

# Membranska naprezanja crvenih krvnih stanica

---

Fajković, Denis

Undergraduate thesis / Završni rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:777893>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# **ZAVRŠNI RAD**

**Membranska naprezanja crvenih krvnih stanica**

*Membrane stresses of red blood cells*

Voditelj rada:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Denis Fajković

Zagreb, veljača 2015.

Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# **ZAVRŠNI RAD**

**Membranska naprezanja crvenih krvnih stanica**

*Membrane stresses of red blood cells*

Denis Fajković

Zagreb, veljača 2015.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

|  |        |
|--|--------|
| Sveučilište u Zagrebu<br>Fakultet strojarstva i brodogradnje |        |
| Datum  | Prilog |
| Klasa:   |        |
| Ur.broj:   |        |

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Denis Fajković**

Mat. br.: 0035178823

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Membranska naprezanja crvenih krvnih stanica**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Membrane stresses of red blood cells**

Opis zadatka:

Crvene krvne stanice daju krvi boju, a funkcija im je opskrba stanica i tkiva kisikom. U stanju statičke ravnoteže crvene krvne stanice imaju oblik bikonkavnog diska, a deformiraju se pri prolasku kroz kapilare.

Potrebno je:

- opisati geometrijska svojstva crvenih krvnih stanica,
- odrediti membranska naprezanja kod bikonkavnog oblika crvene krvne stanice, uz pretpostavku da je membrana stanice elastična i da se unutar stanice nalazi nestlačivi Newtonovski fluid,
- objasniti deformacije crvenih krvnih stanica kao deformabilnih ljuski ispunjenih nestlačivim fluidom,
- odrediti krutost kod savijanja za deformiranu crvenu krvnu stanicu.

Potrebne parametre modela dogovoriti s mentorom.

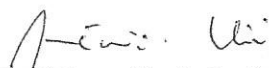
U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
25. studenog 2014.

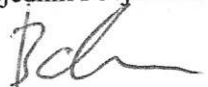
Rok predaje rada:  
1. rok: 26. veljače 2015.  
2. rok: 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 2., 3., i 4. ožujka 2015.  
2. rok: 21., 22., i 23. rujna 2015.

Zadatak zadao:

  
Prof.dr.sc. Tanja Jurčević Lulić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof.dr. sc. Igor Balen

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno, služeći se znanjem stečenim tijekom studiranja na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu i navedenom literaturom.*

*Također, ovom prilikom želim se zahvaliti svojoj voditeljici rada, prof. dr. sc. Tanji Jurčević Lulić, na stručnoj pomoći koju mi je pružila tijekom pisanja ovog rada. Posebno se još zahvaljujem i svojoj curi na strpljenju i podršci koju mi je pružala tokom dosadašnjeg studiranja.*

**SADRŽAJ**

|   |     |
|---|-----|
| POPIS SLIKA .....   | III |
| POPIS TABLICA.....  | IV  |
| POPIS OZNAKA .....  | V   |
| SAŽETAK.....  | VII |
| 1 UVOD .....  | 1   |
| 2 OBLIK I DIMENZIJE .....   | 4   |
| 2.1 Oblik .....   | 4   |
| 2.2 Dimenzije.....  | 5   |
| 2.2.1 <i>Evans i Fung - Interferometrijska metoda</i> .....       | 5   |
| 2.3 Matematički opis .....  | 8   |
| 2.3.1 <i>Geometrijske veličine crvene krvne stanice</i> .....     | 10  |
| 3 DEFORMABILNOST CRVENIH KRVNIH STANICA.....                      | 13  |
| 3.1 Rastezna i savojna krutost membrane crvene krvne stanice..... | 15  |
| 3.2 Izohorne kompatibilne deformacije.....                        | 16  |
| 4 MEMBRANSKA NAPREZANJA .....                                     | 19  |
| 5 ZAKLJUČAK .....   | 26  |
| LITERATURA.....   | 27  |

**POPIS SLIKA**

|   |    |
|---|----|
| Slika 1.1. Struktura hemoglobina .....                            | 2  |
| Slika 2.1. Oblik bikonkavnog diska .....                          | 4  |
| Slika 2.2. Oblik crvene krvne stanice pri toničnosti 300 mO ..... | 7  |
| Slika 2.3. Oblik crvene krvne stanice pri toničnosti 217 mO ..... | 7  |
| Slika 2.4. Oblik crvene krvne stanice pri toničnosti 121 mO ..... | 8  |
| Slika 2.5. Cassanijeve krivulje .....                             | 8  |
| Slika 3.1. Cilindrični čep.....                                   | 13 |
| Slika 3.2. Kompatibilne površine .....                            | 17 |
| Slika 4.1. Srednja ploha crvene krvne stanice kao ljuske .....    | 19 |
| Slika 4.2. Diferencijalni dio ljuske.....                         | 20 |
| Slika 4.3. Dio srednje plohe ljuske A-B s opterećenjima.....      | 24 |
| Slika 4.4. Dio srednje plohe ljuske A-C s opterećenjima.....      | 25 |

**POPIS TABLICA**

|  |    |
|--|----|
| Tablica 2.1. Podaci dobiveni za stanicu pri toničnosti 300 mO..... | 6  |
| Tablica 2.2. Podaci dobiveni za stanicu pri toničnosti 217 mO..... | 6  |
| Tablica 2.3. Podaci dobiveni za stanicu pri toničnosti 121 mO..... | 6  |
| Tablica 2.4. Parametri izraza (2.1) za različite toničnosti.....   | 7  |
| Tablica 2.5. Približne formule i korekcijski faktori .....         | 12 |



**POPIS OZNAKA**

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| $a$                                  | polovica udaljenosti fokusa                                  |
| $A$                                  | površina   |
| $A_c$                                | površina poprečnog presjeka                                  |
| $c$                                  | konstanta, produkt udaljenosti                               |
| $C_0, C_2, C_4$                      | numerički koeficijenti                                       |
| $CO_2$                               | kemijska formula ugljikovog dioksida                         |
| $d$                                  | promjer  |
| $D$                                  | Debljina stanice, savojna krutost                            |
| $E$                                  | Youngov modul elastičnosti                                   |
| $F$                                  | sila   |
| $h$                                  | debljina stijenke  |
| $H_2O$                               | kemijska formula vode  |
| $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ | jedinični vektori  |
| $L$                                  | opseg  |
| $N_\varphi, N_\theta$                | meridijanske sile  |
| $p_o$                                | vanjski tlak   |
| $p_i$                                | unutarnji tlak   |
| $p_n, p_\varphi$                     | tlak   |
| $r$                                  | polumjer, udaljenost od osi simetrije, koordinata na osi $r$ |
| $r_1$                                | meridijanski polumjer  |
| $r_2$                                | cirkularni polumjer  |
| $R$                                  | radijus  |
| $\mathbb{R}^+$                       | pozitivni skup realnih brojeva                               |
| $R_0$                                | polumjer stanice, numerički koeficijent                      |
| $t$                                  | debljina stanice   |
| $u, v$                               | parametri  |
| $U$                                  | potencijalna energija  |
| $V$                                  | volumen  |
| $x$                                  | koordinata na osi $x$  |
| $\mathbf{x}$                         | vektor   |
| $y$                                  | koordinata na osi $y$  |

---

|                                    |                       |
|------------------------------------|-----------------------|
| $z$                                | koordinata na osi $z$ |
| $\gamma$                           | smično naprezanje     |
| $\varepsilon$                      | dimenzijski omjer     |
| $\theta, \vartheta, \varphi, \phi$ | kut                   |
| $\nu$                              | Poissonov faktor      |

**SAŽETAK**

Kroz ljudsko tijelo žilama protječe crvena, neprozirna i gusta tekućina koju nazivamo krv. Ona se sastoji od krvne plazme, crvenih krvnih stanica, leukocita i trombocita.

U ovome radu se govori o eritrocitima ili crvenim krvnim stanicama. Ukratko je objašnjeno što su, od čega su građeni te koja im je funkcija. Opširnije je opisana geometrija crvene krvne stanice oblika bikonkavnog diska, njezine dimenzije te kako i zašto dolazi do deformacije.

Također, kao glavna tema rada, izvedeni su izrazi za membranska naprezanja za crvenu krvnu stanicu, te je zaključeno što ona točno znače za stanicu.

Ključne riječi: crvena krvna stanica, bikonkavni disk, deformiranje, membranska naprezanja.

## 1 UVOD

Krvotok je sustav organa koji prenosi tvari iz srca u stanice, pomaže pri balansiranju tjelesne temperature i pH vrijednosti (dio *homeostaze*). Krvotok čovjeka sastoji se od srca i krvnih žila (krvne žile koje idu od srca prema periferiji nazivaju se arterije, a druge žile koje idu s periferije tijela prema srcu nazivaju se vene). Krvotok čovjeka podijeljen je u dva dijela i to na mali i na veliki krvotok.

Krv je crvena, neprozirna i gusta tekućina, posebnog mirisa i slanog okusa. Ona protječe kroz srčano-krvožilni sustav organizma te kroz tijelo prenosi hranjive tvari i kisik. Krv se sastoji od krvne plazme, krvnih stanica - eritrocita, leukocita i krvnih pločica - trombocita i funkcionalno je najvažnija tjelesna tekućina kod ljudi. Ima brojne uloge: disanje, regulacija volumena tjelesnih tekućina, regulacija acido-bazne ravnoteže, regulacija tjelesne temperature, a također ima i veliku zaštitnu ulogu. Krv struji tijelom u zatvorenom sustavu cjevčica i krvnih žila, koji se sastoji od arterija, vena i kapilara.

Krvne žile su dio krvožilnog sustava čija je funkcija prenošenje krvi kroz tijelo. Najvažnije krvne žile su arterije, koje odnose krv iz srca i vene koje ju donose prema srcu. Postoje razne vrste krvnih žila: arterije, arteriole, kapilare (najmanje krvne žile), venule i vene. Grubo grupirano, krvne žile se dijele na arterijske i venske, određene time kreće li se njihova krv prema ili od srca.

Kapilari su najmanje krvne žile u tijelu sa svojih 5-10 $\mu$ m i imaju ulogu povezivanja arteriole i venule te imaju najbližu interakciju s organskim tkivima. Stijenke su im sastavljene samo od jednog sloja stanica, tzv. *endotela*. Ovaj sloj je tako tanak da molekule kao što su kisik, voda i lipidi difuzijom mogu proći kroz njega i ući u tkiva.

Leukociti ili bijele krvne stanice su krvne stanice imunološkog sustava čija je osnovna uloga zaštita organizma od mikroorganizama (bakterija, virusa, gljivica i parazita) te stranih tijela koji prijeđu prirodne barijere kože i sluzokože.

Trombociti su krvne pločice tj. malena, bezbojna tjelešca bez jezgre. Imaju veoma važnu ulogu u procesu zgrušavanja krvi.

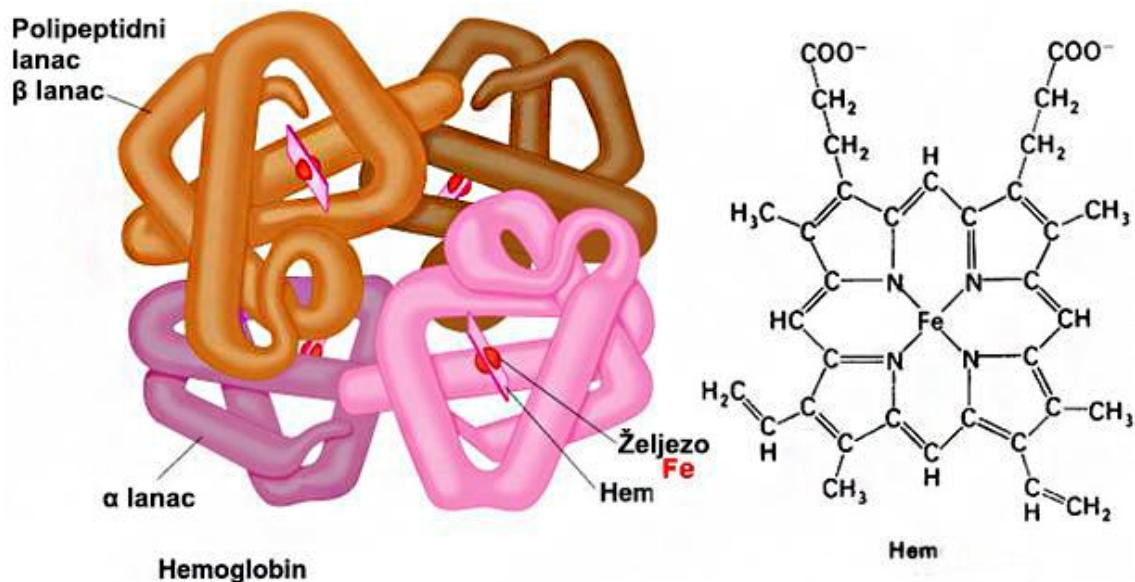
Crvene krvne stanice ili eritrociti su sastavni dio krvi i najčešći tip krvnih stanica. Uloga crvenih krvnih stanica je izmjena plinova: u plućima upijaju kisik te ga prolaskom kroz kapilare u tkivu ispuštaju, a preuzimaju  $\text{CO}_2$  nakon čega se vraćaju u pluća gdje ispuštaju  $\text{CO}_2$  i opet upijaju kisik. Taj proces je cirkulacija.

Crvene krvne stanice nastaju u koštanoj srži procesom eritropoeze koji traje 7 dana. U svom ranom stadiju stanice imaju jezgru, ali kada sazriju, ispuštaju jezgru i ulaze u krv.

S obzirom da nemaju jezgru, odnosno DNK, ne mogu se dijeliti pa tako imaju svoj vijek trajanja. Svake sekunde se u tijelu odraslih ljudi proizvede oko 2,4 milijuna novih crvenih krvnih stanica, a cirkulacija jedne crvene krvne stanice od zrelosti pa do kraja vijeka trajanja je 100 do 120 dana. Na kraju svog vijeka trajanja, kada postanu stari, uklanjaju se iz krvotoka nakon čega makrofagi u slezeni prerađuju njihove komponente.

Prve crvene krvne stanice opisao je Jan Swammerdam 1658. godine, a to su bile stanice žabe. Anton von Leeuwenhoek je 1674. godine dao još precizniji opis, koji je približno odgovarao njihovoj stvarnoj veličini.

Crvene krvne stanice se uglavnom sastoje od hemoglobina (čine trećinu volumena stanice) koji se nalaze u njihovoj citoplazmi (Slika 1.1.).



Slika 1.1. Struktura hemoglobina

Stanice su crvene boje zbog *hem* skupine hemoglobina (spektralna svojstva željeznih iona koji se vežu na *hem*). One također mijenjaju i boju krvi koja ovisi o tome da li hemoglobin na sebe ima vezan kisik ili ne.

Stanična membrana se sastoji od lipida i proteina, odnosno od 3 sloja: *glycocalyx* na vanjskoj strani (bogat ugljikohidratima), dvosloj lipida (sadrži transmembranske proteine), i kostur membrane (strukturna mreža proteina na unutarnjoj površini lipidnog dvosloja).

Zrele crvene krvne stanice su fleksibilni i ovalni bikonkavni diskovi. Fleksibilnost i savitljivost im je nužna kako bi mogle prolaziti kroz sitne kapilare.

Kod odraslih ljudi ima oko 20-30 trilijuna crvenih krvnih stanica i čine u prosjeku četvrtinu svih stanica u ljudskom tijelu. Jedan ciklus cirkulacije stanice traje u prosjeku 20 sekundi.

Centrifugiranjem (odvajanjem od krvne plazme) krvi se dobiju crvene krvne stanice. Tako dobivene stanice s uklonjenom plazmom se koriste za transfuziju, dok se kod darivanja plazme stanice vraćaju nazad u tijelo.

Crvene krvne stanice također mogu biti pogođene bolestima, a to su najčešće anemije. Anemija nastaje kada krv ima nizak kapacitet transporta kisika zbog manjka crvenih krvnih stanica ili nepravilnosti crvenih krvnih stanica ili hemoglobina. Neke od anemija su: anemija manjka željeza, bolest srpastih stanica, aplastična anemija, itd.

Iz ljudske embrionalne matične stanice su 2008. godine u laboratoriju dobivene crvene krvne stanice. Jedini problem je bio kako potaknuti stanicu da izbacij jezgru, a to je postignuto uzgojem stanice u *stromalnim* stanicama koštane srži.

U nastavku rada detaljnije se opisuje oblik crvene krvne stanice te što taj oblik točno znači za svojstva i funkciju stanice. Također, s obzirom da se na stanicu može gledati kao na ljusku, preko teorije ljusaka ćemo prikazati izvod za izraze membranskih naprezanja.

## 2 OBLIK I DIMENZIJE

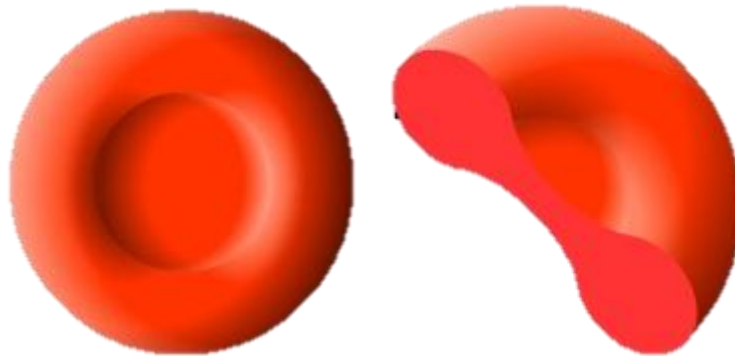
### 2.1 Oblik

Od samog nastanka pa do kraja njihovog životnog vijeka crvene krvne stanice mijenjaju svoj oblik. U svom nastanku u koštanoj srži imaju jezgru pa su nepravilnog oblika, a kada sazriju izbacuju jezgru i ulaze u krv. Na kraju svog životnog vijeka nabreknu u sferni oblik nakon čega su razgrađene u slezeni.

Većinu svog životnog vijeka crvene krvne stanice provode u cirkulaciji s krvi gdje poprimaju različite oblike ovisno o uvjetima u kojima se nalaze, tako da možemo reći da su jako deformabilne. Njihova promjena oblika je odaziv na hidrodinamička naprezanja koja djeluju na njih.

Što se tiče oblika stanice u cirkulirajućoj krvi, ona je deformirana. Prema jednim poprima oblik padobrana, a prema drugima oblik metka.

U stanju mirovanja, odnosno statičke ravnoteže, stanica poprima oblik bikonkavnog diska prikazanog na slici 2.1.



Slika 2.1. Oblik bikonkavnog diska [9]

Stanica u obliku diska je gotovo savršeno osnosimetrična.

Uslijed određenih bolesti vezanih za crvene krvne stanice dolazi do narušavanja njihovog oblika, veličine i čvrstoće.

## 2.2 Dimenzije

U radu će se promatrati samo stanica u obliku bikonkavnog diska. U takvom stanju potrebno je eksperimentalno odrediti promjer i debljinu diska, a ostale veličine se mogu izračunati korištenjem određenih izraza.

Utvrđivanje dimenzija (promjera i debljine) može biti problematično. Naime, dok se stanica gleda mikroskopom, rubovi su deblji i ne može se odrediti što su pravi rubovi. Do ovog problema dolazi zbog toga što je debljina stanice približna valnoj duljini svjetlosti.

### 2.2.1 Evans i Fung - Interferometrijska metoda

E. Evans i Y. C. Fung [1] su 1972. godine pristupili problemu određivanja dimenzija korištenjem interferencijskog mikroskopa koji ima fazni pomak svjetlosti koja prolazi kroz crvenu krvnu stanicu. Procedura se u osnovi sastojala od uspoređivanja slike dobivene proračunom i stvarne fotografije stanice pod mikroskopom.

Geometrija se opisuje analitičkim izrazom s nepoznatim koeficijentima te se proračunava slika takvog tijela pod mikroskopom prema zakonima optike.

Izraz 2.1 je pretpostavljena formula za opis distribucije debljine crvene krvne stanice koju su koristili Evans i Fung.

$$D(r) = \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ C_0 + C_2 \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 + C_4 \left( \frac{r}{R_0} \right)^4 \right], \quad (2.1)$$

gdje su:

$R_0$  - polumjer stanice,

$r$  - udaljenost od osi simetrije,

$R_0, C_0, C_2, C_4$  - numerički koeficijenti koje treba odrediti.

Nepoznati parametri iz izraza 2.1 se određuju numeričkim procesom minimizacije greške između slike dobivene proračunom i stvarne fotografije stanice.



U tablicama 2.1, 2.2 i 2.3 su prikazani rezultati koje su dobili Evans i Fung pri različitoj toničnosti otopine u kojoj se nalazila stanica.

Tablica 2.1. Podaci dobiveni za crvenu krvnu stanicu pri toničnosti 300 mO [1]

|  | <b>Promjer</b>         | <b>Minimalna debljina</b> | <b>Maksimalna debljina</b> | <b>Površina</b>        | <b>Volumen</b>         |
|--|------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Prosječno</b>                                 | 7.82 $\mu\text{m}$     | 0.81 $\mu\text{m}$        | 2.58 $\mu\text{m}$         | 135 $\mu\text{m}^2$    | 94 $\mu\text{m}^3$     |
| <b>Standardna devijacija <math>\sigma</math></b> | $\pm 0.62 \mu\text{m}$ | $\pm 0.35 \mu\text{m}$    | $\pm 0.27 \mu\text{m}$     | $\pm 16 \mu\text{m}^2$ | $\pm 14 \mu\text{m}^3$ |
| <b><math>\chi^2</math> za 10 grupa</b>           | 35.1                   | 10.2                      | 8.2                        | 22.1                   | 18.7                   |

Tablica 2.2. Podaci dobiveni za crvenu krvnu stanicu pri toničnosti 217 mO [1]

|  | <b>Promjer</b>         | <b>Minimalna debljina</b> | <b>Maksimalna debljina</b> | <b>Površina</b>        | <b>Volumen</b>         |
|--|------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Prosječno</b>                                 | 7.59 $\mu\text{m}$     | 2.10 $\mu\text{m}$        | 3.30 $\mu\text{m}$         | 135 $\mu\text{m}^2$    | 116 $\mu\text{m}^3$    |
| <b>Standardna devijacija <math>\sigma</math></b> | $\pm 0.42 \mu\text{m}$ | $\pm 0.39 \mu\text{m}$    | $\pm 0.39 \mu\text{m}$     | $\pm 13 \mu\text{m}^2$ | $\pm 16 \mu\text{m}^3$ |
| <b><math>\chi^2</math> za 10 grupa</b>           | 18.6                   | 4.0                       | 7.2                        | 10.0                   | 6.37                   |

Tablica 2.3. Podaci dobiveni za crvenu krvnu stanicu pri toničnosti 121 mO [1]

|  | <b>Promjer</b>         | <b>Površina</b>        | <b>Volumen</b>         | <b>Indeks razlike loma</b> |
|--|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| <b>Prosječno</b>                                 | 6.78 $\mu\text{m}$     | 1.45 $\mu\text{m}^2$   | 164 $\mu\text{m}^3$    | 0.0447                     |
| <b>Standardna devijacija <math>\sigma</math></b> | $\pm 0.32 \mu\text{m}$ | $\pm 14 \mu\text{m}^2$ | $\pm 23 \mu\text{m}^3$ | $\pm 0.0043$               |
| <b><math>\chi^2</math> za 10 grupa</b>           | 18.5                   | 15.9                   | 14.2                   | 10.5                       |

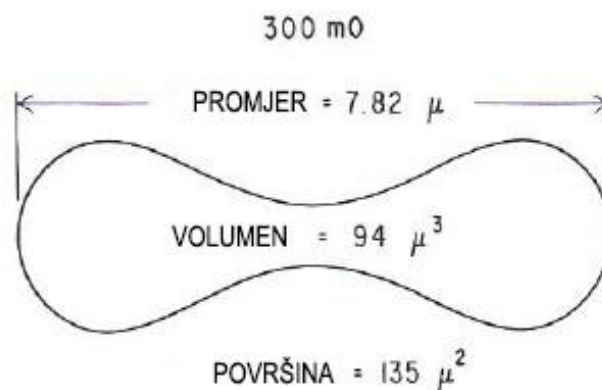
300 mosmol-a je izotonično stanje kod kojega je tlak jednak izvan i unutar stanice te ona poprima normalni oblik. 217 mosmol-a je hipotonično stanje kod kojega je tlak unutar stanice manji od vanjskog tlaka pa stanica nabrekne uzimajući vodu kako bi kompenzirala tlak. Pri 131 mosmol-a stanica poprima oblik sfere.

Nepoznati parametri iz izraza 2.1 dobiveni nakon ove procedure su prikazani u tablici 2.4.

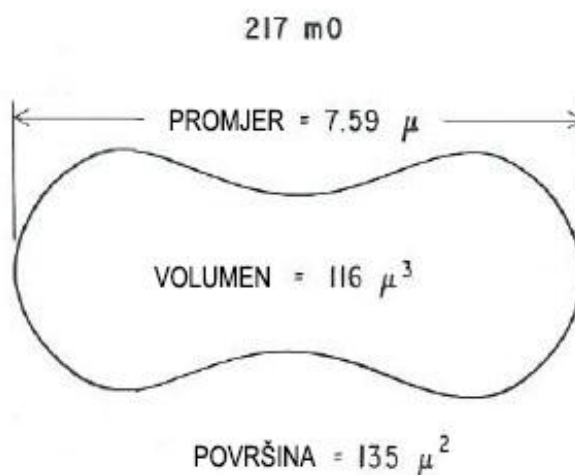
Tablica 2.4. Parametri izraza (2.1) za različite toničnosti [1]

| Toničnost (mosmol) | $R_0$ ( $\mu\text{m}$ ) | $C_0$ ( $\mu\text{m}$ ) | $C_2$ ( $\mu\text{m}$ ) | $C_4$ ( $\mu\text{m}$ ) |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 300                | 3.91                    | 0.81                    | 7.83                    | -4.39                   |
| 217                | 3.80                    | 2.10                    | 7.58                    | -5.59                   |
| 131                | 3.39                    | 6.78                    | 0.0                     | 0.0                     |

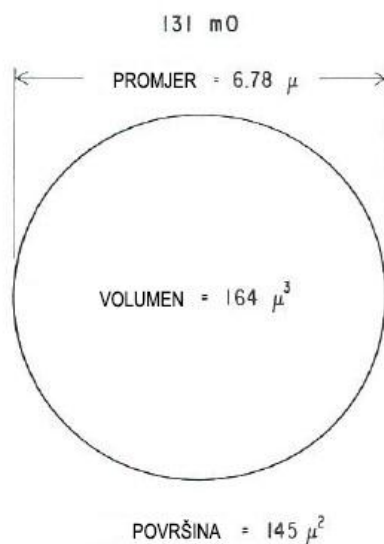
Slijedeće slike prikazuju prosječnu stanicu za svaki od osmolariteta. Osmolaritet predstavlja relativnu koncentraciju otopljenе tvari u sredini u kojoj se nađe stanica.



Slika 2.2. Oblik crvene krvne stanice pri toničnosti 300 mO [1]



Slika 2.3. Oblik crvene krvne stanice pri toničnosti 217 mO [1]



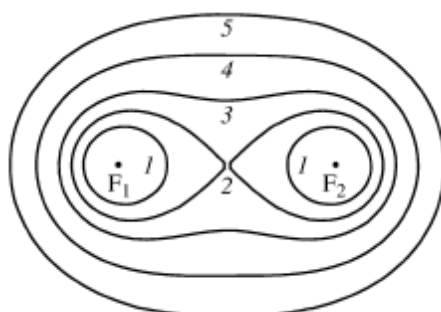
Slika 2.4. Oblik crvene krvne stanice pri toničnosti 121 mO [1]

Iz rezultata je vidljivo da je debljina najosjetljivija, a površina najmanje osjetljiva na promjenu toničnosti, dok volumen raste kako se toničnost smanjuje.

### 2.3 Matematički opis

Iako je već u prethodna dva poglavlja objašnjen oblik crvene krvne stanice i njezine dimenzije, sada će se njezina geometrija opisati matematički. U obzir će se uzeti oblik bikonkavnog diska.

Takav oblik se može opisati Cassanijevim krivuljama. Cassanijeve krivulje su kvadratne ravninske krivulje definirane kao skup točaka u ravnini takvih da je produkt udaljenosti između dvije fiksne točke konstantan. Na slici 2.5. se može vidjeti više tipova Cassanijevih krivulja.



Slika 2.5. Cassanijeve krivulje [2]

Opis krivulja u ravnini  $xOz$  je dat izrazom 2.2:

$$(x^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^2, \quad (2.2)$$

gdje je

$c$  - konstanta, produkt udaljenosti,

$a$  - polovica udaljenosti fokusa.

Iz jednadžbe krivulje je vidljivo da je ona osnosimetrična i simetrična u odnosu na ishodište.

Oblik krivulje će ovisiti o odnosu geometrijskih parametara  $c$  i  $a$ . Za slučaj koji se obrađuje u ovom radu, odnosno krivulju 3 na slici 2.3, odnos parametara će biti:

$$a < c < a\sqrt{2}.$$

Bikonkavni disk iz takve krivulje se dobije tako da ju rotiramo oko vertikalne osi (osi  $z$ ).

Opis površine crvene krvne stanice u Kartezijevim koordinatama je dan jednadžbom 2.3.

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = c^2. \quad (2.3)$$

Jednadžba 2.3 je implicitni prikaz, a da bi se ovakav oblik mogao opisati u diferencijalnoj geometriji potrebne su eksplicitne koordinate.

Svaka koordinata je opisana s dva parametra iz neke domene, a zajedno čine vektor  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}[u, v] = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

gdje su  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  jedinični vektori u smjeru koordinata.

Jednadžba krivulje može se prikazati u polarnim i sfernim koordinatama.

Za polarne koordinate slijedi:

$$x = x \cos \varphi, y = x \sin \varphi, x \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Uvrštavanjem u izraz 2.3, može se izraziti  $z$ :

$$z = \pm \sqrt{\sqrt{c^4 + 4a^2x^2} - a^2 - x^2}, \quad (2.4)$$

gdje je  $x \in [0, \sqrt{a^2 + c^2}]$ .

Za sferne koordinate slijedi:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta, r \in \mathbb{R}^+, \vartheta \in [0, \pi].$$

Nakon uvrštavanja u izraz 2.3 dobije se

$$r^4 + 2a^2r^2 \cos 2\vartheta + a^4 = c^4. \quad (2.5)$$

### 2.3.1 Geometrijske veličine crvene krvne stanice

U poglavlju 2.2.1 je opisano kako eksperimentalno dobiti debljinu i promjer stanice. Debljina i promjer stanice su najbolji parametri koji služe kao ulazni podaci za dobivanje ostalih geometrijskih veličina.

Izrazi korišteni za izračunavanje ostalih geometrijskih veličina su izrazi za sferu polumjera  $R$  koji su pomnoženi s korekcijskim faktorom koji ovisi o dimenzijskom omjeru.

Dimenzijski omjer je:

$$\varepsilon = \frac{a}{c}, \varepsilon \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]. \quad (2.6)$$

Promjer je dat sljedećim izrazom [2]

$$d = 2\sqrt{a^2 + c^2} = 2c\sqrt{1 + \varepsilon^2}. \quad (2.7)$$

Debljina  $t = 2z_{max}$  je postignuta kod  $x(z_{max})$ , gdje je

$$z_{max} = \frac{c^2}{2a} = \frac{c}{2\varepsilon},$$

$$x(z_{max}) = \sqrt{a^2 - z_{max}^2} = \frac{\sqrt{4a^4 - c^4}}{2a}. \quad (2.8)$$

a da bi ovo vrijedilo treba pretpostaviti nejednakost  $a\sqrt{2} > c$  [2].

Iz gornjih izraza se lako nađu relacije između matematičkih konstanti  $c$ ,  $a$  i dimenzija  $d$ ,  $t$ .

S obzirom da je za dobivanje ostalih geometrijskih veličina potreban samo dimenzijski omjer, biti će prikazan u ovisnosti o dimenzijama  $d$ ,  $t$ .

Iz izraza 2.8 je:

$$t = \frac{c}{\varepsilon},$$

odnosno

$$c = \varepsilon \cdot t. \quad (2.9)$$

Preoblikovanjem izraza 2.7 je

$$\varepsilon^2 = \frac{d^2}{4c^2} - 1. \quad (2.10)$$

U 2.10 se uvrsti 2.9 i nakon sređivanja se dobije

$$4\varepsilon^4 t^2 + 4\varepsilon^2 t^2 - d^2 = 0. \quad (2.11)$$

Uvođenjem substitucije  $x = \varepsilon^2$  dobije se kvadratna jednadžba

$$4x^2 t^2 + 4xt^2 - d^2 = 0. \quad (2.12)$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe i povratnom supstitucijom dobije se izraz za dimenzijski omjer:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{t\sqrt{d^2 + t^2} - t^2}}{t\sqrt{2}}, \quad (2.13)$$

U tablici 2.5 se nalaze približne formule za izračunavanje ostalih geometrijskih veličina i približni izrazi za korekcijske faktore.

Naime, izrazi za korekcijske faktore u sebi sadrže eliptične funkcije koje su poprilično komplicirane, pa je cilj eliminirati ih.

Tablica 2.5. Približne formule i korekcijski faktori [2]

|  | <b>Izrazi</b>                       | <b>Aproksimacije</b>   |
|--|-------------------------------------|--|
| <b>Volumen</b>                         | $\frac{4}{3}\pi R^3 V(\varepsilon)$ | $V(\varepsilon) = (2.88 - 1.7\varepsilon)\varepsilon$  |
| <b>Površina</b>                        | $4\pi R^2 A(\varepsilon)$           | $A(\varepsilon) = \frac{2.88 - 1.7\varepsilon}{2.82 - 1.98\varepsilon}$                        |
| <b>Površina presjeka</b>               | $\pi R^2 A_c(\varepsilon)$          | $A_c(\varepsilon) = \frac{1.05 - 0.94\varepsilon}{1 - 0.83\varepsilon}$                        |
| <b>Opseg</b>                           | $2\pi R L(\varepsilon)$             | $L(\varepsilon) = \frac{2.5 - 2.3\varepsilon}{10 - 9.31\varepsilon}$                           |
| <b>Elastična potencijalna energija</b> | $\frac{D}{2} U(\varepsilon)$        | $U(\varepsilon) = \frac{151.3 - 148.23\varepsilon}{10 - 17.21\varepsilon + 7.25\varepsilon^2}$ |

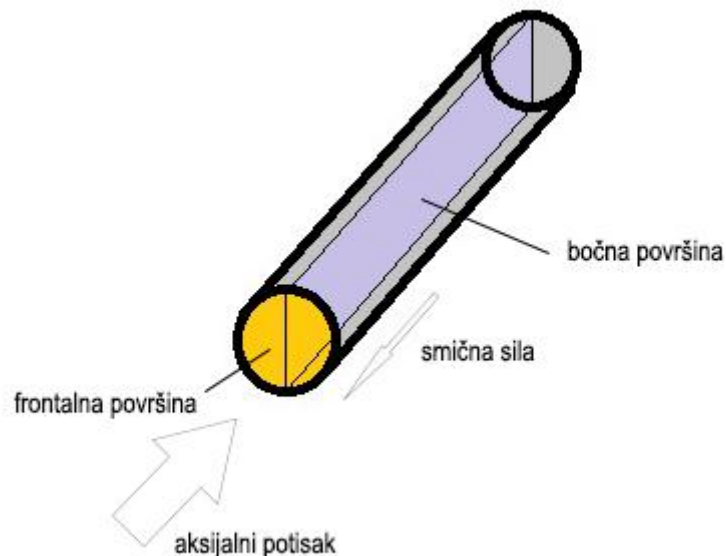
### 3 DEFORMABILNOST CRVENIH KRVNIH STANICA

Kao što je već rečeno, u stanju statičke ravnoteže crvena krvna stanica je bikonkavni disk, dok je u protjecanju kroz kapilare jako deformirana.

Red veličine naprezanja koji odgovara tako velikoj deformaciji može biti procijenjen kako slijedi. Pretpostavimo da kapilara duga  $500\ \mu\text{m}$  sadrži 25 crvenih krvnih stanica i ima pad tlaka  $2\ \text{cm H}_2\text{O}$  ( $\approx 196\ \text{Pa}$ ). Tada je pad tlaka oko  $0,08\ \text{g/cm}^2$  ( $\approx 7,845\ \text{Pa}$ ) po crvenoj krvnoj stanici. Zamislimo da je crvena krvna stanica deformirana u obliku cilindričnog čepa sa frontalnom površinom  $25\ \mu\text{m}^2$  i bočnom površinom  $90\ \mu\text{m}^2$  (Slika 3.1.).

Aksijalnom potisku  $0,08 \cdot 125 \cdot 10^{-8}\ \text{g}$  se opire sila smicanja  $\gamma \cdot 90 \cdot 10^{-8}$  koja djeluje na bočnu površinu. Tada je smično naprezanje reda veličine  $0,08 \cdot 25/90 = 0,02\ \text{g/cm}^2$ , ili  $2\ \text{N/m}^2$ .

Tako malo područje naprezanja inducira deformaciju sa rasteznim omjerom reda veličine 200% na nekim mjestima stanične membrane [1].



Slika 3.1. Cilindrični čep

Jedan od uspješnih izračuna viskoznosti otopine hemoglobina unutar crvene krvne stanice je napravio Dintenass (1968. godine) pod pretpostavkom da se stanica deformira kao kapljica tekućine u Couttovom toku. Na bazi analitičkog rješenja kretanja kapljice tekućine koji je ranije dobio G. I. Taylor, Dintenass je izračunao viskoznost sadržaja crvene krvne stanice koja je iznosila oko  $0,006\ \text{Pas}$ .



To su dokazali i Cokelet i Meiselman (1968. godine) te Schmidt - Nielsen i Taylor (1968. godine) svojim eksperimentima na sadržajima crvene krvne stanice. Sadržaj su dobili tako da su lomili stanice smrzavanjem i odmrzavanjem te otklanjanjem membrana stanica centrifugiranjem. Pokazali su da se otopina hemoglobina u crvenoj krvnoj stanici ponaša kao viskozni fluid sa koeficijentom viskoznosti oko 0,006 Pas. To dovodi do zaključka da je crvena stanica kapljica tekućine omotana membranom [1].

Mnogo godina se razmatralo zašto su crvene krvne stanice bikonkavnog oblika. Ponder (1948. godine) je mislio da je oblik bikonkavnog diska optimalna geometrija za transport kisika. Matematika iza ovog navoda je točna, ali obrazloženje je upitno zbog toga što su crvene krvne stanice oblika bikonkavnog diska samo u stanju statičke ravnoteže, dok se u slučaju tečenja kroz kapilare deformiraju u oblik metka ili papuče.

Conham (1970. godine) je smatrao da je membrana crvene krvne stanice ravna ako je neopterećena i da se ponaša kao ravna ploča te da ima konačnu savojnu krutost i zanemaruju otpornost na istezanje. Ako je takva ravna membrana ispunjena fluidom, oblik bikonkavnog diska je onaj koji ima minimum potencijalne energije. Iako zanimljiva, ova analiza je i uzaludna jer je poznato da membrana crvene krvne stanice ima konačnu otpornost na istezanje, ali vrlo malu savojnu krutost.

Bolji pristup je prihvaćanje činjenice da je crvena krvna stanica kod statičke ravnoteže bikonkavna i pitati koje posebne posljedice implicira bikonkavnost. Odgovor na takvo pitanje bi dao informacije o membranskim naprezanjima, unutarnjem tlaku, deformabilnosti i čvrstoći stanice [1].

Membranska naprezanja će biti opisana u 4. poglavlju, dok će se u nastavku ovog poglavlja objasniti unutarnji tlak, deformabilnosti i čvrstoća stanice.

### 3.1 Rastezna i savojna krutost membrane crvene krvne stanice

Savojna krutost je svojstvo koje razmatramo u slučaju kada se pri deformiranju mijenja zakrivljenost ljuske. Ukoliko savojni moment nije uniforman, tada se javlja i poprečno smicanje.

U teoriji ploča i ljusaka, savojna krutost je data sljedećim izrazom:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (3.1)$$

gdje su:

$E$  - Youngov modul elastičnosti,

$h$  - debljina stijenke,

$\nu$  - Poissonov faktor.

Ako se uzme da je Youngov modul za "živu" crvenu krvnu stanicu  $E = 16,05 \pm 2,3$  kPa [3], debljina membrane  $h = 7,8 \times 10^{-9}$  m [8], te da je Poissonov faktor  $\nu = 0,3$ , savojna krutost će biti prema izrazu (3.1):

$$D = \frac{16050 \cdot (7,8 \cdot 10^{-9})^3}{12(1 - 0,3^2)} \approx 7 \cdot 10^{-22} \text{ Nm.}$$

Usporedno savojnoj krutosti, krutost istezanja  $Eh$  je proporcionalna debljini stijenke, i za gore navedeni slučaj bi ona iznosila  $Eh = 1,2519 \cdot 10^{-4}$  N/m.

S obzirom da je debljina membrane jako mala, vidi se da je savojna krutost puno manja od krutosti istezanja.

Kod vrlo tankih ljusaka velike deformacije su takve da je deformacija istezanja mala zbog velike krutosti istezanja, dok u nekim manjim područjima dolazi do velike promjene zakrivljenosti (produkt promjene zakrivljenosti i savojne krutosti je značajan).

Ovo nas navodi na razmatranje deformacija kod kojih se značajno savijanje pojavljuje duž sustava linija na ljusci što je objašnjeno u sljedećem poglavlju.

### 3.2 Izohorne kompatibilne deformacije

U ovom potpoglavlju će se crvene krvne stanice razmatrati kao deformabilne ljuske ispunjene nestlačivim fluidom. Također, pretpostaviti će se da je ljuska nepropusna za fluid iz čega proizilazi da je za svaku deformaciju ljuske volumen nestlačivog fluida konstantan. U slučajevima kada je volumen konstantan pri deformiranju govori se o izohornim deformacijama [1].

Što se tiče kompatibilnosti površina u teoriji diferencijalne geometrije, površina je kompatibilna nekoj površini ukoliko se može deformirati u tu površinu kontinuiranim savijanjem bez trganja ili istezanja. Pri ovakvim deformacijama ne dolazi do promjene unutarnjeg metričkog tenzora na površini. Također, nema promjene istezanja membrane, odnosno nema promjena membranskih naprezanja.

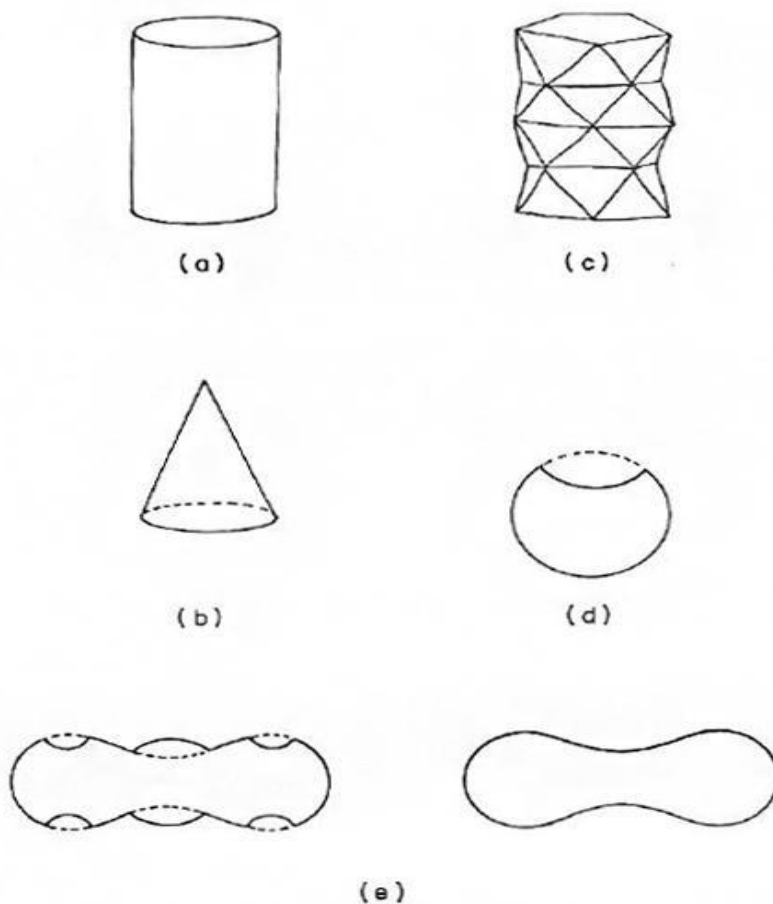
Znači, kada imamo deformaciju ljuske kontinuiranim savijanjem bez trganja i istezanja uz konstantni volumen unutar ljuske, tada se govori o izohornom kompatibilnom deformiranju. Kod takvog načina deformiranja crvenih krvnih stanica ne dolazi do promjene membranskih naprezanja u stijenci stanice.

Što zapravo proizilazi iz ovakvog načina deformiranja?

Pretpostavlja se da je sferna ljuska od elastičnog materijala ispunjenu nestlačivim fluidom i stavljena u drugi fluid. Ako smanjimo vanjski tlak, a unutarnji tlak ostane nepromijenjen, tada bi se ljuska proširila. S obzirom da je riječ o izohornoj deformaciji, ne može doći do proširenja ljuske. To znači da se unutarnji tlak mora smanjiti kako bi se izjednačio s vanjskim tlakom te kako bi membranska naprezanja ostala nepromjenjena. Elastična sferna ljuska savršeno podnosi promjene tlaka, tj. promjena unutarnjeg tlaka je jednaka promjeni vanjskog tlaka.

Ako se uzme u obzir neka proizvoljna elastična ljuska koja sadrži nestlačivi fluid, za nju vrijede isti argumenti kao i za sfernu ljusku. Iz ovoga proizilazi zaključak da dok god imamo izohorno kompatibilno deformiranje, samim manipuliranjem vanjskog tlaka neće doći do promjene membranskih naprezanja niti do promjene razlike tlakova kroz ljusku.

Kada su dvije površine kompatibilne jedna drugoj, onda njihova Gaussova krivulja mora biti jednaka u odgovarajućim točkama. Na primjer, razvijena površina (Gaussova krivulja je nula) je kompatibilna drugoj razvijenoj površini; sferna površina je kompatibilna drugoj sfernoj površini istog polumjera.



Slika 3.2. Kompatibilne površine [1]

Cilindrična i konična ljuska na slici 3.2. (a) i (b) su kompatibilne ukoliko se mogu rastvoriti. Površina dijamantnog uzorka na slici 3.2. (c) sačinjena od ravnih trokuta može biti kompatibilna cilindru.

Udubina na slici 3.2. (d) sa obrnutom zakrivljenošću na sferi je kompatibilna originalnoj sferi. Deformacije prikazane na slici 3.2. (c) i (d) nisu izohorne, ali predstavljaju važne načine izvijanja cilindričnih i sfernih ljusaka.

Na slici 3.2. (e) je prikazana binkonkavna ljuska slična crvenoj krvnoj stanici. Vidljivo je da u tom slučaju postoji beskonačno vrsta izohornih kompatibilnih površina.

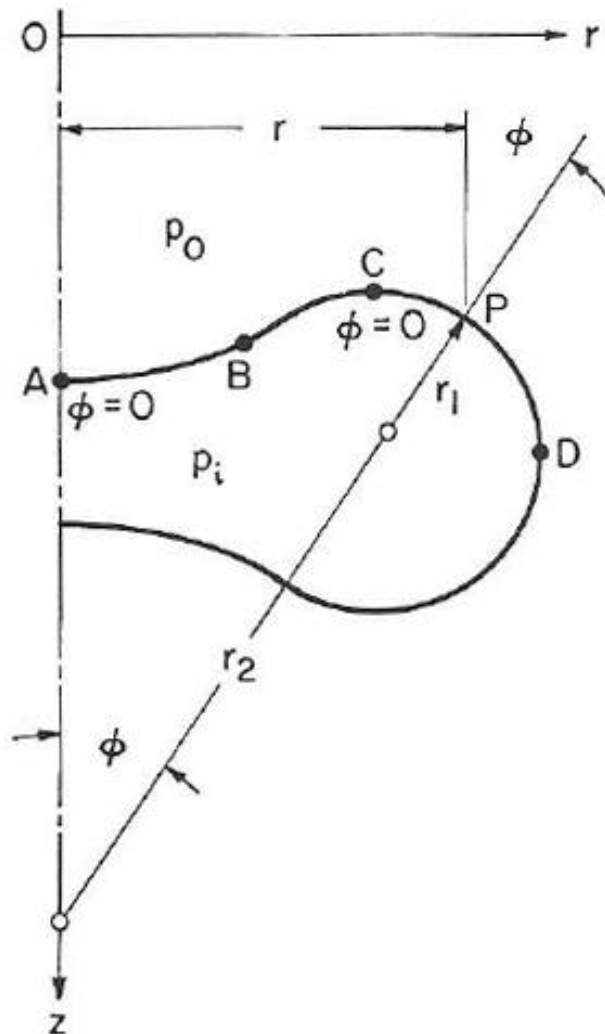
Iz ovoga proizlazi jednostavnost mehanike crvenih krvnih stanica jer se može slobodno izohorno deformirati bez izazivanja membranskih naprezanja, i bez promjene razlike između tlakova izvan i unutar stanice.

## 4 MEMBRANSKA NAPREZANJA

U ovome poglavlju ćemo objasniti i izvesti izraze za membranska naprezanja crvenih krvnih stanica.

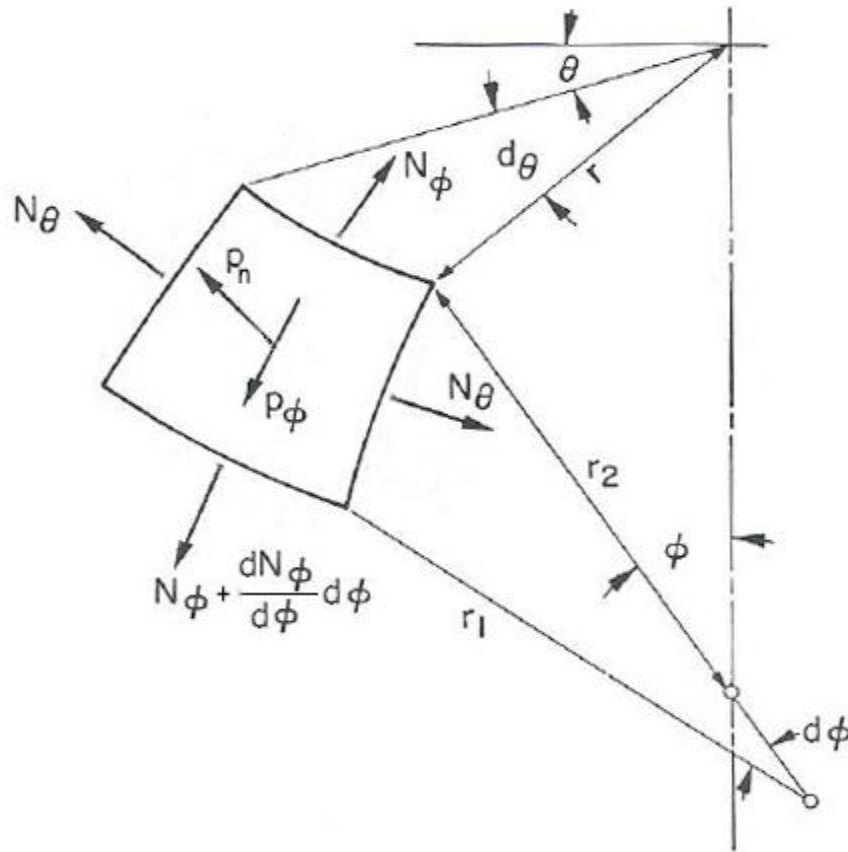
Prije svega moramo napraviti slijedeće pretpostavke [1]:

- (1) Membrana stanice je elastična i ima konačnu čvrstoću,
- (2) Unutar stanice se nalazi nestlačivi Newtonovski viskozni fluid,
- (3) U stanju statičke ravnoteže dok pluta u homogenom Newtonovskom fluidu poprima oblik osnosimetričnog bikonkavnog diska,
- (4) U ovakvom stanju, nema momenta savijanja u membrani stanice.



Slika 4.1. Srednja ploha crvene krvne stanice kao ljuske [1]

Na slici 4.2. je prikazan diferencijalni dio ljuske gdje je  $p_n$  tlak u smjeru normale na površinu ljuske,  $p_\phi$  tlak tangencijalan na površinu ljuske,  $N_\phi$  membransko naprezanje koje djeluje na presjeku  $\phi = \text{konst.}$ ,  $N_\theta$  membransko naprezanje koje djeluje na presjeku  $\theta = \text{konst.}$ , a  $r_1$  (meridijanski) i  $r_2$  (cirkularni) su radijusi zakrivljenosti. Promatrajući ga možemo napisati jednadžbe ravnoteže.



Slika 4.2. Diferencijalni dio ljuske [1]

Uvjeti ravnoteže su kako slijedi:

- u meridijalnom pravcu

$$\sum F_\phi = 0,$$

$$N_\phi r d\theta - \left[ N_\phi r d\theta + \frac{d}{d\phi} (N_\phi r d\theta) d\phi \right] + N_\theta r_1 d\phi d\theta \cos \phi - p_\phi r d\theta r_1 d\phi = 0,$$

$$-\frac{d}{d\phi}(N_\phi r d\theta) d\phi + N_\theta r_1 d\phi d\theta \cos \phi = p_\phi r d\theta r_1 d\phi / \frac{1}{d\phi d\theta},$$

$$-\frac{d}{d\phi}(N_\phi r) + N_\theta r_1 \cos \phi = p_\phi r r_1 / r^{(-1)},$$

$$\boxed{\frac{d}{d\phi}(N_\phi r) - N_\theta r_1 \cos \phi = -p_\phi r r_1}. \quad (4.1)$$

- u smjeru normale

$$\sum F_\theta = 0,$$

$$-N_\phi r d\theta \sin \frac{d\phi}{2} - \left[ N_\phi r d\theta + \frac{d}{d\phi}(N_\phi r d\theta) d\phi \right] \sin \frac{d\phi}{2} - N_\theta r_1 d\phi d\theta \sin \phi + p_n r d\theta r_1 d\phi = 0,$$

s obzirom da su kutevi mali onda je  $\sin \frac{d\phi}{2} \approx \frac{d\phi}{2}$ ,

$$-N_\phi r d\theta \frac{d\phi}{2} - N_\phi r d\theta \frac{d\phi}{2} - \frac{d}{d\phi}(N_\phi r d\theta) d\phi \frac{d\phi}{2} - N_\theta r_1 d\phi d\theta \sin \phi + p_n r d\theta r_1 d\phi = 0,$$

ako se zanemare male veličine višega reda i sredi,

$$-N_\phi r d\theta d\phi - N_\theta r_1 d\phi d\theta \sin \phi = -p_n r d\theta r_1 d\phi / r^{(-1)},$$

$$N_\phi r d\theta d\phi + N_\theta r_1 d\phi d\theta \sin \phi = p_n r d\theta r_1 d\phi / \frac{1}{d\phi d\theta},$$

$$N_\phi r + N_\theta r_1 \sin \phi = p_n r r_1 / \frac{1}{r r_1},$$

$$\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r} \sin \phi = p_n,$$



prema slici 4.1. može se uvrstiti  $r = r_2 \sin \phi$ ,

$$\boxed{\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_n}. \quad (4.2)$$

Iz uvjeta ravnoteže su dobivene dvije jednačbe 4.1 i 4.2 u kojima su nepoznanice  $N_\phi$  i  $N_\theta$ . S desne strane obje jednačbe su tlakovi  $p_\phi$  i  $p_n$ . S obzirom da je crvena krvna stanica jednoliko opterećena duž stijenke vanjskim i unutarnjim tlakom onda će biti  $p_\phi = 0$ , a  $p_n = p_i - p_o$ , gdje je  $p_i$  unutarnji tlak, a  $p_o$  vanjski tlak. Ako se to uzme u obzir i uvrsti u gornje jednačbe dobiti će se sustav dviju jednačbi 4.3.

$$\frac{d}{d\phi}(N_\phi r) - N_\theta r_1 \cos \phi = 0,$$

$$\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_i - p_o. \quad (4.3)$$

Rješavanjem sustava jednačbi 4.3 dobiti će se izrazi za  $N_\phi$  i  $N_\theta$ .

Iz druge jednačbe 4.3 se izrazi  $N_\theta$ :

$$\frac{N_\theta}{r_2} = p_i - p_o - \frac{N_\phi}{r_1} / r_2,$$

$$N_\theta = (p_i - p_o)r_2 - N_\phi \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.4)$$

Ako se uvrsti izraz 4.4 u prvu jednačbu 4.3 dobije se:

$$\frac{d}{d\phi}(N_\phi r) - \left[ (p_i - p_o)r_2 - N_\phi \frac{r_2}{r_1} \right] r_1 \cos \phi = 0,$$

$$\frac{d}{d\phi}(N_\phi r) - (p_i - p_o)r_1 r_2 \cos \phi + N_\phi r_2 \cos \phi = 0,$$

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r) + N_{\phi}r_2 \cos \phi = (p_i - p_o)r_1r_2 \cos \phi,$$

prema slici 4.1 može se uvrstiti  $r = r_2 \sin \phi$ ,

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin \phi) + N_{\phi}r_2 \cos \phi = (p_i - p_o)r_1r_2 \cos \phi \cdot \sin \phi,$$

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin \phi) \sin \phi + N_{\phi}r_2 \cos \phi \sin \phi = (p_i - p_o)r_1r_2 \cos \phi \sin \phi. \quad (4.5)$$

U izrazu 4.5 će biti:

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin \phi) \sin \phi + N_{\phi}r_2 \cos \phi \sin \phi = \frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin^2 \phi), \quad (4.6)$$

zato jer je

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin \phi \cdot \sin \phi) = \frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin \phi) \sin \phi + N_{\phi}r_2 \cos \phi \sin \phi,$$

prema pravilu deriviranja umnoška:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

Kada se uvrsti 4.6 u 4.5 slijedi:

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_2 \sin^2 \phi) = (p_i - p_o)r_1r_2 \cos \phi \sin \phi \cdot \sin \phi,$$

$$N_{\phi}r_2 \sin^2 \phi = \int (p_i - p_o)r_1r_2 \cos \phi \sin \phi \sin \phi \, d\phi + C \cdot \frac{1}{r_2 \sin^2 \phi},$$

$$N_{\phi} = \frac{1}{r_2 \sin^2 \phi} \left[ \int (p_i - p_o)r_1r_2 \cos \phi \sin \phi \sin \phi \, d\phi + C \right]. \quad (4.7)$$

Iz slike 4.1. je vidljivo da je  $r = r_2 \sin \phi$  i  $\frac{dr}{d\phi} = r_1 \cos \phi$ , a ako se to uvrsti u izraz 4.7 i stavi određeni integral dobije se:

$$N_\phi = \frac{1}{r \sin \phi} \int_0^r (p_i - p_o) r dr. \quad (4.8)$$

Sada se integral u izrazu 4.8 može riješiti kako slijedi:

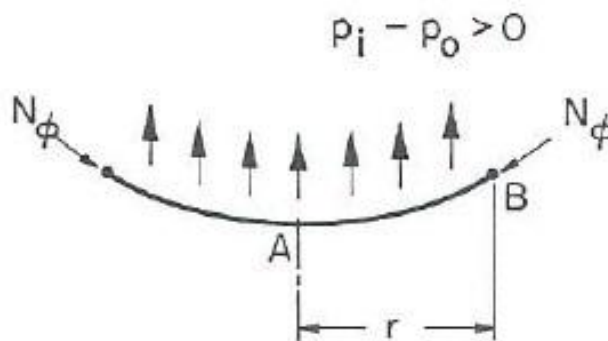
$$N_\phi = \frac{1}{r \sin \phi} \int_0^r (p_i - p_o) r dr,$$

$$N_\phi = \frac{p_i - p_o}{r \sin \phi} \cdot \left( \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^r,$$

$$N_\phi = \frac{p_i - p_o}{r \sin \phi} \cdot \frac{r^2}{2},$$

$$N_\phi = \frac{p_i - p_o}{2} \cdot \frac{r}{\sin \phi}. \quad (4.9)$$

Na slici 4.1. za točku C je  $\phi = 0, r \neq 0$ . U slučaju da je  $p_i \neq p_o$ , odnosno  $p_i - p_o \neq 0$  slijedilo bi da je  $N_\phi \rightarrow \infty$ . Umjesto da se uvode zamjene i određeni integral u izraz 4.7 kako bi se dobio izraz 4.9 to se može učiniti i drugačije promatrajući sliku 4.3.



Slika 4.3. Dio srednje plohe ljuske A-B s opterećenjima [1]

Gledajući sliku 4.3. može se postaviti uvjet ravnoteže:

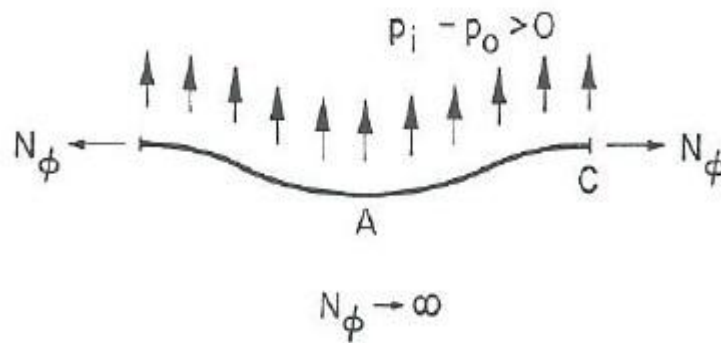
$$2\pi r N_\phi \sin \phi = (p_i - p_o)\pi r^2,$$

odnosno:

$$N_\phi = \frac{p_i - p_o}{2} \cdot \frac{r}{\sin \phi},$$

što odgovara izrazu 4.9.

Ako se pogleda slika 4.4., vidi se da za ovakav presjek membrane nema ništa što bi se suprostavilo vertikalnom opterećenju tlaka, stoga koliko god sila  $N_\phi$  bila velika ne može izbalansirati vertikalno opterećenje.



Slika 4.4. Dio srednje plohe ljuske A-C s opterećenjima [1]

Kada se sve ovo uzme u obzir vidi se da je jako problematično kada je  $p_i \neq p_o$ , jer  $N_\phi \rightarrow \infty$ .

Logičan je zaključak da onda mora biti  $p_i = p_o$ , odnosno  $p_i - p_o = 0$ , iz čega proizlazi da je  $N_\phi = 0$ , odnosno  $N_\theta = 0$ .

## 5 ZAKLJUČAK

Crvene krvne stanice imaju važnu ulogu u ljudskom organizmu. Kako bi uspješno obavljale svoju funkciju jako je važan njihov oblik i način na koji se deformiraju pri protoku kroz kapilare.

Oblik crvene krvne stanice je promjenjiv i ovisi o vanjskom opterećenju, a iz toga proizlazi da su one jako deformabilne.

Pravilan oblik crvene krvne stanice imaju samo u slučaju statičke ravnoteže, kada su oblika bikonkavnog diska. Takav oblik je veoma zanimljiv, ali još uvijek se ne zna točno zašto je to tako.

Ta bikonkavnost se ne može sa sigurnošću objasniti, ali iz nje proizlaze neke informacije vezane za membranska naprezanja, unutrašnji tlak, deformabilnost i čvrstoću stanice.

Iz jako male debljine stanične membrane proizlazi da je savojna krutost puno manja od krutosti istežanja, što znači da su promjene zakrivljenosti puno veće od deformacija istežanja.

Ako crvenu krvnu stanicu razmatramo kao deformabilnu ljusku ispunjenu nestlačivim fluidom, onda se ona izohorno kompatibilno deformira. Volumen unutar stanice je konstantan dok se ona deformira kontinuiranim savijanjem bez trganja i istežanja membrane.

To nam pokazuje da je mehanika deformiranja crvenih krvnih stanica jednostavna, jer ne uzrokuje membranska naprezanja.

Membranska naprezanja proizlaze iz razlike tlakova unutar i van stanice. Odnosno, izvod membranskih naprezanja ukazuje na to da je razlika tlakova jednaka nuli, te da nema membranskih naprezanja u slučaju statičke ravnoteže.

Iz svega ovoga proizlazi da je membrana crvene krvne stanice sposobna za velike deformacije, te da se pritom površina malo mijenja.

Također, naprezanje i istežanje kojima je stanica bila izložena prilikom toka ne utječu na njen pravilan oblik kod statičke ravnoteže. To nas navodi na zaključak da se membrana crvene krvne stanice može smatrati elastičnom.

**LITERATURA**

1. Fung, Y. C., *Biomechanics (mechanical properties of living tissues)*, Second edition, Springer-Verlag New York, 1993.
2. Angelov, Borislav; Mladenov, M. Ivailo, *On the geometry of red blood cell*, Coral Press, Sofia 2000., strana 27-46
3. Mozhanova, A. A., Nurgazizov, N. I., Bukharaev A. A., *Local elastic properties of biological materials studied by SFM*, Surface Science, svezak 482–485, dio 2, 20. lipnja 2001., stranice 1319-1324
4. Alfirević, Ivo, *Linearna analiza konstrukcija*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2011.
5. P. G. Hasitha Nayanajith, Suvash C. Saha, YuanTong Gu, *Formation of the three-dimensional geometry of the red blood cell membrane*, ANZIAM JOURNAL broj 55, stranice 80-95, 2014. godina.
6. Monica Diez-Silva, Ming Dao, Jongyoon Han, Chwee-Teck Lim, and Subra Suresh, *Shape and Biomechanical Characteristics of Human Red Blood Cells in Health and Disease*, National institute of health, PubMed Central, prosinac 2010.

## Internet izvori:

7. [http://en.wikipedia.org/wiki/Red\\_blood\\_cell](http://en.wikipedia.org/wiki/Red_blood_cell) (13.01.2015.)
8. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/6828875> (19.02.2015.)
9. <http://www.s-cool.co.uk/a-level/biology/transport/revise-it/blood> (07.02.2015.)
10. [http://en.wikipedia.org/wiki/Circulatory\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Circulatory_system) (25.02.2015.)
11. [http://en.wikipedia.org/wiki/Blood\\_vessel](http://en.wikipedia.org/wiki/Blood_vessel) (25.02.2015.)
12. <http://en.wikipedia.org/wiki/Blood> (25.02.2015.)