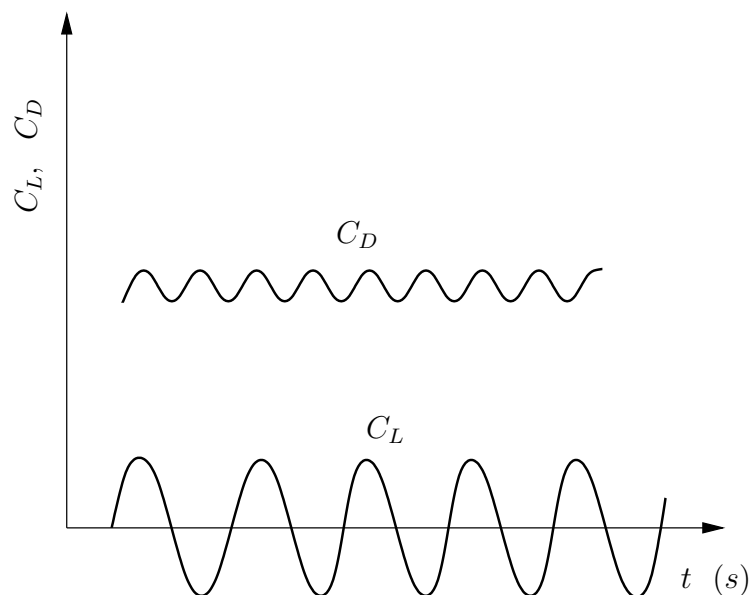
Tip strujanja pri optjecanju cilindra ovisi o odnosu inercijskih i viskoznih sila. Odnos viskoznih i inercijskih sila određen je Reynoldsovim brojem:

$$Re = \frac{\rho u_\infty D}{\mu}. \quad (3.5)$$

Ako je Reynoldsov broj mali, prevladavajući je utjecaj viskoznih sila, a u suprotnom inercijskih. Ako prevladavaju viskozne sile, u slučaju optjecanja cilindra pri Reynoldsovm broju manjem od jedan, nelinearni član u jednažbi količine gibanja može se zanemariti te dobivamo Stokesove jednažbe koje su linearne. Za strujanja koja se tipično susreću u praksi, Reynoldsov broj je velik pa viskozne sile imaju utjecaj samo u blizini stijenke, dok u ostatku domene prevladavaju inercijske sile.

Zbog viskoznosti fluida brzina na stijenci jednaka je nuli, a udaljavanjem od stijenke postupno se povećava sve do brzine neporemećene struje. Iz tih razloga u strujanju uvijek postoji područje uz stijenku gdje se strujanje odvija manjim brzinama od brzine neporemećene struje. To područje nazivamo granični sloj.

Za opstrujavanje oko cilindra karakteristično je vremenski promjenjivo strujanje, odvajanje graničnog sloja od površine tijela i stvaranje vrtložnog traga. Upravo zbog tih razloga imat ćemo koeficijente (3.2), (3.2), (3.4) ovisne o vremenu. Za primjer na slici 3 su shematski prikazani koeficijenti koji se mijenjaju ovisno o vremenu. Iako trenutni iznos varira, vremenski osrednjena vrijednost koeficijenata uzgona i otpora je konstantna. Odnos frekvencija koeficijenata uzgona i otpora je okvirno 2:1.



Slika 3. Koeficijenti u ovisnosti o vremenu

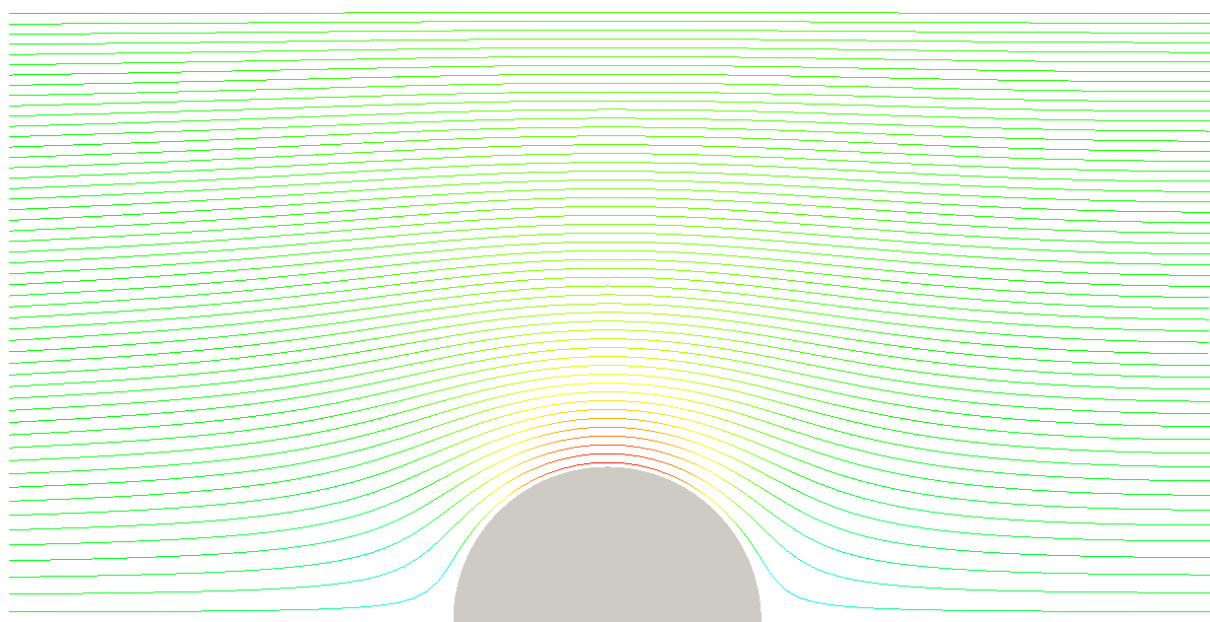
U idućem poglavlju detaljnije su pojašnjene pojave koje se događaju promjenom Reynoldsovog broja.

## 3.2 FIZIKALNE POJAVE PRILIKOM OPSTRUJAVANJA CILINDRA

Strujanje oko tupih tijela vrlo je kompleksno i može uključivati područja laminarnog, tranzijentnog i turbulentnog strujanja, odvajanja strujanja i ponovnog spajanja te formacije vrtložnih struktura nizvodno od tijela. Razumijevanje pojave vrtložnog traga prilikom opstrujavanja tupih tijela jako je važno, a opstrujavanje oko cilindra klasičan je primjer [8]. U ovom radu zadatak je što bolje opisati pojave koje se događaju u potkritičnom strujanju numeričkim eksperimentom te rješenja usporediti sa fizikalnim eksperimentom. Direktno numeričko simuliranje (DNS) u kojem su zahvaćene pojave svih frekvencija nije moguće za veće Reynoldsove brojeve zbog prevelikog potrebnog računalnog vremena. Slike strujanja promjenom Reynoldsovog broja izgledaju drugačije. Eksperimentima je u vrtložnom tragu potvrđena pojava početka prijelaza iz laminarnog u turbulentno strujanje već pri Reynoldsovim brojevima 190. Između 190 i  $1.4 \div 3 \times 10^5$  odvija se laminarno odvajanje strujanja i trubulentno strujanje nizvodno o cilindra. Treba napomenuti da se strujanje oko cilindra može smatrati dvodimenzijским samo pri  $Re < 190$  jer se pojavljuju prostorni vrtlozi koji se u 2D prostoru ne mogu opisati. Budući da je simulacija za 3D slučaj znatno skuplja i potrebno je više računalnog vremena, u ovom radu ćemo pristupiti kao da je 2D problem. Temeljito će se ispitati mogućnost upotrebe 2D formulacije u potkritičnim Reynoldsovim brojevima za inženjerske potrebe.

### 3.2.1 Laminarno strujanje

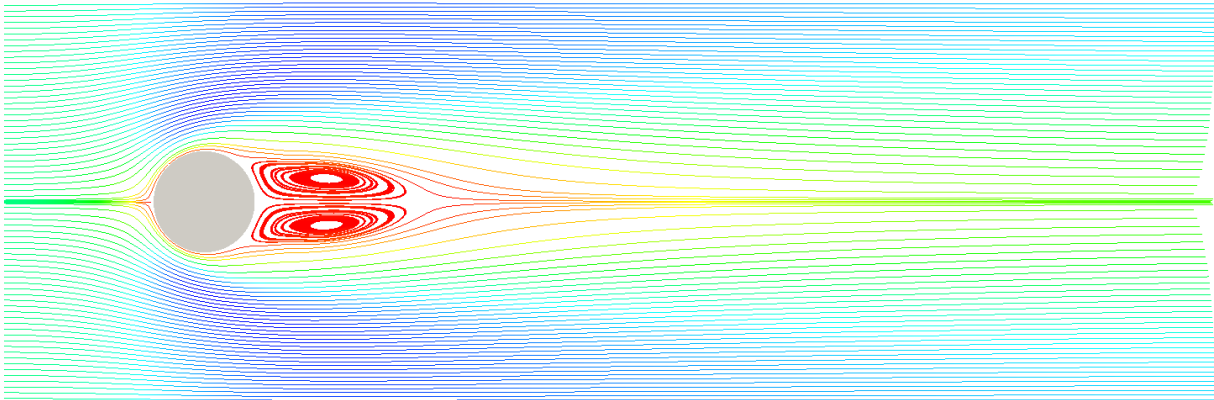
Za jako niske Reynoldsove brojeve ( $Re \ll 1$ ) slika strujanja i sve potrebne veličine mogu se odrediti analitički iz Stokesovih jednažbi. Pri tako niskim Reynoldsovim brojevima strujanje je simetrično i strujnice idu skroz oko cilindra tj. nema odvajanja strujanja kao što je i prikazano na slici 4. Jasno je da prevladavaju viskozne sile i da se njihov utjecaj osjeti daleko od tijela.



Slika 4. Slika strujanja ( $Re \ll 1$ )

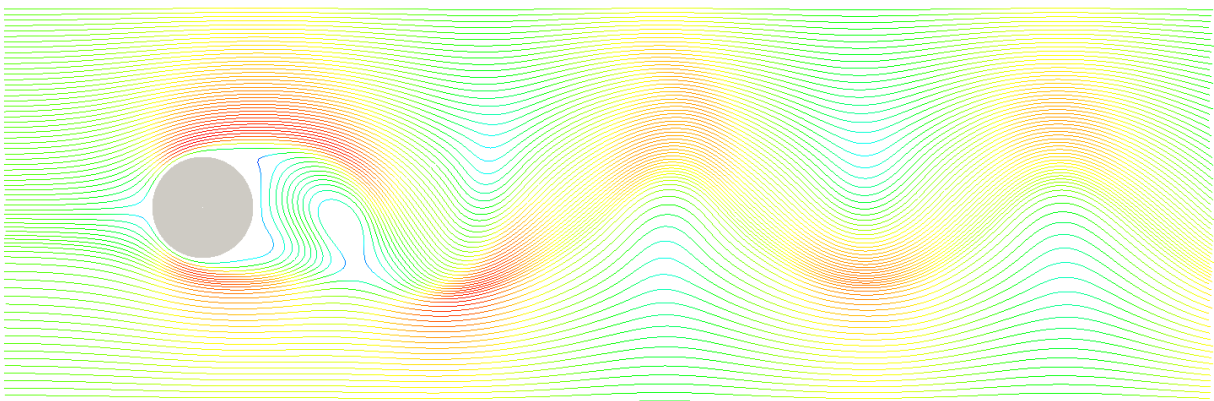
Kako se  $Re$  broj povećava ( $\sim 4$ ), jedna simetrija strujanja nestaje zbog pojave vrtloga

iza cilindra. Točnije, pojavljuje se zona recirkulacijskog strujanja sa dva stacionarna vrtloga u kojima čestice fluida kontinuirano kruže kao što je prikazano na slici 5.



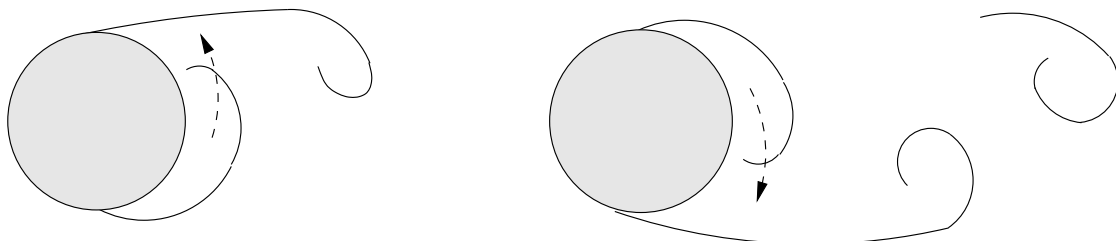
**Slika 5. Slika strujanja ( $Re=30$ )**

Povećanjem  $Re$  broja do vrijednosti  $\approx 40$  stacionarni vrtlozi postaju sve veći. Za vrijednosti  $Re > 40$  strujanje postaje nestacionarno. Nestacionarni vrtložni trag, koji se još naziva Karmanov vrtložni trag, prikazan je na slici 6.



**Slika 6. Slika strujanja ( $Re=195$ )**

Nastaju dva reda vrtloga gdje svi u istom redu rotiraju u istom smjeru. Donji vrtlozi pozicioniraju se između gornjih jer nastaju tako što se, kada se gornji vrtlog odvoji, donji reformira. Vrtlozi putuju nizvodno brzinom manjom od brzine neporemećene struje. Sistem nastajanja i odvajanja vrtloga prikazan je na slici 7.



**Slika 7. Nastajanje vrtloga**

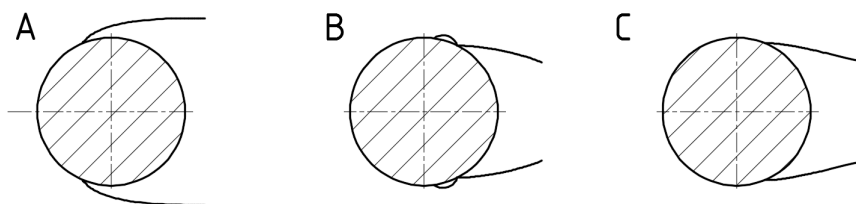
### 3.2.2 Turbulentno strujanje

Turbulentno strujanje postiže se pri Re brojevima iznad 190. Važno je napomenuti da se turbulencija pojavljuje u vrtložnom tragu, a da je na stjenci cilindra i dalje samo laminarno strujanje.

Područja strujanja ovisno o Reynoldsovom broju dijele se po odvajanju struje fluida [2]:

- $Re < 3 \times 10^5$                     A) Potkritično područje (Laminarno odvajanje),
- $3 \times 10^5 < Re < 3 \times 10^6$         B) Laminarno odvajanje i turbulentno spajanje,
- $Re > 3 \times 10^6$                     C) Nadkritično područje (Turbulentno odvajanje),

kako je prikazano na slici 8. Periodično pojavljivanje vrtloga karakteristika je strujanja sve do vrlo visokih Reynoldsovih brojeva ( $\sim 10^7$ ) do kojih su i rađena ispitivanja [2].



**Slika 8. Podjela opstrujavanja prema tipu toka**

U ovom radu razmatraju se potkritični Reynoldsovi brojevi što znači da je odvajanje strujanja laminarno, odnosno Reynoldsov broj spada u interval  $190 < Re < 3 \times 10^5$ . Rastom Reynoldsova broja u potkritičnom području, točke separacije pomiču se u smjeru strujanja, a recirkulacijska zona postaje sve manja. Pri visokim Reynoldsovima, otpor cilindra naglo pada što je poznato kao *kriza otpora*. Uzrok pada otpora je premještanje točki separacije strujanja što se može vidjeti na slici 8.

Sve navedeno vrijedi za opstrujavanje hidraulički glatkog cilindra i bilo kakva promjena hrapavosti ima značajan utjecaj na gore navedeno.

### 3.2.3 Frenkvencija odvajanja vrtloga

Frenkvencija odvajanja vrtloga dobija se iz vremenskog niza vrijednosti koeficijenta uzgona i otpora. Frenkvencija odvajanja vrtloga je :

$$f = \frac{1}{T}; \quad T = \text{vrijeme potrebno za stvaranje jednog vrtloga.} \quad (3.6)$$

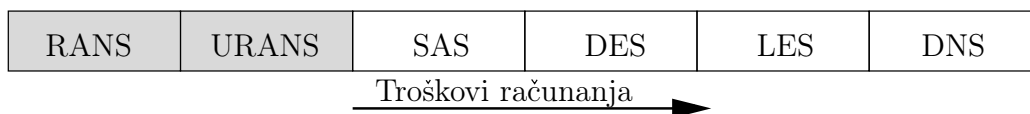
Bezdimenzijski parametar koji opisuje takve pojave je Strouhalov broj i računamo ga prema:

$$St = \frac{fD}{u_\infty}. \quad (3.7)$$

Kao takav služiti će nam za usporedbu rezultata. Pri pojavi prvih vrtloga St broj iznosi 0.1, a raste do  $Re \approx 300$ . U potkritičnom području, približno je konstantan (0.2).

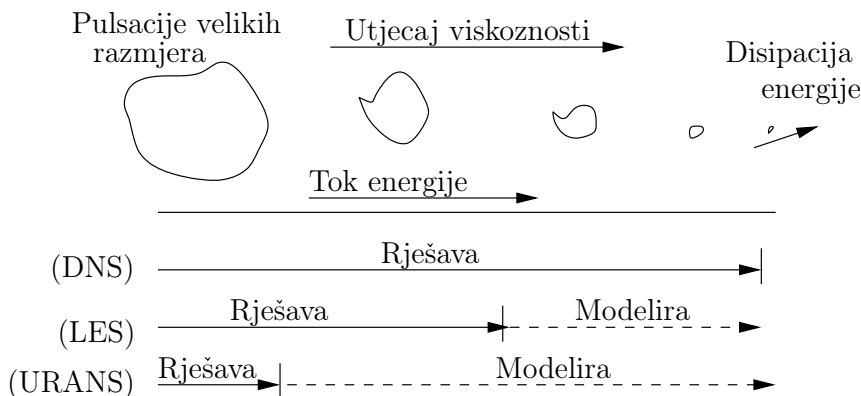
## 4 TURBULENCIJA

Gotovo svi inženjerski tokovi fluida u stvarnosti su u turbulentnom režimu strujanja. Razlikujemo laminarno strujanje otporno na perturbacije i turbulentno strujanje u kojem perturbacija u vremenu opstaje i raste. Kriterij prema kojem se može odrediti režim strujanja je Reynoldsov broj. Teško je odrediti pri kojem Reynoldsovom broju strujanje doživljava tranziciju iz laminarnog u turbulentno jer bilo kakva nepravilnost u geometriji ili fluidu može unjeti poremećaj koji inicijalizira tranziciju u turbulentno područje. Za promatrani problem turbulencija se pojavljuje već pri Reynoldsovom broju 190, ali u vrtložnom tragu. Snižavanjem Reynoldsovog broja sigurniji smo u postojanost potpuno laminarnog toka, otpornog na perturbacije i poremećaje. Povećavanjem Reynoldsova broja iznad 190 prelaz u turbulenciju događa se ranije, da bi u konačnici bio na stjecni cilindru. U turbulentnom strujanju imamo pojavu vrtložnosti, kaotičnog gibanja i pulsaciju svih fizikalnih veličina. Valja napomenuti da je turbulentno strujanje nestacionarno i za stacionarne rubne uvjete te dobivanje cjelovitog analitičkog rješenja nije moguće. Budući da je, s inženjerskog stajališta, teško obuhvatiti pojave nasumičnih promjena svih fizikalnih veličina u prostornim i vremenskim koordinatama, pribjegava se modeliranju turbulencije tako da se i dalje dobiju vrijednosti koje su s inženjerskog stajališta korisne. Takav pristup statistički osrednjava sve fizikalne veličine te korak prostorne i vremenske diskretizacije ne mora biti jako mali što pojeftinjuje numerički postupak. Pristupa u modeliranju Navier-Stokesovih jednažbi ima više (slika 9), RANS pristup je najjednostavniji i najkorišteniji u praksi [9].



**Slika 9. Pristupi u modeliranju turbulencije**

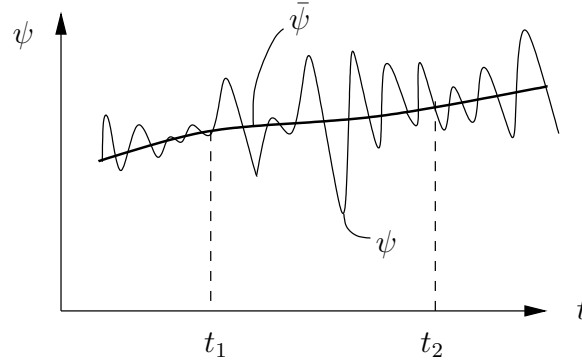
Slika 10 pokazuje moguće pristupe u modeliranju Navier-Stokesovih jednažbi. Jasno je da je, ako želimo potpuno rješavati energiju za pulsacija malih valnih duljina i amplituda, potrebno imati jako finu vremensku i prostornu diskretizaciju. Zbog tih razloga LES i DNS imaju mogućnost pružanja boljih rezultata, no njihovi računalni zahtjevi obično su previsoki za komercijalnu upotrebu.



**Slika 10. Tok energije turbulentnog strujanja**

#### 4.1 Reynoldsovo osrednjavanje Navier-Stokesovih jednažbi (RANS)

Uzmimo za primjer fizikalnu veličinu  $\psi$  koju ćemo prikazati zbrojem vremenski osrednjene vrijednosti  $\bar{\psi}$  i pulsirajućeg djela  $\psi'$  tako da vrijedi  $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ . Promjena fizikalne veličine  $\psi$  u turbulentnom strujanju dana je na slici 11.



Slika 11. Ponašanje fizikalne veličine  $\psi$  u strujanju

Vremenski osrednjena vrijednost veličine  $\psi$  definira se:

$$\bar{\psi}(x_i, t) = \frac{1}{T_o} \int_{t_1}^{t_2} \psi(x_i, t) dt, \quad \text{gdje je} \quad T_o = (t_2 - t_1). \quad (4.1)$$

Razdoblje  $T_o$  mora biti odabrano tako da osrednjena vrijednost srednje veličine bude jednaka srednjoj veličini  $\bar{\psi} = \bar{\psi}$ . Također mora vrijediti da je vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela jednaka nuli  $\bar{\psi}' = 0$ . Ako sa  $\xi$  označimo neku drugu fizikalnu veličinu, dolazimo do sljedećih relacija:

$$\frac{d\bar{\psi}}{dx_i} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i}, \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}, \quad \overline{\bar{\psi} \cdot \xi'} = 0, \quad \overline{\bar{\psi} \cdot \xi} = \bar{\psi} \cdot \bar{\xi}, \quad \overline{\psi \cdot \xi} = \bar{\psi} \cdot \bar{\xi} + \overline{\psi' \cdot \xi'}. \quad (4.2)$$

Primjenom relacije (4.2) na (2.15) i (2.8) slijede Navier-Stokesove jednažbe osrednjene Reynoldsovim osrednjavanjem:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho v'_i v'_j} \right]. \quad (4.4)$$

Član  $\overline{v'_i v'_j}$  u jednažbi (4.4) je dvojna korelacija koja se javlja kao posljedica Reynoldsovog osrednjavanja. Upravo taj član je nova nepoznanica što znači da je potrebno definirati jednažbu za njega ili ga moramo modelirati. Izvođenjem jednažbi za član  $\overline{v'_i v'_j}$  javlja se i trojna korelacija te se takav sustav jednažbi nemože zatvoriti. Jasno je da zbog tog razloga pribjegavamo modeliranju u kojem se gubi dio informacija te takav pristup iz tog razloga nikada nije egzaktan.

Član  $-\overline{\rho v'_i v'_j}$  nazivamo turbulentna ili Reynoldsova naprezanja.

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v'_1 v'_1} & -\overline{\rho v'_1 v'_2} & -\overline{\rho v'_1 v'_3} \\ \text{sim.} & -\overline{\rho v'_2 v'_2} & -\overline{\rho v'_2 v'_3} \\ & & -\overline{\rho v'_3 v'_3} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Fizikalno gledajući Reynoldsova naprezanja predstavljaju transport količine gibanja turbulentnim fluktuacijama. Turbulentna difuzija je prijenos količine gibanja zbog turbulentnog mješanja čestica fluida. Uvodi se pojam turbulentne viskoznosti  $\mu_t$  koja nije fizikalno svojstvo fluida već posljedica režima strujanja.

Zadatak modela turbulencije svodi se na izjednačavanje nepoznanica i jednažbi do određene korelacije tako da se ne izgubi jednostavnost, ekonomičnost, točnosti i univerzalnost [10].

**Važno je napomenuti da ne postoji univerzalan model turbulencije.**

## 4.2 Modeli turbulencije

Modeli turbulencije dijele se s obzirom na red korelacije brzina za koju se rješava transportna jednažba na: modele prvog, drugog i trećeg reda [10]. U ovom radu koriste se modeli prvog reda u kojima se dvojna korelacija brzina modelira prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij}. \quad (4.6)$$

Član  $\bar{k} = \frac{\overline{v'_i v'_i}}{2}$  je kinetička energija turbulencije, dodan je da jednažba (4.6) vrijedi i nakon kontrakcije indeksa. Navedenom hipotezom šest komponenti tenzora naprezanja modelirano je jednim nepoznatim poljem koeficijenta turbulentne viskoznosti. Uvrštavajući navedenu hipotezu u jednažbu osrednjenog strujanja (4.4) dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) &= -\frac{p_{ef}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho v'_i v'_j} \right] \\ p_{ef} &= \bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \\ \mu_{ef} &= \mu + \mu_t \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dobivena jednažba ima isti oblik kao polazne Navier-Stokesove jednažbe koje opisuju ukupno strujanje, s razlikom da se u Reynoldsovim pojavljuju vremenski osrednjene veličine, efektivna viskoznost i efektivni tlak.

Nepoznato polje  $\mu_t$ , ovisno o modelu turbulencije, će se modelirati pomoću dodatnih transportnih jednažbi. Modeli turbulencije s pripadajućim brojem dodatnih skalarnih transportnih jednažbi prikazani su u tablici 1.

Broj dodatnih transportnih jednažbi	Naziv modela
Nula	Prandtlova hipoteza puta miješanja
Jedan	Spalart-Allmaras model
Dva	k- $\omega$ model, k- $\epsilon$ model
Tri	k-kl- $\omega$ model
Sedam	Reynoldsov model turbulencije

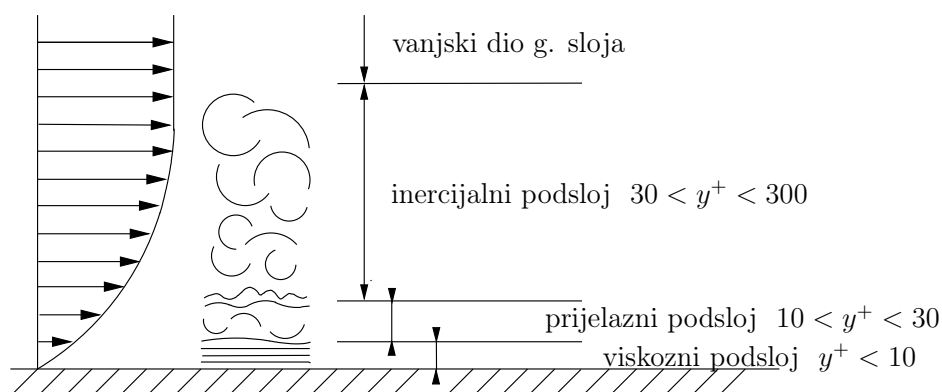
**Tablica 1. Broj dodatnih transportnih jednažbi ovisno o modelu turbulencije**



### 4.3 Modeliranje graničnog sloja

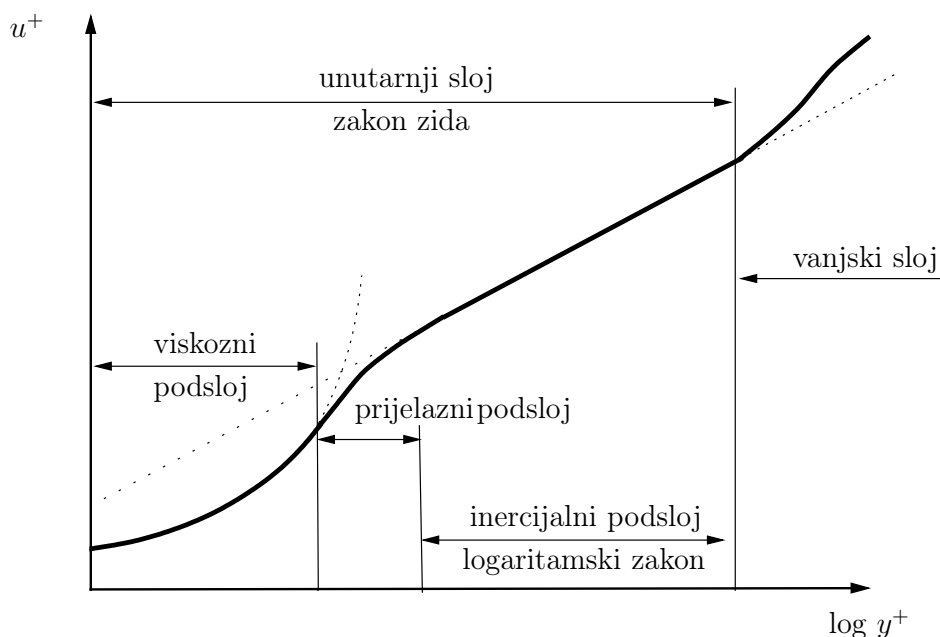
U slobodnoj struji dominira turbulentna viskoznost u odnosu na molekularnu viskoznost. Turbulentna viskoznost nije fizikalno svojstvo fluida kao molekularna viskoznost, već ovisi o intezitetu mješanja vrtloga čestica. Granični sloj zanimljivo je područje u strujanju jer su tamo turbulentne pulsacije prigušene zbog uvjeta ljepljena fluida uz samu stjenku i znatno smanjenjenog puta mješanja čestica fluida. To bi značilo da u neposrednoj blizini stjenke vlada molekularna viskoznost, a udaljavanjem od stjenke turbulenta viskoznost postaje sve dominantnija.

Granični sloj može se podijeliti na dva osnovna sloja: unutarnji i vanjski. Unutarnji se može podijeliti na tri podsloja: viskozni, prijelazni i inercijalni. Slika 12 prikazuje navedenu podjelu za slučaj opstrujavanja ravne stijenke.



Slika 12. Granični sloj u turbulentnom strujanju

Zbroj viskoznog, prijelaznog i inercijskog podsloja daje 10 – 15 % ukupnog graničnog sloja [10].



Slika 13. Turbulentni granični sloj

Jasno je da su gradijenti u prisustvu stijenke mnogo veći nego u slobodnoj struji, što znači da se mora imati fina prostorna diskretizacija da ih se dobro opiše. Također, turbulentna viskoznost opada približavanjem prema stijenci što predstavlja izazov za sami model turbulencije. Postoje dva pristupa u rješavanju navedenog:

- Područje viskoznog i inercijalnog podsloja opisati zidnim funkcijama tako da model turbulencije počinje u inercijalnom podsloju
- Modificirati postojeći model turbulencije tako da vrijedi za asimptotsko približavanje stijenci

Valja napomenuti kako korištenje modificiranog modela turbulencije znatno poskupljuje proračun zbog fine diskretizacije uz stijenku. Generalno, ako se razmatra strujanje podalje od stijenke, pristupa se problemu korištenjem zidnih funkcija.

Za promatrani problem koristit će se fina diskretizacija uz samu stjenku zbog postojanja odvajanja i recirkulacije strujanja, te se ne koriste zidne funkcije. Cilindar je uzrok stvaranja vrtložnosti u strujanju te se oko njega transport količine gibanja i ostalih veličina odvija najintezivnije.

Pokušaj korištenja zidnih funkcija za strujanje oko cilindra pri  $1 \times 10^4 < Re < 5 \times 10^6$  opisan je u [11]. Pokazano je da se sa zidnim funkcijama ne može dobiti mrežno neovisno rješenje za koeficijent otpora.

## 5 METODA KONAČNIH VOLUMENA

Metoda konačnih volumena je integralna metoda koja se temelji na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednažbi po kontrolnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna. Generalna transportna jednažba za skalano polje

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \varphi dV = - \oint_{\partial\Omega} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Omega} S_{\varphi} dV, \quad (5.1)$$

riješava se za svaki kontrolni volumen  $\Omega$ . Gornja jednažba se može iskazati riječima: *Brzina promjene fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena razmjerna je brzini protoka tog fizikalnog svojstva kroz granice konačnog volumena i brzini nastajanja ili nestajanja tog fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena* [10].

U ovom radu koristi se **osnovna metoda kontrolnih volumena**. Ta metoda ima jedan proračunski čvor po ćeliji. Metoda kontrolnih volumena s jednim proračunskim čvorom po ćeliji je prvog reda točnosti, osim ako čvor nije u težištu. Stavljanjem proračunskih čvorova u težište aproksimacija prosječnih vrijednosti postaje drugog reda točnosti [12].

### 5.1 Diskretizacija

Diskretizaciju možemo podijeliti na :

- Prostorna diskretizacija polja
- Diskretizacija prostornih integrala
- Vremenska diskretizacija

### 5.2 Prostorna diskretizacija

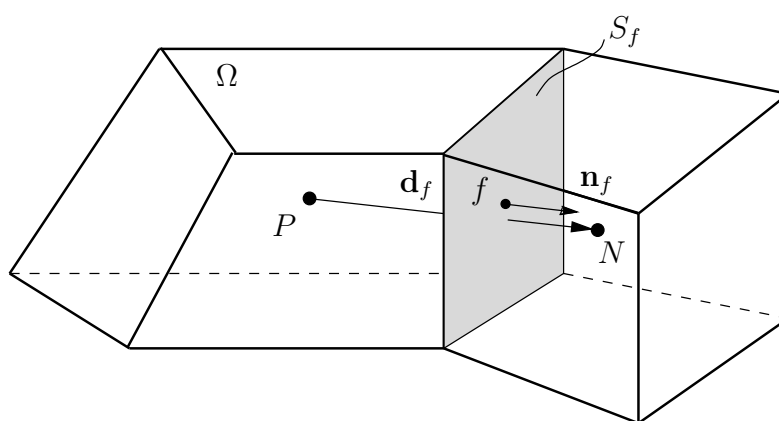
Diskretizacija prostorne domene rezultira proračunskom mrežom koja se sastoji od konačnog skupa **kontrolnih volumena** (ćelija) koji potpuno ispunjavaju domenu, a pri tome se međusobno ne preklapaju. Domena se sastoji od konačnog broja kontrolnih volumena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- Centar ćelija se nalazi u težištu ćelije
- Sve ćelije su zatvorene i slabo konveksne
- Ćelije potpuno pokrivaju domenu i pritom se ne preklapaju

U programskom paketu OpenFOAM [3] mreža je definirana pomoću liste objekata:

- **Točke:** popis točaka definiran prostornim kordinatama. Dvije točke ne mogu imati istu poziciju
- **Stranice:** stranice su definirane popisom točaka i mogu biti vanjske (rubne) ili unutarnje
- **Ćelije:** definirane su popisom stranica
- **Rubovi:** svaki rub je opisan skupom pripadajućih stranica

Primjer kontrolnog volumena dan je na slici 14.



Slika 14. Kontrolni volumen

Neke od preporuka za diskretizaciju kod osnovne metode kontrolnih volumena [10] :

- Spojnica čvorova trebala bi probadati stranicu konačnog volumena u njenom težištu.
- Težište stranice trebalo bi biti na polovištu spojnice susjednih čvorova.
- Spojnica čvorova trebala bi biti okomita na stranicu konačnog volumena.

### 5.3 Diskretizacija prostornih integrala

Diskretizacija integralne jednažbe vrši se aproksimacijom površinskih i volumnih integrala. Srednja vrijednost  $\bar{\varphi}_\Omega$  definira se pomoću formule:

$$\int_{\Omega} \rho \varphi \, dV = \rho \bar{\varphi}_\Omega \cdot \Omega. \quad (5.2)$$

pri čemu je  $\Omega$  mjera volumena ćelije, a  $\bar{\varphi}_\Omega$  srednja vrijednost unutar volumena. Ovakva aproksimacija je drugog reda točnosti, ako je proračunski čvor  $P$  u težištu kontrolnog volumena. Ovakav pristup je egzaktan za linearnu raspodjelu varijable  $\varphi$  po kontrolnom volumenu što znači da, ako se želi opisati polja koja se ne mjenjaju linearno, potrebno je imati što više kontrolnih volumena. Za slučaj linearne raspodjele  $\varphi$  unutar kontrolnog

volumena vrijednost veličine  $\varphi$  u težištu je jednaka prosjeku po kontrolnom volumenu što možemo zapisati u obliku:

$$\bar{\varphi}_\Omega \approx \varphi_P \quad (5.3)$$

Sada, brzinu promjene sadržaja  $\varphi$  unutar  $\Omega$ , tj. izraz  $\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho \varphi \Omega$ , pri  $\rho = konst.$  možemo zapisati u obliku:

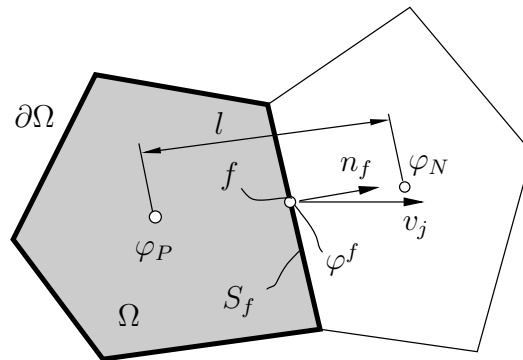
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho \varphi dV = \frac{d}{dt} (\rho \bar{\varphi}_\Omega \Delta V) \approx \frac{d}{dt} (\rho \varphi_P \Omega) = \rho \frac{d\varphi_P}{dt} \Omega. \quad (5.4)$$

Izvorski član  $\int_\Omega S_\varphi dV$  možemo aproksimirati izrazom:

$$\int_\Omega S_\varphi dV = \bar{S}_{\varphi,\Omega} \Omega \approx S_P \Omega. \quad (5.5)$$

U općem slučaju, izvorski član je nelinearna funkcija pa ga je prije diskretizacije potrebno linearizirati oko trenutne prosječne vrijednosti u svakoj ćeliji.

### 5.3.1 Difuzijski i konvekcijski protok



Slika 15. Kontrolni volumen u interakciji s okolinom

Površinski integral u izrazu (5.1) predstavlja protok fizikalnog svojstva uslijed konvekcije i difuzije kroz zatvoreni rub kontrolnog volumena. Protoku fizikalnog svojstva na nekoj stranici doprinosi samo normalna komponenta toka. Prije same aproksimacije, uz  $\rho = konst.$  konvekciju i difuziju možemo zapisati u obliku:

$$\int_{S_f} (\rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) n_j dS = \int_{S_f} (\rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS = \left[ \rho (\bar{v}_n \bar{\varphi})_{S_f} - \Gamma \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right)_{S_f} \right] S_f, \quad (5.6)$$

$$\sum S_f = \partial \Omega \quad (5.7)$$

Član koji označava konvektivni protok  $\rho v_j \varphi$  izražen je pomoću normalne komponente brzine i vrijednosti fizikalnog svojstva na površini  $\partial \Omega$ . Aproksimaciju se vrši vrijednostima u točki  $f$  koja prestavlja težište površine  $S_f$ :

$$(\bar{v}_n \bar{\varphi})_{S_f} \approx \bar{v}_{n,S_f} \bar{\varphi}_{S_f} \approx v_{n,f} \varphi_f. \quad (5.8)$$

Vrijednost  $\varphi_f$  na stranici  $S_f$  računa se pomoću vrijednosti varijable  $\varphi$  u težištima volumena kojima je stranica  $S_f$  zajednička odnosno  $\varphi_f = \varphi_f(\varphi_P, \varphi_N)$ . Važno je napomenuti da, ako se točka  $f$  nalazi u težištu stranice površinski integral je drugog reda točnosti [12].

Konvekcijski protok predstavlja protok fizikalnog svojstva kroz površinu kontrolnog volumena. Intenzitet ovisi o vrijednosti fizikalne veličine na površini kontrolnog volumena ( $\varphi^f$ ) nošene iznosom masenog protoka ( $\rho v_n S_f$ ) kroz tu površinu. Ovaj prijenos fizikalne veličine odvija se jednosmjerno i pozitivan je kada se fizikalna veličina iznosi iz kontrolnog volumena, odnosno kada vektor brzine gleda u smjeru vanjske normale ruba kontrolnog volumena.

Difuziju u jednažbi (5.1) opisuje član  $-\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  kojeg smo u jednažbi (5.6) zapisali kao prosječnu vrijednost normalne derivacije polja  $\varphi$  na površini  $S_f$ . Za aproksimaciju difuzijskog protoka koristimo normalnu derivaciju polja  $\varphi$  u točki  $f$

$$\left( \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \right)_{S_f} \approx \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_f = \frac{1}{l} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right]_f. \quad (5.9)$$

Normalna derivacija u točki  $f$  aproksimirama se pomoću vrijednosti u centrima dvije susjedne ćelije. Difuzijski protok se na uniformnim ortogonalnim mrežama može odrediti drugim redom točnosti u točki  $f$  koja je središte  $S_f$ . Na neortogonalnim mrežama se u osnovnoj metodi radi neortogonalna korekcija.

Difuzija predstavlja prijenos fizikalnog svojstva iz okoline u volumen i obratno zbog razlike vrijednosti fizikalnog svojstva. Ako je  $\varphi_N > \varphi_P$  radi se o dotoku fizikalnog svojstva u kontrolni volumen i obratno. Zaključno, fluid može transportirati fizikalno svojstvo kroz granicu kontrolnog volumena konvekcijskim i difuzijskim protokom. Njihov omjer je definiram lokalnim Pecletovim brojem koji označava dominantnost pojedinog transporta. Konvekcija je dominantna na makro razini, a difuzija na mikro razini. Difuzija je opisana laplaceovim operatorom te će uvijek težiti ujednačavanju fizikalnog svojstva unutar domene i povoljna je sa stajališta numerike.

Konačni oblik diskretizirane jednažbe za  $\rho = konst.$  dobije se uvrštavanjem (5.4), (5.5), (5.8) i (5.9) u (5.1).

$$\rho \frac{d\varphi_P}{dt} \Omega = - \sum_{fn=1}^{F_{fn}} \left( F \varphi_f - D \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right]_f \right)^{fn} + S_P \Omega, \quad (5.10)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \text{jačina konvekcije : } F &= \rho v_{n,f} S_f, \\ \text{jačina difuzije : } D &= \frac{\Gamma S_f}{l}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$\sum_{fn=1}^{F_{fn}}$  označava sumu po svim stranicama zatvorenog ruba konačnog volumena.

## 5.4 Numeričke sheme

### Shema centralnih razlika (Central Differencing Scheme - CDS)

Ova shema koristi se za modeliranje difuzijskog toka. Kod osnovne metode konačnih volumena vrijednost gradijenta fizikalne veličine  $\varphi$  u točki  $f$  računa se pomoću vrijednosti iz ćelija koje dijele tu stranicu:

$$-D \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right]_f = -D(\varphi_N - \varphi_P) \quad (5.12)$$

Za uniformne ortogonalne mreže shema je drugog reda točnosti. Na neortogonalnim mrežama obično se radi neortogonalna korekcija [10, 12].

### Uzvodna shema (Upwind Differencing Schemes -UDS)

Uzvodna shema služi za određivanje fizikalne vrijednosti  $\varphi_f$  koja pripada konvektivnom članu u jednažbi (5.10). Vrijednost  $\varphi_f$  se uzima u uzvodnom proračunskom čvoru [10].

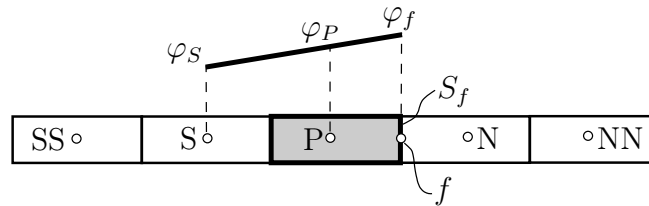
$$\begin{aligned} \varphi_f &= \varphi_P \quad \text{za} \quad F \geq 0 \\ \varphi_f &= \varphi_P \quad \text{za} \quad F < 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uzvodna shema diskretizacije je omeđena ali je i prvog reda točnosti, a njenim korištenjem uvodi se u rješenje numerička difuzija koja stabilizira rješenje, no značajno narušava točnost u području velikih gradijenata zavisne varijable [12].

### Linearno uzvodna shema

#### (Secon Order Upwind ili Linear Upwind Scheme -LUDS)

Fizikalna vrijednost  $\varphi_f$  konvektivnog člana na stranici  $S_f$  može se odrediti linearnom ekstrapolacijom iz uzvodnih čvorova prema slici 16 za slučaj da je  $F > 0$  [10].



Slika 16. Uz definiciju LUDS sheme

$$\begin{aligned} \varphi_f &= \varphi_P + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right]_P^{uzvodno} = \varphi_P + \frac{1}{2}(\varphi_P - \varphi_S) \quad \text{za} \quad F > 0, \\ \varphi_f &= \varphi_N + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right]_N^{uzvodno} = \varphi_N + \frac{1}{2}(\varphi_N - \varphi_{NN}) \quad \text{za} \quad F < 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Član  $\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}$  je dodatak koji osigurava drugi red točnosti. LUDS shema ne unosi lažnu difuziju što znači da će u blizini diskontinuiteta generirati oscilatorno rješenje [10]. Iz tog razloga se kaže da je ova shema neomeđena.

## 5.5 Vremenska diskretizacija

Scheme za vremensku diskretizaciju služe da modeliranje člana lokalne promjene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \varphi dV$$
 u diskretiziranim jednažbama.

Na rubovima spektra vremenskih shema su potpuno eksplicitne i implicitne vremenske sheme. Eksplicitna shema je jednostavnija za računanje, ali ima ograničenje na vremenski korak zbog uvjeta stabilnosti. Kod implicitne sheme za svaki novi vremenski trenutak dobije se sustav jednažbi koji se treba riješiti, a kod eksplicitne to nije slučaj. U ovom radu će se koristiti bezuvjetno stabilna implicitna Eulerova formula **Backward Differencing formula** (BDF) prvog reda točnosti.

Za svaku ćeliju u novom vremenskom trenutku vrijedi:

$$\frac{\varphi^n - \varphi^o}{\Delta t} = F^n, \quad (5.15)$$

$\varphi^n$  - vrijednost fizikalnog svojstva u novom vremenskom trenutku,

$\varphi^o$  - vrijednost fizikalnog svojstva u starom vremenskom trenutku,

$\Delta t$  - vremenski korak,

$F^n$  - ostali članovi diskretizirane jednažbe definirani za novi trenutak.

## 5.6 Rubni uvjeti

### Dirichletov rubni uvjet

Zadaje se prosječna vrijednost varijable  $\varphi$  na rubnoj stranici. Pošto se za konvektivni član iznos varijable direktno uvrštava u diskretizirane jednažbe, ne snižava se red metode. Za difuzijski član potrebno je aproksimirati derivaciju na rubnoj stranici što u tipičnoj implementaciji snižava prostorni red metode na prvi [12].

### Neummanov rubni uvjet

Zadaje se derivacija u smjeru normale zavisne varijable  $\varphi$  na rubnoj stranici. Za konvektivni član vrijednost varijable na rubnoj stranici računa se tipično prvim redom točnosti, za razliku od difuzijskog koji ne snižava red metode [12].

Kako su jednažbe kontinuiteta i količine gibanja spregnute po veličinama brzine i tlaka, zadavanje tih veličina na rubu mora odgovarati toj sprezi za nestlačivi tok.

Tablica 2 daje iznose rubnih uvjeta promatranog problema.

$D$	$\rho$	$ U_{ulaz} $	$\omega$	$I$	$\epsilon$	$k$	$l$
1m	$1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0.175	0.001	$2.625 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-4}$	0.07D

**Tablica 2. Rubni uvjeti**

gdje je  $D$  promjer cilindra,  $\rho$  gustoća fluida,  $|U_{ulaz}|$  iznos srednje brzine strujanja na ulazu,  $k$  kinetička energija sadržana u turbulentnim fluktuacijama,  $\omega$  karakteristično vrijeme turbulentnih fluktacija,  $l$  karakteristična duljina turbulentnih fluktacija,  $I$  intezitet turbulencije i  $\epsilon$  brzina disipacije turbulentne kinetičke energije.



## 6 METODE RJEŠAVANJA NAVIER-STOKESOVIH JEDNAŽBI

Ako se u opći oblik transportne jednažbe (5.1) uvrsti  $\varphi = v_i$ ,  $S_\varphi = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$  i  $\Gamma = \mu$  dobija se integralni oblik jednažbe količine gibanja:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v_j dV = - \oint_{\partial\Omega} \left( \rho v_j v_i - \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) n_j dS_f - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV. \quad (6.1)$$

Jednažba kontinuiteta poprima oblik:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV = \oint_{\partial\Omega} v_j n_j dS_f = 0. \quad (6.2)$$

Jednažba količine gibanja (6.1) i jednažba kontinuiteta (6.2) sadrže tri nepoznata skalarna polja  $v_1$ ,  $v_2$  i  $p$  za dvodimenzisjki slučaj odnosno četiri za trodimenzijski  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  i  $p$ . Jednažba (6.1) služi za računanje polja brzine, a jednažba (6.2) je zapravo kinematičko ograničenje na polje brzina koje zadovoljava jednažbu količine gibanja. Varijabla tlaka pojavljuje se samo u jednoj jednažbi što predstavlja problem, te je uobičajno za nestlačivu formulaciju da se iz jednažbe (6.2) izvede jednažba za tlak. Za takvu formulaciju kaže se da je bazirana na tlaku.

Za nestlačivo strujanje divergencija polja brzine mora biti nula u svakoj točki numeričkog proračuna, te se kaže da je polje brzine solenoidno.

Konvekcijski član u jednažbi količine gibanja nelinearan je jer je jačina konvekcije funkcija brzine koju se tek treba naći [10]. Linearizacija se vrši u obliku:

$$\rho v_j v_i = \rho v_j^o v_i \quad (6.3)$$

gdje je  $v_j^o$  polje brzine dobiveno iz prethodnog vremenskog trenutka. Na početku numeričkog postupka brzinu  $v_j^o$  treba pretpostaviti.

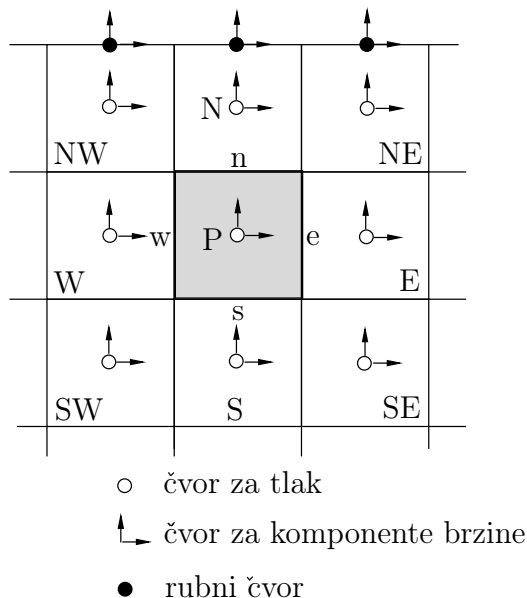
U iterativnom postupku kreće se s pretpostavljenim poljem brzina i tlaka. Rješavanjem jednažbe količine gibanja, dobije se novo polje brzine  $v_i$ . Nakon toga se rješava jednažba za tlak pomoću koje korigiramo polje brzina, tako da novo polje brzina bude solenoidalno.

Jednažba za tlak dobija se divergencijom jednažbe količine gibanja [13]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \right]. \quad (6.4)$$

## 6.1 Nepomaknuta mreža

Kod nepomaknute mreže centrirane u ćelijama (engl. cell-centered, colocated), mreže za polje brzine  $v$  i polje tlaka  $p$  koincidiraju.



Slika 17. Raspored čvorova za nepomaknutu mrežu

Diskretizirana jednažba količine gibanja na nepomaknutoj strukturiranoj ortogonalnoj mreži glasi:

$$a_P u_P = \sum_{fn=1} a_{fn} u_{fn} - (p_e - p_w) S_P^u + b_P^u \quad (6.5)$$

$$a_P v_P = \sum_{fn=1} a_{fn} v_{fn} - (p_n - p_s) S_P^v + b_P^v \quad (6.6)$$

gdje su  $S_P^u$  i  $S_P^v$  površine stranica konačnog volumena koje imaju normale u smjeru pripadajućih komponenti brzine. Članovi  $b_P^u$  i  $b_P^v$  sadže informacije o rubnim uvjetima i vrijednosti polja brzine u prethodnom vremenskom trenutku. Koefficienti  $a_P$  i  $a_{fn}$  ovise o primjenjenim numeričkim shemama.

Diskretizirana jednažba kontinuiteta sa brzinama na stranicama je:

$$(\rho u S)_e + (\rho v S)_u - (\rho u S)_w - (\rho v S)_s = 0 \quad (6.7)$$

### Problem nepomaknute mreže

Ako se zamisli šahovski raspored tlaka na strukturiranoj ortogonalnoj mreži kakva je prikazana na slici 17 te tlakove u središtu stranica odredi linearnom interpolacijom iz susjednih čvorova, neuniformnu raspodjelu tlaka jednažba količine gibanja može vidjeti kao uniformnu. U tom slučaju brzine na stranicama nisu dobro određene i numerički postupak postaje oscilatoran. Problem nepomaknute mreže ujedno je poznat kao i problem šahovske ploče ili "cik-cak" raspodjele. Rješenje su predložili Rhie i Chow, a sastoji od posredne interpolacije brzine na stranici konačnog volumena.

## 6.2 Rhie i Chow interpolacija

Na pomaknutoj mreži šahovski raspored tlaka ne radi problem jer se u diskretiziranim jednažbama, za razliku od nepomaknute mreže, pojavljuje iznos tlaka u promatranom čvoru. Rhie i Chow predložili su interpolaciju brzine na stranici kontrolnog volumena u kojoj se koristi derivacija tlaka diskretizirana razlikom tlaka dva susjedna čvora [10]. Izvor za Poissonovu jednažbu za tlak računa se sada iz:

$$u_e = \bar{u}_e - \left( \frac{\overline{S_e}}{a_e} \right) (p_E - p_P), \quad (6.8)$$

gdje su:

$\bar{u}_e$  - brzina na stranici  $e$  dobivena linearnom interpolacijom pseudo brzina (koji ne ovise o tlaku) iz čvorova P i E

$\left( \frac{\overline{S_e}}{a_e} \right)$  - koeficijenti na stranici  $e$  dobiveni linearnom interpolacijom koeficijenata definiranim u čvorovima P i E.

Analogan postupak se provodi za ostale rubove kontrolnog volumena.

## 6.3 Povezivanje polja brzine i tlaka

Korekcija polja brzine povezana je s korekcijom gradijenta tlaka, pa će se korekcija brzine izraziti kao funkcija korekcije gradijenta tlaka.

Novo korigirano polje brzine se može izraziti sljedećim jednažbama:

$$u = u^* + u', \quad (6.9)$$

$$v = v^* + v', \quad (6.10)$$

gdje su  $u$  i  $v$  brzine na rubovima konačnog volumena.  $u^*$  i  $v^*$  su trenutne brzine koje ne zadovoljavaju jednažbu kontinuiteta, dok su  $u'$  i  $v'$  korigirane vrijednosti brzine pomoću kojih se dobije novo polje brzine koje zadovoljava jednažbu kontinuiteta.

Jednažba za korekciju tlaka, kojom se povezuje korekcija brzine i tlaka može se izvesti iz jednažbe kontinuiteta koristeći (6.7) i (6.8). Jednažba za korekciju tlaka [10]:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_N p'_N + a_W p'_W + a_S p'_S = \sum_{fn} a_{fn} p'_{fn} + b_P^P, \quad (6.11)$$

gdje su:

$$a_E = \rho \left( \frac{\overline{S_e}}{a_e} \right) S_e, \quad a_N = \rho \left( \frac{\overline{S_n}}{a_n} \right) S_n, \quad a_W = \rho \left( \frac{\overline{S_w}}{a_w} \right) S_w, \quad a_S = \rho \left( \frac{\overline{S_s}}{a_s} \right) S_s, \quad (6.12)$$

$$b_P^P = -(\rho u_e^* S_e + \rho v_n^* S_n - \rho u_w^* S_w - \rho v_s^* S_s). \quad (6.13)$$

Izraz  $b_P^P$  je odstupanje od jednažbe kontinuiteta i jednako je nuli kada brzine zadovoljavaju jednažbu kontinuiteta.

Sa dobivenim poljem gradijenta tlaka korigira se polje brzine do solenoidalnosti.

## 6.4 PISO algoritam

PISO (engl. Pressure implicit with splitting of equation) algoritam koristi se za rješavanje nestacionarne forme Navier-Stokesovih jednažbi. U algoritmu se jednažba za tlak rješava dva puta. Koraci algoritma za jedan  $\Delta t$  se mogu objasniti na sljedeći način:

1. Polje tlaka  $p^o$  i polje brzina  $v_i^o$  preuzimaju se iz prethodnog vremenskog trenutka.
2. Rješiti jednažbu količine gibanja, dobijanje novog polja brzina.
3. Računanje masenih protoka na stranicama kontrolnih volumena.
4. Rješavanje jednažbe za tlak.
5. Korekcija masenih protoka na stranicama kontrolnih volumena.
6. Korekcija polja brzina definiranog u proračunskim čvorovima pomoću novog polja tlaka.
7. Korigiranje rubnih uvjeta.
8. Ponoviti korake od točke 3 nadalje.
9. Riješiti diskretizirane transportne jednažbe za ostale fizikalne veličine  $\varphi$  (transportne jednažbe u modelima turbulencije).
10. Prelazak u novi vremenski trenutak za iznos  $\Delta t$ .

U PISO algoritmu nije potrebno vršiti podrelaksacije polja tlaka i brzine. Također je važno biti oprezan sa vremenskim korakom tako da obuhvatimo sve relevantne pojave u strujanju.

## 6.5 Vremensko osrednjavanje polja tlaka i brzine

Reynoldsovo osrednjavanje u nestacionarnoj formulaciji osrednjava polje brzine i tlaka po ansamblu. Budući da je strujanje oko cilindra izrazito nestacionaran problem strujanje će se u svakom trenutku razlikovati. Ako se promatraju točke separacije tokom strujanja može se uočiti kako se te točke s vremenom pomiču u prostoru. Može se zaključiti da će i raspodjela tlaka varirati svakim trenutkom. Da bi napravili dijagrame raspodjele tlaka na cilindar osrednjavamo strujanje:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{t^m - t^1} \sum_{n=1}^m \left( \frac{\varphi^n + \varphi^{n-1}}{2} \right) (t^n - t^{n-1}), \quad (6.14)$$

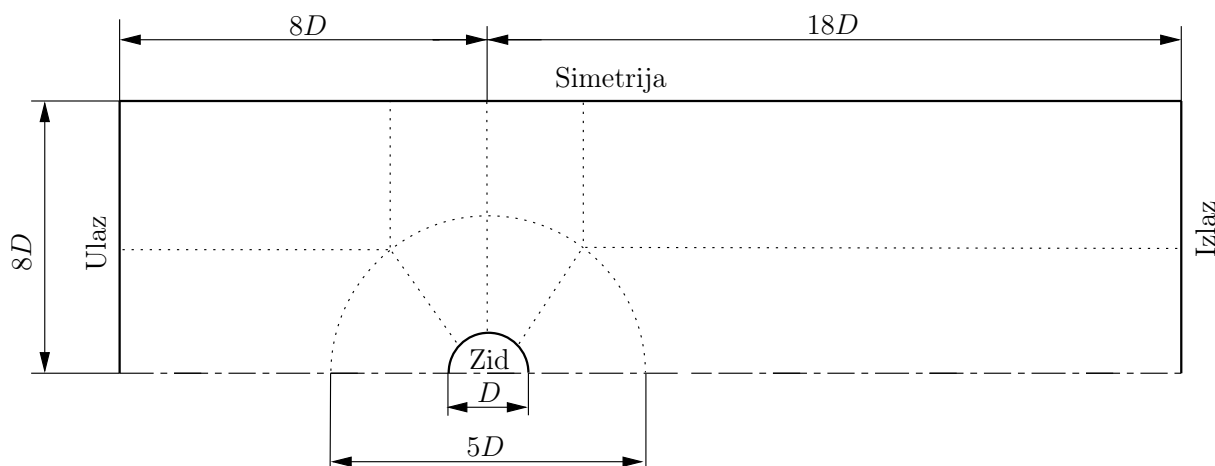
gdje je:

$$\varphi = \{v_i, p\}. \quad (6.15)$$

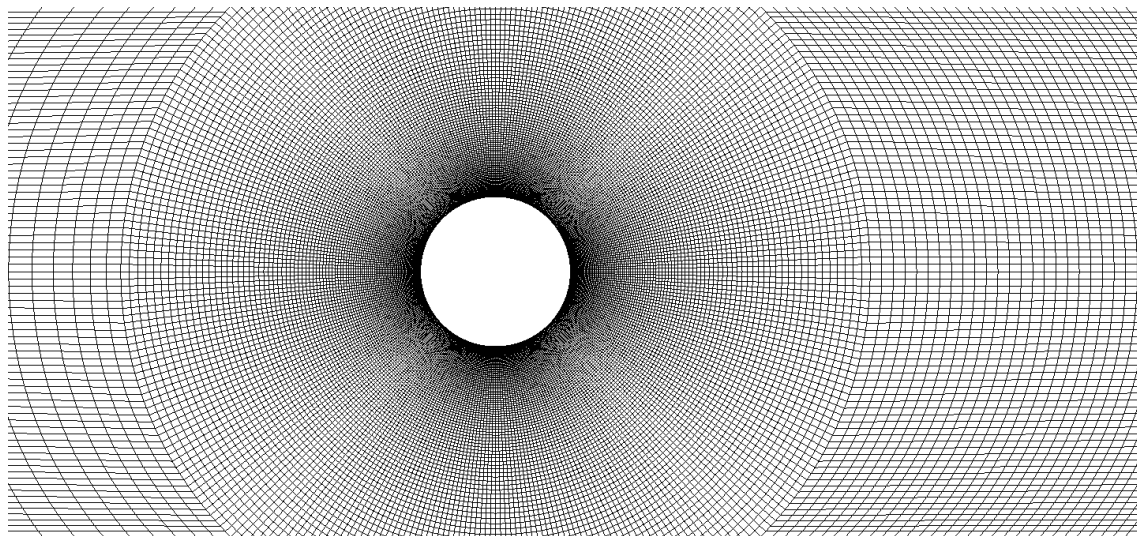
## 7 NUMERIČKA SIMULACIJA

### 7.1 2D PRISTUP

U [11] je opisana konvergencija rješenja ovisno o veličine domene. Ako se koriste rubni uvjeti simetrije za gornji i donji rub, uz premalu visinu domene dobija se povećani koeficijent otpora. Prema [14, 15] ako se koristi mreža O tipa dovoljno je za vanjski promjer mreže uzeti  $15D$ .



Slika 18. Domena proračuna



Slika 19. Diskretizacija područja proračuna oko cilindra

U [16] je pokazano da se za Reynoldsove brojeve oko 1000 događa najveće odstupanje od eksperimenta. Kako bi se bolje razumjelo što se događa odabrani su Reynoldsovi brojevi 1000, 2000 i 3900.

Konvergencija rješenja rađena je za Reynoldsov broj 1000. Korišteni model za ispitivanje konvergencije je  $k-\omega$  SST. Tablica 3 daje prikaz konvergencije vremenski osrednjenog koeficijenta otpora.

mreža:	broj volumena:	$\overline{C_D}$	$\overline{y^+}$
A	65600	1.440	0.32
B	85600	1.442	0.32
C	123600	1.444	0.3

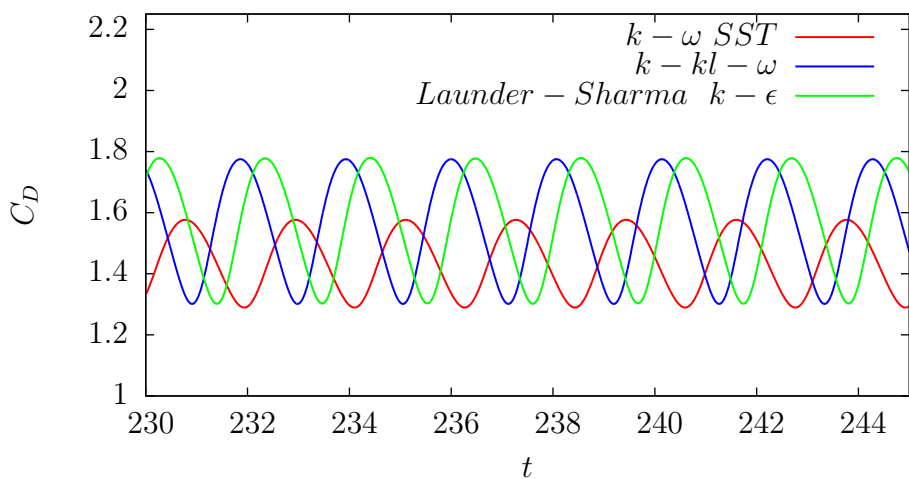
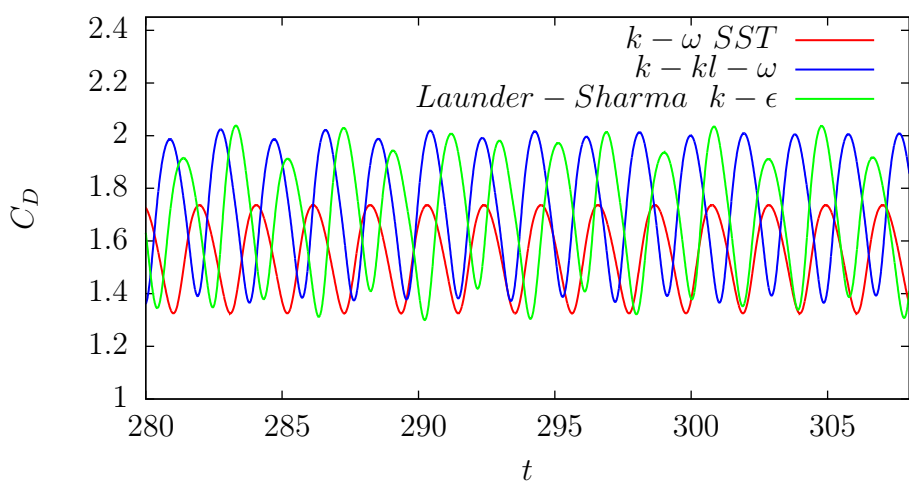
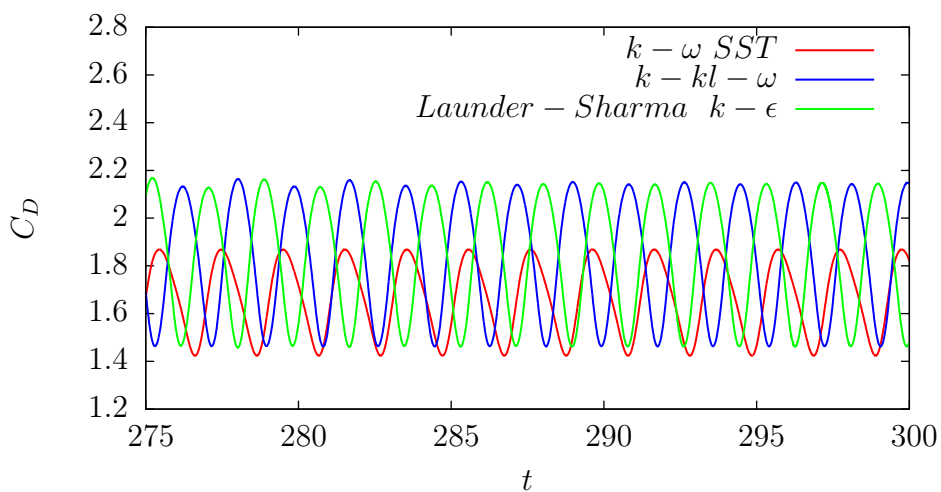
**Tablica 3. Konvergencija rješenja**

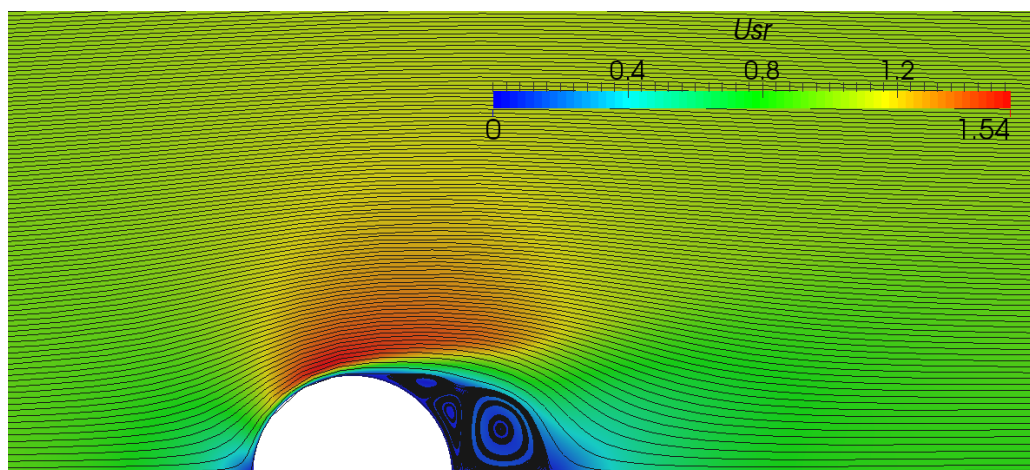
Vidimo da je razlika između mreže B i C jako mala te se iz tog razloga koristi mreža B u daljnjem izlaganju. Povećavanje broja kontrolnih volumena u RANS formulaciji na 2D domeni ne vodi riješenju konzistentnom s fizikom problema, što će kasnije biti objašnjeno.

Model turbulencije:	Reynoldsov broj		
	1000	2000	3900
$k - kl - \omega$	1.557	1.725	1.839
$k - \omega$ SST	1.442	1.550	1.665
<i>Launder - Sharmak</i> - $\epsilon$	1.559	1.700	1.835
2D FVM RANS [16]	1.41		
2D FVM RANS [17]	1.64		
2D FVM RANS [18]	1.383		1.574
2D FVM RANS [19]	1.5		
2D RANS [20]	1.51		
2D FEM [18]	1.470		
2D FVM [18]	1.6000		
2D FEM [21]	1.4665		
2D FVM LES [15]			1.625
2D FEM LES [22]		1.68	1.86
exp [15, 16]	0.99	0.985	0.98±0.005

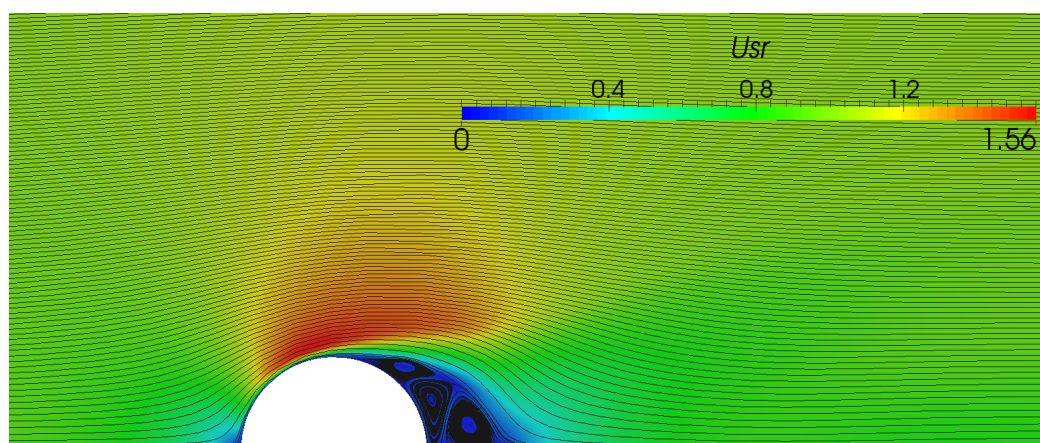
**Tablica 4. Usporedba vremenski osrednjenog koeficijenta otpora  $\overline{C_D}$**

U tablici 4 su prikazani iznosi osrednjenog koeficijenta otpora za razmatrane Reynoldsove brojeve i modele turbulencije. Iako je  $k - \omega$  SST pokazao niži otpor od  $k - kl - \omega$  i *Launder - Sharma*  $k - \epsilon$  i dalje je koeficijent otpora previsok. 2D formulacija za ovaj problem ne daje dobro rješenje za koeficijent otpora što je pokazano usporedbom s literaturom koja je dana u tablici 4. Slike 20, 21 i 22 su prikazi promjene koeficijenta otpora u vremenu. Slike 23, 24 i 25 su prikazi osrednjenog polja brzina za Reynoldsov broj 1000. Na slici 30 je vidljiva sustavna greška 2D formulacije u odnosu na eksperiment.

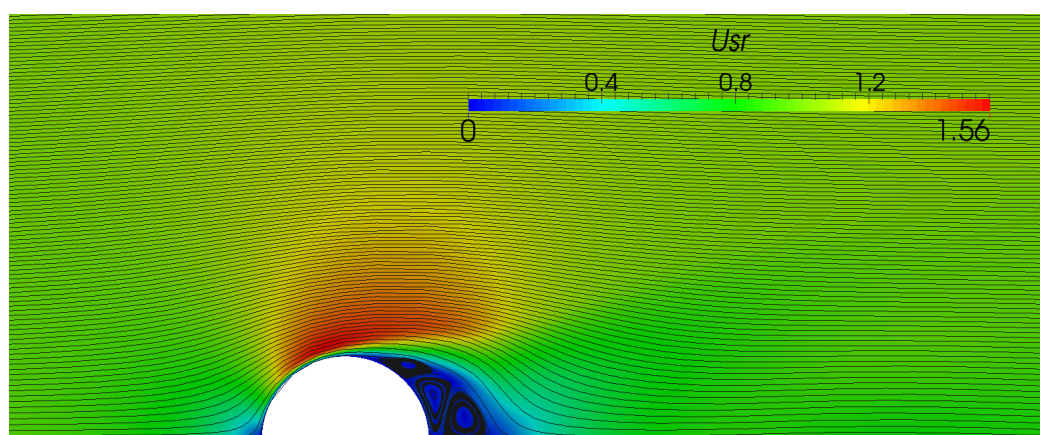
Slika 20. Koeficijenti otpora  $C_D$  za Reynoldsov broj 1000Slika 21. Koeficijenti otpora  $C_D$  za Reynoldsov broj 2000Slika 22. Koeficijenti otpora  $C_D$  za Reynoldsov broj 3900



Slika 23. Strujnice osrednjenog strujanja  $k - \omega$  SST  $Re = 1000$

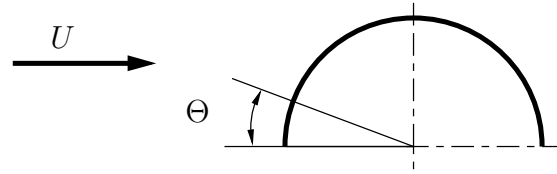
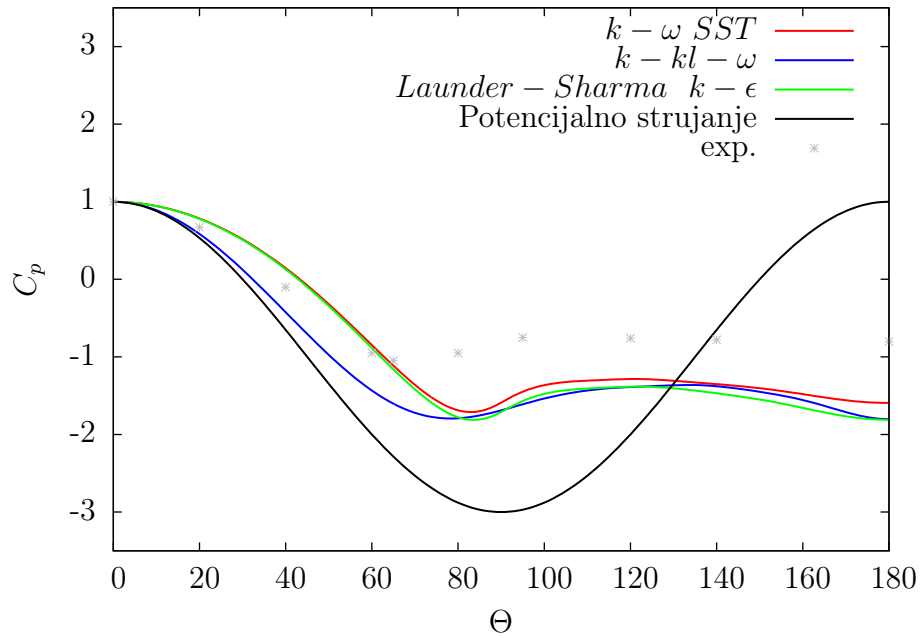
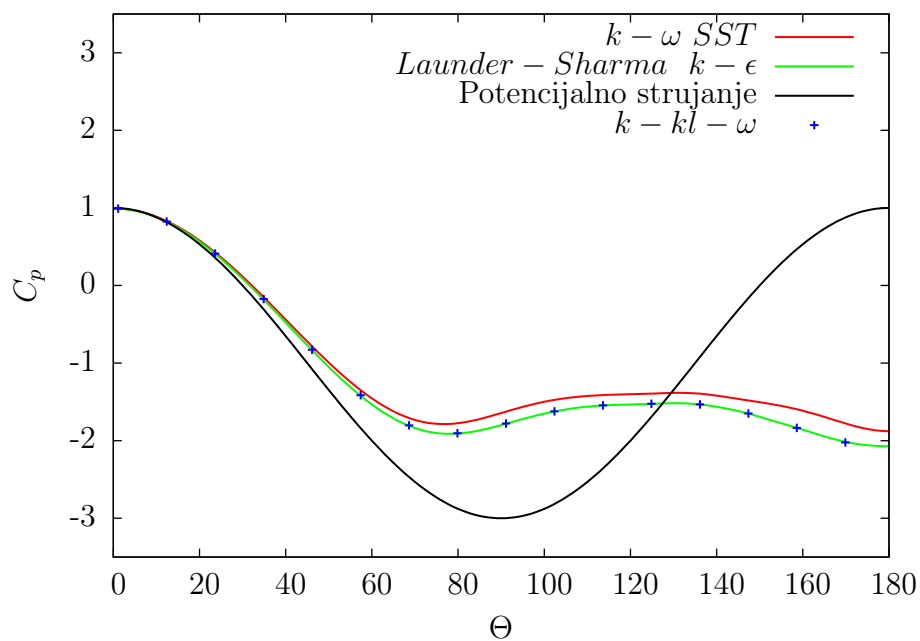


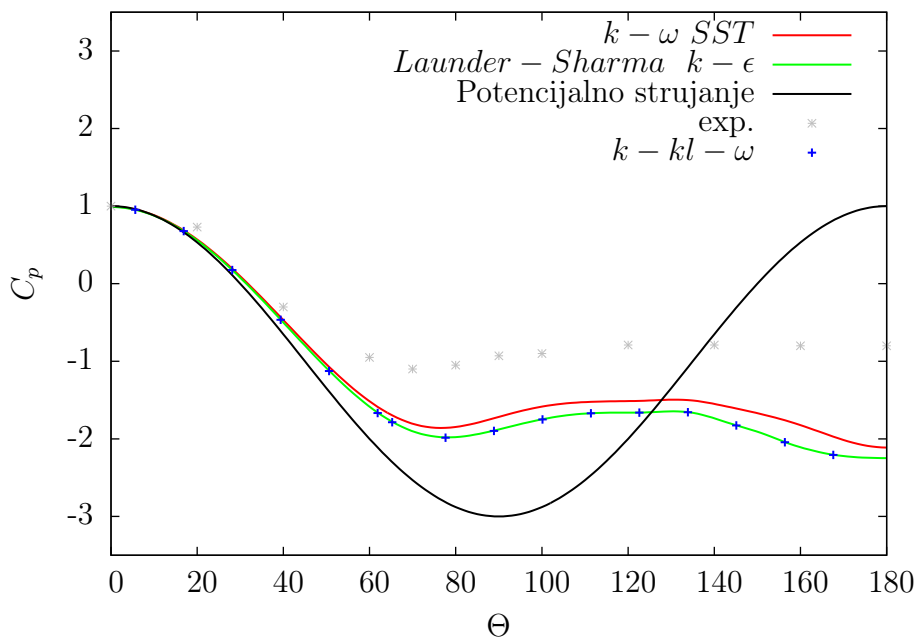
Slika 24. Strujnice osrednjenog strujanja  $k - kl - \omega$   $Re = 1000$



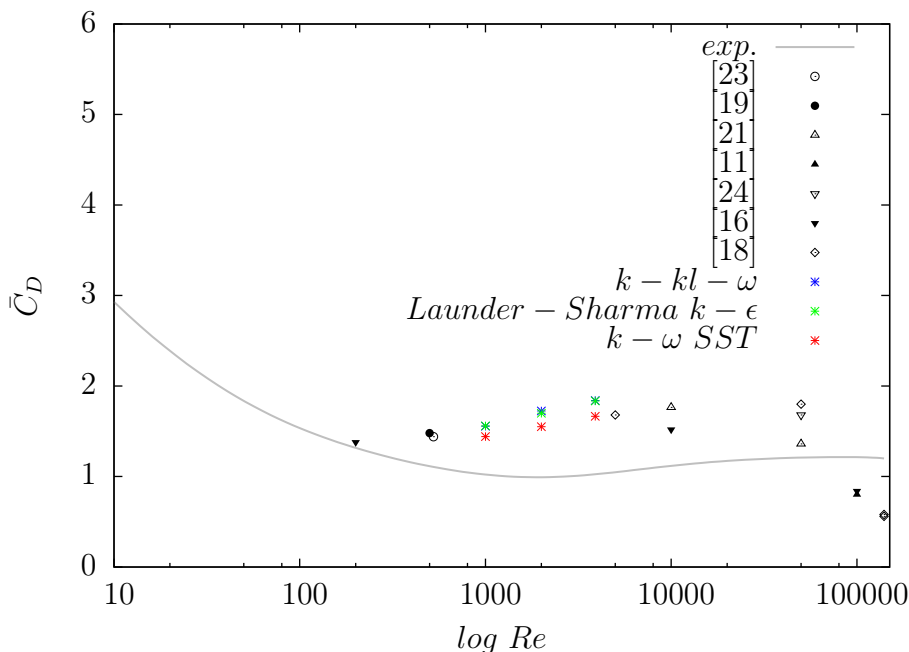
Slika 25. Strujnice osrednjenog strujanja Launder - Sharma  $k - \epsilon$   $Re = 1000$



Slika 26. Definicija kuta  $\Theta$ Slika 27. Koeficijenti tlaka  $C_p$  za Reynoldsov broj 1000Slika 28. Koeficijenti tlaka  $C_p$  za Reynoldsov broj 2000



Slika 29. Koeficijenti tlaka  $C_p$  za Reynoldsov broj 3900

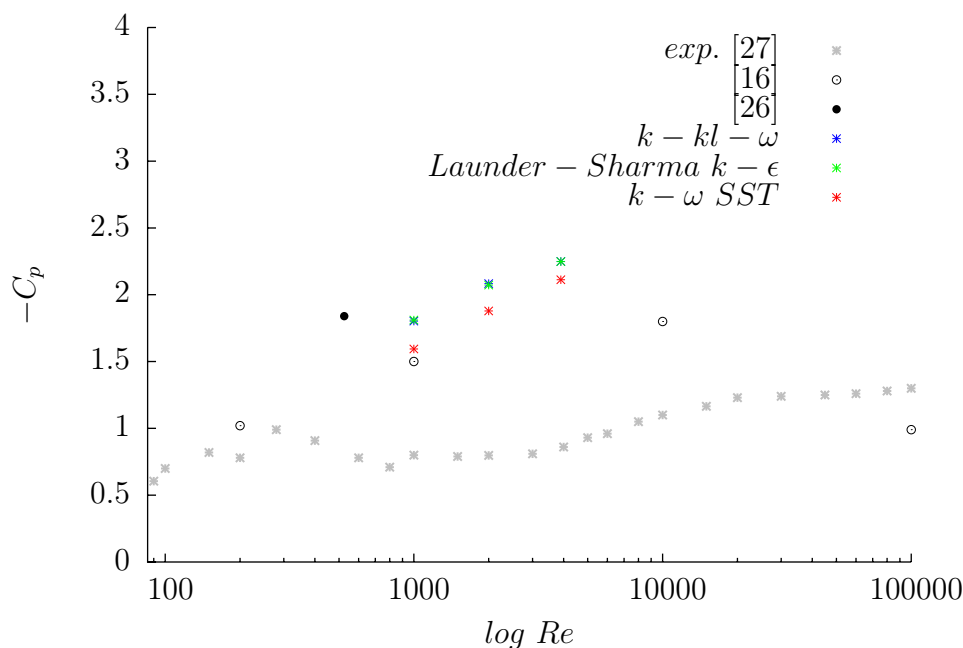


Slika 30. Koeficijent otpora  $\bar{C}_D$

Slike 27, 28 i 29 su prikazi koeficijenta tlaka na stijenci cilindra. Za slučaj optjecanja cilindra pri ovako niskim Reynoldsovim brojevima raspodjela tlaka ima mnogo veći utjecaj na koeficijent otpora ( $\approx 90\%$ ) naspram posmičnih naprezanja na stijenci [25, 26], što objašnjava dobivenu razliku u otporu. Na slikama 27, 28 i 29 prikazano je rješenje potencijalnog strujanja da se bolje vidi razlika koja nastaje odvajanjem strujanja. Budući

da je u točki zastoja tlak porastao za dinamički tlak koji odgovara zaustavnom tlaku, sve krivulje imaju jednak početni iznos  $C_p = 1$ .

Na slici 30 pokazano je ponašanje 2D formulacije u potkritičnom području. Pri nižim vrijednostima Reynoldsova broja koeficijent otpora je previsok, a pri višim prenizak u odnosu na eksperiment. Nakon što je otpor pao pri višim vrijednostima Reynoldsovog broja ostaje konstantan sve do krize otpora te tada doživljava još jedan pad što je prikazano u [11]. Na osnovu potkritičnog područja nismo u mogućnosti dati zaključak o točnosti ovakovog pristupa za kritično i natkritično područje. U [24] je kriza otpora dobro uhvaćena 2D simulacijom te se rješenja bolje poklapaju sa eksperimentom za razliku potkritičnog područja.

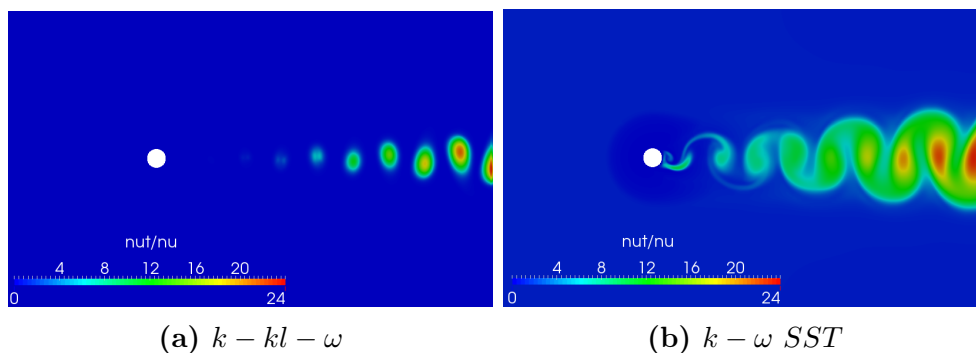


**Slika 31.** Usporedba koeficijenta tlaka na  $\Theta = 180^\circ$

Na dijagramima koeficijenta tlaka se jasno vidi kako je vrijednost tlaka na stražnjoj strani preniska što rezultira previsokim koeficijentom otpora. Recirkulacijska zona kod  $k - \omega SST$  modela je veća naspram  $k - kl - \omega$  i  $Launer - Sharma k - \epsilon$  modela. Primjećeno je da je veća recirkulacijska zona u korelaciji s nižim otporom. Razmatranjem vremenski osrednjenog polja brzina, prikazanog na slikama 23, 24, 25, možemo primjetiti postojanje dva manja i jednog većeg vrtloga. Razlike radi, 3D LES simulacija [15] pokazuje postojanje samo jednog vrtloga znatno veće duljine od recirkulacijske zone u 2D strujanju. Postojanje vrtloga koje fizikalni eksperiment nije pokazao je mogući uzrok loše raspodjele tlaka [26]. Previsoki koeficijent otpora također je u korelaciji sa visokim vrijednostima Reynoldsovih naprezanja u vrtložnom tragu. Veličinu recirkulacijske zone diktiraju vrijednosti Reynoldsovih naprezanja [26, 22, 16].

Slika 32 daje prikaz polja turbulentne viskoznosti za  $k - kl - \omega$  i  $k - \omega SST$  model.

Iz polja turbulentne viskoznosti možemo zaključiti kada se događa tranzicija strujanja prema kriteriju  $\mu_T > \mu_\infty$  [28]. Pošto je  $k - kl - \omega$  tranzicijski model za očekivati je da će bolje opisati tranziciju strujanja. Na slici 32 jasno se vidi kako se tranzicija sa



Slika 32. Polja turbulentne viskoznosti za  $Re = 1000$

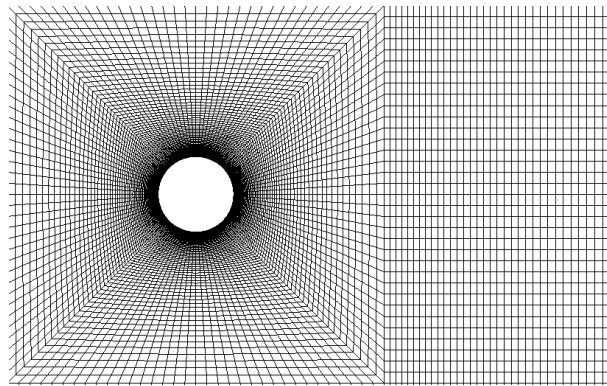
$k - kl - \omega$  modelom događa u vrtložnom tragu, što se poklapa sa eksperimentom. Usprkos navedenom to nije pomoglo za razvijanje dobrog rješenja. Naspram  $k - kl - \omega$  modela  $k - \omega SST$  model je pokazao kako se tranzicija zbiva na cilindru. *Launder - Sharma*  $k - \epsilon$  model je pokazao slične karakteristike kao  $k - kl - \omega$  model, uz još kasniju tranziciju strujanja.

Mogući su mnogi razlozi pogrešne raspodjele tlaka u 2D formulaciji. Jedan od glavnih razloga je vjerovatno što je prijelaz u trubulenciju 3D pojava što nije moguće opisati 2D formulacijom. Detalji fizikalnog mehanizma koji vodi do krivog rješenja raspodjele tlaka tj. otpora još uvijek nisu jasni u potpunosti [26, 24]. Generalno, prilikom osptrujavnja tupih tijela događa se isti fenomen koji je prikazn na cilindru [24].

Obzirom da je 2D simulacija višestruko jeftinija u pogledu računalnog vremena i računalnih resursa važno je znati njezina ograničenja i sposobnosti predviđanja dobrih rezultata. Cilindar je poprilično jednostavna geometrija za koju se ne mogu dobiti dobra rješenja, a prilikom razmatranja bilo kakvih kompleksnijih geometrija potrebno je rješenje provjeriti ili ga uzeti s rezervom.

## 7.2 3D PRISTUP

U svrhu provedbe 3D proračuna napravljena je nova mreža jer razvlačenje mreže korištene za 2D proračun rezultira s previše kontrolnih volumna. Valjanost mreže ispitana je tako da se 3D mreža prvo napravi kao 2D i usporedila sa mrežom B. Osrednjeni koeficijent otpora  $\bar{C}_D$  je dobiven pri Reynoldsovom broju 1000 sa  $k - \omega$  SST modelom i iznosi 1.45. Usporedbom tog koeficijenta sa koeficijentom koji se dobije na mreži B može se primjetiti mala razlika. Dimenzije domene su  $15D \times 15D \times 5D$ . U  $z$ -smjeru je podjeljena na 38 volumena te su primjenjeni rubni uvjeti periodične granice. Ukupni broj kontrolnih volumena iznosi 563464. Utjecaj širine domene nije ispitivan u ovom radu, a navedena širina je odabrana nakon pregleda literature. U [24] je pokazano kako je 3D simulacija u ovakvoj formulaciji jako osjetljiva na širinu domene te zadavanje krive može rezultirati višim otporom naspram 2D simulacije.



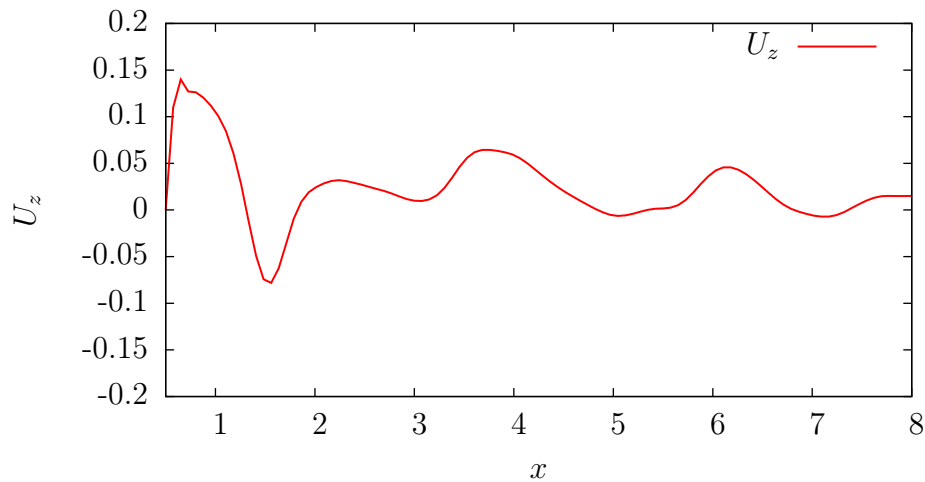
Slika 33. Diskretizacija područja oko cilindra (3D mreža)

U [15] je provedena 3D simulacija sa LES formulacijom na domeni širine  $\pi D$  te se ta širina pokazala dovoljnom za razvijanje "točnih" rezultata. Promjena širine domene bez povećanja broja kontrolnih volumena ne pridonosi točnijem rješenju [29]. U [29] je pokazano kako povećavanjem širine domene uz povećanje broja volumena vodi sve boljem rješenju sa LES formulacijom te je preporučena širina iznad  $8D$  za niske Reynoldsove brojeve u potkritičnom području.

Model turbulencije:	Reynoldsov broj		
	1000	2000	3900
$k - kl - \omega$	1.016	1.402	1.419
<i>Launder - Sharmak - <math>\epsilon</math></i>	1.186		
exp [15, 16]	0.99	0.985	$0.98 \pm 0.005$

Tablica 5. Usporedba vremenski osrednjenog koeficijenta otpora  $\bar{C}_D$

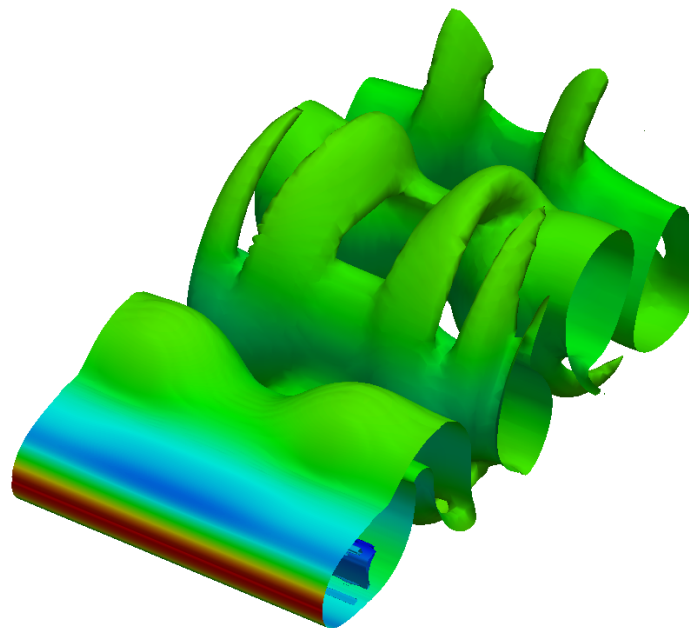
Vrtlozi koji se pojavljuju u  $z$  smjeru smanjuju iznos tlaka na stražnjoj strani cilindra tako da se dobije niži koeficijent otpora od onog kojeg bi dobili ekstrapolacijom zadnjih vrijednosti laminarnog strujanja [16]. Slika 34 daje prikaz iznosa komponente brzine  $U_z$ .



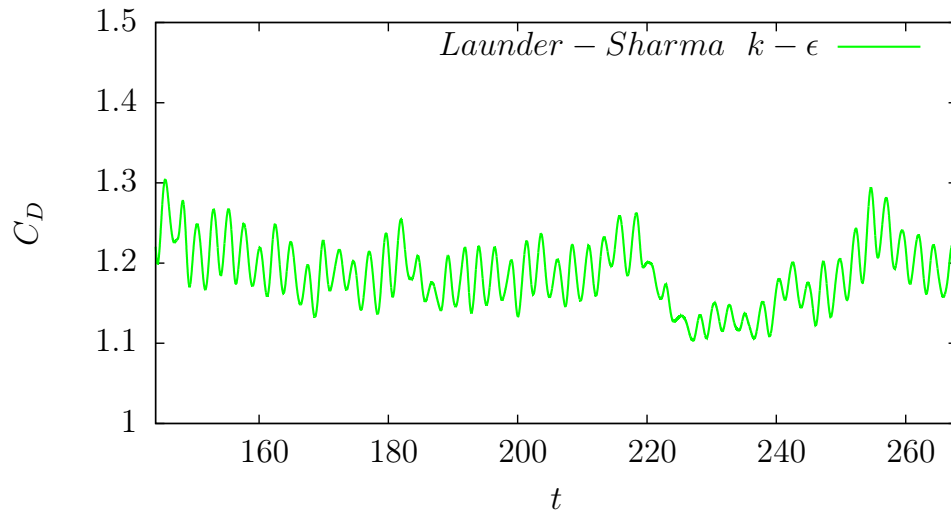
**Slika 34.** Trenutna brzina  $U_z$  na  $x - z$  ravnini,  $z = 2.5$  (*Launder - Sharma  $k - \epsilon$* ),  $Re = 1000$

Može se vidjeti kako iza cilindra brzina u smjeru  $z$  ima značajan iznos, a udaljavanjem opada jer se vrtlozi raspadaju.

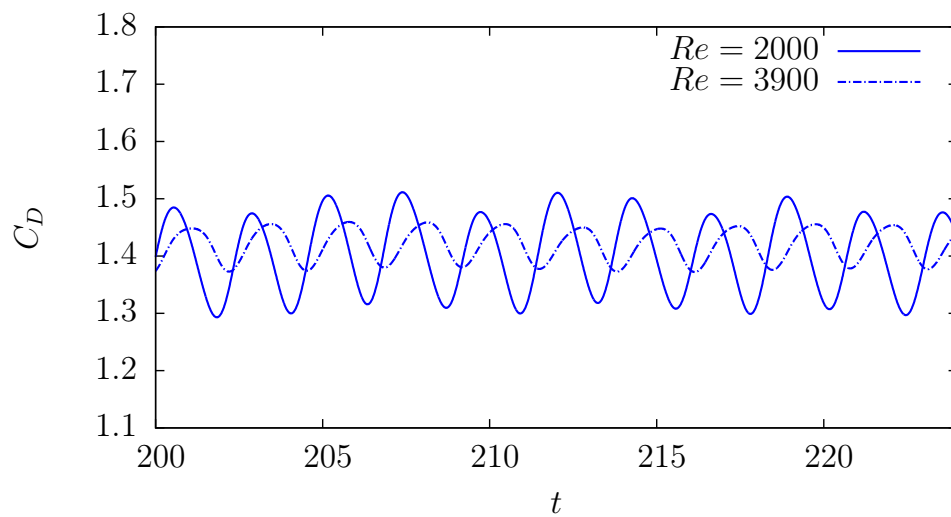
$k - kl - \omega$  pri Reynoldsovom broju 1000 je pokazao drastičan pad otpora za razliku od Reynoldsovih brojeva 2000 i 3900 gdje je pad otpora manji. Ovo relativno nepredvidivo ponašanje RANS modela u 3D je u skladu s rezultatima iz [24]. Također je testiran *Launder - Sharma  $k - \epsilon$*  model pri  $Re = 1000$  koji je pokazao je drastičan pad otpora kao  $k - kl - \omega$  na istoj mreži.



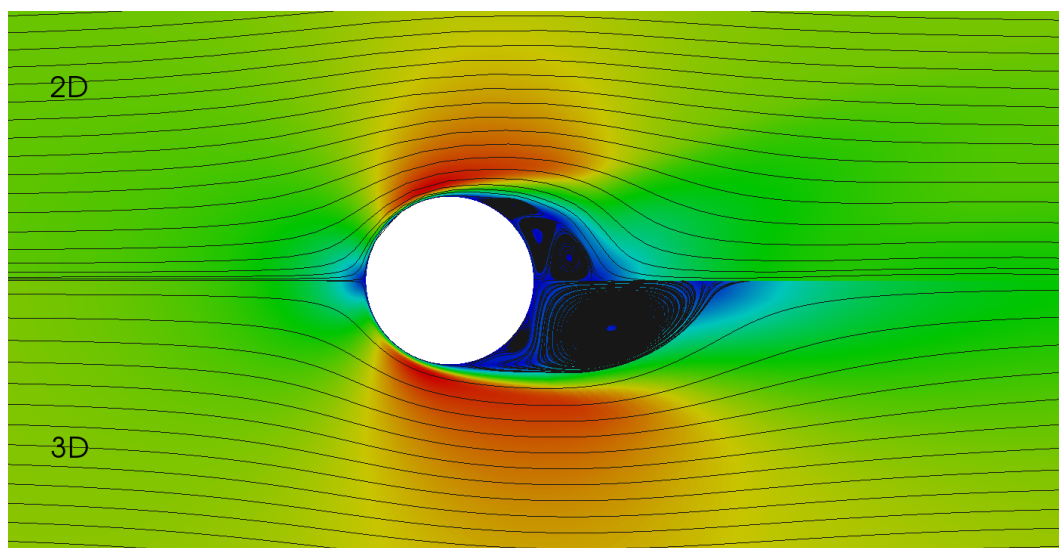
**Slika 35.**  $\omega_{mag} = 0.5$ , *Launder - Sharma  $k - \epsilon$*  model,  $Re = 1000$



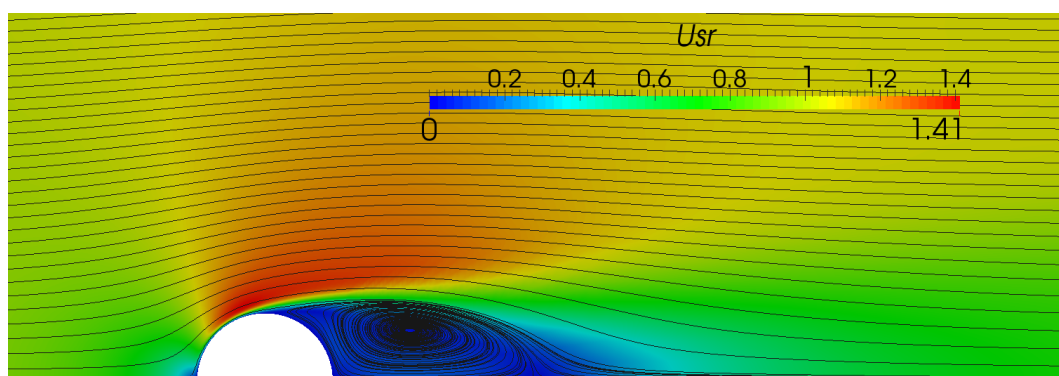
Slika 36. Koeficijent otpora  $C_D$ ,  $Re = 1000$



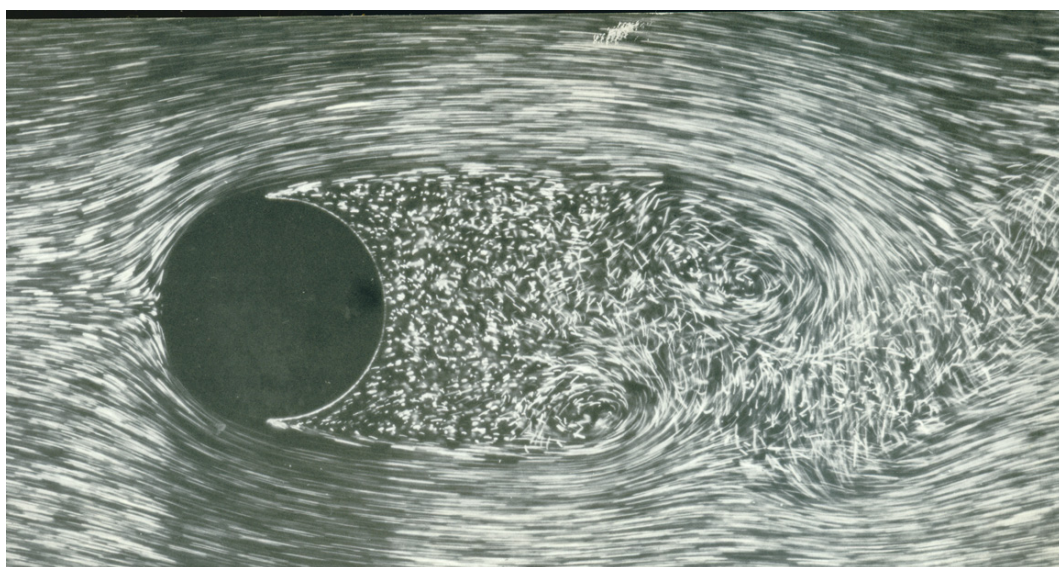
Slika 37. Koeficijenti otpora  $k - kl - \omega$



Slika 38. Razlika u recirkulacijskoj zoni sa *Lauder – Sharma*  $k - \epsilon$  modelom,  $Re = 1000$



Slika 39. Strujnice osrednjenog strujanja  $k - kl - \omega$ ,  $Re = 1000$



Slika 40. Fotografija pri eksperimentalnom mjerenju  $Re = 2000$  [1]



## 8 ZAKLJUČAK

S obzirom na to da korištenje zidnih funkcija nije konzistentno [11], u ovom radu koriste se modeli turbulencije za male Reynoldsove brojeve (engl. low Re-models), tj. granični sloj rješava se u potpunosti. Iako se prijelaz u turbulenciju pri potkritičnim Reynoldsovim brojevima događa nizvodno od cilindra, prema saznanjima autora nije moguće dobiti koeficijent otpora numeričkim putem, nestlačivom 2D formulacijom metodom koja se bazira na tlaku, koji odgovara konsenzusu eksperimentalnih rezultata. Numerički rezultati s 2D pristupom pokazuju redovno lošu raspodjelu tlaka, previsoki iznos amplituda i srednje vrijednosti koeficijenta otpora. Dobiveni rezultati 2D proračuna u skladu su s rezultatima iz literature.

Drugi problem je što RANS osrednjavanje relativno nepredvidivo predviđa otpor 3D formulacijom. U [24] napravljena su ispitivanja za više debljina mreže te je uočeno kako je vrijednost otpora funkcija debljine mreže u  $z$  smjeru, što je u skladu i s rezultatima dobivenim u ovom radu. Nadalje, rezultati ovog rada sugeriraju da širina mreže koja daje "dobar" prosječni koeficijent otpora pri jednom Reynoldsovom broju ne daje nužno dobar prosječni koeficijent za neki drugi Reynoldsov broj. Uočeno je i da 3D RANS rješenje najčešće daje prevelik otpor s ostalim simptomima tipičnim za 2D rješenje no, rijeđe dobivena rješenja daju "dobar" otpor s premalim amplitudama ( u odnosu na rješenje dobiveno LES formulacijom). Iako 3D pristup daje bolja rješenja naspram 2D pristupa, jako je osjetljiv na širinu domene i model turbulencije što ga čini jako nepredvidivim [24]. Ovu pojavu potrebno je detaljnije istražiti.

## LITERATURA

- [1] [http://nptel.ac.in/courses/112104118/lecture\\_31/31-3\\_mechanics.htm](http://nptel.ac.in/courses/112104118/lecture_31/31-3_mechanics.htm), “Mechanics of boundary layer transition,” *Lecture 31*.
- [2] D. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*. Oxford science publications, 2 ed., 1988.
- [3] OpenFOAM<sup>®</sup>, “<http://openfoam.org/>,”
- [4] Zdravko V., *Mehanika fluida*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2002.
- [5] *Mehanika fluida I*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [6] *Mehanika fluida II*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [7] D. Matijašević, “Izveštaj prve faze eksperimenta na numeričkom modelu replike penkalinog zrakoplova ca-10 pa,” 2013.
- [8] A. H. Z.J. Wang, Cgunlei Liang, “Large eddy simulation of flow over a cylinder using high-order spectral difference method,” 2010.
- [9] [http://dicat.uniqe.it/querrero/OpenFOAM\\_course2015b.html](http://dicat.uniqe.it/querrero/OpenFOAM_course2015b.html), “Introductory OpenFOAM<sup>®</sup> course from 13 to 17 July, 2015,”
- [10] Zdravko V., Džijan I., *Računalna dinamika fluida*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [11] A. Benim, M. Cagan, A. Nahavandi, and E. Pasqualotto, “Rans predictions of turbulent flow past a circular cylinder over the critical regime,” in *Proceedings of the 5th IASME/WSEAS International Conference on Fluid Mechanics and Aerodynamics, Athens, Greece*, pp. 5–9, Citeseer, 2007.
- [12] D. Matijašević, *Hermiteova interpolacija radijalnim baznim funkcijama u metodi kontrolnih volumena*. PhD thesis, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2011.
- [13] J.H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [14] A. Travin, M. Shur, M. Strelets, and P. Spalart, “Detached-eddy simulations past a circular cylinder,” *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 63, no. 1-4, pp. 293–313, 2000.
- [15] M. Breuer, “Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 28, no. 9, pp. 1281–1302, 1998.
- [16] Rosetti, Guilherme F and Vaz, Guilherme and Fugarra, Andre LC, “URANS Calculations for Smooth Circular Cylinder Flow in a Wide Range of Reynolds Numbers: Solution Verification and Validation,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 134, no. 12, 2012.

- [17] K. Lam and C. Wei, “Characteristics of vortices shed from a circular cylinder and an inclined flat plate,” *Computational Wind Engineering*, 2006.
- [18] W. Wu, *Two-dimensional RANS Simulation of Flow Induced Motion of Circular Cylinder with Passive Turbulence Control*. PhD thesis, The University of Michigan, 2011.
- [19] H. M. Blackburn and R. D. Henderson, “A study of two-dimensional flow past an oscillating cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 385, pp. 255–286, 1999.
- [20] G. Sheard, K. Hourigan, and M. Thompson, “Computations of the drag coefficients for low-reynolds-number flow past rings,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 526, pp. 257–275, 2005.
- [21] N. M Nigro, R. R. Paz, G. Filippini, M. A. STORTI, “Numerical predictions of several configurations of circular cylinders,” *Flow, Turbulence and Combustion*, pp. 1–9.
- [22] S. Singh and S. Mittal, “Flow past a cylinder: shear layer instability and drag crisis,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 47, no. 1, pp. 75–98, 2005.
- [23] R. Mittal and S. Balachandar, “Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders,” *Physics of Fluids (1994-present)*, vol. 7, no. 8, pp. 1841–1865, 1995.
- [24] M. Shur, P. R. Spalart, K. D. Squires, M. Strelets, and A. Travin, “Three-dimensionality in reynolds-averaged navier-stokes solutions around two-dimensional geometries.,” *AIAA journal*, vol. 43, no. 6, pp. 1230–1242, 2005.
- [25] J. D. Anderson Jr, “Fundamentals of Aerodynamics,” *Fundamentals of Aerodynamics*,, p. 79, 2001.
- [26] R. Mittal and S. Balachandar, “Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders,” *Physics of Fluids (1994-present)*, vol. 7, no. 8, pp. 1841–1865, 1995.
- [27] C. Norberg, “Effects of reynolds number and a low-intensity freestream turbulence on the flow around a circular cylinder,” *Chalmers University, Goteborg, Sweden, Technological Publications*, vol. 87, no. 2, 1987.
- [28] C. L. Rumsey and P. R. Spalart, “Turbulence model behavior in low reynolds number regions of aerodynamic flowfields,” *AIAA journal*, vol. 47, no. 4, pp. 982–993, 2009.
- [29] D. A. Lysenko, I. S. Ertesvåg, and K. E. Rian, “Large-eddy simulation of the flow over a circular cylinder at reynolds number 3900 using the openfoam toolbox,” *Flow, turbulence and combustion*, vol. 89, no. 4, pp. 491–518, 2012.

## **PRILOZI**

I. DVD-R disc