

# Nestacionarno jednodimenzijsko temperaturno polje u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom

---

Šojat, Borna

Undergraduate thesis / Završni rad

2015

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:779314>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Borna Šojat**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**NESTACIONARNO JEDNODIMENZIJSKO  
TEMPERATURNNO POLJE U RAVNOJ  
STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM**

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Antun Galović, dipl. ing.

Student:

Borna Šojat

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Antunu Galoviću čiji su mi savjeti, strpljenje, znanje i stručnost bili od neizmjerne važnosti tijekom pisanja ovog rada.

Borna Šojat



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Borna Šojat** Mat. br.:0035181628

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Nestacionarno jednodimenzijsko temperaturno polje u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Unsteady 1 - D temperature field in plane wall with heat source**

Opis zadatka:

U radu je potrebno prvo izvesti diskretizacijski oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline u ravnoj stijenci s jednoliko distribuiranim toplinskim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$ , zajedno s diskretizacijskim oblicima rubnih uvjeta 3. vrste. Za diskretizacijsku metodu koristiti metodu konačnih razlika (diferencija), a za rješenje sustava jednadžbi, dakle trenutnih temperatura po čvorovima stijenske, dobivenih diskretizacijom, koristiti eksplicitnu metodu. Stoga je potrebno eksplicitno odrediti uvjete stabilnosti rješenja za čvorove unutar krutine odnosno za čvorove na rubovima, te dakako u daljnjem radu uzeti restriktivniji uvjet.

Za analizu uzeti tri ravne stijenske debljine 100 mm, napravljene od: a)- bakra b) – krom - niki čelika; c) – azbesta i d) – suhog betona gustoće  $500 \text{ kg/m}^3$ , a početna temperatura stijenci neka bude  $0^\circ\text{C}$ . Temperature fluida s jedne i druge strane stijenske neka iznose također  $80^\circ\text{C}$  odnosno  $30^\circ\text{C}$ , a pripadajući koeficijenti prijelaza topline neka su isti i iznose:  $\alpha(x=0) = 100 \text{ W/(m}^2\text{ K)}$ ,  $\alpha(x=\delta) = 30 \text{ W/(m}^2\text{ K)}$ . Početna temperatura odabranih krutina neka je također  $30^\circ\text{C}$ . Vrijednosti toplinskih izvora varirati od 0 do  $20000 \text{ W/m}^3$  s korakom od  $5000 \text{ W/m}^3$ .

Tako pripremljenom diskretizacijskom metodom zajedno sa specificiranim početnim i rubnim uvjetima doći do rješenja temperaturnog polja po vremenu i prostoru, pri čemu ukupno vrijeme trajanja procesa odgovara vremenu približnog uspostavljanja stacionarnog temperaturnog polja u stijenci. To znači da je dodatno potrebno za zadane uvjete 3. vrste odrediti analitički oblik stacionarnog temperaturnog polja u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom. Približavanje stacionarnom stanju kontrolirati i odgovarajućom energijskom bilancom, odnosno odgovarajućim temperaturnim kriterijem.

Rezultate proračuna prikazati u odgovarajućim dijagramima i iste interpretirati te dati adekvatne zaključke.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualnu pomoć mentora!

Zadatak zadan:  
25. studenog 2014.

Rok predaje rada:  
1. rok: 26. veljače 2015.  
2. rok: 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 2., 3., i 4. ožujka 2015.  
2. rok: 21., 22., i 23. rujna 2015.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Antun Galović

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

## SADRŽAJ

POPIS SLIKA .....	3
POPIS TABLICA.....	4
POPIS OZNAKA .....	5
SAŽETAK.....	6
SUMMARY .....	7
1. UVOD.....	8
2. DISKRETIZACIJA PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE JEDNODIMENZIJSKOG NESTACIONARNOG MODELA PROVOĐENJA TOPLINE S TOPLINSKIM IZVOROM IZDAŠNOSTI $\Phi v$ .....	9
2.1 Formulacija problema na diferencijalnoj razini .....	9
2.2 Prikaz problema u diskretizacijskom obliku .....	12
2.2.1 Diskretizacija diferencijalne jednadžbe jednodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja s toplinskim izvorom izdašnosti $\Phi v$ .....	12
2.2.2 Diskretizacija rubnih uvjeta diferencijalne jednadžbe jednodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja s toplinskim izvorom izdašnosti $\Phi v$ .....	14
2.3 Kriterij stabilnosti eksplcitne metode .....	16
3. ODREĐIVANJE JEDNODIMENZIJSKOG STACIONARNOG TEMPERATURNOG POLJA U RAVNOJ STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM IZADAŠNOSTI $\Phi v$ .....	18
4. ODREĐIVANJE DEBLJINE STIJENKE $xm$ NA KOJOJ SE NALAZI TEMPERATURNI MAKSIMUM.....	21
4.1 Određivanje debljine stijenke $xm$ na kojoj se nalazi temperaturni maksimum uz uvjet da $\Phi v \rightarrow \infty$ .....	22
5. PRIKAZ JEDNODIMENZIJSKOG STACIONARNOG TEMPERATURNOG POLJA U RAVNOJ STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM IZADAŠNOSTI $\Phi v$ .....	23
5.1 Bakar .....	24
5.2 Krom – nikel čelik .....	25
5.3 Suhi beton .....	26
5.4 Azbest.....	28
5.5 Stacionarno temperaturno polje za sva četiri materijala pri $\Phi v = 20000 \text{ W/m}^3$ ....	29
6. PRIKAZ JEDNODIMENZIJSKOG NESTACIONARNOG TEMPERATURNOG POLJA U RAVNOJ STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM IZADAŠNOSTI $\Phi v$ .....	30
6.1 Azbest.....	30
6.1.1 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi v = 0 \text{ W/m}^3$ .....	30
6.1.2 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi v = 5000 \text{ W/m}^3$ .....	32
6.1.3 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi v = 10000 \text{ W/m}^3$ .....	34
6.1.4 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi v = 15000 \text{ W/m}^3$ .....	35
6.1.5 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi v = 20000 \text{ W/m}^3$ .....	36
6.2 Suhi beton .....	40
6.3 Krom – nikel čelik .....	44

<i>Borna Šojat</i>	<i>Završni rad</i>
6.4 Bakar .....	46
7. ZAKLJUČAK.....	50
LITERATURA.....	51
PRILOZI.....	52

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Vremensko prostorna diskretizacija .....	12
Slika 2.	Diskretizacija rubnog uvjeta za $x = 0$ .....	14
Slika 3.	Diskretizacija rubnog uvjeta na $x = \delta$ .....	14
Slika 4.	Prikaz temperaturnog polja u bakru s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m <sup>3</sup> .....	24
Slika 5.	Prikaz temperaturnog polja u bakru za $\Phi_v=20000$ W/m <sup>3</sup> .....	25
Slika 6.	Prikaz temperaturnog polja u krom - nikl čeliku s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m <sup>3</sup> .....	26
Slika 7.	Prikaz temperaturnog polja u suhom betonu s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m <sup>3</sup> .....	27
Slika 8.	Prikaz temperaturnog polja u azbestu s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m <sup>3</sup> .....	28
Slika 9.	Stacionarno temperaturno polje za sva četiri materijala za $\Phi_v=20000$ W/m <sup>3</sup> .....	29
Slika 10.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 0$ W/m <sup>3</sup> .....	31
Slika 11.	Aproksimacija temperaturnog polja u Azbestu za $\Phi_v = 0$ W/m <sup>3</sup> .....	32
Slika 12.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 5000$ W/m <sup>3</sup> .....	33
Slika 13.	Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 5000$ W/m <sup>3</sup> .....	33
Slika 14.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 10000$ W/m <sup>3</sup> .....	34
Slika 15.	Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 10000$ W/m <sup>3</sup> .....	35
Slika 16.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 15000$ W/m <sup>3</sup> .....	35
Slika 17.	Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 15000$ W/m <sup>3</sup> .....	36
Slika 18.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	37
Slika 19.	Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	38
Slika 20.	Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> za različit broj čvorova .....	39
Slika 21.	Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskih tokova na graničnim površinama azbestne stijenke .....	40
Slika 22.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u suhom betonu za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	41
Slika 23.	Aproksimacija temperaturnog polja u suhom betonu za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	42
Slika 24.	Aproksimacija temperaturnog polja u suhom betonu pri $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> za različit broj čvorova .....	42
Slika 25.	Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskog toka na graničnim površinama stijenke suhog betona .....	43
Slika 26.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u krom - nikl čeliku za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	44
Slika 27.	Aproksimacija temperaturnog polja u krom - nikl čeliku za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	45
Slika 28.	Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskog toka na graničnim površinama stijenke krom - nikl čelika .....	46
Slika 29.	Vremenska distribucija temperaturnog polja u bakru za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	47
Slika 30.	Aproksimacija temperaturnog polja u bakru za $\Phi_v = 20000$ W/m <sup>3</sup> .....	48
Slika 31.	Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskog toka na graničnim površinama bakrene stijenke .....	49



## **POPIS TABLICA**

Tablica 1. Popis materijala te njihovih svojstava ..... 23

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\phi_v$	$W/m^3$	Toplinski izvor
$c$	$J/(kg K)$	Specifični toplinski kapacitet krutine
$Q$	J	Toplina
$q$	$W/m^2$	Gustoća toplinskog toka
$\rho$	$kg/m^3$	Gustoća
$U$	J	Unutrašnja energija
$\lambda$	$W/(m K)$	Toplinska provodnost
$a$	$m^2/s$	Temperaturna provodnost
$\delta$	m	Debljina stijenke
$\vartheta$	$^{\circ}C$	Temperatura
$\alpha$	$W/m^2K$	Koeficijent prijelaza topline
$T_o$	$^{\circ}C$	Temperatura
$q_x$	$W/m^2$	Gustoća toplinskog toka u smjeru osi x
$q_y$	$W/m^2$	Gustoća toplinskog toka u smjeru osi y
$q_z$	$W/m^2$	Gustoća toplinskog toka u smjeru osi z
$m$	kg	Masa
$Bi$	-	Biotova mrežna značajka
$M$	-	Fourierov broj
$\Delta x$	m	Diskretizacijski prostorni korak
$\Delta t$	s	Diskretizacijski vremenski korak

## SAŽETAK

U radu su prikazana rješenja temperaturnog polja po vremenu i prostoru za četiri ravne stijenke s jednoliko distribuiranim toplinskim izvorom, čija se vrijednost varira od 0 do 20000 W/m<sup>3</sup> s korakom od 5000 W/m<sup>3</sup>, uz definirane početne i rubne uvjete. Ravne stijenke debljine 100 mm napravljene su od:

- bakra
- krom-nikl čelik
- azbesta i
- suhog betona gustoće  $\rho=500 \text{ kg/m}^3$ .

Za dobivanje temperaturnog polja po vremenu i prostoru bilo je potrebno prvo izvesti diskretizacijski oblik parcijalne diferencijalne jednačbe provođenja topline u ravnoj stijenci s jednoliko distribuiranim toplinskim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$  i diskretizacijske oblike rubnih uvjeta 3. vrste. Za kontrolu tih temperaturnih polja je izveden analitički oblik stacionarnog temperaturnog polja, kao vrijednost kojoj će nestacionarna temperaturna polja težiti, dok se približavanje stacionarnom stanju kontrolira odgovarajućom energijskom bilancom i temperaturnim kriterijem.

Ključne riječi: nestacionarno; temperaturno polje; toplinski izvor; diskretizacija

## **SUMMARY**

The goal of the paper was to show unsteady 1 – D temperature field in four different plane wall with heat source whose values varied from 0 to 20000 W/m<sup>3</sup> with step of 5000 W/m<sup>3</sup>. Their initial and boundary conditions were also specified and the plane walls were made of:

- copper
- chrome-nickel steel
- asbestos and
- dry concrete

To obtain temperature fields it was necessary to apply finite difference method to transient problem by discretizing the problem in the space and time variables and solving for temperatures at discrete points called the nodes. To see if those obtained temperature fields were correct appropriate energy balance and temperature criteria were used.

Key words: unsteady; temperature field; heat source; discretization

## 1. UVOD

Modeli provođenja topline koji mogu biti analitički riješeni su u pravilu oni modeli koji imaju jednostavnu geometriju i rubne uvjete, a na takve probleme u praksi rijetko kada nailazimo. Uglavnom se susrećemo s problemima koji imaju kompleksnu geometriju kao i rubne uvjete ili promjenjiva svojstva. U tim slučajevima koristimo numeričke metode kao dovoljno dobra približna rješenja.

Numeričke metode nam za razliku od analitičkih, pomoću kojih dobivamo funkciju koja opisuje sve točke nekog medija (u slučaju provođenja topline to je dakako temperaturno polje), daju skup od  $N$  algebarskih jednadžbi za opisivanje nepoznatog temperaturnog polja u  $N$  točaka krutine. Postoji nekoliko numeričkih metoda pomoću kojih možemo doći do rješenja temperaturnog polja. To su metoda konačnih diferencija; metoda konačnih elemenata; metoda rubnih elemenata i metoda kontrolnih volumena, a svaka od navedenih metoda ima svojih prednosti i nedostataka i svaka od metoda se koristi u praksi. U okviru rješavanja problema koristi se metoda konačnih diferencija.

## 2. DISKRETIZACIJA PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE JEDNODIMENZIJSKOG NESTACIONARNOG MODELA PROVOĐENJA TOPLINE S TOPLINSKIM IZVOROM IZDAŠNOSTI $\Phi_v$

### 2.1 Formulacija problema na diferencijalnoj razini

Da bi se dobilo rješenje temperaturnog polja u krutini mora se prvo formulirati diferencijalnu jednadžbu provođenja topline. Uvođenjem sljedećih pretpostavki olakšavamo njezino izvođenje:

- promatrana krutina je homogena i izotropna
- fizikalna svojstva tijela su konstantna
- deformacija promatranog infitezimalnog volumena je zanemarivo mala uslijed temperaturnih varijacija
- unutrašnji toplinski izvori (ponori) zadani u općem obliku  $\Phi_v = f(x, y, z, t)$  te su nejednoliko distribuirani po volumenu krutine

Uzimajući u obzir pretpostavke, izvod diferencijalne jednadžbe provođenja topline se dobiva postavljajući I. glavni stavak za elementarni volumen krutine. Izraženo riječima to je neto iznos topline  $\delta Q_{\text{prov}}$  koji se unosi u elementarni volume krutine provođenjem kroz vanjske površine uslijed postojanja temperaturnog gradijenta u diferencijalnom vremenu  $dt$  i iznos topline koji u istom diferencijalu vremena  $dt$  razvije toplinski izvor  $\delta Q_{\text{izv}}$ . One utječu isključivo na promjenu unutrašnje energije  $dU$  elementarnog volumena krutine.

$$\delta Q_{\text{prov}} + \delta Q_{\text{izv}} = dU \quad (1)$$

Iznos topline koji se unosi u elementarni volumen  $\delta Q_{\text{prov}}$  (prvi član u jednadžbi (1)) je jednak iznosu topline koji se provođenjem kroz elementarne površine u smjeru sve 3 koordinatne osi unese u elementarni volumen.

$$\delta Q_{\text{prov}} = \delta Q_{x,\text{neto}} + \delta Q_{y,\text{neto}} + \delta Q_{z,\text{neto}} \quad (2)$$

$$\delta Q_x = q_x \cdot dydzdt \quad (3)$$

$$\delta Q_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dydzdt \quad (4)$$

$$\delta Q_{x,\text{neto}} = q_x \cdot dydzdt - q_{x+dx} \cdot dydzdt \quad (5)$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 q_x}{\partial x^3} \cdot dx^3 + \dots \quad (6)$$

$$\delta Q_{x,\text{neto}} = q_x \cdot dydzdt - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dydzdt \quad (7)$$

$$\delta Q_{x,\text{neto}} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx dy dz dt \quad (8)$$

Gdje je  $q_x$  projekcija gustoće toplinskog toka u smjer osi  $x$ , a  $\delta Q_{x+dx}$  zapravo predstavlja neto uneseni rad koji se dobiva raspisivanjem funkcije  $q_{x+dx}$  u *Taylorov red* i oduzimanjem jednadžbe (3) i prva dva člana jednadžbe (4). Isti postupak se ponavlja i za ostale dvije koordinatne osi

$$\delta Q_{y,\text{neto}} = q_y \cdot dx dz dt - q_{y+dy} \cdot dx dz dt \quad (9)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 q_y}{\partial y^2} \cdot dy^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 q_y}{\partial y^3} \cdot dy^3 + \dots \quad (10)$$

$$\delta Q_{y,\text{neto}} = q_y \cdot dx dz dt - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx dz dt \quad (11)$$

$$\delta Q_{y,\text{neto}} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dx dy dz dt \quad (12)$$

$$\delta Q_{z,\text{neto}} = q_z \cdot dx dy dt - q_{z+dz} \cdot dx dy dt \quad (13)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot dz + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} \cdot dz^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 q_z}{\partial z^3} \cdot dz^3 + \dots \quad (14)$$

$$\delta Q_{z,\text{neto}} = q_z \cdot dx dy dt - \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx dy dt \quad (15)$$

$$\delta Q_{z,\text{neto}} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot dx dy dz dt \quad (16)$$

Supstituirajući jednadžbe (16), (12) i (8) u jednadžbu (2) dobiva se ukupni neto iznos topline unesen provođenjem u elementarni volumen.

$$\delta Q_{\text{prov}} = -\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \cdot dx dy dz dt \quad (17)$$

Drugi član jednadžbe (1)  $\delta Q_{\text{izv}}$  predstavlja toplinu koja u diferencijalnom vremenu  $dt$  razvije toplinski izvor izdašnosti  $\Phi_v$  u promatranom diferencijalnom volumenu krutine  $dV$

$$\delta Q_{\text{izvor}} = \Phi_v \cdot dx dy dz dt \quad (18)$$

Treći član jednadžbe (1)  $dU$  predstavlja promjenu unutrašnje energije elementarnog volumena

$$dU = c \cdot d\vartheta \cdot dm \quad (19)$$

Uvrštavajući da je

$$dm = \rho \cdot dx dy dz \quad (20)$$

u jednadžbu (19) dolazi se do izraza

$$dU = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot dx dy dz dt \quad (21)$$

Supstituirajući jednadžbe (21), (18) i (17) u jednadžbu (1) dolazi se do diferencijalne jednadžbe

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot dx dy dz dt = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \cdot dx dy dz dt + \Phi_v \cdot dx dy dz dt \quad (22)$$

Skraćivanjem jednadžbe (22) s  $dx dy dz dt$  i uvrštavajući izraze za gustoću toplinskih tokova u smjeru koordinatnih osi dobva se diferencijalna jednadžba provođenja topline u obliku

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right] \pm \frac{\Phi_v}{\rho \cdot c} \quad (23)$$

Jednadžba (23) daje vezu između vremenske promjene temperature u bilo kojoj točki prostora promatrane krutine kao posljedice provođenja topline i toplinskog izvora (ponora). Uzimajući u obzir pretpostavke da je tijelo homogeno i izotropno, tj. vrijednost toplinske provodnosti je konstantna nad čitavom domenom krutine jednadžba (23) se transformira i zapisuje u obliku

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \left[ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] \pm \frac{\Phi_v}{\rho \cdot c} \quad (24)$$

S tim da član

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (25)$$

predstavlja temperaturnu provodnost.

Budući da je problem zadan kao jednodimenzijnsko nestacionarno provođenje topline s toplinskim izvorom može se pisati da su:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0; \quad + \Phi_v$$

Te jednadžba (24) shodno uvedenim pretpostavkama, uz korištenje jednadžbe (25) prelazi u konačan oblik

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{a \cdot \Phi_v}{\lambda} \quad (26)$$



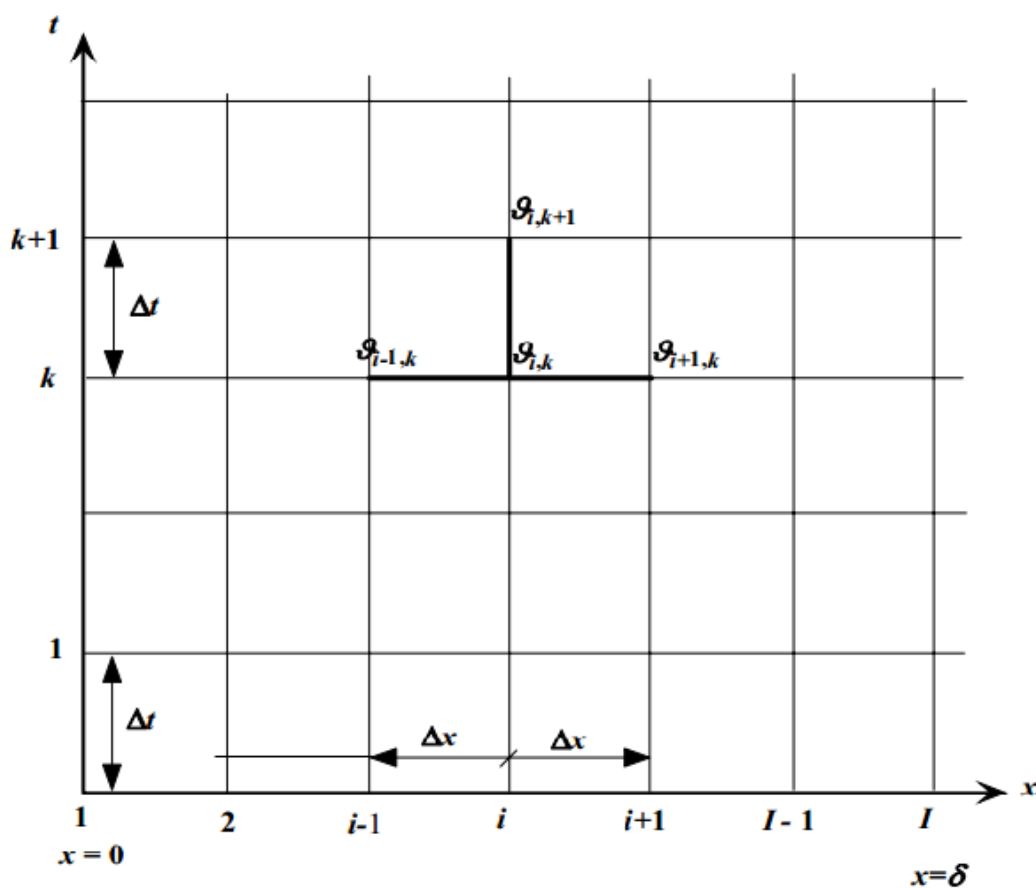
Iz jednadžbe (26) je očigledno da je vremenska promjena temperature krutine proporcionalna njezinoj temperaturnoj provodnosti.

Za jednoznačno definiranje problema na diferencijalnoj razini potrebno je jednadžbi (26) pridružiti odgovarajuće početne uvjete kao i odgovarajuće rubne uvjete.

## 2.2 Prikaz problema u diskretizacijskom obliku

### 2.2.1 Diskretizacija diferencijalne jednadžbe jednodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja s toplinskim izvorom izdašnosti $\Phi_v$

Za prikaz problema u diferencijskom obliku koristi se metoda konačnih diferencija. Vremensko prostorni kontinuum se podijeli na diskretizacijsku prostornu koordinatu  $\Delta x$  i diskretizacijsku vremensku koordinatu  $\Delta t$ .



Slika 1. Vremensko prostorna diskretizacija

Stoga se jednadžbu (26) može pisati u sljedećem obliku

$$\frac{\Delta_t \vartheta}{\Delta t} = a \cdot \frac{\Delta_x^2 \vartheta}{(\Delta x)^2} + \frac{a \cdot \Phi_v}{\lambda} \quad (27)$$

Koja nakon sređivanja poprima oblik:

$$\Delta_t \vartheta = a \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot \Delta_x^2 \vartheta + \frac{a \cdot \Phi_v}{\lambda} \cdot \Delta t \quad (28)$$

s time da je  $\Delta_t \vartheta$  prirast temperature neke točke u vremenskom intervalu  $\Delta t$ . U određenom trenutku  $t$ ,  $\Delta_x \vartheta$  označuje temperaturnu razliku dviju ravnina koje su razmaknute za  $\Delta x$ , dok  $\Delta_x^2 \vartheta$  označuje razliku dviju prostorno susjednih vrijednosti  $\Delta_x \vartheta$ . Ukoliko je u ravnini  $i\Delta x$  u trenutku  $k\Delta t$  temperatura  $\vartheta_{i,k}$  onda se prema slici 1. mogu pisati diferencijski oblici:

$$\Delta_t \vartheta = \vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k} \quad (29)$$

$$\Delta_x \vartheta = \vartheta_{i+1,k} - \vartheta_{i,k} \quad (30)$$

$$\Delta_x^2 \vartheta = (\vartheta_{i+1,k} - \vartheta_{i,k}) - (\vartheta_{i,k} - \vartheta_{i-1,k}) \quad (31)$$

$$\Delta_x^2 \vartheta = \vartheta_{i+1,k} + \vartheta_{i-1,k} - 2 \cdot \vartheta_{i,k} \quad (32)$$

Uvrštavajući jednadžbe (29) i (30) u jednadžbu (28) dobiva se

$$\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k} = a \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (\vartheta_{i+1,k} + \vartheta_{i-1,k} - 2 \cdot \vartheta_{i,k}) + \frac{a \cdot \Phi_v}{\lambda} \cdot \Delta t \quad (33)$$

Te uvrštavajući supstitucije

$$M = a \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (34)$$

koju često nazivamo *Fourierov broj* i

$$N = \frac{a \cdot \Phi_v}{\lambda} \cdot \Delta t \quad (35)$$

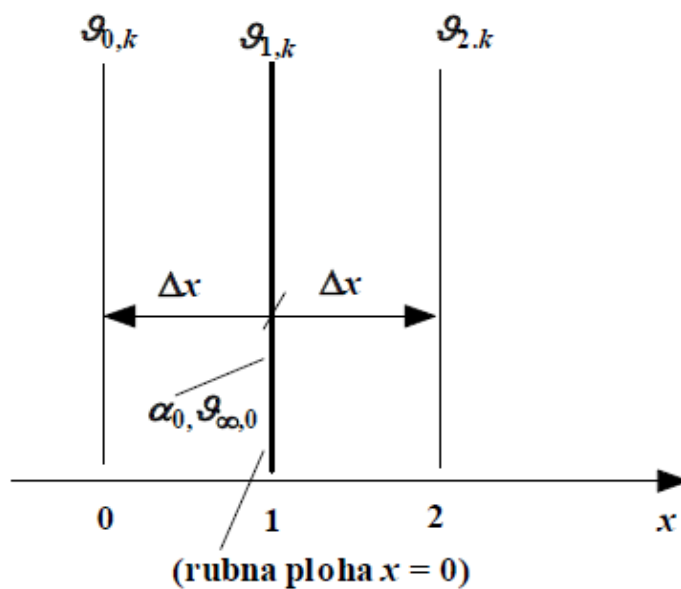
može se jednadžbu (33) zapisati u konačnom obliku:

$$\vartheta_{i,k+1} = M \cdot (\vartheta_{i+1,k} + \vartheta_{i-1,k}) + \vartheta_{i,k} \cdot [1 - 2 \cdot M] + N \quad (36)$$

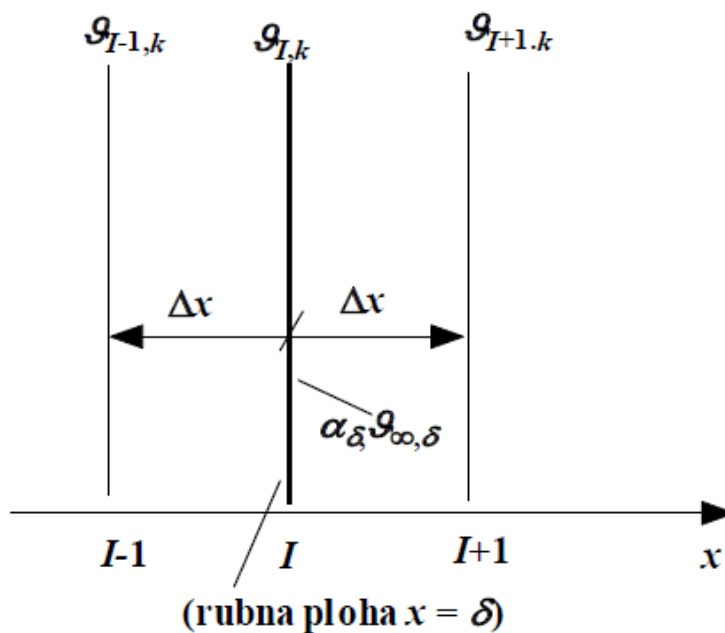
Iz strukture diferencijske jedandžbe jasno je vidljivo da ona vrijedi za sve unutrašnje čvorove ravne stijenke i ona predstavlja eksplicitni zapis. Također je razvidno i da čim postoji specifikiran početni uvjet, a gornja formulacija je kompletirana, rješenje ovog nestacionarnog problema se dobiva marširanjem u vremenu koristeći korak  $\Delta t$ . Za svako od  $I - 1$  unutrašnjih čvorova dobiva se  $I - 1$  jednadžbi. Ostale dvije jednadžbe dobivaju se iz rubnih uvjeta koji se također moraju diskretizirati.

### 2.2.2 Diskretizacija rubnih uvjeta diferencijalne jednadžbe jednodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja s toplinskim izvorom izdašnosti $\Phi_v$

Rubni uvjeti koji se moraju diskretizirati su rubni uvjet 3.vrste na  $x = 0$  i  $x = \delta$



Slika 2. Diskretizacija rubnog uvjeta za  $x = 0$



Slika 3. Diskretizacija rubnog uvjeta na  $x = \delta$

Postavljajući jednadžbu za rubnu plohu  $x = 0$ , tj. rubne uvjet 3. vrste može se pisati:

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \alpha_{x=0} \cdot (\vartheta_{\infty,0} - \vartheta_{1,k}) \quad (37)$$

Te se diskretizirajući gornju jednadžbu dobiva se

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{\vartheta_{2,k} - \vartheta_{0,k}}{2 \cdot \Delta x} \quad (38)$$

$$\frac{\vartheta_{2,k} - \vartheta_{0,k}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\alpha_{x=0}}{\lambda} \cdot (\vartheta_{1,k} - \vartheta_{\infty,0}) \quad (39)$$

Definiranjem *Biotove mrežne značajke*

$$Bi_{x=0} = \frac{\alpha_{x=0} \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (40)$$

može se pisati

$$\vartheta_{0,k} = \vartheta_{2,k} - 2 \cdot Bi_{x=0} \cdot (\vartheta_{1,k} - \vartheta_{\infty,0}) \quad (41)$$

$$\vartheta_{1,k+1} - \vartheta_{1,k} = M \cdot (\vartheta_{2,k} + \vartheta_{0,k} - 2 \cdot \vartheta_{1,k}) + N \quad (42)$$

Supstituirajući jednadžbu (41) u jednadžbu (42) dolazi se do

$$\vartheta_{1,k+1} - \vartheta_{1,k} = M \cdot (\vartheta_{2,k} + \vartheta_{2,k} - 2 \cdot Bi_{x=0} \cdot (\vartheta_{1,k} - \vartheta_{\infty,0}) - 2 \cdot \vartheta_{1,k}) + N \quad (43)$$

Te se sređivanjem dobiva konačni oblik izraza za temperaturu u čvoru 1 u vremenu  $k + 1$

$$\vartheta_{1,k+1} = \vartheta_{1,k} \cdot [1 - 2 \cdot M \cdot (1 + Bi_{x=0})] + 2 \cdot M \cdot \vartheta_{2,k} + 2 \cdot M \cdot Bi_{x=0} \cdot \vartheta_{\infty,0} + N \quad (44)$$

Provodeći analogni postupak za rubnu plohu na  $x = \delta$  dolazi se do konačnog oblika izraza za temperaturu tog  $I$  – tog rubnog čvora u vremenu  $k + 1$

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \alpha_{x=\delta} \cdot (\vartheta_{I,k} - \vartheta_{\infty,\delta}) \quad (45)$$

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{\vartheta_{I+1,k} - \vartheta_{I-1,k}}{2 \cdot \Delta x} \quad (46)$$

$$\frac{\vartheta_{I-1,k} - \vartheta_{I+1,k}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\alpha_{x=\delta}}{\lambda} \cdot (\vartheta_{I,k} - \vartheta_{\infty,\delta}) \quad (47)$$

$$Bi_{x=\delta} = \frac{\alpha_{x=\delta} \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (48)$$

$$\vartheta_{I+1,k} = \vartheta_{I-1,k} - 2 \cdot Bi_{x=\delta} \cdot (\vartheta_{I,k} - \vartheta_{\infty,\delta}) \quad (49)$$

$$\vartheta_{I,k+1} - \vartheta_{I,k} = M \cdot (\vartheta_{I+1,k} + \vartheta_{I-1,k} - 2 \cdot \vartheta_{I,k}) + N \quad (50)$$

$$\vartheta_{I,k+1} - \vartheta_{I,k} = M \cdot (\vartheta_{I-1,k} - 2 \cdot Bi_{x=\delta} \cdot (\vartheta_{I,k} - \vartheta_{\infty,\delta}) + \vartheta_{I-1,k} - 2 \cdot \vartheta_{I,k}) + N \quad (51)$$

$$\vartheta_{I,k+1} = \vartheta_{I,k} \cdot [1 - 2 \cdot M(1 + Bi_{x=\delta})] + 2 \cdot M \cdot \vartheta_{I-1,k} + 2 \cdot M \cdot Bi_{x=\delta} \cdot \vartheta_{\infty,\delta} + N \quad (52)$$

### 2.3 Kriterij stabilnosti eksplicitne metode

„Eksplicitna metoda nije bezuvjetno numerički stabilna, tako da je kod primjene te metode, najveća vrijednost vremenskog koraka  $\Delta t$  ograničena upravo kriterijem stabilnosti te metode. Ukoliko vremenski korak nije dovoljno malen, dobivena rješenja eksplicitnom metodom mogu izrazito oscilirati i divergirati od stvarnih rješenja. Da bi se spriječilo te oscilacije čvorišnih temperaturnih vrijednosti, vrijednost odabranog vremenskog koraka mora biti manja ili u krajnjem slučaju jednaka vrijednosti dobivene iz kriterija stabilnosti. Taj je kriterij stabilnosti baziran na II. zakonu termodinamike, na osnovu kojeg je ispunjen kriterij stabilnosti ako su koeficijenti (nazvani primarnim koeficijentima) u izrazima za  $\vartheta_{i,k}$  i  $\vartheta_{i,k+1}$  jednaki ili veći od nule.“<sup>1</sup> Pošto se postavljaju različite diferencijske jednadžbe za različite čvorove postoji mogućnost da će te jednadžbe rezultirati i različitim ograničenjima za vremenski korak  $\Delta t$ . Stoga se prvo mora pronaći jednadžba s najmanjim primarnim koeficijentom, kao najrestriktivnijim uvjetom. Kada se odredi tu vrijednost, tj. taj kriterij, onda je definiran i kriterij stabilnosti za cijeli sustav. Ako se promatra diferencijska jednadžba za čistu kondukciju kroz ravnu stijenku (s nametnutim temperaturnim rubnim uvjetima) tada iz jednadžbe (36) slijedi

$$\vartheta_{i,k+1} = M \cdot (\vartheta_{i+1,k} + \vartheta_{i-1,k}) + \vartheta_{i,k} \cdot [1 - 2 \cdot M] + N \quad (36)$$

$$[1 - 2 \cdot M] \geq 0 \quad (53)$$

$$M = a \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (54)$$

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot a} \quad (55)$$

Pošto je u zadanom sučaju definiran problem s rubnim uvjetima 3. vrste tada se kriterij stabilnosti mora ispitati i za te slučajeve. Stoga se za  $x = 0$  može pisati

<sup>1</sup> Galović, A.: Diskretizacija parcijalne diferencijalne jednadžbe nestacionarnog 1 - D modela provođenja topline  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

$$\vartheta_{1,k+1} = \vartheta_{1,k} \cdot [1 - 2 \cdot M \cdot (1 + Bi_{x=0})] + 2 \cdot M \cdot \vartheta_{2,k} + 2 \cdot M \cdot Bi_{x=0} \cdot \vartheta_{\infty,0} + N \quad (44)$$

$$[1 - 2 \cdot M \cdot (1 + Bi_{x=0})] \geq 0 \quad (56)$$

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\alpha_0 \cdot \Delta x}{\lambda}\right)} \quad (57)$$

A za  $x = \delta$

$$\vartheta_{I,k+1} = \vartheta_{I,k} \cdot [1 - 2 \cdot M(1 + Bi_{x=\delta})] + 2 \cdot M \cdot \vartheta_{I-1,k} + 2 \cdot M \cdot Bi_{x=\delta} \cdot \vartheta_{\infty,\delta} + N \quad (52)$$

$$[1 - 2 \cdot M(1 + Bi_{x=\delta})] \geq 0 \quad (58)$$

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\alpha_\delta \cdot \Delta x}{\lambda}\right)} \quad (59)$$

### 3. ODREĐIVANJE JEDNODIMENZIJSKOG STACIONARNOG TEMPERATURNOG POLJA U RAVNOJ STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM IZADAŠNOSTI $\Phi_v$

Za rješavanje problema nestacionarnog temperaturnog polja u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$ , od krucijalne je važnosti stacionarno temperaturno polje jer će njemu kao asimptotskoj vrijednosti težiti nestacionarno temperaturno polje. Budući da je stacionarno polje definirano za svaku točku krutine, a nestacionarno se dobiva za  $N$  točaka, to jest pomoću  $N$  algebarskih jednadžbi, kvaliteta aproksimacije će upravo ovisiti o tom broju točaka. Ukoliko bi neka stijenska bila podijeljena na beskonačno mnogo točaka približno temperaturno polje bi savršeno točno opisivalo dobiveno stacionarno temperaturno polje. Iz tog se razloga ovdje daje izvod za jednodimenzijsko stacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci s toplinskim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$  kao funkciju temperatura fluida, toplinske provodnosti krutine, toplinskog izvora, debljine stijenke i dakako koeficijenta prijelaza topline na rubnim plohama stijenke.  $T(x) = f(\alpha_1, \alpha_2, T_{01}, T_{02}, \lambda, \delta, \Phi_v)$

Zapisuje se diferencijalna jednadžba provođenja topline u smjeru osi  $x$  uz postojanje toplinskog izvora

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{\Phi_v}{\lambda} = 0 / \int \quad (59)$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot x + C_1 / \int \quad (60)$$

$$\vartheta(x) = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (61)$$

Te rubni uvjeti 3. vrste za rubove stijenke

$$-\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha_1 \cdot (T_{01} - T_{s1}) \quad (62)$$

$$-\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = \alpha_2 \cdot (T_{s2} - T_{02}) \quad (63)$$

Proračun se započinje na stijenci za  $x = 0$

$$T_{s1} = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad (64)$$

$$-\lambda \cdot \left( -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot 0 + C_1 \right) = \alpha_1 \cdot (T_{01} - T_{s1}) \quad (65)$$

$$-\lambda \cdot C_1 = \alpha_1 \cdot (T_{01} - C_2) \quad (66)$$

Kada se dobije jednačba (66) koja je zapravo obična linearna jednačba s dvije nepoznanice i koja sadrži funkcijsku vezu između konstanti (izražena je konstanta  $C_1$  kao funkcija konstante  $C_2$ ) onda je potrebno još razrješiti i slučaj na stijenci  $x = \delta$

$$-\lambda \cdot \left( -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \delta + C_1 \right) = \alpha_2 \cdot (T_{s2} - T_{02}) \quad (67)$$

$$T_{s2} = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2}{2} + C_1 \cdot \delta + C_2 \quad (68)$$

$$\Phi_v \cdot \delta - \lambda \cdot C_1 = \alpha_2 \cdot \left( -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2}{2} + C_1 \cdot \delta + C_2 - T_{02} \right) \quad (69)$$

$$\Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot (T_{01} - C_2) = \alpha_2 \cdot \left( -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2}{2} + C_1 \cdot \delta + C_2 - T_{02} \right) \quad (70)$$

$$C_2 = \frac{\Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot T_{01} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda} - C_1 \cdot \delta \cdot \alpha_2 + \alpha_2 \cdot T_{02}}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (71)$$

Konstanta  $C_1$  dobiva se uvrštavanjem jednačbe (71) u jednačbu (66)

$$-\lambda \cdot C_1 = \alpha_1 \cdot \left( T_{01} - \frac{\Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot T_{01} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda} - C_1 \cdot \delta \cdot \alpha_2 + \alpha_2 \cdot T_{02}}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) \quad (72)$$

$$C_1 \cdot \left( \lambda + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = \alpha_1 \cdot \left( \frac{\Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot T_{01} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda} + \alpha_2 \cdot T_{02}}{\alpha_1 + \alpha_2} - T_{01} \right) \quad (73)$$

$$C_1 = \frac{\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \quad (74)$$

Nakon određivanja konstante  $C_1$  do konstante  $C_2$  dolazi se uvrštavanjem jednačbe (74) u jednačbu (66)



$$-\lambda \cdot \left( \frac{\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \right) \quad (75)$$

$$= \alpha_1 \cdot (T_{01} - C_2)$$

$$C_2 = T_{01} + \frac{\lambda \cdot \Phi_v \cdot \delta + \lambda \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01}) + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_2}{2}}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta} \quad (76)$$

$$C_2 = \frac{T_{01} \cdot \lambda \cdot \alpha_1 + T_{01} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta + \lambda \cdot \alpha_2 \cdot T_{02} + \lambda \cdot \Phi_v \cdot \delta + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_2}{2}}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta} \quad (77)$$

Uvrštavajući jednadžbe (77) i (74) u jednadžbu (61) dobiva se partikularno rješenje temperaturnog polja za zadane uvjete

$$T(x) = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \left( \frac{\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \right) \cdot x \quad (78)$$

$$+ \frac{T_{01} \cdot \lambda \cdot \alpha_1 + T_{01} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta + \lambda \cdot \alpha_2 \cdot T_{02} + \lambda \cdot \Phi_v \cdot \delta + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_2}{2}}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta}$$

#### 4. ODREĐIVANJE DEBLJINE STIJENKE $x_m$ NA KOJOJ SE NALAZI TEMPERATURNI MAKSIMUM

Za rješavanje modela nestacionarnog temperaturnog polja također je važno poznavati debljinu stijenke  $x_m$  na kojoj se nalazi temperaturni maksimum. Naime pošto je u stvarnom modelu, konačan broj čvorova pomoću kojih se dobiva temperaturno polje unutar stijenke, a taj broj će biti i relativno malen, postojat će i razlike maksimalnih postignutih temperatura između stacionarnog i nestacionarnog temperaturnog polja. Također se, kako se i pokazuje u daljnjoj razradi problema, uočava zanimljivo rješenje, a to je da temperaturni maksimum može pasti bilo gdje unutar stijenke na debljini od  $x = 0$  do  $x = x_m$  ali iza te debljine ma koliko god se povećao  $\Phi_v$  neće doći do promjene vijednosti  $x_m$  koordinate, nego će se samo mijenjati oblik temperaturnog polja.

Do tražene debljine stijenke se dolazi postavljajući diferencijalnu jednadžbu provođenja topline s toplinskim izvorom

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot x + C_1 \quad (78)$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=x_m} = -\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot x_m + C_1 \quad (79)$$

Jasno je da će se temperaturni maksimum dobiti pomoću rubnog uvjeta druge vrste, tj. adijabatskim rubnim uvjetom pa se može pisati

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=x_m} = 0 \quad (80)$$

Supstituirajući jednadžbu (80) u jednadžbu (79) dolazi se do tražene vrijednosti debljine stijenke

$$-\frac{\Phi_v}{\lambda} \cdot x_m + \frac{\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})}{\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta} + \frac{\Phi_v \cdot \delta^2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}{2 \cdot \lambda \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} = 0 \quad (81)$$

$$x_m = \frac{\lambda \cdot [\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})]}{\Phi_v \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta^2}{2 \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \quad (82)$$

#### 4.1 Određivanje debljine stijenke $x_m$ na kojoj se nalazi temperaturni maksimum uz uvjet da $\Phi_v \rightarrow \infty$

Kako je već ranije napomenuto ma koliko god se povećao iznos toplinskog izvora on neće moći pomaknuti poziciju točke  $x_m$ , na kojoj se nalazi temperaturni maksimum, u pozitivnom smjeru osi  $x$ . Za određivanje te pozicije potrebno je krenuti od jednadžbe (82)

$$x_m = \frac{\lambda \cdot [\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})]}{\Phi_v \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta^2}{2 \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \quad (82)$$

Te svođenjem na zajednički razlomak i sređivanjem za primjenu L'Hôpitalovog pravila gornja jednadžba prelazi u sljedeći oblik

$$x_m = \frac{2 \cdot \lambda \cdot [\alpha_1 \cdot \Phi_v \cdot \delta - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (T_{02} - T_{01})] + \Phi_v \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta^2}{2 \cdot \Phi_v \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \quad (83)$$

Te se dobiva da je pozicija na kojoj se nalazi temperaturni maksimum kada  $\Phi_v \rightarrow \infty$  jednaka

$$\lim_{\Phi_v \rightarrow \infty} x_m = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \alpha_1 \cdot \delta + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta^2}{2 \cdot [\lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta]} \quad (84)$$

## 5. PRIKAZ JEDNODIMENZIJSKOG STACIONARNOG TEMPERATURNOG POLJA U RAVNOJ STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM IZADAŠNOSTI $\Phi_v$

U zadatku je zadana da za analizu nestacionarnog jednodimenzijskog temperaturnog polja treba, za ravnu stijenku s jednoliko distribuiranim toplinskim izvorom izadšnosti  $\Phi_v$ , uzeti 4 materijala debljine  $\delta=100$  mm, a to su redom :

- bakar
- krom-nikl čelik
- azbest i
- suhi beton gustoće  $\rho=500$  kg/m<sup>3</sup>,

s time da im je početna temperatura stijenki 30° C. Zadane temperature fluida s jedne i s druge strane su 80° C i 30° C, a pripadajući im koeficijenti prijelaza topline iznose  $\alpha(x=0) = 100$  W/(m<sup>2</sup> K) i  $\alpha(x=\delta) = 30$  W/(m<sup>2</sup> K). Vrijednosti toplinskih izvora je potrebno varirati od 0 do 20000 W/m<sup>3</sup> s korakom od 5000 W/m<sup>3</sup>, te tako pripremljenom diskretizacijskom metodom zajedno sa specificiranim početnim i rubnim uvjetima doći do rješenja temperaturnog polja po vremenu i prostoru.

Za rješavanje ovog problema prvo se mora napraviti prikaz jednodimenzijskog stacionarnog temperaturnog polja u ravnoj stijenci s jednoliko distribuiranim toplinskim izvorom izadšnosti  $\Phi_v$  za sve materijale, radi prikaza konačnog stanja kojem će temperaturna polja u svakom materijalu težiti, tj. približna temperaturna polja koja će se ustaliti nakon nekog proteka vremena.

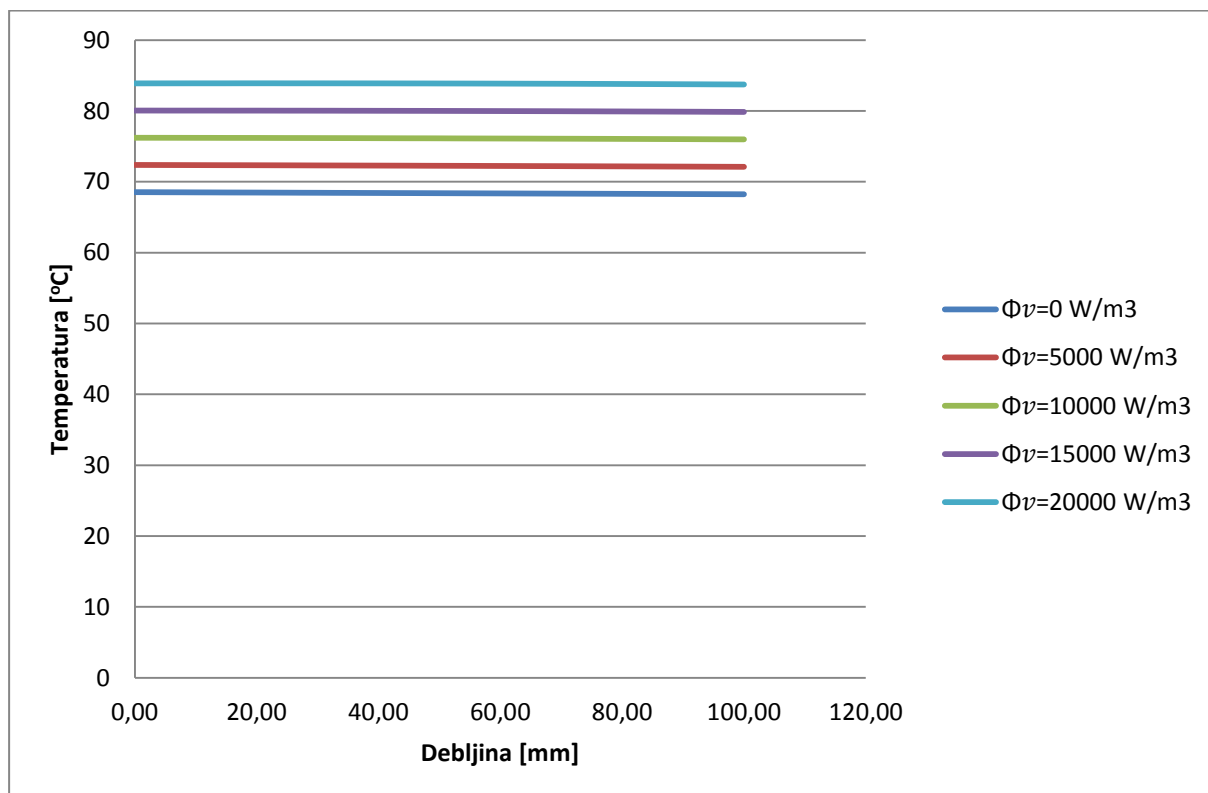
Podatci koji su se koristili za fizikalna svojstva materijala su prikazani sljedećom tablicom:

**Tablica 1. Popis materijala te njihovih svojstava**

Materijal	Gustoća $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Specifični toplinski kapacitet $c$ [kJ/(kg K)]	Toplinska provodnost $\lambda$ [W/(m K)]
Bakar	8930	0,379	386
Krom – niklov čelik	7900	0,477	14,0
Azbest	383	0,795	0,112
Suhi beton	500	0,879	0,128

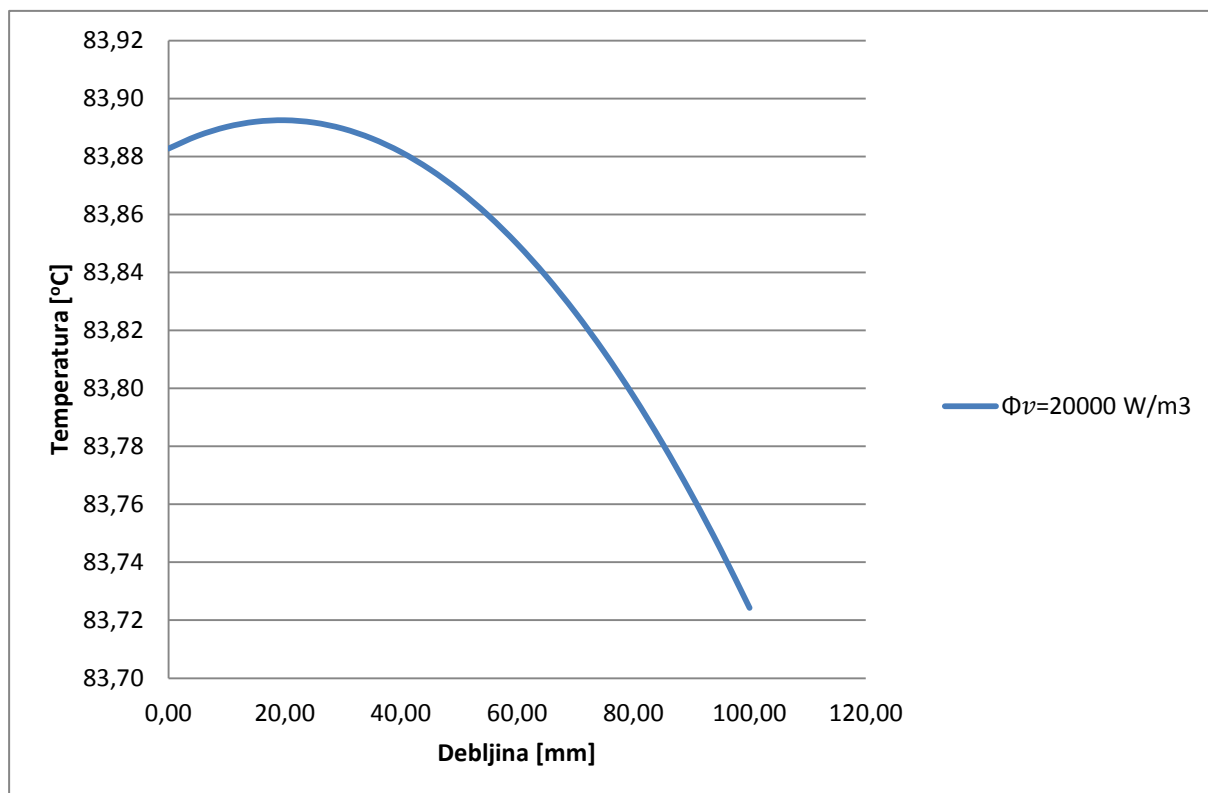
## 5.1 Bakar

Bakar je jedan od najboljih toplinskih vodiča koje ljudi poznaju, pa je i za očekivati da će njegovo temperaturno polje imati približno horizontalan karakter.



Slika 4. Prikaz temperaturnog polja u bakru s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000  $\text{W/m}^3$

Iz gornjeg dijagrama je jasno vidljivo da utjecaj toplinskog izvora  $\Phi_v$  nema veliki utjecaj na izgled krivulja temperaturnog polja, jer su sve približno linearne, tj. to su vrlo slabo zakrivljene parabole. Tamno plava linija koja prikazuje temperaturno polje bez toplinskog izvora, koje onda shodno tome prati zakon pravca, se po zakrivljenosti ne razlikuje puno od svijetlo plave linije koja zapravo ne prati zakon pravca već je parabola kako je to i prikazano na sljedećoj slici. Također je jasno vidljivo iz dijagrama da se povećanjem vrijednosti  $\Phi_v$  krivulje transliraju u smjeru povećanja temperature, te da rubovi stijenke imaju približno sličnu temperaturu kao i maksimalnu temperaturu koja se nalazi na  $x = x_m$ .

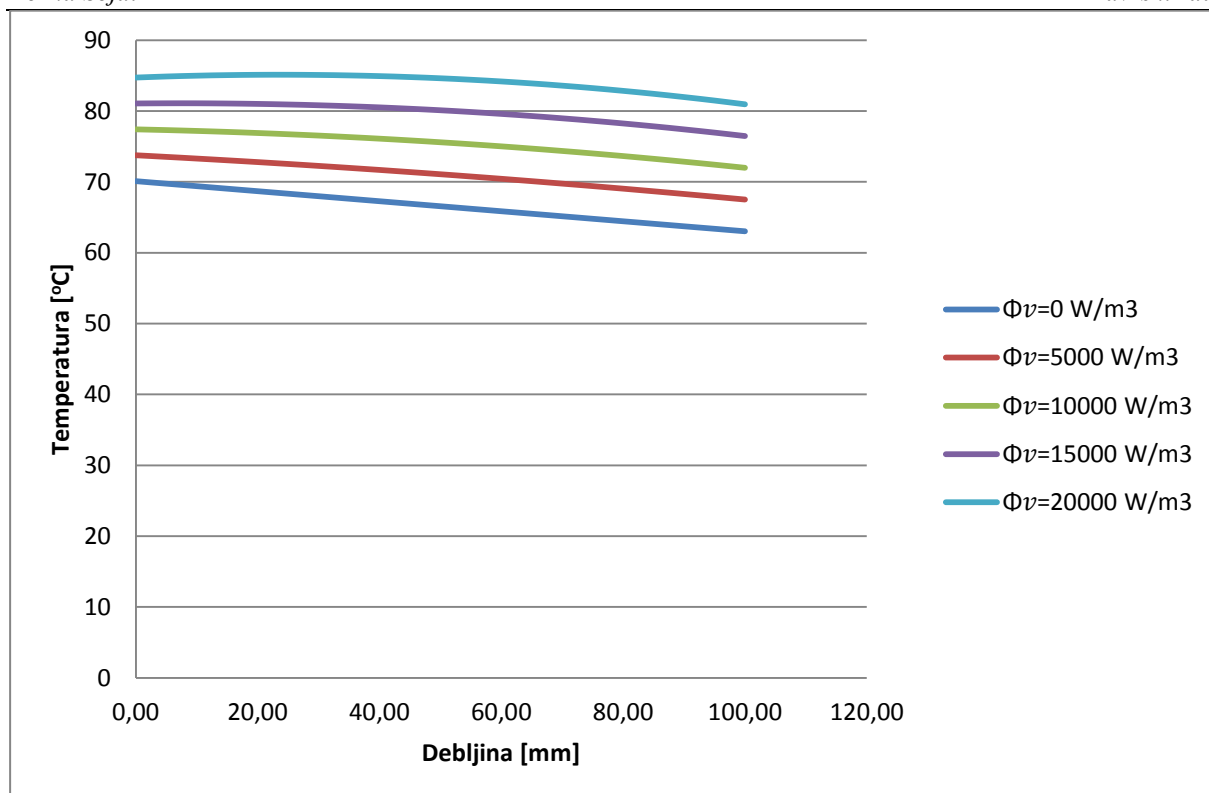


**Slika 5. Prikaz temperaturnog polja u bakru za  $\Phi_v=20000 \text{ W/m}^3$**

Iz dijagrama koji prikazuje temperaturno polje u bakru je vidljiva prethodna tvrdnja da je to blago zakrivljena parabola jer kada se dovoljno smanji temperaturna skala, krivulja poprima karakterističan oblik.

## 5.2 Krom – nikel čelik

Od četiri zadan materijala krom – nikel čelik i bakar su toplinski vodiči, s time da bakar ima višu vrijednost toplinske provodnosti pa je i sukladno tome bolji toplinski vodič. Ta činjenica svejdno ne mijenja puno očekivanja oko izgleda temperaturnog polja krom – nikel čelika.

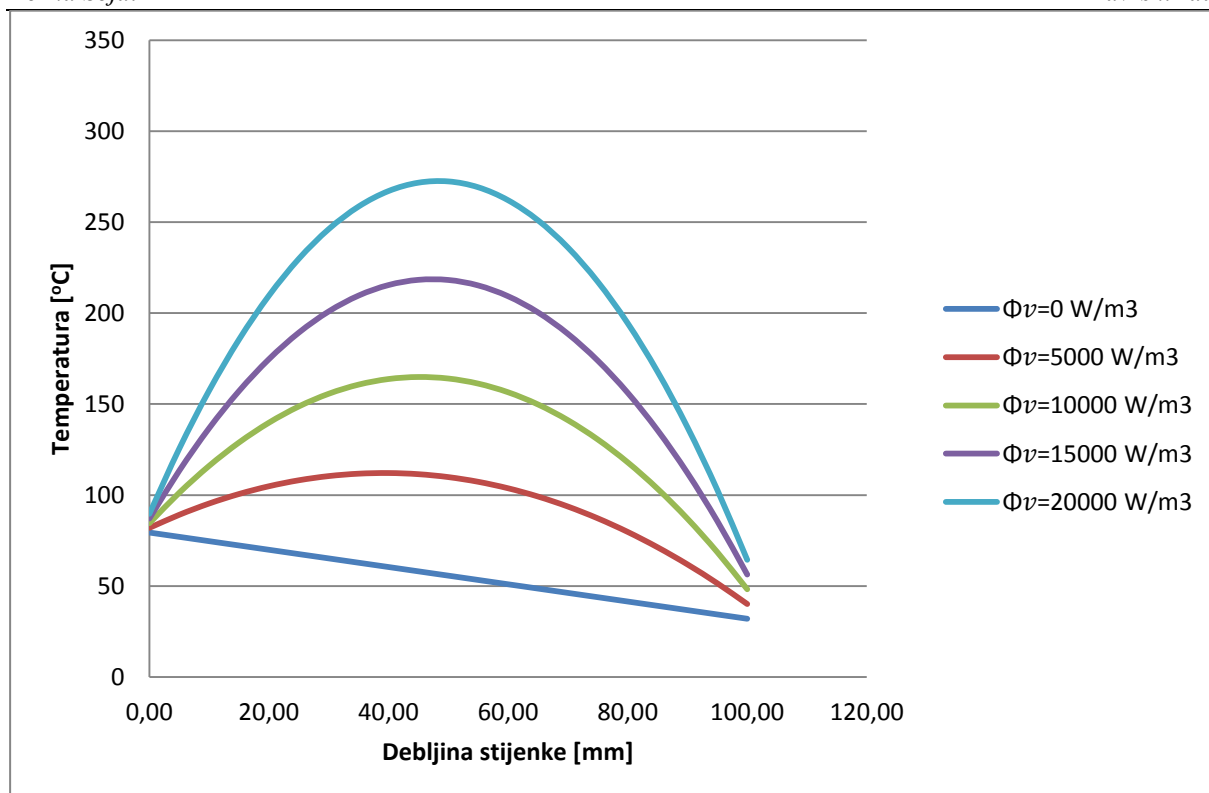


**Slika 6. Prikaz temperaturnog polja u krom - nikel čeliku s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m<sup>3</sup>**

Iako je i krom – nikel čelik, kako je već rečeno, toplinski vodič, iz dijagrama su neke stvari oko temperaturnog polja u stacionarnom stanju jasne. Tamno plava krivulja koja opisuje stacionarno temperaturno polje bez jednoliko distribuiranog toplinskog izvora izdašnosti  $\Phi_v$  je pravac koji se dodavanjem toplinskog izvora počinje blago zakrivljavati i postiže neki lokalni maksimum kako je to i prikazano ljubičastom i svijetlo plavom krivuljom. Što je iznos toplinskog izvora veći to su krivulje zaobljenije, a maksimalna temperatura postignuta u materijalu se počinje sve više razlikovati od temperatura na rubovima stijenke.

### 5.3 Suhi beton

U zadatku je među četiri zadana materijala i suhi beton gustoće  $\rho=500$  kg/m<sup>3</sup>, a iz tablice podataka je vidljivo da suhi beton spada u kategoriju toplinskih izolatora zbog male toplinske provodnosti. To posljedično znači da svi zaključci koji su izvedeni na temelju prethodnih dijagram nisu u potpunosti primjenjivi i na ovaj materijal.

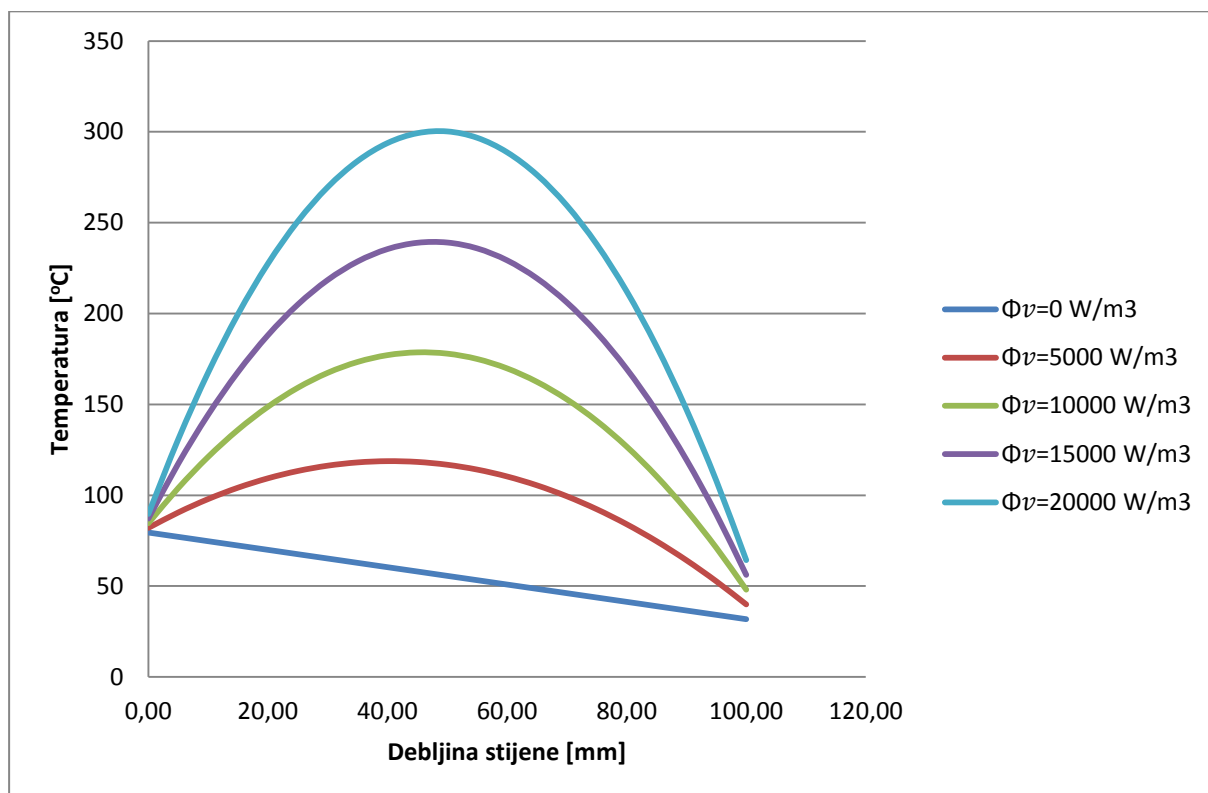


**Slika 7. Prikaz temperaturnog polja u suhom betonu s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m<sup>3</sup>**

Iz dijagrama za suhi beton je vidljivo kao i za prethodni slučaj kod krom – nikl čelika da dolazi do prelaska temperaturnog polja koje prati zakon pravca u slučaju bez jednoliko distribuiranog toplinskog izvora u parabolu s izraženim lokalnim ekstremom za slučaj kada postoji toplinski izvor. Za razliku od oba prethodna materijala, za koje smo već rekli da su toplinski vodiči, suhi beton kao toplinski izolator pokazuje drugačije ponašanje. Već i kod manjeg iznosa toplinskog izvora, u ovom primjeru crvena i zelena krivulja, zamjećujemo znatno izraženiju zakrivljenost parabole. To je posljedica kako je već napomenuto, manjeg iznosa toplinske provodnosti, ali i jednako tako većeg iznosa specifičnog toplinskog kapaciteta materijala. Logično je da se s povećanjem količine pohranjene energije mora promijeniti i temperaturno polje unutar materijala. Također je na ovom dijagramu jako dobro vidljiv i utjecaj rubova, tj. da koeficijenti prijelaza topline na graničnim površinama stijenke itekako utječu na oblik temperaturnog polja. Jednostavno rečeno to bi se moglo slikovito prikazati kao da toplinski izvor „vuče“ temperaturno polje u smjeru povećanja temperature, a da koeficijenti prijelaza topline „pokušavaju zadržati“ temperaturno polje na mjestu. Osim navedenih činjenica razvidno je i da postoji znatna razlika između maksimalne temperature temperaturnog polja i temperature na rubovima materijala.



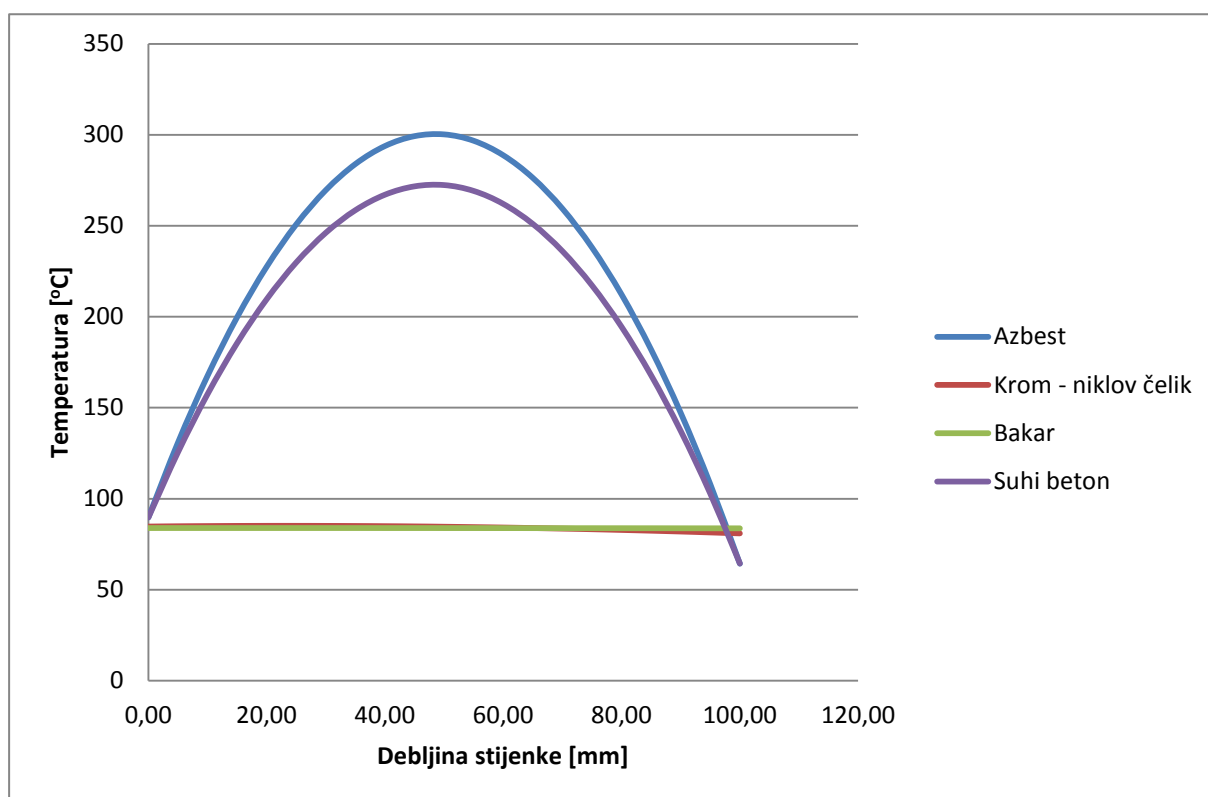
## 5.4 Azbest



Slika 8. Prikaz temperaturnog polja u azbestu s variranjem toplinskog izvora od 0 do 20000 W/m<sup>3</sup>

Za azbest vrijede svi zaključci izvedeni i za suhi beton s time da je prema svojstvima azbest bolji toplinski izolator pa shodno tome i ima manju vrijednost toplinske provodnosti. Posljedično su temperaturna polja unutar materijala nešto izraženija pa je i maksimalna temperatura koja se postiže unutar materijala nešto viša nego što je to bio slučaj u suhom betonu. Također i ovdje valja skrenuti pozornost na rubove stijenske gdje, kako je već u prethodnom slučaju bilo detaljno opisano, koeficijenti prijelaza topline igraju ključnu ulogu. Pošto je na lijevoj strani stijenske koeficijent prijelaza topline  $\alpha(x=0) = 100 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$  vidimo da na toj plohi vrijednost temperaturnog polja azbesta i ne prikazuje značajne razlike u odnosu na vrijednost temperature u dijagramu suhog betona, dok na rubnoj plohi za  $x = \delta$ , pri koeficijentu prijelaza topline  $\alpha = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ , možemo zamjetiti razliku temperatura između ova dva materijala.

### 5.5 Stacionarno temperaturno polje za sva četiri materijala pri $\Phi v = 20000 \text{ W/m}^3$



Slika 9. Stacionarno temperaturno polje za sva četiri materijala za  $\Phi_v=20000 \text{ W/m}^3$

Na gornjoj slici su jasno vidljivi svi navedeni zaključci. Za bakar koji je idenetificiran kao eklatantan primjer toplinskog vodiča je jasno vidljivo da stavljanjem njegovog temperaturnog polje u istu mrežu s temperaturnim poljima ostalih materijala, ono ima gotovo horizontalan karakter. Također je s druge strane vidljivo za azbest, da kao najbolji izolator iz zadane skupine materijala, ima najizraženiji temperaturni maksimum. Ovdje se također jako dobro vidi i utjecaj rubnih uvjeta, tj. da će na lijevoj strani stijenke (za  $x = 0$ ) gotovo svi materijali imati istu temperaturu, a na desnoj strani stijenke (za  $x = \delta$ ) će parovi materijala imati gotovo jednaku temperaturu. To je posljedica činjenice da je na lijevoj strani koeficijent prijelaza topline dovoljno velik da postane dominantan član što se tiče formiranja temperaturnog polja na rubu stijenke, dok nam je na desnoj strani koeficijent prijelaza topline manji, pa je i posljedično tome prestao biti dominantan član; zato su tu svojstva materijala od velikog utjecaja.

## 6. PRIKAZ JEDNODIMENZIJSKOG NESTACIONARNOG TEMPERATURNOG POLJA U RAVNOJ STIJENCI S TOPLINSKIM IZVOROM IZDAŠNOSTI $\Phi_v$

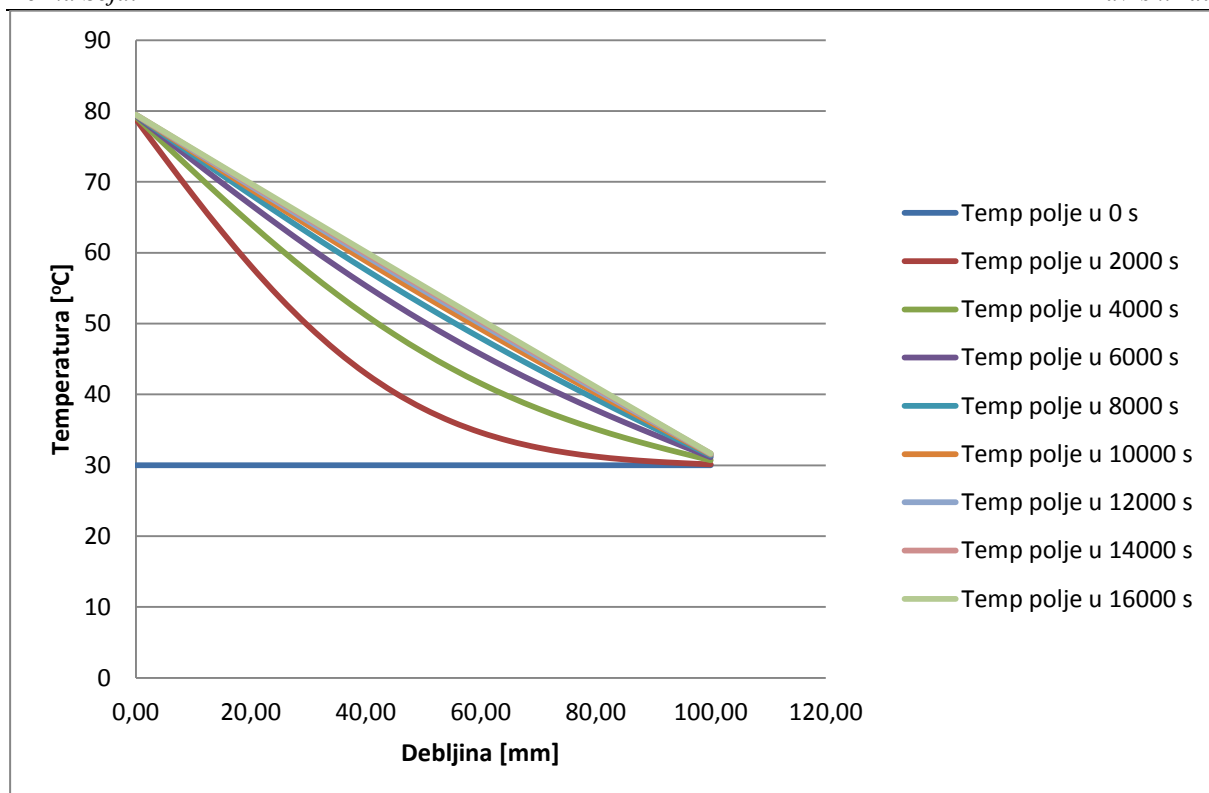
Kako je već rečeno u točki 5., u zadatku se traži da se diskretizacijskom metodom zajedno sa specificiranim početnim i rubnim uvjetima dobije rješenje temperaturnog polja u vremenu i prostoru. To se prikazuje u potpunosti za azbest, tj. prikazuju se nestacionarna temperaturna polja unutar stijeke s jednoliko distribuiranim toplinskim izvornom izdašnost  $\Phi_v$  varirajući mu vrijednosti od 0 do 20000 W/m<sup>3</sup> s korakom od 5000 W/m<sup>3</sup>. Za ostale materijale prikazuje se temperaturno polje pri vrijednosti  $\Phi_v = 20000$  W/m<sup>3</sup> jer će zaključci izvedeni za azbest biti univerzalno primjenjivi.

### 6.1 Azbest

Budući da se u zadatku traži prikaz nestacionarnog temperaturnog polja s jednoliko distribuiranim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$ , prema pripremljenom matematičkom modelu u točki 2., provodi se proračun koristeći svojstva azbesta navedena u Tablici 1. Za broj čvorova je uzeta vrijednost  $N = 20$ .

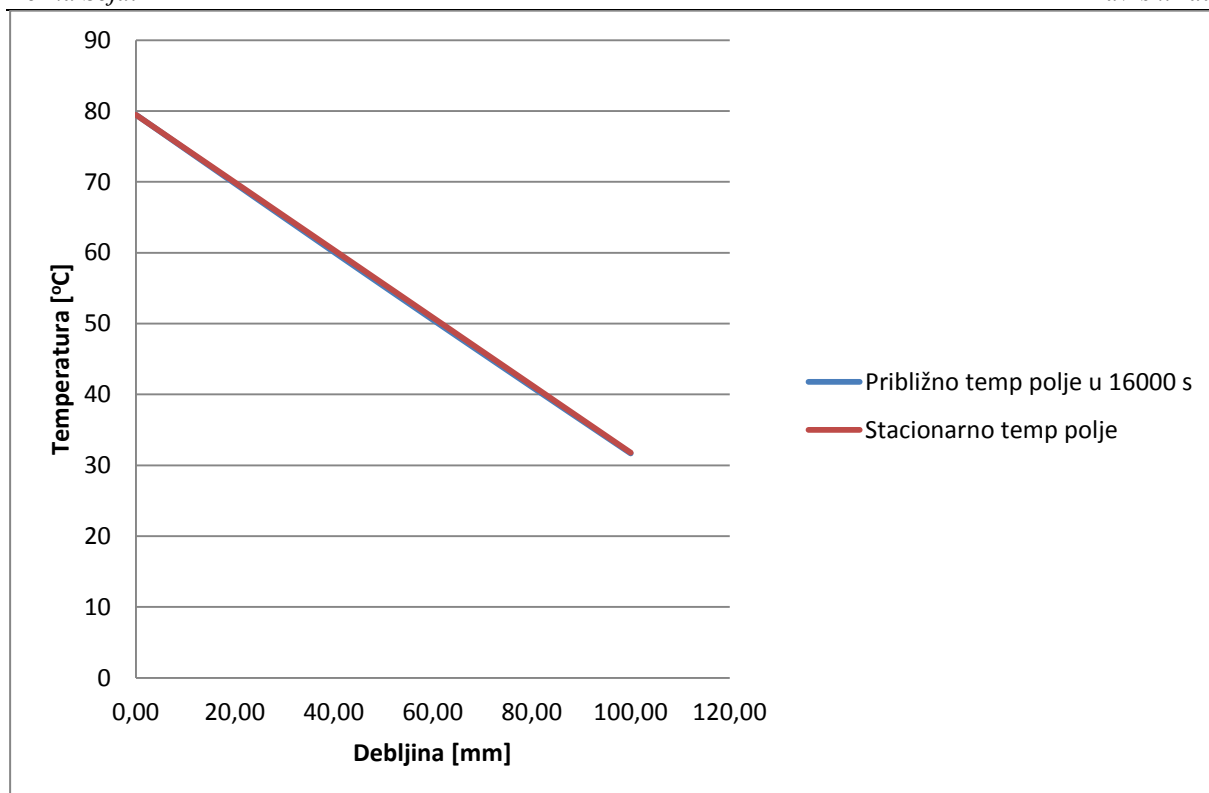
#### 6.1.1 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi_v = 0$ W/m<sup>3</sup>

U točki 5. je prikazano da ukoliko ne postoji toplinski izvor, tj. ako je njegova izdašnost jednaka 0 stacionarno temperaturno polje unutar bilo koje ravne stijene prati zakon pravca. Za prikaz vremenske distribucije nestacionarnog temperaturnog polja u ravnoj stijeci korišten je fortranski kod. Uzeta vrijednost debljine stijene je 100 mm, a budući da je ona podijeljena na 20 segmenata prostorni korak  $\Delta x$  će iznositi 5 mm i stijenska će sadržavati 21 čvor.



Slika 10. Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 0 \text{ W/m}^3$

Kako je vidljivo iz gornjeg dijagrama u početnom trenutku je temperaturno polje bilo jednoliko, tj. stijenka je bila progrijana na  $30^\circ\text{C}$ . Kako se protok vremena mijenjao, odnosno kako je nestacionarno temperaturno polje težilo stacionarnom stanju, krivulja se sve više i više približavala zakonu pravca. Budući da je s lijeve strane stijenke (za  $x = 0$ ) temperatura fluida jednaka  $80^\circ\text{C}$ , a za  $x = \delta$  temperatura fluida iznosi  $30^\circ\text{C}$ , jasno je da se ovdje radi o modelu zagrijavanja ravne stijenke pa temperaturna polja s lokalnim minimumom nastaju zbog činjenice da se prvo zagrijava rub stijenke na  $x = 0$ , a potom ostale točke stijenke kondukcijom kroz materijal.

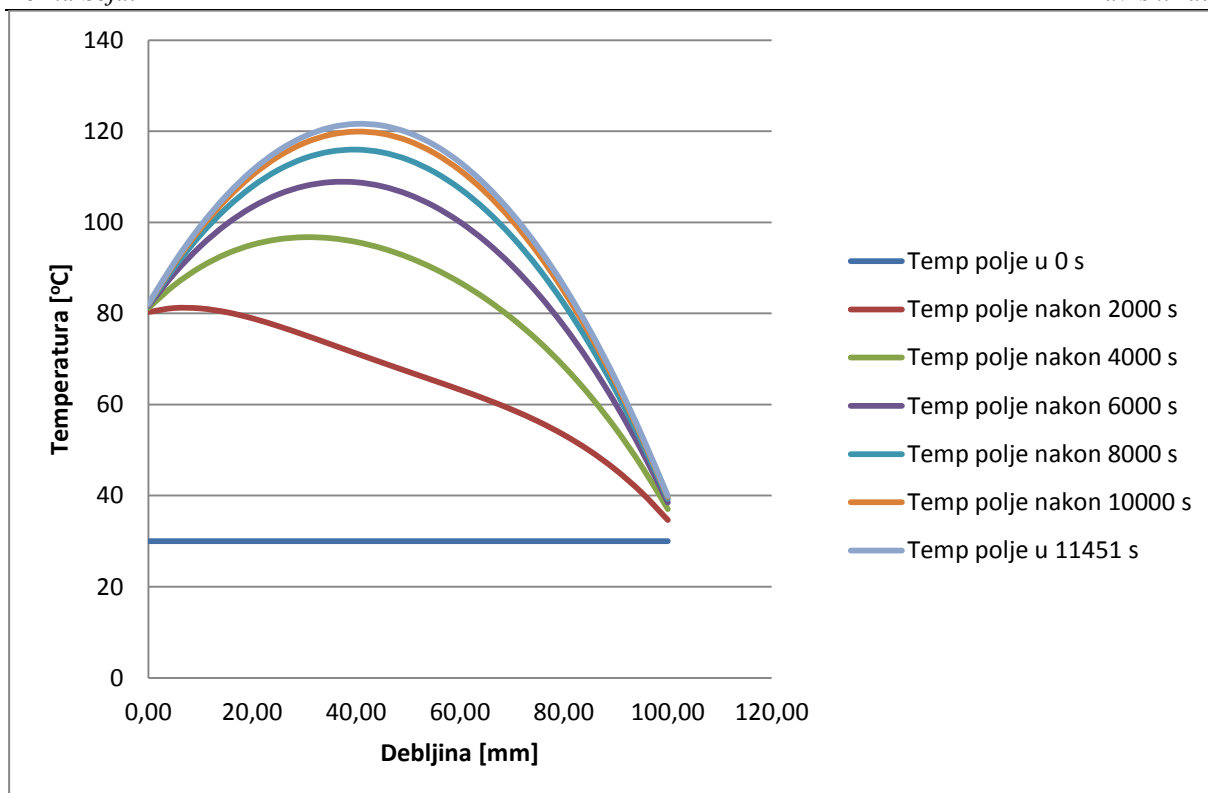


Slika 11. Aproksimacija temperaturnog polja u Azbestu za  $\Phi_v = 0 \text{ W/m}^3$

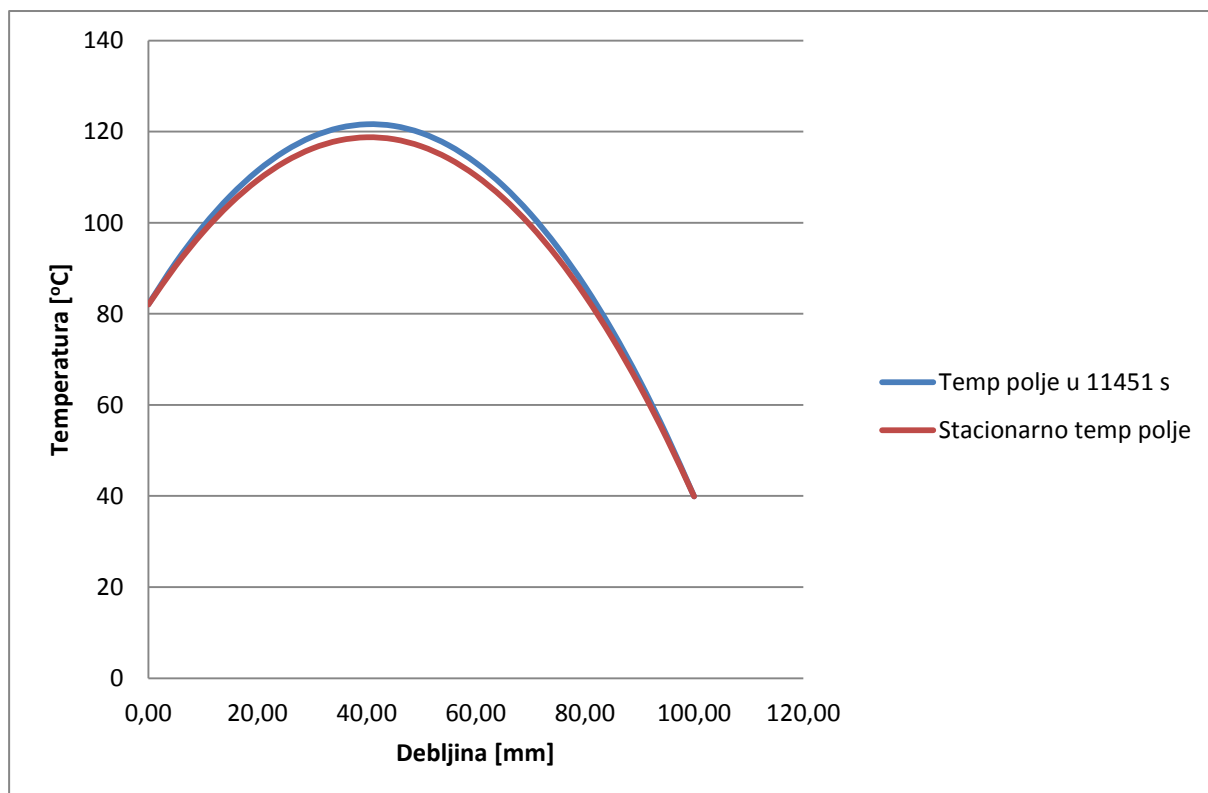
Iz dijagrama na slici 11. jasno je vidljivo da približno stacionarno temperaturno polje u 16000 sekundi jako dobro opisuje analitički dobiveno stacionarno temperaturno polje.

### 6.1.2 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi_v = 5000 \text{ W/m}^3$

U azbestu pri toplinskom izvoru izdašnosti  $\Phi_v = 5000 \text{ W/m}^3$  temperaturno polje ima oblik parabole, kako je to i vidljivo iz dijagrama na slici 8., pa će nestacionarno temperaturno polje težiti toj paraboli.



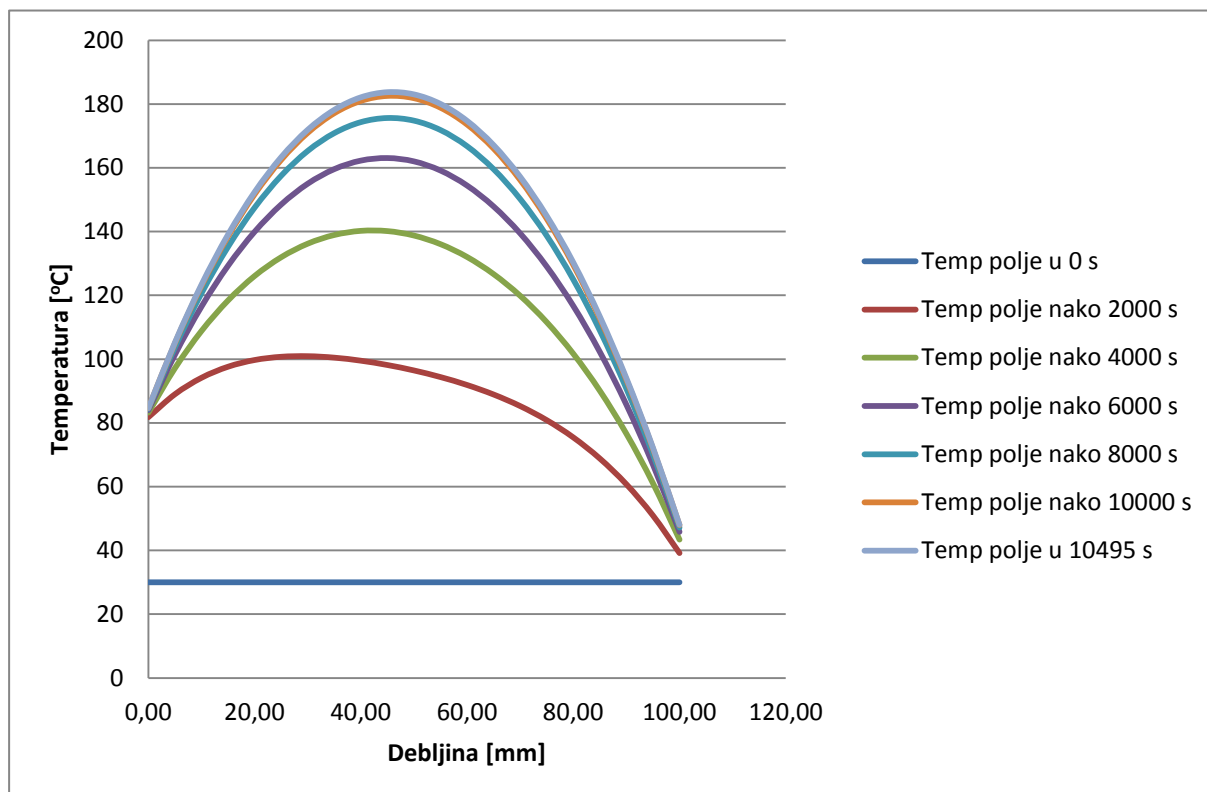
Slika 12. Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 5000 \text{ W/m}^3$



Slika 13. Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 5000 \text{ W/m}^3$

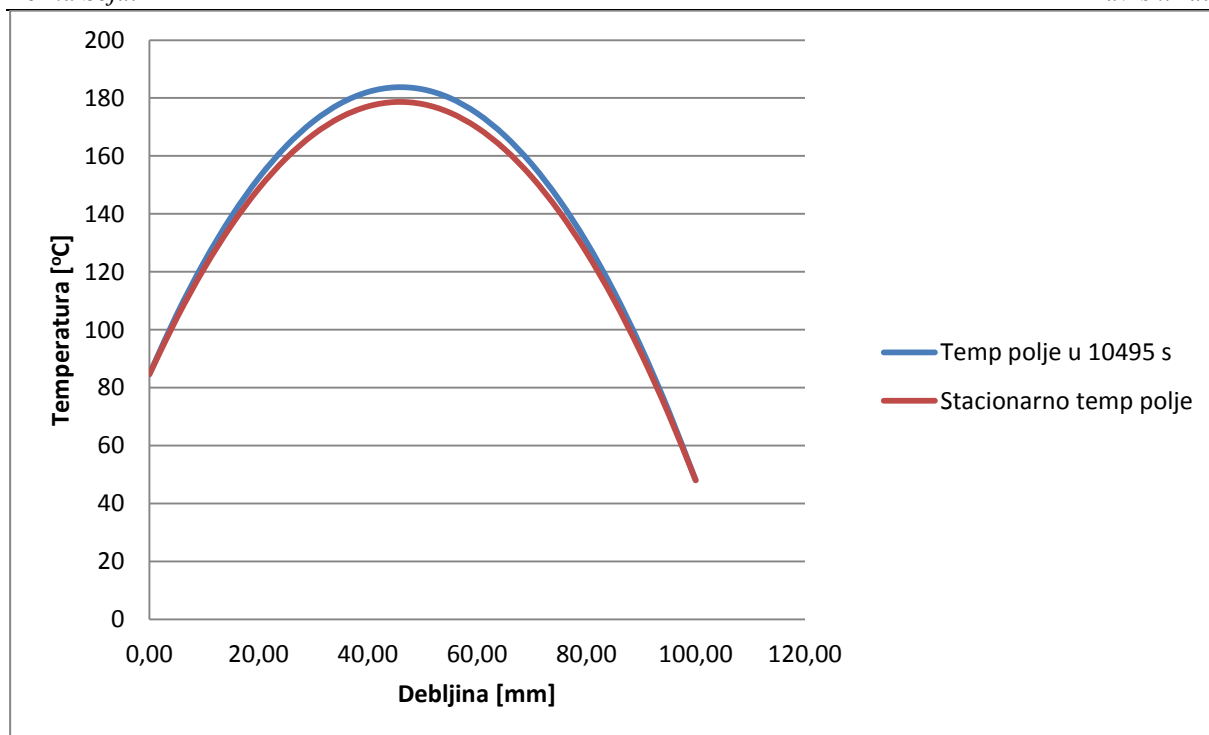
Vidljivo je i da nestacionarno temperaturno polje u 11451 sekundi dobro opisuje stacionarno temperaturno polje, a da se tijekom zagrijavanja materijala maksimalna temperatura, tj. lokalni ekstrem svake parabole nalazi na manjoj vrijednosti nego je to bio slučaj za približno temperaturno polje.

### 6.1.3 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi_v = 10000 \text{ W/m}^3$



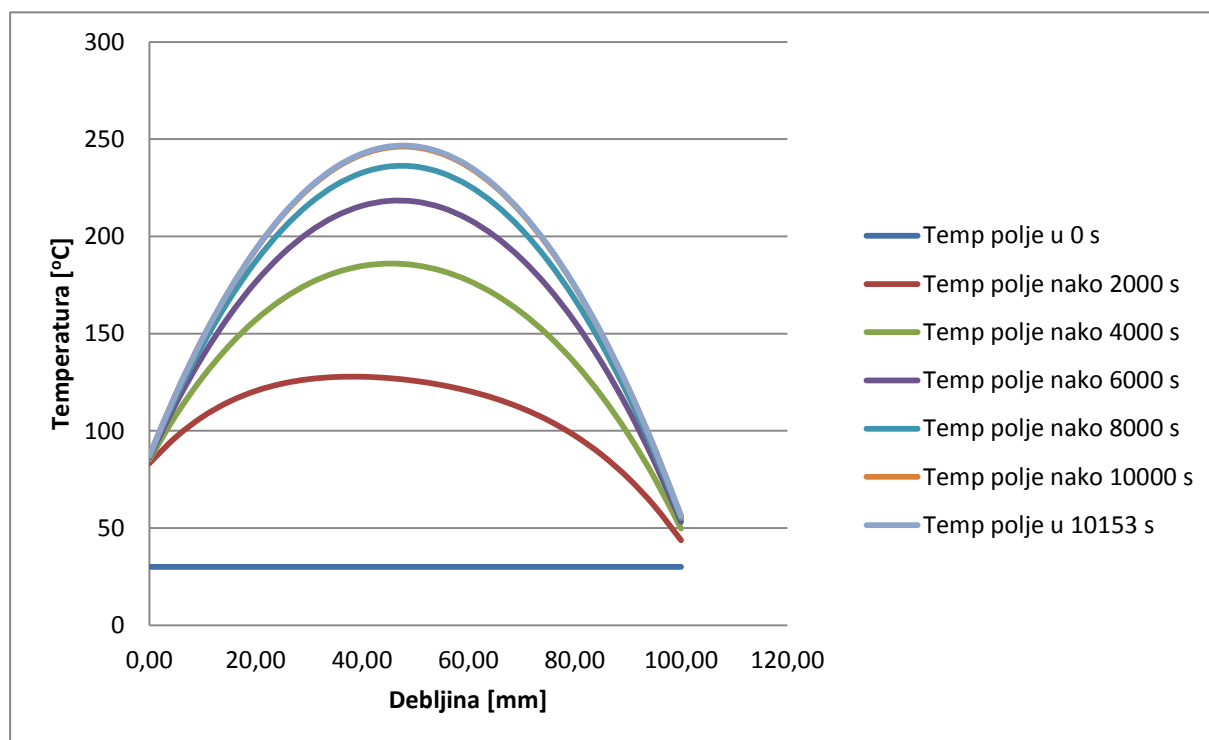
Slika 14. Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 10000 \text{ W/m}^3$

U slučaju povećanja iznosa toplinskog izvora, malo se smanjuje potrebno vrijeme za uspostavljanje približnog stacionarnog temperaturnog polja, koje nastaje kao posljedica bržeg zagrijavanja materijala. A na sljedećem dijagramu je vidljivo da nestacionarno temperaturno polje u 10495 sekundi dobro opisuje stacionarno.



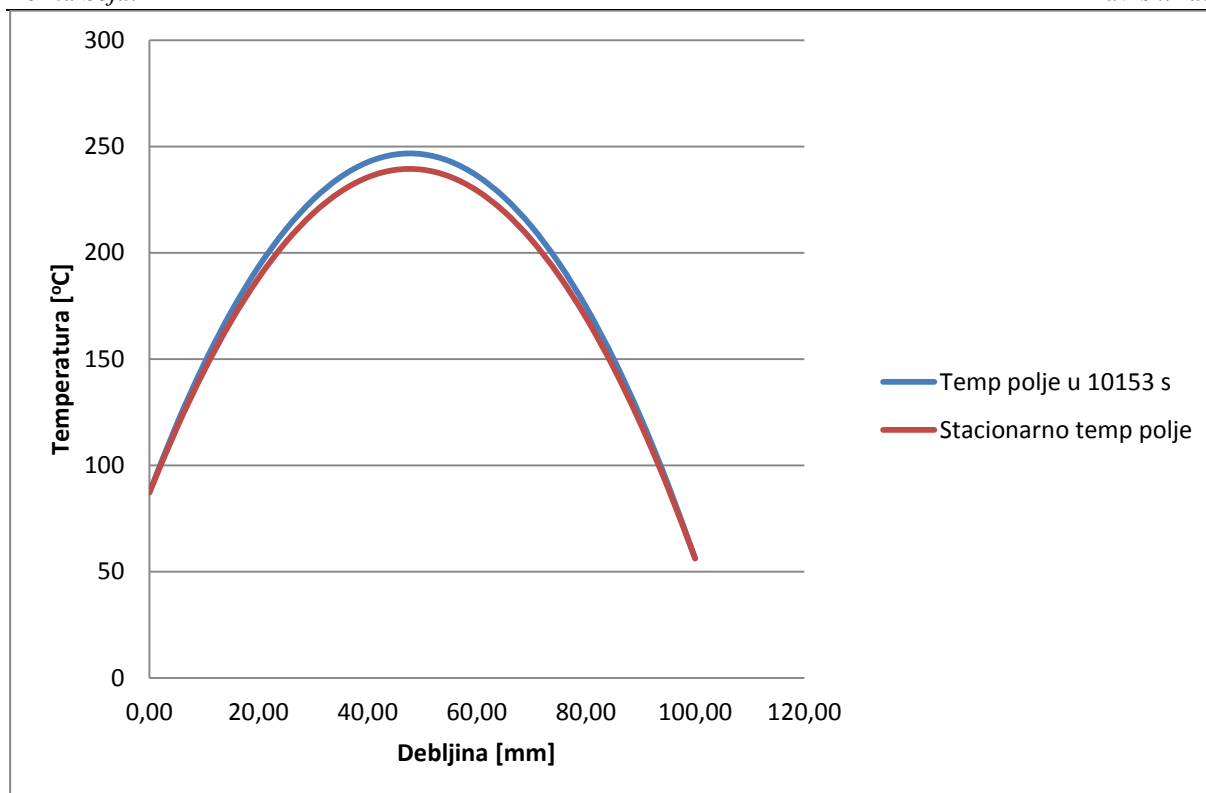
Slika 15. Aproximacija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 10000 \text{ W/m}^3$

#### 6.1.4 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi_v = 15000 \text{ W/m}^3$



Slika 16. Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 15000 \text{ W/m}^3$



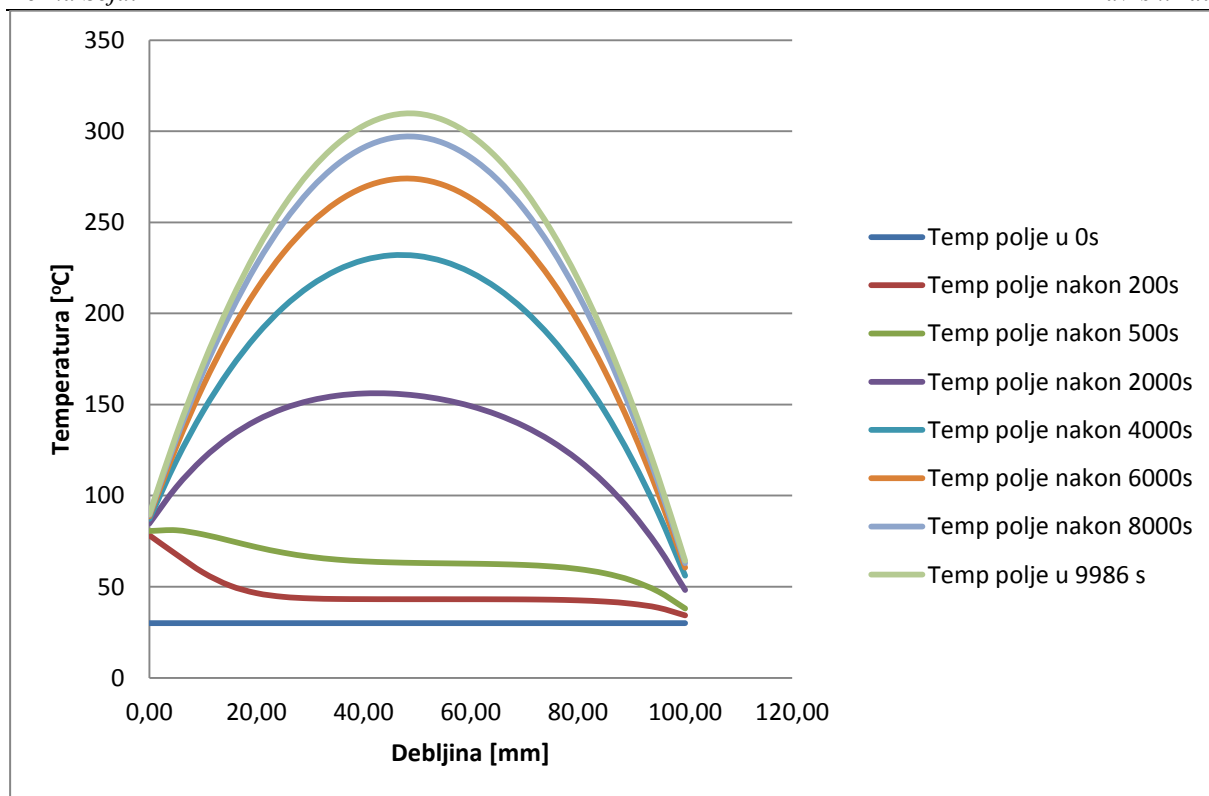


Slika 17. Aproximacija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 15000 \text{ W/m}^3$

U dijagramu aproksimacije temperaturnog polja vidljivo je da dolazi do sve veće razlike maksimalnih temperatura približnog stacionarnog i analitički dobivenog stacionarnog temperaturnog polja. To je posljedica numeričke greške, pošto je u fortranskom kodu za rješavanje nestacionarnog problema bilo zadano da se rubne temperature na  $x = \delta$  moraju razlikovati za manje od  $0,008^\circ\text{C}$ . Također je i ovdje vidljivo da se je vrijeme potrebno za uspostavljanje približnog stacionarnog temperaturnog polja smanjilo u odnosu na prošli slučaj.

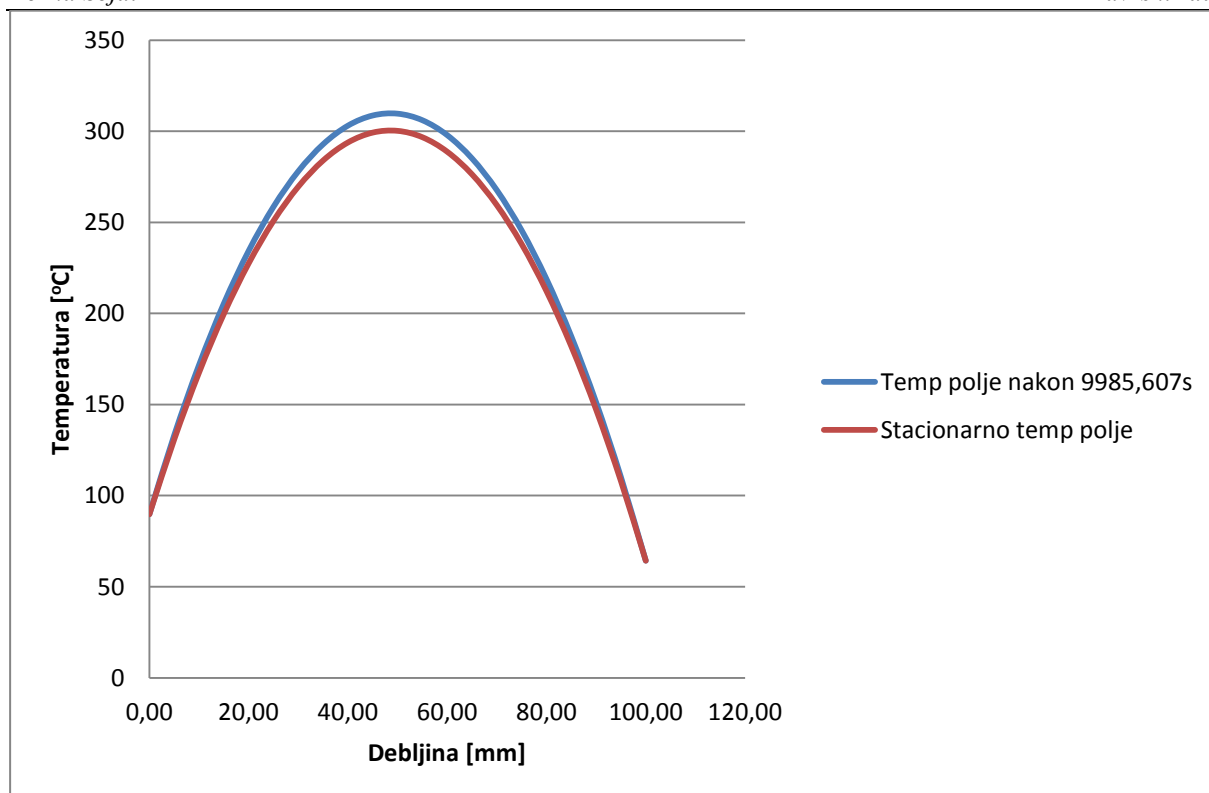
### 6.1.5 Temperaturno polje u azbestu za $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$

Kako je već i prije bilo rečeno, azbest je toplinski izolator pa znamo da će on imati i najvišu maksimalnu temperaturu stacionarnog temperaturnog polja od grupe zadanih materijala. U prethodnim slučajevima zamjetno je da se povećanjem iznosa toplinskog izvora povećava i rastojanje maksimalne temperature u stacionarno i nestacionarnom temperaturnom polju pa bi za slučaj  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$  ta temperaturna razlika morala biti najveća.



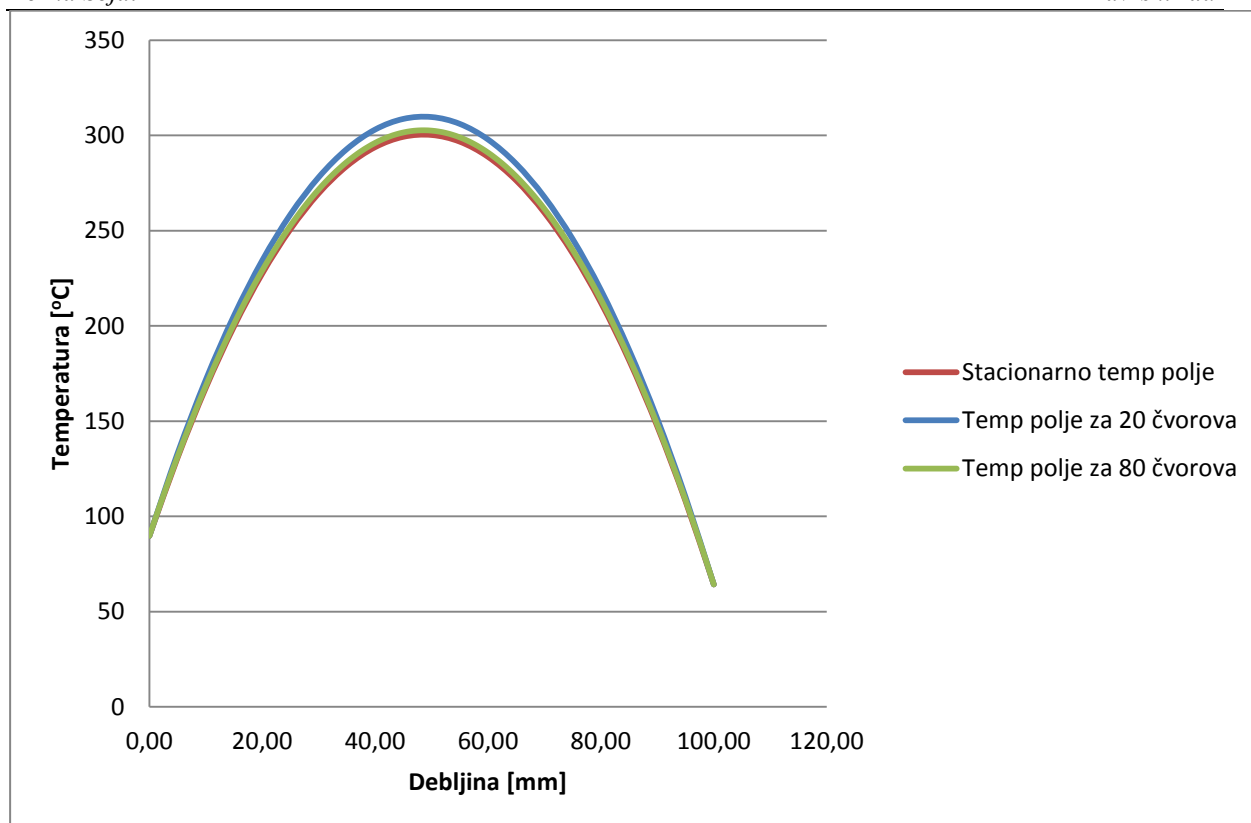
**Slika 18. Vremenska distribucija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$**

Dijagram na slici 18. prikazuje nekoliko stvari. Kao što je i očekivano, za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$  je postignuta maksimalna temperatura nestacionarnog temperaturnog polja u azbestu, pa je i stoga parabola najzaobljenija. Također je vidljivo da temperaturno polje materijala, u početnim trenucima zagrijavanja, uvelike diktiraju rubni uvjeti. Crvena krivulja koja prikazuje temperaturno polje u 200 sekundi uopće nije parabola jer toplina koja se kondukcijom širi kroz stijenku (od ruba stijenke za  $x = 0$ ), tj. od topline koja se konvekcijom prenese od fluida više temperature na rub stijenke rezultira puno bržim zagrijavanjem lijevog dijela stijenke. Srednji dio temperaturnog polja u 200 sekundi diktira toplinski izvor, a na desnom kraju (rub stijenke za  $x = \delta$ ) ponovo dolazi do utjecaja stijenke, tj. toplina kondukcijom odlazi prema rubu stijenke i konvekcijom se predaje fluidu niže temperature. Temperaturno polje u 500 sekundi, označeno zelenom bojom također nije parabola jer ni u ovom slučaju nije proteklo dovoljno vremena za formiranje karakteristične krivulje (parabole) pod utjecajem toplinskog izvora. Temperaturno polje od 2000 sekunde do trenutka uspostavljanja približnog stacionarnog temperaturnog polja ima karakterističan oblik.



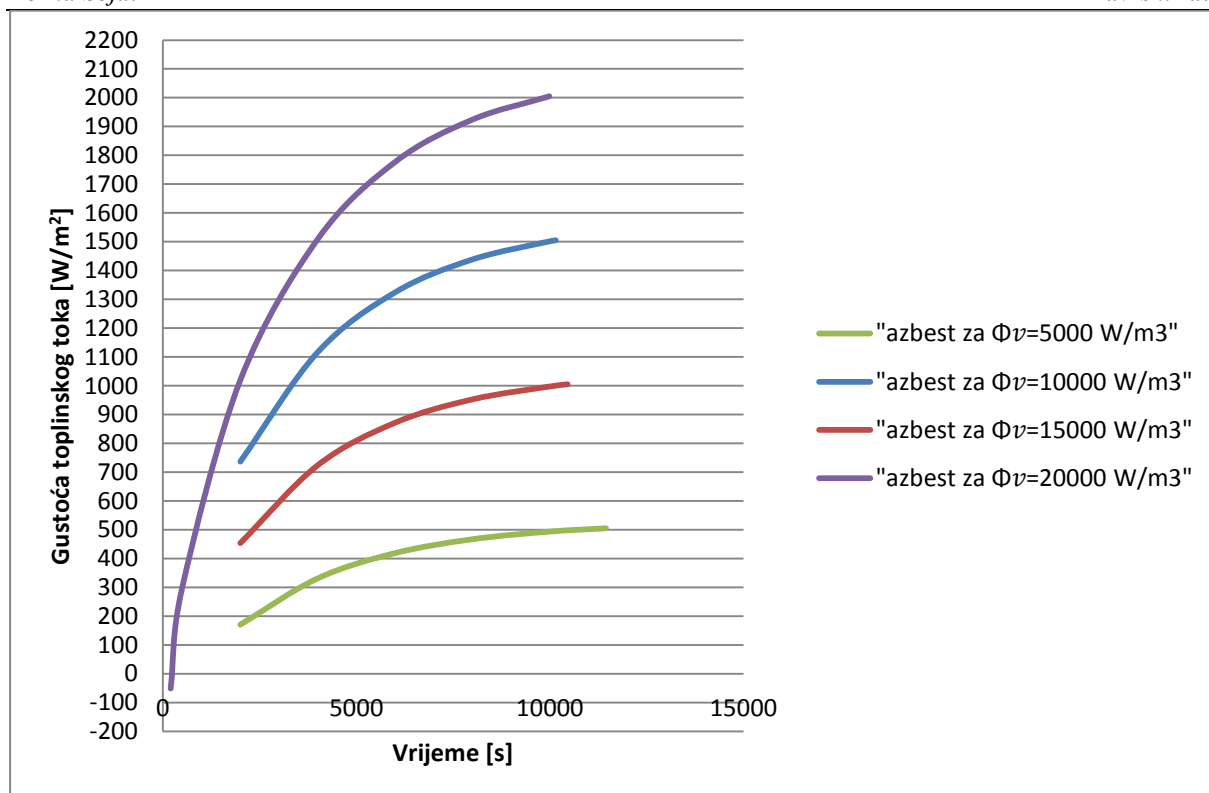
Slika 19. Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$

Kako je i očekivano na dijagramu sa slike 19. je vidljivo da približno stacionarno i analitički dobiveno stacionarno temperaturno polje imaju najveću razliku maksimalnih temperatura. U ovom slučaju je to dosta velika razlika jer iznosi  $\sim 10^\circ\text{C}$ . To nastaje, kako je već napomenuto zbog numeričke pogreške, a ovom problemu se jednostavno može doskočiti povećanjem broja čvorova u stijenci materijala. Povećanjem broja čvorova se dakako i povećava broj segmenata na koji je podijeljena stijenka, a samim time i prostorni korak  $\Delta x$ . Iz jednažbi (55), (57) i (59) je također razvidno da će to utjecati i na smanjenje vremenskog koraka  $\Delta t$ , a time i na produljenje potrebnog vremena za uspostavljanje približnog stacionarnog temperaturnog polja.



**Slika 20.** Aproksimacija temperaturnog polja u azbestu za  $\Phi_p = 20000 \text{ W/m}^3$  za različiti broj ćvorova

S dijagrama na slici 20. se jasno vidi da je razlika između približnog stacionarnog i analitički dobivenog stacionarnog temperaturnog polja smanjena povećanjem broja ćvorova. U prvom slučaju kada je stijenka bila podijeljena na 20 ćvorova postojala je znatna temperaturna razlika ( $\sim 10^\circ\text{C}$ ) između nestacionarnog i stacionarnog temperaturnog polja, a u drugom slučaju kada se je stijenka podijelila na 80 ćvorova ta je temperaturna razlika pala na  $\sim 2^\circ\text{C}$ . To potvrđuje prethodno navedenu tvrdnju u točki 3., a to je da ukoliko bi postojala stijenka podijeljena na beskonačno mnogo ćvorova, onda bi njezino približno nestacionarno temperaturno polje savršeno točno pogodilo stacionarno. Također važno je i napomenuti da je došlo do porasta vremena potrebnog za postizanje ovog novog približnog stacionarnog temperaturnog polja, te ono sada iznosi 13633 sekunde ili povećanje od 27% u usporedbi s onim za 20 ćvorova.



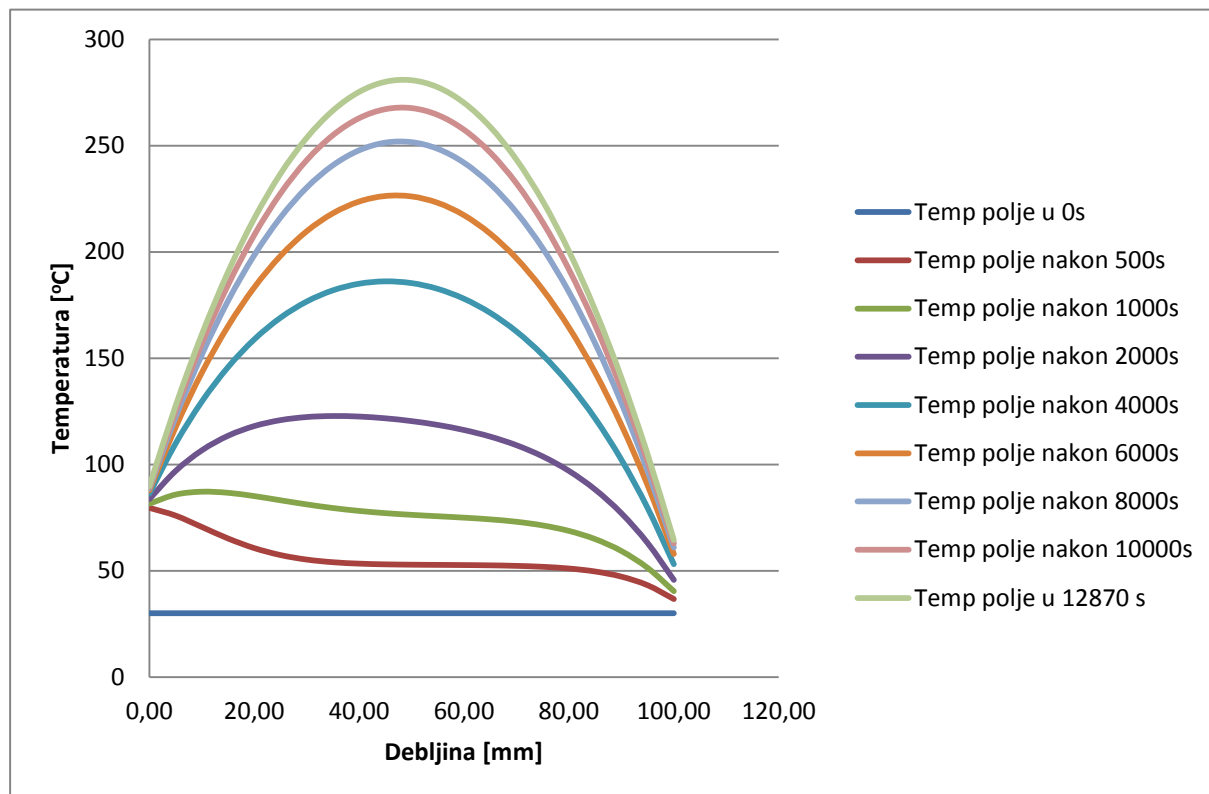
**Slika 21.** Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskih tokova na graničnim površinama azbestne stijenke

Svi navedeni zaključci su vidljivi i u dijagramu trenutne vrijednosti ukupne gustoće toplinskih tokova na graničnim površinama azbestne stijenke. Vidi se da svaka od krivulja asimptotski teži približnoj vrijednosti ukupne gustoće toplinskog toka u stacionarnom stanju. Malo odstupanje rezultata od traženih vrijednosti nastaje kao greška numerike. Također je razvidno i da je potrebno vrijeme za postizanje približnog nestacionarnog temperaturnog polja s jednoliko distribuiranim izvorom topline to kraće što je  $\Phi_v$  veći.

## 6.2 Suhi beton

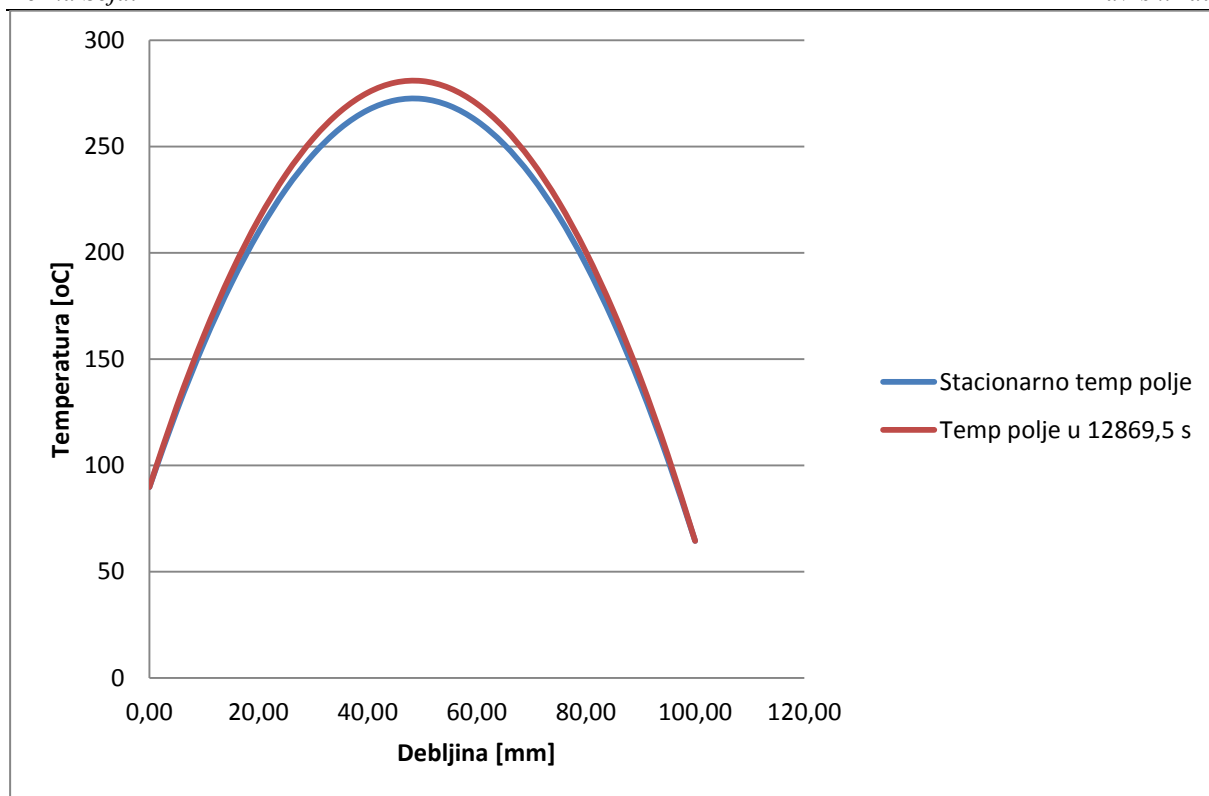
Suhi beton kao i azbest spada u skupinu materijala koju se naziva toplinskim izolatorima, tako da će svi zaključci koji su prethodno izvedeni vrijediti i u ovom slučaju. Dakako, budući da suhi beton ima nešto slabiju toplinsku provodnost za očekivati je da će njegovo temperaturno polje ipak doseći vrijednost maksimalne temperature ispod one vrijednosti koja je postignuta za azbest uz jednake narinute vanjske uvjete. Također je i za očekivati da će vrijeme potrebno za uspostavljanje približnog stacionarnog temperaturnog polja biti veće od onog u slučaju

azbesta. I ovdje je uzeta vrijednost debljine stijenke 100 mm, a budući da je ona podijeljena na 20 segmenata prostorni korak  $\Delta x$  će iznositi 5 mm te će stijenka sadržavati 21 čvor.

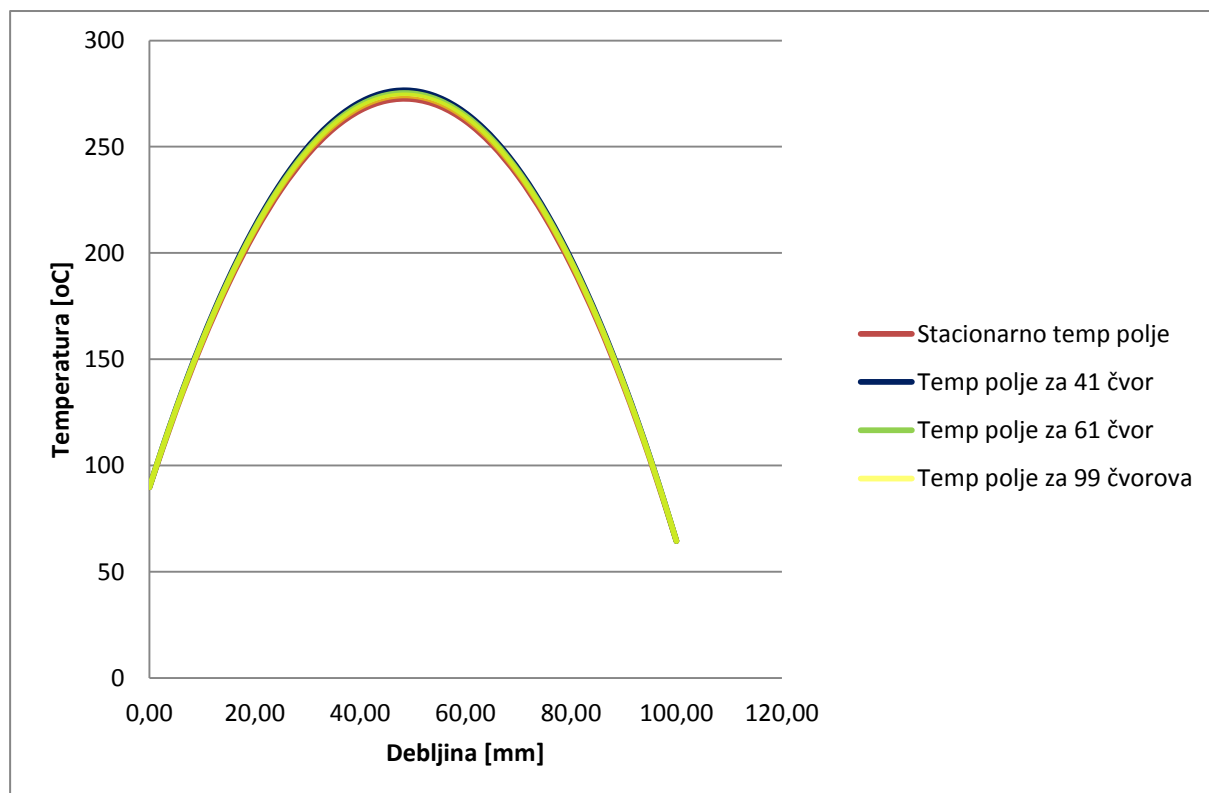


Slika 22. Vremenska distribucija temperaturnog polja u suhom betonu za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$

Na dijagramu sa slike 22. je vidljivo da će s povećanjem protoka vremena temperaturno polje postići neku vrijednost približnog stacionarnog temperaturnog polja. Zagrijavanje ravne stijenke materijala kreće od trenutka  $t = 0$  u kojem je taj materijal progrijan na početnu temperaturu od  $30^\circ\text{C}$ , te u početnim trenucima temperaturno polje nema oblik parabole, već neke složene krivulje kako je opisano i za azbest u točki 6.1.5. Također je iz dijagrama vidljivo i vrijeme postizanja tog približnog stacionarnog temperaturnog polja i razvidno je da je pretpostavka da će biti potrebno više vremena točna. Pošto je u azbestu na dijagramu približnog stacionarnog i analitički dobivenog stacionarnog temperaturnog polja bila vidljiva temperaturna razlika onda se vrši ispitivanje hoće li se pojaviti i kolika će razlika biti u slučaju suhog betona.

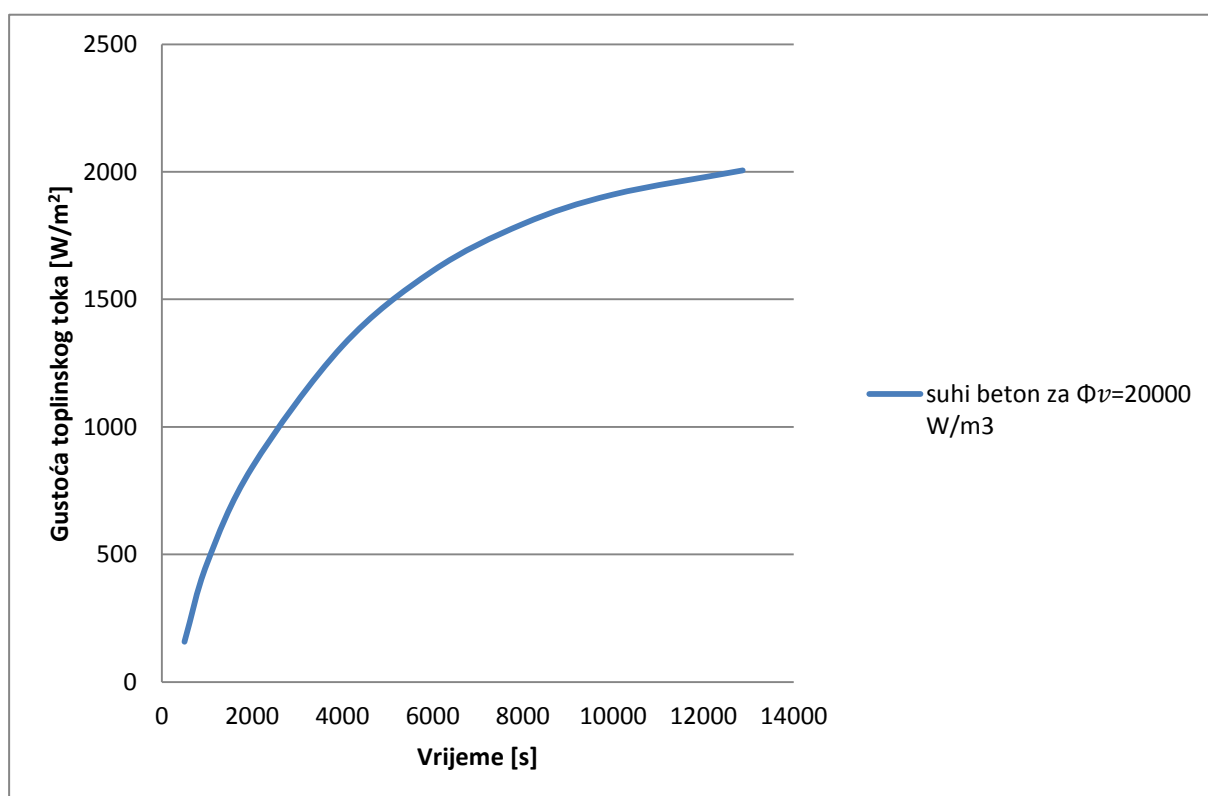


Slika 23. Aproksimacija temperaturnog polja u suhom betonu za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$



Slika 24. Aproksimacija temperaturnog polja u suhom betonu pri  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$  za različit broj čvorova

Kao što je i bilo za očekivati, pošto azbest i beton spadaju u istu grupu materijala, postoji zamjetno rastojanje između maksimalnih temperatura približnog stacionarnog i analitički dobivenog stacionarnog temperaturnog polja, a ona iznosi  $\sim 8^{\circ}\text{C}$ . Povećavanjem broja čvorova povećava se broj segmenata na koji je stijenka materijala podijeljena pa se i smanjuje vrijednost prostornog koraka  $\Delta x$ . Vidljivo je iz dijagrama da se povećanjem broja čvorova na 41 temperaturna razlika između temperaturnih polja smanjila na  $\sim 4^{\circ}\text{C}$ , a daljnjim povećanjem na 61 čvor na nešto manje od  $3^{\circ}\text{C}$ .



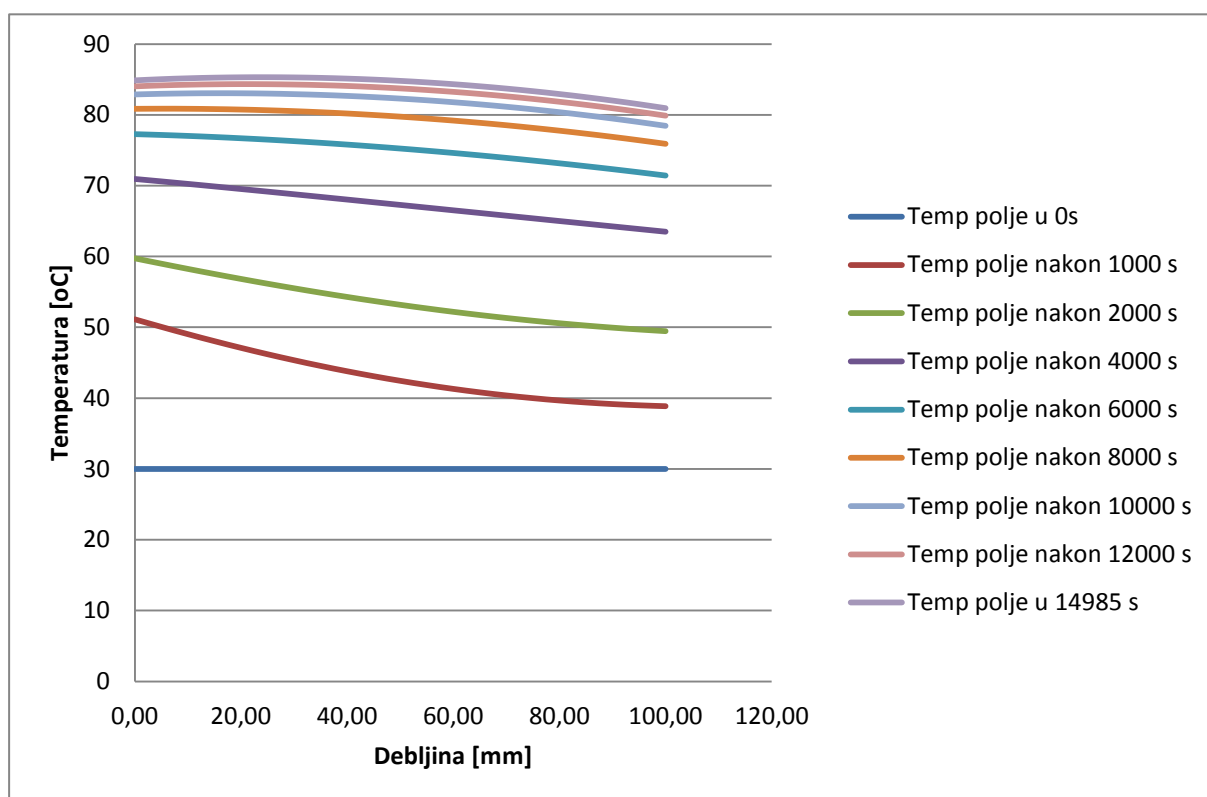
**Slika 25. Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskog toka na graničnim površinama stijenke suhog betona**

Sa slike 25. je razvidno da gustoća toplinskog toka teži vrijednosti od  $2000 \text{ W/m}^2$  što predstavlja vrijednost u stacionarnom stanju, pa nam ovaj dijagram daje potvrdu sa stajališta energijske bilance.



### 6.3 Krom – nikel čelik

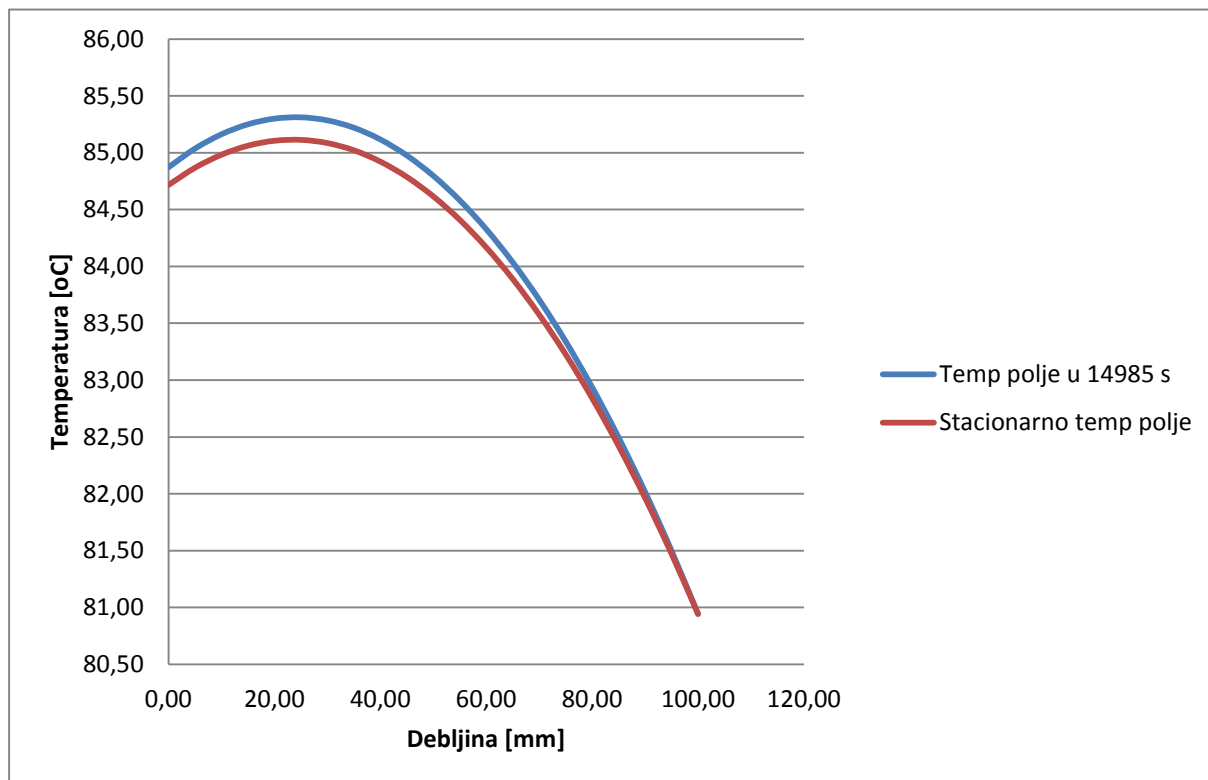
Krom – nikel čelik spada u grupu toplinskih vodiča zbog velike vrijednosti toplinske provodnosti, a korišteni podatci u proračunu su dani u Tablici 1. Poznato je iz točke 5. da će temperaturno polje u stacionarnom stanju pri iznosu toplinskog izvora  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$  biti blago zakrivljena parabola pa je i za očekivati takav oblik približnog stacionarnog temperaturnog polja. Također je i za očekivati da će biti potrebno više vremena za postizanje tog polja.



Slika 26. Vremenska distribucija temperaturnog polja u krom - nikel čeliku za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$

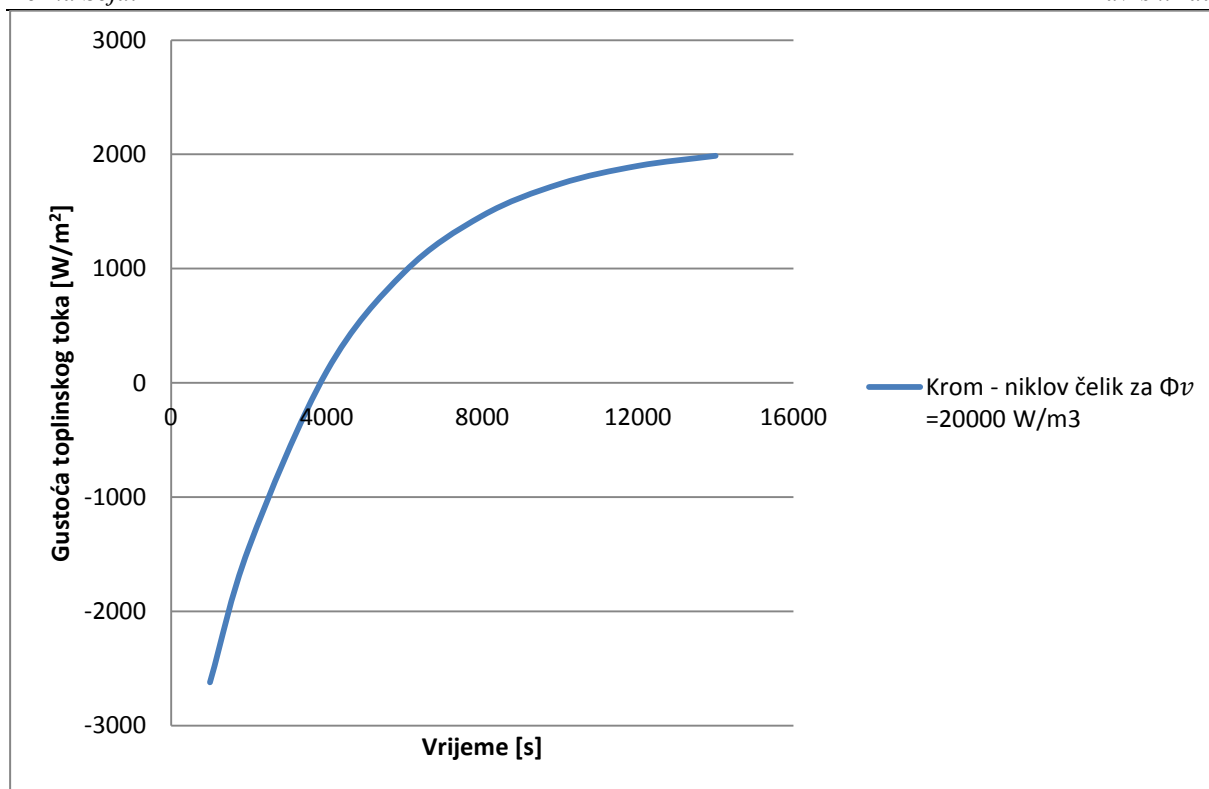
S dijagrama na slici 26. je vidljivo da će se približno stacionarno temperaturno polje u ravnoj stijenci krom – nikel čelika uspostaviti nakon 14985 sekundi, a to nastaje kao posljedica većeg koeficijenta toplinske provodnosti materijala. Također je iz istog razloga vidljivo da će trebati duže vremena da krivulje počnu poprimati karakterističan oblik parabole. Temperaturno polje prikazano zelenom bojom, tj. nakon 2000 sekundi još uvijek pokazuje da se veliki dio topline unosi u materijal konvekcijom s fluida više temperature na lijevoj strani stijenke (za  $x = 0$ ).

Tek negdje oko 8000 sekunde temperatura lijevog ruba stijenke poraste iznad vrijednosti temperature fluida, a to je na gornjem dijagramu prikazano temperaturnim poljem narančaste boje.



Slika 27. Aproximacija temperaturnog polja u krom - nikelu za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$

Sa slike 27. je vidljivo da numerički dobiveno približno stacionarno temperaturno polje u 14985 sekundi dobro opisuje analitički dobiveno stacionarno temperaturno polje prema egzaktnom modelu jer je razlika između postignutih temperatura manja od  $0,5^\circ\text{C}$ . I za prikaz temperaturnog polja u krom - nikelu je za broj čvorova uzeta vrijednost  $N = 20$ .

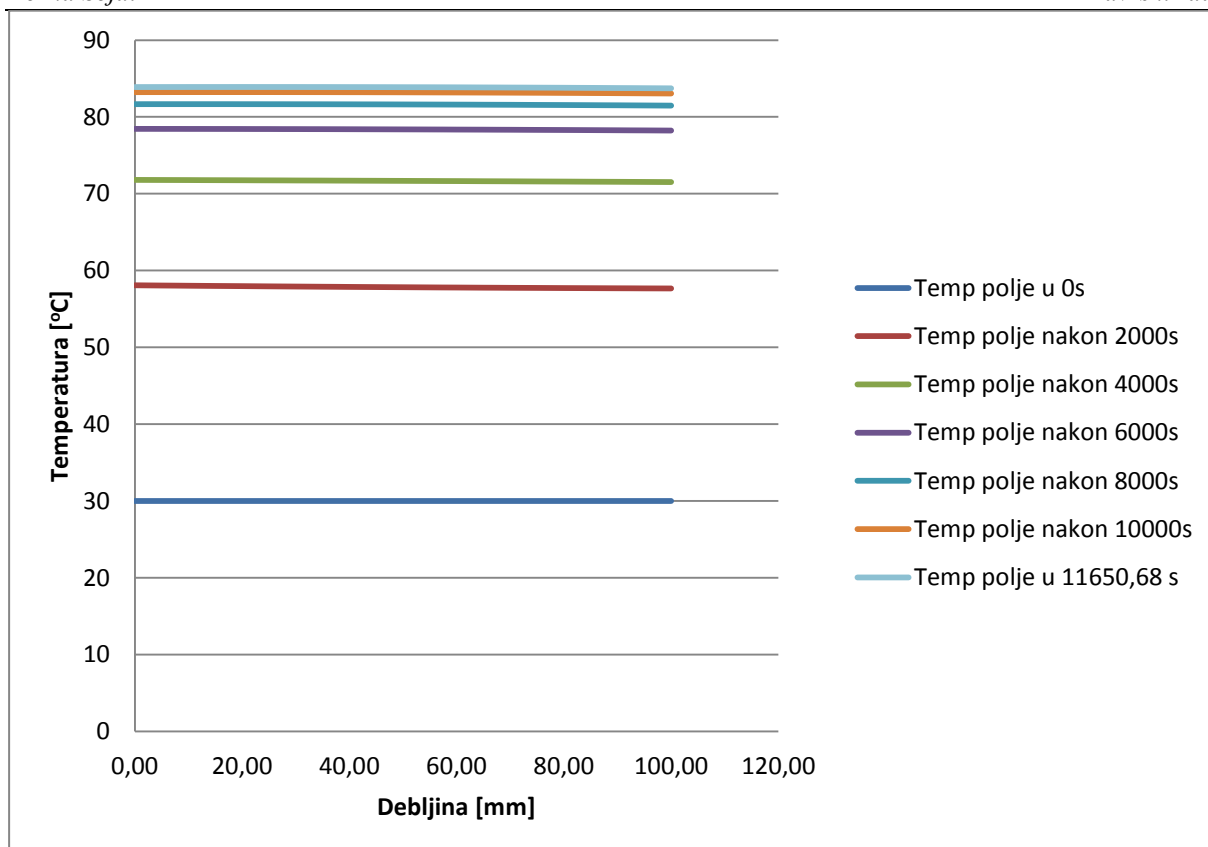


**Slika 28. Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskog toka na graničnim površinama stijenke krom - nikl čelika**

Na dijagramu sa slike 28. je prikazana kontrola odgovarajućom energijskom bilancom te se može vidjeti ranije navedena tvrdnja o tome da će trebati proći dosta vremena dok toplinski izvor ne preuzme dominantnu ulogu u formiranju temperaturnog polja. Kako je vidljivo s dijagrama, tek će oko 4000 sekunde biti gustoća toplinskog toka jednaka 0, dok je za prethodna dva materijala krivulja trenutne vrijednosti gustoće toplinskog toka imala bitno različite vrijednosti u navedenom vremenskom trenutku.

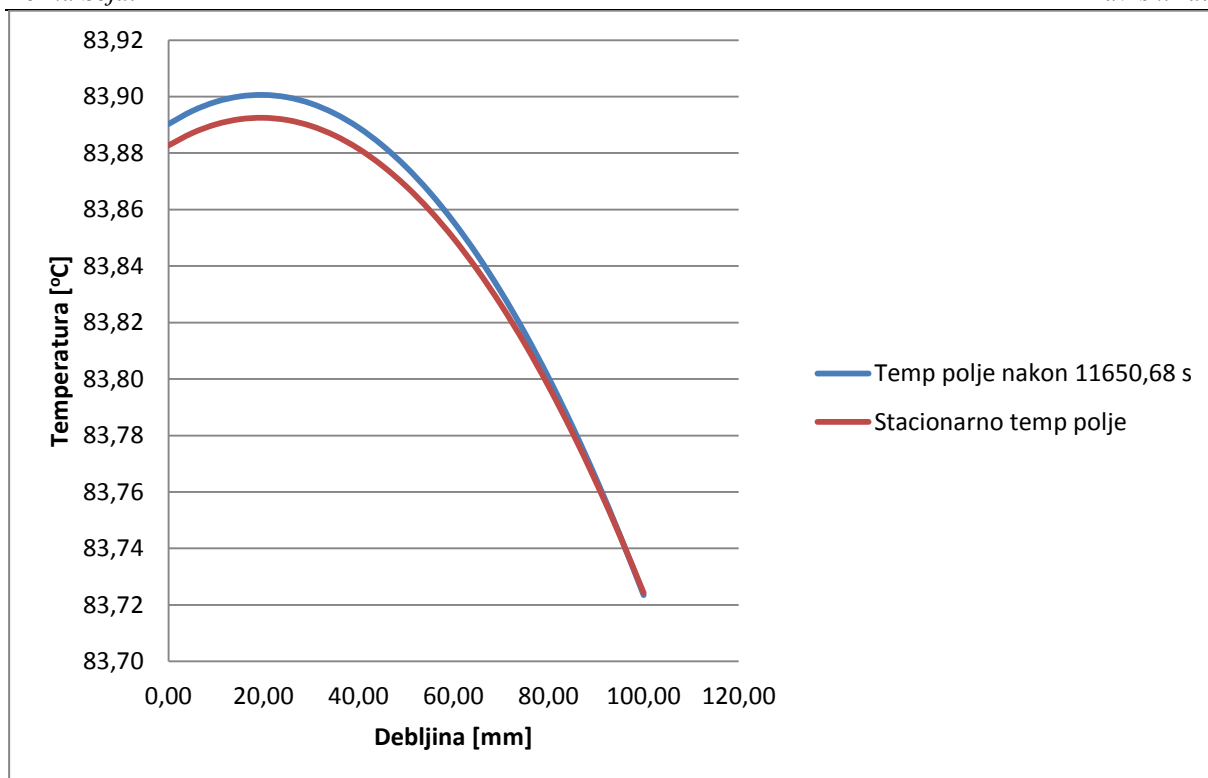
## 6.4 Bakar

Kako je već bilo rečeno, bakar je izrazito dobar toplinski vodič, a njegova fizikalna svojstva koja smo koristili u proračunu su dani u Tablici 1. Za proračun temperaturnog polja i u bakru je uzeta vrijednost broja čvorova  $N = 20$ . U 5. točki je prikazano stacionarno temperaturno polje bakra, a sa slike 4. je vidljivo da ono ima približno horizontalan karakter za sve zadane vrijednosti izvora topline u zadatku ( $0 - 20000 \text{ W/m}^3$ )



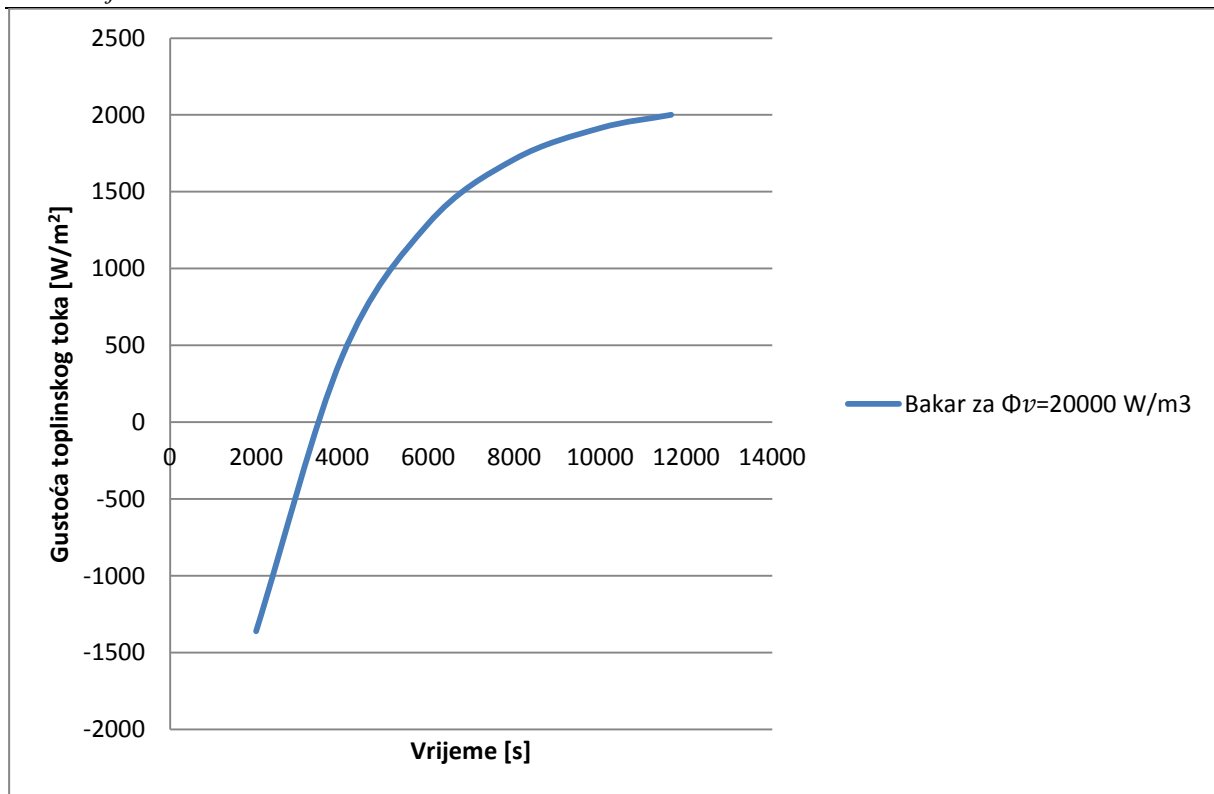
**Slika 29. Vremenska distribucija temperaturnog polja u bakru za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$**

Kako je vidljivo iz dijagrama na slici 29., a i što je bilo očekivano, i u nestacionarnom stanju temperaturna polja s jednoliko distribuiranim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$  unutar materijala imaju približno horizontalan karakter, a to nastaje kao posljedica izrazito velike vrijednosti toplinske provodnosti. Vidljivo je iz dijagrama da će se približno stacionarno temperaturno polje postići u 11651 sekundi.



Slika 30. Aproksimacija temperaturnog polja u bakru za  $\Phi_v = 20000 \text{ W/m}^3$

Iz dijagrama na slici 30. vidljivo je da numerički dobiveno približno stacionarno temperaturno polje jako dobro opisuje analitički dobiveno stacionarno temperaturno polje, jer je maksimalno odstupanje manje od  $0,02^\circ\text{C}$ . Također je i razvidno da ukoliko dovoljno smanjimo temperaturnu skalu da će temperaturna polja poprimiti karakterističan oblik, tj. parabolu.



**Slika 31. Trenutna vrijednost ukupne gustoće toplinskog toka na graničnim površinama bakrene stijenke**

Kako je vidljivo i iz dijagrama sa slike 31. kontrola energijskom bilancom također pokazuje da krivulja asimptotski teži stvarnoj vrijednosti ukupne gustoće toplinskog toka u stacionarnom stanju, tj. dobivena razlika vrijednosti ukupnih gustoća toplinskih tokova između nestacionarnog i stacionarnog stanja iznosi samo  $0,734 \text{ W/m}^2$ .

## 7. ZAKLJUČAK

U radu su prikazani diskretizacijski oblici parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline u ravnoj stijenci s jednoliko distribuiranim toplinskim izvorom izdašnosti  $\Phi_v$ , kao i diskretizacijski oblici rubnih uvjeta 3. vrste dobiveni korištenjem metode konačnih diferencija kao metode diskretizacije. Za analizu su bila odabrana četiri materijala koja su imala zadane početne i rubne uvjete, a približavanje njihovog nestacionarnog temperaturnog polja stacionarnom se kontroliralo odgovarajućom energijskom bilancom i temperaturnim kriterijem pa je stoga bilo potrebno odrediti i analitički oblik stacionarnog polja.

Kako je iz rada vidljivo ponašanje različitih skupina materijala (toplinskih vodiča i toplinskih izolatora) odlikuje se i drugačijim temperaturnim poljima. Za rješavanje problema nestacionarnog temperaturnog polja je korišten fortranski kod, a stijenska materijala je bila podijeljena na 20 segmenata, odnosno sadržavala je 21 čvor. Numerički dobivena rješenja približnog stacionarnog temperaturnog polja za toplinske vodiče su jako dobro opisivala rješenje stacionarnog temperaturnog polja prema egzaktnom modelu, dok u slučaju toplinskih izolatora to nije bilo tako. Prikazano je da povećanjem broja čvorova dobiveno temperaturno polje toplinskih izolatora sve bolje opisuje temperaturno polje u stacionarno stanju, a i izveden je zaključak da je to posljedica velikih razlika u vrijednostima toplinske provodnosti.

Kako su vidljive razlike u dobivenim temperaturnim poljima, tako su vidljive i razlike vrijednosti gustoća toplinskih tokova dobivenih za navedene dvije skupine materijala. Krivulje ukupnih gustoća toplinskih tokova toplinskih vodiča (bakar i krom – nikl čelika) i toplinskih izolatora (azbesta i suhog betona) asimptotski teže istoj vrijednosti ali s značajnim vremenskim rastojanjem. Također se vrijednosti ukupnih gustoća toplinskih tokova toplinskih vodiča u početnim trenutcima bitno razlikuju od toplinskih izolatora, a to opet nastaje kao posljedica toplinske provodnosti materijala kao i specifičnog toplinskog kapaciteta.

Numerički dobivena približna stacionarna temperaturna polja dosta dobro opisuju stacionarno temperaturno polje prema egzaktnom modelu, a pošto su očekivanja prilikom rješavanja problema temperaturnih polja unutar stijenki materijala bila približno jednaka onima kako je to prikazano na slici 9. (očekivan je prikaz veće izraženosti toplinskog otpora kod izolatora nego kod vodiča) zaključujem da sam zadovoljan dobivenim rezultatima.

**LITERATURA**

- [1] Galović, A.: Termodinamika II, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogranje, Ivana Lučića 5, Zagreb 2010.
- [2] Bošnjaković, F.: Nauka o toplini, Svezak I, II i III, Graphis, Zagreb, 2012.
- [3] Cengel, Y. A.: Heat transfer, A practical approach, Mc Graw - Hill, Boston, 2003.
- [4] Halasz B., Galović, A., Boras I.: Toplinske tablice, Fakultet strojarstva i brodogranje, Ivana Lučića 5, Zagreb 2010.
- [5] Galović, A.: Diskretizacija parcijalne diferencijalne jednačbe nestacionarnog 1 - D modela provođenja topline, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje



## **PRILOZI**

I. CD-R disc