

# Mjerna nesigurnost u kontaktnoj termometriji

---

Jurić, Filip

Undergraduate thesis / Završni rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:987479>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-27**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Filip Jurić**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**MJERNA NESIGURNOST U  
KONTAKTNOJ  
TERMOMETRIJI**

Mentor:

Prof. dr. sc. Davor Zvizdić, dipl. ing.

Student:

Filip Jurić

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. sc. Davoru Zvizdiću na ukazanom povjerenju i stručnom vođenju kroz izradu završnog rada.

Zahvaljujem se višem asistentu dr. sc. Danijelu Šestanu na velikoj pomoći i strpljenju tijekom sastavljanja mjerne opreme, i samog mjerenja.

Također se zahvaljujem tehničkom suradniku Alenu Jurišincu na pomoći pri mjerenju u laboratoriju.

Za kraj, posebna zahvala mojim roditeljima na punoj podršci tijekom izrade završnog rada.

Filip Jurić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Filip Jurić**

Mat. br.: 0035187476

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Mjerna nesigurnost u kontaktnoj termometriji**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Measurement uncertainty in contact thermometry**

Opis zadatka:

Za potrebe mjerenja temperature u termotehnici i procesnoj tehnici potrebno je analizirati utjecajne parametre na mjerenje temperature kontaktnim termometrima u statičkim i u dinamičkim uvjetima. Mjernu nesigurnost treba razmotriti pri raznim uvjetima ugradnje, izmjene topline zračenjem, provođenjem i konvencijom s ciljem određivanja mjerne nesigurnosti mjerenja.

U radu je potrebno:

- Dati pregled teorijskih podloga vezanih za mjerenje temperature kontaktnim termometrima.
- Analizirati utjecaj izmjene topline zračenjem.
- Dati pregled metoda za procjenu mjerne nesigurnosti mjerenja.
- Analizirati utjecaj provođenja topline kroz tijelo termometra na rezultate mjerenja.
- Prikazati utjecaj izmjene topline konvencijom.
- Proračunati zajednički utjecaj više parametara na mjernu nesigurnost mjerenja temperature.
- Dati skice dispozicija termometra u raznim proračunskim uvjetima.
- Dati usporedbu rezultata procjene sa rezultatima mjerenja.

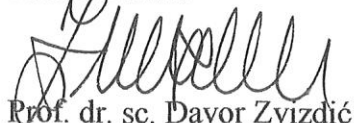
U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
25. studenog 2014.

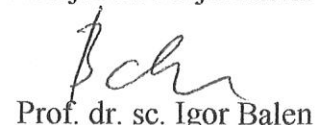
Rok predaje rada:  
**1. rok:** 26. veljače 2015.  
**2. rok:** 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 2., 3., i 4. ožujka 2015.  
**2. rok:** 21., 22., i 23. rujna 2015.

Zadatak zadao:

  
Prof. dr. sc. Davor Zvizdić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. MJERENJE TEMPERATURE KONTAKTNIM TERMOMETRIMA.....	3
2.1. Stakleni termometri .....	3
2.1.1. Pogreške pri mjerenju temperature staklenim termometrima .....	6
2.2. Termoparovi .....	7
2.2.1. Peltierov efekt .....	8
2.2.2. Thomsonov efekt.....	8
2.2.3. Seebeckov efekt.....	9
2.2.4. Teorija termopara .....	10
2.2.5. Standardni tipovi termopara .....	12
2.2.6. Pogreške pri mjerenju temperature termoparom .....	15
2.3. Otpornički termometri.....	17
2.3.1. Utjecaj temperature na električni otpor .....	17
2.3.2. Utjecaj nesavršenosti na električni otpor .....	19
2.3.2. Električna svojstva otporničkih termometara.....	19
2.3.4. Mjerenje električnog otpora .....	21
2.3.5. Pogreške pri mjerenju temperature otporničkim termometrima .....	23
3. METODE ZA PROCJENU MJERNE NESIGURNOSTI .....	24
3.1. Procjene mjerne nesigurnosti tipa A .....	27
3.2. Procjene mjerne nesigurnosti tipa B.....	28
3.3. Procjena kombinirane mjerne nesigurnosti .....	28
3.4. Interpolacija.....	29
3.4.1. Lagrange interpolacija.....	29
3.4.2. Pogreška interpolacije .....	31
3.5. Metoda najmanjih kvadrata .....	32
4. UTJECAJNI PARAMETRI NA MJERNU NESIGURNOST .....	33
4.1. Utjecaj provođenja kroz tijelo termometra.....	33
4.1.1. Pogreške zbog toplinskog kapaciteta termometra .....	36
4.1.2. Pogreške zbog vremenske konstante termometra .....	37

---

4.2. Utjecaj izmjene topline zračenjem .....	40
4.3. Utjecaj izmjene topline konvekcijom.....	42
4.4. Zajednički utjecaj više parametara na mjernu nesigurnost .....	46
5. DISPOZICIJE TERMOMETRA U RAZNIM PRORAČUNSKIM UVJETIMA.....	55
5.1. Termometar u kupki .....	55
5.2. Termometar u komori.....	58
6. USPOREDBA REZULTATA PROCJENE S REZULTATIMA MJERENJA .....	60
6.1. Umjeravanje termometra.....	61
6.2. Mjerenje u komori .....	66
7. ZAKLJUČAK.....	69
LITERATURA.....	70

## POPIS SLIKA

Slika 1. Glavni dijelovi staklenog termometra s kapljevinom [1].....	4
Slika 2. Pogreška lineariziranog visoko temperaturnog termometra [2].....	5
Slika 3. Peltierov efekt, reverzibilni efekt u kojem se smjer topline može promijeniti [1] .....	8
Slika 4. Thomsonov efekt, elektroni se gibaju prema toplijem kraju vodiča, preuzimanje topline iz okoline [1] .....	9
Slika 5. Seebeckov efekt, elektroni se gibaju poput molekula plina, samo onda kad postoji temperaturni gradijent [1].....	9
Slika 6. Skica termopara [2].....	11
Slika 7. Višeslojna sonda termopara za mjerenje pri višim temperaturama [4].....	16
Slika 8. Nelinearnost derivacije generiranog napona po temperaturi s temperaturom, površina ispod grafa je generirani napon [5].....	16
Slika 9. Otpori nikla, bakra i platine u ovisnosti o temperaturi, točkasta linija je linija teoretskog otpora prema proporcionalnom modelu [6].....	18
Slika 10. Dva primjera tehničke izvedbe otporničkih termometara [1] .....	20
Slika 11. Mjerenje otpora pomoću potenciometra [7].....	21
Slika 12. Wheatstonov most [7] .....	22
Slika 13. Pravokutna raspodjela kao primjer kontinuirane distribucije [8].....	25
Slika 14. Normalna ili Gaussova distribucija vjerojatnosti [8] .....	26
Slika 15. Langrageovi polinomi, u mjernim točkama 0, 50, 100 [9] .....	30
Slika 16. Model toplinskog gubitaka zbog provođenja kroz termometar [5] .....	34
Slika 17. Temperaturni profil kroz termometar uronjen do polovice [1].....	35
Slika 18. Ovisnost relativne temperaturne pogreške o dubini uronjenja $L$ i promjeru $D_{\text{eff}}$ termometra [1] .....	36
Slika 19. Promjena temperature termometra s vremenom nakon uranjanja [1].....	38
Slika 20. Promjena temperature termometra uz promjenjivu temperaturu medija [1].....	39
Slika 21. Primjer računanja pogreške provođenja.....	40
Slika 22. Primjer utjecaja izmjene topline zračenjem na mjerenje temperature .....	41
Slika 23. Primjer utjecaja izmjene topline konvekcijom na mjerenje temperature.....	45
Slika 24. Primjer kombiniranog modela izračuna pogreške (strujanje plina je okomito na sliku) [12] .....	47



Slika 25. Diferencijalni element oslonca termometra [12] .....	48
Slika 26. Stvarna i pretpostavljena temperaturna distribucija u graničnom sloju [12] .....	49
Slika 27. Model konačnih razlika za postepenu linearizaciju [12] .....	52
Slika 28. Sumarna krivulja za 20 postepeno lineariziranih rješenja [12] .....	54
Slika 29. Dispozicija termometra u kupki .....	56
Slika 30. Temperaturna razdioba u stacionarnom stanju (Pt100 u kupki) .....	57
Slika 31. Dispozicija termometra u komori .....	58
Slika 32. Dva termometra Pt100, jedan ispolirane površine, drugi obojene u crno .....	60
Slika 33. Kupka za umjeravanje termometara Heto Calibration 107-3 FOH 920 .....	61
Slika 34. Umjeravanje termometra s etalonskim termometrom HART-2456 Hi .....	62
Slika 35. Most za računanje električnog otpora EOMO0302 .....	63
Slika 36. Software LPM Bridges Logger za praćenje podatka otpora .....	63
Slika 37. Promjena temperature u termometru u kupki pri 20°C .....	64
Slika 38. Promjena temperature u termometru u kupki pri 40°C .....	65
Slika 39. Promjena temperature u termometru u kupki pri 60°C .....	65
Slika 40. Promjena temperature u termometru u kupki pri 70°C .....	66
Slika 41. Komora za ispitivanje ujetcaja emisivnosti termometra .....	67
Slika 42. Zapis temperature termometara za vrijeme ispitivanja .....	67

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Tipovi termopara po oznakama i materijali izrade [1].....	12
Tablica 2. Tablica za računanje temperature iz izmjerenog napona za termopar tip B [1].....	13
Tablica 3. Svojstva pojedinih tipova termopara [3] .....	14
Tablica 4. Vrijednosti koeficijenta konvektivnog prijenosa topline $\alpha$ , $Wm^{-2}K^{-1}$ [11] .....	44
Tablica 5. Koeficijent i ekponenti za okomito strujanje na cilindar [12].....	44
Tablica 6. Izračunata pogreška zbog utjecaja provođenja.....	57
Tablica 7. Izmjereni koeficijenti aproksimacijske kvadratne jednadžbe .....	64
Tablica 8. Izračunate karakteristične fizikalne veličine za model .....	66
Tablica 9. Rezultati mjerenja u komori .....	68
Tablica 10. Usporedba rezultata dobivenih mjerenjem i proračunom .....	68

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$a_i$	1	Koeficijenti aproksimacijskog polinoma, pomoćne varijable
$A_i$	$m^2$	Površina
$A$	$K^{-1}$	Koeficijent aproksimacije otpora
$B$	$K^{-2}$	Koeficijent aproksimacije otpora
$c_p$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku $p$
$C_s$	$JK^{-1}$	Toplinski kapacitet sustava
$C_t$	$JK^{-1}$	Toplinski kapacitet termometra
$C$	$K^{-4}$	Koeficijent aproksimacije otpora
$C_i$		Koeficijenti osjetljivosti varijable
$d$	m	Unutarnji promjer termometra
$D$	m	Vanjski promjer termometra
$D$	$K^{-1}$	Pomoćni koeficijent aproksimacije otpora
$D_{eff}$	m	Efektivni promjer termometra
$E$	$K^{-1}$	Pomoćni koeficijent aproksimacije otpora
$E_i$	V	Električni potencijal u čvoru $i$
$I$	A	Jakost električne struje
$J$	$s^2m^{-1}$	Mehanički ekvivalent topline
$k$		Faktor pokrivanja
$k_B$	$JK^{-1}$	Boltzmanova konstanta
$l$	m	Dubina uronjenja termometra
$L$	m	Duljina termometra
$L_i$		Lagrangeovi polinomi
$p$	1	Vjerojatnost
$R$	$\Omega$	Električni otpor
$R'$	$\Omega$	Ukupni električni otpor kroz senzor
$q$	$Wm^{-2}$	Gustoća toplinskog toka (toplinski tok u dif. obilku)
$s$		Eksperimentalno standardno odstupanje
$t$	s	Vrijeme
$T$	K	Termodinamička temperatura
$u$		Standardno odstupanje srednje vrijednosti
$U$	V	Električni napon
$U(T)$		Proširena mjerna nesigurnost
$V$	$m^{-3}$	Volumen
$V_0$	$m^{-3}$	Volumen pri 0 °C
$w$	$ms^{-1}$	Brzina strujanja medija

$X_i$		Ulazna varijabla
$y$		Izlazna varijabla
$\alpha$	$K^{-1}$	Temperaturni koeficijent otpora
$\alpha_i$	$Wm^{-2}K^{-1}$	Koeficijent prijelaza topline
$\alpha_c$	$Wm^{-2}K^{-1}$	Koeficijent prijelaza topline konvekcijom
$\alpha_k$	$Wm^{-2}K^{-1}$	Koeficijent prijelaza topline provođenjem
$\alpha_r$	$Wm^{-2}K^{-1}$	Koeficijent prijelaza topline zračenjem
$\beta$	$K^{-1}$	Koeficijent toplinskog širenja
$\varepsilon$	1	Emisijski faktor
$\Phi$	W	Toplinski tok
$\vartheta$	$^{\circ}C$	Celzijeva temperatura
$\lambda$	$Wm^{-1}K^{-1}$	Toplinska provodnost
$\mu$		Srednja aritmetička vrijednost mjerenja
$\mu_i$	Pas	Dinamička viskoznost
$\sigma$	$Wm^{-2}K^{-4}$	Stefan Boltzmanova konstanta
$\sigma$		Standardna devijacija mjerenja
$\omega$	1	Geometrijski faktor, omjer površina zračenja
$\tau_0$	s	Vremenska konstanta
$\chi$		Funkcija najmanjih kvadrata

## SAŽETAK

U radu su opisane vrste termometara u kontaktnoj termometriji i prikazane su metode za procjenu mjerne nesigurnosti mjerenja. Posebno je opisan utjecaj provođenja topline kroz tijelo termometra, utjecaj izmjene topline termometra konvekcijom i utjecaj izmjene topline zračenjem termometra s okolinom na mjernu nesigurnost. Prikazan je zajednički utjecaj više parametara na mjernu nesigurnost temperature za dispozicije termometra u raznim proračunskim uvjetima. Nakon obrade teorijskog dijela izveden je eksperimentalni rad.

U eksperimentalnom dijelu, koji je izveden u Laboratoriju za procesna mjerenja, Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, ispitan je utjecaj emisijskog faktora površine termometra na mjernu nesigurnost temperature. Prije izvođenja eksperimentalnog rada platinski otpornički termometri su umjereni u kupki s etalom. Na kraju je prikazana usporedba između procjene rezultata i rezultata dobivenih mjerenjem.

**Ključne riječi:** mjerna nesigurnost, temperatura, kontaktna termometrija, utjecaj zračenja

## **SUMMARY**

In this paper thermometers in contact thermometry are defined and methods of evaluating measurement uncertainty are presented. Especially are described effect of heat conduction through body of thermometer, effect of heat convection and effect of thermometer radiation with ambient on measurement uncertainty. Combined effect of several parameters on temperature measurement uncertainty for thermometer dispositions in different estimate procedures is presented. After processing the theoretical part, experimental work is performed.

In experimental part, which was performed in Laboratory for Process Measurement, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, effect of emissivity of the thermometer surface on temperature measurement uncertainty is tested. Before the execution of the work, platinum resistance thermometers are calibrated in overflow bath with standard thermometer. At the end, comparison between evaluated results and experimental results is presented.

**Key words:** measurement uncertainty, temperature, contact thermometry, effect of radiation

## 1. UVOD

Temperatura je jedna od najviše korištenih i mjerenih fizikalnih veličina u inženjerskoj praksi. Pravo fizikalno značenje temperature je temeljeno na molekularnoj teoriji, da je temperatura u izravnoj vezi s prosječnom brzinom gibanja molekula preko Boltzmannove konstante ( $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ). Temperatura je mjerljivo termodinamičko svojstvo sustava zahvaljujući prirodnom zakonu da sustav prepušten sam sebi teži postizanju ravnoteže. Naime, ako kontaktni termometar dovedemo u dodir s promatranom tvari, tada će se pod određenim uvjetima uočiti vremenska promjena temperature, sve dok se temperatura ne ustali uspostavom toplinske ravnoteže. Iz te činjenice proizlazi i nulti zakon termodinamike, dva su tijela (sustava) u međusobnoj toplinskoj ravnoteži onda i samo onda ako imaju iste temperature. Na tom principu se određuje temperatura promatranog medija.

Definirane su dvije apsolutne temperaturne skale, kod kojih nulta vrijednost temperature korespondira s teorijskim stanjem materije pri kojemu prestaje gibanje molekula, a to su Kelvinova temperaturna skala, kod koje je temperatura izražena u stupnjevima kelvina (K) i Rankineova temperaturna skala kod koje je temperatura izražena u stupnjevima rankina ( $^{\circ}\text{R}$ ). Kelvin je jedinica apsolutne (termodinamičke) temperature u SI – sustavu mjera, dok je stupanj rankina jedinica apsolutne vrijednosti samo u Sjedinjenim Američkim Državama. Povijesno gledano, uvedeno je nekoliko temperaturnih skala prije nego što se prihvatila molekularna struktura materije. Prijašnje temperaturne skale empirijski su izrađene proizvoljno odabranim referentnim temperaturama koje se lako reproduciraju s točkama toplinskih stanja pojedinih tvari. Celsiusova skala je najmasovnije korištena empirijska temperaturna skala, koja je zbog svoje praktičnosti dopuštena u SI – sustavu. Definirana je intervalom između točke smrzavanja ( $0^{\circ}\text{C}$ ) i točke ključanja ( $100^{\circ}\text{C}$ ) kemijski čiste vode, pri normalnom atmosferskom tlaku. Podjeljak intervala je na sto jednakih dijelova, pa je jedan podjeljak na skali nazvan jedan stupanj celzija ( $1^{\circ}\text{C}$ ), taj podjeljak se zadržao i kod Kelvinove temperaturne skale, što znači da su promjene temperature od 1 K i  $1^{\circ}\text{C}$  jednake.

Termometre možemo podijeliti u tri glavne skupine:

- a) Stakleni termometri koji rade na principu termodinamičke ekspanzije
- b) Termoparovi (rade na principu Seebeckovog efekta)
- c) Otporniči termometri

Temperatura je mjerilo unutarnje energije nekog tijela, te predstavlja potencijal za izmjenu toplinskog toka. Mjerenje temperature u procesnoj tehnici i termotehnici daje nam informaciju o procesu, i ulazni signal za regulaciju samog procesa. Kontakna termometrija danas predstavlja najtočnije računanje temperature u statičkim, ali i dinamičkim uvjetima.



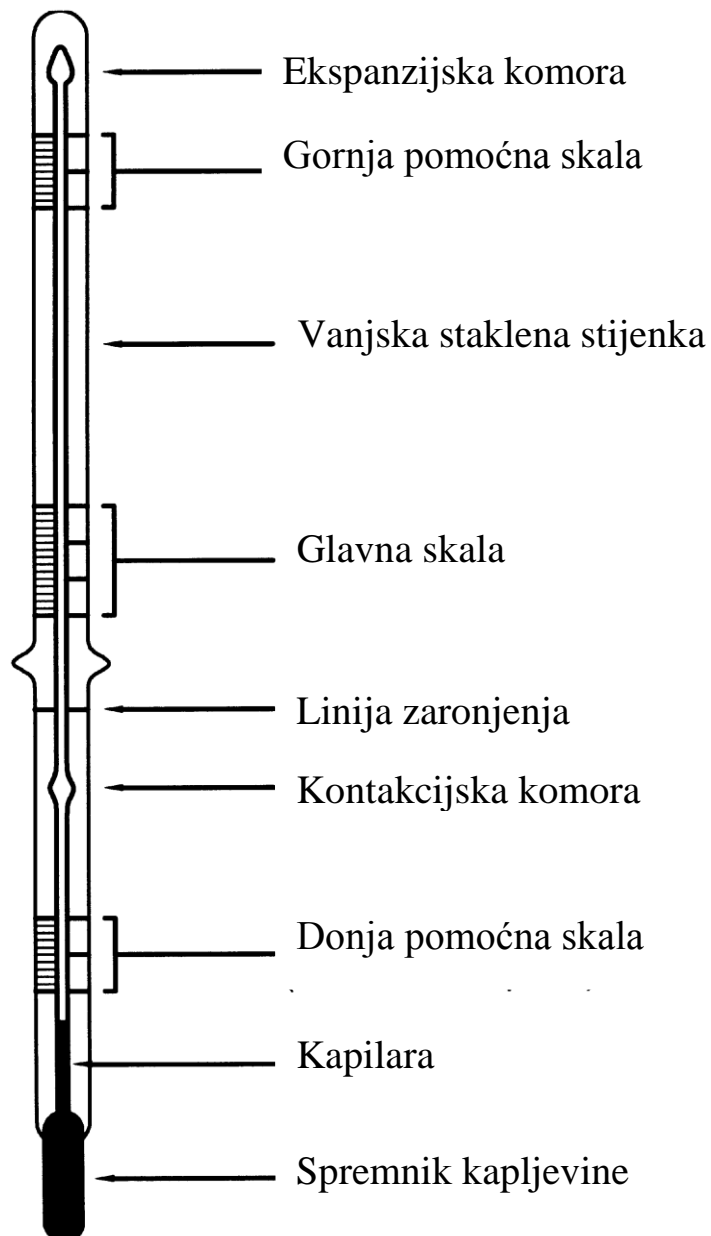
## 2. MJERENJE TEMPERATURE KONTAKTNIM TERMOMETRIMA

### 2.1. Stakleni termometri

Stakleni termometri su jedni od najranije razvijenih termometara, te su u uporabi već više od dvijesto godina. Još ih nazivamo termometri s tekućinom u staklu, što je preuzeto iz engleskog izraza *liquid-in-glass*. Zajedničko svim staklenim termometrima je da se temperatura mjeri posredno promjenom volumena ili tlaka tekućine. Stakleni termometri koji sadrže plin kao senzor temperature nazivaju se plinski termometri. Kod plinskih termometara se temperatura mjeri posredno mjerenjem tlaka manometrom, te se preko veze kao što je opća plinska jednažba za idealni plin dobiva temperatura na već ranije izračunatoj temperaturnoj skali. Takvi termometri još se nazivaju manometarski termometri. Promjena tlaka plina je indikator promjene temperature. Stakleni termometri koji sadrže kapljevinu kao senzor temperature najpoznatiji su i najviše korišteni termometri. Interval njihove primjene je između  $-190\text{ }^{\circ}\text{C}$  i  $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ , te ovisno o intervalu mjerenja mogu biti precizna do milikelvina. [1] Najčešće kapljevine termometara su živa (Hg), te legure živa-talij (Tl). Talij se dodaje u živu da bi snizio točku krutišta legure, jer se živa skrućuje na  $-38\text{ }^{\circ}\text{C}$  pri atmosferskom tlaku, stoga se živa-talij termometri primjenjuju za niže temperature (do  $-70\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). [1] Ti termometri su najtočniji i najjednostavniji za rukovanje. Problem kod talija je što je on još više toksičan od žive, te se pri rukovanju s njim moraju primijeniti dodatne sigurnosne mjere. Tipični interval za termometre s živom je između  $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$  i  $510\text{ }^{\circ}\text{C}$ . [1] Također koriste se i organske kapljevine kojima se dodaje boja radi bolje vidljivosti, jer su organske tekućine prozirne. Najčešće korištene organske kapljevine su etanol koji se primjenjuje pri temperaturama  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  do  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ , pentan koji se koristi za niske temperature od  $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$  do  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  (jer pentan vrije na  $38^{\circ}\text{C}$ ), te toluen aromatski ugljikovodik koji se primjenjuje za temperature od  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  do  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . [1] Iako su ovi termometri lako lomljivi, osjetljivi pri uporabi, živini i toksični, lako su upotrebljivi, dobro su nam poznati, a ponekad isplativi pri mjerenju uskog intervala temperature. Današnja glavna mana im je što ne daju digitalni izlazni signal poput termoparova i otporničkih termometara, stoga se ne koriste puno u regulacijskim sustavima, već se više koriste za dodatnu provjeru sustava. Također mana im je i sporo vrijeme odziva na dinamičku promjenu temperature.

Konstrukcija staklenih termometara svodi se na četiri glavna dijela [1]:

- Spremnik kapljevine
- Kapilara
- Termometarska skala
- Termometarska kapljevina



Slika 1. Glavni dijelovi staklenog termometra s kapljevinom [1]

Stakleni termometar funkcionira na ekspanziji kapljevine s temperaturom, kako temperatura u spremniku na osjetniku termometra raste, kapljevina expandira i počinje se kretati u kapilari. Kad se uspostavi ravnoteža termometra i sustava, temperatura se izmjeri na skali na mjestu gdje se razina kapljevine zaustavi u kapilari.

Koeficijent toplinskog širenja ( $\beta$ ) žive dobro je poznat i kao standard se aproksimira s polinomom 4. stupnja.

$$V = V_0 \cdot \beta \cdot \vartheta \quad (1)$$

$$V = V_0 (1 + a_1 \vartheta + a_2 \vartheta^2 + a_3 \vartheta^3 + a_4 \vartheta^4) \quad (2)$$

Gdje je  $V_0$  volumen žive pri  $0^\circ\text{C}$  i gdje su  $a_i$  koeficijenti aproksimacijskog polinoma.

Za živu  $a_i$  koeficijenti aproksimacijskog polinoma su [1]:

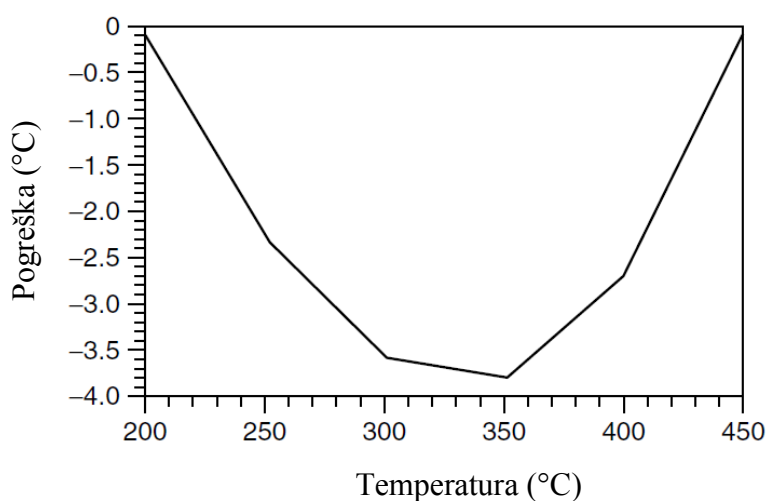
$$a_1 = 1.1815868 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$a_2 = 5.45843 \cdot 10^{-9} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$$

$$a_3 = 3.498 \cdot 10^{-11} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}$$

$$a_4 = 1.5558 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-4}$$

Ekspanzija žive je takva da je oko 6250 puta više žive u spremniku kapljevine nego u kapilari u intervalu od  $1^\circ\text{C}$ . Iz jednadžbe (2) se vidi da je koeficijent toplinskog širenja žive neznatno nelinearan s promjenom temperature [1].



**Slika 2. Pogreška lineariziranog visoko temperaturnog termometra [2]**

### 2.1.1. Pogreške pri mjerenju temperature staklenim termometrima

- Efekt vremenske konstante termometra
- Efekt toplinskog kapaciteta termometra
- Efekti tlaka
- Histereza i drift termometra
- Nejednolik unutarnji promjer kapilare
- Statičko trenje između tekućine i kapilare
- Odvojenost žive između spremnika i kapilare
- Pogreške u očitavanju temperature
- Pogreške uranjanja termometra
- Pogreške temperaturne skale

Sve navedene pogreške utječu na nesigurnost termometra, njihovo spriječavanje temelji se na iskustvu mjeritelja i na kvalitetnoj izradi i pravilnom korištenju termometra. Kao što je već ranije spomenuto stakleni termometri nisu pogodni za mjerenje temperature u dinamičkim uvjetima zbog dugog vremenskog intervala potrebnog za stvaranjem temperaturne ravnoteže. Svaki termometar ima svoj toplinski kapacitet stoga će i dio energije sustava prijeći na njega te time poremetiti sustav. Minimiziranjem te energije možemo smanjiti takav utjecaj, tako da termometar zagrijemo na temperaturu koju otprilike očekujemo da će sustav imati. Efekti tlaka se javljaju pri utjecaju povećanih vanjskih sila na termometar ili uranjanju termometra u kupku pod tlakom. Tipični koeficijent tlaka za staklene termometre iznosi oko  $0.1 \text{ }^\circ\text{C}$  po atmosferi. Histereza se javlja najčešće zbog toga što staklo povećava i samnjuje svoj volumen puno sporije nego termometarska kapljevina, stoga s mjerenjem različitih temperatura dolazi do pogreške. Konstrukcijske pogreške poput nejednolikog promjera kapilare i njene hrapavosti uz današnju tehnologiju izrade termometara svedene su na minimum. Pogreške u očitavanju temperature i odvojenost žive između spremnika i kapilare mjeritelj smanjuje svojim vještinama. Očitavanja se danas vrše monokularnim teleskopom, a odvojenost žive iskusni mjeritelj bi trebao detektirati. Statičko trenje javlja se pogotovo kod organskih kapljevina koje imaju znatno veće adhezijske sile nego što ima živa, stoga adhezijske sile pružaju dodatan otpor širenju kapljevine.

## 2.2. Termoparovi

Termoparovi su najšire primjenjivi temperaturni senzori. Njihova jednostavnost i pouzdanost pronašla je puno primjena u industrijskim aplikacijama. Ali kad potrebe točnosti temperature postanu veće od onih za uobičajene industrijske potrebe, više nisu tako jednostavni za rukovanje, a i pouzdanost im se više ne može pripisati.

Termopar radi na principu da spojimo, dva kraja žice, dva različita metala u jedan spoj koji će predstavljati osjetnik temperature. Na drugim krajevima te dvije žice će se javljati napon ili termo-elektromotorna sila koji ćemo često nazivati i samo signal. Mjerenjem vrijednosti tog signala i njegovim uspoređivanjem s otprije poznatim vrijednostima za pojedine temperature dobivamo iznos temperature termopara.

Literature o termoparovima često navode da je spoj izvor termo-elektromotorne sile, ta tvrdnja je netočna. Napon ili termo-elektromotorna sila generira se duž cijele dužine žice [1]!

1850-tih počela se razvijati teorija mjerenja temperature termoparom, u tom razdoblju William Thomson (Lord Kelvin) je objasnio vezu između termoelektričnog Seebeckovog efekta i termoelektričnog Peltierovog efekta. Tu vezu nazivamo Thomsonov efekt, koji se u literaturama proizvođača termoparova zajedno uz Peltierov i Seebeckov efekt nazivaju *tri zakona termoelekticiteta*.

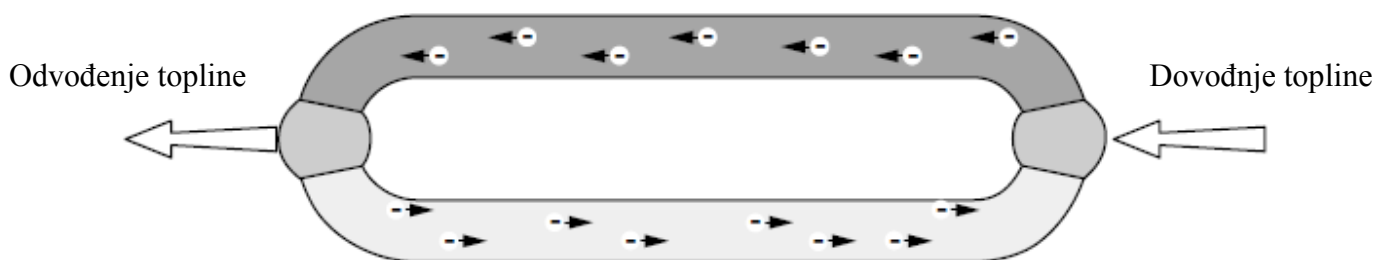
Većina svojstva metala prouzlaže iz njihovih elektrona. Visoka toplinska provodnost i električna provodnost posljedica su elektronskog oblaka ne sparenih elektrona metala. Zato što su elektroni zaslužni za oba svojstva toplinske i električne provodnosti, mora postojati interakcija između njih, koju nazivamo termoelektrični efekt.

Elektroni u metalima sadrže dvije vrste energije: kinetičku energiju i kemijsku potencijalnu energiju. Kao što je u uvodu rečeno, temperatura je mjerilo kinetičke energije. Što je temperatura metala viša, prosječna kinetička energija slobodnih elektrona raste, te se oni kreću s većom brzinom, baš poput i samih atoma. Kemijska potencijalna energija je pohranjena u privlačnim silama između elektrona i pozitivno nabijenih iona metala kristalne rešetke. To je ona energija koja nam je potrebna za odvođenjem elektrona iz kristalne rešetke metala.

Iz toga slijedi termoelektrični efekt koji glasi, ukupna energija slobodnih elektrona metala je u ovisnosti o temperaturi. To proizlazi iz toga da svojstva elektrona ovise o njihovom međudjelovanju s kristalnom rešetkom metala.

### 2.2.1. Peltierov efekt

Slika 3. Prikazuje najjednostavniji termoparski strujni krug načinjen od dvije žice različitog materijala na istoj temperaturi. Ako promatramo samo lijevi kraj termoparskog kruga, elektroni bi se kretali iz metala gdje imaju veću potencijalnu energiju prema žici metala čiji elektroni imaju manju potencijalnu energiju pri istoj temperaturi. Elektroni nose energiju preko spoja, ali i dalje mora biti zadovoljena temperaturna ravnoteža između metala, stoga se dio energije rasipa na gubitke prolaska kroz kristalnu rešetku što se makroskopski pojavljuje kao toplina. Ako promatramo desni kraj termoparskog kruga, elektroni se kreću kroz spoj, ali imaju manju potencijalnu energiju stoga energiju uzimaju od kristalne rešetke što se makroskopski pojavljuje kao hlađenje (odvođenje topline). Ako promatramo termoparski krug kao zasebni sustav, toplina je prenesena s jednog kraja na drugi. I to je Peltier efekt. Peltier efekt se može analogijom zamisliti kao ljevokretni proces u kojem se toplina prenosi iz isparivača prema kondenzatoru.

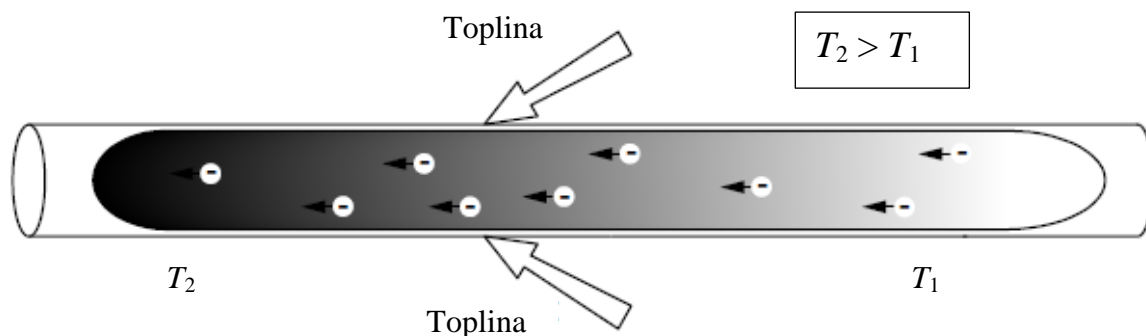


**Slika 3. Peltierov efekt, reverzibilni efekt u kojem se smjer topline može promijeniti [1]**

### 2.2.2. Thomsonov efekt

Metalni vodič koji se nalazi u temperaturnom gradijentu, kroz kojeg prolazi električna struja, nosi elektrone s niskih temperatura prema visokim temperaturama vodiča, slika 4. Elektroni koji dolaze s hladnog kraja žice preuzimaju kinetičku energiju od kristalne rešetke, te se ona hladi. Da bi se temperaturna ravnoteža uspostavila, na tom mjestu vodič uzima toplinu iz okoline, te je prijenos topline s okoliša prema vodiču. Ako elektroni putuju u suprotnom smjeru, od smjera dijela toplog vodiča prema hladnom dijelu, prijenos topline je s vodiča prema okolini. Iz ovog slijedi da je ovaj efekt reverzibilan.

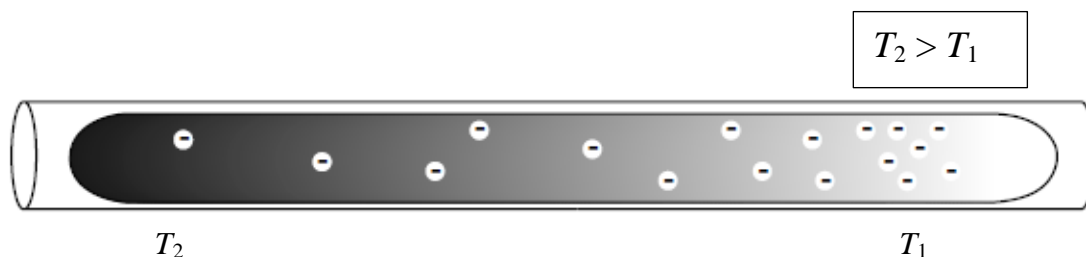
Opisani efekt se naziva Thomsonov efekt i pojavljuje se samo pri pojavi temperaturnog gradijenta i samo onda kad postoji strujanje električne energije.



**Slika 4. Thomsonov efekt, elektroni se gibaju prema toplijem kraju vodiča, preuzimanje topline iz okoline [1]**

### 2.2.3. Seebeckov efekt

Metalni vodič koji se nalazi u temperaturnom gradijentu, ali bez električne struje koja prolazi kroz njega, slika 5. Elektroni vodiča se ponašaju slično poput plina. Na kraju vodiča više temperature elektroni imaju veću kinetičku energiju i gibaju se brže, kaotičnije nego na suprotnom kraju koji je niže temperature. Elektroni iz kraja niže temperature difuzijom se prenose prema kraju više temperature gdje ih je manje. Ti elektroni uzimaju kinetičku energiju kristalne rešetke dijela vodiča više temperature i tako hlade vodič. Upravo je ta difuzija slobodnih elektrona razlog za visoku toplinsku provodnost metala.



**Slika 5. Seebeckov efekt, elektroni se gibaju poput molekula plina, samo onda kad postoji temperaturni gradijent [1]**

Elektroni metala balansiraju temperaturnu ravnotežu vodiča koji se nalazi u temperaturnom gradijentu.

Ako je jedan kraj vodiča podvrgnut višoj temperaturi, višak elektrona će se stvarati na hladnijoj strani, iz čega slijedi da će postojati različiti električni potencijal između dva kraja vodiča. Razlika između potencijala vodiča na dva kraja vodiča naziva se napon i on predstavlja balans temperaturnom gradijentu kojem je vodič izložen. Promjena električnog potencijala duž žice vodiča, koji se nalazi u temperaturnom gradijentu, zbog preraspodjele elektrona naziva se Seebeckov efekt. Pojavljuje se samo u vodičima u kojima postoji toplinski tok, odnosno prema Fourierov zakonu, gdje postoji temperaturni gradijent. Također ovako generirani napon ne ovisi o jakosti struje kroz vodič i ne ovisi o izvedbi spoja termopara.

Iz Seebeck-ovog efekta slijede dvije bitne činjenice koje moraju vrijediti da bi mjernje temperature termoparom bilo točno [2]:

- Seebeck napon je generiran isključivo temperaturnim gradijentom, i ako je gradijent jednak nula (žica je izotermna) generirani napon je također nula.
- Ako je žica metala homogena onda je generirani napon duž duljine žice ovisan samo o temperaturama na krajevima žice

#### **2.2.4. Teorija termopara**

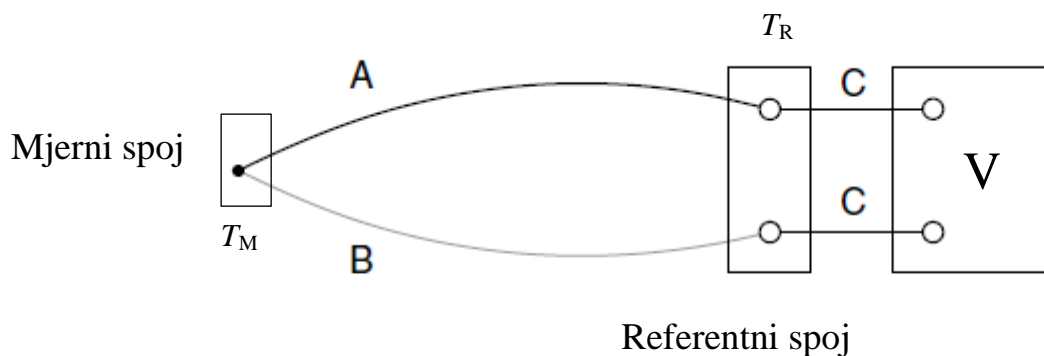
Terorija termopara nastaje primjenom Peltier efekta, Seebeck efekta i Thomson efekta zajedno.

Na slici 6. prikazan je termopar, gdje su A i B žice različitih metala ili metalnih legura, a voltmetar mjeri napon preko dviju žica materijala C, koji je najčešće bakar (Cu).

Obje žice blizu mjernog spoja su djelomično oštećene prilikom izvođenja samog spoja, najčešće je to lemljenjem. Napon generiran oštećenim materijalom je nepredvidljiv, stoga ćemo ga eliminirati tako da mjerni spoj bude izoterman. Jer ako je temperaturni gradijent u spoju nula, neće biti ni generiranog napona iz samog spoja. Stoga kvalitetno konstruirani termoparovi ne generiraju napon u spoju termopara.

Isto vrijedi i za sve ostale dijelove termoparskog kruga čija termoelektrična svojstva komponenata ne poznajemo. Što bi na primjeru sa slike 6. značilo da područje oko referentnog spoja i područje gdje se spaja voltmetar moraju biti iste temperature.





Slika 6. Skica termopara [2]

Voltmetar je najkompleksniji dio na slici 6., te su nepravilnosti na mjestu oko spoja s voltmetrom često izvor pogreške u mjerenju. Stoga se voltmetri i spoj s referentnim krugom najčešće izvode iz jednog materijala (bakra), da bi krug kroz voltmetar bio homogen i praktičan. Materijal C je spojen u dvije točke koje su na istoj temperaturi, stoga nema generiranog napona prema Seebeck efektu. Prilikom mjerenja potrebno je paziti da ne postoji izvor topline u blizini instrumenata koji bi mogao generirati napon u žicama.

Krug na slici 6. možemo zamisliti kao serijski krug izvora napona gdje svaka žica predstavlja izvor. Iz te analogije slijedi napon na voltmetru:

$$E_V = E_A(T_M) - E_A(T_R) + E_C(T_R) - E_C(T_R) + E_B(T_R) - E_B(T_M) \quad (3)$$

gdje su za žice A, B i C,  $E_A$ ,  $E_B$  i  $E_C$  potencijali na krajevima žice pri Temperaturama  $T_M$  i  $T_R$ . Bitno je napomenuti da krajevi nisu na pozicijama spojeva već su oni tamo gdje im je temperatura jednaka izotermnim regijama koje uključuju spojeve. Izotermne regije su označene s kvadratima na slici 6.

Iz jednadžbe (3) se vidi da utjecaj žica instrumenta C nije bitan za mjerenje, stoga je zaključak da instrumenti za mjerenje signala termopara su neovisni o samom senzoru, i obratno.

Jednadžba (3) je napisana preko potencijala, te ju možemo zapisati pomoću pada napona na krajevima žica:

$$E_V = E_{AB}(T_M) - E_{AB}(T_R) \quad (4)$$

Referentna temperatura,  $T_R$  je najčešće temperatura okoliša ili  $0\text{ }^\circ\text{C}$ .

Iz jednadžbe (4) slijedi da postoji jednoznačna veza između napona izmjenjenog na termoparu i temperature uz poznatu referentnu temperaturu, te na taj način iz već izmjerenih podataka dobivamo temperaturu.

### 2.2.5. Standardni tipovi termopara

U tablici 1. Prikazani su tipovi termopara po oznakama koje čine jedno ili dva slova i materijali od kojeg su načinjeni. Jedno slovo označava termoparove s dva različita materijala. Dva slova označavaju termopar čije su žice od istog materijala, drugo slovo je P ili N te označava pozitivnu ili negativnu žicu termopara s jednim slovom.

**Tablica 1. Tipovi termopara po oznakama i materijali izrade [1]**

Tip termopara	Materijal
B	Platina 30% rodij / platina 6% rodij
E	Nikal krom legura / bakar nikal legura
J	Željezo / bakar nikal legura
K	Nikal krom legura / nikal aluminij legura
N	Nikal krom legura / nikal silicij legura
R	Platina 13% rodij / platina
S	Platina 10% rodij / platina
T	Bakar / bakar nikal legura
BN	Platina 6% rodij
BP	Platina 30% rodij

Također svaki tip termopara podjeljen je u tri klase od kojih je klasa 1 najbolja jer ima najmanje područje tolerancije, klasa 2 ima isto područje mjerenja kao i prva klasa ali ima lošiju toleranciju, dok klasa 3 je za uska područja mjerenja i velike su tolerancije, stoga je i cijena njihove izrade najmanja.

Za svaki tip termopara ima svoju tablicu za koju je moguće izračunati temperaturu, odnosno svaki tip termopara ima za referentnu temperaturu i za izračunati napon samo jednu traženu temperaturu.

Za termopar tip B prikazana je tablica 2. Koja predstavlja ekvivalentne izmjerene napone i temperature. Podaci se računaju interpolacijom.

**Tablica 2. Tablica za računanje temperature iz izmjerenog napona za termopar tip B [1]**

$T_{90}(^{\circ}\text{C})$	Izmjereni napon ( $\mu\text{V}$ )				
	0	10	20	30	40
0	0	-2	-3	-2	-0
50	2	6	11	17	25
100	33	43	53	65	78
150	92	107	123	141	159
200	178	199	220	243	267
250	291	317	344	372	401
300	431	462	494	527	561
350	596	632	669	707	746
400	787	828	870	913	957
450	1002	1048	1095	1143	1192
500	1242	1293	1344	1397	1451
550	1505	1561	1617	1675	1733
600	1792	1852	1913	1975	2037
650	2101	2165	2230	2296	2363
700	2431	2499	2569	2639	2710
750	2782	2854	2928	3002	3078
800	3154	3230	3308	3386	3466
850	3546	3626	3708	3790	3873
900	3957	4041	4127	4213	4299
950	4387	4475	4564	4653	4743
1000	4834	4926	5018	5111	5205
1050	5299	5394	5489	5585	5682
1100	5780	5878	5976	6075	6175
1150	6276	6377	6478	6580	6683
1200	6786	6890	6995	7100	7205
1250	7311	7417	7524	7632	7740
1300	7848	7957	8066	8176	8286
1350	8397	8508	8620	8731	8844
1400	8956	9069	9182	9296	9410
1450	9524	9639	9753	9868	9984
1500	10 099	10 215	10 331	10 447	10 563
1550	10 679	10 796	10 913	11 029	11 146
1600	11 263	11 380	11 497	11 614	11 731
1650	11 848	11 965	12 082	12 199	12 316
1700	12 433	12 549	12 666	12 782	12 898
1750	13 014	13 130	13 246	13 361	13 476
1800	13 591	13 706	13 820		

Na tablici 2. oznaka  $T_{90}$  predstavlja referentnu temperaturu prema ITS-90 (International temperature scale of 1990).

Također tipovi termometara imaju određene karakteristike koje proizlaze iz samih svojstava materijala od kojih su napravljeni, stoga se neki mogu primjenjivati u određenim uvjetima i do točno određene maksimalne temperature. Tablica 3. prikazuje područja uporabe pojedinih tipova termoparova.

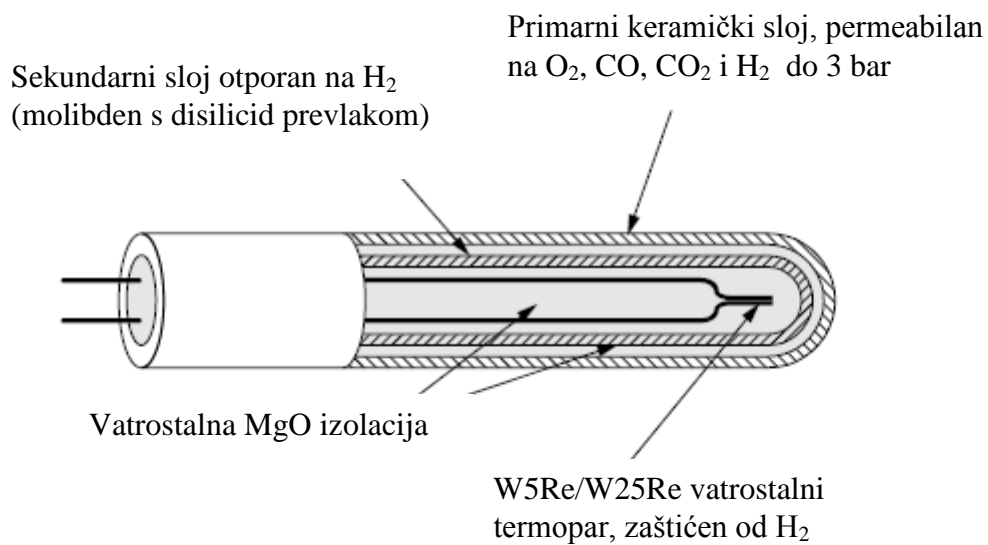
**Tablica 3. Svojstva pojedinih tipova termopara [3]**

Tip termopara	Tip okoline u kojoj mogu mjeriti	Komentar	Maksimalna temperatura (°C)
B	Oksidirajuća, inertna, vakuum na kratki period	Izbjegavati kontakt s metalima, pogodan za visoke temperature, niski referentni napon	1700
E	Oksidirajuća, inertna, vakuum	Pogodan za niske temperature, najviši naponi od svih termoparova	870
J	Oksidirajuća, inertna	Željezo korodira i oksidira brzo	760
K	Oksidirajuća, inertna	Javljanje zelenog oksida na površini u nekim atmosferama	1260
N	Oksidirajuća, inertna	Poput K, ali stabilnija pri višim temperaturama	1300
R i S	Oksidirajuća, inertna	Izbjegavati kontakt s metalima	1400
T	Oksidirajuća, inertna, vakuum	Pogodan za niske temperature, otporan na vlagu	370

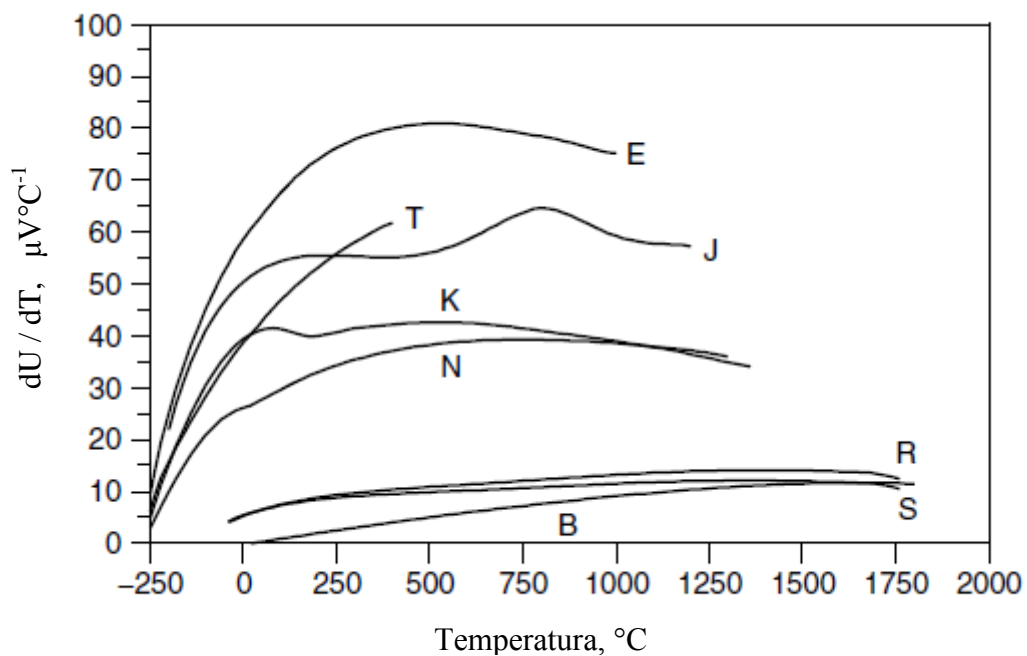
### 2.2.6. Pogreške pri mjerenju temperature termoparom

- Toplinski efekti
- Nehomogenost metala
- Pogreške izoternosti
- Pogreške referentne temperature
- Interferencija s okolinom
- Pogreške zbog otpora žice
- Pogreške zbog interpolacije

Četiri su glavna razloga za pogreške toplinskog efekta pri mjerenju termoparom, a to su efekt toplinskog kapaciteta termometra, pogreške uranjanja termometra, efekt vremenske konstante termometra i utjecaj zračenja s okolinom. Utjecaj zračenja s okolinom se smanjuje ugradnjom termopara u posebno konstruirane sonde, slika 7., ali te sonde također imaju svoj toplinski kapacitet, koji povećava vrijeme uspostavljanja temperaturne ravnoteže. Pogreške nehomogenosti metala već su prije objašnjene, nastoje se izbjeći što kvalitetnijim i preciznijim postupcima proizvodnje, od kojih presudnu ulogu imaju hladno oblikovanje deformiranjem, kemijska zaštita na atmosferu i medije mjerenja, te toplinska obrada. Pogreške izoternosti referentne i mjerne temperature, nastojimo izbjeći izoliranjem mjernog uređaja od vanjskih izvora toplinske energije, i stacioniranjem mjernih veličina. Često se zaboravlja da temperatura okoline nije konstantna, te da se također u ovisnosti o njoj generira dodatni napon. Pogreške interferencije s okolinom se javljaju najčešće zbog elektromagnetskog utjecaja okoline na žice vodiča, njihova vjerojatnost je veća što je i duljina žice duža. Zbog toga se primjenjuju 4-20 mA petlje koje su imune na utjecaj interferencije. Promjene u otporu žice moraju biti male s promjenom temperature, jer veliki porasti otpora 3-4 puta su direktan znak da je termopar prestar ili neispravan. Interpoliranjem vrijednosti temperature iz tablica, poput tablice 2. za tip B termopara nastaje pogreška, jer generiranje napona termopara nije linearno s temperaturom. Ali za inženjerska mjerenja interpolacija je dovoljno točna. Nelinearnost se najbolje vidi na slici 8. gdje je na ordinati promjena generiranog napona po 1 °C, a na apscisi temperatura. Vidljivo je da pri višim temperaturama dolazi do pojava koje nisu linearne kod termoparova koji nisu načinjeni od platine.



Slika 7. Višeslojna sonda termopara za mjerenje pri višim temperaturama [4]



Slika 8. Nelinearnost derivacije generiranog napona po temperaturi s temperaturom, površina ispod grafa je generirani napon [5]

### 2.3. Otpornički termometri

Otpornički termometri su vjerojatno najbolji termometri. Područje uporabe im je od  $-260\text{ }^{\circ}\text{C}$  do  $960\text{ }^{\circ}\text{C}$  s točnošću do  $1\text{ mK}$  [1]. Najbolji otpornički termometri izrađeni su od platine, mogu se koristiti veliki broj puta za mjerenje različitih temperatura i dalje će osiguravati visoku točnost rezultata. Samo rijetki materijali mogu biti izloženi takvim promjenama, a da ostanu stabilni i ne promjene svojstva.

Velika primjena otporničkih termometara od platine je moguća, od vrlo preciznih standardnih termometara prema ITS-90 do robusnih industrijskih termometara, koji mogu biti precizni čak do desetine kelvina. Niski ukupni troškovi i visoka preciznost platinskih termometara čine ih kvalitetnim izborom za puno primjena, pogotovo za primjene gdje je potrebna točnost rezultata.

Svi metali su dobri vodiči električne energije. Razlog je što postoje slobodni elektroni koji nisu vezani za kristalnu rešetku metala, pa se elektroni mogu slobodno kretati u metalu. Za razliku od izolatorskih materijala u kojima se elektroni ne mogu kretati slobodno ili kretati uopće.

Žica metala sastoji se od velike kristalne rešetke atoma metala koji su pozitivno nabijeni ioni u pravilnom obliku u tri dimenzije. Među atomima nalaze se elektroni koji se gibaju stohastično. Kad na žicu spojimo izvor napona, elektroni se počinju ubrzavati i gibati prema pozitivnom kraju izvora napona. Ti elektroni koji se gibaju čine električnu struju, koja je po dogovoru uvijek suprotnog smjera od smjera gibanja elektrona, jer su elektroni negativnog naboja. U savršenoj kristalnoj rešetci metala, slobodni elektroni se gibaju potpuno neometano, te savršena kristalna rešetka ima električni otpor jednak nuli. U stvarnosti to nije slučaj, jer postoje dva mehanizma koji raspršuju i ograničavaju gibanje elektrona, a to je otpor zbog temperature i otpor zbog nepravilnosti rešetke i njenih nečistoća.

#### 2.3.1. Utjecaj temperature na električni otpor

Temperatura bilo kojeg materijala je mjera srednje kinetičke energije atoma i elektrona. U kristalnoj rešetci, gibanje atoma je vrlo ograničeno i ne mogu jednostavno promijeniti svoj položaj zbog jakih kristalnih veza, ali mogu vibrirati u svom ravnotežnom položaju. S porastom temperature, kristalna rešetka jače vibrira i stvara dodatan otpor gibanju elektrona.

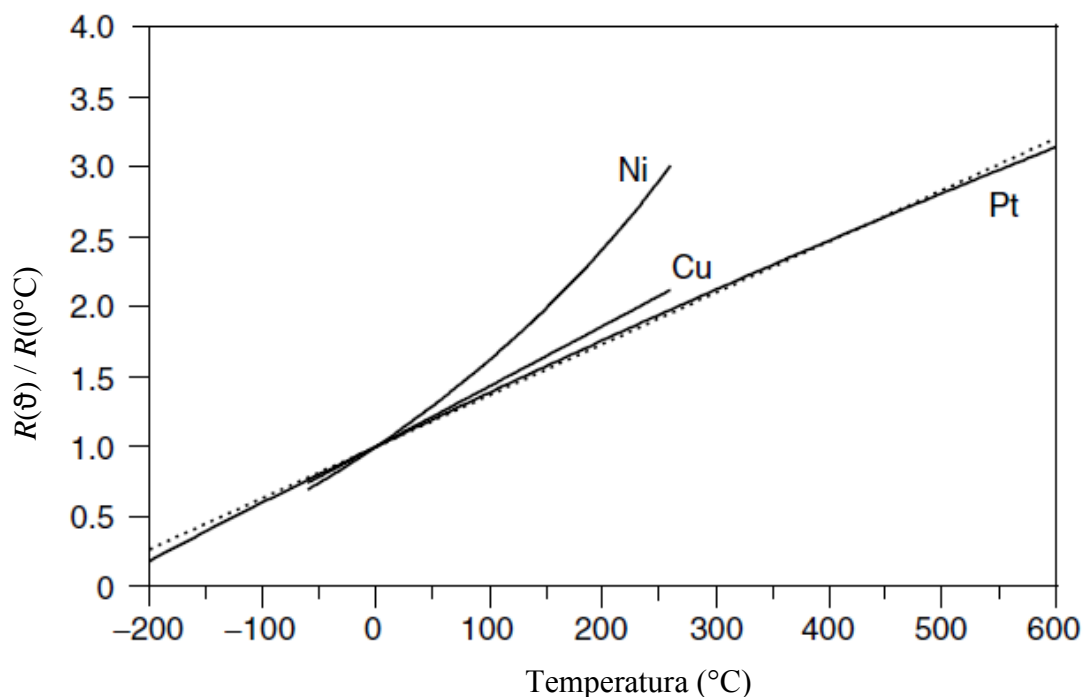
Ako na krajevima žice postoji napon, elektroni će se početi gibati, i u tom gibanju sudarati s vibrirajućom kristalnom rešetkom. U sudarima će elektroni predavati svoju kinetičku energiju kristalnoj rešetci, što će se makroskopski opaziti kao električno zagrijavanje. Što je veći napon ( $U$ ) na žici, elektroni će biti brži i jakost električne struje ( $I$ ) će biti veća, to sve proizlazi iz Ohmovog zakona:

$$I = \frac{U}{R} \quad (5)$$

Gdje je  $R$  ukupni električni otpor koji ovisi o ograničavanju gibanja elektrona. Kako temperatura raste, rastu vibracije kristalne rešetke i otpor prolasku elektrona proporcionalno s apsolutnom temperaturom:

$$R(\vartheta) = R(0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \alpha\vartheta) \quad (6)$$

Gdje je  $\alpha$  temperaturni koeficijent otpora, i za najčešći metal otporničkih termometara platinu iznosi  $1/273.15 \text{ K} = 3.66 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Slika 9. prikazuje da je jednostavni proporcionalni model za platinske termometre poprilično točan.



**Slika 9. Otpori nikla, bakra i platine u ovisnosti o temperaturi, točkasta linija je linija teoretskog otpora prema proporcionalnom modelu [6]**



### 2.3.2. Utjecaj nesavršenosti na električni otpor

Nesavršenosti su pojednostavljenje za cjelokupnu fiziku koja se događa unutar kristalne rešetke. Najjednostavniji primjer nesavršenosti je ako u kristalnoj rešetci postoji atom različite veličine od atoma u rešetci, on će izazivati dodatan otpor prolasku elektrona koji će biti praktički neovisan o temperaturi. Iz čega slijedi da će nesavršenosti kristalne rešetke povećati otpor za konstantni iznos:

$$R'(\vartheta) = R(\vartheta) + \Delta R \quad (7)$$

Gdje je  $\Delta R$  otpor zbog nesavršenosti kristalne rešetke. Uvrštavanjem jednadžbe (7) u jednadžbu (6) dobiva se Mathiessenovo pravilo za ukupni otpor:

$$R'(\vartheta) = R'(0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \alpha'\vartheta) \quad (8)$$

Gdje je

$$\alpha' = \alpha \frac{R(0^\circ\text{C})}{R(0^\circ\text{C}) + \Delta R} \quad (9)$$

Iz izraza (9) se vidi da nesavršenosti povećavaju otpor pri  $0^\circ\text{C}$  i da smanjuju temperaturni koeficijent otpora. Iz čega slijedi važan zaključak, što je veći temperaturni koeficijent otpora nekog metala, to je on čišći, tj. ima savršeniju strukturu.

Nesavršenosti mogu nastati i zbog hladne deformacije žice, stoga je žice potrebno toplinski obraditi u procesu proizvodnje nakon oblikovanja. Također do nesavršenosti može doći pri mjerenju visokih temperatura, ako se nakon mjerenja termometar brzo ohladi, jer je moguće mjenjanje kristalne strukture metala.

### 2.3.2. Električna svojstva otporničkih termometara

Svi metali se ponašaju prema modelu koji je dosad opisan, ali samo malo metala je praktično za izradu senzora temperature. Kvalitetan termometar mora biti stabilan pri visokim temperaturama, kemijski inertan i relativno jednostavan za oblikovanje. Platina je jedan od tih metala.

U početku se otpor platinskih otporničkih termometara opisivao jednostavnom kvadratnom funkcijom, pream Callendaru:

$$R(\vartheta) = R(0^\circ\text{C}) (1 + A\vartheta + B\vartheta^2) \quad (10)$$

U praksi se to inženjerski zapisivalo:

$$R(\vartheta) = R(0^{\circ}\text{C}) \left[ 1 + Dt + DE \left( \frac{\vartheta}{100} \right) \left( 1 - \frac{\vartheta}{100} \right) \right] \quad (11)$$

jer je bio prikladan izraz za umjeravanje, gdje su konstante  $D$  i  $E$  se dobivale iz točaka vrenja vode ( $100^{\circ}\text{C}$ ) i sumpora ( $\approx 440^{\circ}\text{C}$ ) [4].

Kasnije je Van Dusen otkrio da je potreban dodatni član za opisivanje veze između temperature i otpora za temperature ispod  $0^{\circ}\text{C}$ :

$$R(\vartheta) = R(0^{\circ}\text{C}) (1 + A\vartheta + B\vartheta^2 + C(\vartheta - 100)\vartheta^3) \quad (12)$$

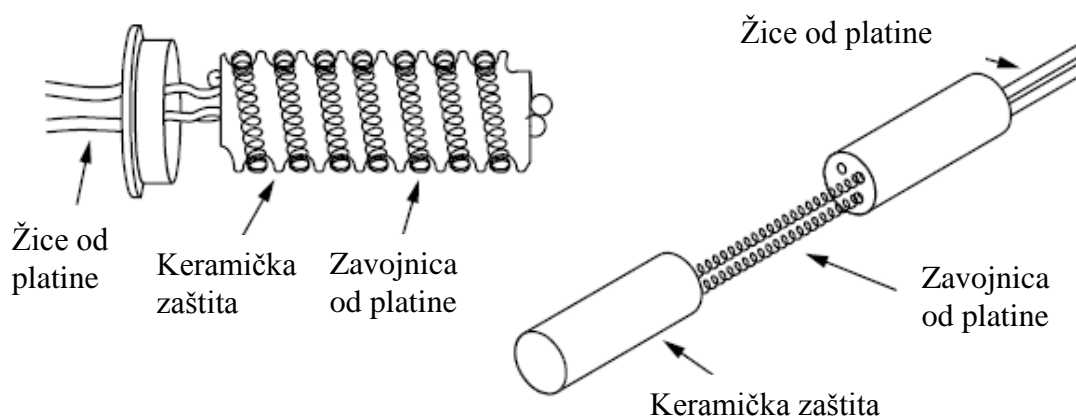
Ova jednadžba se još naziva i Callendar – van Dusen jednadžba i bila je baza za temperaturne skale sve do 1968.g., ali se i dalje koristi za definiranje veze otpora i temperature za industrijske termometre. Tipične vrijednosti koeficijenta standardnog platinskog otporničkog termometra su [1]:

$$A = 3.985 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

$$B = -5.85 \cdot 10^{-7} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-2}$$

$$C = 4.27 \cdot 10^{-12} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-4}$$

$$D = 3.927 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$



Slika 10. Dva primjera tehničke izvedbe otporničkih termometara [1]

### 2.3.4. Mjerenje električnog otpora

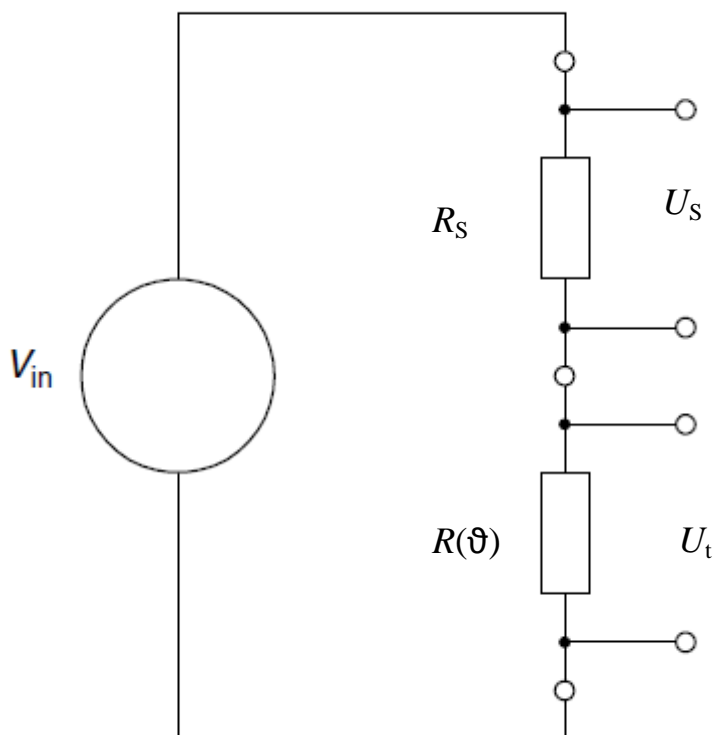
Uz poznavanje veze između otpora i temperature, jedino što nam preostaje je izmjeriti otpor. Da bi ostvarili točnost pri mjerenju temperature od  $\pm 1^\circ\text{C}$  potrebno je izmjeriti otpor na  $0.4 \Omega$  ili bolje. Čak i uobičajeno mjerenje temperature otporničkim termometrom zahtjeva precizno mjerenje otpora.

Iz jednadžbe (5) slijedi računanje otpora po Ohmovom zakonu:

$$R = \frac{U}{I} \quad (13)$$

Za računanje otpora iz Ohmova zakona potrebno je izmjeriti napon i jakost struje kroz žicu termometra. Jakost električne struje nije lako izmjeriti zbog njene ovisnosti o naponu i samom otporu. Stoga se primjenjuju metode za mjerenje otpora kojima nije potrebno mjeriti jakost struje. Dvije su takve metode: metoda potencijometra i Wheatstonov most.

Metoda potencijometra se sastoji od izvora električne struje, dva voltmetra i jednog poznatog otpornika, najčešće je to otpornička dekada, slika 11.



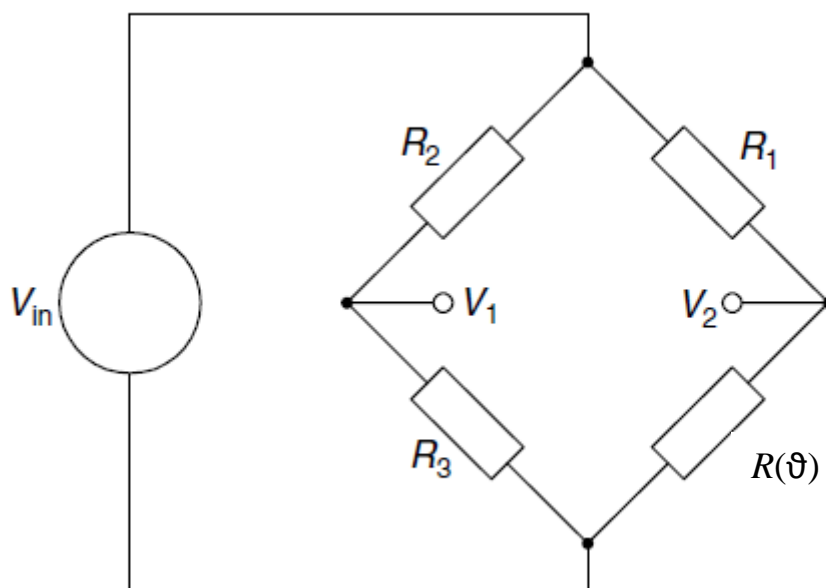
Slika 11. Mjerenje otpora pomoću potencijometra [7]

Poznati otpor je  $R_S$ , na kojem se mjeri pad napona na poznatom otporniku  $U_S$ , dok je  $U_t$  pad napona na termometru. Iz slike 11. slijedi izraz za računanje otpora pomoću potenciometra:

$$R(\vartheta) = \frac{U_t}{U_S} R_S \quad (14)$$

Suma pada napona na poznatom otporniku i pada napona na termometru je jednaka naponu izvora električne struje. Stoga se često mjeri napon izvora i pad napona samo jednog otpornika, te iz toga dobiva traženi otpor termometra.

Wheatstonov most je metoda koja je potpuno neovisna o izvoru električne struje i o jakosti struje kroz otpornike, stoga se ona najviše koristi za izračunavanje otpora. Da bi izračunali otpor termometra, potrebno je imati tri otpornika poznatog otpora (neovisnih o temperaturi) i izvor električne struje. Otpornici se smještaju tako da je jedan u seriji s termometrom, a ostala dva su u paraleli s njima, kao na slici 12.



**Slika 12. Wheatstonov most [7]**

Wheatstonov most uklanja potrebu za mjerenjem napona, čime se smanjuje utjecaj na pogrešku mjerenja. Na slici 12. potrebno je samo osigurati da je napon između  $V_1$  i  $V_2$  jednak nuli, što se osigurava promjenom jednog otpora na otporničkoj dekad. Ako je napon između  $V_1$  i  $V_2$  jednak nuli onda otpor termometra glasi:

$$R(t) = \frac{R_3}{R_2} R_1 \quad (15)$$

### 2.3.5. Pogreške pri mjerenju temperature otporničkim termometrima

- Pogreške uranjanja termometra
- Efekt vremenske konstante termometra
- Pogreške zbog utjecaja zračenja
- Efekt toplinskog kapaciteta termometra
- Mehanički udarci i vibracije
- Pogreške zbog toplinske ekspanzije žice
- Pogreške otpora nesavršenosti
- Pogreške pri računanju napona
- Elektromagnetsko međudjelovanje
- Otpor priključne žice
- Pogreške zbog referentnog otpora

Pogreške uranjanja termometra, efekt vremenske konstante termometra, efekt zbog utjecaja zračenja i efekt toplinskog kapaciteta termometra već je ranije objašnjen na primjerima termopara i staklenih termometara. Mehaničke udarce i vibracije potrebno je izbjegavati, jer stvaraju lokalne promjene u kristalnoj rešetci termometra koje izazivaju drift termometra. Također pri mjerenju viših temperatura dolazi do toplinske ekspanzije žice, te ona stvara dodatna naprezanja i deformacije u senzoru čime se stvara dodatni otpor unutar kristalne rešetke. Prilikom utvrđivanja otpora nesavršenosti također postoji pogreška jer se on također mjeri pomoću točka tališta. U metodi Wheatstonov most potrebno je osigurati pad napona jednak nuli, što je praktički dovoljno točno do osjetljivosti samog voltmetra (galvanometra). Elektromagnetsko međudjelovanje postoji ako se u blizini nalaze elektromotori, transformatori i jako TV zračenje. Elektromagnetskom indukcijom u vodičima se generira dodatan napon koji mijenja podatke mjerenja. Termoelektrični efekti, poput Seebeckovog također postoje, ali su zanemarivi naspred napona izvora. Mogućnost pogreške mjerenja također dolazi i od otpora priključne žice i referentnih otpora, čije vrijednosti uzimamo kao konstantne.

### 3. METODE ZA PROCJENU MJERNE NESIGURNOSTI

Mjerenje je kvantitativno uspoređivanje fizikalne veličine koju mjerimo s etalonskom vrijednosti, tj. u konačnosti mjernom jedinicom. Sljedivost mjerenja ključna je za međusobno uspoređivanje i ocjenu kvalitete pojedinog mjerenja stoga se mjerenja provode u SI-sustavu. U realnosti svako mjerenje ima svoju mjernu nesigurnost, te je ona sastavni dio mjerenja isto kao i sam rezultat mjerenja. Mjerna nesigurnost je procjena kvalitete samog mjerenja, stoga je ona sastavni dio svakog izvješća o mjerenju. Pogreške u mjerenju su neizbježne, te ih raznim idealizacijama i teorijama nastojimo odrediti i korigirati mjerni rezultat, kako bi dobili stvarnu vrijednost. Pogreške čije vrijednosti ne znamo, postaju izvor mjerne nesigurnosti. Bitno je razlikovati pogreške od nesigurnosti. Pogreške su razlike između mjerne vrijednosti i stvarne vrijednosti, nesigurnost je kvantifikacija sumnje u rezultat mjerenja. Tri su glavna izvora mjerne nesigurnosti i pogreške, a to su mjerni instrument i sama mjerna metoda, objekt koji mjerimo, i osoba koja mjeri.

Pogreške u kontaktnoj termometriji javljaju se pri mjerenju unutrašnjosti krutina (problem s fizičkim kontaktom termometra) i zbog toga što termometar uvijek pokazuje svoju temperaturu, a ne temperaturu tijela ili medija kojeg želimo mjeriti. Te pogreške je potrebno korigirati i procijeniti mjernu nesigurnost rezultata.

Ključno za mjerenje je ponavljanje mjerenja, jer se tako stvara statistička distribucija mjernih rezultata. Svako mjerenje ima izlaznu varijablu, podatak kojeg se želi izmjeriti, u ovom slučaju on je samo jedan i to je temperatura. Ulazne varijable su sve varijable koje mjerimo, a u funkcijskoj su vezi s izlaznom varijablom.

$$T = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N) \quad (16)$$

gdje je  $\vartheta$  temperatura koja je izlazna varijabla, a  $X_i$  su ulazne varijable kojih ima  $N$ . Na primjeru otporničkog termometra će biti jasnije.

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R(\vartheta)}{R(0^\circ\text{C})} - 1 \right) \quad (17)$$

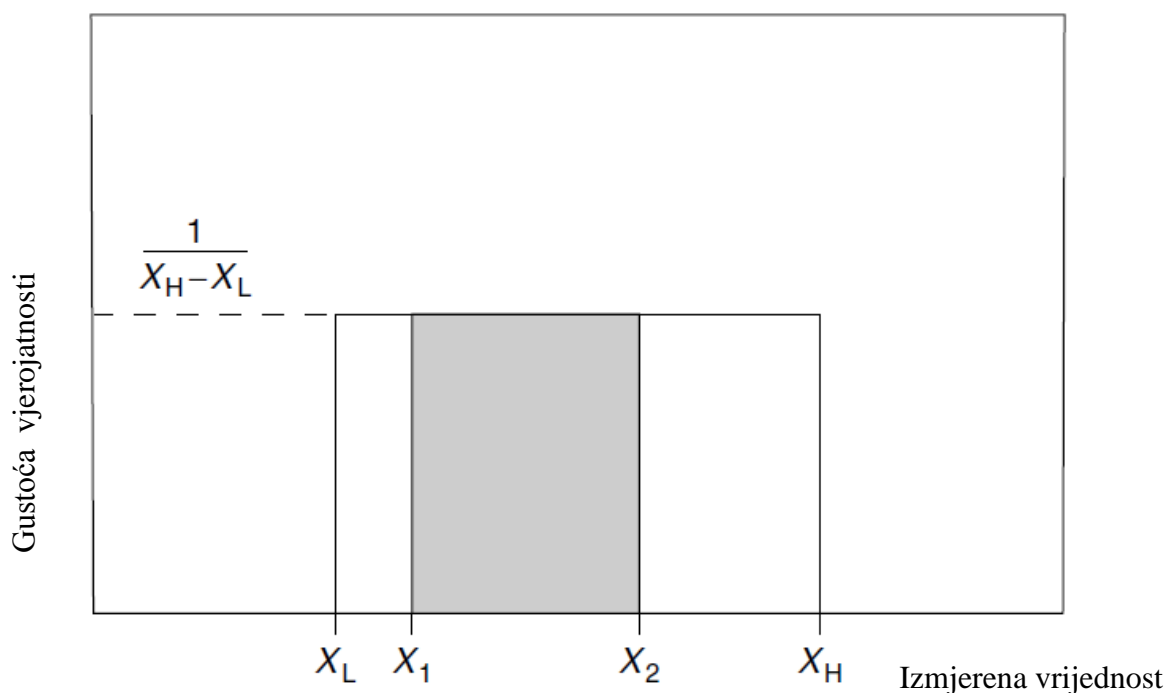
Jednadžba (17) slijedi iz jednadžbe (6).

Pri mjerenju nepoznate temperature, oslanjamo se u većini slučajeva na aritmetičku sredinu svih točno izvršenih mjerenja.

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{N} \sum_i^N X_i \quad (18)$$

Rezultati mjerenja s više ponavljanja grafički se prikazuju u histogramu, te se ta raspodjela onda naziva distribucija mjerene varijable. Postoje više vrsta distribucija od kojih su za mjerenje najbitnije kontinuirana distribucija i normalna distribucija.

Kontinuirana distribucija rezultata se javlja pri mjerenju s instrumentima koji nemaju metričku skalu, npr. digitalna vaga koja će uvijek prikazati interval u kojem se izmjerena težina nalazi, a ne točnu vrijednost. Ako vaga prikazuje 15 g, to znači da je izmjerena težina u intervalu od 14.5 g do 15.5 g i svaka vrijednost u tom skupu je jednako vjerojatno moguća kao stvarna težina. U strojarstvu najbolji primjer kontinuirane distribucije je tolerancija. Prilikom kupovine vratila oznake h9, kupac ne zna točnu vrijednost promjera vratila, ali zna interval u kojem se kreću vrijednosti tog vratila, što zadovoljava njegovu potrebu za točnošću rezultata. Graf na slici 13. predstavlja kontinuiranu raspodjelu, u kojem površina ispod grafa predstavlja vjerojatnost da se točna vrijednost nalazi u tom području.



Slika 13. Pravokutna raspodjela kao primjer kontinuirane distribucije [8]

Na slici 13. vjerojatnost  $P$ , predstavlja površinu osjenčenog kvadrata. Vjerojatnost da se točna vrijednost nalazi u intervalu od  $X_1$  do  $X_2$  glasi:

$$p = \frac{X_2 - X_1}{X_H - X_L} \quad (19)$$

Prosječno odstupanje izmjerenih vrijednosti od aritmetičke sredine naziva se varijanca, a kvadratni korijen svih varijanci se naziva standardna devijacija, i ona je mjerilo raspršenosti rezultata. Zapisujemo je malim grčkim slovom sigma,  $\sigma$ . Standardna devijacija za pravokutnu raspodjelu na slici 13. glasi:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(X_H - X_L)}{2} \quad (20)$$

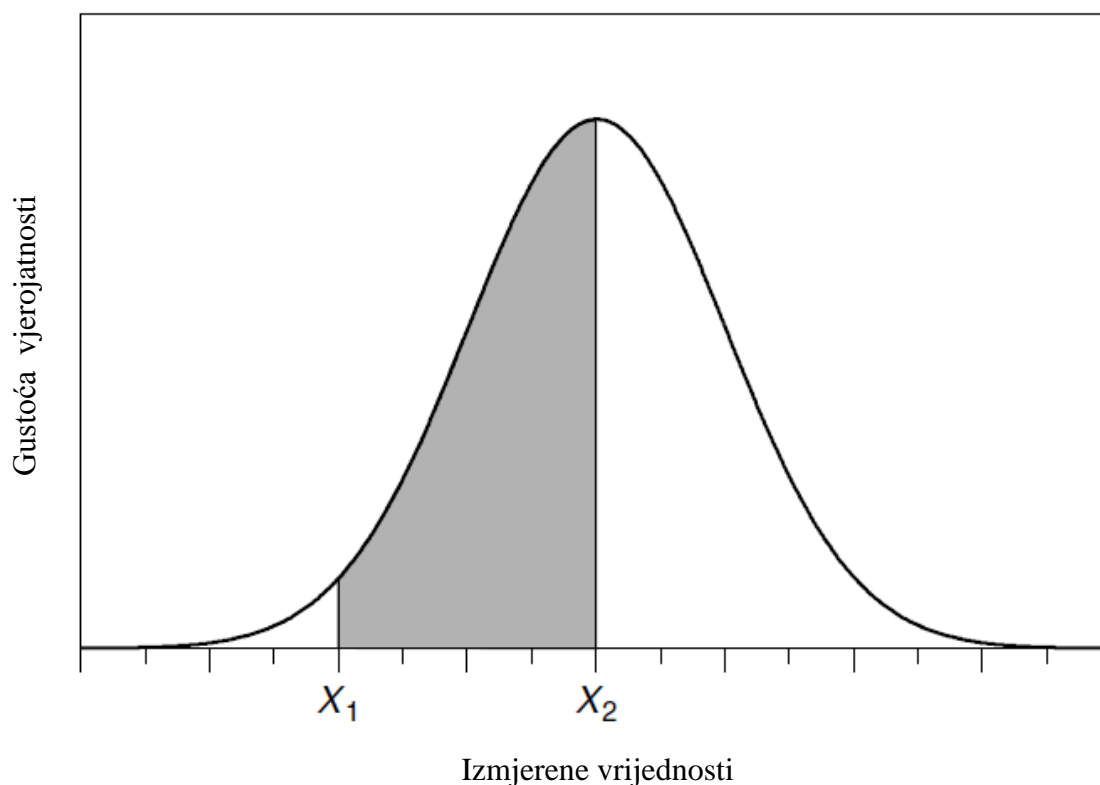
Iz izraza (20) slijedi da je područje pogreške iznosi  $\pm\sqrt{3}\sigma$ .

Normalna razdioba se naziva još i Gaussova distribucije. Ona je najčešći prirodni statistički fenomen. Vjerojatnost rezultata se izražava funkcijom:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (21)$$

Gdje je  $\mu$  srednja aritmetička vrijednost mjerenja.

Normalna distribucija se javlja kod svih mjerenja s metričkom skalom. I njena raspodjela vjerojatnosti izgleda kao na slici 14.



**Slika 14. Normalna ili Gaussova distribucija vjerojatnosti [8]**



Bitno je naglasiti da interval normalne razdiobe se zapisuje  $\mu \pm k\sigma$ , gdje je za  $k = 1$  vjerojatnost rezultata da je u intervalu 68.27%, dok za  $k = 3$ , vjerojatnost je 99.73%.

Bez obzira na izvor nesigurnosti one se mogu procjenjivati na dva načina: metoda procjene tipa A i metoda procjene tipa B. Tip A ili B mogu biti metode procjene, a ne tipovi nesigurnosti, te su kod većine mjerenja potrebne procjene oba tipa.

### 3.1. Procjene mjerne nesigurnosti tipa A

Procjene tipa A su procjene koje koriste statistiku, tj. mjerenja se više puta ponavljaju. Prije računanja kombinirane mjerne nesigurnosti potrebno je podatke iz svih izvora svesti na razinu jednake pouzdanosti, na standardnu nesigurnost,  $u$ . Za podatke dobivene statistički metodom A, standardna nesigurnost se računa iz standardne devijacije  $s$  za sve izmjerene podatke.

Gaussova ili normalna razdioba je obrada podataka koja je karakteristična za procjenu nesigurnost tipa A. Podaci su grupirani oko aritmetičke sredine svih mjerenja, a vjerojatnost njihovog pojavljivanja udaljavanjem od srednje vrijednosti opada.

Ekperimentalno standardno odstupanje  $s$ , mjera je rasipanja rezultata mjerenja od aritmetičke vrijednosti i dobiva se iz izraza:

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (22)$$

Iz eksperimentalnog standardnog odstupanja  $s$ , računamo eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti  $u$ , koja je ujedno i standardna mjerna nesigurnost procjene tipa A.

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (23)$$

Standardno odstupanje srednje vrijednosti je ono što inženjere i mjeritelje najviše zanima, jer ona pokazuje interval u kojem sa sigurnošću od 68.27% se nalazi njihov rezultat.

To je posljedica veze iz Gaussove raspodjele, preko faktora pokrivanja  $k$ , u intervalu rezultata prema izrazu  $\mu \pm k\sigma$ .

### 3.2. Procjene mjerne nesigurnosti tipa B

Procjena mjerne nesigurnosti tipa B temelji se na već ranije spomenutoj pravokutnoj raspodjeli. Procjene tipa B su procjene bazirane na informacijama koje nisu statističke prirode, kao što su prethodno iskustvo, vanjske umjernice, proizvođačke specifikacije, proračun, objavljeni izvori i iz zdravog razuma.

U slučaju da mjernu nesigurnost uzimamo iz vanjskih umjernica, gdje je izražena kao proširena nesigurnost, moramo je podijeliti s faktorom pokrivanja,  $k$ . Za metodu B poznat nam je samo interval unutar kojeg se nalazi stvarna vrijednost. Npr. Granična pogreška ili tolerancija je pravokutna raspodjela kao na slici 13. Iz čega slijedi da je eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti  $u$ , ili standardna mjerna nesigurnost jednaka:

$$u = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

Gdje je  $a$  poluinterval intervala sigurnosti.

Za razliku od procjene nesigurnosti tipa A, za procjenu nesigurnosti tipa B potrebno je poznavati fiziku samog mjerenja, te na taj način smanjiti utjecaje svih izvora pogrešaka.

### 3.3. Procjena kombinirane mjerne nesigurnosti

Ako je procjena izlazne varijable temperature  $t$ , dana u funkcijskoj ovisnosti o ulaznim varijablama  $X_i$ , zapisano matematičkim izrazom (16). Onda je standardna nesigurnost procjene varijable  $t$  kao izlazne varijable jednaka:

$$u(T) = \sqrt{\sum_i (C_i \cdot u(X_i))^2} \quad (25)$$

gdje je:

$$C_i = \frac{\partial T}{\partial X_i} \quad (26)$$

$C_i$  je koeficijent osjetljivosti koji opisuje u kojoj mjeri varijabla  $X_i$  utječe na izlaznu varijablu, odnosno temperaturu  $T$ . Također matematički  $C_i$  je parcijalna derivacija temperature  $T$  po ulaznoj varijabli  $X_i$ .

Proširena mjerna nesigurnost se dobije množenjem kombinirane mjerne nesigurnosti s faktorom prekrivanja  $k$  [9].

$$U(T) = k \cdot u(T) \quad (27)$$

Te se rezultat mjerenja iskazuje u obliku:

$$T \pm U(T) = T \pm ku(T) \quad (28)$$

### 3.4. Interpolacija

Prilikom kalibriranja termometra potrebno je osigurati dovoljan broj umjeravanja za ostvarivanjem temperaturne skale termometra. Međutim, nepraktično je uspoređivati svaku točku referentnog termometra s referentnim termometrom, stoga se najčešće uspoređuju u malom broju točaka. Problem nastaje u tome kako prikazati temperaturu koja se nalazi između dviju točaka po kojima se termometar kalibrirao. Najčešće se to rješava da se pronade funkcija koja prolazi kroz sve mjerene točke i dovoljno točno mjeri ostale vrijednosti između, taj postupak se naziva interpolacija.

Najjednostavniji oblik interpolacije je temeljen na polinomima i zove se Lagrange interpolacija po francuskom matematičaru. Lagrange interpolacija se koristi i u ITS-90 u linearizacijskim računalnim programima.

#### 3.4.1. Lagrange interpolacija

Lagrange interpolacija polinoma drugog stupnja najčešća je interpolacija, zato jer su joj potrebne samo tri točke za izračun krivulje. Stoga će analiza biti svedena samo na polinom drugog stupnja, a za ostale polinome višeg stupnja vrijedi ista analogija.

Kvadratna funkcija ima tri koeficijenta koja određuju krivulju koja prolazi kroz tri izmjerene točke  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  glasi:

$$y'(x) = ax^2 + bx + c \quad (29)$$

gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  koeficijenti kvadratne funkcije. Oznaka  $'$  u jednadžbi (29) označava da je vrijednost izlazne varijable  $y(x)$  aproksimirana. Jednadžba (29) lako se rješava numerički i algebarski, međutim rješava se alternativnim načinom računajući samo koeficijente. Taj način otkrio je Lagrange i vrijedi za polinome svih stupnjeva. Za kvadratni slučaj glasi:

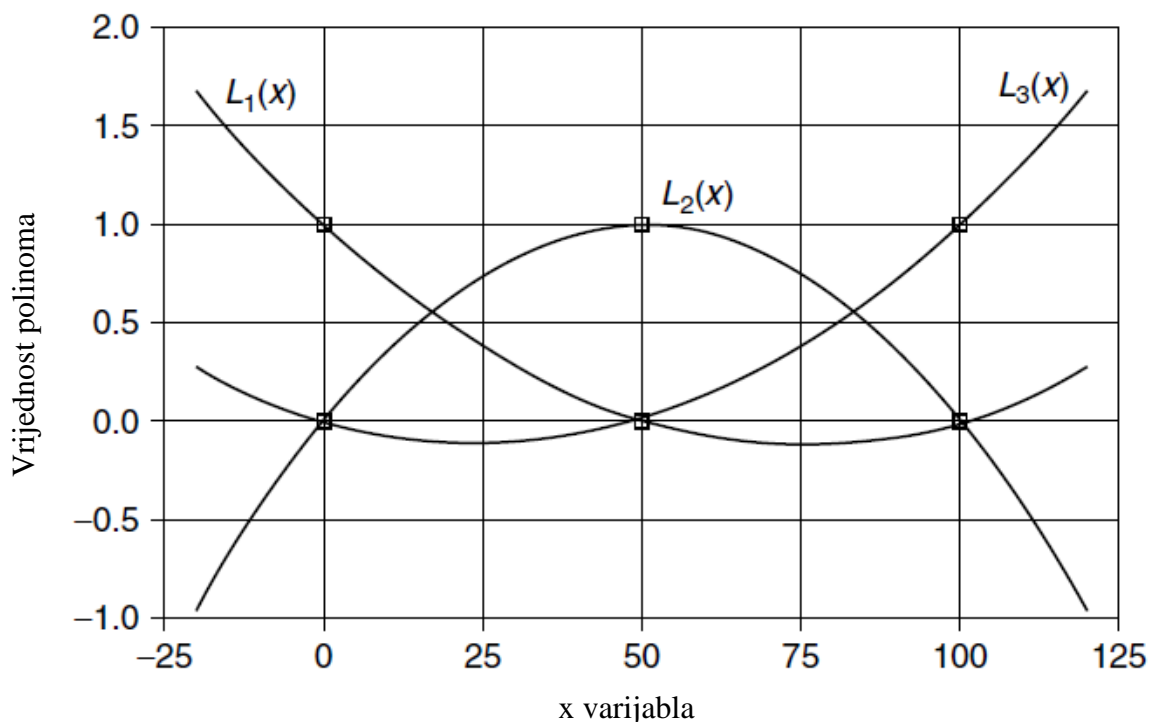
$$y'(x) = \sum_{i=1}^3 y_i L_i(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \quad (30)$$

Gdje su  $L_i(x)$  Lagrangeovi polinomi:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)},$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (31)$$

Iako se na prvi pogled ovaj postupak čini kompliciranijim, Lagrange polinomi imaju posebno svojstvo da je analiza nesigurnosti jako jednostavna. Primjer Lagrangeovih polinoma (31) prikazan je na slici 15., gdje svaki polinom poprima vrijednosti 1 u pripadajućoj mjernoj točki, a u svim ostalima poprima vrijednost 0.



Slika 15. Langrageovi polinomi, u mjernim točkama 0, 50, 100 [9]

Svojstvo polinoma na slici 15. je mogućnost stvaranja izraza (30) bez rješavanja jednadžbe oblika (29). Jer vrijedi da vrijednosti  $L_i(x_j)$  mogu biti samo 1 ili 0.

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{za } i \neq j \end{cases} \quad (32)$$

Za potrebe analize nesigurnosti, Lagrange polinomi ujedno predstavljaju i odstupanje aproksimirane vrijednosti  $y'(x)$  od stvarne vrijednosti  $y(x)$ .

Lagrangeovi polinomi su zapravo derivacije aproksimirane vrijednosti  $y'(x)$  po stvarnoj vrijednosti  $y(x)$ :

$$\frac{\partial y'}{\partial y_i} = L_i(x) \quad (33)$$

### 3.4.2. Pogreška interpolacije

Sve interpolacije su aproksimacije stvarnog reagiranja instrumenta, kao rezultat toga svako mjerenje ima odstupanje od stvarne vrijednosti. To odstupanje se naziva pogreška interpolacije i izvor je mjerne nesigurnosti. Pogreška interpolacije može se utvrditi na dva načina: izračunom koji nije uvijek moguć i eksperimentalno. Za računanje pogreške interpolacije potrebno je imati kvalitetan matematički model koji će se ponašati kao i stvarni instrumenti i senzori.

Pogreška interpolacije platinskog otporničkog termometra može se izračunati jer je dobro poznata veza između otpora i temperature preko kvadratne jednadžbe (10). Lagrangeova linearna interpolacija za platinski otporniči termometar glasi:

$$T' = T_1 \frac{R(T) - R(T_2)}{R(T) - R(T_2)} + T_2 \frac{R(T) - R(T_1)}{R(T_2) - R(T_1)} \quad (34)$$

Uvrštavanjem izraza (10) u izraz (34) dobiva se konačni oblik za interpolacijsku pogrešku platinskog otporničkog termometra:

$$T' = T + \frac{B(T - T_1)(T - T_2)}{A + B(T_1 + T_2)} \quad (35)$$

Jednadžba (35) je zapisana u obliku, da je aproksimacijska vrijednost jednaka sumi stvarne vrijednosti i interpolacijske pogreške. Interpolacijska pogreška je nula u dvije mjerne točke, i uvijek je za jedan višeg stupnja nego što je to Lagrangeova interpolacija. Interpolacijom nebi trebalo računati točke koje su velike udaljenosti i nisu između mjernih točaka, jer se onda taj račun svodi na ekstrapolaciju. Pogreške ekstrapolacije su puno veće, jer u model nije uključeno poznavanje fizike tog područja.

### 3.5. Metoda najmanjih kvadrata

S interpolacijom potreban je isti broj mjerenja kao i broj koeficijenata jednadžbe. Kao što je aritmetička sredina više mjerenja bolja procjena mjerenja nego samo vrijednost jednog mjerenja, tako je i metoda najmanjih kvadrata bolja procjena jer se zasniva na više mjernih točaka nego sama interpolacija. Rezultat metode najmanjih kvadrata je manja nesigurnost kalibrirane jednadžbe. S više mjernih točaka bolje se može uočiti i ponašanje samog instrumenta, ali ujedno i mjerimo interpolacijsku pogrešku, koju možemo dodatno usporediti s izračunatom pogreškom.

Pretpostavimo da su  $a_0$ ,  $a_1$  i  $a_2$  koeficijenti kvadratne jednadžbe, koja je veza ulazne varijable i vanjske varijable temperature.

$$y'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (36)$$

I da smo imali  $N$  mjerenja  $(x_i, y_i)$  koja pokazuju vezu između ulazne varijable  $x$  i izlazne varijable  $y(x)$ . Metoda najmanjih kvadrata svodi se na minimiziranje funkcije  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (y'(x))]^2 \quad (37)$$

Suma kvadrata razlike za svaku mjernu točku mora biti minimalna, a rješenje se dobiva iz tri jednadžbe gdje su derivacije funkcije  $\chi^2$  jednake 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)x_i = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial a_2} &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)x_i^2 = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Jednadžbe (38) poznate su pod nazivom jednadžbe metode najmanjih kvadrata. Često se zapisuju i u matričnoj formi:

$$\begin{pmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Ili u simboličnom zapisu :

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{b} \quad (40)$$

## 4. UTJECAJNI PARAMETRI NA MJERNU NESIGURNOST

U ovom poglavlju analizirat će se utjecaji prijenosa topline na određivanje temperature.

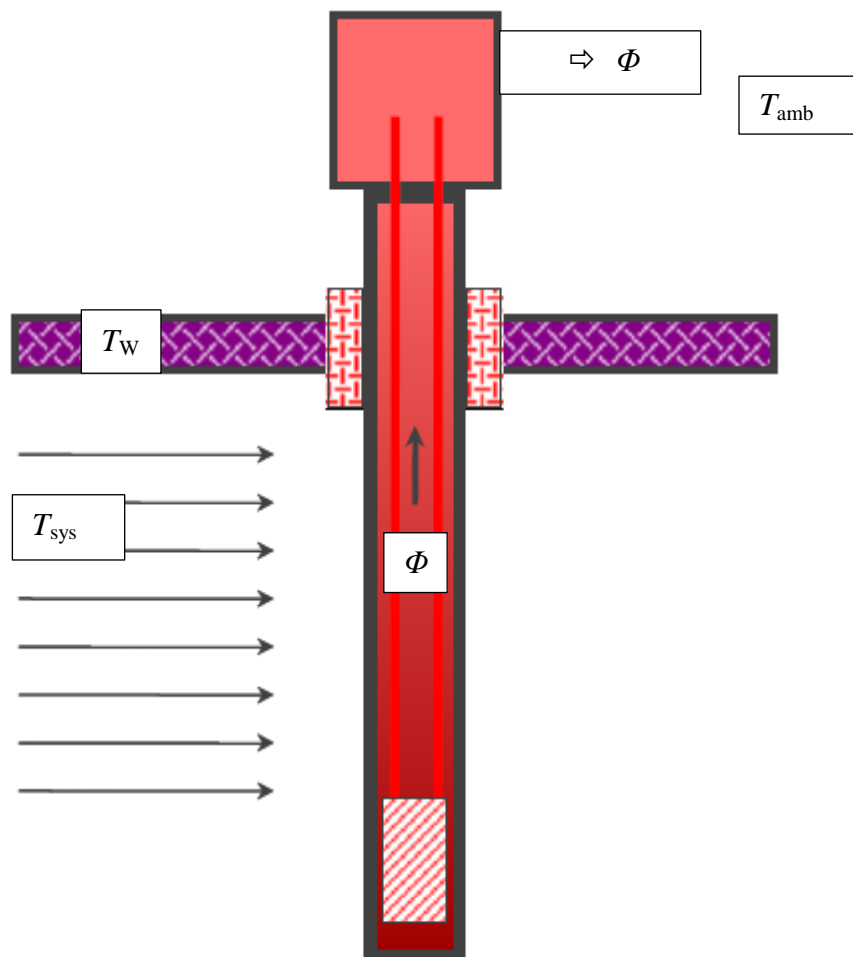
Toplina se može prenositi na tri načina: provođenjem, konvekcijom i zračenjem, stoga će se analizirati utjecaji pojedinog načina prijenosa topline. Sam termometar nije adijabatski, jer postoji izmjena topline zračenjem s okolinom, izmjena topline konvekcijom s medijem koji okružuje termometar i izmjena topline provođenjem kroz sondu termometra.

Izračun utjecaja ovih parametara je poprilično složen, jer nastojimo postići što veću točnost, koristeći modele za koje je zbog složenosti potrebna idealizacija, te se već tu stvara nova pogreška u odnosu stvarnu temperaturu. Npr. geometrija termometra nije pravilna, stoga se javljaju stagnacije i promjene u strujanju medija iz laminarnog u turbulentno. Također zbog stagnacije je i strujanje fluida kompresibilno za brzine i ispod  $1/3$  Machovog broja. Sam termometar ima masu iz koje slijedi da će biti potrebno vrijeme da se ta masa zagrije na temperaturu koju mjerimo. Termometar također zbog svoje mase ima i veliki toplinski kapacitet u odnosu na medij, npr. zrak. Temperatura onog što mjerimo nikad nije na svim mjestima jednaka, mi mjerimo lokalnu temperaturu, a ne temperaturu cijelog fluida ili tijela. Zračenje s okolinom koja je drukčije temperature od termometra, vjerovatno je jedan od najvećih izvora greške, jer termometar uvijek pokazuje svoju temperaturu, a ne temperaturu onog što mjeri.

### 4.1. Utjecaj provođenja kroz tijelo termometra

Termometar ne mjeri samo u intervalu okolišnih temperatura, on mjeri i temperature koje su puno više ili niže o temperature okoline, stoga postoje temperaturni gradijenti. Ova činjenica rezultira s krivom procjenom temperature jer se toplina prenosi s krajeva više temperature prema hladnijim krajevima niže temperature termometra. Također senzor je spojen na vodiče koji se ponašaju poput toplinskog mosta, i rezultiraju krivom temperaturom. Upravo su vodiči najčešće od metala koji dobro provodi toplinu. Promjer senzora ne bi trebao biti prevelik, da bi efekti odvođenja topline provođenjem kroz termometar bili smanjeni. Također s većim promjerom termometra povećava se toplinski kapacitet termometra i narušava se strujanje fluida. Dubina uronjenja termometra također ovisi o mediju čija se temperatura mjeri. Pri mjerenju temperature kapljevina koje struje nije potrebno uroniti termometar kao

kad se mjeri temperatura mirujućih plinova, jer prilikom strujanja kapljevine se izmjenjuje toplina intenzivno što nadoknađuje gubitke provođenja kroz termometar. Kod mirujućih plinova prijenos topline je mali stoga su gubici kroz termometar veliki u odnosu na njih i potrebno je uroniti dublje termometar.

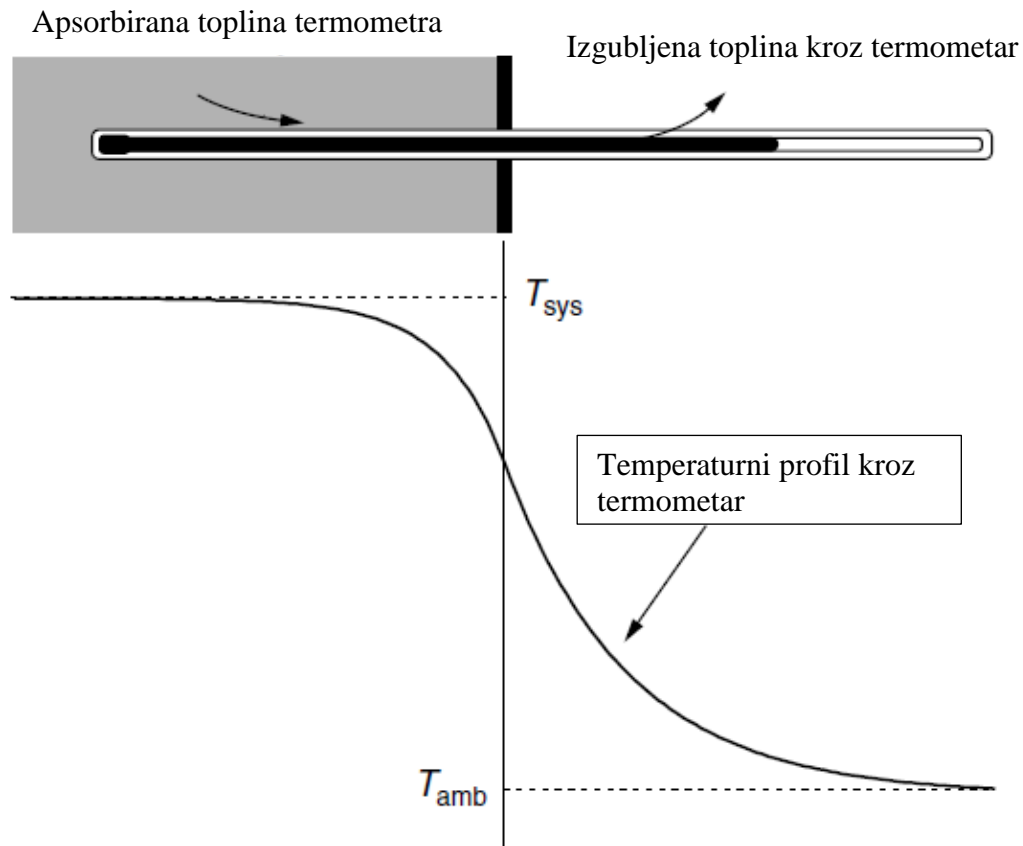


**Slika 16. Model toplinskig gubitaka zbog provođenja kroz termometar [5]**

Na slici 16. se vidi gubitak provođenjem zbog postojanja toplinskog mosta termometra. Temperaturna raspodjela takvog modela, slika 17., je da se temperatura medija  $T_{sys}$  nikad ne postiže već se vrh termometra približava toj vrijednosti, kao što se ne postiže nikad ni temperatura okoline  $T_{amb}$  na vanjskom dijelu termometra. Temperatura graničnog sloja nije ista kao temperatura sustava  $T_{sys}$ .



Prijenos topline provođenjem kroz termometar ovisi o temperaturnom gradijentu kroz termometar, iz čega slijedi da što je dublje uronjen termometar to je toplinski tok manji.



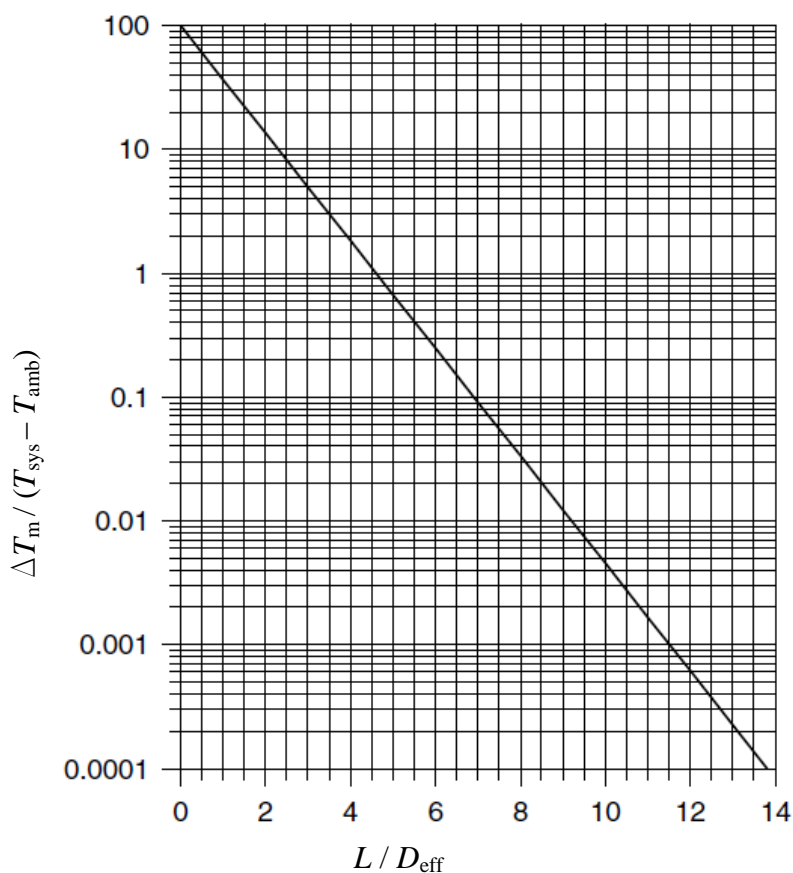
**Slika 17. Temperaturni profil kroz termometar uronjen do polovice [1]**

Najjednostavniji matematički model pogreške zbog uronjenja glasi:

$$\Delta T_m = (T_{amb} - T_{sys})K \exp\left(\frac{-L}{D_{eff}}\right) \quad (41)$$

Gdje je  $L$  dubina uronjenja termometra,  $D_{eff}$  efektivni promjer termometra i  $K$  konstantni faktor između 0 i 1, koji ovisi o temperaturnom otporu kroz termometar. Kad je  $K = 1$ , dobiva se minimalno uronjenje za koje će pogreška temperature biti prihvatljivo neznatna. Za  $K = 1$  nacrtana je temperaturna raspodjela na slici 17.

Na grafu sa slike 18. čija ordinata je u logaritamskom mjerilu vidi se da pogreška temperature opada s povećanjem dubine uronjenja i raste s povećanjem promjera termometra. Promjer termometra povećava prijenos topline kroz termometar, baš kao i električni vodič, što mu je promijer veći, to bolje provodi električnu struju.



Slika 18. Ovisnost relativne temperaturne pogreške o dubini uronjenja  $L$  i promjeru  $D_{\text{eff}}$  termometra [1]

#### 4.1.1. Pogreške zbog toplinskog kapaciteta termometra

Kad se termometar niže temperature uroni u sustav više temperature, termometar će promijeniti temperaturu, tako što će dio topline prijeći iz sustava na termometar. Očito je da sustav mora izgubiti jednako onoliko unutarnje energije koliko je predao termometru. Ako sustavu ne dovedemo toplinu istog iznosa, temperatura sustava će se sniziti proporcionalno sa svojim toplinski kapacitetom. Kad se uspostavi temperaturna ravnoteža između termometra i sustava oni će imati temperaturu koja je između vrijednosti temperatura njihovih početnih uvijeta. Izmjerena temperatura sustava i termometra  $T_{\text{izm}}$  se računa iz zakona o očuvanju energije:

$$T_{\text{izm}} = T_s + \frac{c_t}{c_s + c_t} (T_{\text{init}} - T_s) \quad (42)$$

Gdje su  $C_s$  i  $C_t$  toplinski kapaciteti sustava i termometra, a  $T_s$  i  $T_{int}$  početne temperature sustava i termometra. Drugi pribrojnik na desnoj strani u jednadžbi (42) predstavlja pogrešku u razlici temperatura.

Kao što je već ranije rečeno dva su načina za smanjenje pogreške zbog toplinskog kapaciteta, jedna je zagrijavanje termometra na temperaturu blizu temperature sustava prije uranjanja. A drugi način je izrada termometra s manjim toplinskim kapacitetom.

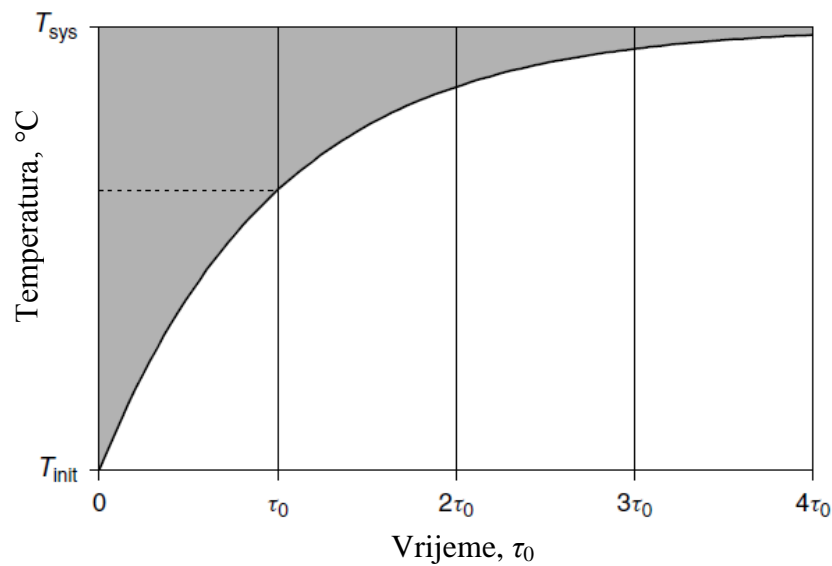
#### 4.1.2. Pogreške zbog vremenske konstante termometra

Termometar poput svakog sustav ima svoju dinamiku s kojom teži u stacionarnu vrijednost, prilikom poremećaja. Uronjenjem termometra različite temperature u medij kojemu se mjeri temperatura, potrebno je vrijeme da bi se uspostavila temperaturna ravnoteža, ako ne prođe dovoljno vremena i napravi se očitavanje temperature tada slijedi pogreška. Ta pogreška ovisi o vremenu i sve je manja što je više vremena prošlo. Dva su modela za izračun pogreške, kad je temperatura medija konstantna i kad je temperatura medija promjenjiva.

Kad je temperatura medija konstantna slijedi izraz za izračun pogreške:

$$\Delta T_m = (T_{init} - T_{sys}) \exp\left(\frac{-t}{\tau_0}\right) \quad (43)$$

Gdje su  $T_{init}$  i  $T_{sys}$  početne temperature termometra i sustava, a  $t$  je vrijeme mjereno od uranjanja termometra, a  $\tau_0$  je vremenska konstanta termometra. Jednadžba (43) u grafičkom obliku izgleda kao na slici 19.



**Slika 19. Promjena temperature termometra s vremenom nakon uranjanja [1]**

Vremenska konstanta termometra po definiciji je:

$$\tau_0 = R_C C_t \quad (44)$$

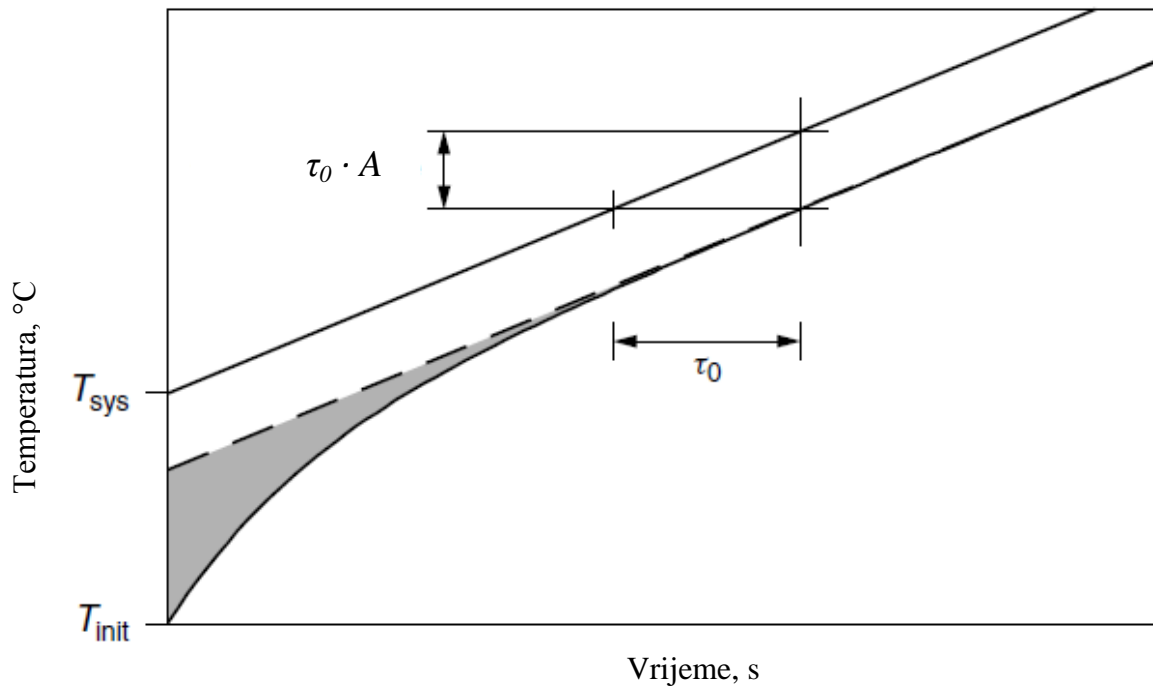
Gdje je  $R_C$  toplinski otpor termometra koji je proporcionalan s promjerom termometra, a  $C$  je toplinski kapacitet termometra.

Vrijeme potrebno da pogreška zbog vremenske konstante termometra bude 1% je  $5 \tau_0$ , a da bude 0.1% je  $7 \tau_0$ .

Kad je temperatura medija promjenjiva, linearno raste, slijedi izraz za računanje pogreške:

$$\Delta T_m = -(T_0 - A\tau_0 - T_i) \exp\left(\frac{-\tau}{\tau_0}\right) - A\tau_0 \quad (45)$$

Gdje je prvi pribrojnik na desnoj strani eksponencijalni oblik greške, a drugi je konstantni oblik pogreške. Oba pribrojnika su negativna, jer je temperatura očitavanja sigurno niža od temperature termometra (termometar kasni). U jednadžbi (45)  $A$  je nagib rasta vrijednosti krivulje, što se vidi na slici 20.



Slika 20. Promjena temperature termometra uz promjenjivu temperaturu medija [1]

Utjecaj pogreške promjenjive temperature medija može se smanjiti smanjenjem eksponencijalnog utjecaja, tako da pravimo veći vremenski razmak između očitavanja temperatura. Ili možemo smanjiti konstantni utjecaj, tako da se smanji toplinski kapacitet i toplinski otpor termometra.

Primjer pogreška zbog provođenja topline: kroz cijev temperature  $T_w$  struji plin temperature  $T_g$ . Temperatura plina je konstantna po poprečnom presjeku cijevi. Temperatura termometra je označena s  $T_T$  kao na slici 21.

Diferencijalna jednačina za ovaj primjer koja proizlazi iz jednačbe provođenja:

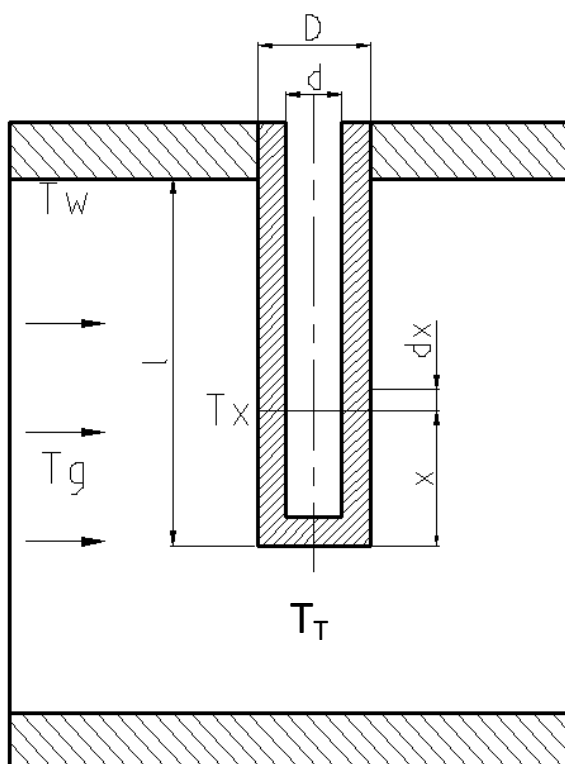
$$\frac{d^2 T_x}{dx^2} = m = \left( \frac{\pi D \alpha}{\lambda A} \right), \quad \text{gdje je } A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \quad (46)$$

Ako nema prijenosa topline u vrhu samog termometra onda vrijedi:

$$\left. \frac{dT_x}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (47)$$

Iz izraza (46) i (47) dobiva se konačni izraz za pogrešku:

$$\Delta T_k = T_T - T_g = \Delta T = \frac{T_w - T_g}{\cosh(ml)} \quad (48)$$



Slika 21. Primjer računanja pogreške provođenja

#### 4.2. Utjecaj izmjene topline zračenjem

Zračenje je vjerojatno najveći izvor pogrešaka pri mjerenju temperature. Izvori zračenja kao što su Sunce, lampe, kotlovi, peći i električni grijači odaju toplinu prema termometru koji se nalazi u blizini, što rezultira prikazivanjem temperature koja je viša nego temperatura medija. Često je pogreška prilikom osvjetljenja senzora da bi se očitao rezultat mjerenja, pa se zato koriste nisko-energetske fluorescentne lampe. Mjerenjem temperature zraka u prostoriji ili temperature površine, termometar uvijek ima prostornu površinu koja je okrenuta prema izvorima pogreške. Pri mjerenju sobne temperature u prostoriji svi objekti zrače i izmjenjuju toplinu jedni s drugima, a to iznosi u prosjeku oko  $500 \text{ Wm}^{-2}$ , što nije zanemarivo.

Termometar u prisutstvu peći, može imati i pogrešku od nekoliko stupnjeva. Dva su osnovna načina za smanjenjem utjecaja zračenja. Prvi je ukloniti izvor zračenja, a drugi je zaštititi izvor ili termometar. Najbolja zaštita od zračenja je jako reflektivan metalni lim niskog faktora emisivnosti  $\epsilon$ . Problem kod lima oko termometra je što se s njim ograničava strujanje oko senzora termometra.



Pogreška utjecaja zračenja se može smanjiti:

- Smanjenjem faktora emisivnosti termometra,  $\varepsilon_T$ , to se ostvaruje s poliranjem površine termometra
- Povećanjem koeficijenta prijelaza topline konvekcijom na termometar,  $\alpha_c$ , to se ostvaruje najjednostavnije porastom protoka fluida na termometar
- Smanjenjem razlike između temperature stijenke i temperature termometra,  $(T_T - T_w)$ , to se ostvaruje izolacijom cijevi s vanjske strane kako bi se temperatura stijenke povišala
- Zaklanjanjem termometra s reflektirajućim ekranom, ekran povećava toplinski otpor izmjene topline zračenjem

### 4.3. Utjecaj izmjene topline konvekcijom

Prijenos topline konvekcijom je prijelaz topline s krute stijenke na fluid u gibanju ili mirovanju. Praktični način proračuna temelji se na Newtonovom stavku:

$$q = \alpha_c (T_s - T_f) \quad (52)$$

Gdje je:

$\alpha_c$  = koeficijent prijelaza topline,  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

$T_s$  = temperatura stijenke krutine, K

$T_f$  = temperatura fluida, K

$q$  = gustoća toplinskog toka,  $\text{Wm}^{-2}$

Razlika temperatura u jednadžbi (52) osim što označuje potencijal za izmjenu topline, označuje i temperaturni pad u graničnom sloju fluida koji se formira neposredno uz stijenku, i to je glavni izvor pogreške zbog utjecaj konvekcije na mjerenje temperature kontaktnim termometrom.

Otpor konvekcije  $R_c$ , na neku plohu  $A$ , definira se kao:

$$R_c = \frac{T_s - T_f}{\Phi} = \frac{1}{\alpha_c A} \quad (53)$$



Postoje tri vrste konvekcije, to su:

- Prirodna ili slobodna konvekcija gdje se čestice fluida koje su bliže stijenci zagriju i imaju manju gustoću, uzgon ih zbog manje gustoće diže uvis i tako ostvaruju gibanje čiji intenzitet je ovisan o izmjeni topline
- Prisilna konvekcija gdje se gibanje fluida podržava umjetno (pumpa, ventilator) bez obzira na prijelaz topline
- Kombinirana konvekcija gdje se čestice fluida simultano ponašaju po mehanizmu i prirodne i prisilne konvekcije

U praksi se najčešće radi o prisilnoj konvekciji, osim kad se mjeri temperatura mirujućeg fluida, kao što je npr. temperatura zraka u prostoriji. U ovom poglavlju biti će više govora o prisilnoj konvekciji, kod koje razlikujemo konvekciju turbulentnog i laminarnog strujanja. Turbulentno strujanje je strujanje fluida u kojem je mješanje čestica fluida u presjeku okomitom na os strujanja intenzivno, te je prijenos topline također intenzivan. Laminarno strujanje je strujanje fluida bez vertikalnog mješanja čestica fluida, stoga je prijenos topline slabiji nego kod turbulentnog strujanja.

Bezdimenzijske značajke:

- Nu = Nusseltov broj, karakterizira prijelaz topline stijenka-fluid  $Nu = \frac{\alpha L}{\lambda_f}$
- Pr = Prandtllov broj, prikazuje odnos konvekcije i difuzije čestica  $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$
- Re = Reynoldsov broj, karakterizira odnos između sila inercije i trenja  $Re = \frac{\rho w L}{\mu}$
- Gr = Grashofov broj, karakterizira sile uzgona u fluidu koje nastaju zbog razlika u gustoći fluida  $Gr = \frac{\rho^2 \beta g L^3 \Delta T}{\mu^2}$

Bitno je napomenuti da je koeficijent prijenosa topline  $\alpha$ , za razne tipove prijenosa topline, lako predvidljiv interval u kojem će se kretati iz prijašnjeg iskustva, neki intervali prikazani su u tablici 4.

Reynoldsov broj Re karakterističan je za prisilnu konvekciju, što se vidi i po tome što izraz sadrži brzinu  $w$ . Dok je Grashofov broj Gr karakterističan za slobodnu konvekciju, u izrazu sadrži razliku temperatura.

**Tablica 4. Vrijednosti koeficijenta konvektivnog prijenosa topline  $\alpha$ ,  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  [11]**

Tekućina	Slobodna konvekcija	Prisilna konvekcija
Plinovi	5 – 30	30 – 300
Voda	30 – 300	300 – 10000
Viskozna ulja	5 – 100	30 – 3000
Kapljeviti metali	50 – 500	500 – 20000
Isparivanje vode	2000 – 20000	3000 – 100000
Kondenzacija vodene pare	3000 – 30000	3000 – 200000

Bezdimenzijskim značajkama opisan je osnovni model prisilne konvekcije na ravnu stijenku:

$$Nu = C \cdot Re^m Pr^n \quad (54)$$

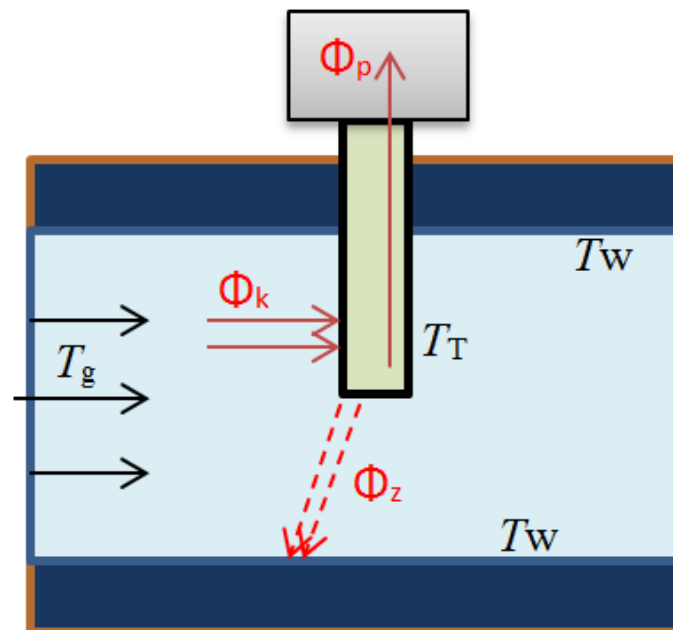
Gdje su  $m$  i  $n$  eksponenti bezdimenzijske značajke ovisni o vrsti strujanja, a faktor  $C$  ovisi o geometriji površine za izmjenu topline. Vrijednosti ekponenata se mogu otprilike uzeti  $m = 0.5$  za laminarno strujanje, a za turbulento strujanje je  $m = 0.8$ .

**Tablica 5. Koeficijent i ekponenti za okomito strujanje na cilindar [12]**

C	m	n	Re	Izvor
0.26	0.6	0.3	1000 do 40000	McAdams
0.193	0.618	0.31	4000 do 400000	Eckert
0.02653	0.805	0.31	40000 do 400000	Grober
0.478	0.5	0.3	250 do 30000	Scadron i Warshawsky

Primjer: na slici 23. prikazan je model koji sadrži termometar temperature  $T_T$  i površine  $A_T$  koji se nalazi u cijevi temperature  $T_w$  i površine  $A_w$  u kojoj struji medij temperature  $T_g$ . Bilanca topline u stacionarnom stanju glasi: Sva toplina koju prima termometar dolazi od fluida konvekcijom, te se onda gubi na zračenje termometra okolnim stijenkama i na provođenje kroz termometar:

$$\Phi_c = \Phi_r + \Phi_k \quad (55)$$



**Slika 23. Primjer utjecaja izmjene topline konvekcijom na mjerenje temperature**

Jednadžba (55) raspisano s modelima prijenosa topline glasi:

$$\alpha_c A_T (T_g - T_T) = C_{T,w} A_T \left[ \left( \frac{T_T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_w}{100} \right)^4 \right] + \Phi_k \quad (56)$$

Pretpostavka da je termometar konsantne temperature  $T_T$ , cijelom dužinom, ima za posljedicu da je gubitak samo na vanjskoj strani termometra prema okolini, koji se zbog složene geometrije neće računati.

Pogreška termometra zbog utjecaja konvekcije na mjerenje temperature glasi:

$$\Delta T_c = T_g - T_T = \frac{C_{T,w}}{\alpha_c} \left[ \left( \frac{T_T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_w}{100} \right)^4 \right] + \frac{\Phi_k}{\alpha_c A_T} \quad (57)$$

Pogreška se može smanjiti utjecanjem na samu konvekciju ili utjecanjem na zračenje i provođenje. Utjecajem na smanjenje gubitaka termometra zračenjem i provođenjem puno je efektivniji. A oni se mogu smanjiti već ranije spomenutim metodama u ranijim poglavljima.

Utjecaj na samu konvekciju, svodi se na povećanje koeficijenta konvektivnog prijenosa topline  $\alpha_c$  kojeg je teško povećati, a da se ne mjenja stanje medija kojemu mjerimo temperaturu.

Ostvarivanje turbulentnog strujanja oko termometra svakako je prvi korak, s čime se povećava koeficijenta konvektivnog prijenosa topline  $\alpha_c$ , i više od 10 puta.

Drugi korak bi bilo povećanje brzine strujanja na termometar s čime bi se osigurao veći Re broj, a time i manji granični sloj koji predstavlja otpor prolasku topline konvekcijom.

#### 4.4. Zajednički utjecaj više parametara na mjernu nesigurnost

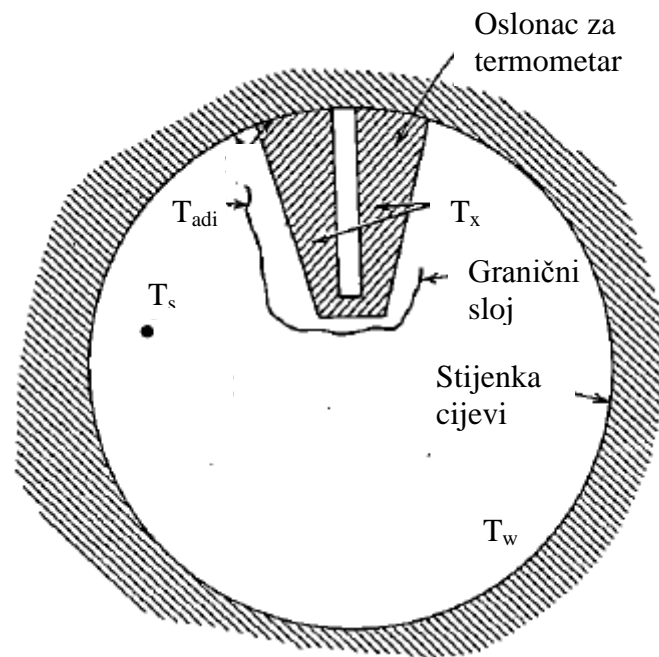
Dvije su metode za izračun utjecaja više parametara na mjernu nesigurnost. Prva metoda je osnovana na pretpostavci da su utjecaji provođenja, konvekcije i zračenja na mjernu pogrešku međusobno neovisni jedan o drugom. Metoda se sastoji od postupka izračuna svakog utjecaja provođenja, konvekcije i zračenja na pogrešku u mjerneju odvojeno kako je prikazano u prijašnjim poglavljima. Također za ovu metodu mogu se i utjecaji zasebno eksperimentalno izračunati. Kad se izračuna utjecaj provođenja  $\Delta T_k$ , utjecaj konvekcije  $\Delta T_c$  i utjecaj zračenja  $\Delta T_r$ , ukupna pogreška međusobno neovisnih utjecaja računa se kvadratnom sredinom tih utjecaja:

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_k^2 + \Delta T_c^2 + \Delta T_r^2} \quad (59)$$

Ova metoda je veoma praktična zbog njene mogućnosti usporedbe s eksperimentalnim rezultatima po pojedinim utjecajima, ali ona je samo aproksimacija i dobra procjena veličine pogreške više utjecaja. Za veću točnost međusobno ovisnih utjecaja koriste se ponderi za svaki utjecaj koji nastoje pojačati jedan utjecaj nasprem drugog. Iz čega slijedi da i najmanji kvantitativni utjecaj može biti bitan za zajednički utjecaj.

Druga metoda je izrada modela koji će sadržavati istovremeno provođenje, konvekciju i zračenje topline na sustav termometra. Ova metoda se primjenjuje kad su pogreške pri mjerenju zbog provođenja, konvekcije i zračenja u međusobnoj ovisnosti, najčešće je to preko same temperaturne raspodjele kroz termometar.

Ova metoda detaljno će biti prikazana na primjeru termometra okomito uronjenog u cijev kroz koju struji plin. Termometar se nalazi u svom osloncu koji je promjenjivog poprečnog presjeka., kao na slici 24.



**Slika 24. Primjer kombiniranog modela izračuna pogreške (strujanje plina je okomito na sliku) [12]**

Termometar na slici 24. prima toplinu konvekcijom, a toplinu odaje zračenjem i provođenjem.

Kvaliteta i kvantiteta izmjene topline ovise o:

- Graničnom sloju
- Svojstvima plina
- Termodinamičkom stanju plina
- Vrsti konvekcije (prirodi kretanja plina)

Za diferencijalni element termometra (senzora) na slici 25. možemo napisati 1. zakon termodinamike:

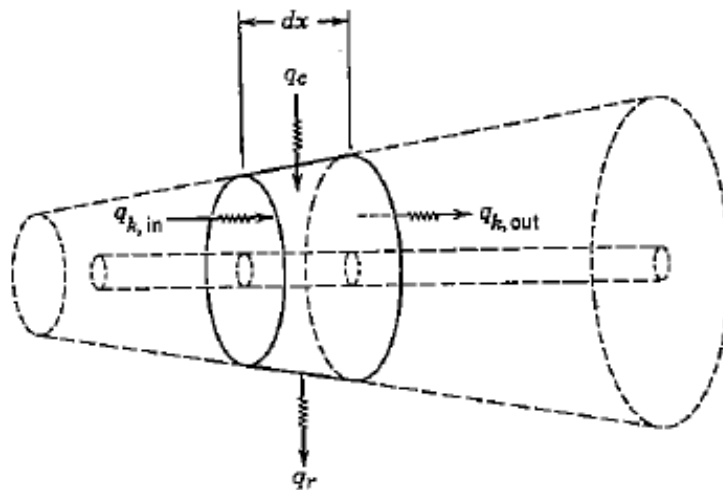
$$dq_c = dq_r + \frac{dq_k}{dx} dx \quad (60)$$

Gdje je:

$q_c$  = toplinski tok konvekcije

$q_k$  = toplinski tok provođenja

$q_r$  = toplinski tok zračenja



Slika 25. Diferencijalni element oslonca termometra [12]

Toplinski tok konvekcije

Toplina se prenosi s plina na senzor konvekcijom, te je opisana Newtonovom jednačbom hlađenja:

$$dq_c = \alpha_c dA_c (T_s - T_x) \quad (61)$$

Gdje je  $T_s$  statička temperatura plina, a  $T_x$  temperatura senzora. Ako se plin giba brzinom  $w$ , čiji utjecaj na temperaturu nije zanemariv ni savršeno adijabatski senzor neće pokazivati statičku temperaturu plina, već adijabatsku temperaturu  $T_{adi}$  koja je u odnosu na statičku temperaturu  $T_s$  viša za utjecaj brzine:

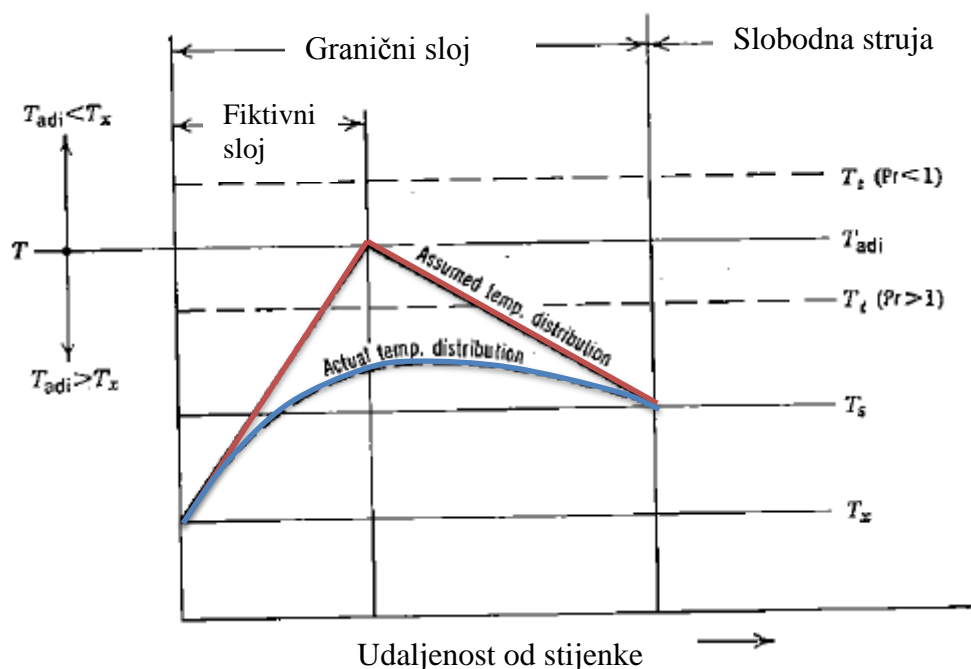
$$T_{adi} = T_s + \frac{Pr^{\frac{1}{3}} w^2}{2Jg c_p} \quad (62)$$

Gdje je  $c_p$  specifični toplinski kapacitet plina pri stalnom tlaku konstantan u intervalu temperatura od  $T_{adi}$  do  $T_s$ ).  $J$  je konstanta, mehanički ekvivalent topline ( $0.10195 \text{ s}^2\text{m}^{-1}$ ).

Kad se na Newtonovu jednačbu hlađenja (61) primjeni pretpostavka adijabatske temperature:

$$dq_c = \alpha_c dA_c (T_{adi} - T_x) \quad (63)$$

Temperaturna distribucija kroz plin u graničnom sloju kroz plin u stvarnosti odstupa od adijabatske temperature, slika 26. Crvena krivulja je pretpostavljena temperaturna distribucija, a plava krivulja je stvarna temperaturna distribucija u graničnom sloju.



Slika 26. Stvarna i pretpostavljena temperaturna distribucija u graničnom sloju [12]

### Toplinski tok zračenja

Međusobno izmjenjivanje topline zračenjem između senzora, plina i bliskih stijenki. Za crno tijelo zračenje je opisano Stefan-Boltzmannovim zakonom.

Ukupna energija koju senzor emitira plinu i stijenkama i refleksijom se vraća na senzor (prema McAdams i Grober):

$$dq_{r,x} = \sigma \varepsilon_x dA_r T_x^4 \left[ \varepsilon_{g,g} \frac{\varepsilon_x + 1}{2\varepsilon_x} + (1 - \varepsilon_{g,x}) \right] \quad (64)$$

Ukupna energija koju plin emitira na termometar:

$$dq_{r,g} = \varepsilon_x \sigma \varepsilon_{g,g} dA_r T_{adi}^4 \quad (65)$$

Ukupna energija koju stijenka emitira termometru:

$$dq_{r,w} = \sigma (1 - \varepsilon_{g,w}) \varepsilon_x dA_r T_w^4 \quad (66)$$

Ukupna energija koja dolazi zračenjem na senzor kombiniranjem izraza (64), (65) i (66):

$$dq_r = \sigma \varepsilon_x dA_r \left\{ \left[ 1 + \varepsilon_{g,x} \left( \frac{\varepsilon_x + 1}{2\varepsilon_x} - 1 \right) \right] T_x^4 - \frac{\varepsilon_x + 1}{2\varepsilon_x} \varepsilon_{g,g} T_{adi}^4 - (1 - \varepsilon_{g,w}) T_w^4 \right\} \quad (67)$$

Često se izraz (67) zapisuje preko koeficijenta prijelaza topline zračenjem:

$$\alpha_r = \frac{\sigma \varepsilon_r (T_x^4 - T_w^4)}{T_x - T_w} \quad (68)$$

Gdje je:

$$\varepsilon' = \varepsilon_x \left[ 1 + \frac{\varepsilon_{g,x} \left( \frac{\varepsilon_x + 1}{2\varepsilon_x} - 1 \right) T_x^4 - \varepsilon_{g,g} T_{adi}^4 + \varepsilon_{g,w} T_w^4}{(T_x^4 - T_w^4)} \right] \quad (69)$$

### Toplinski tok provođenja

Provođenje topline kroz termometar opisuje se Fourierovim stavkom.

Provođenje za promjenjivi poprečni presjek:

$$\frac{dq_k}{dx} dx = -\lambda A_k \frac{d^2 T_x}{dx^2} dx - \lambda \frac{dT_x}{dx} \frac{dA_k}{dx} dx \quad (70)$$

### Bilanca svih tokova

Kombinirani utjecaj svih vrsta izmjene topline se dobiva uvrštavanjem (63), (67) i (70) u jednadžbu 1. zakona termodinamike (60):

$$\frac{d^2 T_x}{dx^2} + a_1 \frac{dT_x}{dx} - a_2 T_x = -a_2 a_3 \quad (71)$$

Gdje je:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{dA_k}{A_k dx} \\ a_2 &= \frac{dA_c (\alpha_r + \alpha_c)}{\lambda A_k dx} \\ a_3 &= \frac{\alpha_c T_{adi} + \alpha_r T_w}{\alpha_c + \alpha_r} \end{aligned} \quad (72)$$

Jednadžba (71) je nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda i prvog stupnja, i kao takva nema poznato rješenje u zatvorenoj formi. Nelinearna je jer su koeficijenti  $a_2$  i  $a_3$  funkcije ovisne o varijabli  $T_x$ . U oba slučaja  $T_x$  se nalazi u izrazu za koeficijent prijelaza topline zračenjem  $\alpha_r$ . Postoje najmanje tri pristupa za rješavanje jednadžbe (71).

### Rješenje vrha termometra

Ako zanemarimo utjecaj provođenja u jednadžbi (71), temperatura na vrhu termometra je jednaka kao i temperatura cijelog termometra.

$$T_{tip} = a_3 = \frac{\alpha_r T_w + \alpha_c T_{adi}}{\alpha_r + \alpha_c} \quad (73)$$



Ova temperatura vrha termometra kao rješenje uvijek je viša nego što je to u stvarnosti zbog pretpostavke da kroz termometar nema provođenja topline. Provođenje topline kroz termometar odvodi toplinu s vrha termometra kroz termometar i time teži smanjenju temperature vrha termometra.

### Rješenje cjelokupnom linearizacijom

Ovom metodom koeficijent prijelaza topline zračenjem  $\alpha_r$  je ovisan o prosječnoj temperaturi termometra  $T_x$ . Uz uvjet da je  $(T_{adi} - T_w) \ll T_w$  koji je zadovoljen u svakom praktičnom slučaju. Temperatura termometra  $T_x$  je najčešće aproksimirana prosječnom vrijednosti termometra po dužini:

$$\bar{T}_x = \frac{\int_0^L T_x dx}{L} \quad (74)$$

Dodatna pretpostavka je da je oslonac termometra pravilni valjak, stoga je poprečni presjek oslonca  $A_k$  konstantan i neovisan o varijabli  $x$ . Iz toga slijedi da su izrazi jednadžbe (72)  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  svi konstantni i da je jednadžba (71) linearizirana. Rješenje u zatvorenoj formi linearizirane jednadžbe (71) je:

$$\frac{T_x - a_3}{T_w - a_3} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \quad (75)$$

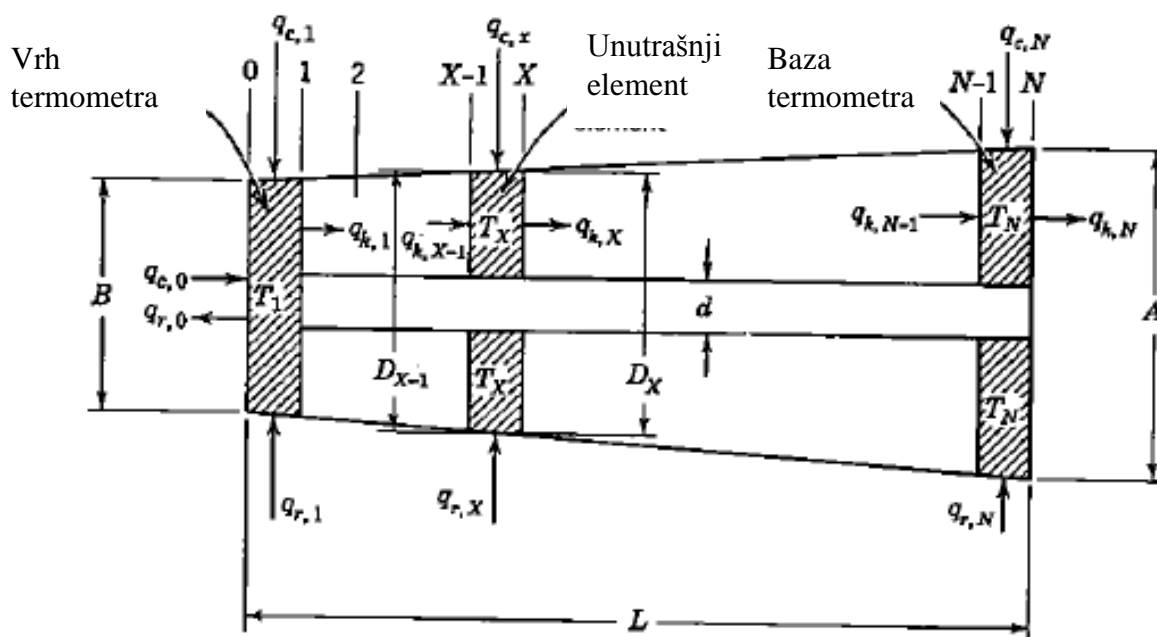
Gdje je

$$m = \left[ \frac{4D(\alpha_r + \alpha_c)}{\lambda(D^2 - d^2)} \right]^{0.5} \quad (76)$$

Ova metoda vodi do brzog aproksimacijskog rješenja za slučaj kad se može pretpostaviti da je plin medij koji ne apsorbira i ne emitira zračenje, već da ima dijatermijski faktor jednak 1. Ali u praksi cjelokupna linearizacija daje nepouzdana rezultate.

### Rješenje postepenom linearizacija

Ova metoda se temelji na podjeli termometra i njegovog oslonca uzdužno na konačan broj elemenata kao na slici 27. Ova metoda se naziva metoda konačnih razlika. Temperatura  $T_x$  u središtu svakog elementa predstavlja temperaturu cijelog tog elementa. Broj podjela konačnih razlika može se povećati do željene točnosti aproksimacije za jednadžbu (71). Energetska bilanca toplinskih tokova je objašnjena na pojedinim djelovima modela.



Slika 27. Model konačnih razlika za postepenu linearizaciju [12]

Vrh termometra

Energetska bilanca za element vrha termometra:

$$\alpha_c (A_{c,0} + A_{c,1}) (T_{adi} - T_1) = \alpha_{r,1} (A_{r,0} + A_{r,1}) (T_1 - T_w) + \frac{\lambda A_{k,1} (T_1 - T_2)}{\Delta x} \quad (77)$$

Iz koje slijedi temperatura  $T_2$ , potrebna za izračun pojedinih temperatura unutarnjih elemenata:

$$T_2 = T_1 - \left( \frac{A_{c,0} + A_{c,1}}{A_{k,1}} \right) \frac{\Delta x}{\lambda} [\alpha_c T_{adi} - (\alpha_{r,1} + \alpha_c) T_1 + \alpha_{r,1} T_w] \quad (78)$$

Unutrašnji element termometra

Energetska bilanca za unutrašnji element termometra:

$$\alpha_c A_{c,x} (T_{adi} - T_x) + \frac{\lambda A_{k,x-1} (T_{x-1} - T_x)}{\Delta x} = \alpha_{r,x} A_{r,x} (T_x - T_w) + \frac{\lambda A_{k,x} (T_x - T_{x+1})}{\Delta x} \quad (79)$$

Iz kojeg slijedi temperatura svakog unutrašnjeg elementa  $T_{x+1}$ :

$$T_{x+1} = \left( 1 + \frac{A_{k,x-1}}{A_{k,x}} \right) T_x - \left( \frac{A_{k,x-1}}{A_{k,x}} \right) T_{x-1} - \left( \frac{A_{c,x}}{A_{k,x}} \right) \left( \frac{\Delta x}{\lambda} \right) [\alpha_c T_{adi} - (\alpha_c + \alpha_{r,x}) T_x + \alpha_{r,x} T_w] \quad (80)$$

Baza termometra

Energetska bilanca baze termometra ista je kao i za unutrašnji element (79), samo je u izraz uvršteno  $x = N$  i toplinski tok provođenja je na duplo manjem elementu:

$$\alpha_c A_{c,N} (T_{adi} - T_N) + \frac{\lambda A_{k,N-1} (T_{N-1} - T_N)}{\Delta x} = \alpha_{r,N} A_{r,N} (T_N - T_w) + 2 \frac{\lambda A_{k,x} (T_N - T_w)}{\Delta x} \quad (81)$$

Iz koje slijedi izračunata vrijednost proračunske temperature stijenke  $T'_w$ :

$$T'_w = \left(1 + \frac{A_{k,N-1}}{2A_{k,N}}\right) T_N - \left(\frac{A_{k,N-1}}{2A_{k,N}}\right) T_{N-1} - \left(\frac{A_{c,N}}{A_{k,N}}\right) \left(\frac{\Delta x}{\lambda}\right) [\alpha_c T_{adi} - (\alpha_c + \alpha_{r,N}) T_N + \alpha_{r,N} T_N] \quad (82)$$

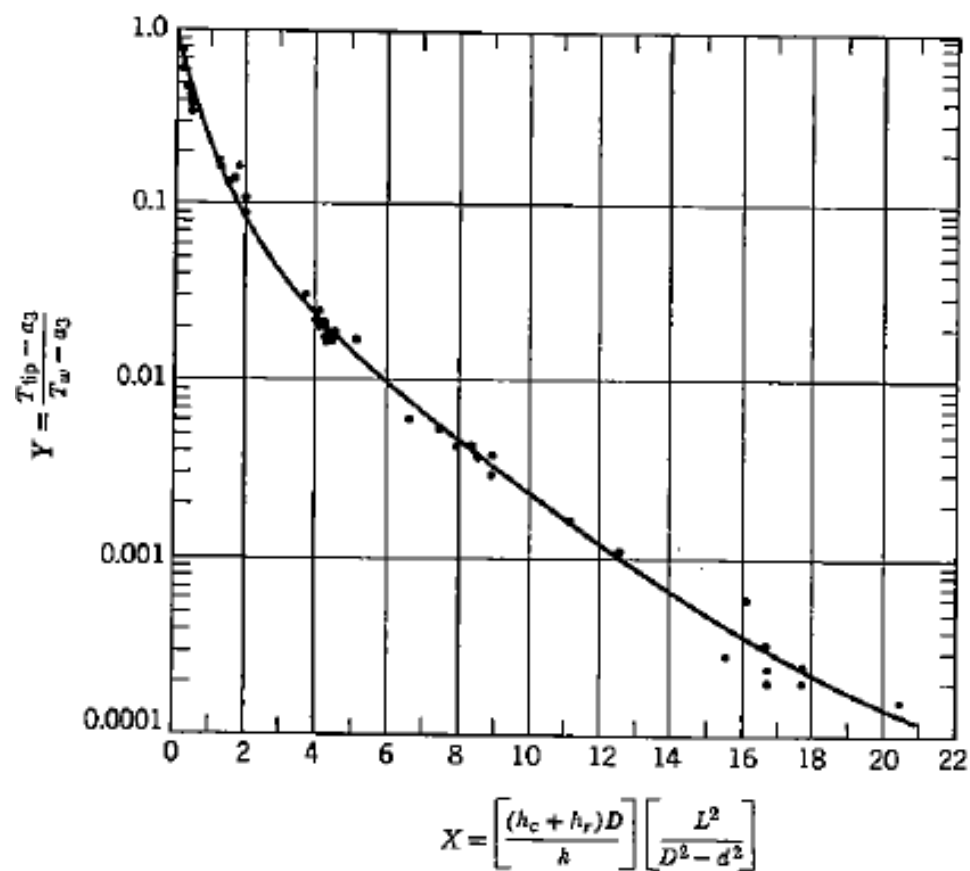
Postupak rješavanja:

Prvo se predpostavi temperatura  $T_1$  s  $T_{adi}$ , iz izraza (78), (80) i (82) slijede sve ostale temperature ( $T_2, T_3, \dots, T_N$  i  $T'_w$ ). Izračunata temperatura stijenke  $T'_w$  je uspoređena s stvarnom temperaturom stijenke  $T_w$ , razlikom između tih temperatura pretpostavimo novu temperaturu  $T_1$ . Newtonovom iteracijskom metodom brzo dobivamo temperaturnu raspodjelu kroz termometar. Ova metoda je najtočnija, i prikladna je samo za račun na računalu.

Zbog kompleksne veze između puno varijabli koje su uključene u prijenos topline, lako je izgubiti fizikalne utjecaje kontrolnih varijabli. Na slici 28. prikazana je sumarna krivulja za puno riješenih problema postepenom linearizacijom. Koordinatne osi grafa su parametri iz izraza (75) i (76) za cjelokupnu linearizaciju. U stvarnosti problem je nelinearan, stoga ne postoji egzaktno grafičko rješenje. Granice mjerne nesigurnosti su relativno uske oko cjelokupnog lineariziranog modela, iz čega se i vidi točnost samog lineariziranog modela.

Intervali varijabla na slici 28.:

- $0 < \epsilon_w < 1$
- $0 < \epsilon_{fluid} < 1$
- $1 < \lambda < 20, \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
- $1 < \alpha_c < 1000, \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
- $50 < L < 2500, \text{ mm}$
- $0.16 < D < 5, \text{ mm}$
- $0 < d < 0.634, \text{ mm}$



Slika 28. Sumarna krivulja za 20 postepeno lineariziranih rješenja [12]

Rješenja na slici 28. provedena su na temperaturama termometra od 20 °C do 650 °C.

## 5. DISPOZICIJE TERMOMETRA U RAZNIM PRORAČUNSKIM UVJETIMA

U praksi termometri se ugrađuju u različitim pozicijama i mjere temperature različitih medija. Pravilnom ugradnjom termometra i poznavanjem svojstva medija čija se temperatura mjeri i njegovih karakteristika možemo smanjiti mjernu nesigurnost izmjerene temperature, s čime je i samo mjerenje točnije. Utjecaj provođenja, utjecaj konvekcije i utjecaj zračenja pripadaju u utjecaje ugradnje termometra na mjernu nesigurnost.

Svakodnevno se koriste termometri u raznim uvjetima, stoga je nemoguće prikazati sve dispozicije termometra, u ovakvom radu. Ali će biti prikazane one najčešće korištene i one koje su korištene u eksperimentalnom radu. Također u poglavlju 4.4. već je prikazana dispozicija termometra u cijevi.

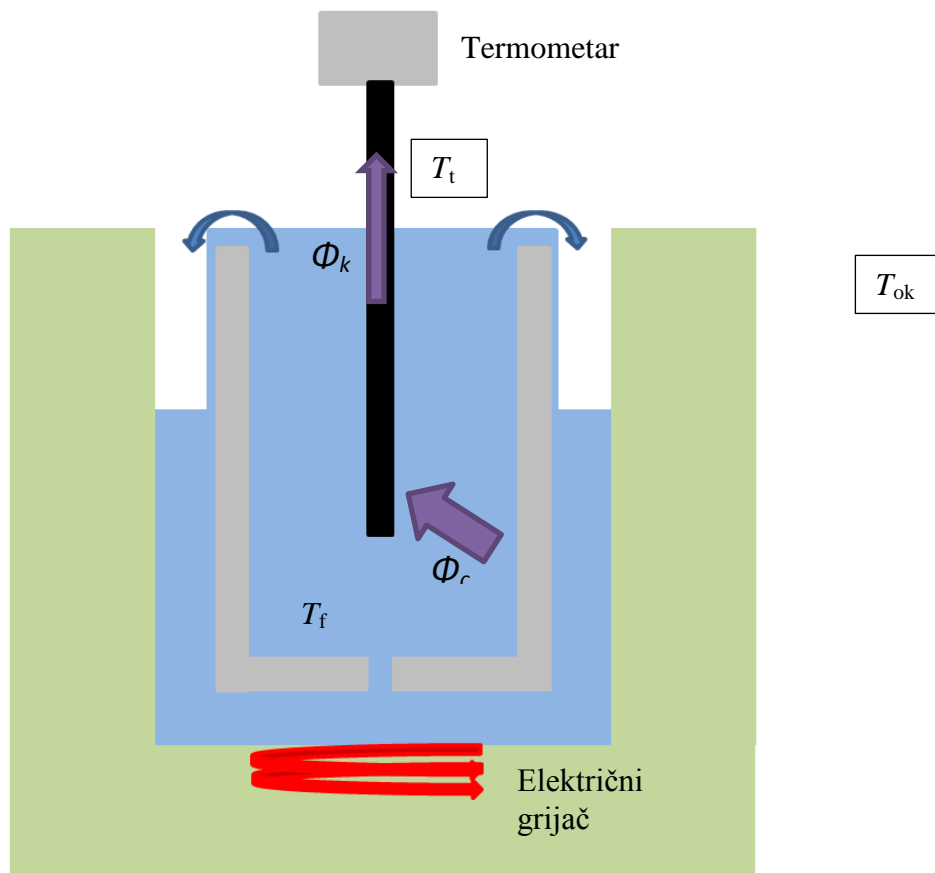
### 5.1. Termometar u kupki

Kupke su uređaji koji se koriste za umjeravanje termometra. Sastoje se od posebno konstruirane izolirane posude u kojoj se nalazi kapljevina za umjeravanje termometra (najčešće destilirana voda), električnog grijača, regulacijskih uređaja. Također uz električni grijač često se nalazi i ljevokretni rashladni uređaj za umjeravanje na temperature ispod temperature okoliša. U posudi se nalazi i mješalica koja omogućava cirkulaciju kapljevine oko termometra i ujednačavanje temperature kapljevine u kupki, tj. smanjuje temperaturne gradijente u kupki.

U kupki utjecaj zračenja na pogrešku mjerenja temperature je zanemariv, već prevladava utjecaj provođenja kroz termometar na pogrešku u mjerenju. Izmjena topline je zanemariva, jer su stijenke približno iste temperature kao i temperatura kapljevine u kupki, zbog visokog koeficijenta prijelaza topline konvekcijom između kapljevine i stijenke. Na slici 29. prikazana je dispozicija termometra u kupki. Prijenos topline u stacionarnom stanju je konvekcijom s kapljevine na termometar kroz koji provođenjem se odvodi toplina jer je vanjski dio termometra niže temperature zbog kontakta s zrakom okolišne temperature  $T_{ok}$ .

Bilanca energije:

$$\phi_c = \phi_k \quad (83)$$



Slika 29. Dispozicija termometra u kupki

Raspisom jednadžbe (83) dobiva se:

$$\alpha_c \pi D \frac{L}{n} (T_f - T_1) = \lambda A_p n \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (84)$$

Gdje je:

$D$  = vanjski promjer termometra

$L$  = duljina termometra

$n$  = broj podjela termometra na regije

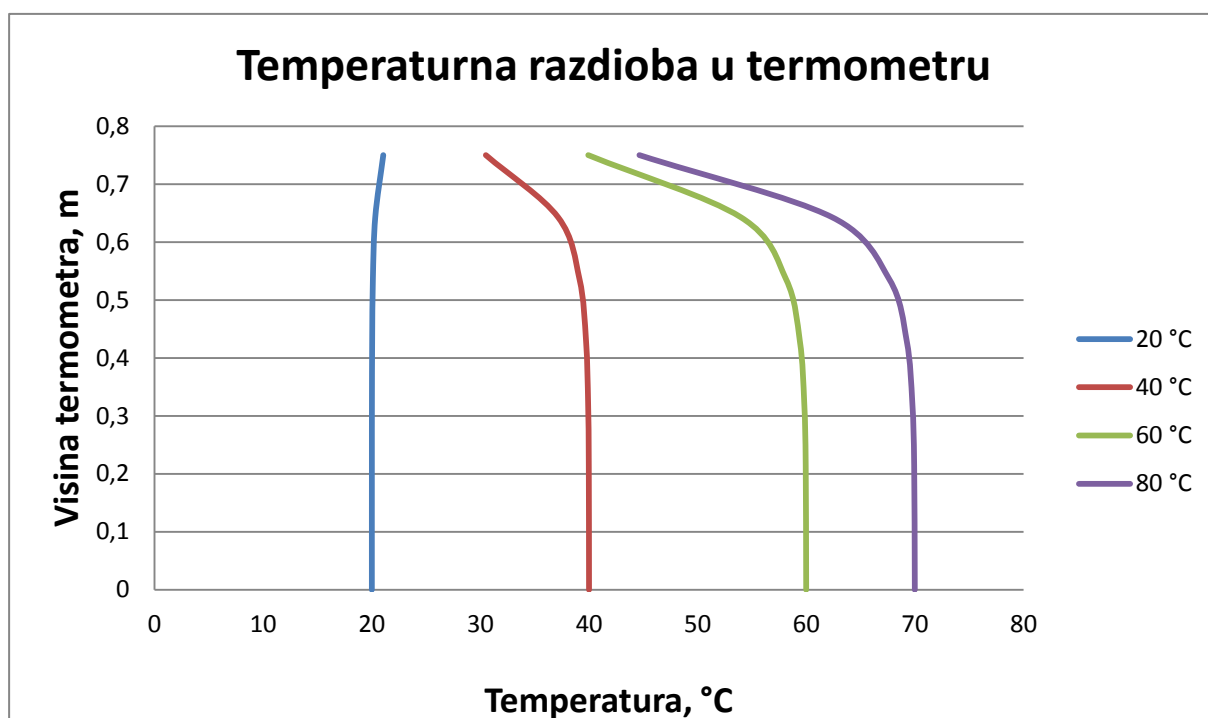
$A_p$  = poprečni presjek termometra

$T_f$  = temperatura kapljevine

$T_i$  = temperatura regije termometra

Jednadžba (84) u diferencijalnom zapisu glasi:

$$\alpha_c \pi D dx (T_f - T_T) = -\lambda A_p \frac{dT}{dx} \quad (85)$$



Slika 30. Temperaturna razdioba u stacionarnom stanju (Pt100 u kupki)

Iz izraza (85) vidi se ovisnost mjerne pogreške ( $T_f - T_T$ ) o utjecaju ugradnje. Na slici 30. prikazana je temperaturna razdioba u termometru, koja generira pogrešku zbog utjecaja provođenja u očitavanju temperature. U tablici 6. vidi se kolika je razlika između vrijednosti temperature koju ima kupka i temperature termometra.

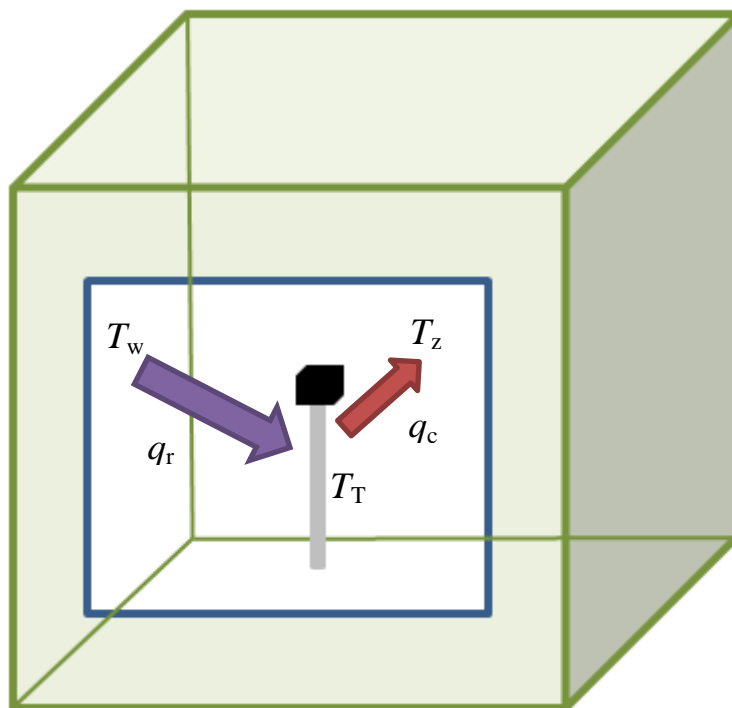
Tablica 6. Izračunata pogreška zbog utjecaja provođenja

Temperatura kupke, °C	Temperatura termometra, °C
20	20,0008
40	39,9932
60	59,9840
70	69,9808

U stvarnosti kupka nema konstantnu temperaturu nego se ona regulira stalnim paljenjem i gašenjem električnog grijača. Iz tablice 6. pogreška za temperaturu kupke 70 °C iznosi 20 mK što je u granici prihvatljivog. Kupke se koriste za umjeravanje termometara stoga je ovaj model pokazatelj ocjene kvalitete samog umjeravanja.

## 5.2. Termometar u komori

Komore su uređaji za ispitivanje najčešće vlažnosti zraka, ali mogu se koristiti i za ispitivanje termometara. Unutar komore se nalazi električni grijač koji zagrijava zrak na željenu temperaturu, isparivač rashladnog uređaja za hlađenje zraka i ventilator. Ventilator omogućava jednoliku temperaturnu raspodjelu zraka unutar komore, tj. smanjuje gradijente u komori. Temperature stijenka komore zagrijavaju zrak, i predaju toplinu konvekcijom zraku i zračenjem termometru slika 31.



Slika 31. Dispozicija termometra u komori

Također toplina dolazi na termometar i konvekcijom od zraka sve dok se termometar ne zagrije. Energetska bilanca u stacionarnom modelu termometra u komori:

$$q_c = q_r$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_1 + \omega \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} (T_w^4 - T_T^4) = \alpha_c (T_T - T_z) \quad (86)$$

Gdje je:

$\varepsilon_1$  = emisivnost termometra

$\varepsilon_2$  = emisivnost stijenke zida



$T_w$  = temperatura stijenke komore

$T_z$  = temperatura zraka

$T_T$  = temperatura termometra

$\omega$  = geometrijski faktor, omjer površine termometra i površine stijenke komore

U ovom modelu zanemareni su utjecaji provođenja kroz termometar jer se cijeli termometar nalazi u komori, zanemaren je utjecaj zračenja kroz staklo prozora komore, jer je staklo jako male površine u odnosu na komoru.

Utjecaj zračenja na pogrešku u mjerenju bitno otežava mjerenje visokih temperatura jer njegov utjecaj raste s četvrtom potencijom temperature. Te je kod ovakvih komora mogućnost za pogreške u mjerenju velika.

## 6. USPOREDBA REZULTATA PROCJENE S REZULTATIMA MJERENJA

Zadatak eksperimentalnog rada je bio odrediti utjecaj emisivnostipovršine termometra na pogrešku u mjerenju. Usporedba dva platinska otpornička termometra Pt100, od kojih je jednom površina obojena u crno, a drugom površina ispolirana, slika 32. Termometri su se ispitivali u komori na temperaturi 20°C , 40 °C, 60 °C i 70 °C.

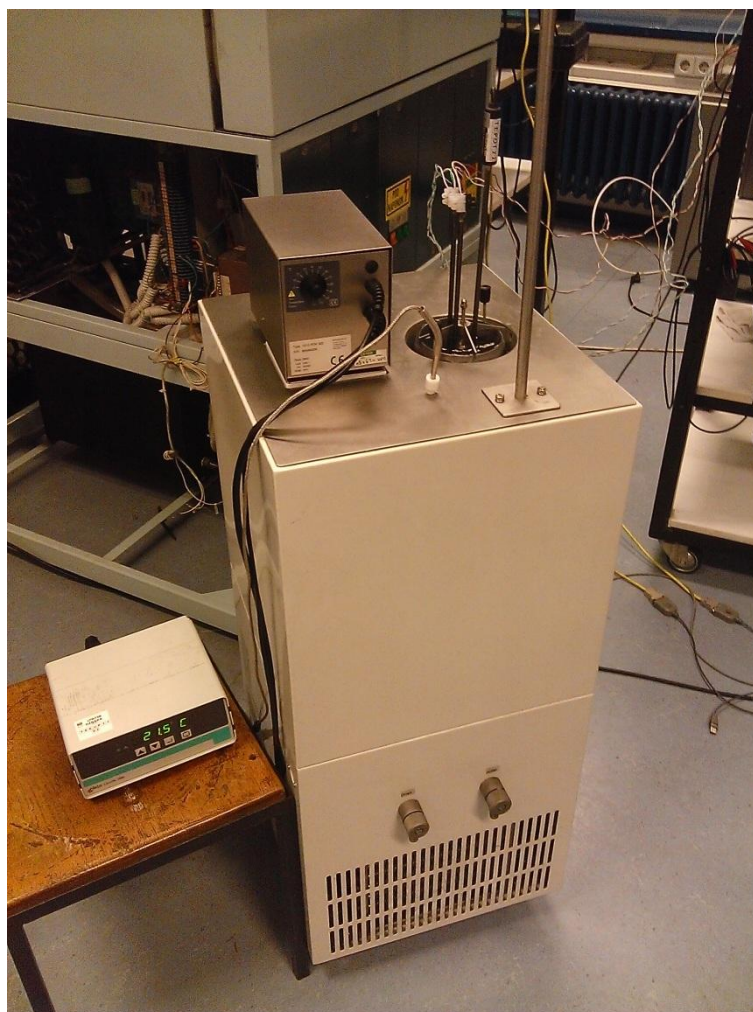


**Slika 32. Dva termometra Pt100, jedan ispolirane površine, drugi obojene u crno**

Ovi termometri su prije služili za mjerenje temperaure u industriji, i nisu bili umjereni. Oba termometra su istih dimenzija i od istog proizvođača. Na slici 32. još se vidi termometar komore potreban za regulaciju i stalak na kojem su pričvršćeni termometri.

### 6.1. Umjeravanje termometra

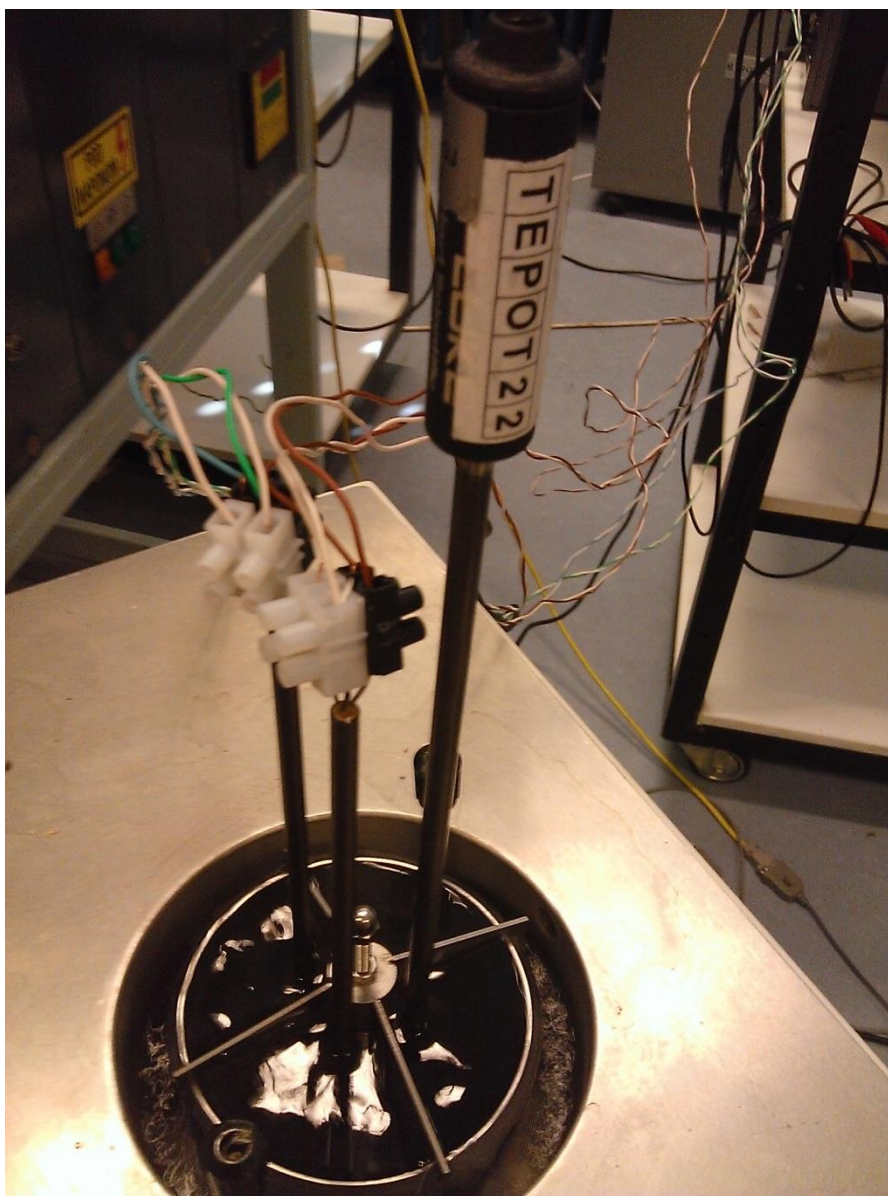
Veza između temperature i otpora termometra za ova dva termometra nije poznata stoga ih je bilo potrebno umjeriti. Umjeravani su prema Callendaru izraz (10), jer se ne mjere temperature ispod 0 °C. Potrebno je bilo pronaći koeficijente u jednadžbi (10), odnosno koeficijente polinoma drugog stupnja  $R_0$ ,  $A$  i  $B$ . Umjeravanje ili kalibriranje termometra se provodi u posebnim kupkama koje reguliraju temperaturu, i imaju jednoliku raspodjelu temperature kapljevine unutar kupke.



Slika 33. Kupka za umjeravanje termometara Heto Calibration 107-3 FOH 920

Kupka na slici 33. ima i mogućnost rashlađivanja kapljevine na temperature niže od okolišne uz pomoć rashladnog uređaja. Vrijednosti temperature i otpora uspoređivale su se sa standardnim platinskim otporničkim termometrom HART-2456 Hi koji je prikazan na slici 34.



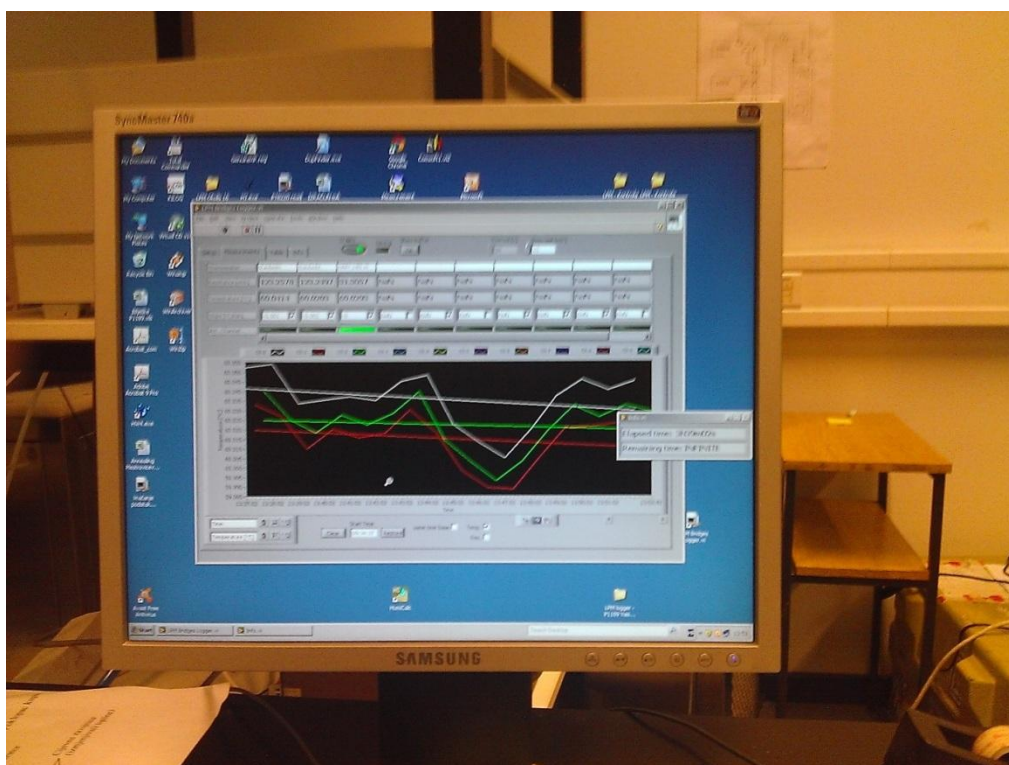


**Slika 34. Umjeravanje termometra s etalonskim termometrom HART-2456 Hi**

Mjerenje otpora je pomoću visoko preciznog mosta koji mjeri otpor svakih 20 sekundi na desetinu  $m\Omega$ , slika 35. Svi podaci se prate na osobnom računaru koji zapisuje vrijednosti otpora, a za etalonske ili standardne termometre zapisuje i temperaturu, jer je za te termometre već poznata veza između otpora i temperature. Umjervanja su se vršila u četiri točke, baš one koje su i potrebne za mjerenje u komori (20 °C, 40 °C, 60 °C i 70 °C). Za dobivanje vrijednosti koeficijenta jednadžbe (10) dovoljne su i tri točke, ali s četiri točke osiguravamo veću točnost, jer se krivulja računa metodom najmanjih kvadrata.



Slika 35. Most za računanje električnog otpora EOMO0302



Slika 36. Software LPM Bridges Logger za praćenje podatka otpora



Rezultati izračunatih koeficijenata umjerenih termometra prikazani su u tablici 7. za jednadžbu (10):

$$R(\vartheta) = R_0 (1 + A\vartheta + B\vartheta^2)$$

**Tablica 7. Izmjereni koeficijenti aproksimacijske kvadratne jednadžbe**

	$R_0$	$A$	$B$
Ispolirani termometar	99,980296	0,003917286	$-6,458967 \cdot 10^{-7}$
Crni termometar	99,975190	0,003917030	$-6,454746 \cdot 10^{-7}$

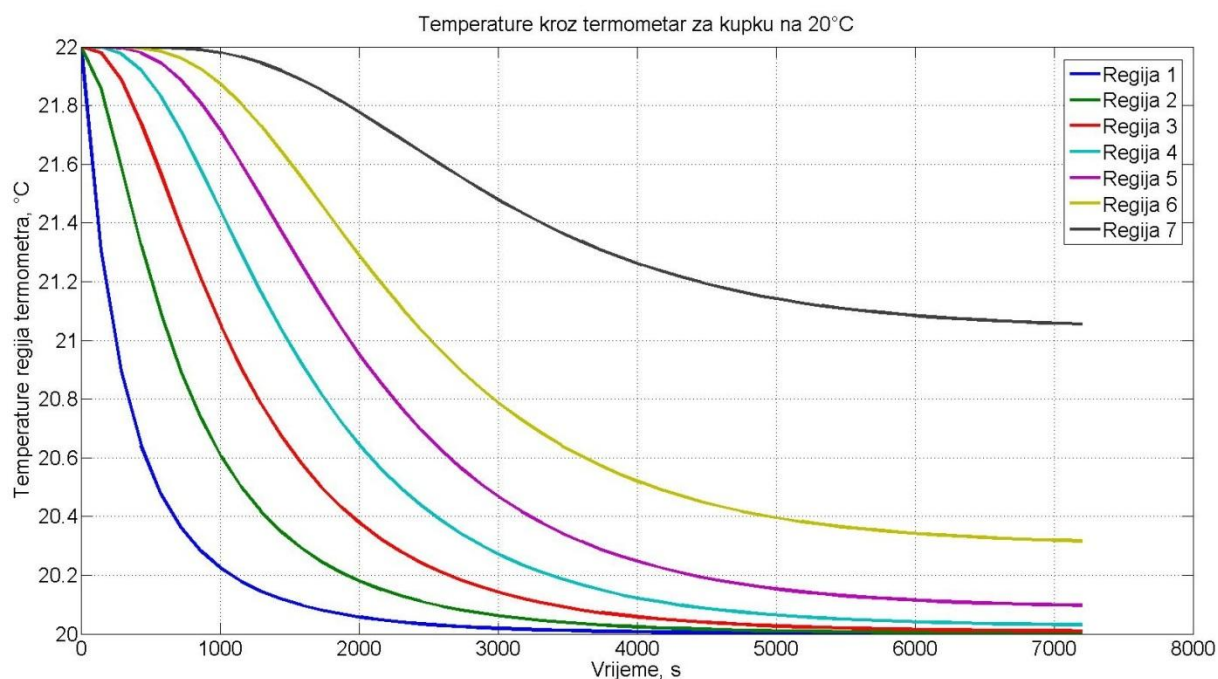
Uz pomoć diferencijalnih jednadžbi i podijele termometra na 7 regija, opisana je dinamika zagrijavanja termometra, iz koje je i proizašla temperaturna raspodjela na slici 30. Sedam regija je odabrano namjerno jer je jedna sedmina termometra bila iznad razine vodu u kupki.

Dinamika termometra je izračunata u programu MatLab za jednadžbe:

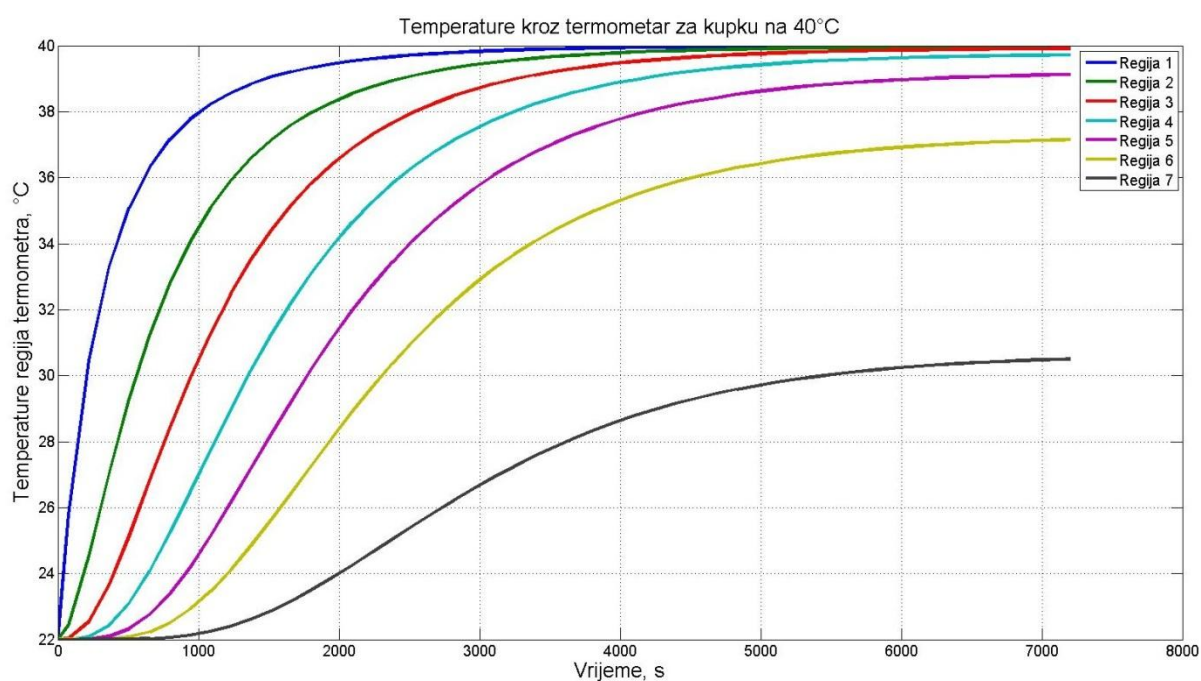
$$\text{Za prvu regiju: } mc \frac{dT_T}{dt} = \alpha_c D \pi dx (T_f - T_{T1}) - \lambda A_p \frac{T_1 - T_2}{dx} \quad (87)$$

$$\text{Za i-tu regiju: } mc \frac{dT_{Ti}}{dt} = \alpha_c D \pi dx (T_{Ti-1} - T_{Ti}) - \lambda A_p \frac{T_{Ti-1} - T_{Ti}}{dx} \quad (88)$$

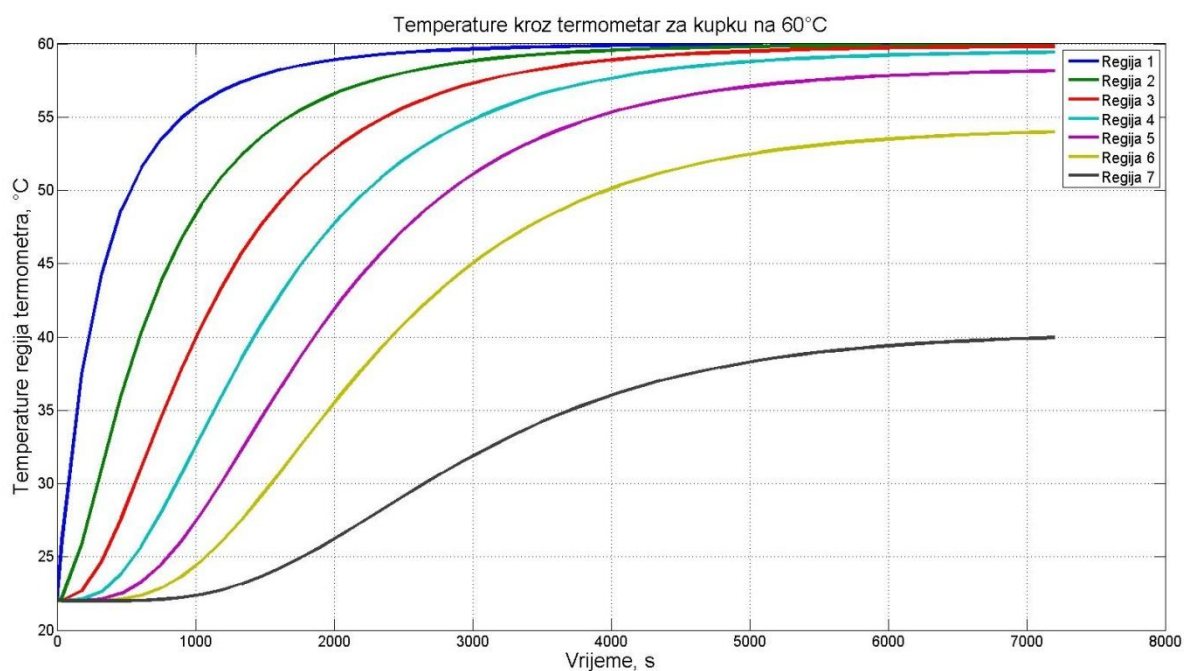
$$\text{Za zadnju regiju: } mc \frac{dT_{Tn}}{dt} = \alpha_c D \pi dx (T_{Tn} - T_z) - \lambda A_p \frac{T_{Tn-1} - T_{Tn}}{dx} \quad (89)$$



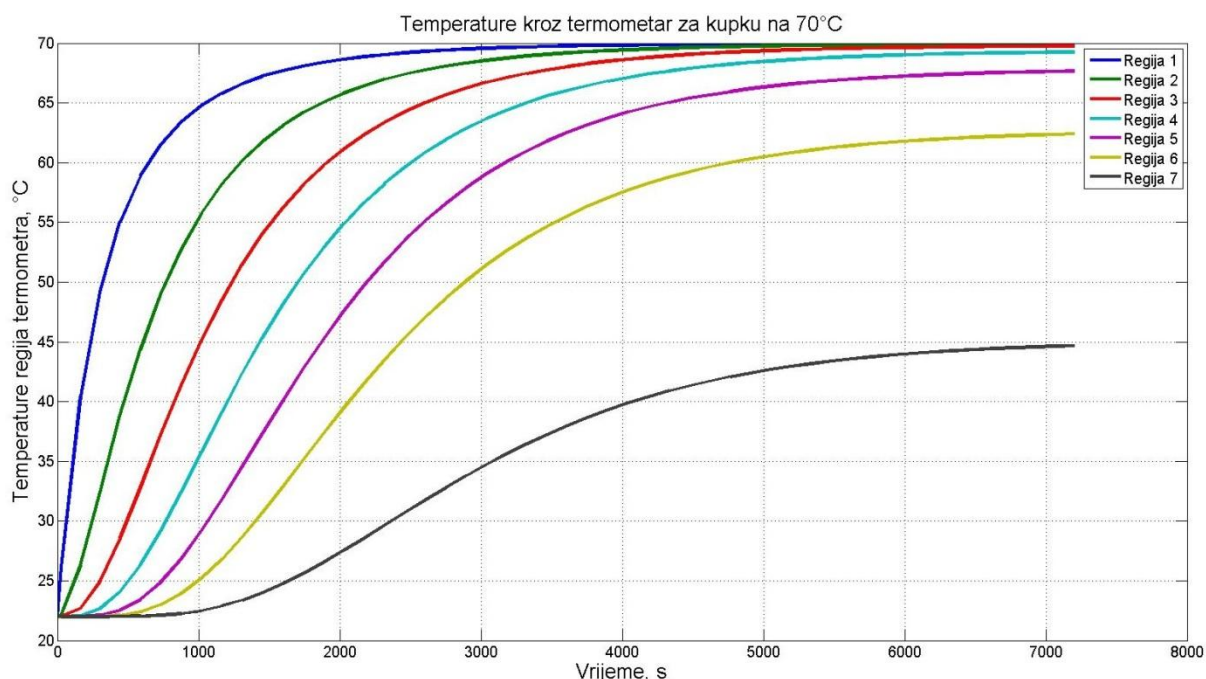
**Slika 37. Promjena temperature u termometru u kupki pri 20°C**



Slika 38. Promjena temperature u termometru u kupki pri 40°C



Slika 39. Promjena temperature u termometru u kupki pri 60°C



Slika 40. Promjena temperature u termometru u kupki pri 70°C

## 6.2. Mjerenje u komori

Utjecaj emisivnosti termometra na pogrešku izmjerene temperature ispitivan je u komori, slika 41. Emisivnost oba termometra pretpostavljena je iz literature [5]:

- $\varepsilon_i = 0.1$  = emisivnost ispoliranog termometra
- $\varepsilon_c = 0.8$  = emisivnost crnog termometra

Proračun je temeljen na poglavlju 5.2. Termometar u komori. Izračun koeficijenata konvektivnog prijelaza topline je prema Churchill i Bernsteinu [13]. Temperatura stijenke komore nije konstantna zbog grijača, stoga je iterativnim postupkom pronađena osrednjena vrijednost u tablici 8.

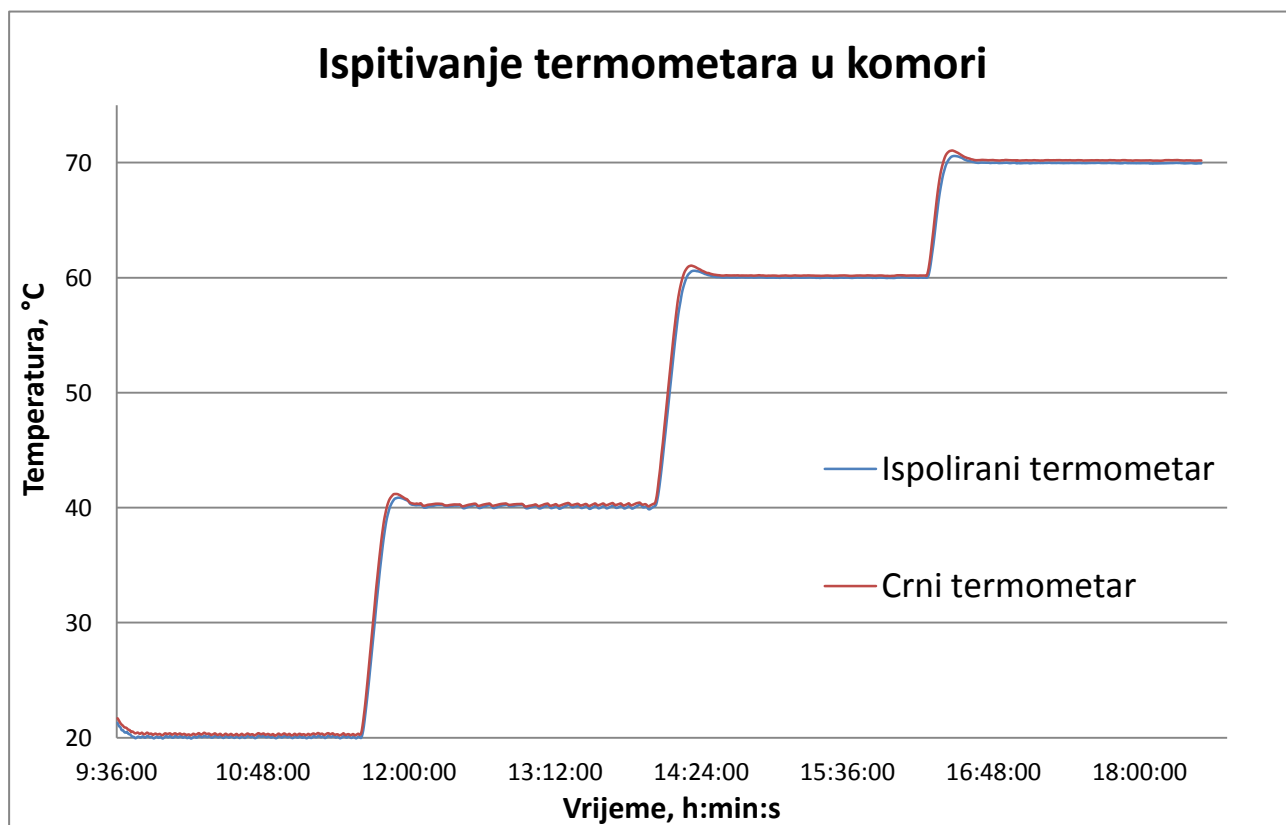
Tablica 8. Izračunate karakteristične fizikalne veličine za model

Temperatura u komori, °C	Koeficijent konvektivnog prijelaza topline, $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$	Iteracijom dobivena osrednjena temperatura stijenke komore, °C
20	30,358	23,083
40	30,522	54,427
60	30,461	70,440
70	30,433	78,366





Slika 41. Komora za ispitivanje ujetcaja emisivnosti termometra



Slika 42. Zapis temperture termometara za vrijeme ispitivanja

Rezultati mjerenja i standardne devijacije aritmetičke sredine prikazane su u tablici 9.

Rezultati su osrednjeni na zadnjih 15 minuta stacionarnog stanja.

**Tablica 9. Rezultati mjerenja u komori**

Temperatura u komori, °C	Temperatura ispoliranog termometra, °C	Temperatura crnog termometra, °C	Standardna devijacija ispoliranog termometra, K	Standardna devijacija crnog termometra, K
20	20,058	20,296	0,067	0,051
40	40,051	40,291	0,094	0,073
60	60,001	60,183	0,016	0,016
70	69,962	70,202	0,016	0,015

Usporedba izmjerenog utjecaja emisivnosti termometra na pogrešku u mjerenju i izračunate pogreške prema modelu iz poglavlja 5.2. prikazana je u tablici:

**Tablica 10. Usporedba rezultata dobivenih mjerenjem i proračunom**

Temperatura komore, °C	Izračunata razlika u temperaturi termometra, mK	Izmjerena razlika u temperaturi termometara, mK
20	53	238
40	97	240
60	158	182
70	212	239

Iz tablice 10. vidljivo je da je veliko odstupanje između izračunate razlike i izmjerene razlike. Ova razlika vjerovatno uzrok ima u regulaciji s paljenjem kompresora rashladnog uređaja, te je krivulja temperature u vremenu stalno bila promjenjiva sa skokovima, što je otežavalo uspostavu stacionarnog stanja, koje smo trebali izmjeriti u ovom eksperimentalnom radu. Pri višim temperaturama 60 °C i 70 °C, model za izračun pogreške pokazao je bliska rješenja s izmjerenom razlikom, što je bilo i za očekivati, jer utjecaj emisivnosti termometra raste u ovisnosti o temperaturi koja raste s četvrtom potencijom.

## 7. ZAKLJUČAK

Svakodnevno se koristimo s termmetrima i njima mjerimo temperaturu, a da ne razmišljamo o mogućim pogreškama. Vrijednost temperature termometra nikad nije ista kao i medija kojem se mjeri temperatura, iz čega slijedi da će termometar uvijek imati mjernu nesigurnost.

Odnosno interval unutar kojeg ćemo s određenom vjerojatnošću znati da se nalazi temperatura medija. U radu je prikazan utjecaj ugradnje termometra na mjernu nesigurnost, temeljen na tri načina izmjene topline između termometra i okoline: provođenje, konvekcija i zračenje.

Provođenje je uzrok pogrešaka pri mjerenju temperature uranjanjem termometra u medij, jer se toplinski tok odvodi kroz tijelo termometra. Utjecaj zračenje na mjernu pogrešku je vjerojatno najsloženiji, jer ovisi o velikom broju varijabli koje su uvijek povezane nelinearnom diferencijalnom jednadžbom. Stoga i sami modeli za izračun mjerne nesigurnosti postaju izvori nesigurnosti zbog linearizacije diferencijalnih jednadžbi. U eksperimentalnom radu prikazan je utjecaj emisivnosti termometra na pogrešku termometra. Crni termometar visokog emisijskog faktora ima veći kapacitet za izmjenu toplinu zračenjem s okolinom nego ispolirani termometar nižeg emisijskog faktora. Ispolirani termometar će uvijek pokazivati točniju temperaturu medija, jer ispolirana površina predstavlja veći otpor prijenosu topline zračenjem, stoga će i njegova temperatura se razlikovati od temperature crnog termometra. Mjerna nesigurnost koja je izračunata modelom ne poklapa se za niže temperature komore s izmjerenom mjernom nesigurnosti. Uzrok je u nedovoljno kvalitetnom modelu, koji bi trebao uzeti u obzir temeperaturnu raspodjelu stijenki komore i utjecaj gubitka topline zračenjem kroz staklo. Također uzrok pogreške pri izmjerenoj mjernoj nesigurnosti je i u paljenju rashladnog uređaja za regulaciju temperature u komori koji je radio skokove temperature, umjesto željenog stacionarnog stanja.

## LITERATURA

- [1] Nicholas, J.V., White, D.R.: Traceable temperature, John Wiley & Sons Ltd, New York, 2001.
- [2] Figliola, R. S., Beasley, D.E.: Theory and Design for Mechanical Measurements, John Wiley & Sons Ltd, New York, 1991.
- [3] Sirohi, R. S., Radha Krishna, H. C.: Mechanical Measurements, John Wiley & Sons Ltd, New York, 1991.
- [4] Peter R.N. Childs: Practical Temperature Measurements, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.
- [5] Singh, O.: Applied Thermodynamics, New Age International, New Delhi, 2009.
- [6] Wika Corporation: Wika Handbook Pressure and Temperature Measurements, Lawrenceville, 2008.
- [7] Webster, J.G.: The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook, CRC Press LLC, 1999.
- [8] Bell, S.: A Beginner's Guide to Uncertainty of Measurement, National Physical Laboratory, Teddington, 2001.
- [9] European co-operation for Accreditation: EA-4/02 Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration, 1999.
- [10] BIPM, Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement, 2008.
- [11] Galović, A.: Termodinamika II, FSB Zagreb, Zagreb, 2010.
- [12] Bendecit, R.P. : Fundamentals of Temperature, Pressure and Flow Measurements, Wiley, New York, 1984.
- [13] Švaić, S., Boras, I.: Formule za izračunavanje koeficijenata prijelaza topline, FSB

## **PRILOZI**

- I. DVD-R disc – PDF verzija završnog rada