

# Računalna dinamika deformabilnih tijela

---

**Dogančić, Bruno**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:083111>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Bruno Dogančić**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Marko Jokić, dipl. ing.

Student:

Bruno Dogančić

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Iskreno se zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Marku Jokiću na dosadašnjem uloženom trudu, vremenu i povjerenju te konkretnim savjetima koji su mi pružili potrebna znanja, želju i sigurnost za otvaranjem novih vrata percepcije i ulaska u područje dinamike.

Veliku zahvalu dugujem svom bivšem, ali uvijek aktualnom mentoru prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću koji me je svojom posebnosti, dobrotom i otvorenosti zainteresirao za područje mehanike i potihio namamio da upišem smjer IMRS.

Zahvalu dugujem i svim ostalim profesorima, docentima i asistentima s drugog kata.

Svim srcem zahvaljujem svojoj najbližoj obitelji, svom ocu i nesuđenom strojaru Niki, najmilijoj majci Iki, zatim starijem bratu Elgaru i najdražim sestrama Eriki, Emi i Klaudiji, koji su me sve ove godine podržavali i vjerovali u mene.

Posebnu zahvalu izražavam svojoj voljenoj Katarini koja je uvijek i neumorno bila uz mene, pogotovo kad je bilo najteže, i njegovala me svojom ljubavlju kroz sve što smo skupa prolazili. Također zahvaljujem njenoj obitelji koja me prihvatila kao člana obitelji.

Zahvaljujem i svim svojim prijateljima te na ukazanom prijateljstvu i pomoći kolega s fakulteta, posebice gosp. Č. i kolegama *Ingmod*.

Bruno Dogančić, univ. bacc. ing. mech.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: Dogančić Bruno

Mat. br.: 0035178316

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalna dinamika deformabilnih tijela**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Computational dynamics of deformable bodies**

Opis zadatka:

U radu je potrebno provesti računalnu analizu dinamičkog odziva sustava deformabilnih tijela korištenjem sljedećih pristupa: a) metoda konačnih elemenata korištenjem teorije velikih pomaka, b) metoda dinamike sustava više tijela koja uključuje reducirane modele pojedinih deformabilnih članova sustava. Analize provesti na numeričkom primjeru, te prikazati usporedbu rezultata dvaju navedenih pristupa. Dati pregled i opis korištenih algoritama, uključujući formulaciju problema dinamike deformabilnih tijela i metode redukcije reda modela pojedinih članova sustava.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualnu dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

24. rujna 2015.

Rok predaje rada:

26. studenog 2015.

Predvideni datumi obrane:

2., 3. i 4. prosinca 2015.

Zadatak zdao:

Doc. dr. sc. Marko Jokić

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. Uvod .....	1
1.1. Motivacija .....	2
1.2. Podjela problema dinamike.....	2
1.3. Problemi primijenjene dinamike .....	3
1.3.1. Strukturalna dinamika .....	3
1.3.2. Dinamika sustava više tijela.....	4
1.3.3. Dinamika deformabilnih sustava više tijela .....	4
1.4. Modeliranje mehaničkih sustava.....	5
1.4.1. Mehaničko modeliranje.....	5
1.4.2. Matematičko modeliranje .....	6
2. Računalna dinamika deformabilnih tijela.....	7
2.1. Metoda konačnih elemenata.....	7
2.2. Metoda konačnih elemenata korištenjem teorije velikih pomaka.....	8
2.2.1. Izvod izoparametarskog kontinuum elementa .....	16
2.3. Metode numeričke integracije u metodi konačnih elemenata.....	20
2.3.1. Metode Direktna integracije.....	21
2.3.2. Eksplicitna integracija.....	21
2.3.3. Metoda centralnih razlika.....	21
2.3.4. Implicitna integracija .....	24
2.3.5. Newmarkova metoda .....	25
2.3.6. Hilber-Hughes-Taylorova metoda .....	26
2.4. Dinamika sustava više tijela.....	27
2.4.1. Jednadžbe gibanja krutih tijela.....	27
2.5. Deformabilna tijela u dinamici sustava više tijela .....	31
2.6. Reduciranje reda modela.....	32
2.7. Metode integracije u dinamici sustava više tijela .....	38
3. O korištenim programskim paketima .....	39
3.1. Abaqus .....	39
3.1.1. Abaqus sučelje za Adams .....	39
3.2. Adams .....	40
3.2.1. Adams Flex .....	40
3.2.2. Adams Durability.....	40
4. Numerički primjer .....	41
4.1. Mehanizam s 3 grede .....	41

4.1.1. Numerički model – Abaqus .....	43
4.1.2. Numerički model – Adams .....	44
4.2. Rezultati simulacije.....	47
4.3. Zaključak analize korištenjem materijalno neprigušenog modela.....	65
4.4. Analiza s kraćim trajanjem simulacije .....	68
5. Zaključak .....	71
6. Dodatak A: Osnovne veličine mehanike kontinuuma .....	73
7. Dodatak B: Modeliranje prigušenja.....	77
7.1. Slobodne prigušene vibracije sustava s jednim stupnjem slobode .....	77
7.2. Modeliranje prigušenja u metodi konačnih elemenata.....	77
7.2.1. Proporcionalno prigušenje .....	77
7.2.2. Modalno prigušenje.....	78
8. Dodatak C: Frekvencijska analiza .....	81
8.1. Slobodne vibracije neprigušenog sustava .....	81
8.2. Problem svojstvenih vrijednosti.....	81
8.3. Svojstvene frekvencije i forme vibriranja neprigušenog sustava.....	82
8.4. Prisilne vibracije prigušenog sustava s $n$ stupnjeva slobode.....	83
LITERATURA.....	84
PRILOZI.....	86

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Mehaničko modeliranje robotske ruke .....	5
Slika 2.	Gibanje tijela u Kartezijevom koordinatnom sustavu .....	11
Slika 3.	Proizvoljno kruto tijelo [1] .....	27
Slika 4.	Proizvoljni sustav više krutih tijela [1].....	30
Slika 5.	Geometrija i rubni uvjeti mehanizma s 3 grede .....	41
Slika 6.	Raspodjela pogonskog momenta u vremenu .....	42
Slika 7.	Rubni uvjeti i geometrija modela u Abaqusu .....	44
Slika 8.	Rubni uvjeti i geometrija krutog modela u Adamsu .....	45
Slika 9.	Rubni uvjeti i geometrija deformabilnog modela u Adamsu .....	46
Slika 10.	Rad poopćenih vanjskih sila $W_e$ cijelog modela.....	48
Slika 11.	Kinetička energija $E_k$ cijelog modela .....	49
Slika 12.	Unutarnja energija $E_i$ cijelog modela .....	49
Slika 13.	Pomak točke $B$ u smjeru osi $x$ .....	50
Slika 14.	Pomak točke $B$ u smjeru osi $y$ .....	51
Slika 15.	Brzina točke $B$ u smjeru osi $x$ .....	51
Slika 16.	Brzina točke $B$ u smjeru osi $y$ .....	52
Slika 17.	Pomak točke $C$ u smjeru osi $x$ .....	52
Slika 18.	Pomak točke $C$ u smjeru osi $y$ .....	53
Slika 19.	Brzina točke $C$ u smjeru osi $x$ .....	53
Slika 20.	Brzina točke $C$ u smjeru osi $y$ .....	54
Slika 21.	Pomak točke $P_1$ u smjeru osi $x$ .....	54
Slika 22.	Pomak točke $P_1$ u smjeru osi $y$ .....	55
Slika 23.	Brzina točke $P_1$ u smjeru osi $x$ .....	55
Slika 24.	Brzina točke $P_1$ u smjeru osi $y$ .....	56
Slika 25.	Pomak točke $Q_1$ u smjeru osi $x$ .....	56
Slika 26.	Pomak točke $Q_1$ u smjeru osi $y$ .....	57
Slika 27.	Brzina točke $Q_1$ u smjeru osi $x$ .....	57
Slika 28.	Brzina točke $Q_1$ u smjeru osi $y$ .....	58
Slika 29.	Pomak točke $L_1$ u smjeru osi $x$ .....	58
Slika 30.	Pomak točke $L_1$ u smjeru osi $y$ .....	59
Slika 31.	Brzine točke $L_1$ u smjeru osi $x$ .....	59
Slika 32.	Brzina točke $L_1$ u smjeru osi $y$ .....	60
Slika 33.	Naprezanja prema von Misesu u točki $P_1$ .....	60
Slika 34.	Naprezanja prema von Misesu u točki $P_2$ .....	61
Slika 35.	Naprezanja prema von Misesu u točki $P_3$ .....	61
Slika 36.	Naprezanja prema von Misesu u točki $Q_1$ .....	62
Slika 37.	Naprezanja prema von Misesu u točki $Q_2$ .....	62
Slika 38.	Naprezanja prema von Misesu u točki $Q_3$ .....	63
Slika 39.	Naprezanja prema von Misesu u točki $L_1$ .....	63
Slika 40.	Naprezanja prema von Misesu u točki $L_2$ .....	64
Slika 41.	Naprezanja prema von Misesu u točki $L_3$ .....	64
Slika 42.	Kinetička energija modela – uvećani dijagram .....	66
Slika 43.	Energije sustava, ALLKE se odnosi na kinetičku energiju, ALLIE se odnosi na unutarnju energiju i ALLWK se odnosi na rad poopćenih vanjskih sila .....	68
Slika 44.	Propagacija vala unutar deformabilnog tijela.....	70



---

Slika 45.	Geometrijska interpretacija tenzora gradijenta deformiranja .....	73
Slika 46.	Polarno razlaganje tenzora gradijenta deformiranja.....	74
Slika 47.	Modeliranje Rayleighevog prigušenja.....	78

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Inkrementalna dekompozicija veličina mehanike kontinuuma – TL formulacija... 14	14
Tablica 2. Inkrementalna dekompozicija veličina mehanike kontinuuma – UL formulacija .. 15	15
Tablica 3. Pregled matrica korištenih u analizi konačnim elementima..... 19	19
Tablica 4. Opis korištenog materijalnog modela ..... 20	20
Tablica 5. Algoritam integracije za eksplicitnu metodu ..... 24	24
Tablica 6. Algoritam integracije pomoću Newmarkove metode ..... 26	26
Tablica 7. Zadane geometrijske i materijalne karakteristike numeričkog modela..... 42	42
Tablica 8. Postavke simulacija u Abaqusu ..... 43	43
Tablica 9. Mreže konačnih elemenata..... 44	44
Tablica 10. Postavke simulacije u Adamsu..... 46	46
Tablica 11. Vremena računanja pojedine metode (trajanje simulacije $T_s = 0.25$ s) ..... 47	47
Tablica 12. Postavke kratke simulacije – mali vremenski korak za sve analize ..... 68	68
Tablica 13. Vremena računanja za kratku analizu (postavke analize prema tablici 12.) ..... 69	69

## POPIS OZNAKA

### Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
$\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$	-	linearna, nelinearna matrica transformacije
$c$	N·s/m	prigušenje
$\mathbf{C}$	N·m/s	matrica prigušenja
$\mathbf{C}$	-	desni Cauchy – Greenov tenzor deformiranosti
$C_{ijkl}$	-	tenzor elastičnosti
$c_{kr}$	N·s/m	kritično prigušenje
$\mathbf{D}$	-	tenzor brzine deformacije
$E$	J	energija
$E$	N/m <sup>2</sup>	Youngov modul
$E_i$	J	unutarnja energija
$E_k$	J	kinetička energija
$\mathbf{F}$	-	tenzor gradijenta deformiranja
$\mathbf{F}_i$	N	vektor unutarnjih sila
$\mathbf{K}, \mathbf{K}_L, \mathbf{K}_{NL}$	N/m	globalna, linearna, nelinearna matrica krutosti
$\mathbf{L}$	-	tenzor gradijenta brzine deformiranja
$m$	kg	masa
$M$	Nm	moment
$\mathbf{M}$	m	matrica masa
$\mathbf{n}$	-	vektor normale
$\mathbf{R}$	-	matrica/tenzor rotacije
$\mathbf{R}_e$	N	vektor vanjskog opterećenja
$\mathbf{R}_i$	N	vektor unutarnjeg opterećenja
$S$	m <sup>2</sup>	površina
$\mathbf{S}$	-	Drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja
$t$	s	vrijeme
$\mathbf{T}$	N	proizvoljni vektor sila
$t_R$	s	vrijeme računanja
$T_s$	s	trajanje simulacije
$\mathbf{U}$	-	desni tenzor izduženja
U1, U2, U3	m	globalni pomaci u smjeru osi X, Y, Z (u Abaqusu)
$u_x, u_y, u_z$	m	pomak u smjeru osi x, y, z
$V$	m <sup>3</sup>	volumen, obujam
$\mathbf{V}$	-, m	lijevi tenzor izduženja, globalni vektor pomaka
$\dot{\mathbf{V}}$	m/s	globalni vektor brzina

$\ddot{\mathbf{V}}$	m/s <sup>2</sup>	globalni vektor ubrzanja
V1, V2, V3	m/s	globalne brzine u smjeru osi X, Y, Z (u Abaqusu)
$v_x, v_y, v_z$	m/s	brzina u smjeru osi x, y, z
<b>W</b>	-	tenzor vrtloženja
$W_e$	J	rad vanjskih poopćenih sila
X, Y, Z	-	globalne Kartezijeve koordinate (u Abaqusu)
x, y, z		lokalne Kartezijeve koordinate

### Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha_R$	-	Rayleighov parametar prigušenja
$\beta_R$	-	Rayleighov parametar prigušenja
$\delta_{ij}$	-	Kroneckerov delta operator
$\Delta t$	s	vremenski inkrement
$\epsilon$	-	Green – Lagrangeov tenzor deformacije
$\lambda$	-	vlastita vrijednost
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\zeta$	-	omjer prigušenja
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\sigma$	N/m <sup>2</sup>	Cauchyev tenzor naprezanja
$\Phi$	-	modalna matrica
$\Omega$	-	spektralna matrica

### Skraćenice

Oznaka	Puno značenje
3D	trodimenzionalno
ABQ	Abaqus
ADM	Adams
ALLIE	unutarnja energija cijelog sustava (Abaqus)
ALLKE	kinetička energija cijelog sustava (Abaqus)
ALLWK	rad vanjskih sila koje djeluju na sustav (Abaqus)
B31	gredni element prvog reda (Abaqus)
B32	gredni element drugog reda (Abaqus)
DAE	diferencijalno algebarske jednadžbe (eng. <i>Differential-Algebraic Equations</i> )
EXPL	eksplicitna metoda (Abaqus)
GSTIFF	Gearov integrator krutih jednadžbi (Adams)
HHT	Hilber-Hughes-Taylorov integrator (Abaqus, Adams)
IMPL	implicitna metoda (Abaqus)

MKE	metoda konačnih elemenata
MNF	modalno neutralna datoteka (eng. <i>Modal Neutral File</i> ) (Abaqus, Adams)
NLGEOM	geometrijska nelinearnost (eng. <i>Non Linear GEOMetry</i> ) (Abaqus)
N-R	Newton – Raphsonov postupak iteracije
ODE	obične diferencijalne jednačbe (eng. <i>Ordinary Differential Equations</i> )
PDE	parcijalne diferencijalne jednačbe (eng. <i>Partial Differential Equations</i> )
RKF45	Runge-Kutta-Fehlberov integrator 4 i 5 reda (Adams)
WSTIFF	Wielenga integrator krutih jednačbi (Adams)

### Notacija

U radu je, gdje je za to bilo potrebe, korištena posebna notacija varijabli. Za proizvoljnu tenzorsku varijablu  $\mathbf{X}$  definirani su lijevi i desni indeksi.

Lijevi indeksi se koriste za definiranje konfiguracije u kojoj se varijabla dešava i konfiguraciju na koju se odnosi, tj. u kojoj se mjeri, na način

$${}^b_a \mathbf{X},$$

gdje je  $a$  konfiguraciju u kojoj se varijabla mjeri, a  $b$  konfiguracija u kojoj se varijabla dešava.

Ukoliko se izostavi lijevi donji indeks na način

$${}^b \mathbf{X},$$

tada se varijabla mjeri u konfiguraciji u kojoj se dešava, u ovom slučaju je to konfiguracija  $b$ .

Za ovakve varijable će se često koristiti indeksni zapis kojim se označava definicija i red tenzora

$$X_{ijkl},$$

gdje je  $X_{ijkl}$  tenzor četvrtog reda, a  $i, j, k$  i  $l$  poprimaju vrijednosti 1, 2 i 3.

## SAŽETAK

Tema ovog diplomskog rada je računalna dinamika deformabilnih tijela s primjenom u dinamici sustava više tijela.

Cilj rada je provesti računalnu analizu dinamičkog odziva sustava deformabilnih tijela korištenjem metode konačnih elemenata izvedenih teorijom velikih pomaka i metodom dinamike sustava više tijela koja uključuje reducirane modele pojedinih deformabilnih članova sustava.

Analiza je izvršena numerički na primjeru mehanizma s tri grede pomoću metode konačnih elemenata u komercijalnog programskom paketu Abaqus i pomoću metode dinamike sustava više tijela u komercijalnom programskom paketu Adams.

Rad je podijeljen na pet poglavlja i tri dodatka.

U prvom, uvodnom poglavlju, kratko je objašnjena problematika primijenjene dinamike s naglaskom na dinamiku deformabilnih sustava više tijela.

U drugom poglavlju opisana je teorija vezana za računalnu dinamiku deformabilnih tijela. Dan je pregled i opis korištenih algoritama, uključujući formulaciju problema dinamike deformabilnih tijela i metode redukcije reda modela pojedinih članova sustava.

U trećem poglavlju kratko su opisani korišteni, komercijalno dostupni, programski paketi Abaqus i Adams.

U četvrtom poglavlju provedena je numerička analiza dinamičkog odziva mehanizma s tri grede koje su modelirane kao deformabilne. Grede diskretizirane konačnim elementima korištene su u programskom paketu Abaqus te u programskom paketu Adams kao reducirani modeli.

U petom poglavlju ovoga rada dan je kratak osvrt na problematiku primijenjene računalne dinamike te je izveden zaključak o dobivenim rezultatima računalne analize.

U posljednja tri poglavlja, odnosno dodatka, kratko je dan pregled osnovnih izraza mehanike kontinuuma, modeliranja prigušenja i frekvencijske analize.

Ključne riječi: računalna dinamika, deformabilni sustav više tijela, redukcija reda modela, metoda konačnih elemenata, nelinearna analiza, Abaqus, Adams.

---

**SUMMARY**

---

The subject of this thesis is computer dynamics of deformable bodies with application in multibody dynamics.

The aim of this work is to carry out computer analysis of dynamic response of deformable body system using a large displacement finite element method and multibody system method which includes reduced models of individual deformable body.

Analysis was carried out numerically on example of three bar mechanism using finite element method in commercial software package Abaqus and using multibody dynamics method in commercial software package Adams.

The work is divided into five chapters and three appendices.

In the first, introductory chapter, issues of applied dynamics is briefly explained with a focus on flexible multibody dynamics.

In the second chapter, theory regarding computer dynamics of flexible bodies is described. An overview and explanation of used algorithms is given, including formulation of flexible body dynamics problem and methods used to reduce model order of individual system members.

The third section briefly describes used, commercially available, software packages Abaqus and Adams.

In the fourth chapter numerical analysis of dynamic response of three bar mechanism is carried out. Bars modeled as flexible bodies and discretized with finite elements are used in software package Abaqus and as reduced models in software package Adams.

In the fifth chapter of this paper a brief review is given together with the conclusion on the results of numerical analysis.

In the last three chapters, appendices, an overview of fundamental expressions in continuum mechanics, modeling of damping and frequency analysis is given.

Key words: computer dynamics, flexible multibody systems, model order reduction, finite element method, nonlinear analysis, Abaqus, Adams.

## 1. Uvod

Današnje konstrukcije i proizvodi kompliciranih su i nepravilnih oblika koje je nemoguće proračunati standardnim analitičkim metodama. Upravo iz tog razloga razvijene su različite numeričke metode proračunavanja koje s razvojem računala sve više dolaze do izražaja. Jedna od tih metoda je metoda konačnih elemenata kojom se s modernim računalima mogu relativno brzo rješavati zahtjevni dinamički problemi. Računalna dinamika deformabilnih tijela korištena u analizi numeričkih primjera u ovom radu također se temelji na metodi konačnih elemenata.

Veliki broj današnjih konstrukcija sačinjen je od više tijela koja su međusobno povezana na različite načine. Dinamika sustava više tijela (eng. *dynamics of multibody systems*) bavi se dinamikom krutih tijela, a eventualne elastičnosti definiraju se kroz razne pojednostavljene elemente kao što su npr. opruge.

Na današnje konstrukcije zahtjevi su sve veći te se teži optimiranju istih u svrhu smanjenja naprezanja, deformacija i mase, produljenja životnog vijeka i slično. Da bi se to omogućilo potrebno je spregnuti dva područja – dinamiku krutih i deformabilnih tijela. Time se javlja potreba za detaljnijim proučavanjem dinamike deformabilnih tijela. Osim toga, takvi problemi najčešće su vrlo kompleksni i nelinearne prirode te se većinom rješavaju numerički, odnosno računalno.

U radu su prikazani osnovni koncepti dinamike sustava više tijela i dinamike deformabilnih tijela te kako ih dovesti u spregu tako da čine deformabilni dinamički sustav više tijela (eng. *flexible multibody dynamic system*). Koncepti su prikazani kroz pregled i opis korištenih algoritama, formulaciju problema dinamike deformabilnih tijela te metode redukcije reda modela pojedinih članova sustava.

Pojašnjena je teorija vezana za rješavanje problema dinamike u programskom paketu Abaqus za numeričku analizu konstrukcija. Ukratko je pokazana procedura dobivanja reduciranih modela deformabilnih tijela namijenjenih za implementaciju u programskom paketu Adams za analizu dinamičkih sustava više tijela. Dva navedena programska paketa, iako izvorno namijenjena za rješavanje potpuno drugačijih problema, vremenom su se razvila te se trenutno preklapaju upravo u području računalne dinamike deformabilnih tijela. Iz tog razloga napravljena je usporedba rezultata na numeričkom primjeru.



## 1.1. Motivacija

Od modernog inženjera očekuje se suvereno korištenje dostupnih računalnih alata temeljenih na kompleksnoj teorijskoj pozadini koju treba razumjeti kako bi se program mogao učinkovito primijeniti u praksi.

Rad je nastavak na već postojeće radove vezane uz problematiku nelinearne numeričke analize konstrukcija, dinamike sustava više tijela i dinamike deformabilnih tijela. U želji za stjecanjem novih i proširivanju postojećih znanja iz navedenih područja odlučio sam odabrati temu diplomskog rada upravo tako da obuhvati ta područja.

Na prijedlog mentora, za temu smo odabrali računalnu dinamiku deformabilnih tijela. Cilj rada je proširiti znanja iz područja dinamike deformabilnih tijela kroz proučavanje dostupne literature te rješavanjem računalnih analiza koristeći komercijalno dostupne programe Abaqus i Adams.

## 1.2. Podjela problema dinamike

Dinamika je područje klasične mehanike koja proučava djelovanje sila na gibanje tijela i obratno. Dinamika je utemeljena Newtonovim zakonima gibanja. Problemi dinamike mogu se svesti na direktne dinamičke probleme (eng. *forward dynamics*) i inverzne dinamičke probleme (eng. *inverse dynamics*). Osim tih područja, dinamika se također bavi i vibracijama te kao posebna grana dinamike je optimizacija (eng. *optimisation*) [1].

Direktni dinamički problem se bavi određivanjem gibanja sustava koji je opterećen silama i momentima. Opisan je parcijalnim diferencijalnim jednačbama (PDE, eng. *partial differential equations*), a u većini slučajeva se može svesti na rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi (ODE, eng. *ordinary differential equations*). Takav sustav karakteriziraju velike rotacije, elementi za povezivanje unutar sustava posjeduju nelinearne karakteristike i slično. Ovisno o formulaciji matematičkog modela, uvode se dodatne algebarske jednačbe čime se dobivaju diferencijalno algebarske jednačbe (DAE, eng. *differential algebraic equation*)

Inverzni dinamički problem se bavi određivanjem zadanih i reakcijskih sila i momenata koje djeluju na sustav kojemu je poznato gibanje. U većini slučajeva se inverzni dinamički problem svodi na sustav algebarskih jednačbi.

Problem vibracija se najčešće svodi na određivanje sustava vlastitih vrijednosti i formi vibriranja (vlastitih vektora), s obzirom da se najčešće razmatraju problemi u linearnom

području, odnosno ograničeni malim pomacima. Problemi vibracija mogu se rješavati u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Ako se problem razmatra u frekvencijskoj domeni dobivaju se rješenja koja pokazuju koje su forme vibriranja najviše izražene pri određenoj frekvenciji. Za razliku od toga, razmatranje problema u vremenskoj domeni daje uvid u odziv neke promatrane varijable (npr. pomaka) u vremenu. U ovom kontekstu se može razmatrati i stabilnost sustava. Za zahtjevnije analize provodi se i nelinearna vibracijska analiza. Navedeni problemi se najčešće rješavaju modernim alatima – računalnim programima. U ovom radu spomenut će se tri najčešća problema primijenjene dinamike.

### **1.3. Problemi primijenjene dinamike**

Svaki od navedenih problema dinamike zasniva se na posebnim pretpostavkama pri modeliranju i rješavanju jednadžbi dobivenih matematičkim modelom, pa su iz tog razloga različite i metode kojima se pristupa rješavanju određenog problema [1].

Iz razloga što je klasičnim, analitičkim metodama vrlo zahtjevno i mnogim slučajevima nemoguće riješiti kompleksne dinamičke sustave koji se pojavljuju u današnjem vremenu, razvila se računalna dinamika.

Računalna dinamika se uglavnom koristi za rješavanje kompleksnih sustava za koje je nemoguće ili neisplativo dobiti analitičko rješenje. Riječ je o konstrukcijskim sustavima sačinjenih od više tijela (eng. *multibody systems*) koji sadrže velik broj tijela povezanih različitim vezama. Najčešće se radi o sustavima krutih tijela, no kombiniranjem računalne dinamike krutih tijela s metodom konačnih elemenata moguće je rješavati i probleme računalne dinamike deformabilnih sustava više tijela.

#### **1.3.1. Strukturalna dinamika**

Strukturalna dinamika (eng. *structural dynamics*) se bavi deformabilnim mehaničkim strukturama čiji su segmenti opterećeni silama i momentima te su u pravilu ograničeni na male pomake i male rotacije. Inženjerska svojstva, kao što su viskoelastičnost i masa, distribuirani su po čitavoj strukturi. Matematički model se najčešće svodi na parcijalne diferencijalne jednadžbe, a koji se nakon diskretizacije sustava matematičkim modeliranjem svodi na obične diferencijalne jednadžbe. Korištenjem već dobro poznatih metoda, kao što je metoda konačnih elemenata, dobiva se mogućnost korištenja komercijalnih i robusnih procedura kako bi se riješio problem strukturalne dinamike [1], [2]. Strukturalna dinamika može poslužiti za rješavanje dinamičkih problema u svrhu određivanja dinamičkih pomaka ili modalnih formi vibriranja.

### 1.3.2. *Dinamika sustava više tijela*

Dinamika sustava više tijela (eng. *multibody dynamics*) bavi se mehaničkim sustavom sastavljenim od međusobno povezanih krutih tijela kojima su dozvoljeni veliki pomaci i velike rotacije. Tijela su međusobno povezana elementima kinematskih ograničenja i različitim elementima za povezivanje. Stvarna svojstva zadanog problema, kao što su viskoelastičnost i inercija, diskretizirana su tokom procesa oblikovanja mehaničkog modela. Matematičko modeliranje stvorenog mehaničkog modela svodi se na obične diferencijalne jednačbe ili diferencijalno-algebarske jednačbe [1].

Koncept dinamike sustava više tijela danas ima jako široku primjenu u auto industriji, robotici, mehatronici, biomehaničkim sustavima, raznim mehanizmima i slično.

Kada se govori o krutim tijelima može se reći da je polje deformacija tog tijela  $\epsilon = 0$ , no i dalje mogu postojati koncentrirane elastične komponente, kao što su elastični zglobovi (eng. *flexible joints*) i elementi sila (eng. *force elements*) koji služe za povezivanje dvaju idealno krutih elemenata, a predstavljaju lokaliziranu elastičnost [7].

### 1.3.3. *Dinamika deformabilnih sustava više tijela*

Spregom prije navedenih sustava dobije se dinamika deformabilnih sustava više tijela (eng. *flexible multibody dynamics*). U okviru dinamike deformabilnih sustava više tijela, neka od tijela ili segmenti sustava su deformabilni. U takvom sustavu su i dalje međusobnim kinematičkim ograničenjima i različitim spojnim elementima povezana tijela, ali sada osim krutih tijela mogu postojati i deformabilna tijela. Takav problem najčešće se bavi rješavanjem nelinearnih struktura čiji su segmenti podvrgnuti velikim pomacima i zakretima krutog tijela te s deformacijama unutar pojedinih tijela.

Dinamika deformabilnih sustava više tijela može se podijeliti na dinamiku linearno elastičnih sustava više tijela i dinamiku nelinearno elastičnih sustava više tijela, pri čemu se linearnost odnosno nelinearnost odnosi na pretpostavke pod kojima se rješavaju jednačbe ravnoteže. Tako se za linearnu analizu može reći da se pretpostavljaju mali pomaci, odnosno da tenzor deformacija  $\epsilon \ll 1$ , ravnoteža se razmatra na nedeformiranom obliku, opterećenje ne mijenja smjer, ponašanje materijala je linearno elastično, a veza između deformacija i pomaka također je linearna. Na linearno elastične probleme lako se primjenjuje frekvencijska analiza. Za nelinearnu analizu s druge strane vrijede veliki pomaci (geometrijska nelinearnost), ravnoteža se postavlja na deformiranom obliku, opterećenje može mijenjati smjer, ponašanje materijala

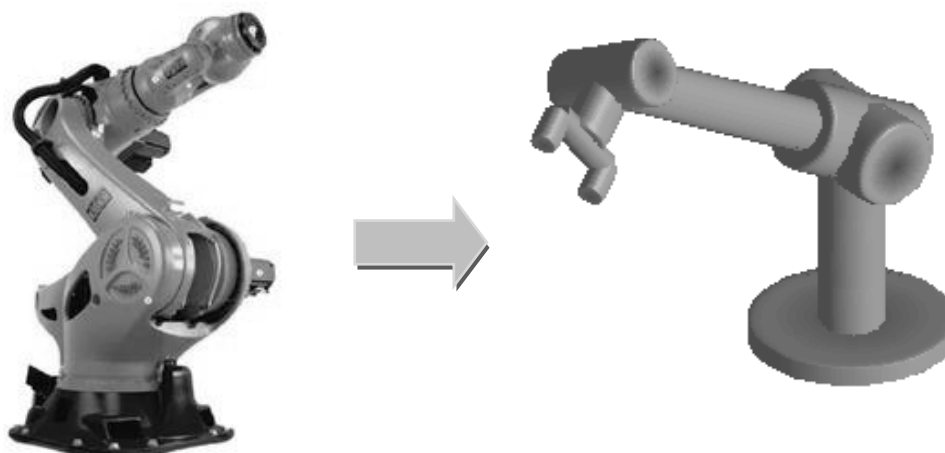
ne mora biti linearno elastično (postoji materijalna nelinearnost, pojavljuju se plastične deformacije), te veza između deformacija i pomaka u općem slučaju nije linearna [5], [6], [7].

#### 1.4. Modeliranje mehaničkih sustava

Modeliranje mehaničkih sustava može se podijeliti u dva koraka. Prvi korak je mehaničko modeliranje kojim se nastoji modelirati geometrija i veze među pojedinim dijelovima, pri čemu treba imati na umu da se u model uključe svi elementi i efekti koje se želi proučavati. Model treba biti dovoljno kompliciran kako bi obuhvatio željeni interes, a opet dovoljno jednostavan kako bi se zadovoljila željena točnost i brzina računanja. Na osnovu tog mehaničkog modela stvara se matematički model. Kako mehaničko, tako ni matematičko modeliranje nije jedan i jedinstveni postupak, već ovisi od problema do problema, odnosno od zahtjeva i ciljeva koji se žele dobiti određenom analizom.

##### 1.4.1. Mehaničko modeliranje

Ključan kriterij mehaničkog modeliranja (eng. *mechanical modeling*) je da gotovi mehanički model mora moći opisati (uzeti u obzir) sva mehanička svojstva stvarnog sustava koji se promatra, a sve sa željenom točnošću. Obzirom na promatrani problem i željene rezultate sustav se modelira kao problem dinamičkog sustava više tijela ili kao strukturalni dinamički problem ako su od interesa forme vibriranja. Općenito se sustavi sastavljaju od krutih tijela koji su međusobno povezani raznim spojnima elementima, a koji su podvrgnuti velikim pomacima i rotacijama, te malim vibracijama mogu modelirati kao dinamički sustavi više tijela. Ako je u interesu promatrati i deformabilnost pojedinih segmenata sustava pribjegava se modeliranju problema kao dinamičkom deformabilnom sustavu više tijela. Na slici 1 prikazan je postupak mehaničkog modeliranja.



Slika 1. Mehaničko modeliranje robotske ruke

### **1.4.2. Matematičko modeliranje**

Matematičko modeliranje (eng. *mathematical modelling*) je proces formuliranja sustava jednačbi koji opisuje gibanje i druge fizikalne pojave koje se pojavljuju na promatranom mehaničkom modelu. Za neke posebne (često puta samo jednostavne) slučajeve postoji i analitički zapis problema koji može poslužiti za verifikaciju numeričkih procedura. Matematički modeli nastali su iz proučavanja gibanja čestica koje reprezentiraju koncentrirane mase i krutih tijela na čije gibanje su primijenjeni klasični zakoni mehanike (kao što su Newtonovi zakoni gibanja). Ti matematički modeli proširuju se kako bi se opisale i druge fizikalne pojave, kao što je na primjer deformabilnost tijela. U ovom radu korištena su dva matematička modela. Jedan se temelji na metodi konačnih elemenata korištenjem teorije velikih pomaka, a drugi na metodi dinamike sustava više tijela koja uključuje reducirane modele pojedinih deformabilnih članova sustava.

## 2. Računalna dinamika deformabilnih tijela

Nekom dinamičkom problemu može se pristupiti na više načina. Ovisno o traženim rezultatima, analitičar koji se bavi dinamikom treba procijeniti kakve je prirode razmatrani dinamički problem i prema tome odabrati koji je pristup najbolji. U uvodu je rečeno koji su najčešći problemi primijenjene dinamike.

U nastavku ovog poglavlja prikazati će se formulacija problema dinamike deformabilnih tijela i redukcije modela pojedinih članova sustava. Kroz uvid u dobivene jednačbe te uvedene pretpostavke, pojedinac treba odlučiti hoće li rješavati zadani problem kao problem strukturalne dinamike, dinamike krutih tijela ili dinamike deformabilnih tijela.

Korištenjem metode konačnih elemenata mogu se izvesti jednačbe za rješavanje problema strukturalne dinamike kao što su modalna analiza, proučavanje vibracija, propagacija vala unutar strukture, mjerenje deformacija, naprezanja i pomaka konstrukcije i slično. Primjer strukturalne analize je određivanje slobodnih prigušenih ili neprigušenih vibracija.

Korištenjem koncepta dinamičkih sustava krutih tijela mogu se uzeti u obzir složeni sustavi sačinjeni od više tijela, ako je u interesu proučavanje utjecaja inercijalnih sila, sila prigušenja i elastičnosti u vezama među tijelima, zatim kinematika gibanja sustava i slično.

Ukoliko je u interesu proučavanje strukturalnog odziva deformabilnih konstrukcija sačinjenih od više tijela, problemu se može pristupiti korištenjem dinamike sustava deformabilnih tijela. Takav pristup može dati rješenja strukturalne dinamike kao što su na primjer vibracije ili naprezanja u pojedinom tijelu, ali i rješenja koja se dobiju korištenjem dinamike sustava više tijela kao što je kinematika gibanja ili utjecaj inercijskih sila uslijed velikih rotacija i pomaka.

### 2.1. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata (skraćeno MKE) je numerička metoda temeljena na diskretizaciji kontinuuma. S obzirom da je numerička metoda, MKE ujedno je i približna metoda. Po svojoj definiciji iz tog razloga MKE unosi grešku u rješenje. Odabirom prikladnih formulacija i algoritama te pravilnom diskretizacijom razmatranog kontinuuma moguće je kontrolirati grešku i zadržati je unutar dozvoljenih granica.

Zbog svoje robusnosti i mnogostranosti zauzela je svoje mjesto u mnogim područjima primijenjene matematike pa tako i u mehanici deformabilnih tijela. Daljnjim razvojem MKE

područje rješavanja se proširilo na gotovo sva područja primijenjene mehanike, a danas predstavlja sveprisutan alat u numeričkoj analizi konstrukcija.

U okviru mehanike kontinuuma najprije je izvedena formulacija za rješavanje osnovnih statičkih linearnih problema na temelju teorije malih pomaka, a posebne formulacije MKE proširile su joj područje primjenjivosti tako da danas može rješavati složene dinamičke i nelinearne probleme.

Dinamički problemi su općenito nelinearni, a formulacijom metode konačnih elemenata korištenjem teorije velikih pomaka dobiven je alat koji može rješavati nelinearne i dinamičke probleme. U radu je stoga dan pregled i opis korištenih algoritama, uključujući i formulaciju problema dinamike deformabilnih tijela. Dobar dio teorije preuzet je iz [2].

## 2.2. Metoda konačnih elemenata korištenjem teorije velikih pomaka

Linearna analiza, koja se temelji na pretpostavci da su pomaci konačnih elemenata infinitezimalno mali i da se materijal ponaša linearno elastično, dobar su početak za istraživanje bilo kojeg problema jer daju uvid u kvalitetu korištene mreže konačnih elemenata, a osim toga i uvid u moguće nelinearnosti. Linearna analiza također podrazumijeva da se rubni uvjeti ne mijenjaju tokom analize. Takve pretpostavke rezultiraju jednadžbom ravnoteže za statičke probleme koja se može napisati kao

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  globalna matrica krutosti proračunskog modela,  $\mathbf{V}$  je vektor globalnih stupnjeva slobode, a  $\mathbf{R}$  je vektor čvornih sila proračunskog modela.

Jednadžba (1) predstavlja jednadžbu statičke ravnoteže za linearne probleme. Ovdje je matrica krutosti  $\mathbf{K}$  linearnog karaktera, te stoga vrijedi linearna superpozicija, a sama ovisnost sila i pomaka također je linearna. Za ovakav sustav linearnih jednadžbi postoji jednoznačna veza između krutosti i opterećenja. Ukoliko je bilo koji od gornjih uvjeta narušen, problem postaje nelinearan.

Nelinearni problemi u pravilu, osim za probleme kod kojih se mijenjaju rubni uvjeti (kao kod npr. kontakta), nastaju zbog kinematske nelinearnosti i materijalne nelinearnosti pa se problemi nelinearnosti mogu podijeliti na:

- Materijalnu nelinearnost – koju opisuju infinitezimalni pomaci i deformacije, a pri čemu je ovisnost naprezanja i deformacija nelinearna. Koristi se formulacija samo materijalne nelinearnosti.

- Kinematsku nelinearnost – koju opisuju velike rotacije i veliki pomaci. Može se podijeliti na dva slučaja:
  - Za deformacije se pretpostavlja da ostaju male. U ovom slučaju se bez obzira na to što se sustav podvrgava velikim rotacijama i velikim pomacima, i dalje ograničava na male deformacije. Pri tome se materijal može modelirati kao linearan ili nelinearan. Obično se koriste totalna Lagrangeova formulacija (TL, eng. *Total Lagrangian*) i ažurirana Lagrangeova formulacija (UL, eng. *Updated Lagrangian*),
  - Deformacije mogu biti velike. U ovom slučaju se sustav podvrgava velikim rotacijama i velikim pomacima, ali pri čemu mogu postojati i velike deformacije, dok se materijal može modelirati kao linearan ili nelinearan. Kao i kod problema malih deformacija koriste se TL formulacija ili UL formulacija.

Kao nelinearnost podrazumijeva se i kontakt, kod kojeg se mijenjaju rubni uvjeti, a može se promatrati skupa s prije navedenim nelinearnostima.

U ovom radu obradit će se slučaj kinematske nelinearnosti u kojem je sustav podvrgnut velikim rotacijama i velikim pomacima, a deformacije mogu biti proizvoljno velike.

Dinamički problem može se formulirati na osnovu osnovnog statičkog problema na sljedeći način. Pretpostavi li se da su opterećenja koja su dodijeljena na granici sustava dovoljno *brza* da utječu na rezultate, odnosno da se više ne može razmatrati statička ravnoteža (1) već se uzima u obzir utjecaj inercijskih sila, koji se mogu d'Alambertovim principom uključiti u volumne sile. Jednadžba ravnoteže za dinamički problem, uz pretpostavku da su ubrzanja opisana istim interpolacijskim funkcijama kao i pomaci, sada se može zapisati kao

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}(t), \quad (2)$$

gdje su  $\ddot{\mathbf{V}}(t)$  ubrzanja u čvorovima,  $\mathbf{M}$  je matrica mase, a za razliku od statičkog slučaja, globalni pomaci  $\mathbf{V}(t)$  i vektor čvornih sila  $\mathbf{R}(t)$  sada su ovisni o vremenu. Osim toga, kada se mjeri odziv dinamičkih sustava primjećuje se disipacija energije tokom gibanja (vibriranja) stoga treba modelirati i prigušenje koje je ovisno o brzini i s njom spregnuto, a slično kao inercijske sile, sile prigušenja uključuju se u volumne sile, te se dobije konačni izraz koji opisuje dinamički prigušeni sustav pobuđen vremenski ovisnom uzbuđom

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}(t), \quad (3)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{V}}$  brzina u čvorovima,  $\mathbf{C}$  je matrica prigušenja, a  $\mathbf{R}(t)$  vremenski ovisna uzbuda.



Izrazi (2) i (3) su linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima i takva jednadžba karakterizira sustave koji su ograničeni na male pomake, tj. linearne probleme. Ukoliko se raspiše dinamička jednadžba ravnoteže za nelinearne probleme, problem se svodi na rješavanje nelinearnog sustava diferencijalnih jednadžbi drugog reda

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})\ddot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})\dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}(t), \quad (4)$$

gdje matrica masa  $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})$ , matrica prigušenja  $\mathbf{C}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})$  i matrica krutosti  $\mathbf{K}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})$  nisu konstantne i mijenjaju se u vremenu, jer se pretpostavljaju veliki pomaci koji sada utječu na matricu mase i krutosti, a matrica prigušenja općenito je funkcija brzine. Gornji problem se može zapisati kraće na sljedeći način

$$\mathbf{G}(\ddot{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) = \mathbf{R}(t), \quad (5)$$

gdje je  $\mathbf{G}(\ddot{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})$  nelinearna vektorska funkcija unutarnjih sila (nastalih uslijed prigušenja i deformacija) i inercijskih sila. Ako se pretpostavi da sustav ima  $m$  stupnjeva slobode gibanja matrično se izraz (5) može zapisati kao

$$\begin{bmatrix} G_1(\ddot{V}_1, \dot{V}_1, V_1, \ddot{V}_2, \dot{V}_2, V_2, \dots, \ddot{V}_m, \dot{V}_m, V_m, t) \\ G_2(\ddot{V}_1, \dot{V}_1, V_1, \ddot{V}_2, \dot{V}_2, V_2, \dots, \ddot{V}_m, \dot{V}_m, V_m, t) \\ \vdots \\ G_m(\ddot{V}_1, \dot{V}_1, V_1, \ddot{V}_2, \dot{V}_2, V_2, \dots, \ddot{V}_m, \dot{V}_m, V_m, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_m(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Rješavanje nelinearnih dinamičkih problema zahtijevalo bi rješavanje sustava jednadžbi (6) dok se ne dobije ravnoteža unutarnjih i inercijskih sila s vanjskim silama. S obzirom na izrazitu nelinearnost takvog sustava koja uvelike otežava dobivanje rješenja, cilj je linearizirati sustav kako bi se lakše mogao riješiti inkrementalno iterativnim metodama [5].

Osnovni problem svih nelinearnih analiza je pronalazak ravnotežnog stanja. U metodi konačnih elemenata često se koristi Newton-Raphsonov iterativni postupak

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{V}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{V}^{(i)}, \end{aligned} \quad (7)$$

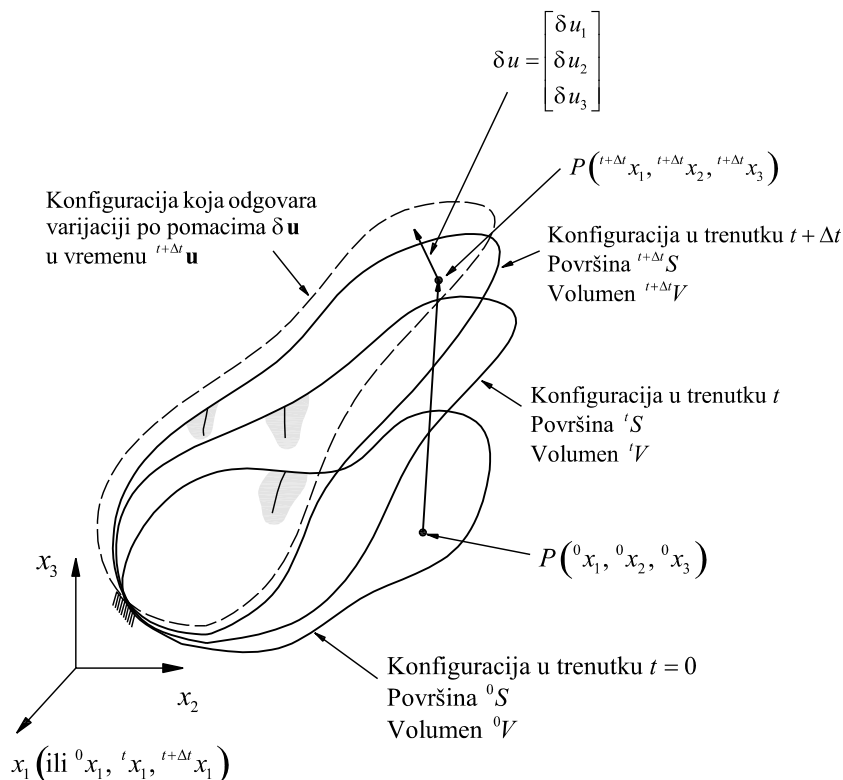
gdje je  $i$  broj iteracije i pri čemu treba zadati početne uvjete

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(0)} = {}^t\mathbf{V}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}. \quad (8)$$

U jednadžbama (7) i (8) jednadžbama  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$  predstavlja tangentnu matricu krutosti,  $\mathbf{R}$  je vektor vanjskih čvornih sila, a  $\mathbf{F}$  je vektor unutarnjih čvornih sila.

Kako je prije rečeno, potrebno je iterativno zadovoljiti ravnotežu u trenutnoj konfiguraciji. Na slici 2. prikazano je tijelo u fiksnom Kartezijevom koordinatnom sustavu i za to tijelo se

pretpostavlja da može biti podvrgnuto velikim rotacijama i velikim pomacima, ali isto tako da deformacije tijela mogu biti velike te da može postojati nelinearna konstitutivna ovisnost materijala. Cilj je uspostaviti ravnotežu u diskretnim trenucima  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , gdje je  $\Delta t$  vremenski korak. Pretpostavlja se da je poznata ravnoteža u trenutku  $t$  (koji opisuje trenutno stanje), u svim trenucima prije te da je potrebno uspostaviti ravnotežu u sljedećem trenutku koji će se dogoditi u  $t + \Delta t$ . U analizi se prate čestice tijela od početnog do konačnog trenutka, odnosno koristi se Lagrangeova formulacija.



**Slika 2. Gibanje tijela u Kartezijevom koordinatnom sustavu**

Korištenjem metode virtualnih pomaka definira se ravnoteža u trenutku  $t + \Delta t$  koja se može zapisati kao

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} \delta_{{}^{t+\Delta t}} \mathbf{e} d{}^{t+\Delta t}V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}, \quad (9)$$

gdje su

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}$  = komponente Cauchyevog tenzora naprezanja u Kartezijevim koordinatama,

$$\delta_{{}^{t+\Delta t}} \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) = \text{tenzor deformacija opisan pomoću virtualnih pomaka},$$

$\delta u_i$  = komponente virtualnih pomaka u konfiguraciji  $t + \Delta t$ , odnosno u funkciji od  ${}^{t+\Delta t}x_j$ , za  $j = 1, 2, 3$ ,

${}^{t+\Delta t}x_i$  = Kartezijeve koordinate materijalne točke u trenutku  $t + \Delta t$ ,

${}^{t+\Delta t}V$  = volumen u trenutku  $t + \Delta t$ ,

te

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d{}^{t+\Delta t}V + \int_{{}^{t+\Delta t}S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d{}^{t+\Delta t}S, \quad (10)$$

gdje su

${}^{t+\Delta t}f_i^B$  = komponente vanjskih volumnih sila u trenutku  $t + \Delta t$ ,

${}^{t+\Delta t}f_i^S$  = komponente vanjskih površinskih sila u trenutku  $t + \Delta t$ ,

${}^{t+\Delta t}S_f$  = površina u trenutku  $t + \Delta t$ , na koju su dodijeljena površinska opterećenja,

$\delta u_i^S = \delta u_i$  ako se računa na površini  ${}^{t+\Delta t}S_f$ .

Izrazi (9) i (10) analogni su izrazima za statički slučaj, s time da se u ovom slučaju razmatra konfiguracija u trenutku  $t + \Delta t$ . S obzirom da se u linearnoj analizi pretpostavljaju mali pomaci i ravnoteža se razmatra na nedeformiranom obliku, u ovom slučaju to predstavlja problem jer je konfiguracija u trenutku  $t + \Delta t$  nepoznata.

Iz razloga što se konfiguracija tijela neprestano mijenja potrebno je koristiti i prikladne tenzore kojima će se mjeriti naprezanja i deformacije, te posebne konstitutivne relacije. Pregled potrebnih izraza iz mehanike kontinuuma dan je u Dodatku A. Ideja je ta da se pronađu pomoćne veličine za mjerenje naprezanja i pomaka koje će biti definirane u konfiguraciji koja je poznata i po čijem će se volumenu moći integrirati kako bi se mogao naći integral virtualnog rada. Sada se korištenjem transformacija za deformacije (A.13) i naprezanja (A.15) te izraza  ${}^t\rho d^tV = {}^0\rho d^0V$ , uz provođenje varijacije po pomacima, dobije izraz za energiju sustava koji je podvrgnut velikim rotacijama, velikim pomacima te velikim deformacijama i to sve u fiksnom koordinatnom sustavu prema slici 2.

$$\begin{aligned} \int_{{}^tV} {}^t\tau_{kl} \delta {}^te_{kl} d^tV &= \int_{{}^tV} \left( \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^tx_{k,i} {}^tx_{i,j} \right) \left( {}^tx_{m,k} {}^tx_{n,l} \delta {}^t\varepsilon_{mn} \right) d^tV \\ &= \int_{{}^tV} \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^tS_{ij} \delta {}^t_{mi} \delta {}^t_{nj} \delta {}^t\varepsilon_{mn} d^tV = \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} d^0V. \end{aligned} \quad (11)$$

Također se može pretpostaviti da vrijedi i sljedeći izraz

$$\int_{V_t} {}^t \tau_{mn} \delta_t e_{mn} d^t V = \int_{V_t} {}^t S_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} d^t V. \quad (12)$$

S obzirom da je izraz (11) definiran po početnom volumenu (u posljednjem obliku), ali i po trenutnom volumenu (u pretposljednem obliku), može se zaključiti da ta jednadžba vrijedi i za svaki trenutak između, ukoliko se drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja i Green-Lagrangeov tenzor deformacija definiraju u odnosu na tu konfiguraciju. Uzet je neki trenutak  $\tau < t$ .

Izrazi (9), (10), (11) i (12) predstavljaju osnovne izraze za razvoj dviju inkrementalnih formulacija mehanike kontinuuma za nelinearne probleme: totalnu Lagrangeovu (TL) formulaciju i ažuriranu Lagrangeovu (UL) formulaciju.

Potrebno je riješiti jednadžbu (9) koja izražava ravnotežu i uvjete kompatibilnosti proizvoljnog tijela u trenutku  $t + \Delta t$ . Kako je u pravilu takvo tijelo podvrgnuto velikim pomacima i velikim deformacijama te može postojati materijalna nelinearnost, izraz (9) ne može se rješavati direktno. Približno rješenje može se dobiti ukoliko se sve veličine promatraju u odnosu na posljednju poznatu konfiguraciju, nakon čega se lineariziraju rezultati te poboljšaju iterativnim postupkom.

Slično kao prije, pretpostavlja se da su sva prethodna stanja (od  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ ) poznata i da se mogu primijeniti izrazi (11) i (12) te definirati naprezanja i deformacije u odnosu na neku od poznatih ravnotežnih konfiguracija. U pravilu se može koristiti bilo koji trenutak i u njemu poznata konfiguracija, no najčešće se biraju dvije konfiguracije na osnovu kojih postoje i dvije formulacije; totalna Lagrangeova formulacija (eng. *Total Lagrange formulation* – TL) i ažurirana Lagrangeova formulacija (eng. *Updated Lagrange formulation* – UL).

TL formulacija temelji se na definiranju svih statičkih i kinematičkih veličina u odnosu na početnu konfiguraciju i trenutak  $t = 0$ , dok se UL formulacija temelji na definiranju svih veličina u odnosu na posljednju izračunatu konfiguraciju u trenutku  $t$ . Obje formulacije uključuju kinematske nelinearnosti uslijed velikih pomaka, velikih rotacija i velikih deformacija, dok materijalna nelinearnost ovisi o konstitutivnim relacijama.

Korištenjem izraza (11) pomoću TL formulacije razmatra se osnovna jednadžba

$$\int_{V_0} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}, \quad (13)$$

dok se pomoću UL formulacije razmatra

$$\int_{V_t} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}, \quad (14)$$

u kojima je  ${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}$  virtualni rad vanjskih sila dan jednadžbom (10). Izraz (10) ovisi o površini i volumenu tijela koje se razmatra, no pretpostavit će se, za početak, da je opterećenje neovisno o deformacijama. Takvo opterećenje su koncentrirane sile. U tablicama 1 i 2 dani su izrazi potrebni da se lineariziraju jednadžbe gibanja oko ravnotežnog stanja u trenutku  $t$ , i to za TL formulaciju i UL formulaciju.

**Tablica 1. Inkrementalna dekompozicija veličina mehanike kontinuuma – TL formulacija**

### 1. Jednadžba gibanja

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R},$$

gdje je

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} {}^0x_{i,m} {}^{t+\Delta t}\tau_{mn} {}^0x_{j,n}; \quad \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t}u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}u_{k,i} {}^{t+\Delta t}u_{k,j} \right)$$

### 2. Inkrementalna dekompozicija

(a) Naprezanja

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tS_{ij} + {}_0S_{ij}$$

(b) Deformacije

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij}, \quad {}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij},$$

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} {}^t u_{k,j} \right), \quad {}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j}$$

### 3. Jednadžba gibanja uz inkrementalnu dekompoziciju

Uz korištenje  $\delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = \delta {}_0\varepsilon_{ij}$  dobije se jednadžba gibanja

$$\int_{0V} {}_0S_{ij} \delta {}_0\varepsilon_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V.$$

### 4. Linearizacija jednadžbe gibanja

Korištenjem aproksimacija  ${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}$  i  $\delta {}_0\varepsilon_{ij} = \delta {}_0e_{ij}$  dobije se približna jednadžba gibanja

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V.$$

Linearizirana jednadžba ravnoteže u TL formulaciji glasi

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V, \quad (15)$$

dok se pomoću UL formulacije dobije

$$\int_{tV} {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} d^t V + \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^t V, \quad (16)$$

gdje su  ${}_0 C_{ijrs}$  i  ${}_t C_{ijrs}$  inkrementalni tenzori elastičnosti u trenutku  $t$ , a u odnosu na konfiguracije u vremenu 0 i  $t$ . U gornjim izrazima  ${}_0 S_{ij}$  i  ${}^t \tau_{ij}$  su drugi Piola-Kirchhoffov i Cauchyev tenzor naprezanja u trenutku  $t$ , a  ${}_0 e_{ij}$ ,  ${}_0 \eta_{ij}$  i  ${}_t e_{ij}$ ,  ${}_t \eta_{ij}$  linearne i nelinearne inkrementalne deformacije u odnosu na konfiguraciju u vremenu 0 i  $t$ .

**Tablica 2. Inkrementalna dekompozicija veličina mehanike kontinuuma – UL formulacija**

### 1. Jednadžba gibanja

$$\int_{tV} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R},$$

gdje su

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^{t+\Delta t} x_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^{t+\Delta t} x_{j,n} \text{ i } \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i} + {}_t u_{k,i} {}_t u_{k,j}).$$

### 2. Inkrementalna dekompozicija

(a) Naprezanja

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}_t S_{ij} \text{ gdje je } {}_t S_{ij} = {}^t \tau_{ij}.$$

(b) Deformacije

$${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = {}_t \varepsilon_{ij}, \quad {}_t \varepsilon_{ij} = {}_t e_{ij} + {}_t \eta_{ij},$$

$${}_t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i}), \quad {}_t \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_t u_{k,i} {}_t u_{k,j}.$$

### 3. Jednadžba gibanja uz inkrementalnu dekompoziciju

$$\int_{tV} {}_t S_{ij} \delta {}_t \varepsilon_{ij} d^t V + \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} d^t V.$$

### 4. Linearizacija jednadžbe gibanja

Korištenjem aproksimacija  ${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs}$  i  $\delta {}_0 \varepsilon_{ij} = \delta {}_0 e_{ij}$  dobije se približna jednadžba gibanja

$$\int_{tV} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} d^t V + \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} d^t V.$$

Inkrementalne linearne deformacije  ${}_0e_{ij}$  u TL formulaciji sadrže početne deformacije koje vode do složenije matrice elastičnosti (u usporedbi s UL).

Definira se greška koja nastaje uslijed linearizacije, pri čemu su aproksimirane vrijednosti označene sa \*, i to za TL

$$Greška = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}_0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^* \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^* d^0V, \quad (17)$$

odnosno za UL

$$Greška = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}^{t+\Delta t}V^*} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^* \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^* d^{t+\Delta t}V. \quad (18)$$

Prema ovome se može zaključiti da desna strana jednadžbi (15) i (16) predstavlja tzv. neuravnoteženi virtualni rad (eng. *out-of-balance virtual work*), ali prije računanja inkremenata u pomacima, dok je desna strana jednadžbi (17) i (18) neuravnoteženi virtualni rad nakon računanja, tj. nakon što je provedena linearizacija.

Kako bi se smanjila greška potrebno je iterativno ponavljati ovaj korak dok se ne dobije zadovoljavajuća greška, koja će se moći zanemariti. Ukoliko se koristi TL formulacija jednadžba se rješava iterativno, za  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\int_{{}_0V} {}_0C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta_0 e_{rs}^{(k)} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{{}_0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta_0 \eta_{ij}^{(k)} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}_0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(k-1)} d^0V, \quad (19)$$

te korištenjem UL formulacije, također za  $k = 1, 2, 3, \dots$ , dobije se

$$\begin{aligned} & \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta {}^{t+\Delta t}e_{rs}^{(k)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} d^{t+\Delta t}V + \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta {}^{t+\Delta t}\eta_{ij}^{(k)} d^{t+\Delta t}V = \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(k-1)} d^{t+\Delta t}V. \end{aligned} \quad (20)$$

gdje slučaj  $k = 1$  odgovara izrazima u (15) i (16), a pomaci su ažurirani kako slijedi

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)}; \quad {}^{t+\Delta t}u^{(0)} = {}^t u. \quad (21)$$

Izrazi (19) do (21) su zapravo Newton-Raphsonova iteracija o kojoj je bilo govora prije.

### 2.2.1. Izvod izoparametarskog kontinuum elementa

U prethodno danim lineariziranim jednadžbama temeljenim na principu virtualnih pomaka, jedine veličine su pomaci definirani u fiksnom (materijalnom, Lagrangeovom) koordinatnom sustavu. Ukoliko se formuliraju konačni elementi kod kojih se kao stupnjevi slobode koriste samo pomaci u čvorovima tada se sve jednadžbe mehanike kontinuuma prethodno izvedene mogu direktno koristiti.

Princip virtualnih pomaka u TL formulaciji je

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}. \quad (22)$$

Ako se gornji izraz linearizira s obzirom na stupnjeve slobode u čvorovima  ${}^t a_k$  (gdje  ${}^t a_k$  može biti pomak ili rotacija u čvoru), korištenjem razvoja u Taylorov red i s pretpostavkom da  ${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$  ne ovisi o deformacijama dobije se

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \doteq {}^t S_{ij} \delta {}^t \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial {}^t a_k} \left( {}^t S_{ij} \delta {}^t \varepsilon_{ij} \right) da_k, \quad (23)$$

gdje je  $da_k$  diferencijalni inkrement varijable pomaka u čvoru  ${}^t a_k$ . Osim toga ovdje je

$$\delta {}^t \varepsilon_{ij} = \frac{\partial {}^t \varepsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} \delta a_l, \quad (24)$$

gdje je  $\delta a_l$  varijacija pomaka  ${}^t a_l$ , tj. varijacija je provedena u odnosu prema čvornom pomaku  ${}^t a_l$  u konfiguraciji u trenutku  $t$ .

Ako se provede lančana derivacija drugog člana u jednadžbi (23), te korištenjem konstitutivne relacije i definicije Green-Lagrangeovog tenzora naprežanja dobije se

$$\left\{ \int_{0V} {}_0 C_{ijrs} \frac{\partial {}^t \varepsilon_{rs}}{\partial {}^t a_k} \frac{\partial {}^t \varepsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} d^0V + \int_{0V} {}^t S_{ij} \frac{\partial^2 {}^t \varepsilon_{ij}}{\partial {}^t a_k \partial {}^t a_l} d^0V \right\} da_k \delta a_l = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}_l - \left( \int_{0V} {}^t S_{ij} \frac{\partial {}^t \varepsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} d^0V \right) \delta a_l, \quad (25)$$

gdje je  ${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}_l$  rad vanjskih sila u odnosu na varijaciju  $\delta a_l$ .

Ograničavanjem na samo pomake u čvorovima u nastavku su dane matrice koje opisuju izoparametarske konačne elemente izvedene na principu virtualnih pomaka.

Da bi se dobile jednadžbe koje opisuju konačne elemente isto kao i za linearne konačne elemente koriste se interpolacijske funkcije kojima se interpoliraju koordinate čvorova i pomaci u općim jednadžbama mehanike kontinuuma. Pozivanjem na dobivene linearizirane jednadžbe virtualnih pomaka dobivaju se jednadžbe konačnog elementa. Dok se jednadžba čitavog sklopa, isto kao i kod linearne analize, dobije korištenjem metode direktne krutosti. Bitno je da se u svakom trenutku u vrijeme gibanja moraju koristiti iste interpolacijske funkcije, jer se nove koordinate elemenata dobiju zbrajanjem (inkrementalno) na prethodne (originalne) koordinate. Time se ujedno i zadovoljavaju uvjeti konvergencije.

Korištenjem istih funkcija oblika kao i za izvod linearnih izoparametarskih konačnih elemenata te uvrštavanjem istih u jednadžbe dane u tablicama 1. i 2. dobiju se izrazi

za TL formulaciju i statičku analizu

$$\left( {}^t \mathbf{K}_L + {}^t \mathbf{K}_{NL} \right) \mathbf{V} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}, \quad (26)$$



za dinamičku analizu, te implicitnu vremensku integraciju

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{V}} + \left( {}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_{NL} \right) \mathbf{V} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t_0 \mathbf{F}, \quad (27)$$

za dinamičku analizu i eksplicitnu vremensku integraciju

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{V}} = {}^t \mathbf{R} - {}^t_0 \mathbf{F}, \quad (28)$$

odnosno za UL formulaciju i statičku analizu

$$\left( {}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_{NL} \right) \mathbf{V} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t_0 \mathbf{F}, \quad (29)$$

zatim za dinamičku analizu, implicitna integracija

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{V}} + \left( {}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_{NL} \right) \mathbf{V} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t_0 \mathbf{F}, \quad (30)$$

te konačno za eksplicitnu integraciju

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{V}} = {}^t \mathbf{R} - {}^t_0 \mathbf{F}, \quad (31)$$

gdje su

$\mathbf{M}$  = vremenski neovisna matrica masa,

${}^t_0 \mathbf{K}_L, {}^t_0 \mathbf{K}_{NL}$  = linearna inkrementalna matrica krutosti,

${}^t_0 \mathbf{K}_{NL}, {}^t_0 \mathbf{K}_{NL}$  = nelinearna (geometrijska ili uslijed početnih naprežanja) inkrementalna matrica krutosti,

${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  = vektor vanjskih čvornih sila u trenutku  $t + \Delta t$  (ovaj se vektor također koristi i u trenutku  $t$  kod eksplicitne integracije),

${}^t_0 \mathbf{F}, {}^t_0 \mathbf{F}$  = vektor čvornih sila ekvivalentnih naprežanjima u elementu u trenutku  $t$ ,

$\mathbf{V}$  = vektor inkrementalnih čvornih pomaka,

${}^t \ddot{\mathbf{V}}, {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{V}}$  = vektori čvornih ubrzanja u trenucima  $t$  i  $t + \Delta t$ .

U gornjim izrazima zanemaren je utjecaj sila prigušenja i smatra se da je vanjsko opterećenje neovisno o deformacijama. Ukoliko se uzimaju efekti prigušenja i utjecaj deformacija na opterećenje potrebno je provoditi iteraciju i ažurirati opterećenje (korištenjem npr. N-R iteracije). Gornje jednadžbe rješavaju se slično kao i u linearnoj analizi. U tablici 3. dan je pregled korištenih integrala i matrica za jedan konačni element, a u tablici 4 dan je opis materijala koji se najčešće koristi.

Tablica 3. Pregled matrica korištenih u analizi konačnim elementima

Vrsta analize	Integral	Matrična evaluacija
U svim analizama	$\int_{0V}^0 \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d^0V$	$M^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = \left( \int_{0V}^0 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d^0V \right) {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$
	${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = \int_{0S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^0S$	${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = \int_{0S_f} \mathbf{N}^{S^T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S d^0S$
	$+ \int_{0V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^0V$	$+ \int_{0V} \mathbf{N}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B d^0V$
TL formulacija	$\int_{0V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} d^0V$	${}^t \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_{0V} {}^t \mathbf{B}_{L0}^T {}_0 \mathbf{C} {}_0 \mathbf{B}_L d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$
	$\int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d^0V$	${}^t \mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_{0V} {}^t \mathbf{B}_{NL0}^T {}^t \mathbf{S} {}^t \mathbf{B}_{NL} d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$
	$\int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} d^0V$	${}^t \mathbf{F} = \int_{0V} {}^t \mathbf{B}_{L0}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} d^0V$
UL formulacija	$\int_{tV} {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} d^tV$	${}^t \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_{tV} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{C} {}^t \mathbf{B}_L d^tV \right) \hat{\mathbf{u}}$
	$\int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} d^tV$	${}^t \mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_{tV} {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \boldsymbol{\tau} {}^t \mathbf{B}_{NL} d^tV \right) \hat{\mathbf{u}}$
	$\int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^tV$	${}^t \mathbf{F} = \int_{tV} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \hat{\boldsymbol{\tau}} d^0V$

Pri tome se koriste sljedeće veličine

$\mathbf{N}^S, \mathbf{N}$  = površinske i volumne interpolacijske matrice,

${}^{t+\Delta t} f^S, {}^{t+\Delta t} f^B$  = vektori površinskih i volumnih sila,

${}^t \mathbf{B}_L, {}^t \mathbf{B}_L$  = linearne matrice transformacije deformacija-pomak,

${}^t \mathbf{B}_{NL}, {}^t \mathbf{B}_{NL}$  = nelinearne matrice transformacije deformacija-pomak,

${}_0 \mathbf{C}, {}^t \mathbf{C}$  = inkrementalne matrice elastičnosti materijala,

${}^t \boldsymbol{\tau}, {}^t \hat{\boldsymbol{\tau}}$  = matrica i vektor Cauchyevih napreznja i

${}^t \mathbf{S}, {}^t \hat{\mathbf{S}}$  = matrica i vektor drugog Piola-Kirchhoffovog napreznja.

Tablica 4. Opis korištenog materijalnog modela

Materijalni model	Karakteristike	Primjer
Elastičan, linearan ili nelinearan	<p>Naprezanja su funkcija samo deformacija (rasterećenje se odvija po istom putu kao i opterećenje; nema plastičnih deformacija)</p> ${}^t\sigma_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}^t e_{rs}$ <p>Pri čemu za linearno elastične vrijedi da je <math>{}^tC_{ijrs} = konst.</math></p> <p>A za nelinearno elastične vrijedi <math>{}^tC_{ijrs} = f({}^t e_{ij})</math></p>	<p>Tako se ponašaju gotovo svi tehnički materijali ukoliko su deformacije male.</p> <p>Kao na primjer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• čelici</li> <li>• lijevano željezo</li> <li>• staklo, kamen</li> <li>• drvo</li> </ul>

### 2.3. Metode numeričke integracije u metodi konačnih elemenata

Jednadžba (3) opisuje gibanje dinamičkog sustava koji je ograničen na male pomake, tj. linearnog je karaktera. Matematički, jednadžba (3) predstavlja sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda i u pravilu se može rješavati standardnim procedurama za rješavanje diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima [23]. To za sustave sačinjene od konačnih elemenata može biti problem jer su redovi matrica nerijetko veliki. Jednadžba (4) predstavlja nelinearnu jednadžbu gibanja čija je integracija izuzetno zahtjevna. Nakon provođenja linearizacije isti se problem može znatno lakše riješiti ako se integriraju jednadžbe (27) i (28) odnosno (30) i (31), ovisno o formulaciji.

Tako se za rješavanje diferencijalnih jednadžbi u analizi konačnim elementima koriste dvije procedure. Ukoliko se prije same integracije ne utječe na diferencijalne jednadžbe, onda se za integriranje istih koriste metode direktne integracije, koje se dijele na:

- eksplicitnu integraciju – metoda centralnih razlika (eng. *central difference method*)
- implicitnu integraciju – Newmarkova i Hilber-Hughes-Taylorova metoda

Osim metoda direktne integracije, efikasnom se pokazala metoda modalne superpozicije (primjenom modalnih, skalarnih jednadžbi) kojom se sustav spregnutih diferencijalnih jednadžbi raspregne, čime matrica masa, prigušenja i krutosti postaju dijagonalne matrice.

Ovo je jedan oblik redukcije sustava koji se provodi radi smanjenja vremena računanja. Ukratko o tome može se naći u Dodatku B.

U okviru ovog rada koristit će se metode direktne integracije, stoga su iste pobliže opisane u nastavku.

### **2.3.1. Metode Direktne integracije**

Pod direktnom integracijom smatra se da se linearizirana dinamička jednadžba integrira numerički (zadovoljavajući istu u diskretnim vremenskim trenucima  $\Delta t$ ) bez da se jednadžba prije transformira u drugi oblik prije same integracije. Za razliku od analitičkih rješenja koja se daju za bilo koji trenutak u vremenu  $t$ , približnim metodama integracije dobivaju se rješenja u diskretnim trenucima vremena  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ , tako da se ukupno vrijeme  $T$  u kojem se odvija dinamička simulacija podijeli na  $n$  inkremenata trajanja  $\Delta t$ .

Postupak rješavanja se sastoji od toga da se na osnovu poznatog rješenja u trenutku  $t$  na početku inkrementa  $\Delta t$ , traži rješenje u trenutku  $t + \Delta t$  na kraju koraka, pri čemu se uvode pretpostavke za promjenu pomaka, brzine i ubrzanja unutar intervala  $\Delta t$ . Upravo te pretpostavke uvjetuju stabilnost i točnost određene procedure.

Počinja se od pretpostavke da su poznati početni uvjeti u trenutku  $t = 0$ , za  ${}^0\mathbf{V}$ ,  ${}^0\dot{\mathbf{V}}$  i  ${}^0\ddot{\mathbf{V}}$  te da treba riješiti dinamički problem do trenutka  $T_s$ .

Radi jednostavnosti raspisivanja izraza pretpostaviti će se da su jednadžbe gibanja s konstantnim koeficijentima  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$ , što vrijedi za linearan slučaj, a na analogan način se proširi za nelinearne slučajeve.

### **2.3.2. Eksplicitna integracija**

Jedna od numeričkih metoda integracije je eksplicitna metoda. Sastoji se o toga da se predvidi stanje u trenutku  $t + \Delta t$  na osnovu poznatog stanja u trenutku  $t$ . U ovoj metodi nije potrebo računati inverz matrice krutosti. Na prvu se to može činiti dobro, no upravo je to razlog samo uvjetne stabilnosti ove metode. Kako bi se zadovoljio uvjet stabilnosti eksplicitne metode, korak integracije mora biti dovoljno mali što diktira veličina najmanjeg konačnog elementa. Najčešće se koristi za kratke analize (npr. udarac, sudar i slično). Kada se govori o integraciji jednadžbi gibanja za sustave diskretizirane konačnim elementima, među najpoznatijim eksplicitnim metodama integracije je metoda centralnih razlika.

### **2.3.3. Metoda centralnih razlika**

Počinja se od pretpostavke da se ubrzanje aproksimira izrazom

$${}^t\ddot{\mathbf{V}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t-\Delta t}\mathbf{V} - 2{}^t\mathbf{V} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}). \quad (32)$$

Greška u gornjem izrazu je  $\Delta t^2$  i kako bi se ostvarila ista greška pri aproksimaciji brzine koristi se izraz

$${}^t\dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{2\Delta t} (-{}^{t-\Delta t}\mathbf{V} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}). \quad (33)$$

Rješenje za pomake u trenutku  $t + \Delta t$  dobije se korištenjem jednadžbe (3) u trenutku  $t$

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}'\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}'\mathbf{V} = {}^t\mathbf{R}. \quad (34)$$

Uvrštavanjem  ${}^t\ddot{\mathbf{V}}$  i  ${}^t\dot{\mathbf{V}}$  u gornju jednadžbu dobije se

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{V} = {}^t\mathbf{R} - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{V} - \left( \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{V}, \quad (35)$$

iz koje se može izraziti  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$ .

Iz izraza se vidi da kako bi se mogli izračunati pomaci  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$ , je potrebno izračunati i  ${}^t\mathbf{V}$  i  ${}^{t-\Delta t}\mathbf{V}$ . Stoga, da bi se dobilo rješenje u trenutku  $\Delta t$  moraju se postaviti početni uvjeti.

Korištenjem izraza (32) i (33) dobije se

$${}^{-\Delta t}\mathbf{V}_i = {}^0\mathbf{V}_i - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{V}}_i + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{\mathbf{V}}_i, \quad (36)$$

gdje se indeks  $i$  odnosi na  $i$ -ti element pojedinog vektora.

Ova metoda najčešće se koristi kada se može izraziti dijagonalna matrica masa i time efikasno, uz relativno mali korak diskretizacije provoditi integracija, a pri čemu se (35), uz zanemarivanje prigušenja, svodi na

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{V} = {}^t\hat{\mathbf{R}}, \quad (37)$$

gdje je

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{V} - \left( \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{V}, \quad (38)$$

što pokazuje da je potrebno provesti samo matrično množenje kako bi se dobio  ${}^t\hat{\mathbf{R}}$ , nakon čega se dobije  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$  koristeći izraz

$${}^{t+\Delta t}V_i = {}^t\hat{R}_i \left( \frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \right), \quad (39)$$

gdje su  ${}^{t+\Delta t}V_i$  i  ${}^t\hat{R}_i$   $i$ -te komponente vektora  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$  i  ${}^t\hat{\mathbf{R}}$ , a  $m_{ii}$  je  $i$ -ti dijagonalni element matrice masa  $\mathbf{M}$ .

Može se pokazati da vrijedi

$$\mathbf{K}^t \mathbf{V} = \sum_i \mathbf{K}^{(i)} {}^t \mathbf{U} = \sum_i {}^t \mathbf{F}^{(i)}, \quad (40)$$

što znači da se  $\mathbf{K}^t \mathbf{V}$  može provesti na nivou elementa te se nakon toga dobije efektivni vektor opterećenja  ${}^t\hat{\mathbf{R}}$

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\hat{\mathbf{R}} - \sum_i {}^t \mathbf{F}^{(i)} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} ({}^{t-\Delta t} \mathbf{V} - 2 {}^t \mathbf{V}). \quad (41)$$

Tu se sada može jasno vidjeti ono što je prije rečeno, a to je da se kod metode centralnih razlika ne treba računati matrica krutosti čitavog sklopa konačnih elemenata, jer se može rješavati na nivou elementa, čime se efektivno mogu rješavati sustavi velikog reda.

Mana eksplicitne metode je to, da bi se postigla konvergencija, odnosno stabilnost rješavača, korak integracije mora biti dovoljno malen, tj. mora biti zadovoljen uvjet

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi}, \quad (42)$$

gdje je  $T_n$  najmanji period oscilacije sklopa konačnih elemenata, a  $n$  broj stupnjeva slobode.

U tablici 5. dan je pregled algoritma koji se koristi pri implementaciji eksplicitne integracije.

Posebnost eksplicitne metode je što je robusna i efikasna ukoliko se može izraziti dijagonalna matrica masa sustava te ako se pazi na odabran korak integracije koji prema izrazu (42) mora biti dovoljno malen kako bi zadovoljio kriterij stabilnosti. Metoda centralnih razlika nema nikakvo numeričko prigušenje što pri odabiru jako malog koraka diskretizacije može rezultirati velikim oscilacijama u vremenskoj domeni zbog obuhvaćanja fenomena pojave jako visokih frekvencija koje često nastaju u dinamičkoj analizi konstrukcija diskretiziranih metodom konačnih elemenata. Eksplicitna metoda također ne računa ravnotežu u svakom koraku te se time svakim novim inkrementom prenosi greška zaokruživanja (eng. *round off error*) koja može porasti ukoliko analiza traje dugo. Iz tog razloga preporučeno je koristiti eksplicitnu metodu za analize koje su relativno kratke.

Tablica 5. Algoritam integracije za eksplicitnu metodu

## A. Računanje početnih uvjeta

1. Formiranje matrice krutosti  $\mathbf{K}$ , matrice masa  $\mathbf{M}$  i matrice prigušenja  $\mathbf{C}$
2. Računanje početnih vrijednosti za  ${}^0\mathbf{V}$ ,  ${}^0\dot{\mathbf{V}}$  i  ${}^0\ddot{\mathbf{V}}$
3. Odabiranje koraka integracije  $\Delta t$ , i to tako da je  $\Delta t = \Delta t_{kr}$ , i računanje integracijskih konstanti

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}; \quad a_2 = 2a_0; \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

4. Računanje  ${}^{-\Delta t}\mathbf{V} = {}^0\mathbf{V} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{V}} + a_3 {}^0\ddot{\mathbf{V}}$ .
5. Formiranje efektivne matrice masa  $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ .
6. Triangulacija efektivne matrice masa  $\hat{\mathbf{M}}$ :  $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{LDL}^T$ .

## B. Računanje u svakom koraku

1. Računanje efektivnog opterećenja u trenutku  $t$

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M}) {}^t\mathbf{V} - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C}) {}^{t-\Delta t}\mathbf{V}$$

2. Rješavanje jednadžbe pomaka za  $t + \Delta t$

$$\mathbf{LDL}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\hat{\mathbf{R}}$$

3. Ukoliko je potrebno, riješiti jednadžbu ubrzanja i brzina u trenutku  $t$

$${}^t\ddot{\mathbf{V}} = a_0 ({}^{t-\Delta t}\mathbf{V} - 2{}^t\mathbf{V} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{V})$$

$${}^t\dot{\mathbf{V}} = a_1 (-{}^{t-\Delta t}\mathbf{V} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{V})$$

## 2.3.4. Implicitna integracija

Metode implicitne integracije koje se koriste u metodi konačnih elemenata najčešće su bezuvjetno stabilne što uvelike olakšava rješavanje dinamičkih problema jer nije potrebno obraćati posebnu pažnju na diskretizaciju konačnim elementima ili vremenske domene koja se rješava, odnosno čak i uz velike vremenske korake metoda ostaje stabilna. Nedostatak ovakvih metoda je što se u svakom trenutku računa inverz matrice krutosti što za sustave s puno stupnjeva slobode (kakvi su često sustavi diskretizirani konačnim elementima) može biti računalno zahtjevno, a posebno ako su prisutne dodatne nelinearnosti. Osim toga implicitna

metoda u svakom inkrementu provodi numerički zahtjevni iterativni postupak što također može rezultirati znatnim produljenjem vremena računanja.

Za razliku od eksplicitne metode gdje se direktno traže rješenja za  $\ddot{\mathbf{V}}$ , kod implicitne metode se sustav rješava za  $\mathbf{V}$  i to u trenutku  $t + \Delta t$ , a pri tome koristeći rješenja dobivena za  $t$ . U okviru metode konačnih elemenata najpoznatija implicitna metoda je Newmarkova metoda, te njena izvedenica, tzv. Hilber-Hughes-Taylorova metoda.

### 2.3.5. Newmarkova metoda

Za Newmarkovu metodu donose se sljedeće pretpostavke za ubrzanja i brzine

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V} = {}^t\dot{\mathbf{V}} + [(1-\delta){}^t\ddot{\mathbf{V}} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}]\Delta t, \quad (43)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V} = {}^t\dot{\mathbf{V}} + {}^t\dot{\mathbf{V}}\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{\mathbf{V}} + \alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}} \right] \Delta t^2, \quad (44)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\delta$  konstante koje se mogu odrediti u svrhu dobivanja integracijske točnosti i stabilnosti.

Ova metoda je originalno predstavljena kao bezuvjetno stabilna integracijska shema s konstantnim prosječnim ubrzanjem i u tom slučaju je  $\alpha = 1/4$  i  $\delta = 1/2$ .

Također se razmatra jednačba ravnoteža u trenutku  $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}{}^{t+\Delta t}\mathbf{V} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}. \quad (45)$$

Postupak rješavanja sastoji se od toga da se najprije iz jednačbe (44) dobije rješenje za  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}$  u ovisnosti o  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$  te uvrštavanjem  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}$  u (43), dobiju se jednačbe za  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}$  i  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{V}}$ , obje u ovisnosti o nepoznatim pomacima  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$ . Nakon toga se jednačbe za  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{V}}$  i  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}$  uvrštavaju u (45) kako bi se dobilo rješenje za  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$ , na posljetku se, koristeći (43) i (44) mogu dobiti nepoznata ubrzanja  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}$  i brzine  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{V}}$ .

Algoritam za Newmarkovu metodu dan je u tablici 6.



Tablica 6. Algoritam integracije pomoću Newmarkove metode

## A. Računanje početnih uvjeta

1. Formiranje matrice krutosti  $\mathbf{K}$ , matrice masa  $\mathbf{M}$  i matrice prigušenja  $\mathbf{C}$ .
2. Računanje početnih vrijednosti za  ${}^0\mathbf{V}$ ,  ${}^0\dot{\mathbf{V}}$  i  ${}^0\ddot{\mathbf{V}}$ .
3. Odabiranje koraka integracije  $\Delta t$ , te parametara  $\alpha$  i  $\delta$ , i računanje integracijskih konstanti

$$\delta \geq 0.5; \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t$$

4. Formiranje efektivne matrice krutosti  $\hat{\mathbf{K}}$ :  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ .
5. Triangulacija efektivne matrice krutosti  $\hat{\mathbf{K}}$ :  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$ .

## B. Računanje u svakom koraku

1. Računanje efektivnog opterećenja u trenutku  $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{V} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{V}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{V}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{V} - a_4 {}^t\dot{\mathbf{V}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{V}})$$

2. Rješavanje jednadžbe pomaka za  $t + \Delta t$

$$\mathbf{LDL}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$$

3. Računanje ubrzanja i brzina u trenutku  $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}} = a_0 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{V} - {}^t\mathbf{V}) - a_2 {}^t\dot{\mathbf{V}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{V}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{V}} = {}^t\dot{\mathbf{V}} + a_6 {}^t\ddot{\mathbf{V}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{V}}$$

## 2.3.6. Hilber-Hughes-Taylorova metoda

Hilber-Hughes-Taylorova (HHT) metoda izvedena je na osnovu Newmarkove metode, sa parametrom za kontrolu numeričkog prigušivanja [2]. Također je bezuvjetno stabilna, a često se još naziva A-stabilna i  $\alpha$ -metoda (HHT-  $\alpha$  metoda) kada se rješavaju linearni problemi. Implementirana je u programski paket Abaqus u okviru Abaqus/Standard rješavača [13].

Postupak rješavanja isti je kao i kod Newmarkove metode i koriste se iste pretpostavke s time da se rješava sljedeća jednadžba ravnoteže

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + (1+\gamma) \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} - \gamma \mathbf{C}^t \dot{\mathbf{U}} + (1+\gamma) \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - \gamma \mathbf{K}^t \mathbf{U} = (1+\gamma)^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \gamma^t \mathbf{R}, \quad (46)$$

gdje je  $\gamma$  parametar koji se najčešće odabire tako da bude  $-1/2 \leq \gamma \leq 0$ .

Problem visokih frekvencija koje se pojavljuju uslijed diskretizacije konačnim elementima elegantno se može riješiti unošenjem blagog numeričkog prigušenja koje HHT omogućuje. To je ujedno i glavni razlog zašto je metoda razvijena. Činjenica da je bezuvjetno stabilna bez obzira na odabran korak integracije i da iterativno rješava ravnotežu u svakom vremenskom trenutku čini je primjenjivom u analizama koje se provode kroz dužu vremensku domenu.

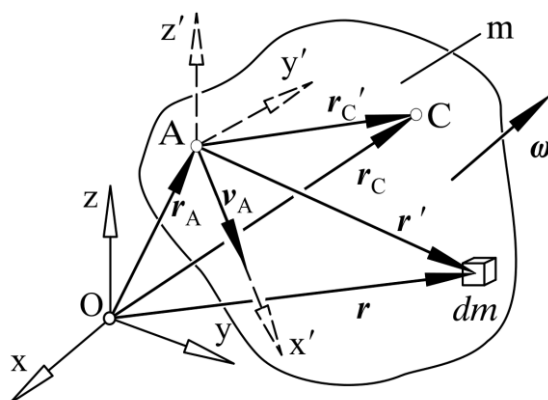
## 2.4. Dinamika sustava više tijela

Dinamika sustava više tijela izvorno je osmišljena kao alat koji će poslužiti za analiziranje dinamičkih pojava koje se dešavaju unutar konstrukcijskih sustava sačinjenih od više krutih tijela. Kruta tijela se mogu pojednostaviti diskretizacijom materijalnih svojstava (mase) i geometrijskih svojstava (momenta inercije) u jednu točku (koja je obično težište tijela). Ta pretpostavka uvelike pojednostavljuje jednadžbe gibanja. Iz tog razloga ovim pristupom se mogu rješavati problemi dinamike koju uključuju jako velik broj međusobno povezanih tijela. Taj broj nerijetko iznosi stotine pa čak i tisuće tijela.

Položaji točaka geometrije koje će poslužiti za vezu s ostalim tijelima te položaj težišta definirani su pomičnim koordinatnim sustavom u globalnom fiksnom koordinatnom sustavu. Na osnovu tih pretpostavki, u nastavku je dan pregled jednadžbi gibanja za kruto tijelo i za sustav krutih tijela.

### 2.4.1. Jednadžbe gibanja krutih tijela

U ovom poglavlju biti će prikazan izvod Newton-Euler sustava jednadžbi koji se koristi za rješavanje dinamike konstrukcijskih sustava. Cilj je prikazati teoriju iza simulacija koje su provedene u radu, radi razumijevanja i kontrole rezultata. Izrazi su preuzeti iz [1].



Slika 3. Proizvoljno kruto tijelo [1]

Gibanje krutog tijela se može rastaviti translaciju i rotaciju. Ako se razmatra proizvoljna točka krutog tijela s obzirom na neku referentnu točku A njen položaj je definiran s

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}', \quad (47)$$

iz čega se dolazi do brzine

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (48)$$

Ako se razmatra centar mase, vektor njegovog položaja je dan izrazom

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r} \cdot dm, \quad (49)$$

a relativni položaj u odnosu na A izrazom

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}'_C = \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r}' \cdot dm. \quad (50)$$

Koristeći izraz (48) može se izvesti izraz za količinu gibanja

$$\int_m (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm = \mathbf{v}_A \int_m dm + \boldsymbol{\omega} \times \int_m \mathbf{r}' \cdot dm, \quad (51)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \int_m (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm &= \mathbf{v}_A m + \boldsymbol{\omega} \times m \mathbf{r}'_C, \\ &= m (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C), \\ &= m \mathbf{v}_C, \\ &= m \dot{\mathbf{r}}_C. \end{aligned} \quad (52)$$

Sličnim postupkom se može doći do izraza za moment količine gibanja s obzirom na ishodište koordinatnog sustava O

$$\mathbf{h}_O = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{r}' dm. \quad (53)$$

Uvrštavanjem izraza (47) i (48) dobiva se sljedeće

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_O &= \int_m (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}') \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm, \\ &= \mathbf{r}_A \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C) m + \mathbf{r}'_C \times \mathbf{v}_A m + \int_m \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm. \end{aligned} \quad (54)$$

Nadalje, moguća je sljedeća transformacija

$$\begin{aligned} \int_m \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm &= \int_m (\mathbf{r}'^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}' \mathbf{r}') dm \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ &= \mathbf{I}_A \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (55)$$

U gornjoj jednadžbi  $\mathbf{I}_A$  predstavlja tenzor inercije s obzirom na točku A, dok  $\mathbf{E}$  predstavlja jediničnu matricu. Ako se radi jednostavnosti uzme da je centar mase ujedno i referentna točka ( $C = A$ ), jednadžba (54) se transformira u

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C m + \mathbf{I}_C \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (56)$$

Newtonov drugi zakon kaže da je derivacija količine gibanja po vremenu jednaka sumi sila koje djeluju na tijelo, odnosno

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{f}, \quad (57)$$

te ako se uzme da je masa tijela konstantna, može se zapisati kao

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{f}. \quad (58)$$

Preko momenta količine gibanja moguće je opisati rotaciju tijela

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \mathbf{l}_O, \quad (59)$$

gdje je  $\mathbf{h}_O$  moment količine gibanja oko O, a  $\mathbf{l}_O$  resultantni moment oko O.

Deriviranjem izraza (56) dobiva se

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_C m + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{a}_C + \mathbf{I}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_C \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (60)$$

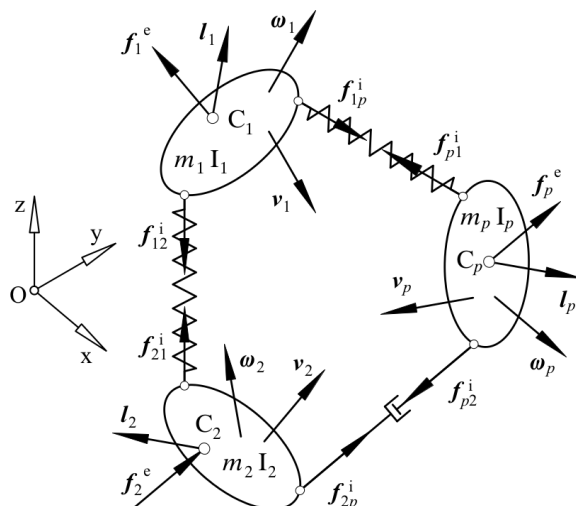
s obzirom da vrijedi  $\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_C m = 0$ , izraz (60) se pretvara u

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \mathbf{r}_C \times m\mathbf{a}_C + \mathbf{I}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_C \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (61)$$

Uvrštavanjem izraza (61) u (59) uzimajući u obzir (58), dobiva se Eulerova jednadžba rotacije krutog tijela

$$\mathbf{I}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{l}_O - \mathbf{r}_C \times \mathbf{f} = \mathbf{l}_C. \quad (62)$$

Nakon što su dobivene Newton-Eulerove jednadžbe, postavlja se matricna jednadžba dinamike konstrukcijskog sustava. To se postiže razmatranjem općenitog sustava i raspisivanjem Newton-Eulerovih jednadžbi za svako tijelo. Slikom 3. prikazan je proizvoljni sustav sačinjen od više krutih tijela koja su u međusobnom međudjelovanju. Ovdje se može vidjeti da se za dinamički sustav sačinjen od krutih tijela i dalje mogu modelirati eventualne elastičnosti i nelinearnosti među pojedinim elementima. Takvi elementi su razni prigušivači vibracija, opruge s jednim stupnjem slobode i slično.



Slika 4. Proizvoljni sustav više krutih tijela [1]

Položaj tijela u sustavu se može opisati preko šest koordinata. To su tri koordinate položaja i tri kuta koja definiraju orijentaciju

$$\mathbf{x}_{Ti} = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T, \quad (63)$$

$$\mathbf{x}_{Ri} = [\varphi_i \quad \vartheta_i \quad \psi_i]^T. \quad (64)$$

Veza između kutne brzine  $\boldsymbol{\omega}_i$  i vremenskih derivacija Eulerovih kutova,  $\mathbf{x}_{Ri} = [\varphi_i \quad \vartheta_i \quad \psi_i]^T$  je prikazana sljedećim izrazom

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{H}_{Ri} \dot{\mathbf{x}}_{Ri}. \quad (65)$$

Daljnjim deriviranjem po vremenu dobije se kutno ubrzanje

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{H}_{Ri} \ddot{\mathbf{x}}_{Ri} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i. \quad (66)$$

Sada kada su poznati svi članovi, moguće je napisati sustav Newton-Eulerovih jednadžbi za proizvoljno tijelo u matricnom obliku

$$\begin{bmatrix} m_i \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{Ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{Ti} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{Ri} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_i \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{l}_i \end{bmatrix}, \quad (67)$$

ili skraćeno

$$\mathbf{M}_i \mathbf{H}_i \ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{q}_i^v = \mathbf{q}_i^a. \quad (68)$$

Ako se u obzir uzima cijeli konstrukcijski sustav ( $i=1 \dots p$ ), jednadžba (68) prelazi u Newton-Eulerov sustav jednadžbi za proizvoljni konstrukcijski sustav

$$\mathbf{M} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{q}^v = \mathbf{q}^a. \quad (69)$$

Valja napomenuti da jednadžba (69) predstavlja slobodan sustav. Za slučaj ograničenog konstrukcijskog sustava, ona se modificira u sljedeće

$$\mathbf{MH}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{q}^v = \mathbf{q}^a + \mathbf{q}^c. \quad (70)$$

Razlog zašto su reaktivne sile  $\mathbf{q}^c$  izdvojene iz aktivnih sila je što se za ograničenja, ovisno o njihovom tipu, uvijek zna smjer djelovanja (npr. radijalni ležaj će imati reaktivne sile u radijalnom smjeru dok su cirkularni i aksijalni smjerovi neograničeni).

Gornje jednačbe predstavljaju osnovne jednačbe korištene u računanju dinamike konstrukcijskih sustava u većini programskih paketa za proračun dinamike sustava više tijela. [1], [8], [9].

## 2.5. Deformabilna tijela u dinamici sustava više tijela

Deformabilna tijela najčešće se modeliraju metodom konačnih elemenata. Prije spomenuta metoda konačnih elemenata korištenjem teorije velikih pomaka temelj je za rješavanje problema dinamike u programskom paketu Abaqus.

Programski paket Adams namijenjen je prvenstveno za analizu dinamičkih sustava sačinjenih od krutih tijela. Tek u novijim verzijama dostupna je analiza deformabilnih tijela kroz modul Adams/Flex koji se također djelomično temelji na metodi konačnih elemenata.

Za razliku od Abaqusa koji je u potpunosti temeljen na metodi konačnih elemenata, Adams konačne elemente koristi na nešto drugačiji način. Za opisivanje gibanja i inercijsko-geometrijskih svojstava krutog tijela dovoljna je jedna točka (npr. težište) te dodatne točke koje služe za povezivanje sa ostatkom konstrukcije. Matematički model takvih dinamičkih sustava sačinjenih od više krutih tijela opisan je u prethodnom poglavlju.

Pomaci krutog tijela definirani su u globalnom koordinatnom sustavu, a deformacije unutar tijela definirane su u lokalnom pomičnom koordinatnom sustavu vezanim za tijelo [8].

Metoda konačnih elemenata diskretizira kontinuum konačnim elementima koji sadrže određen broj *dostupnih* čvorova. Broj dostupnih čvorova, odnosno točaka, stoga je često puta daleko veći nego što je to potrebno da bi se opisalo gibanje tijela. U takvim slučajevima jedno deformabilno tijelo može imati više čvorova nego ostatak konstrukcije sačinjen od krutih tijela.

Analiza dinamike takvog sustava, sačinjenog od velikog broja krutih tijela i djelomično od deformabilnih tijela koji su diskretizirani konačnim elementima zahtijevalo bi veliku procesorsku moć i puno vremena. Da bi se to izbjeglo, potrebno je na određen način smanjiti preveliki broj čvorova. U tu svrhu koriste se reducirani modeli koji ukupan broj konačnih

elemenata s pripadnim im čvorovima reduciraju na željeni broj čvorova koji se zadržavaju, a preostali čvorovi se *eliminiraju*.

U zadržanim čvorovima postoje određeni stupnjevi slobode. Za zadržane stupnjeve slobode se u pravilu uzimaju oni koji će naknadno biti potrebni za povezivanje s ostatkom konstrukcije. S druge strane, radi jednostavnosti, preporučeno je ostaviti sve stupnjeve slobode (tri rotacije i tri translacije) u zadržanim čvorovima. *Eliminirani* čvorovi, skupa sa svim svojstvima koja su im dodijeljena, reducirani su na zadržane čvorove koji su *vidljivi prema van* i koje se može koristiti kao točke za spajanje s ostatkom konstrukcije. Reduciranjem je moguće svesti model konačnih elemenata reda veličine  $n \times n$ , na red  $m \times m$ , gdje je  $m \ll n$ . Reducirani modeli u metodi konačnih elemenata nazivaju se super elementi (eng. *super elements*) ili podstrukture (eng. *substructure*).

Tako na primjer, ako se zadrže dva čvora podstrukture, sve pomake koje može opisati podstruktura predstavljaju linearnu superpoziciju pomaka tih dvaju čvorova. Kako su takve linearne forme najčešće nedovoljne da bi se opisalo složeno savijanje ili uvijanje modela, dodatno se uvode poopćeni stupnjevi slobode koji su povezani s prirodnim formama podstrukture. Svaka prirodna forma definirana je vlastitim vektorom koji opisuje na koji način se model deformira pri nekoj vlastitoj frekvenciji. Ukoliko se uzme dovoljan broj prirodnih formi koje opisuju savijanje i uvijanje, moguće je opisati i složene forme savijanja i uvijanja podstrukture.

Na analitičaru je da procijeni na koji način će se model deformirati i prema tome odabere prirodne forme koje izgledom najbliže odgovaraju deformiranom izgledu modela. Ako nije moguće procijeniti deformirani izgled modela, poželjno je uzeti dovoljan broj (npr. prvih 10-ak) formi čijom će se superpozicijom uz težinske udjele svake forme moći opisati deformiranje konstrukcije. Te prirodne forme dobivaju se iz frekvencijske analize, stoga je teorija potrebna za razumijevanje izvoda reduciranog modela dana u Dodatku C.

## 2.6. Reduciranje reda modela

Prije je napomenuto kako se radi složenosti sustava i u svrhu povećanja brzine računanja model reducira. Postoje gotove procedure koje se koriste za redukciju reda modela [2], [4], [13]. U Abaqusu se to izvodi na način da se definiira podstruktura.

Podstruktura je skup elemenata kojima su *oduzeti* unutarnji stupnjevi slobode, a zadržani stupnjevi slobode ostaju na korištenje. Zadržani čvorovi i pripadni im stupnjevi slobode su oni koji se mogu prepoznati i iskoristiti izvana, tj. kada se podstruktura koristi u analizi. Osnovna

ideja podstrukturiranja je razmatrati dio modela (podstrukturu) odvojeno i eliminirati sve stupnjeve slobode osim onih potrebnih da bi se povezala s ostatkom konstrukcije. To se radi na način da podstruktura bude skup elemenata čiji je odziv definiran krutošću (i masom) zadržanih stupnjeva slobode. Biti će označeni s vektorom  $\mathbf{u}^R$ , gdje „R“ dolazi od eng. *retained* što znači zadržan. Treba napomenuti da je teorija podstrukturiranja u ovom rada vezana za programski paket Abaqus, stoga je veliki dio teorije preuzet iz dokumentacije [13], [14].

Odziv modela unutar podstrukture, kad je reduciran na podstrukturu, pretpostavlja se da je malen, odnosno da oscilira linearno oko ravnotežnog položaja koju je imala podstruktura u trenutku kad je postala takovom. Prema tome, može se pisati da je podstruktura u ravnoteži s napreznjima  $\sigma_0$ , pomacima  $u_0$  i svim drugim varijablama koje će se označiti kao  $h_0$ , koje je posjedovala u trenutku kad je postala podstruktura. U skladu s time, kad god reagira kao podstruktura, ukupna vrijednost pomaka ili napreznja u nekoj točki unutar podstrukture mogu se zapisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{L}_u^R \Delta \mathbf{u}^R, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{L}_\sigma^R \Delta \mathbf{u}^R. \end{aligned} \quad (71)$$

gdje su  $\mathbf{L}_u^R$  i  $\mathbf{L}_\sigma^R$  matrice linearne transformacije između zadržanih stupnjeva slobode podstrukture i komponente pomaka ili napreznja koja se razmatra. U trenutku kada se stvara, podstruktura obavezno mora biti u *ravnoteži sa samom sobom*, u smislu da sve vanjske sile moraju biti jednake unutarnjim silama (ovo se ne odnosi na reakcijske sile na zadanim rubnim uvjetima koji su narinuti na unutarnje stupnjeve slobode). Doprinos podstrukture na ukupnu ravnotežu modela definiran je u potpunosti linearnim odzivom podstrukture.

Kako je glavna zadaća tehnike podstrukturiranja da jedino zadržani čvorovi doprinose podstrukтури, potrebno je definirani vanjski vektor opterećenja  $\bar{\mathbf{P}}^R$ , koji se sastoji od opterećenja koja djeluju na podstrukturu te vektor unutarnjeg opterećenja  $\bar{\mathbf{I}}^R$ , kao sumu linearnih transformacija zadržanih varijabli  $\Delta \mathbf{u}^R$  i njihovih brzina i akceleracija

$$\bar{\mathbf{I}}^R = \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{u}}^R + \bar{\mathbf{C}}\ddot{\mathbf{u}}^R + \bar{\mathbf{K}}\Delta \mathbf{u}^R, \quad (72)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{M}}$  reducirana matrica masa podstrukture,  $\bar{\mathbf{C}}$  je reducirana matrica prigušivanja, a  $\bar{\mathbf{K}}$  je reducirana matrica krutosti. Ove reducirane matrice masa, prigušivanja i krutosti povezane su samo sa zadržanim čvorovima.



Reducirana matrica krutosti može se lako izvesti kada se razmatra samo statički odziv konstrukcije. Kako je čitav odziv podstrukture linearan, doprinos virtualnog rada podstrukture ukupnom modelu je

$$\delta W = [\delta \mathbf{u}^R \quad \delta \mathbf{u}^E] \left( \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{P}^R \\ \Delta \mathbf{P}^E \end{array} \right\} - \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}^{RR} & \mathbf{K}^{RE} \\ \mathbf{K}^{ER} & \mathbf{K}^{EE} \end{array} \right]}_{\mathbf{K}_T} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{u}^R \\ \Delta \mathbf{u}^E \end{array} \right\} \end{array} \right), \quad (73)$$

gdje su  $\Delta \mathbf{P}^R$  i  $\Delta \mathbf{P}^E$  konzistentne čvorne sile dodijeljene na stvorenu podstrukturu (ne odnose se na inicijalna opterećenja), a  $\mathbf{K}_T$  je tangenta matrica krutosti.

Kako se unutarnji čvorovi,  $\mathbf{u}^E$ , u podstrukтури pojavljuju samo u podstrukтури, jednađba ravnoteže konjugirana preko  $\delta \mathbf{u}^E$  se može pisati kao

$$\Delta \mathbf{P}^E - \mathbf{K}^{ER} \Delta \mathbf{u}^R - \mathbf{K}^{EE} \Delta \mathbf{u}^E = 0. \quad (74)$$

Gornja jednađba se može pisati tako da se izrazi  $\Delta \mathbf{u}^E$  čime se dobije

$$\Delta \mathbf{u}^E = (\mathbf{K}^{EE})^{-1} [\Delta \mathbf{P}^E - \mathbf{K}^{ER} \Delta \mathbf{u}^R] \quad (75)$$

Sada je doprinos podstrukture statičkoj ravnoteži

$$\delta W = \delta \mathbf{u}^R \left[ \left( \Delta \mathbf{P}^R - \mathbf{K}^{RE} (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \Delta \mathbf{P}^E \right) - \left( \mathbf{K}^{RR} - \mathbf{K}^{RE} (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER} \right) \Delta \mathbf{u}^R \right]. \quad (76)$$

Za statičku analizu reducirana matrica podstrukture je

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^{RR} - \mathbf{K}^{RE} (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER}, \quad (77)$$

i doprinos podstrukture uslijed sila koje opterećuju podstrukturu je vektor opterećenja

$$\bar{\mathbf{P}}^R = \Delta \mathbf{P}^R - \mathbf{K}^{RE} (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \Delta \mathbf{P}^E, \quad (78)$$

Statičke forme definirane jednađbom (74) često puta nisu dovoljne kako bi točno definirale dinamički odziv podstrukture. Dinamička odziv podstrukture može se poboljšati ako se zadrže dodatni čvorovi, - osim onih koji su potrebni za povezivanje podstrukture s ostatkom modela; tj neki od  $\mathbf{u}^E$  mogu se maknuti u  $\mathbf{u}^R$ . Ova tehnika se zove Guyan redukcija (u literaturi još i *static condensation*, *Guyan condensation*, *Guyan reduction*) [10].

Može se pokazati, uz pretpostavku da su vanjske sile na unutarnje čvorove  $\Delta \mathbf{P}^E = 0$ , u svrhu dobivanja odnosa među unutarnjim i zadržanim čvorovima, da se jednađba (75) svodi na

$$\Delta \mathbf{u}^E = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^R, \quad (79)$$

gdje je  $\mathbf{G} \in R^{s \times m}$  Guyanova matrica kondenzacije i definirana je kao

$$\Delta \mathbf{u}^E = \mathbf{G} = -(\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER}. \quad (80)$$

Osim toga provodi se još jedna tehnika, koja je općenito i učinkovitija, kako bi se bolje opisao odziv unutar same podstrukture uključivanjem poopćenih stupnjeva slobode označene s  $\mathbf{q}^\alpha$ , a koji su povezani s prirodnim formama podstrukture. Najjednostavniji način da se to učini je da se odrede prirodne forme podstrukture koja ima sve zadržane stupnjeve slobode ograničene, na takav način da se jednažba (80) sada može zapisati kao

$$\Delta \mathbf{u}^E = (\mathbf{K}^{EE})^{-1} [\Delta \mathbf{P}^E - \mathbf{K}^{ER} \Delta \mathbf{u}^R] + \{\phi^E\}^\alpha \mathbf{q}^\alpha, \quad (81)$$

čija je varijacija

$$\delta \mathbf{u}^E = (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER} \delta \mathbf{u}^R + \{\phi^E\}^\alpha \delta \mathbf{q}^\alpha, \quad (82)$$

i vremenske derivacije

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^E &= (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER} \dot{\mathbf{u}}^R + \{\phi^E\}^\alpha \dot{\mathbf{q}}^\alpha, \\ \ddot{\mathbf{u}}^E &= (\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER} \ddot{\mathbf{u}}^R + \{\phi^E\}^\alpha \ddot{\mathbf{q}}^\alpha. \end{aligned} \quad (83)$$

U gornjim jednažbama  $\{\phi^E\}^\alpha$  su vlastite forme podstrukture dobivene kada su svi zadržani stupnjevi slobode spriječeni, a  $\mathbf{q}^\alpha$  su poopćeni pomaci – i predstavljaju iznose odziva tokom tih formi. Ovaj postupak u literaturi se naziva Craig-Bampton [10], [13].

Doprinos podstrukture virtualnom radu za dinamički slučaj je

$$\left\{ \delta \mathbf{u}^R \quad \delta \mathbf{u}^E \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{P}^R \\ \Delta \mathbf{P}^E \end{array} \right\} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{RR} & \mathbf{M}^{RE} \\ \mathbf{M}^{ER} & \mathbf{M}^{EE} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}^R \\ \ddot{\mathbf{u}}^E \end{array} \right\} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{RR} & \mathbf{C}^{RE} \\ \mathbf{C}^{ER} & \mathbf{C}^{EE} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}^R \\ \dot{\mathbf{u}}^E \end{array} \right\} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{RR} & \mathbf{K}^{RE} \\ \mathbf{K}^{ER} & \mathbf{K}^{EE} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{u}^R \\ \Delta \mathbf{u}^E \end{array} \right\} \right), \quad (84)$$

gdje je

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{RR} & \mathbf{M}^{RE} \\ \mathbf{M}^{ER} & \mathbf{M}^{EE} \end{bmatrix}, \quad (85)$$

matrica mase podstrukture, zatim

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{RR} & \mathbf{C}^{RE} \\ \mathbf{C}^{ER} & \mathbf{C}^{EE} \end{bmatrix}, \quad (86)$$

je matrica prigušenja, te

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{P}^R \\ \Delta \mathbf{P}^E \end{array} \right\}, \quad (87)$$

je vektor čvornih sila u podstrukтури.

S pretpostavljenim dinamičkim odzivom unutar podstrukture, unutarnji stupnjevi slobode svojim doprinosom ( $\Delta \mathbf{u}^E$  i njegove vremenske derivacije) se mogu transformirati u zadržane stupnjeve slobode i amplitude normalnih formi, tako reducirajući sustav na

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^R & \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} \left( \mathbf{T}^T \mathbf{P} - \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^R \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^R \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^R \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \right), \quad (88)$$

gdje je

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}^{EE})^{-1} \mathbf{K}^{ER} & [\phi^E] \end{bmatrix} \quad (89)$$

u kojem je  $[\phi^E]$  matrica vlastitih vektora,  $\mathbf{q}$  je vektor poopćenih stupnjeva slobode,  $\mathbf{I}$  je jedinična matrica, a  $\mathbf{0}$  je nul matrica.

Također se mogu izvesti i podstrukture za velike rotacije. Takve najprije zahtijevaju izračun ekvivalentne matrice rotacije  $\mathbf{R}$  za kruto tijelo, koja je povezana isključivo za gibanje podstrukture. Kako analiza koja uključuje podstrukturu ispoljava samo male deformacije, mogu se koristiti izvorne i trenutne pozicije dvaju čvorova u dvodimenzionalnim analizama ili tri čvora u trodimenzionalnim analizama, kako bi se izračunala dva pravokutna lokalna sustava i s njima definirala matrica rotacije. To se radi na sljedeći način. Za trodimenzionalnu analizu, Abaqus računa referentnu (uprosječenu) točku koristeći 3 čvora iz izvorne konfiguracije. Prvi jedinični vektor  $\mathbf{E}_j^1$  je usmjeren od referentne točke prema prvom čvoru. Treći smjer  $\mathbf{E}_j^3$  se uzima kao normala na ravninu koju čine 3 čvora, dok se drugi vektor smjera  $\mathbf{E}_j^2$  uzima kao vektorski umnožak trećeg i prvog. Taj proces se ponavlja u trenutnoj konfiguraciji kako bi se izračunao lokalni sustav  $\mathbf{e}_i^k$ . Matrica rotacije jednostavno se može izračunati kao  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{e}_i^k \mathbf{E}_j^k$ .

Abaqus automatski odabire dva, odnosno tri čvora kako bi računao matricu. Čvorovi se odabiru od zadržanih i kandidati su samo oni koji imaju sva tri translacijska stupnja slobode. Tako na primjer u 3D analizi, prvi čvor je onaj koji ima najveću krutost (najveću dijagonalnu vrijednost) podstrukture. Kao drugi čvor se uzima zadržani čvor koji je najudaljeniji od prvog čvora, s preduvjetom da mu je čvorna krutost dovoljno velika (minimalno 0,01% krutosti prvog čvora). Treći se odabire prema uvjetu da je udaljenost od tog čvora do linije koju čine prva dva čvora najveća. U rijetkim slučajevima kada su zadržana manje od tri čvora za 3D analizu, matrica rotacije se računa direktno tako da se uzme najkrući čvor koji sada mora posjedovati sve stupnjeve slobode (tri rotacije i tri translacije).

Kako bi se računalne unutarnje sile pridružene podstrukturi s velikom rotacijom, Abaqus računa pomake/rotacije koje uzrokuju naprezanje *oduzimanjem* gibanja krutog tijela od čvornih pomaka/rotacija podstrukture. Za translacijske stupnjeve slobode, pomaci  $\mathbf{u}$  koji uzrokuju naprezanje u čvoru mogu se napisati kao

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0). \quad (90)$$

gdje su  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{x}$  izvorne i trenutne pozicije čvorova a  $\mathbf{X}_0$  i  $\mathbf{x}_0$  su izvorne i trenutne koordinate referentnih točaka (koje su spomenute prethodno). Za rotacijske stupnjeve slobode totalna matrica rotacije u nekom čvoru  $\mathbf{R}^{tot}$  je spoj rotacija između rotacijske matrice koja uzrokuje naprezanje i rotacijske matrice krutog tijela

$$\mathbf{R}^{tot} = \exp\left[\hat{\phi}\right]\mathbf{R}. \quad (91)$$

Rotacije koje uzrokuju naprezanja  $\phi$  se mogu lako izračunati. Stoga se sada može pisati unutarnja sila u podstrukturi

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{K}}^{rot}\bar{\mathbf{u}}, \quad (92)$$

gdje je

$$\bar{\mathbf{K}}^{rot} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{R}^T, \quad (93)$$

rotirana matrica krutosti krutog tijela, a

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix}. \quad (94)$$

Slična procedura provodi se u dinamici za reduciranu masu (koja je spoj između čvornih pomaka/rotacija i doprinosa vlastitih formi) gdje se kruto tijelo također zarotira prije nego se uračunaju bilo kakvi doprinosi mase u virtualni rad koji se odnosi na podstrukturu.

Kako je prije već napomenuto, podstrukture se koriste kako bi se smanjio red modela. Kao zaključak gornjeg izvoda korisniku to može omogućiti sljedeće [14]:

- da se skup elemenata grupira zajedno i da se svi osim zadržanih stupnjeva slobode eliminiraju na bazi linearnog odziva unutar podstrukture,
- da se koriste kao i bilo koji drugi konačni element iz biblioteke,
- mogu se koristiti za analize naprezanja i pomaka te za akustično-strukturalne analize,
- imaju linearni odziv ali dozvoljavaju velike rotacije,
- posebno su pogodne ako se identični komadi pojavljuju više puta u konstrukciji,
- spojeni su s ostatkom konstrukcije preko zadržanih stupnjeva slobode koji se nalaze u zadržanim čvorovima,

- mogu sadržavati sustave unutarnjih slučajeva opterećenja koji se mogu aktivirati po želji ili skalirati,
- mogu uključiti dinamičke efekte uključivanjem zadržanih formi,
- pokazati se ostatku modela kao krutost, kao izborna masa, prigušivanje i set skalarnih vektora opterećenja.

## 2.7. Metode integracije u dinamici sustava više tijela

Prije je rečeno na koji se način najčešće integriraju jednadžbe gibanja za sustave diskretizirane metodom konačnih elemenata. Ovdje će se spomenuti najčešće metode integracije korištene za integriranje jednadžbi gibanja u dinamici sustava više tijela.

Kada se matematički formuliraju diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamički sustav sačinjen od krutih tijela, može se zapaziti da su te jednadžbe dosta *krute* (eng. *stiff*). Termin krutih jednadžbi dolazi od činjenice da se korištenje neprimjerene numeričke metode za rješavanje takvih diferencijalnih jednadžbi ponaša nestabilno ili da rješenje potpuno divergira.

Kada se diferencijalne jednadžbe integriraju numerički, za očekivati je da zadovoljavajući korak integracije bude relativno malen u području gdje se funkcija izrazito mijenja te da bude relativno velik na području gdje se krivulja rješenja gotovo poravnava s linijom gdje je nagib funkcije jednak nuli. Za neke probleme to nije slučaj i katkad je korak integracije forsiran da bude izrazito i neprihvatljivo malen u području gdje je krivulja dosta položena (nema velik nagib). Taj problem se naziva problem krutosti jednadžbe [28], [29].

U tu svrhu su razvijene određene numeričke metode koje mogu integrirati sustave krutih diferencijalnih jednadžbi. Među najpoznatijim metodama integracije u području dinamike sustava više tijela razvili su Runge, Kutta, Gear, Wielenga i drugi.

Većina prethodno spomenutih integratora su, ili kao izvorno osmišljeni ili kao izvedenice izvornih integratora implementirani u programski paket Adams [15].

S obzirom da je u novijim verzijama Adamsa implementiran i implicitni HHT integrator koji će se koristiti u numeričkom primjeru radi bolje usporedbe s rezultatima dobivenim u Abaqusu, drugim integratorima se neće posvećivati posebna pažnja. U Adamsu postoji mogućnost odabira integratora kojim će se rješavati jednadžba dinamike. Korisniku je među ostalima dostupan GSTIFF integrator koji se temelji na Gearovoj metodi integracije [28] i ujedno je zadan kao uobičajeni (eng. *default*) rješavač jednadžbi gibanja, zatim WSTIFF integrator koji se temelji na Wielengovoj metodi [29], a postoji i RKF45 integrator *blago krutih* jednadžbi koji je temeljen na Runge-Kutta-Fehlbergovoj metodi 4. i 5. reda.

### 3. O korištenim programskim paketima

U ovom radu korištena su dva, u suštini potpuno različita programska paketa. Abaqus, koji se temelji na metodi konačnih elemenata, koji je namijenjen numeričkoj analizi konstrukcija pri čemu je ista diskretizirana konačnim elementima. Adams je program izvorno namijenjen računalnim simulacijama sustava više krutih tijela. U novijim verzijama Adamsa postoji mogućnost provođenja simulacije s reduciranim modelima deformabilnih tijela. Kako se programski paketi preklapaju u računanju dinamičkog odziva deformabilnih sustava više tijela usporedit će se programski paketi i metode na kojoj se temelje.

#### 3.1. Abaqus

Programski paket Abaqus služi za numeričku analizu konstrukcija, a temelji se na metodi konačnih elemenata kojom se ta konstrukcija diskretizira kako bi se mogla dobiti rješenja u vidu polja traženih varijabli izračunatih u diskretnim dijelovima kontinuuma (konačnim elementima, tj. njima pripadnim integracijskim točkama). Programski paket Abaqus sadrži više modula od kojih su i Abaqus/Standard i Abaqus/Explicit, a koji su primijenjeni u ovom radu za rješavanje dinamičkih problema.

##### 3.1.1. Abaqus sučelje za Adams

Procedura dobivanja elastičnih tijela koja se mogu koristiti u Adamsu sastoji se od dva koraka. U prvom koraku potrebno je urediti Abaqus ulaznu datoteku (eng. *Abaqus input file*) tako da sadrži sve čvorove i elemente, definirana materijalna svojstva (modul elastičnosti i gustoću), definiranu frekvencijsku analizu (*\*Frequency*) sa željenim brojem formi i zadržanim čvorovima te njima pripadnim stupnjevima slobode i još definiran korak stvaranja podstrukture (*\*Substructure generate*) u kojoj se prethodno izračunate forme i čvorovi te pripadni im stupnjevi slobode zadržavaju. U ulaznoj datoteci također je potrebno definirati ispis naprezanja i deformacija ako se iste žele razmatrati kasnije u Adams simulacijama. Tako dobivena ulazna datoteka služi za provođenje analize u Abaqusu u kojem se korištenjem prozora za pozivanje naredbi (eng. *command window*) izvršava naredba *abaqus job=ulazna\_datoteka.inp* čime se provodi frekvencijska analiza i redukcija reda modela. Rezultat prvog koraka je reducirani model, tj. podstruktura, kojem su zadržani prethodno definirani čvorovi sa pripadnim stupnjevima slobode i sve izračunate forme vibriranja. Korištenjem Abaqus sučelja za Adams (eng. *Abaqus interface for Adams*) provodi se drugi

korak koji se sastoji od pretvaranja podstrukture (zapisane u *.sim* datoteci) i dobivenih rezultata za naprezanja i deformacije (zapisanih u *.fil* datoteci) u modalno neutralnu datoteku (*.mnf* datoteku). Sučelje se također pokreće kroz prozor za pozivanje naredbi te se izvršava naredba *abaqus adams job=ulazna\_datoteka\_Zn*, gdje je *Zn* oznaka podstrukture. Rezultat drugog koraka je modalno neutralna datoteka spremna za korištenje u dinamičkoj analizi deformabilnih tijela u Adamsu. Treba napomenuti da valja voditi računa o mjernim jedinicama. Sučelje automatski radi u sustavu metar-kilogram-sekunda, a ako su vrijednosti u ulaznoj datoteci zadane u drugom sustavu u drugom koraku treba koristiti i naredbu *units*, kojom se odabire sustav mjernih jedinica ili pojedino za svaku mjernu jedinicu korištenjem naredbi *mass* (za odabir jedinice mase), *length* (za odabir jedinice duljine) i *time* (za odabir jedinice vremena).

### 3.2. Adams

Adams je programski paket tvrtke *MSC Software* koji je namijenjen za računalnu analizu dinamike sustava više tijela. Unutar samog programskog paketa korisniku je intuitivno i jednostavno omogućeno stvaranje složenih sustava sačinjenih od više tijela koja su međusobno spregnuta različitim kinematskim ograničenjima.

#### 3.2.1. Adams Flex

Adams Flex je modul u programskom paketu Adams koji služi za rad sa deformabilnim tijelima. Ograničen je na linearno elastična tijela i reducirane modele pojedinih tijela. Sve pojedinosti o pojedinim elastičnim tijelima zapisane su u modalno neutralnoj datoteci (*.mnf*). Ista se može dobiti kroz razna sučelja za programske pakete temeljene na metodi konačnih elemenata kao što su Abaqus, Nastran, Ansys i slično, ali u novijim verzijama i direktno u Adams Flex modulu pri čemu je korisnik tada ograničen na korištenje isključivo tetraedarskih elemenata prvog i drugog reda. Izlazna varijabla koju ispisuje Adams Flex su pomaci pojedinih čvorova.

#### 3.2.2. Adams Durability

Adams Durability je modul za programski paket Adams koji služi za rad s deformabilnim tijelima. Ukoliko su korisniku od interesa naprezanje i deformacije na pojedinom deformabilnom tijelu, a u modalnoj datoteci su sadržane informacije za modalna naprezanja i deformacije, tada Adams Durability modul korisniku omogućuje ispis naprezanja i deformacija po pojedinom deformabilnom tijelu u vremenu.

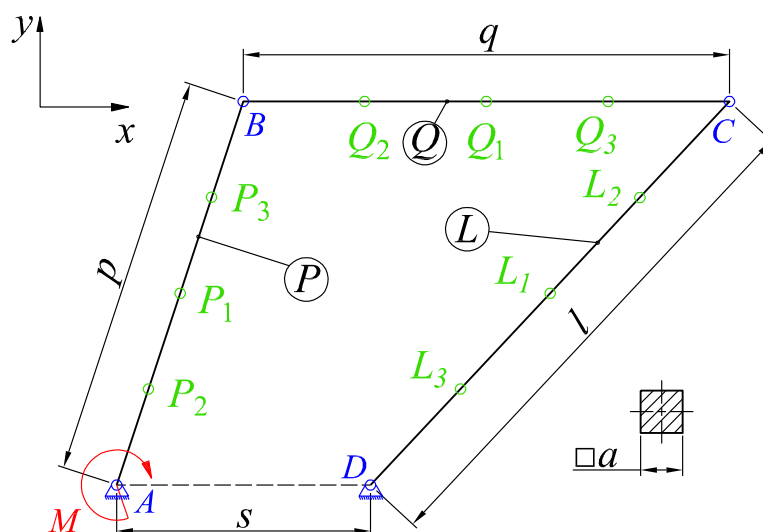
## 4. Numerički primjer

Kako bi se pokazala učinkovitost i mogućnost pojedinog programskog paketa, pokazati će se usporedba rezultata na numeričkom primjeru. Rezultati su dobiveni korištenjem programskog paketa Abaqus i programskog paketa Adams. U programskom paketu Abaqus korištene su implicitna i eksplicitna metoda, a u Adamsu je korišten HHT integrator.

Veličine koje se promatraju su energija sustava te pomaci i brzine pojedinih točaka sustava. S obzirom da se radi o sustavu deformabilnih tijela, promatraju se naprezanja te ostale veličine vezane za deformabilne sustave kao što energija deformiranja sustava, propagacija vala u pojedinim dijelovima i slično. Također su predmet usporedbe vremena računanja, odnosno trajanja simulacije pojedine metode, pojedinog programskog paketa i pojedinog integratora.

### 4.1. Mehanizam s 3 grede

Kao numerički primjer odabran je mehanizam sačinjen od 3 grede prema slici 5.



Slika 5. Geometrija i rubni uvjeti mehanizma s 3 grede

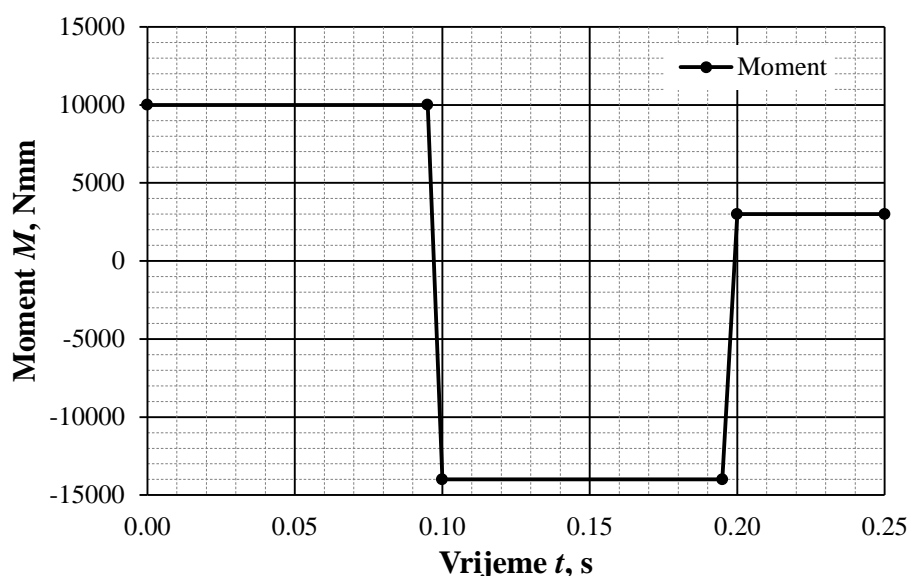
U točkama  $B$  i  $C$  definirane su veze pomoću zglobova koji dozvoljavaju rotaciju među pojedinim dijelovima, a translacije su ograničene na način da se zadana točka jednog dijela giba skupa s drugim dijelom. U točkama  $A$  i  $D$  grede su zglobno vezane za nepomičnu podlogu. U Abaqusu su veze definirane pomoću spoja (eng. *connector*) tipa *Hinge*, a u Adamsu pomoću rotacijskog zgloba tipa *Revolute joint*. U točku  $A$  dodijeljen je moment  $M$  čija je raspodjela u vremenu prikazana slikom 6. Grede su kvadratnog poprečnog presjeka



duljine stranice  $a$  prema slici 5. Geometrijsko materijalne karakteristike dane su tablicom 7. Analiza traje 250 ms.

**Tablica 7. Zadane geometrijske i materijalne karakteristike numeričkog modela**

$p$ , mm	$q$ , mm	$l$ , mm	$s$ , mm	$a$ , mm	$E$ , N/mm <sup>2</sup>	$\nu$	$\rho$ , t/mm <sup>3</sup>
400	480	520	250	10	70000	0.29	$7.8e^{-9}$



**Slika 6. Raspodjela pogonskog momenta u vremenu**

Kako bi se izbjegao diskontinuitet opterećenja i zadržala dvostruka diferencijabilnost funkcije opterećenja u vremenu, u Abaqusu je opterećenje zadano tablično koristeći *Smooth step* opciju, a u Adamsu je korištena *Step* funkcija [13], [15].

Na pojedinim štapovima, označenima s  $P$ ,  $Q$  i  $L$ , nalaze se točke  $P_2$ ,  $P_1$ , ...,  $L_3$ . U tim točkama i zglobovima  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  mjerene su veličine u vremenu.

Ovakav mehanizam čest je u praksi i koristi se u automobilske industriji kao izvršni član brisača vjetrobrana, ali i podizača bočnih prozora automobila. Može biti konstruiran tako da izvršava funkciju opisivanja složenih putanja sa promjenjivom brzinom izvršnog člana duž putanje. Mehanizam koji je spomenut i obrađen u ovom radu poslužit će kao primjer na kojemu se može pokazati utjecaj inercijskih sila u dinamičkoj analizi. Inercijske sile na ovom modelu bit će posebno izražene jer je materijal odabran tako da ima veliku gustoću, a relativno malu krutost što čini mehanizam dovoljno podatljivim.

U nastavku su provedene analize za materijalno neprigušeni. Kod materijalno neprigušenih modela i dalje može postojati numeričko prigušenje kao posljedica integratora. Materijalno prigušeni sustavi često se modeliraju Rayleighevim prigušenjem (pogledati Dodatak B).

#### 4.1.1. Numerički model – Abaqus

Numerički model sastoji se od tri grede koje su međusobno povezane s kinematskim ograničenjem tipa *Hinge*. Grede su diskretizirane grednim konačnim elementima tipa B31 i B32. Za dobivene mreže konačnih elemenata provedeno je više analiza koristeći dva različita integratora. Analize su provedene u modulu Abaqus/Standard korištenjem implicitnog integratora i u modulu Abaqus/Explicit korištenjem eksplicitnog integratora. Postavke integracije dane su u tablici 8, a geometrija i rubni uvjeti modela na slici 7.

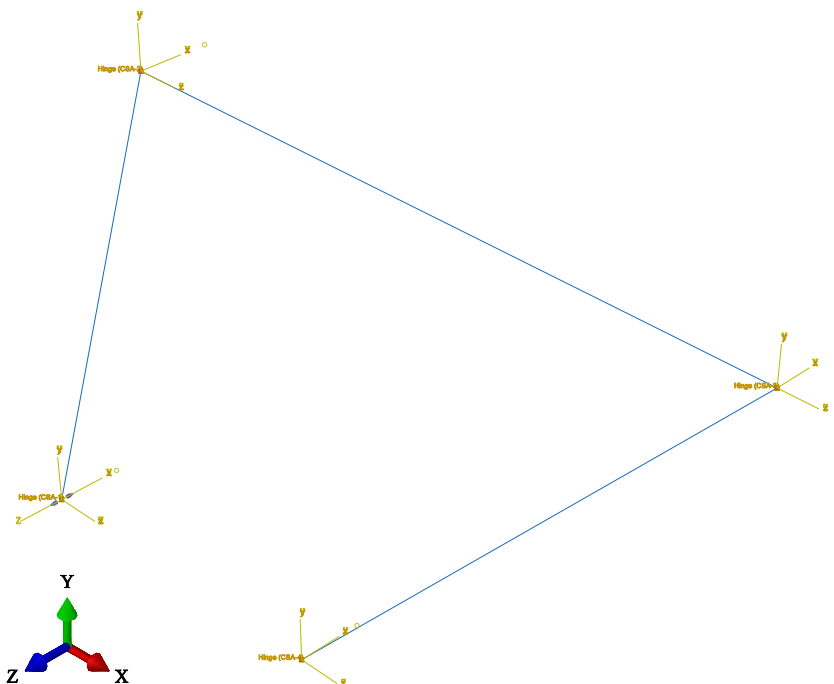
**Tablica 8. Postavke simulacija u Abaqusu**

Abaqus Implicit		Abaqus Explicit	
Trajanje simulacije $T_s$	0,25	Trajanje simulacije $T_s$	0,25
NLGEOM <sup>1</sup>	Uključena	NLGEOM	Uključena
Inkrementacija	Automatska	Inkrementacija	Automatska
Maksimalni broj inkremenata	100 000	Korak integracije ovisi o veličini najmanjeg KE	
Veličina početnog inkrementa	$10^{-5}$		
Minimalna veličina inkrementa	$2,5 \cdot 10^{-10}$		
Maksimalna veličina inkrementa	$10^{-5} <$ automatski $<$ $2,5 \cdot 10^{-10}$		
Parametar $\alpha$	-0,05	Parametar linearne volumne viskoznosti	0,06
Parametar $\beta$	0,275625	Parametar kubične volumne viskoznosti	1,2
Parametar $\gamma$	0,55		

Mreže konačnih elemenata odabrane su tako da se po pojedinoj gredi nalazi 16, 32, 64 ili 128 elemenata prvog ili drugog reda. U tablici 9. prikazani su nazivi pojedinih korištenih mreža konačnih elemenata.

Određene mreže iskoristiti će se kako bi se usporedili rezultati i vremena računanja pojedine metode u Abaqusu. S obzirom da dinamička analiza može biti dosta zahtjevna za loše odabrane parametre, numeričkoj zahtjevnosti dodatno može doprinijeti odabir nepovoljnog konačnog elementa. Za dinamičku analizu preporuča se korištenje elemenata prvog reda te će se pokušati opravdati ta preporuka.

<sup>1</sup> NLGEOM je skraćenica od eng. *Non Linear Geometry* i dostupna je korisniku Abaqusa kao opcija za uključivanje/isključivanje geometrijske nelinearnosti u analizi



Slika 7. Rubni uvjeti i geometrija modela u Abaqusu

Tablica 9. Mreže konačnih elemenata

Mreža	Tip elementa	Broj KE po gredi	Broj čvorova
#1-1	B31	16	51
#2-1	B31	32	99
#3-1	B31	64	195
#4-1	B31	128	387
#1-2	B32	16	99
#2-2	B32	32	195
#3-2	B32	64	387
#4-2	B32	128	774

#### 4.1.2. Numerički model – Adams

Kako bi se dao bolji uvid u kinematiku sustava i bolji prikaz utjecaja deformabilnih tijela u dinamici sustava više tijela, u Adamsu je provedena i analiza s krutim tijelima.

Prethodno spomenute mreže dobivene u Abaqusu korištene su za dobivanje modalno neutralne datoteke koje koristi Adams pri analizi deformabilnih tijela. Uključena su modalna naprezanja i deformacije kako bi se mogla proučavati naprezanja na reduciranom modelu.

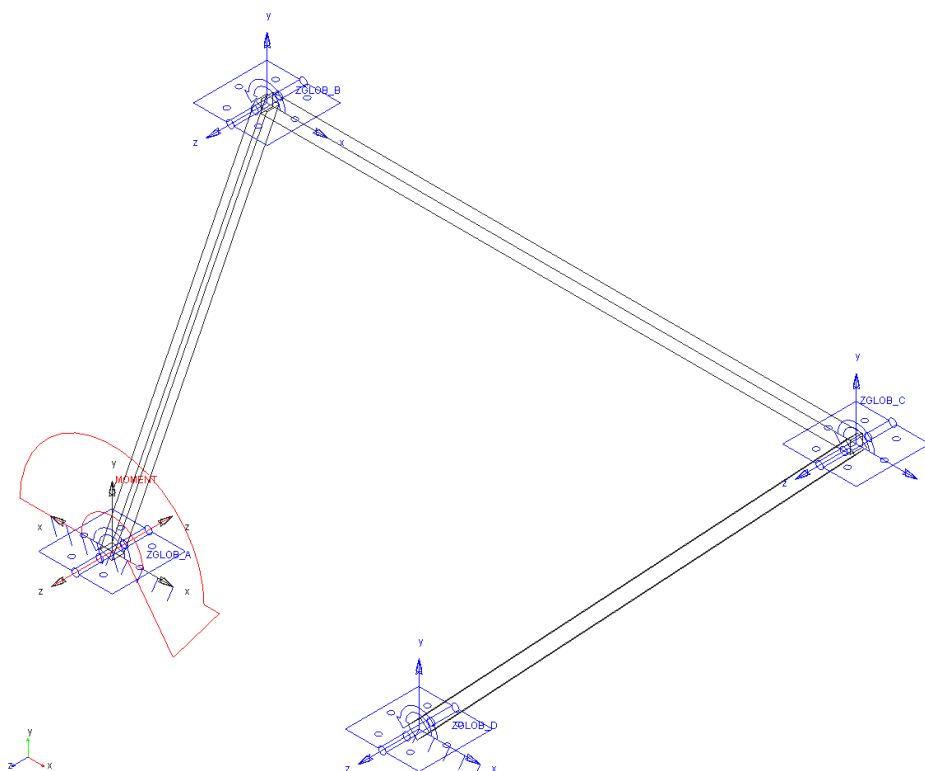
Tako dobivene modalno neutralne datoteke uvoze se u Adams. Mreže konačnih elemenata u Adamsu sastoje se od korisniku po dva dostupna čvora na svakoj gredi. Ti čvorovi služe kako

bi se grede povezale međusobno i s nepomičnom podlogom koristeći rotacijski zglobov s jednim stupnjem slobode (*Revolute joint*) te kako bi se dodijelio rubni uvjet opterećenja, odnosno zadani pogonski moment.

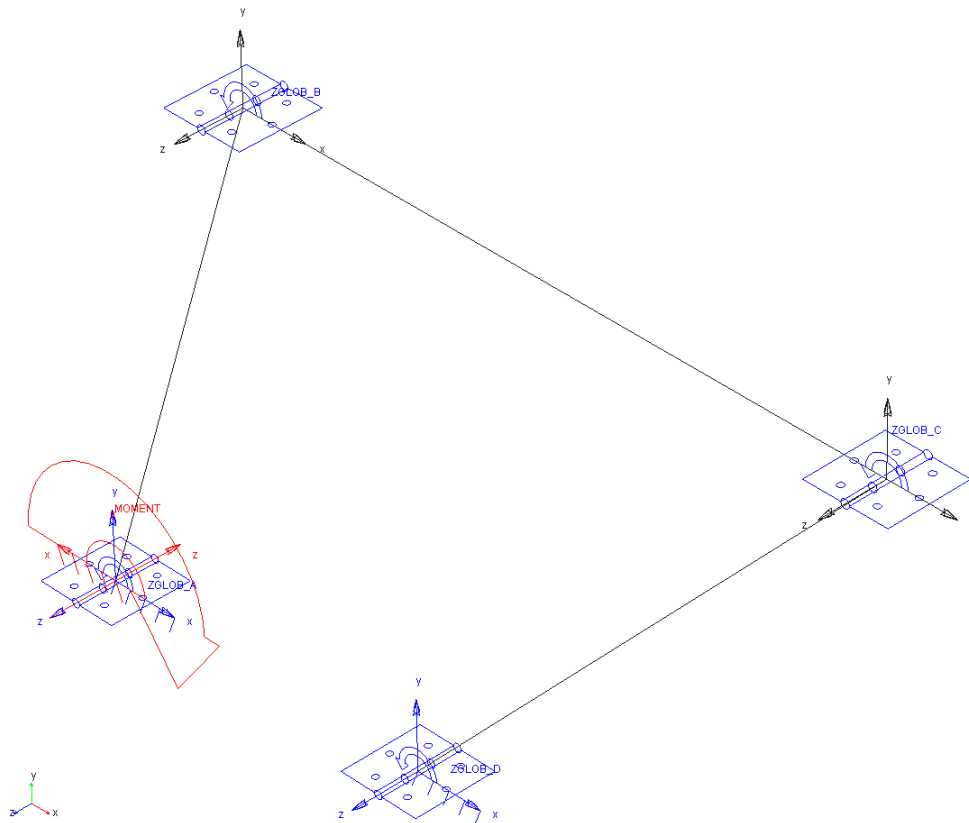
Novije verzije Adamsa imaju implementiran Hilber-Hughes-Taylor (HHT) integrator za dinamičke jednadžbe. S obzirom da se u Abaqusu implicitna metoda temelji na HHT integratoru, u Adamsu je također korišten HHT integrator radi bolje usporedbe pojedine metode. Postavke Adams analize za deformabilna tijela dane su u tablici 10., a geometrija i rubni uvjeti krutog i deformabilnog modela prikazani su slikama 8. i 9.

Postavke za kruti model u Adamsu sastoje se od odabira integratora i koraka integracije koja za kruti model iznosi 0,0001. Uz takav korak, trajanje simulacije krutog modela, koje je više informativnog karaktera, iznosi otprilike 14s korištenja procesora za tri različita integratora u Adamsu (Gearov integrator krutih jednadžbi (GSTIFF), Wielenga integrator krutih jednadžbi (WSTIFF) i prije spomenuti HHT integrator).

Kruti model sačinjen je od 3D modela pojedinih štapova zadane gustoće, dok je deformabilni model, s obzirom da je dobiven korištenjem iste mreže konačnih elemenata kao i u Abaqusu, sačinjen od 3D grednih konačnih elemenata kojima je definiran zadani poprečni presjek i sva ostala materijalna svojstva tokom pretvorbe u modalno neutralnu datoteku.



**Slika 8. Rubni uvjeti i geometrija krutog modela u Adamsu**



Slika 9. Rubni uvjeti i geometrija deformabilnog modela u Adamsu

Tablica 10. Postavke simulacije u Adamsu

Adams HHT	
Trajanje simulacije, $T_s$	0,25
Interpolacija <sup>2</sup>	Uključena
Najveći dozvoljeni broj iteracija ravnoteže (Newton-Raphson)	8
Veličina koraka	0.001
Dopuštena greška integratora	$10^{-05}$
Veličina početnog inkrementa	$10^{-05}$
Minimalna veličina inkrementa	$2,5 \cdot 10^{-10}$
Maksimalna veličina inkrementa	$2,5 \cdot 10^{-03}$
Parametar $\alpha$	-0,05

<sup>2</sup> Uključena interpolacija definira da maksimalni korak integracije bude jednak veličini koraka integracije (u ovom slučaju  $2,5E-03$ )

## 4.2. Rezultati simulacije

Provedene su analize za pojedine gustoće mreže i prikazana su vremena računanja pojedine metode u tablici 11. S obzirom da je za dinamičke probleme općenito pa tako i za konkretan dinamički problem obrađen u ovom radu, analitičko (egzaktno) rješenje nemoguće pronaći nije ispitivana konvergencija u kontekstu u kojem se ispituje u statičkom slučaju. Nakon odrađenih analiza u vremenskoj domeni za pojedinu mrežu, nije primijećen značajan utjecaj daljnjeg progušćivanja mreže na dinamički odziv konstrukcije prema dolje navedenim kriterijima. Stoga je kao konačna mreža uzeta mreža #4-1 koja ima dobar omjer vremena trajanja simulacije i opisivanja polja deformacija i naprezanja. Jedan od kriterija odabira mreže bilo je dobiti rješenja za kinematske veličine u odnosu na kruti model što su relativno grube mreže uspjele lako zadovoljiti. Drugi kriterij bio je dobiti čim bolju raspodjelu naprezanja duž pojedine grede. Pokazalo se da su rješenja gušćih mreža zbog diskretizacije imala značajan utjecaj na rezultate eksplicitne analize. Uslijed grube diskretizacije kontinuuma konačnim elementima povećava se utjecaj visokih frekvencija u frekventnom području, a s druge strane s relativno malim konačnim elementima, smanjuje se stabilni vremenski inkrement potreban za eksplicitnu analizu, čime se u vremenskoj domeni obuhvate pojave nastale uslijed oscilacija visokih frekvencija koje nisu od interesa u konkretnoj analizi. U Adamsu je također korištena samo najgušća mreža zbog prisutne redukcije modela.

**Tablica 11. Vremena računanja pojedine metode (trajanje simulacije  $T_s = 0.25$  s)**

	Abaqus Explicit	Abaqus Implicit	Adams HHT
	Vrijeme računanja ( <i>CPU time</i> ) $t_R$ , s		
#1-1	19.3	8.1	-
#2-1	26.7	11.2	-
#3-1	52.3	15.6	-
#4-1	133.7	25.6	7.2
#1-2	35.8	11.8	-
#2-2	60.2	14.7	-
#3-2	172.4	22.3	-
#4-2	557.2	39.8	-

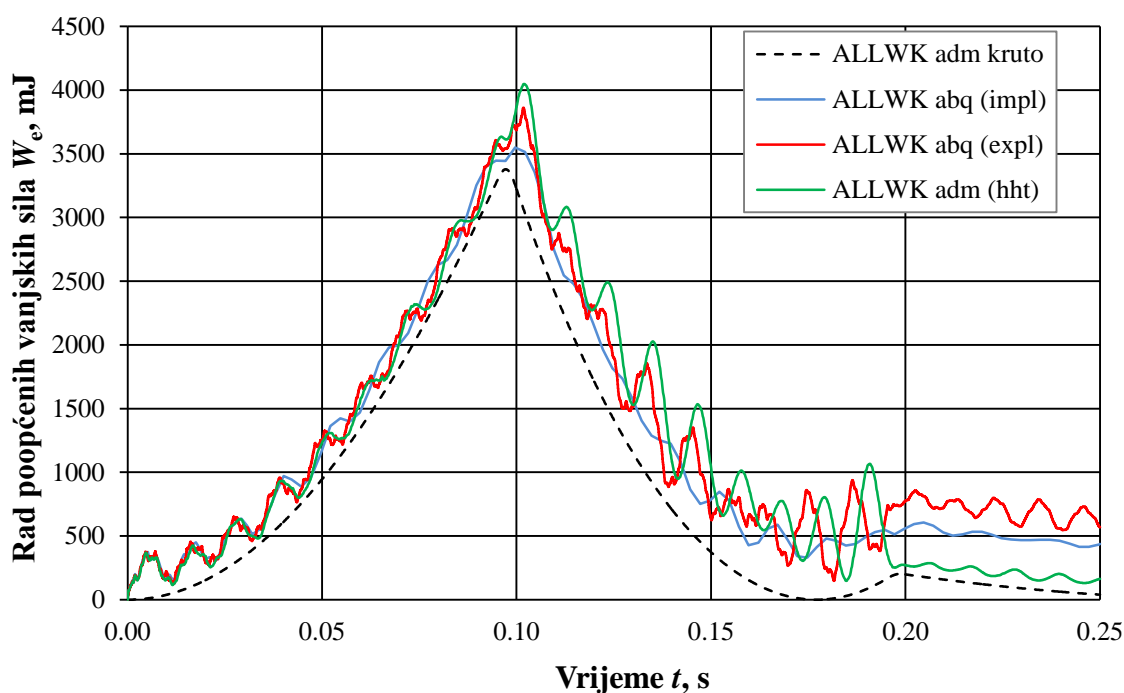
Dijagramima su prikazani rezultati pojedine analize. S obzirom da je cilj usporediti metode, rezultati pojedinih analiza prikazani su u istim dijagramima. Gdje je to bilo moguće, prikazani su i rezultati dobiveni za model sačinjen od krutih tijela kako bi se dobio bolji uvid u utjecaj

deformabilnosti pojedinih članova te radi bolje kontrole rješenja za numerički model sačinjen od elastičnih tijela.

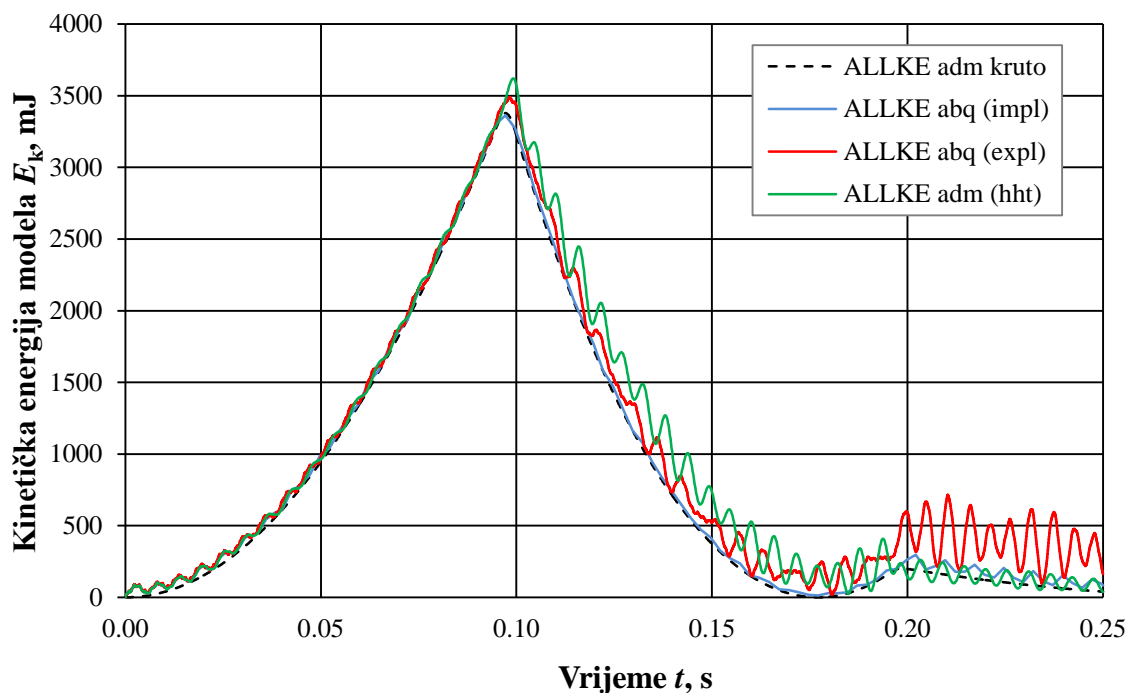
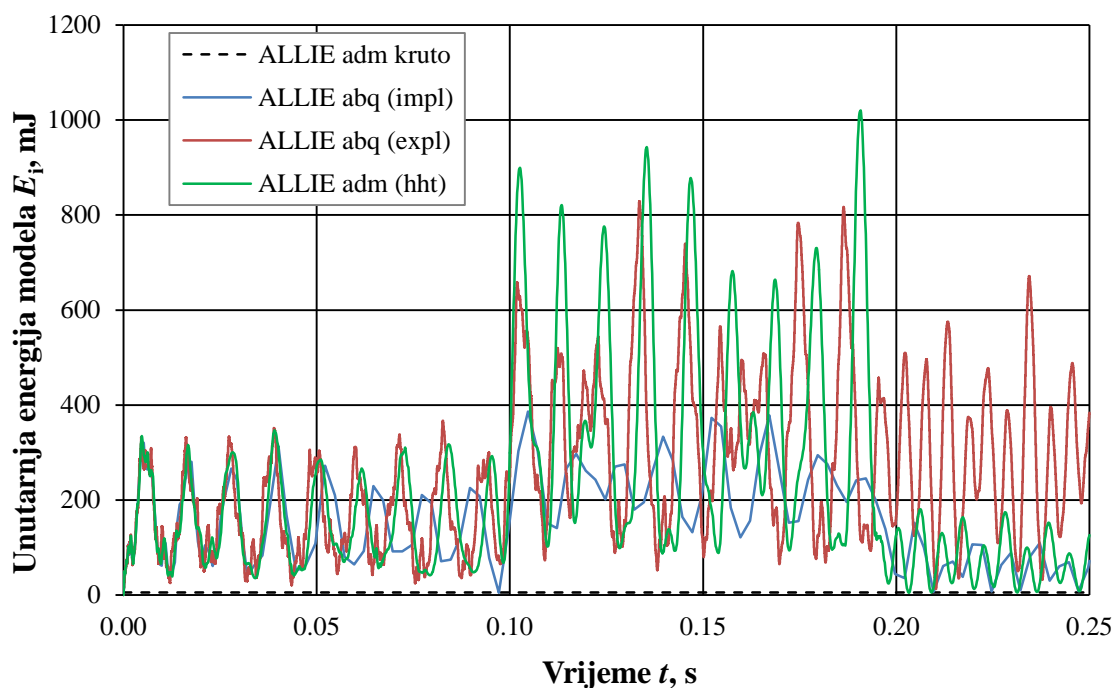
Najprije su prikazani rezultati za ukupne energije cijelog modela. Energije su prikazane za cijeli model i uključuju dijagram rada vanjskih poopćenih sila (u ovom slučaju je to samo rad pogonskog momenta) prikazan slikom 10., dijagram za kinetičku energiju prikazan slikom 11. i dijagram za unutarnju energiju (u ovom slučaju je to energija deformiranja sustava) prikazan slikom 12.

Nakon toga pokazano je dijagramima kinematika gibanja točaka od interesa. Te točke nalaze se kao *krajnje* točke mehanizma, koje u praksi služe za izvršavanje glavnih funkcija, a označene su točkama *B* i *C*.

Osim toga cilj je pratiti i savijanje pojedinih greda, odnosno progibe te raspodjelu napreznja koja je nastaju posljedica savijanja. Stoga su prikazani i rezultati za brzine i pomake točaka koje se nalaze na polovinama greda te napreznja u tim točkama, ali i na jednoj trećini i jednoj četvrtini pojedine grede kako bi se dobila bolja slika o raspodjeli napreznja po pojedinoj gredi.



Slika 10. Rad poopćenih vanjskih sila  $W_e$  cijelog modela

Slika 11. Kinetička energija  $E_k$  cijelog modelaSlika 12. Unutarnja energija  $E_i$  cijelog modela

Zatim su prikazani rezultati u pojedinim točkama modela. Mjerene su vrijednosti za pomake i brzine točaka te ekvivalentna naprežanja prema von Misesu. Pomaci i brzine u smjeru osi  $x$  i  $y$  za točke  $B$  i  $C$  prikazani su slikama 13. do 20. Točke  $B$  i  $C$  predstavljaju *krajnje* pokretne točke mehanizma i često puta služe za izvršavanje određene funkcije. Iz rezultata je vidljivo



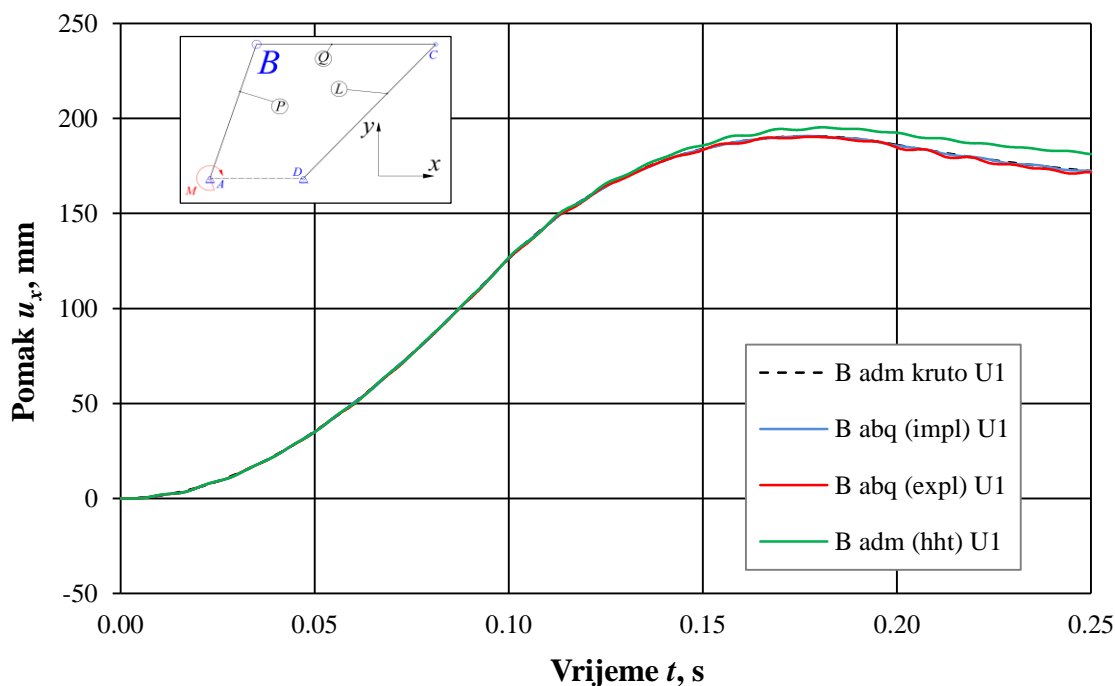
da rješenja za deformabilni model dobro prate trend gibanja krutog modela. Također se vidi značajan utjecaj inercijskih sila što uz odabrana materijalna svojstva koja model čine podatljivim rezultira vibracijama pojedine grede, a time i interesnih točaka  $B$  i  $C$ .

Točke od interesa nalaze se i na polovinama pojedinih greda. S obzirom da se radi o relativno podatljivim gredama progibi na sredini mogu biti veliki, a posljedično tome i velika naprezanja nastala uslijed savijanja grede. Te točke su za pojedine grede označene s  $P_1$ ,  $Q_1$  i  $L_1$ , ovisno na kojoj gredi se nalaze. U nastavku su stoga prikazani pomaci i brzine te ekvivalentna naprezanja prema von Misesu upravo u tim točkama.

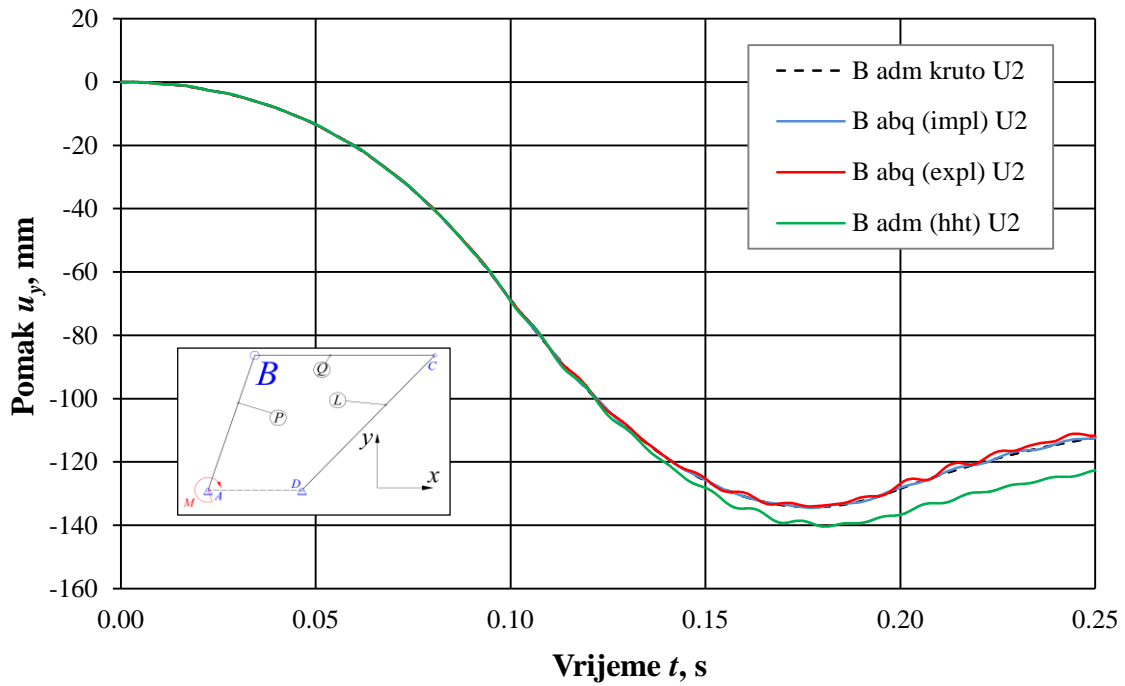
Kako bi se dobio bolji uvid u raspodjelu naprezanja po pojedinim gredama u točkama na jednoj četvrtini i tri četvrtine svake grede postavljene su dodatne točke u kojima se mjere ekvivalentna naprezanja.

Na slikama 21. do 32. prikazani su pomaci i brzine točaka  $P_1$ ,  $Q_1$  i  $L_1$  u smjeru osi  $x$  i  $y$ . Osim kinematskih veličina, na slikama 33., 36. i 39. prikazana su ekvivalentna naprezanja prema von Misesu u prije spomenutim točkama.

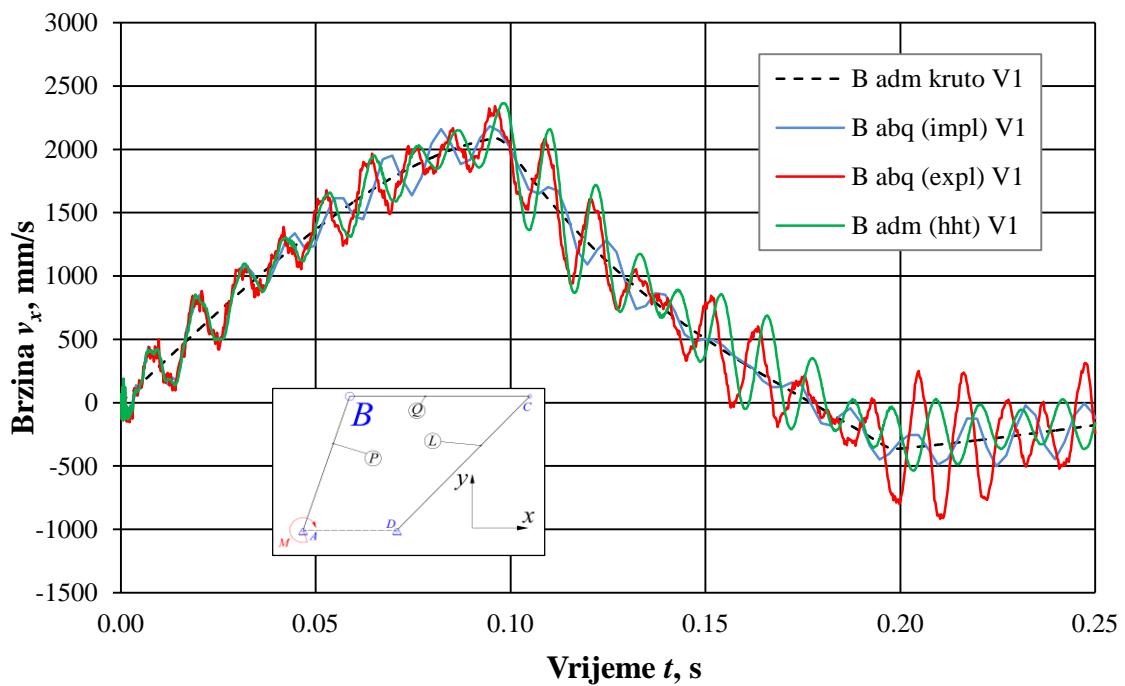
U točkama  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  te  $L_2$  i  $L_3$  također su prikazana ekvivalentna naprezanja prema von Misesu slikama 34. do 41.



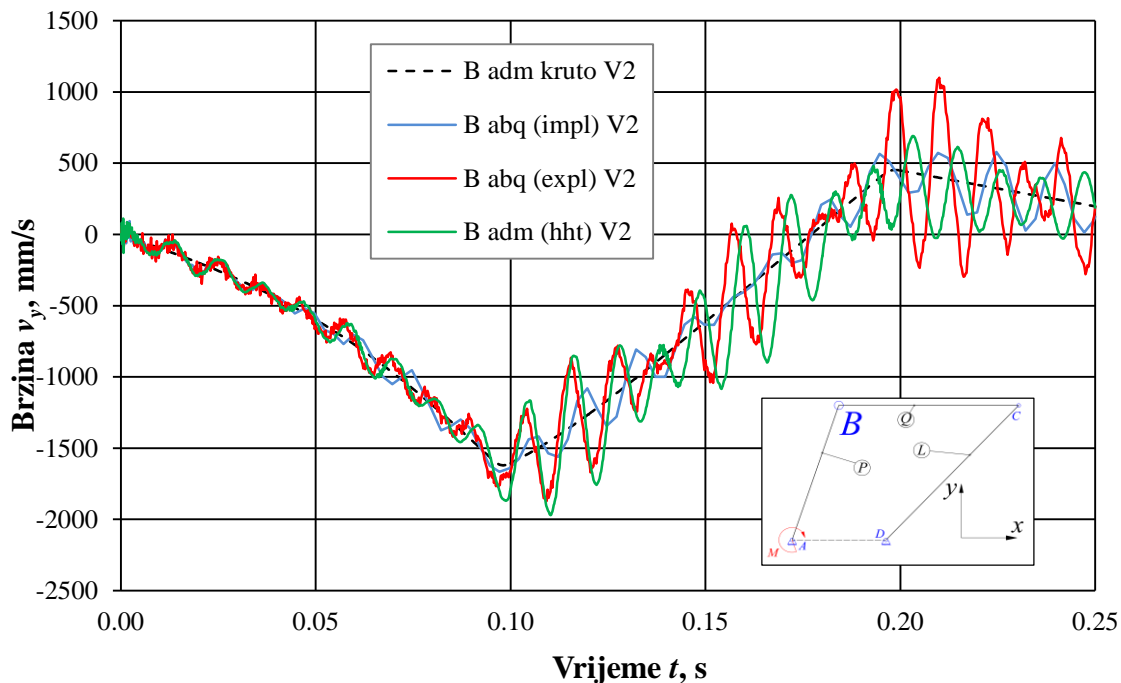
Slika 13. Pomak točke  $B$  u smjeru osi  $x$



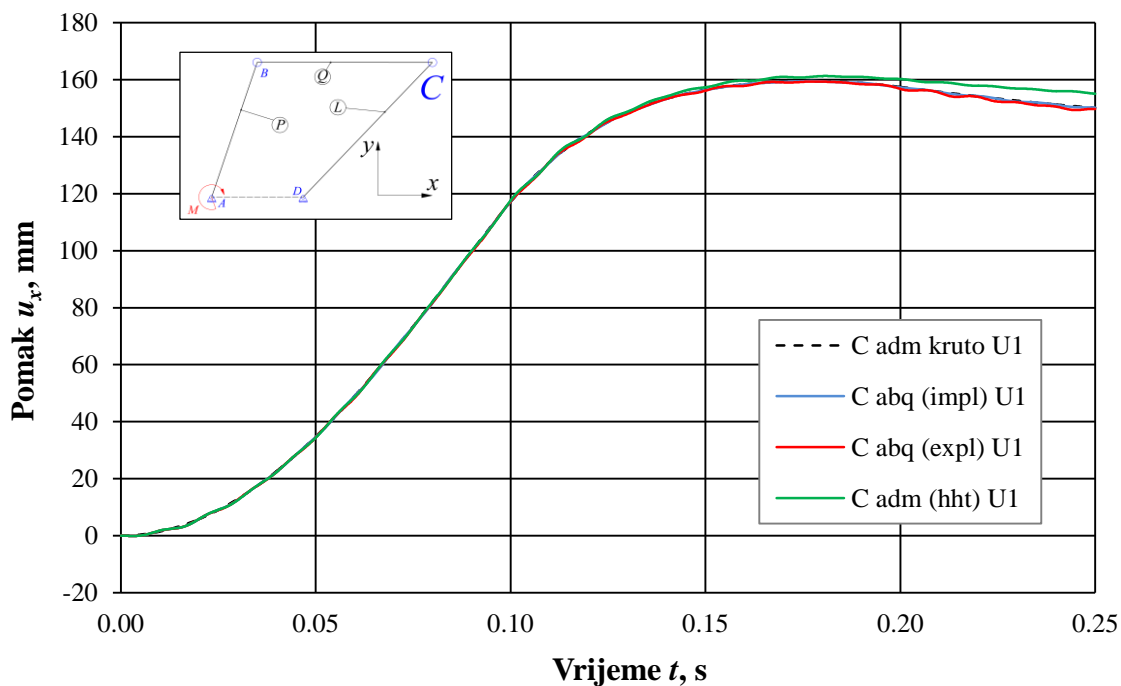
Slika 14. Pomak točke B u smjeru osi y



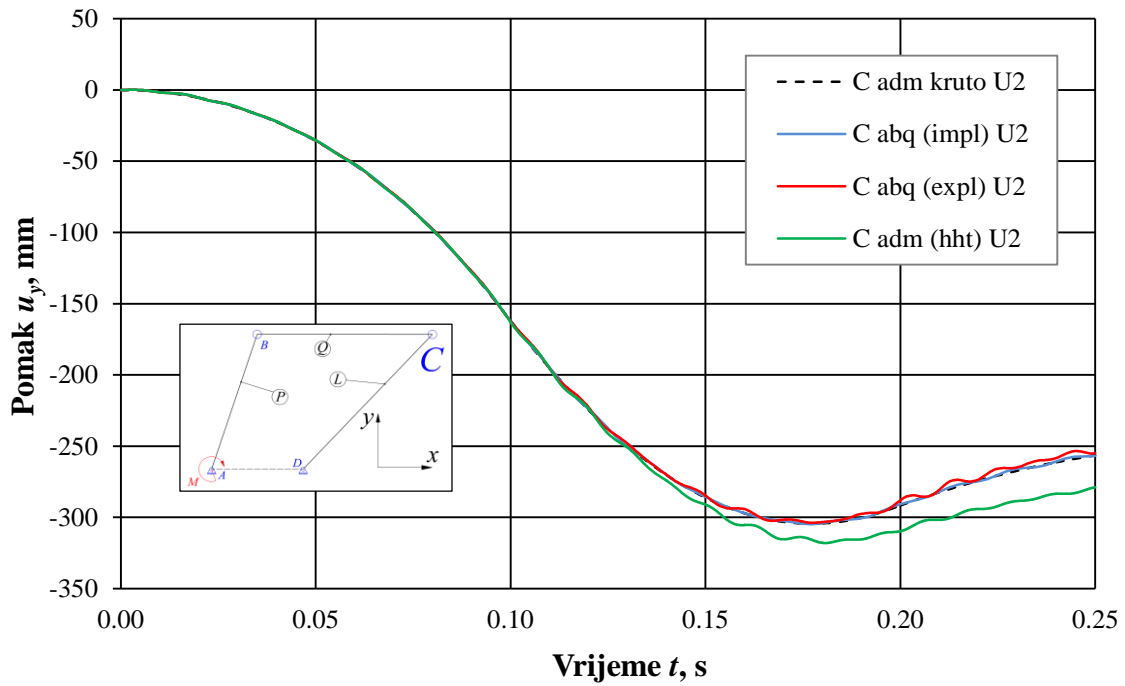
Slika 15. Brzina točke B u smjeru osi x



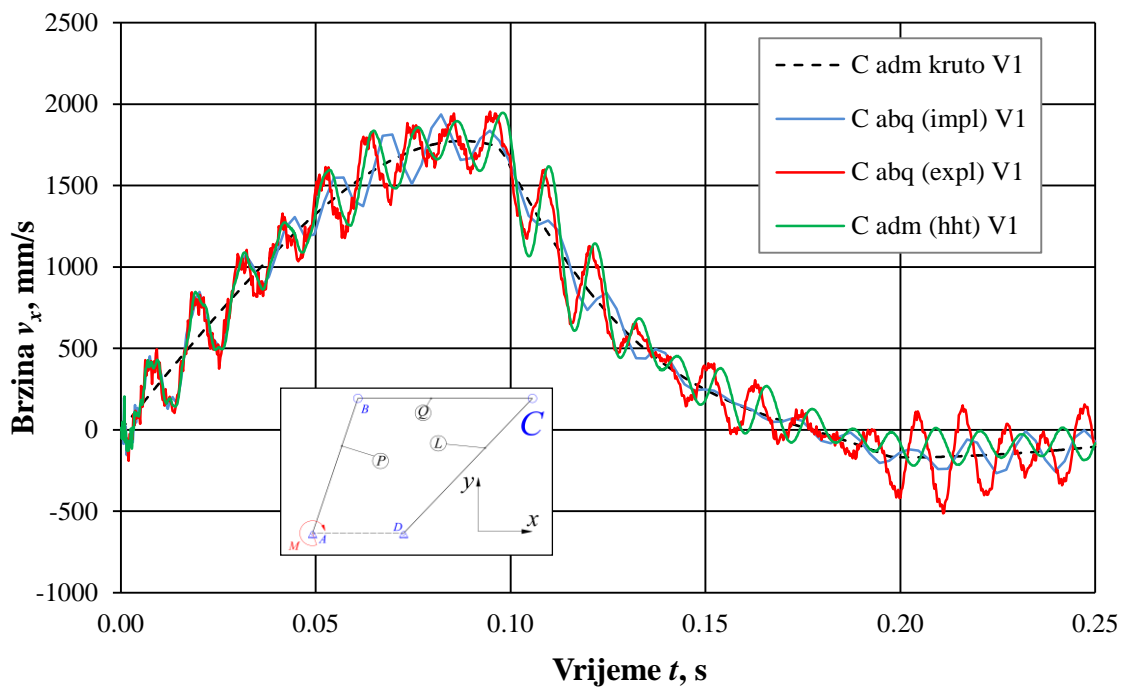
Slika 16. Brzina točke B u smjeru osi y



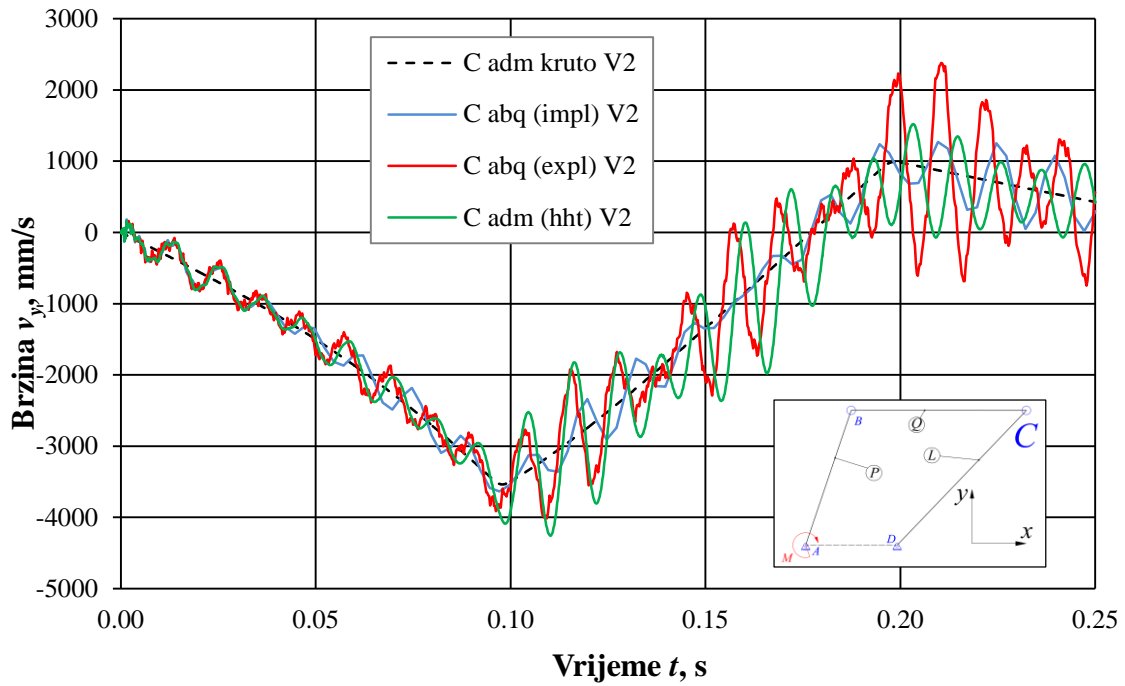
Slika 17. Pomak točke C u smjeru osi x



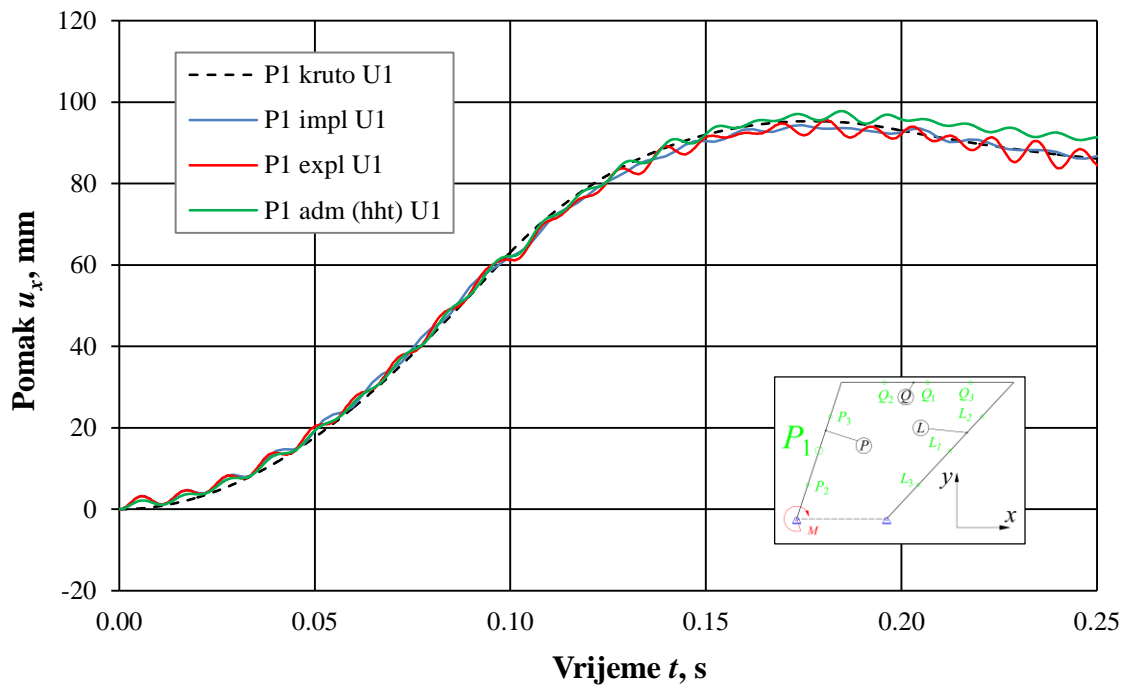
Slika 18. Pomak točke C u smjeru osi y

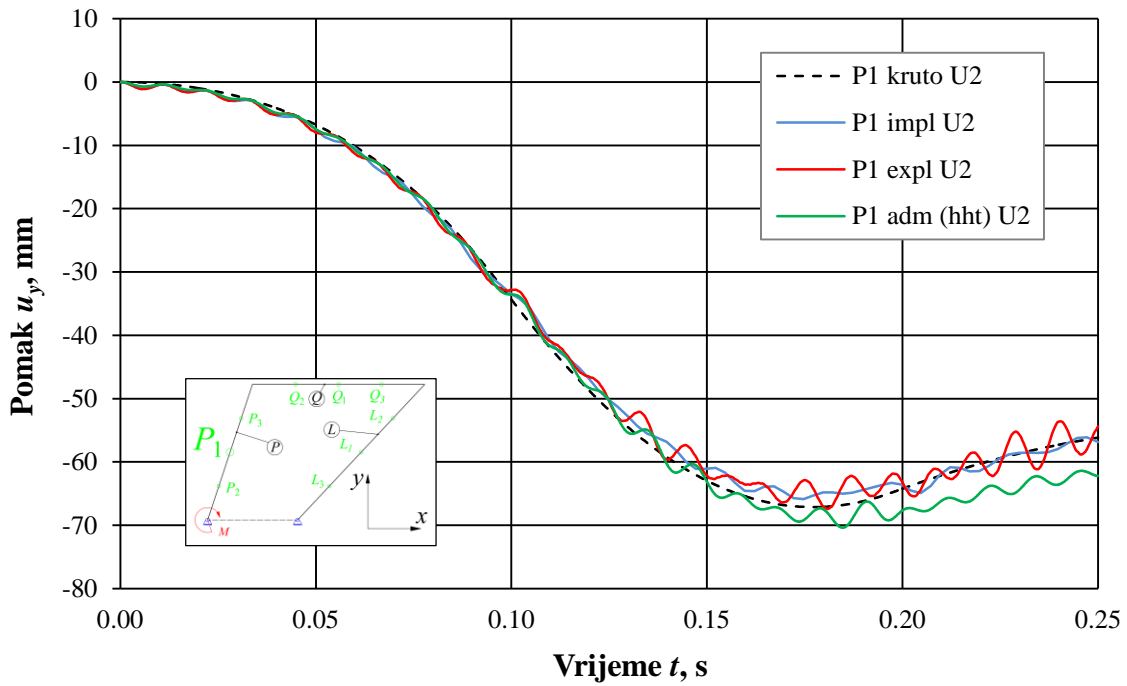
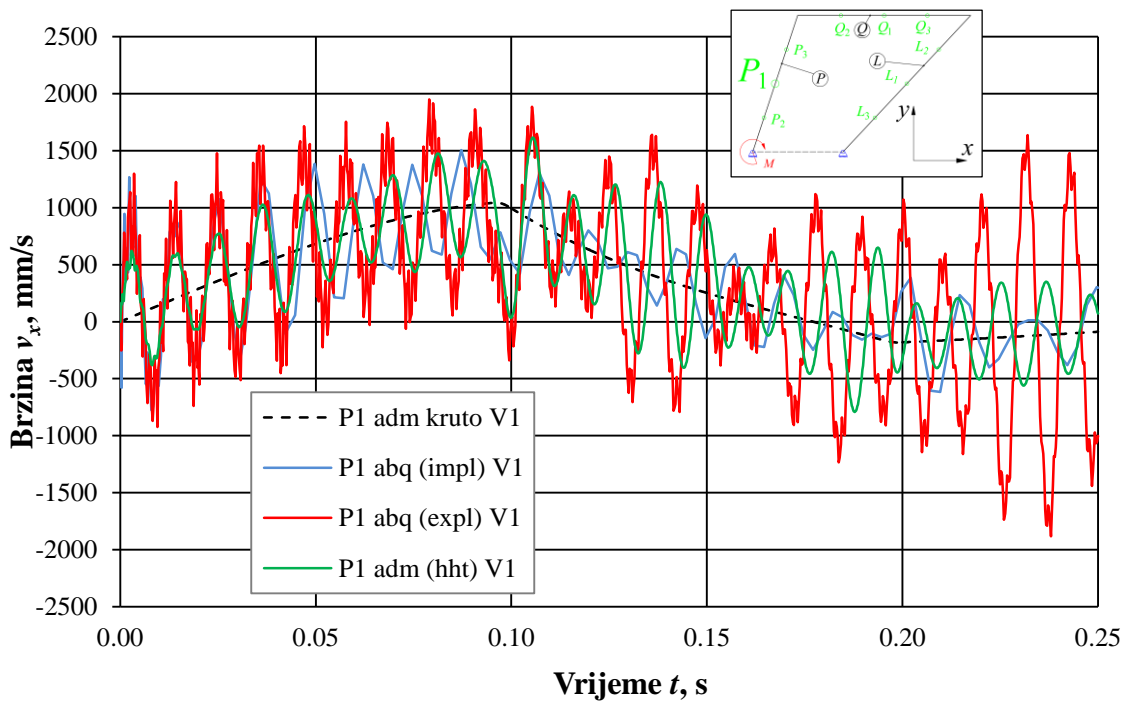


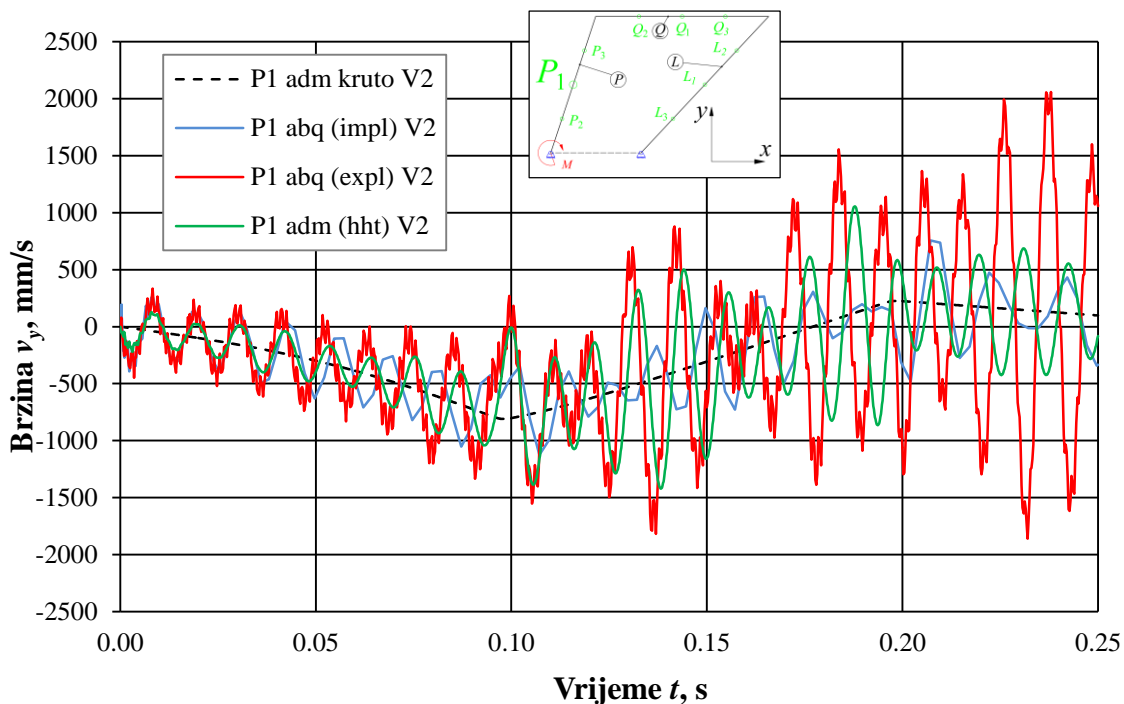
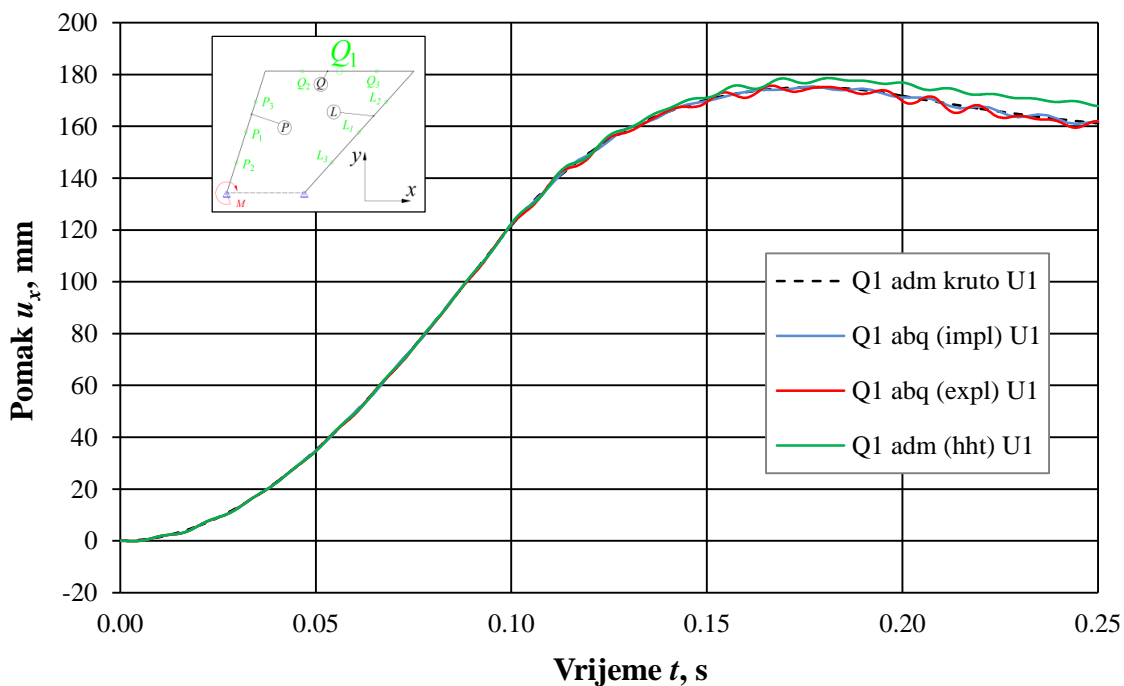
Slika 19. Brzina točke C u smjeru osi x

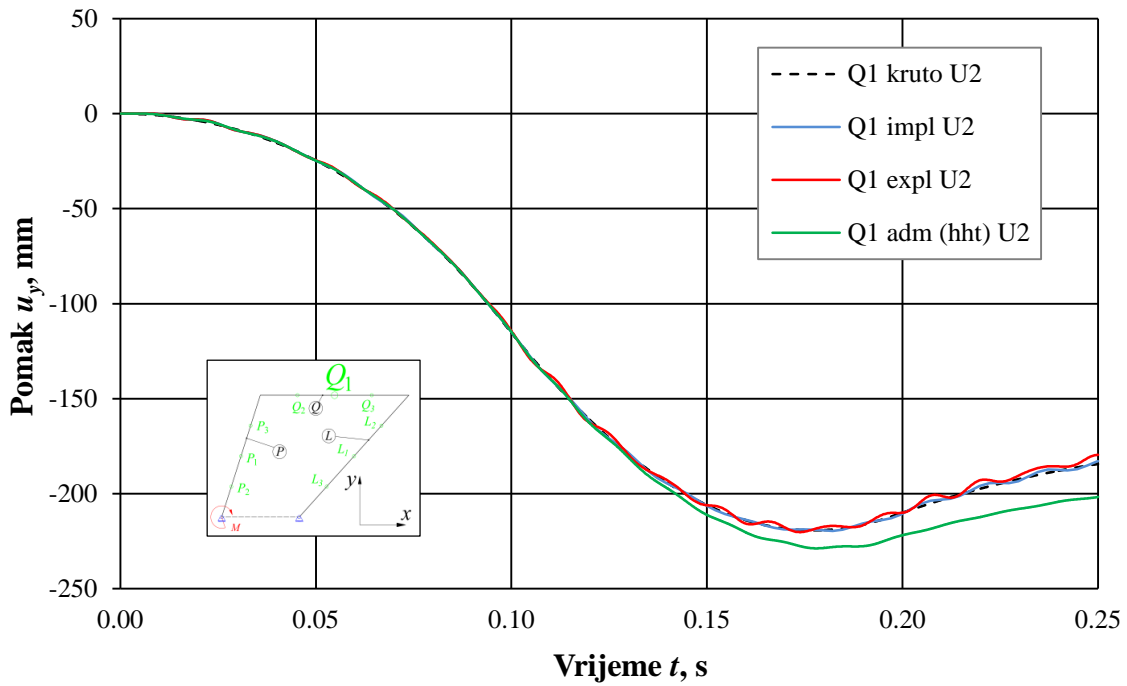
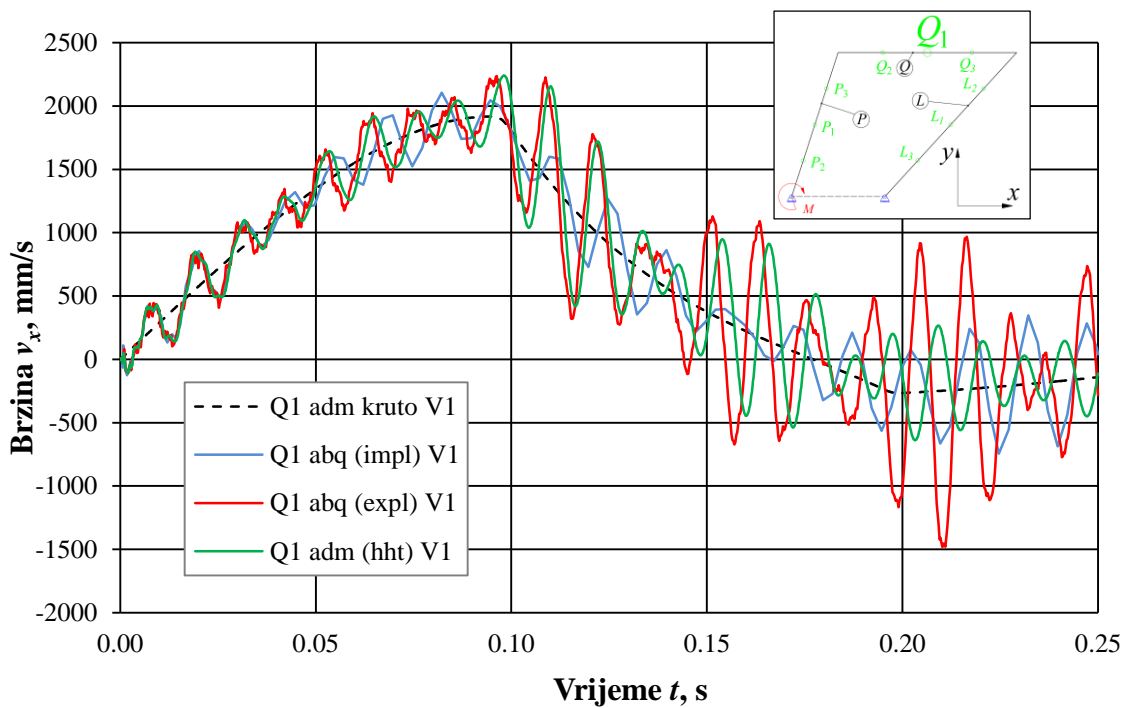


Slika 20. Brzina točke C u smjeru osi y

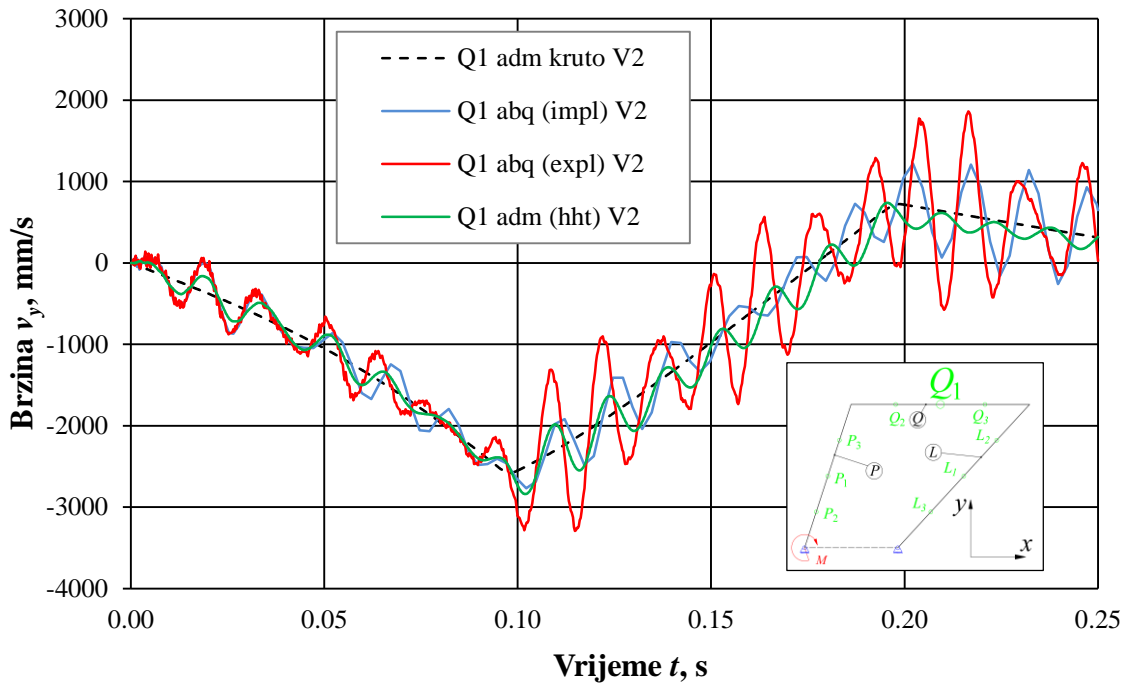
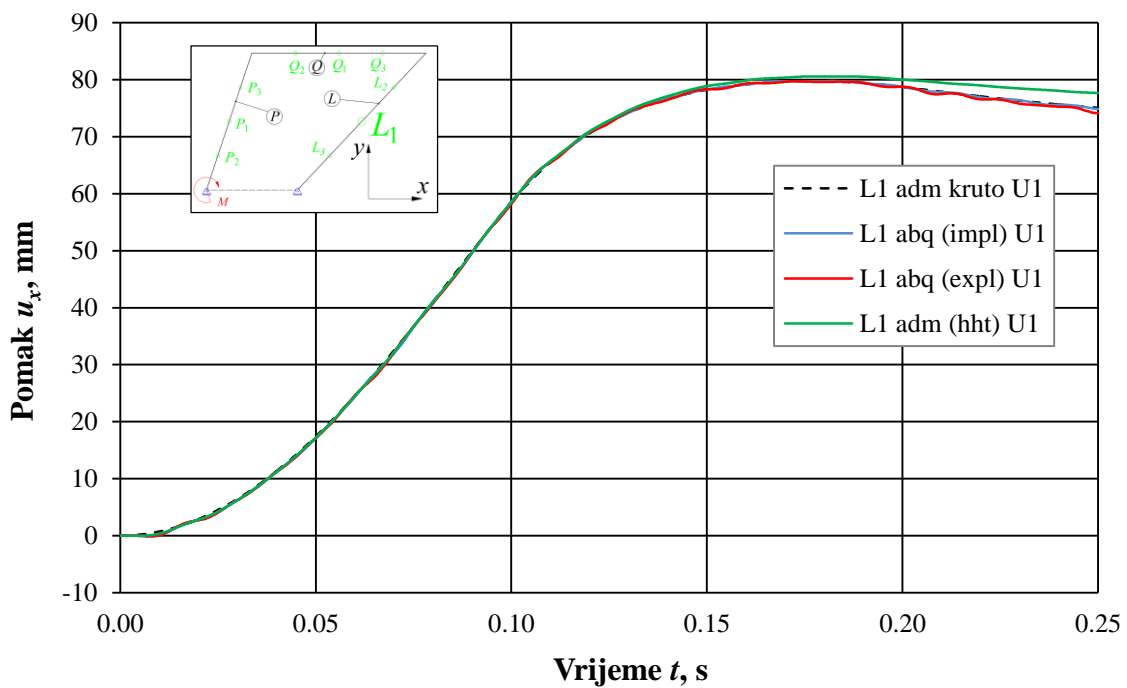
Slika 21. Pomak točke P<sub>1</sub> u smjeru osi x

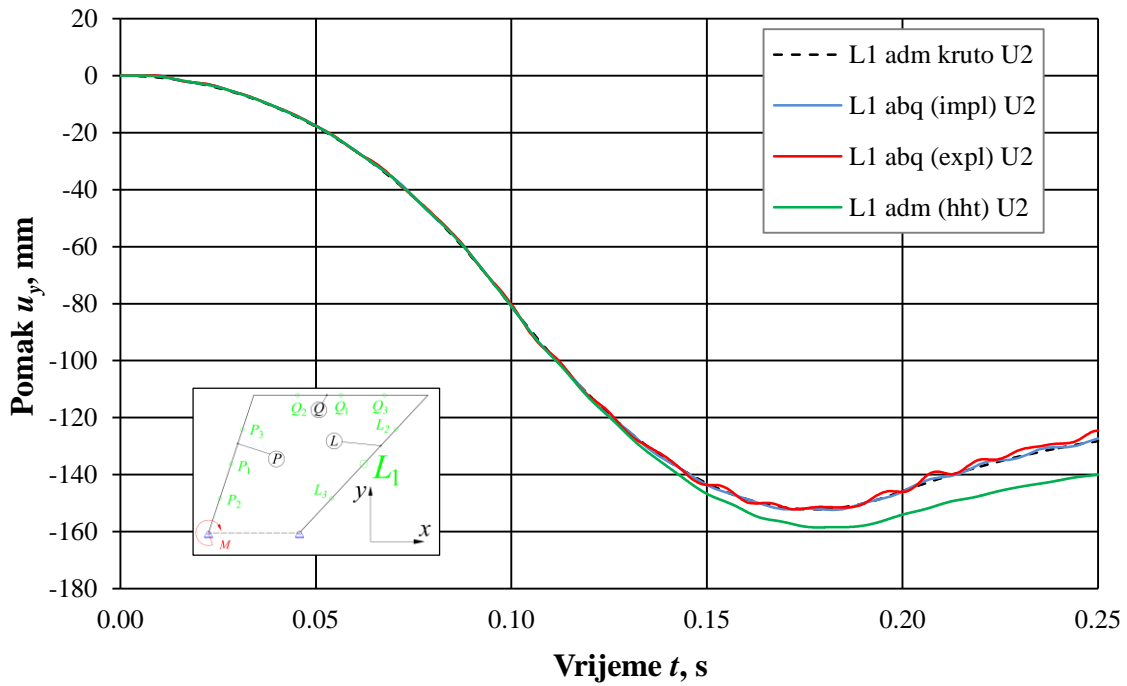
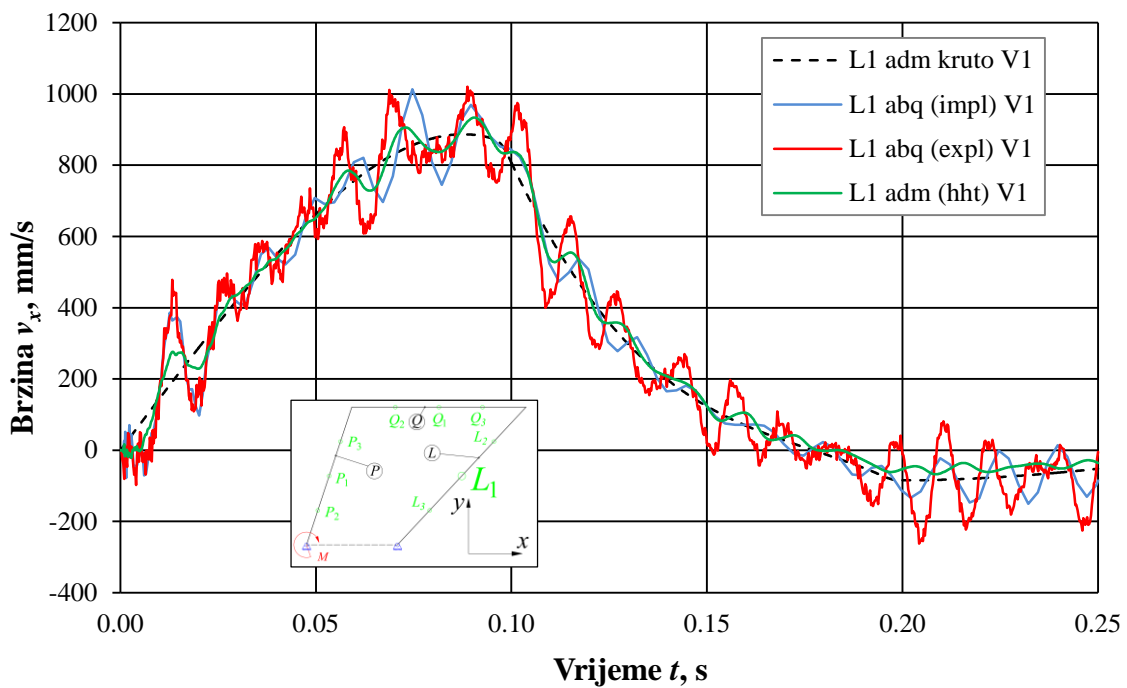
Slika 22. Pomak točke  $P_1$  u smjeru osi  $y$ Slika 23. Brzina točke  $P_1$  u smjeru osi  $x$

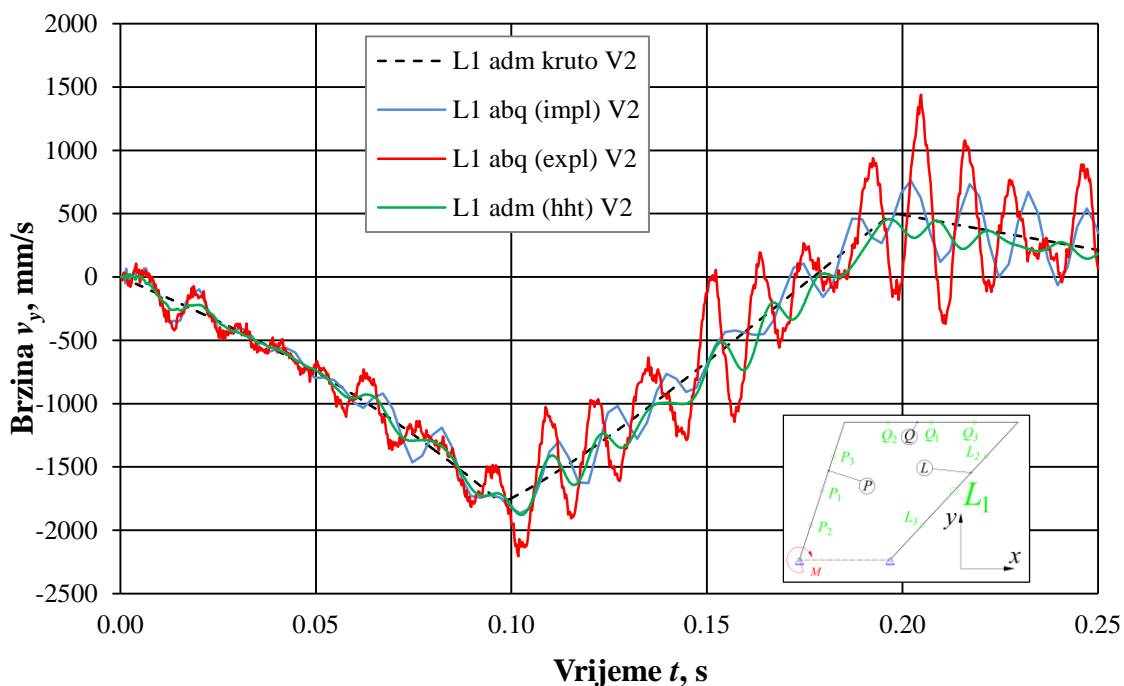
Slika 24. Brzina točke  $P_1$  u smjeru osi  $y$ Slika 25. Pomak točke  $Q_1$  u smjeru osi  $x$

Slika 26. Pomak točke  $Q_1$  u smjeru osi  $y$ Slika 27. Brzina točke  $Q_1$  u smjeru osi  $x$



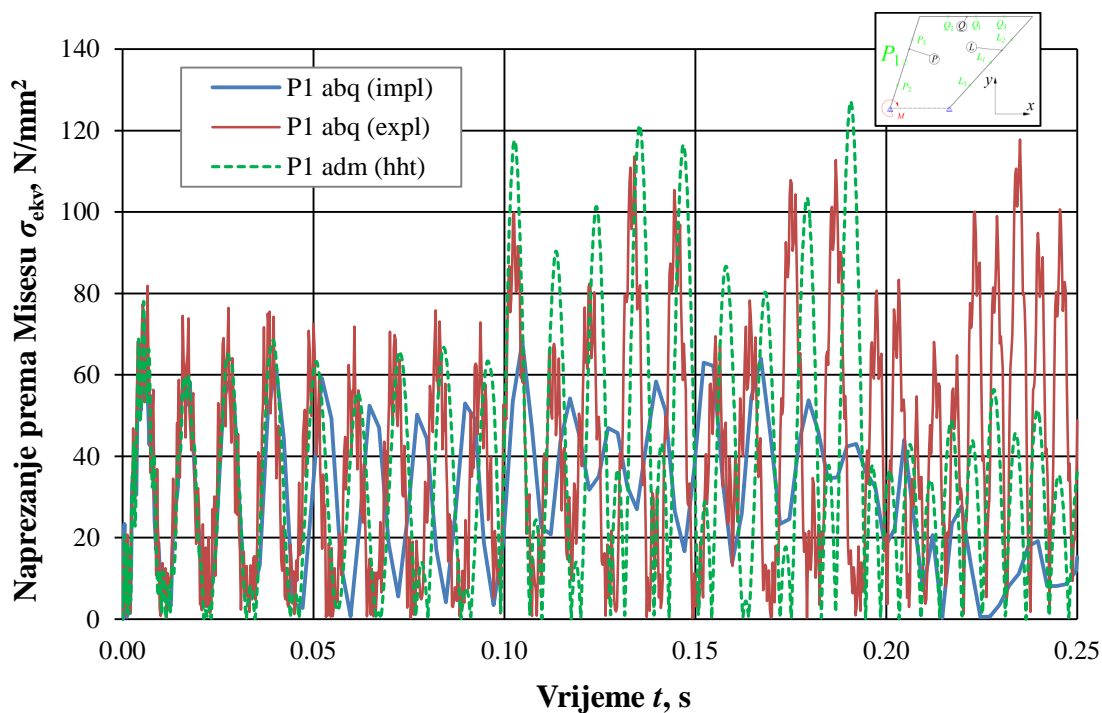
Slika 28. Brzina točke  $Q_1$  u smjeru osi  $y$ Slika 29. Pomak točke  $L_1$  u smjeru osi  $x$

Slika 30. Pomak točke  $L_1$  u smjeru osi  $y$ Slika 31. Brzine točke  $L_1$  u smjeru osi  $x$

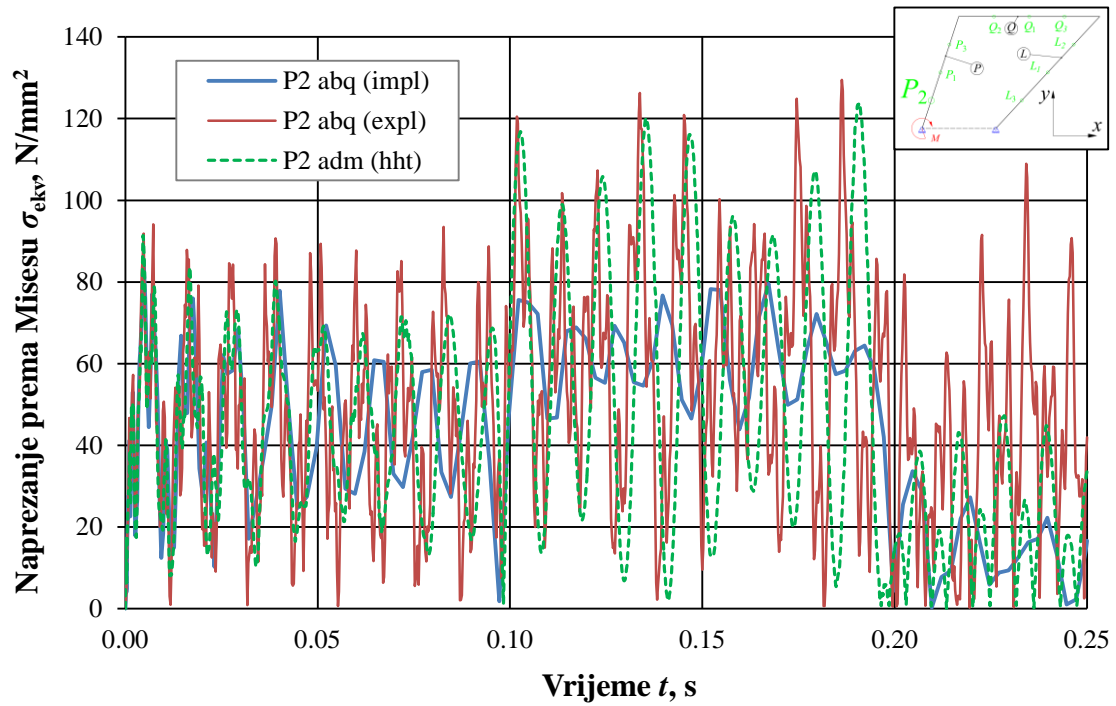
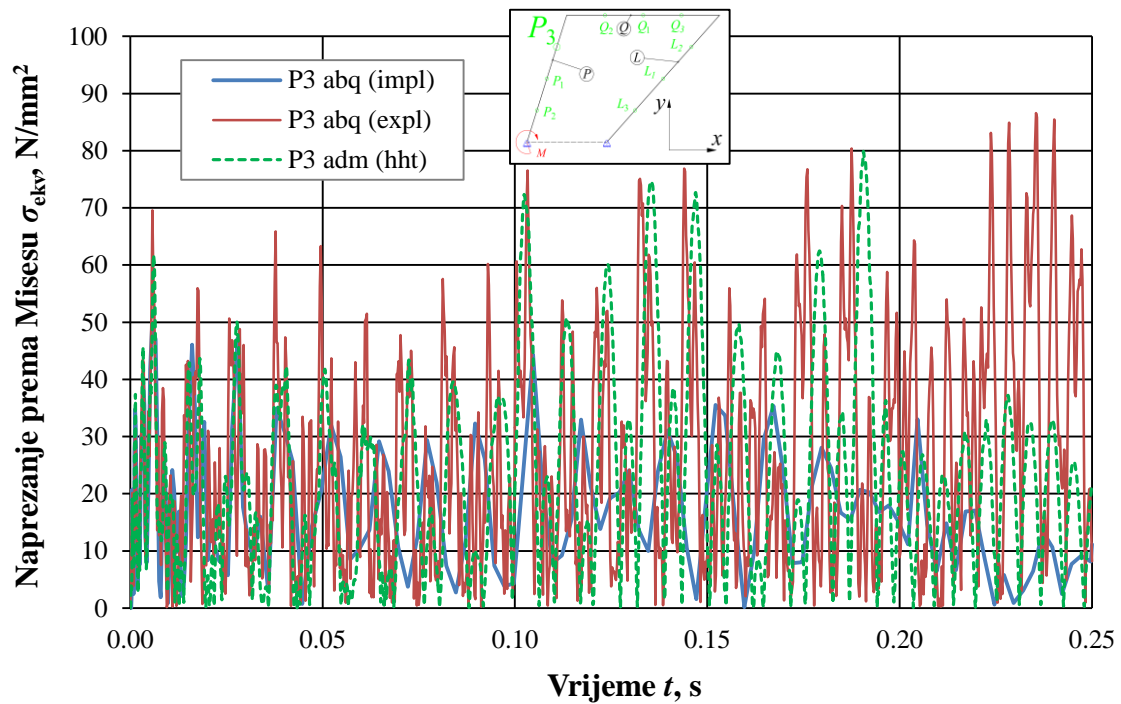


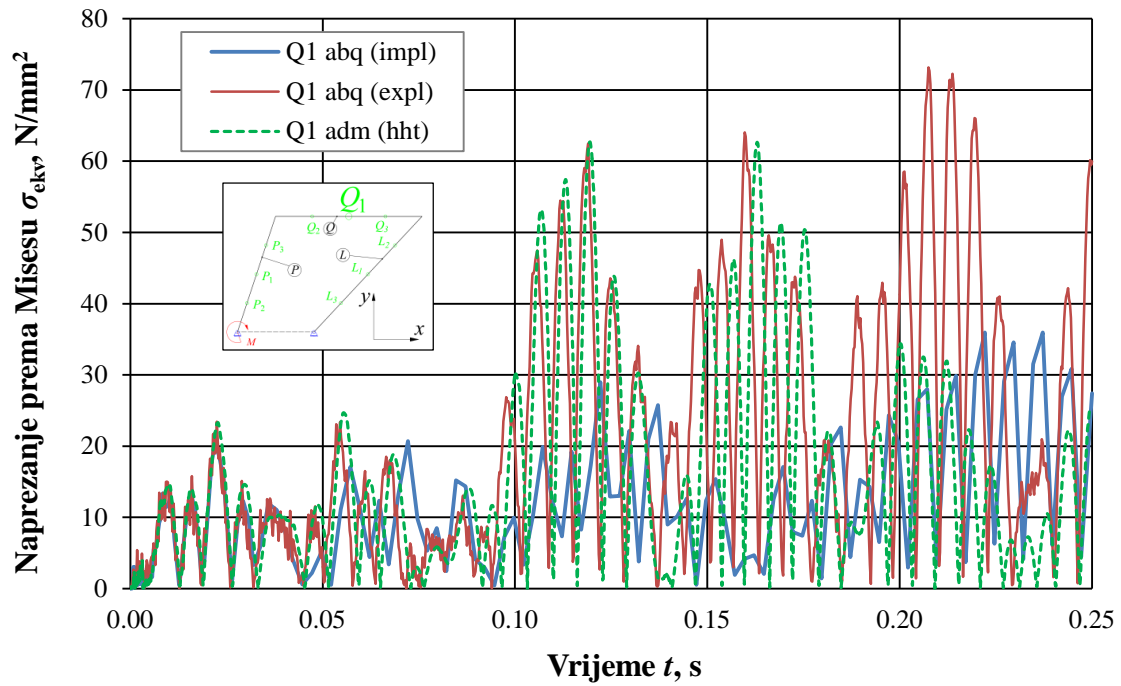
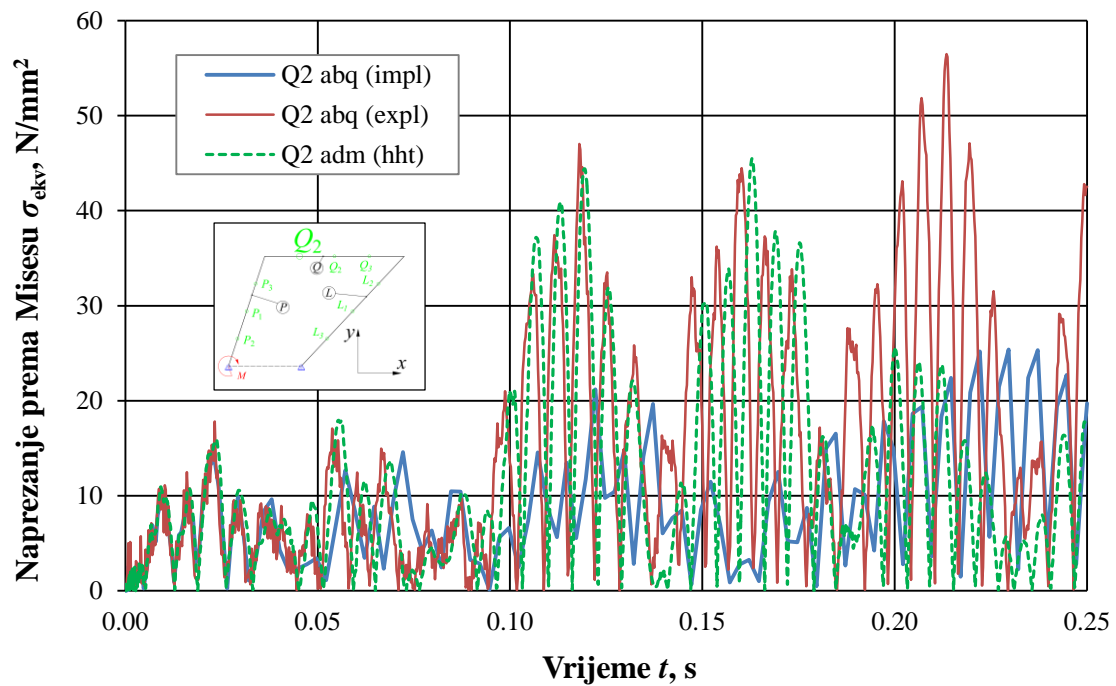
Slika 32. Brzina točke  $L_1$  u smjeru osi  $y$

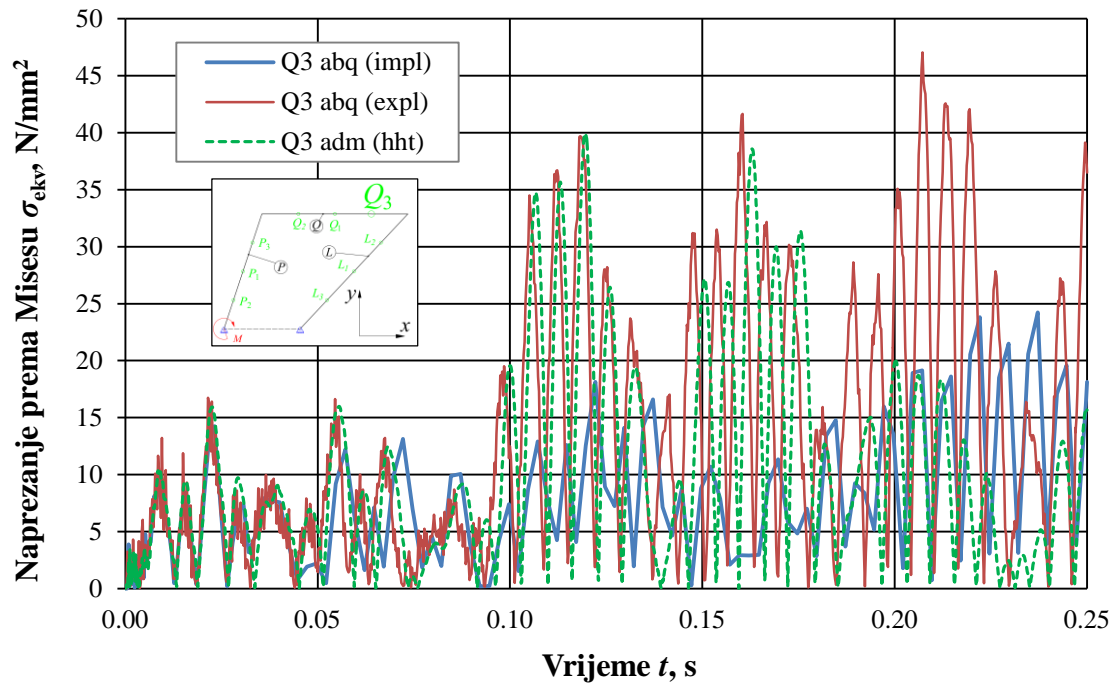
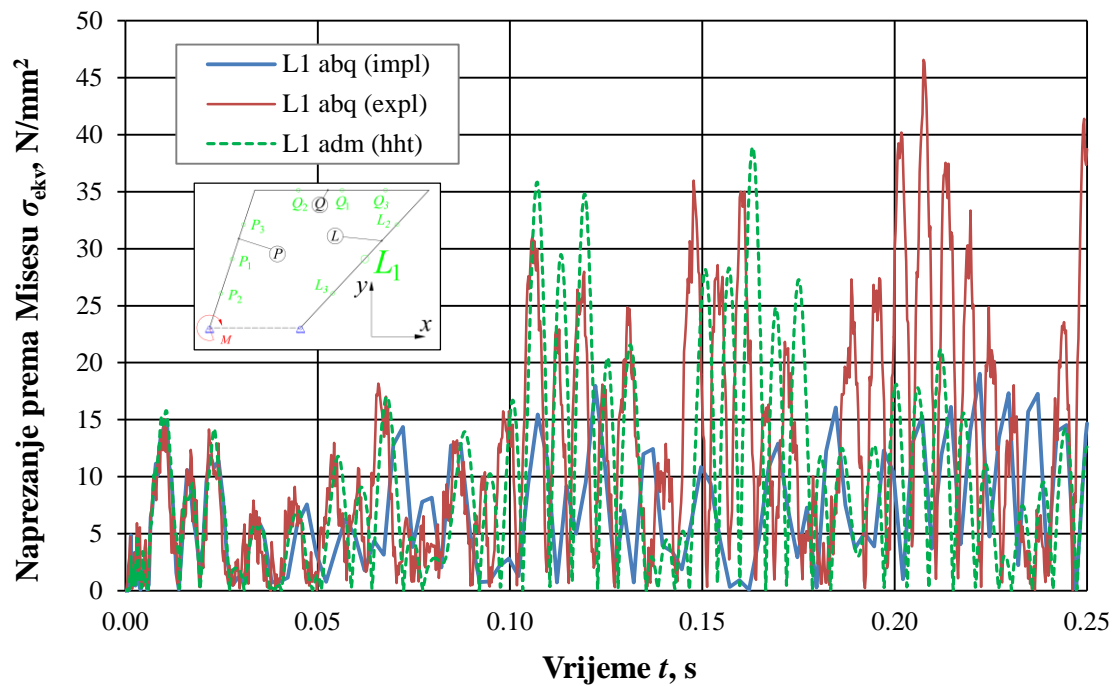
Naprezanja prema von Misesu očitana su na svakoj gredi u tri točke kako bi se prikazala čim bolja raspodjela naprezanja po dužini grede i to na  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{3}{4}$  svake grede.

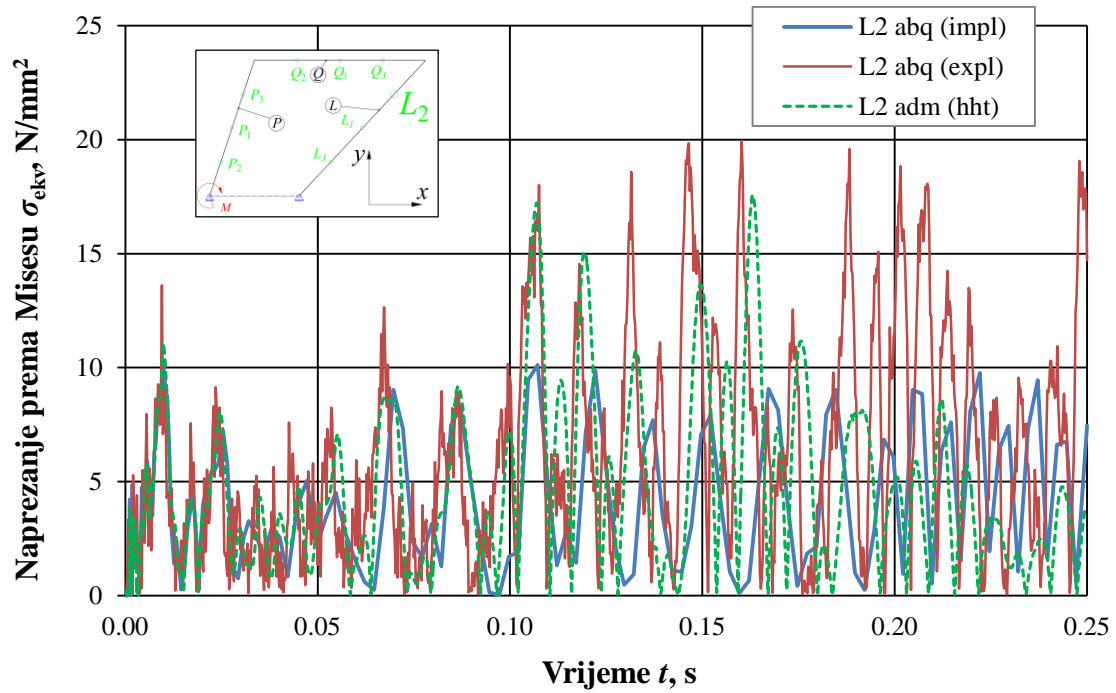
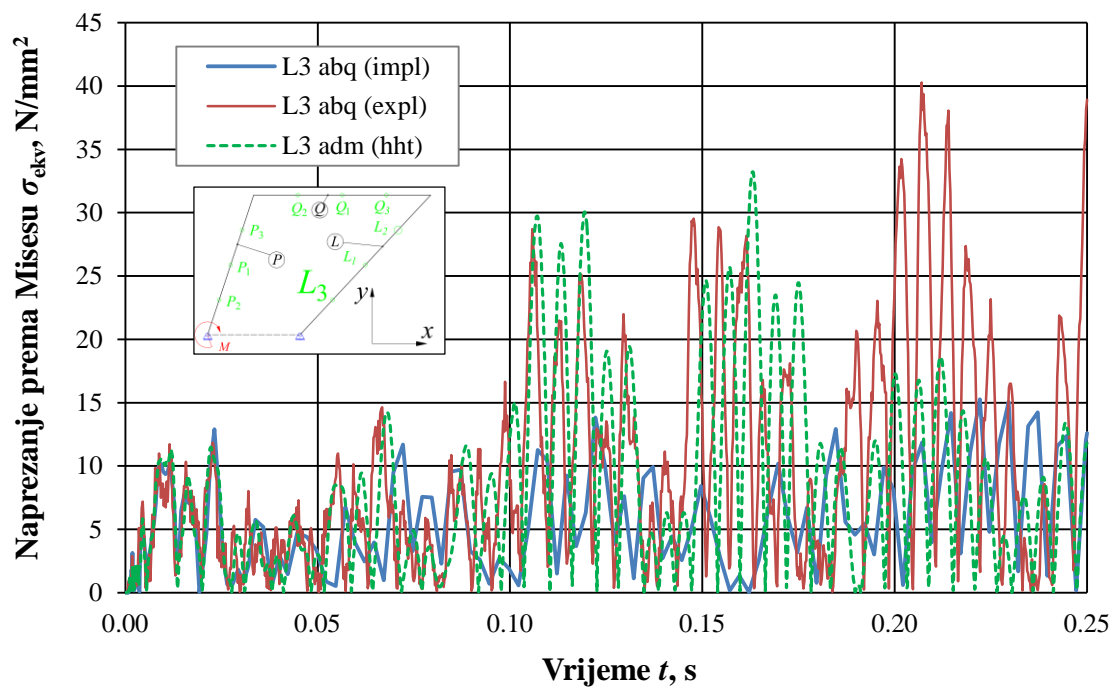


Slika 33. Naprezanja prema von Misesu u točki  $P_1$

Slika 34. Naprezanja prema von Misesu u točki  $P_2$ Slika 35. Naprezanja prema von Misesu u točki  $P_3$

Slika 36. Naprezanja prema von Misesu u točki  $Q_1$ Slika 37. Naprezanja prema von Misesu u točki  $Q_2$

Slika 38. Naprezanja prema von Misesu u točki  $Q_3$ Slika 39. Naprezanja prema von Misesu u točki  $L_1$

Slika 40. Naprezanja prema von Misesu u točki  $L_2$ Slika 41. Naprezanja prema von Misesu u točki  $L_3$

### 4.3. Zaključak analize korištenjem materijalno neprigušenog modela

Za dinamičke probleme poželjno je pratiti zakon očuvanja energije sustava, a posebno ako se razmatra sustav koji nema materijalno prigušenje (kao što je prethodno analizirani). Također, poželjno je napraviti simulaciju materijalno neprigušenih modela kako bi se vidio utjecaj odabranih parametara numeričkog prigušenja. Parametri numeričkog prigušenja biraju se ovisno o dinamičkom problemu i željenim rezultatima, a obično zahtijevaju određeno iskustvo analitičara. U ovom primjeru odabrano je jako blago numeričko prigušenje, a s obzirom da se ne razmatra utjecaj gravitacije na sustav, tj. zanemareno je ubrzanje zemljine sile teže, a time i moguća potencijalna energija sustava, može se pratiti kako se rad poopćenih vanjskih sila pretvara u kinetičku energiju i unutarnju energiju za deformabilni sustav.

Za kruti model, s obzirom da se sustav nalazi u stanju mirovanja i potpuno je zanemareno potencijalno polje zemljine sile teže, sav rad poopćenih vanjskih sila pretvara se u kinetičku energiju sustava što se može zapisati izrazom

$$W_e = E_k, \quad (95)$$

gdje je  $W_e$  rad poopćenih vanjskih sila (indeks „e“, dolazi od eng. *external* što znači vanjski), a  $E_k$  je kinetička energija sustava (indeks „k“ dolazi od eng. *kinetic*). Za takav sustav sačinjen od više krutih tijela, iz pretpostavke da je deformacija unutar pojedinog tijela  $\epsilon = 0$  i činjenice da nije prisutno prigušenje, proizlazi da je i unutarnja energija također jednaka nuli

$$E_i = 0, \quad (96)$$

gdje je  $E_i$  unutarnja energija sustava, a indeks „i“ dolazi od eng. *internal* što znači unutarnja.

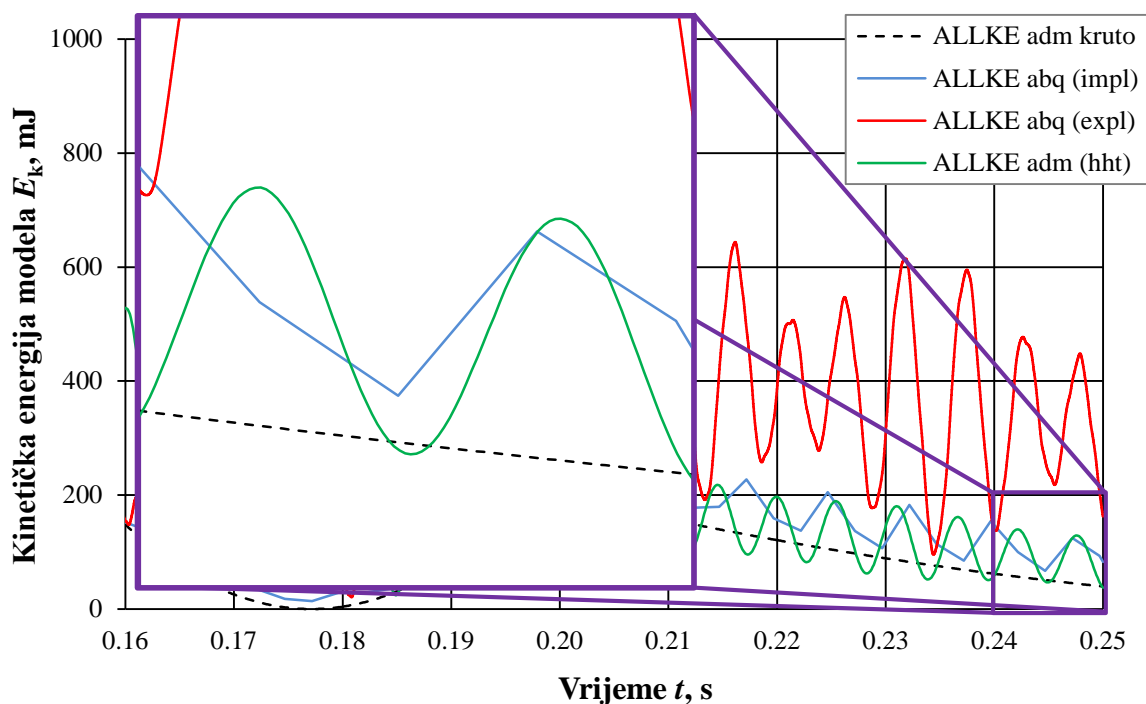
Na slikama 10., 11. i 12. jasno se vide dosadašnji zaključci. Za kruti model crnom iscrtkanom linijom na slici 10. prikazan je rad vanjskih poopćenih sila koji je identičan kinetičkoj energiji krutog modela na slici 11. Osim toga, na slici 12. vidljivo je da je unutarnja energija krutog modela jednaka nuli.

Za deformabilne modele pogledom na slike 10., 11. i 12. mogu se donijeti slijedeći zaključci. Implicitna metoda u Abaqusu i reducirani model u Adamsu koriste uvjetno rečeno isti<sup>3</sup> numerički integrator (HHT), sa istim numeričkim parametrom prigušenja i ostalim postavkama analize, stoga je i konačna energija za ta dva modela približno jednaka, jer je ukupna kinetička energija dobivena od rada vanjskih sila sa istim parametrom numeričkog

<sup>3</sup> S obzirom da su numeričke metode na kojima se zasnivaju određeni programski paketi često puta strogo čuvana tajna i svaki nije nužno potpuno isti, zaključak da se i u Abaqusu i u Adamsu koristi *isti* Hilber-Hughes-Taylorov integrator ne mora biti istina, ali za ovakav primjer u okviru akademskih razmatranja se može reći da su to isti integratori.



prigušenja, prigušena na gotovo istu razinu. Kako bi se bolje vidio odnos konačnih kinetičkih energija pojedinog modela uvećan je kraj dijagrama i prikazan na slici 42.



**Slika 42. Kinetička energija modela – uvećani dijagram**

Može se donijeti i zaključak glede rezultata eksplicitne analize. U teoretskom dijelu ovog rada spomenuto je kako eksplicitna metoda nema numeričko prigušenje i da ne računa ravnotežu kroz iterativne postupke nego *neupitno*<sup>4</sup> maršira naprijed (eng. *marshing forward*), koristeći zadnju izračunatu vrijednost dobivenu za akceleraciju u trenutku  $t$  kako bi dobila iduću nepoznatu vrijednost u trenutku  $t + \Delta t$ , čime u svakom inkrementu povećava grešku zaokruživanja. Razlika kinetičke energije, usporedi li se crvena linija (koja označava eksplicitnu analizu) na slici 42. s plavom (za implicitnu) i zelenom (za Adams HHT rješavač), na nekim dijelovima iznosi i do 3 puta više. Ta velika razlika u kinetičkoj energiji eksplicitne u odnosu na druge dvije metode ukazuje da se već akumulirao dio greške uslijed načina izvođenja eksplicitne metode.

Za deformabilni sustav, na slici 12. je vidljivo da se dio rada vanjskih sila pretvorio u energiju deformiranja, što za slučaj modela bez materijalnog prigušenja ujedno predstavlja i ukupnu unutarnju energiju sustava, pri čemu vrijedi relacija

$$W_e = E_k + E_i. \quad (97)$$

<sup>4</sup> Newton-Rhapsonov postupak temelji se na zadovoljavanju uvjeta relativne greške, a što se u programskom kodu najčešće manifestira korištenjem *if* petlje (eng. *if* znači ako) kojom se *ispituje ako je* zadovoljena rel. greška

Utjecaj numeričkog prigušenja najbolje se uočava na dijagramu za energiju unutarnjih sila, gdje se jasno vidi razlika između potpuno neprigušenog modela (eksplicitne analize) i numerički prigušenog modela (implicitne i Adams HHT analize).

Također je zanimljivo za primijetiti da moment nije konzervativna veličina. Ako se uspoređuje deformabilni sustav u odnosu na kruti, na slici 10., koja prikazuje rad poopćenih vanjskih sila, vidljivo je da je rad poopćenih vanjskih sila veći za deformabilni model, no unatoč tome i dalje vrijedi izraz (97).

Usporedbom rezultata za pomake i brzine, sve tri metode pokazale su dobre rezultate prateći trend koji opisuje kruti model. Glede apsolutnih pomaka, reducirani model korišten u Adamsu, u jednom trenutku počinje monotono odstupati od preostalih modela, što se jasno vidi prateći zelenu krivulju na dijagramima za pomake. Za eksplicitnu metodu se vidi, ako se pogleda na bilo koju kinematsku veličinu, da se akumulirana greška u kinetičkoj energiji manifestira i kroz veće pomake i brzine pojedinih točaka.

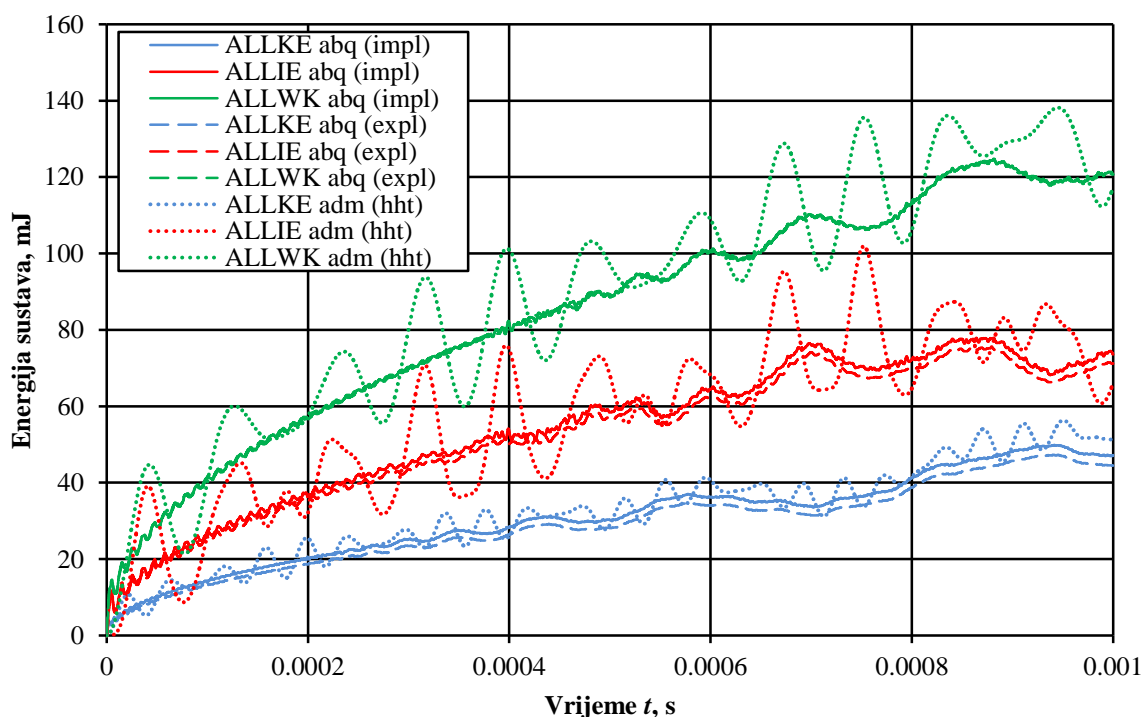
#### 4.4. Analiza s kraćim trajanjem simulacije

Provesti će se i kratka analiza u trajanju od 0,001 s, tj. sam početak prijašnje analize. Rubni uvjeti sila i pomaka identični su prijašnjem modelu. Postavke analize su nešto drugačije te su stoga vrijednosti koje su drugačije u odnosu na prošlu (dugu) analizu prikazane u tablici 12.

**Tablica 12. Postavke kratke simulacije – mali vremenski korak za sve analize**

	Abaqus		Adams
	Explicit	Implicit	HHT
Trajanje simulacije $T_s$ , s	0.001		
Korak integracije	$10^{-8}$		
Maks. broj inkremenata/iteracija	-	$10^6$	10
Dopuštena greška integracije	-	-	$10^{-5}$
Veličina početnog inkrementa	-	-	$10^{-9}$
Minimalna veličina inkrementa	-	-	$10^{-12}$
Maksimalna veličina inkrementa	-	-	$10^{-8}$

Ovako postavljenom analizom, koja traje relativno kratko, uz korištenje jako malog koraka integracije, moguće je opisati pojave kao što su propagacije vala naprezanja u elastičnim strukturama. Kao i u prethodnoj analizi, najprije će se pokazati energije sustava slikom 43.



**Slika 43. Energije sustava, ALLKE se odnosi na kinetičku energiju, ALLIE se odnosi na unutarnju energiju i ALLWK se odnosi na rad poopćenih vanjskih sila**

Tablicom 13. su prikazana vremena računanja za pojedinu gustoću mreže i parametre koji su zadani za kratku analizu (tablica 12.).

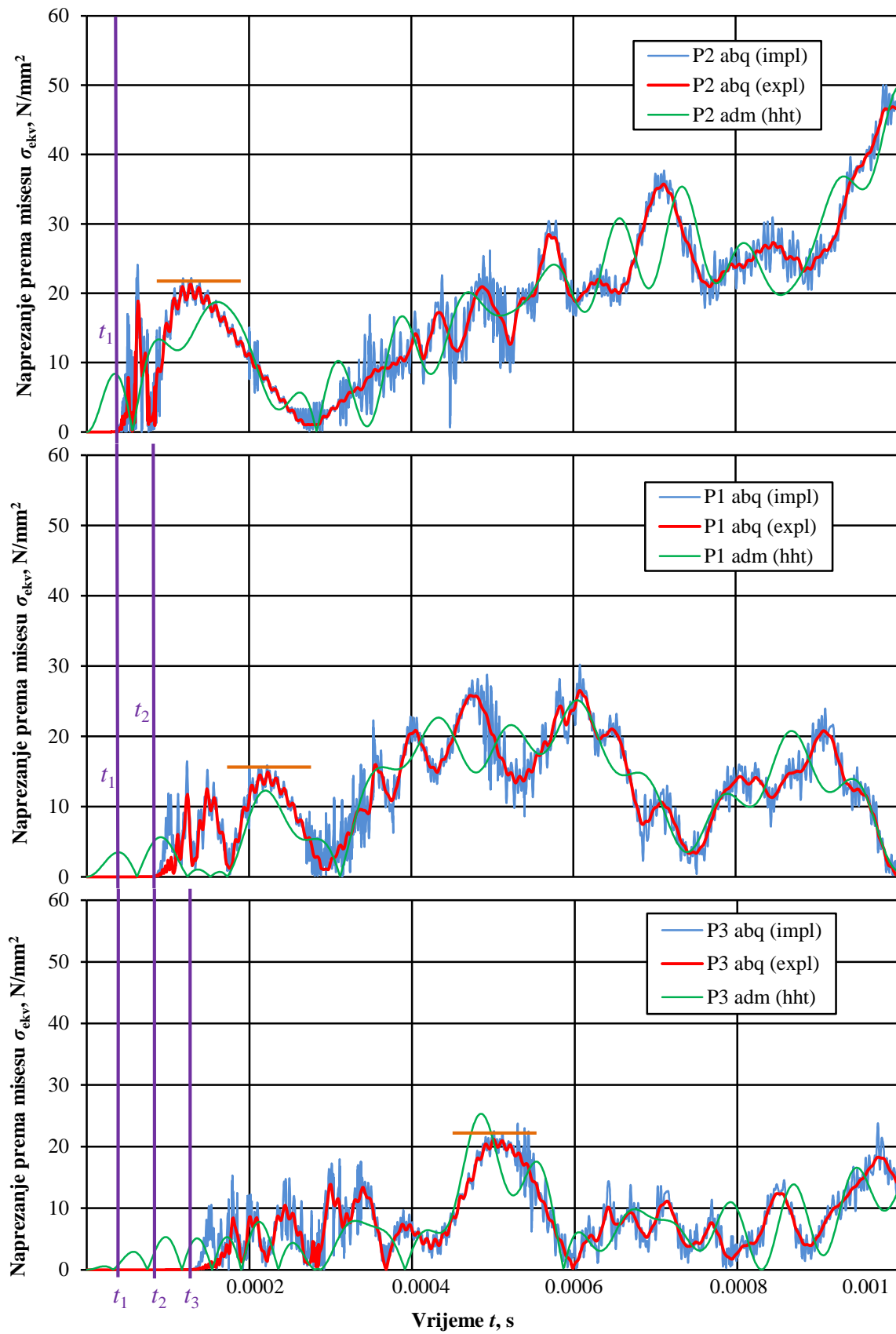
**Tablica 13. Vremena računanja za kratku analizu (postavke analize prema tablici 12.)**

	Abaqus Explicit	Abaqus Implicit	Adams HHT
	Vrijeme računanja ( <i>CPU time</i> ) $t_R$ , s		
#1-1	27,2	3169,8	-
#2-1	29,6	4085,7	-
#3-1	38,3	5876,2	-
#4-1	55,4	9551	5320,5
#1-2	30,7	-	-
#2-2	39,1	-	-
#3-2	42,1	-	-
#4-2	92,5	-	-

Prema tablici 13. se vidi praktičnost eksplicitne metode za kratke analize. Implicitni integrator s jako malim korakom gotovo da nema smisla, čak ni za kratke analize poput ove, jer se vremena računanja uvelike povećavaju što se može vidjeti i u tablici 13. Iz tog razloga nije imalo smisla ispitivati vremena računanja implicitnom metodom s mrežama grednih elemenata drugog reda.

Iz rezultata za energije vidljivo da je u početku, dok val naprezanja putuje kroz konstrukciju, energija deformiranja za model veća od kinetičke energije. To se objašnjava na način da se konstrukcija svojim oblikom i inercijom oduprla gibanju, a lokalno se deformira.

Na idućoj stranici, slikom 44., su prikazani rezultati za propagaciju vala kroz deformabilnu gredu  $P$  na koju je dodijeljen pogonski moment u zglobu  $A$ . Kako bi se bolje prikazala propagacija udarnog vala kroz gredu u točkama  $P_2$ ,  $P_1$  i  $P_3$  mjere se naprezanja prema von Misesu. Gledajući od točke  $P_2$  koja se nalazi na  $\frac{1}{4}$  grede, mjereno od zgloba  $A$  i na koju val prvo nailazi, vidi se da do trenutka  $t_1$  za eksplicitni i implicitni model dobiven u Abaqusu u točki  $P_2$  nema naprezanja. U trenutku  $t_2$  val je dostigao do točke  $P_1$  koja se nalazi na  $\frac{1}{2}$  grede. U trenutku  $t_3$  val je gotovo prošao cijelu gredu jer se već nalazi u točki  $P_3$  koja je na  $\frac{3}{4}$  grede. Slika 44. također pokazuje da za dovoljno mali korak implicitna i eksplicitna metoda daju gotovo iste rezultate i dobro poklapanje u cijeloj vremenskoj domeni. Za probleme propagacije treba dovoljno gusta mreža kako bi se čim bolje opisalo polje deformacija i naprezanja. Reducirani model korišten u Adamsu ne opisuje dobro konkretni problem.



Slika 44. Propagacija vala unutar deformabilnog tijela

## 5. Zaključak

U radu je provedena nelinearna numerička analiza dinamičkog odziva sustava deformabilnih tijela koji se sastoji od tri međusobno povezane deformabilne grede. Provedeno je više analiza, a koristeći načelno različite programske pakete koji se temelje na drugačijim metodama, čiji su rezultati uspoređeni. Rezultati su pokazali prednosti i nedostatke pojedine metode te primjenjivost metoda za određene dinamičke probleme.

Eksplicitna metoda u Abaqusu pokazala se kao dosta robusna metoda što opravdava da je često puta prva preporučena opcija, iako uvidom u teoretsku pozadinu, ali i rezultate riješenog primjera vidi se da je metoda uvjetno stabilna i primjenjiva samo za relativno kratke simulacije. Eksplicitna metoda pokazala je tendenciju akumulacije greške integracije s obzirom da ne provodi iteraciju kako bi zadovoljila uvjet ravnoteže u svakom vremenskom inkrementu.

Implicitna metoda u Abaqusu je, za razliku od eksplicitne metode, bezuvjetno stabilna te može poslužiti za rješavanje dužih dinamičkih analiza s relativno grubom diskretizacijom vremenske domene. Također može poslužiti i za rješavanje kvazi statičkih problema u kojima je od interesa računanje rješenja u eventualno par točaka vremenske domene analize i dobivanja konačnog rješenja. Metoda se pokazala pogodna za rješavanje problema diskretiziranih konačnim elementima jer posjeduje određeno numeričko prigušenje koje anulira utjecaj visokih frekvencija koje su česta pojava koja nastaje kao posljedica diskretizacije.

Korištenjem koncepta dinamike sustava više tijela u Adamsu su korišteni reducirani modeli pojedinih deformabilnih tijela kako si se provela računalna analiza. Rješenja su unatoč izrazito maloj računalnoj zahtjevnosti pokazala dobro poklapanje sa ostale dvije metode. Ova metoda bi svakako mogla poslužiti kao preliminarna analiza kojom bi se mogao razmotriti utjecaj pojedinih deformabilnih tijela na ukupni dinamički odziv te za procjenu može li se sustav eventualno modelirati kao sustav krutih tijela, čime bi se dodatno uštedilo na vremenu računanja.

Osim računalne simulacije u radu je detaljno opisana teorija na kojoj se temelje korišteni programski paketi te je dan pregled korištene literature koja je poslužila za dodatno izučavanje problematike nelinearnih problema i dinamike deformabilnih tijela. Prikazani su i

algoritmi koji su implementirani u programske pakete. U nastavku ovog poglavlja ukratko će se dati zaključak svakog od obrađenih poglavlja.

U uvodnom poglavlju rada ukratko je objašnjena problematika primijenjene dinamike te je stavljen naglasak na računalnu dinamiku deformabilnih sustava više tijela (eng. *flexible multibody dynamics*).

U drugom poglavlju rada opisana je teorija vezana za računalnu dinamiku deformabilnih tijela. Težnja pri pisanju teoretskog dijela bila je da se na jednostavan način obuhvate svi aspekti dinamičkih problema, a naglasak je stavljen na nelinearnost te način na koji se rješavaju nelinearni problemi numeričkim metodama. Stoga je dan je pregled i opis korištenih algoritama, uključujući formulaciju problema dinamike deformabilnih tijela korištenjem metode konačnih elemenata izvedene na teoriji velikih pomaka, zatim problema dinamike sustava više tijela te metode redukcije reda modela pojedinih članova sustava.

U trećem poglavlju ukratko su opisani korišteni, komercijalno dostupni, programski paketi Abaqus i Adams. Dva navedena programska paketa osmišljena su da rješavaju potpuno drugačije probleme; Abaqus za rješavanje strukturalnih problema čvrstoće, a Adams za rješavanje problema dinamike sustava više krutih tijela. S razvojem računala i računalnih metoda oba programa proširila su prostor rješavanja dinamičkih problema te su se „preklopila“ upravo u području računalne dinamike deformabilnih tijela. Radom su uspoređene dvije metode, a time i dva korištena programska paketa.

U četvrtom poglavlju provedena je numerička analiza dinamičkog odziva mehanizma s tri grede koje su modelirane kao deformabilne. Grede diskretizirane konačnim elementima korištene su u programskom paketu Abaqus te u programskom paketu Adams kao reducirani modeli. Programski paketi i pojedine korištene metode pokazale su dobro međusobno poklapanje rezultata. S obzirom na ograničeno vrijeme za izradu ovog rada, bilo je potrebno osmisliti numerički primjer na kojem bi se moglo čim vjernije usporediti pojedini programski paket. Također, s obzirom na nedostatak analitičkih izraza i eksperimentalnih podataka nije provedena verifikacija i validacija numeričke metode. Iz tog razloga na rezultate treba gledati strogo i kritički. Ideja za nastavak rada bilo bi provesti određeni eksperiment i/ili osmisliti testni primjer (eng. *benchmark*) koji bi poslužili za validaciju i verifikaciju korištenih numeričkih procedura.

U posljednja tri poglavlja koja se nalaze u nastavku kako dodaci, ukratko je dan pregled osnovnih izraza mehanike kontinuuma, modeliranja prigušenja i frekvencijske analize.

## 6. Dodatak A: Osnovne veličine mehanike kontinuuma

S obzirom da se pri formulaciji rješenja za nelinearne dinamičke probleme koriste izrazi iz mehanike kontinuuma u ovom poglavlju dan je pregled osnovnih korištenih izraza.

Osnovna veličina mehanike kontinuuma je tenzor gradijenta deformiranja, kojim se opisuje rotacija i produljenje dijela kontinuuma, a koji je definiran na sljedeći način

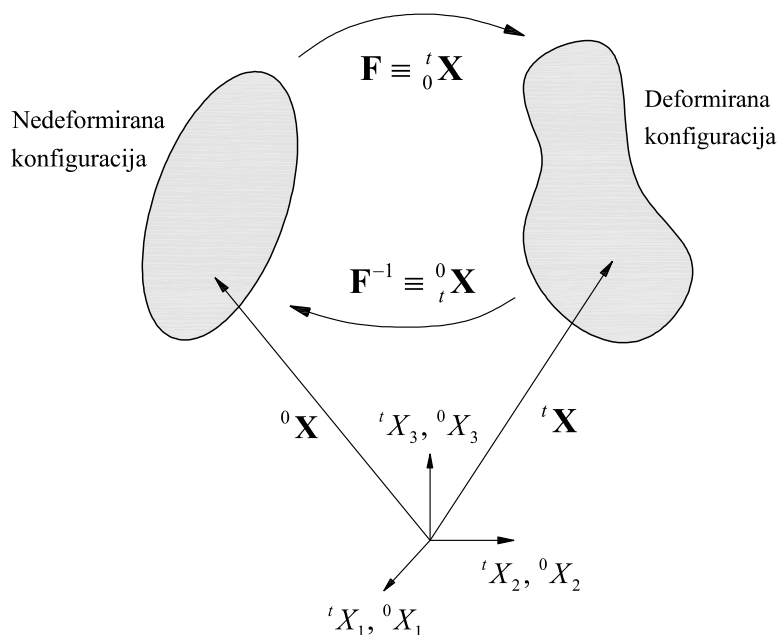
$$\mathbf{F} = {}^t_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_3} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

gdje su  ${}^t x_i$  koordinate u trenutnoj konfiguraciji označene vremenom  $t$  i  ${}^0 x_j$  koordinate u početnoj konfiguraciji označene vremenom  $t = 0$ .

Za tenzor gradijenta deformiranja vrijedi

$$\mathbf{F}^{-1} = ({}^t_0\mathbf{X})^{-1} = {}^0_t\mathbf{X}. \quad (\text{A.2})$$

Značenje tenzora gradijenta deformiranja i njegovog inverza prikazano je slikom 45.



**Slika 45. Geometrijska interpretacija tenzora gradijenta deformiranja**

Gustoća u trenutnoj konfiguraciji može se definirati kao



$${}^t\rho = \frac{{}^0\rho}{\det \mathbf{F}}. \quad (\text{A.3})$$

Za mjerenje deformiranosti koriste se desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti

$${}^t_0\mathbf{C} = {}^0\mathbf{X}^T {}^t_0\mathbf{X} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (\text{A.4})$$

te lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti

$${}^t_0\mathbf{C} = {}^0\mathbf{X} {}^t_0\mathbf{X}^T = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (\text{A.5})$$

Važno svojstvo tenzora gradijenta deformiranja je da se može rastaviti na umnožak dvaju tenzora, od kojih je jedan simetričan i naziva se desni tenzor izduženja  ${}^t_0\mathbf{U}$ , a drugi ortogonalan tenzor i naziva se tenzor rotacije  ${}^t_0\mathbf{R}$

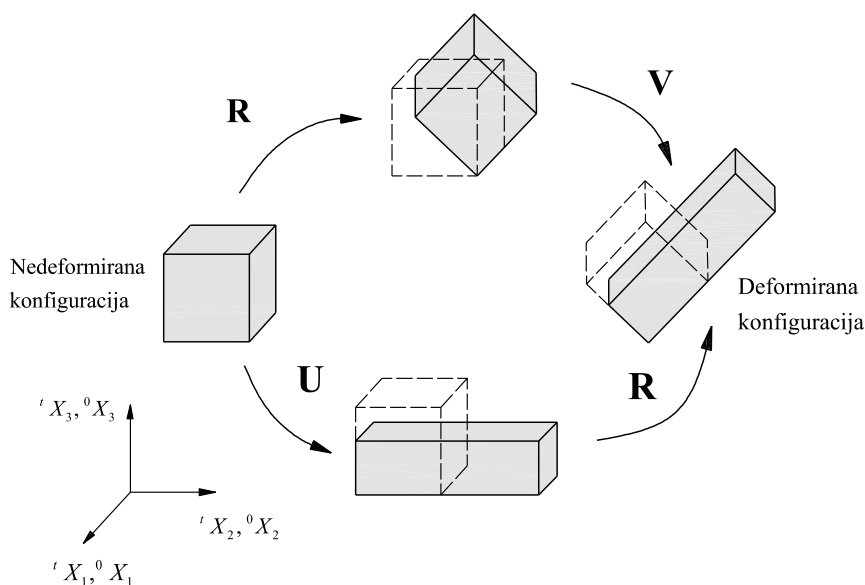
$${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{R} {}^t_0\mathbf{U}. \quad (\text{A.6})$$

Taj se postupak naziva polarna dekompozicija tenzora gradijenta deformiranja i može se primijeniti tako da vrijedi i sljedeće

$${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{V} {}^t_0\mathbf{R}. \quad (\text{A.7})$$

gdje je  ${}^t_0\mathbf{V}$  lijevi tenzor izduženja.

Geometrijska interpretacija jednadžbi (A.6) i (A.7) dana je na slici 46.



**Slika 46. Polarno razlaganje tenzora gradijenta deformiranja**

Tenzor gradijenta brzine deformiranja definiran je kao gradijent trenutnog polja brzine u odnosu na trenutnu konfiguraciju materijalnih točaka

$$\mathbf{L} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^t x_j} = \dot{\mathbf{X}} \mathbf{X}^{-1}, \quad (\text{A.8})$$

a može se rastaviti na simetrični dio  $\mathbf{D}$  koji predstavlja tenzor brzine deformacije i koso simetrični dio  $\mathbf{W}$  koji se zove tenzor vrtloženja

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}. \quad (\text{A.9})$$

Tenzor deformacija koji je bitan za metodu konačnih elemenata je Green-Lagrangeov tenzor deformacije koji je definiran s

$${}^t_0\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (\text{A.10})$$

gdje je  $\mathbf{I}$  jedinični tenzor, ili preko pomaka kao

$${}^t_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}). \quad (\text{A.11})$$

Green-Lagrangeov tenzor deformacije definiran je u početnoj konfiguraciji i predstavlja potpuni tenzor deformacija (nisu zanemareni viši članovi). Također je bitno uočiti da Green-Lagrangeov tenzor deformacije ne ovisi o pomacima krutog tijela, što ga čini pogodnim za izvod konačnih elemenata za opisivanje velikih pomaka i rotacija.

Izrazi koji će se koristiti pri izvodu konačnih elemenata za velike pomake i rotacije, a koji dovode u vezu  ${}^t\mathbf{D}$  i  ${}^t_0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  su

$${}^t_0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^t_0\mathbf{X}^T {}^t\mathbf{D} {}^t_0\mathbf{X} = \frac{1}{2}({}^t_0\dot{\mathbf{X}}^T {}^t_0\mathbf{X} + {}^t_0\mathbf{X}^T {}^t_0\dot{\mathbf{X}}), \quad (\text{A.12})$$

te

$${}^t\mathbf{D} = {}^0_t\mathbf{X}^T {}^t_0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} {}^t_0\mathbf{X}. \quad (\text{A.13})$$

Tenzor naprezanja koji je energetski konjugiran s Green-Lagrangeovim tenzorom deformacija je drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja  ${}^t_0\mathbf{S}$ . Ako se pretpostavi snaga naprezanja (eng. *stress power*) po jediničnom volumenu  ${}^tJ {}^t\boldsymbol{\tau} \cdot {}^t\mathbf{D}$ , gdje je  ${}^t\boldsymbol{\tau}$  Cauchyev tenzor naprezanja, a  ${}^tJ = \det {}^t_0\mathbf{X}$ , onda se drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja može dovesti u vezu sljedećim izrazom

$${}^tJ {}^t\boldsymbol{\tau} \cdot {}^t\mathbf{D} = {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}^t_0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (\text{A.14})$$

te nakon sređivanja se može izraziti drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja

$${}^t_0\mathbf{S} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0_t\mathbf{X} {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t_0\mathbf{X}^T, \quad (\text{A.15})$$

odnosno Cauchyev tenzor

$${}^t\boldsymbol{\tau} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^t_0\mathbf{X} {}^t_0\mathbf{S} {}^t_0\mathbf{X}^T. \quad (\text{A.16})$$

Izraz koji povezuje silu  $d^t \mathbf{T}$  koja djeluje na površinu  $d^t S$  u trenutku  $t$  može se izraziti preko Cauchyve formule

$$d^t \mathbf{T} = {}^t \boldsymbol{\tau}^T {}^t \mathbf{n} d^t S. \quad (\text{A.17})$$

Osim toga poslužit će i Nansonova formula

$${}^t \mathbf{n} d^t S = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 \mathbf{X}^T {}^0 \mathbf{n} d^0 S. \quad (\text{A.18})$$

## 7. Dodatak B: Modeliranje prigušenja

### 7.1. Slobodne prigušene vibracije sustava s jednim stupnjem slobode

Modeliranje prigušenja počinje od razmatranja jednadžbe dinamičke ravnoteže bez vanjske uzbudne sile, odnosno razmatra se

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0, \quad (\text{B.1})$$

čije rješenje daje vlastitu kružnu frekvenciju prigušenih vibracija

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}, \quad (\text{B.2})$$

a samo prigušenje se mijenja u granicama

$$0 < c < c_{kr}, \quad (\text{B.3})$$

gdje je  $c_{kr}$  kritično prigušenje definirano izrazom

$$c_{kr} = 2m\omega = 2\sqrt{km}, \quad (\text{B.4})$$

a prije spomenuti  $\xi$  omjer prigušenja koji predstavlja unutarnje, Columbovo trenje u mehaničkim vezama, definiran kao

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}}, \quad (\text{B.5})$$

Kod analiza deformabilnih konstrukcija omjer prigušenja kreće se najčešće u granicama

$$0 \leq \xi \leq 0,15. \quad (\text{B.6})$$

a obično je između 1 i 5% i pri takvom odabiru je  $\omega_d \approx \omega$ .

### 7.2. Modeliranje prigušenje u metodi konačnih elemenata

U jednadžbi prigušenog gibanja sustava konačnih elemenata

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{R}(t), \quad (\text{B.7})$$

član  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{V}}$  u pravilu ima ukupni udio u jednadžbi, naspram drugih članova, manji od 10%.

U metodi konačnih elemenata prigušenje se modelira na dva načina

- proporcionalno prigušenje (Rayleighovo prigušenje)
- modalno prigušenje

#### 7.2.1. Proporcionalno prigušenje

Kod ovakvog načina modeliranja matrica prigušenja nema fizikalno značenje, a definirana je s

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K}, \quad (\text{B.8})$$

gdje su  $\alpha_R$  i  $\beta_R$  konstante Rayleighovog prigušenja koje se određuju eksperimentalno.

Konstante  $\alpha_R$  i  $\beta_R$  mogu se odrediti pomoću

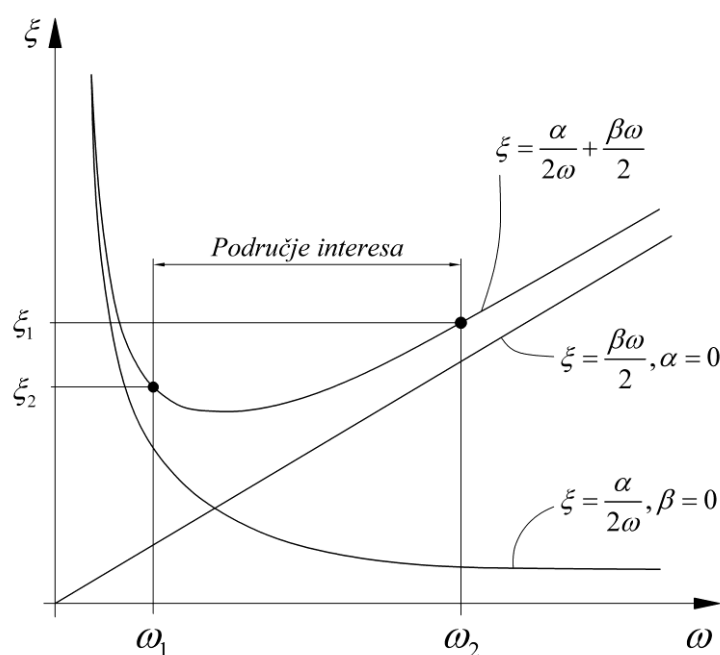
$$\xi_1 = \frac{\alpha_R}{2\omega_1} + \frac{\beta_R \omega_1}{2}, \quad (\text{B.9})$$

i

$$\xi_2 = \frac{\alpha_R}{2\omega_2} + \frac{\beta_R \omega_2}{2}, \quad (\text{B.10})$$

gdje su  $\omega_1$  i  $\omega_2$  vlastite frekvencije sustava, a  $\xi_1$  i  $\xi_2$  omjeri prigušenja dvaju formi (modova), pri čemu se obično uzimaju prva i druga forma vibriranja.

Slikom 47 prikazano je modeliranje Rayleighevog prigušenja.



Slika 47. Modeliranje Rayleighevog prigušenja

### 7.2.2. Modalno prigušenje

Modalno prigušenje uključuje viskozno prigušenje u modalne jednadžbe.

Najprije je potrebno raspregnuti sustav dinamičkih jednadžbi, pri čemu se primjenjuju karakteristike vlastitih modova za transformaciju i dobiva se

$$[\mathbf{K} - \omega_i \mathbf{M}] \bar{\mathbf{V}}_i = \mathbf{0}, \quad (\text{B.11})$$

gdje  $i = 1, 2, \dots, n$ , a  $n$  broj stupnjeva slobode, odnosno time i broj vlastitih formi, a  $\mathbf{V}_i$  je vektor vlastitih formi.

Osim toga definira se modalna matrica koja se sastoji od vlastitih formi čitavog sustava

$$\Phi^{(n \times n)} = [\bar{\mathbf{V}}_1 \quad \bar{\mathbf{V}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{V}}_n]. \quad (\text{B.12})$$

Simetrične matrice  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$ , mogu se zapisati dijagonalno ako se iskoristi svojstvo okomitosti vlastitih vektora na sljedeći način

$$\bar{\mathbf{V}}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{V}}_i = \omega_i \Rightarrow \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

te

$$\bar{\mathbf{V}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{V}}_i = 1 \Rightarrow \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad (\text{B.14})$$

gdje je  $\mathbf{\Omega}$  spektralna matrica, a sačinjena od kvadrata vlastitih frekvencija na dijagonali, te  $\mathbf{I}$  jedinična matrica.

Proizvoljni vektor čvornih pomaka  $\mathbf{V}$  može se izraziti kao linearna kombinacija vlastitih modova tako da vrijedi

$$\mathbf{V} = z_1 \bar{\mathbf{V}}_1 + z_2 \bar{\mathbf{V}}_2 + \dots + z_n \bar{\mathbf{V}}_n = \Phi \mathbf{z}, \quad (\text{B.15})$$

gdje je  $z_i$  udio moda  $i$  u vektoru čvornih pomaka  $\mathbf{V}$ , a  $\mathbf{z}$  je definiran kao

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Osim za vektor čvornih pomaka, također vrijede relacije za čvorne brzine i ubrzanja

$$\dot{\mathbf{V}} = \Phi \dot{\mathbf{z}}, \quad (\text{B.17})$$

te

$$\ddot{\mathbf{V}} = \Phi \ddot{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.18})$$

Uvrštavanjem izraza (B.15) u jednadžbu (B.7) dobije se

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K} \Phi \mathbf{z} = \mathbf{R}(t), \quad (\text{B.19})$$

te množenjem (B.19) s lijeve strane s transponiranom modalnom matricom  $\Phi^T$  dobije se

$$\underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{z}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{C} \Phi}_{\mathbf{C}_\Phi} \dot{\mathbf{z}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{K} \Phi}_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{z} = \underbrace{\Phi^T \mathbf{R}(t)}_{\mathbf{p}(t)}, \quad (\text{B.20})$$

gdje je  $\mathbf{C}_\Phi$  modalna matrica prigušenja, a  $\mathbf{p}(t)$  modalni vektor vanjskih sila.

Bitno je za zamijetiti da budući da su  $\mathbf{C}_\Phi$  i  $\mathbf{\Omega}$  dijagonalne matrice, sustav jednadžbi definiran s (B.20) je raspregnut.

Modalna matrica prigušenja za proporcionalno prigušenje definirana je kao

$$\mathbf{C}_\Phi = \alpha_R \mathbf{I} + \beta_R \mathbf{\Omega}, \quad (\text{B.21})$$

te za modalno prigušenje kao

$$\mathbf{C}_\Phi = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Za definiranje modalne matrice  $\Phi$  obično se ne uzimaju sve vlastite vrijednosti već prvih par, te iz tog razloga modalna matrica ne mora biti reda  $n \times n$  već može biti i reda  $n \times m$  gdje je  $m < n$ .

Modalne jednadžbe mogu se primijeniti za rješavanje problema kod kojih su od interesa niži modovi, a viši modovi se zanemaruju. Primjeri toga su vibracije čeličnih konstrukcija.

## 8. Dodatak C: Frekvencijska analiza

U nastavku poglavlja dani su osnovni izrazi korišteni u frekvencijskoj analizi.

### 8.1. Slobodne vibracije neprigušenog sustava

Slobodne vibracije neprigušenog sustava s  $n$  stupnjeva slobode opisuju se pomoću  $n$  homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Oznaka  $t$  označava vrijeme dok oznake  $\mathbf{y}$  i  $\ddot{\mathbf{y}}$  označavaju poopćeni pomak i poopćeno ubrzanje. Matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  su matrica inercije i matrica krutosti, i to su simetrične matrice. Opće rješenje sustava jednadžbi (C.1) zapisuje se na sljedeći način

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t + \phi), \quad (\text{C.2})$$

gdje je  $\hat{\mathbf{y}}$  vektor amplituda,  $\omega$  frekvencija vibracija, a  $\phi$  fazni kut. Deriviranjem jednadžbe (C.2) dva puta po vremenu slijedi

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\omega^2 \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t + \phi). \quad (\text{C.3})$$

Supstituiranjem jednadžbe (C.2) i (C.3) u jednadžbu (C.1) te nakon njezine transformacije slijedi izraz kojeg se naziva poopćeni problem svojstvenih vrijednosti (eng. *eigenvalue problem*)

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\hat{\mathbf{y}} = 0. \quad (\text{C.4})$$

Gore prikazanim postupkom sustav od  $n$  linearnih diferencijalnih jednadžbi reduciran je na  $n$  linearnih algebarskih jednadžbi [10].

### 8.2. Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je  $\mathbf{A}$  kvadratna matrica dimenzija  $n \times n$  i neka je vektor  $\mathbf{x}$  dimenzija  $n$ . Naime, standardna definicija za svojstveni par  $(\lambda, \mathbf{x})$ , pri čemu je  $\mathbf{x} \neq 0$ , kaže da je  $\lambda$  svojstvena vrijednost, a  $\mathbf{x}$  svojstveni vektor ako vrijedi

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (\text{C.5})$$

Od kud se jednostavnim prebacivanjem dobije

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0, \quad (\text{C.6})$$

pa će taj linearni sustav imati netrivialno rješenje  $\mathbf{x}$  ako i samo ako je matrica sustava singularna što provjerimo računanjem determinante  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .



Navedenu determinantu naziva se još i karakteristični polinom  $n$ -tog stupnja matrice  $\mathbf{A}$  [10]

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}), \quad (\text{C.7})$$

kojem su nultočke (korijeni karakterističnog polinoma) svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}$ . Kada se raspiše determinanta matrice sustava dobije se algebarsku jednadžbu  $n$ -tog reda koja općenito ima  $n$  rješenja, odnosno svojstvenih vrijednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  koja mogu biti ili realna ili kompleksna. Prvenstveno je zanimljiv slučaj kada su vlastite vrijednosti i vlastiti vektori realni. Da bi se izračunao vlastiti vektor  $\mathbf{x}$ , vrati se u matričnu jednadžbu (C.6) iz koje se za svaku vlastitu vrijednost  $\lambda$  izračuna vlastiti vektor  $\mathbf{x}$  [10].

### 8.3. Svojstvene frekvencije i forme vibriranja neprigušenog sustava

Za poopćeni problem svojstvenih vrijednosti prema izrazu (C.4)

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{y}}_i = 0, \quad (\text{C.8})$$

potrebno je izračunati svojstvene frekvencije neprigušenog sustava te forme vibriranja. Da bi se dobila forma izraza, opisana prije,  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$  se pomnoži s inverznom matricom inercije  $\mathbf{M}^{-1}$  te dobijemo

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}, \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{A}, \quad (\text{C.10})$$

gdje je matrica  $\mathbf{I}$  jedinična matrica, a matrica  $\mathbf{A}$  je matrica sustava. Uvrštavanje izraza (C.9) i (C.10) jednadžba (C.1) poprima oblik

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}\mathbf{y} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Uz transformaciju  $\ddot{\mathbf{y}} = \lambda_i \mathbf{y}$  gdje je  $\lambda = \omega^2$  i  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{V}}$  slijedi izraz

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\tilde{\mathbf{V}} = 0, \quad (\text{C.12})$$

u kojem  $\lambda$  predstavlja svojstvene vrijednosti, tj. kvadrate svojstvenih frekvencija neprigušenog sustava, a  $\tilde{\mathbf{V}}$  svojstvene forme vibriranja. Netrivijalna rješenja za  $\tilde{\mathbf{V}}$  postoje ako i samo ako je matrica sustava singularna, odnosno ako je determinanta matrice sustava jednaka nuli [10], to jest kada je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (\text{C.13})$$

Izračunom determinante dolazi se do svojstvenih vrijednosti  $\lambda_i$  odnosno  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  odakle su svojstvene frekvencije neprigušenog sustava jednake

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}. \quad (\text{C.14})$$

#### 8.4. Prisilne vibracije prigušenog sustava s $n$ stupnjeva slobode

Prisilne vibracije prigušenog sustava s  $n$  stupnjeva slobode opisuju se pomoću  $n$  nehomogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog stupnja [10]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{B}_1\mathbf{w}. \quad (\text{C.15})$$

Oznake  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$  i  $\ddot{\mathbf{y}}$  označavaju poopćeni pomak, poopćenu brzinu i poopćeno ubrzanje. Matrice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$  su matrica inercije, matrica prigušenja te matrica krutosti,  $\mathbf{w}$  označava vektor ulaznog signala (npr. sile, pomaci, brzine,...), a matrica  $\mathbf{B}_1$  predstavlja linearni operator s prostora ulaznih signala na prostor poopćenih sila. Da bi se prikazalo ponašanje sustava opisanog jednadžbom (C.15), uvodi se odziv sustava određen izrazom

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_2\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{w}, \quad (\text{C.16})$$

gdje je  $\mathbf{z}$  izlazni signal, matrice  $\mathbf{C}_1$  i  $\mathbf{C}_2$  određuju udio brzina i pomaka stupnjeva slobode u izlaznom signalu, a matrica  $\mathbf{D}$  određuje direktan udio ulaznog u izlaznom signalu. Kod većine modela vibracijskih sustava, matrica  $\mathbf{D}$  je najčešće nula.

Sustav jednadžbi (C.15) i (C.16) čini matematički model koji se naziva linearno vremenski invarijantan sustav drugog reda

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} &= \mathbf{B}_1\mathbf{w}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_2\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Da bi se dobio linearno vremenski invarijantan sustav prvog reda, uvodi se vektor stanja

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2], \quad (\text{C.18})$$

gdje je  $\mathbf{x}_1 = \dot{\mathbf{y}}$ , a  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}$ . Ekvivalentni linearno vremenski invarijantan sustav prvog reda glasi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_{12}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Gore dobiven model prikazan jednadžbom (C.19) još se naziva i poopćeni model prostora stanja (eng. *generalized state-space model*). Matrice koje ga opisuju su

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{12} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]. \quad (\text{C.20})$$

Ukoliko se gore ispisane matrice uvrste u sustav jednadžbi (C.17) dobije se matrični zapis poopćenog modela prostora stanja pomoću kojeg se prikazuje frekvencijski odziv sustava

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}, \quad \mathbf{z} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{w}. \quad (\text{C.21})$$

**LITERATURA**

- [1] Terze, Z., Eiber, A.: *Introduction to Dynamics of Multibody Systems*, interna e-skripta za kolegij “Dinamika konstrukcijskih sustava”- dio objavljen u Dynamics, In: Mechanics, e-book, Institute B of Mechanics, University of Stuttgart, pp. 190-300, (EU classification CZ/98/1/82500/PI/i.1.1.b/FPI), 2001.
- [2] Bathe, K. J.: *Finite element procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [3] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- [4] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures for Solids and Structures - Nonlinear Analysis*, MIT OpenCourseWare, MIT, 1986., web stranica: <http://ocw.mit.edu/resources/res-2-002-finite-element-procedures-for-solids-and-structures-spring-2010/nonlinear/>, lipanj 2015.
- [5] Sorić, J., Skozrit, I.: „*Nelinearna numerička analiza konstrukcija*“, predavanja i vježbe, FSB, Zagreb, 2015.
- [6] Sorić, J.: *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [7] Bauchau, O. A., *Solid Mechanics and its Applications: Flexible Multibody dynamics*, Springer, New York, 2010.
- [8] Shabana, A. A., *Dynamics of multibody systems*, Third edition, Cambridge University press, 2005.
- [9] Shabana, A. A., Sciehlen W., Valášek M., *Virtual Nonlinear Multibody Systems*, Springer Netherlands, 2003.
- [10] Zu-Qing Qu, *Model Order Reduction Techniques with application to Finite Element Analysis*, Springer, London, 2004.
- [11] Krätzig, W. B., Onate, E., *Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells*, Springer, New York, 1990.
- [12] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 2000.
- [13] Dokumentacija, Simulia, *Abaqus Theory Guide*, Abaqus 6.14 (<http://abaqus.ethz.ch:2080/v6.14/books/stm/default.htm?startat=book01.html>, rujan 2015)

- [14] Dokumentacija, Simulia, *Abaqus Analysis User's Guide*, Abaqus 6.14 (<http://abaqus.ethz.ch:2080/v6.14/books/usb/default.htm?startat=book01.html> , rujan 2015)
- [15] PDF dokumentacija dostupna na <http://www.mscsoftware.com/>, *Adams Solver*, MSC Software Cooperation, 2013
- [16] PDF dokumentacija dostupna na <http://www.mscsoftware.com/>, *Adams View*, MSC Software Cooperation, 2013
- [17] PDF dokumentacija dostupna <http://www.mscsoftware.com/>, *Adams Flex*, MSC Software Cooperation, 2013
- [18] PDF dokumentacija dostupna na <http://www.mscsoftware.com/>, *Adams Durability*, MSC Software Cooperation, 2013
- [19] Programski paket, Dassault Systemes, *Simulia Abaqus*
- [20] Programski paket, MSC Software Corporation, *Adams*
- [21] Bottasso, C. L., *Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications*, Volume 12, Springer i Ecomass, 2008.
- [22] Borst, R. D., Crisfield, M., Remmers, J., Verhoosel, C., *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 2012.
- [23] Shabana, A. A., *Vibration of Discrete and Continuous Systems*, Springer Verlag, New York, 1996.
- [24] Géradin, M., Cardona, A., *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*, 2001.
- [25] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B., Elkhodary, K., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, 2014.
- [26] Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L., *The finite element method*, Volume 3, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [27] Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, 1987.
- [28] Gear, W. C., *Simultaneous Numerical solution of Differential-Algebraic Equations*, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT.-18, Br. 1, str. 89 -95, New York: Institute of Electrical and Electronics Engineering, 1971.
- [29] Wielenga, T., The effect of Numerical Stiffness on Mechanism Simulation, Proceedings from the 1986 International Computers in Engineering Conference, Vol. 1., str. 169-378, New York: American Society of Mechanical Engineers, 1986.

## **PRILOZI**

---

### I. DVD-R disc