

# Numerička analiza strujanja fluida i prijelaza topline u ispušnom kućištu plinske turbine

---

**Vranjić, Nikola**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:779059>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Nikola Vranjić**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Željko Tuković, dipl. ing.

Prof. dr. sc. Zvonimir Guzović, dipl. ing.

Student:

Nikola Vranjić

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Tukoviću na njegovom slobodnom vremenu i stručnoj i nesebičnoj pomoći pri izradi ovog diplomskog rada. Zahvaljujem se profesoru Guzoviću na čijim sam kolegijima stekao razumijevanje turbostrojeva.

Zahvaljujem se svojoj životnoj partnerici Ani Mariji Šimundić i našoj kćeri Patriciji na ljubavi, strpljenju i podršci bez koje bi bilo teško izdržati ritam zadnjih godina.

Nikola Vranjić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum: 15 -01- 2015	Prilog
Klasa: 602-04/15-6/3	
Ur.broj: 15-1703-15-15	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Nikola Vranjić**

Mat. br.: 0035169042

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza strujanja fluida i prijelaza topline u ispušnom kućištu plinske turbine**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical analysis of fluid flow and heat transfer in the gas turbine exhaust housing**

Opis zadatka:

Pokrivanje vršnog opterećenja u elektroenergetskom sustavu često se provodi primjenom plinskih turbina od kojih se zahtijeva mogućnost brze promjene režima rada. Sve većom primjenom obnovljivih izvora energije zahtjevi za fleksibilnošću plinskih turbina se dodatno povećavaju. Brze promjene režima rada te rad na vanprojektnim opterećenjima imaju negativan utjecaj na životni vijek pojedinih komponenti plinskih turbina. Jedna od kritičnih komponenti je ispušno kućište turbine gdje dolazi do pojave pukotina na linerima uslijed velikih temperaturnih naprezanja. Točnost proračuna temperaturnih naprezanja u stijenci linera najvećim dijelom ovisi o točnosti procjene lokalnih uvjeta prijelaza topline na površini linera u uvjetima promjene režima rada plinske turbine. Primjena sveobuhvatnog numeričkog modela strujanja i prijelaza topline jedan je od mogućih pristupa rješavanju tog problema.

U sklopu diplomskog rada potrebno je provesti numeričku analizu nestacionarnog turbulentnog strujanja plinova kroz ispušno kućište plinske turbine u uvjetima promjene režima rada. Numerički model treba obuhvatiti strujanje ispušnih plinova oko linera, prijelaz topline s ispušnih plinova na stijenu linera te provođenje topline u stijenci linera. Prijelaz topline na zrak za hlađenje koji struji s unutrašnje strane stijenke linera treba računati uz pretpostavljeni koeficijent prijelaza topline i temperaturu zraka. Na osnovu dobivenog nestacionarnog polja temperature, potrebno je izračunati temperaturna naprezanja u stijenci linera te izvesti odgovarajuće zaključke vezano za pojavu pukotina. Numerički model treba izraditi primjenom računalnog programa OpenFOAM<sup>®</sup> i metode kontrolnih volumena.

Sve potrebne podatke za izradu diplomskog rada, kao što su geometrija analiziranog ispušnog kućišta, svojstva materijala te uvjeti strujanja plinova na ulazu u kućište bit će stavljeni na raspolaganje od strane mentora i komentora.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualnu pomoć.

Zadatak zadan:

13. studenog 2014.

Rok predaje rada:

15. siječnja 2015.

Predviđeni datumi obrane:

21., 22. i 23. siječnja 2015.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. **Željko Tuković**

Prof. dr. sc. **Zvonimir Guzović** - komentor

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. **Zvonimir Guzović**

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1. Liner ispušnog kućišta plinske turbine.....	2
2. MATEMATIČKI MODEL.....	3
2.1. Osnovne jednačbe mehanike kontinuuma.....	3
2.1.1. Opći oblik zakona očuvanja fizikalnog svojstva u materijalnom volumenu .....	5
2.1.2. Integralni oblici zakona očuvanja za proizvoljni i kontrolni volumen .....	6
2.1.3. Konvekcijski i difuzijski protoci kroz kontrolnu površinu .....	7
2.2. Konzervativne forme osnovnih zakona mehanike fluida.....	9
2.3. Modeliranje turbulencije .....	10
2.3.1. Dinamika vrtloga i energetska kaskada .....	11
2.3.2. Pristupi rješavanju turbulencije.....	12
2.3.3. Model turbulencije $k - \omega$ SST .....	14
2.4. Modeliranje toplinskog naprezanja u elastičnom tijelu .....	14
2.4.1. Glavni zakoni mehanike za termoelastično tijelo .....	15
3. DISKRETIZACIJA METODOM KONTROLNIH VOLUMENA.....	18
3.1. Uvod.....	18
3.2. Diskretizacija standardne transportne jednačbe .....	18
3.3. Diskretizacija nestacionarnog člana.....	19
3.4. Diskretizacija konvekcijskog člana.....	19
3.4.1. Konvekcijske interpolacijske sheme.....	19
3.5. Diskretizacija difuzijskog člana .....	21

---

3.6.	Diskretizacija izvorskog člana .....	23
3.7.	Diskretizacija jednadžbe ravnoteže elastičnog tijela .....	24
3.8.	Sustav linearnih jednadžbi .....	24
3.9.	Rubni uvjeti.....	25
3.9.1.	Dirichletov rubni uvjet.....	26
3.9.2.	Generalizirani von Neumannov rubni uvjet.....	26
4.	PRORAČUN STRUJANJA I PRIJENOSA TOPLINE .....	28
4.1.	Mreža kontrolnih volumena .....	28
4.1.1.	Mreža kontrolnih volumena za fluid.....	28
4.1.2.	Mreža kontrolnih volumena za elastično tijelo.....	30
4.2.	Fizikalna i mehanička svojstva fluida i linera.....	31
4.3.	Početni i rubni uvjeti .....	32
4.4.	Postavke računalne simulacije .....	33
5.	REZULTATI .....	34
5.1.	Slučaj za $\alpha = 50\text{W/m}^2\text{K}$ .....	34
5.2.	Slučaj za $\alpha = 100\text{W/m}^2\text{K}$ .....	44
6.	ZAKLJUČAK.....	49
	LITERATURA.....	51
	PRILOG .....	53

**POPIS SLIKA**

Slika 1	Vremena toplog starta od manjih prema većim plinskim turbinama .....	1
Slika 2	Materijalni volumena .....	3
Slika 3	Kontrolna površina.....	7
Slika 4	Granični sloj i turbulencija.....	11
Slika 5	Energetska kaskada vrtloga.....	12
Slika 6	Elastično tijelo.....	15
Slika 7	Susjedni kontrolni volumeni .....	20
Slika 8	Vektori na zajedničku stranicu.....	22
Slika 9	Granični kontrolni volumen .....	25
Slika 10	Surface model .....	29
Slika 11	Blok-strategija .....	29
Slika 12	Mreža - fluid.....	30
Slika 13	Mreža - solid .....	31
Slika 14	Polje tlaka - volumen .....	34
Slika 15	Polje tlaka – presjek rebra .....	35
Slika 16	Polje brzine po volumenu .....	35
Slika 17	Brzina oko presjeka rebra .....	36
Slika 18	Temperaturno polje po granici volumena .....	37
Slika 19	Temperaturno polje oko rebra i kroz stijenku .....	38
Slika 20	Alfe s lijeve strane 1. slucaj .....	39



---

Slika 21 Alfe s desne strane 1. slucaj .....	39
Slika 22 Gustoća toplinskog toka desno 1. slucaj .....	40
Slika 23 Gustoća toplinskog toka lijevo 1. slucaj .....	41
Slika 24 Pomaci x-os 1. slucaj .....	41
Slika 25 Pomaci y-os 1. slucaj .....	42
Slika 26 Pomaci z-os 1. slucaj.....	42
Slika 27 Ekvivalentno naprezanje 1. slucaj.....	43
Slika 28 Temperaturno polje desna strana 2. slucaj .....	44
Slika 29 Temperaturno polje lijeva strana 2. slucaj .....	44
Slika 30 Alfe desno 2. slucaj.....	45
Slika 31 Alfe lijevo 2. slucaj .....	45
Slika 32 Pomak x-os 2. slucaj .....	46
Slika 33 Pomak y-os 2. slucaj .....	46
Slika 34 Pomaci z-os 2. slucaj.....	47
Slika 35 ekvivalentno naprezanje 2. slucaj .....	48

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Fizikalna svojstva dimnih plinova.....	31
Tablica 2 Svojstva materijala linera X6CrNiTi18-10 .....	32

**POPIS OZNAKA I KRATICA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
LCF	-	Low Cycle Fatigue
$V$	$m^3$	Volumen
$S$	$m^2$	Površina
$t$	s	Vrijeme
$u_i$	$ms^{-1}$	Vektor brzine
$n_i$	-	Vektor normale
$x_i$	-	Vektor u smjeru osi kartezijskog koord. sustava
$v_i$	$ms^{-1}$	Brzina gibanja čestice
$\frac{D}{Dt}$	-	Materijalna vremenska derivacija
$V_M$	$m^3$	Materijalni volumen
$V_{KV}$	$m^3$	Kontrolni volumen
$\varphi$	-	Neodređeno fizikalno svojstvo
$\Gamma$	-	Koeficijent difuzije
$\rho$	$kg/m^3$	Gustoća
$S_\varphi$	-	Izvor nekog fizikalnog svojstva
$ok$	-	Indeks označava okoliš
$v^n$	$ms^{-1}$	Normalna komponenta brzine na površini

Oznaka	Jedinica	Opis
$Pe$	-	Pecletov broj
$\delta_{ji}$	-	Kroeneckerov delta operator
$p$	Pa	Tlak
$\Sigma_{ji}$	Pa	Tenzor naprezanja
$\mu$	Pas	Dinamički koeficijent viskoznosti
$c_v$	kJ/kgK	Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu
$T$	K	Apsolutna temperatura
$\lambda$	W/mK	Koeficijent toplinske vodljivosti
$q_H$	W/m <sup>3</sup>	Volumna gustoća toplinskog toka
$R$	kJ/kgK	Specifična plinska konstanta
DNS	-	Direktna Numerička Simulacija
LES	-	<i>Large Eddy Simulation</i> (Simulacija velikih vrloga)
NS	-	Navier-Stokes
$\tau_{ij}^R$	-	Tenzor Reynoldsovih naprezanja
$q_i^R$	-	Vektor turbulentnog toka
$\mu_t$	-	Koeficijent turbulentne viskoznosti
$k$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Turbulentna kinetička energija
$\omega$	s <sup>-1</sup>	Brzina disipacije
$\sigma_{ij}$	Pa	Tenzor naprezanja

---

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
$f_{bi}$	-	Masene sile
$\varepsilon_{ij}$	-	Tenzor deformacije
$G$	$\text{N/mm}^2$	Modul smičnosti
$E$	$\text{N/mm}^2$	Youngov modul elastičnosti
$K$	$\text{N/mm}^2$	Ukupni modul smičnosti
$e$	J	Toplinska energija
$h$	-	Toplinski izvor
$k$	$\text{W/mK}$	Koeficijent toplinske vodljivosti
$S_i^f$	-	Površinski vektor
$[A]$	-	Matrica A
$a^M$	-	Dijagonalni koeficijenti matrice
$a^S$	-	Nedijagonalni koeficijenti matrice
$S^o$	-	Vektor koji obuhvaća sve izvorske članove
$g^b$	-	Gradijent polja u smjeru normale

## **SAŽETAK**

*Nikola Vranjić*

U ovom se radu razmatra utjecaj hlađenja stijenke linera ispušnog kućišta plinske turbine na temperaturna naprezanja. Na početku rada se daje matematički model, a zatim metodom kontrolnih volumena diskretizirane jednačbe svedene na sustav algebarskih jednačbi. Drugi dio opisuje izradu mreže, postavljanje numeričkog modela koji će se rješavati, daju se svojstva materijala te početni i rubni uvjeti potrebni za rješavanje diskretiziranog matematičkog modela. Nakon numeričke simulacije za koju je korišten programski paket OpenFOAM, daje se analiza rezultata i zaključci te lista potencijalnih rješenja problema temperaturnog naprezanja.

Ključne riječi: računalna mehanika fluida, računalna mehanika kontinuuma, ttemperaturna naprezanja, liner ispušnog kućišta plinske turbine

## **SUMMARY**

*Nikola Vranjić*

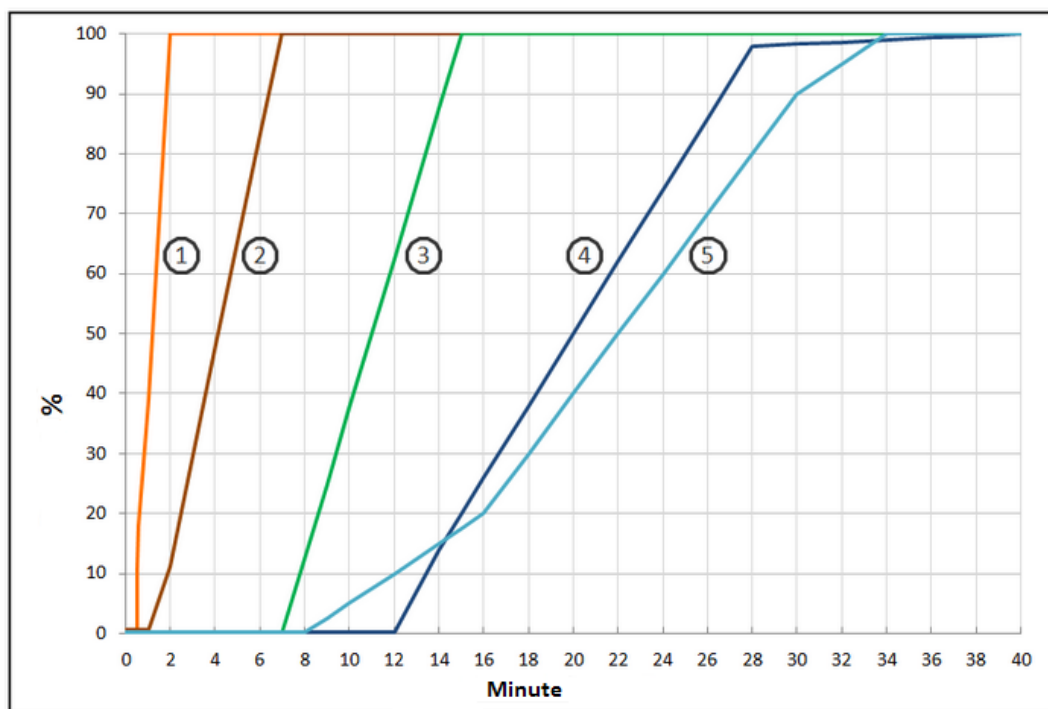
This thesis deals with gas turbine exhaust housing liner and liner cooling induced thermal stresses. In the first parts of this thesis, mathematical model and its corresponding finite volume discretization are given in the form of system of algebraic equations. Second part is all about the process of setting the case up, including mesh generation, material properties and initial and boundary conditions. OpenFOAM is used for numerical simulation, after which results and their analysis are given. Based on conclusions coming from results, some potential solutions are provided with their possible pros and cons.

Key words: computational fluid dynamics (CFD), computational continuum mechanics, thermal stress, gas turbine exhaust housing liner

# 1. UVOD

Obnovljivi izvori energije svakim danom zauzimaju sve veći dio energetskeg tržišta, a predvodnici su vjetroelektrane i fotovoltaići koji imaju jedno zajedničko svojstvo, a to je da su intermitentni izvori energije. Također, cijena električne energije više nije fiksna, već su se razvila tržišta, *spot-marketi*, na kojima se definira cijena električne energije za vremenske intervale. Zato je danas bitnije nego ikad imati klasične i pouzdane izvore energije koji mogu brzo startati te raditi u širokom spektru radnog opterećenja.

Najbolje trenutno rješenje uz hidroelektrane, čiji su kapaciteti u svijetu pretežno iskorišteni, jesu plinske elektrane. Plinske elektrane imaju mali udio investicijskih troškova, ali, zbog relativno skupog goriva imaju visoke operativne troškove. Stoga se moraju moći voditi čim fleksibilnije kako bi iskoristile trenutke visoke cijene električne energije na tržištu i maksimizirale profit. Na Slici 1 prikazano je vrijeme potrebno da se dođe do punog opterećenja iz toplog starta za različite veličine plinskih postrojenja.



Slika 1 Vremena toplog starta od manjih prema većim plinskim turbinama [1]



Obnovljivi izvori energije koji zbog političkih i ekonomskih razloga imaju privilegirani položaj na tržištu, značajno su povećale broj promjena radnog opterećenja. Nažalost po proizvođače plinskih turbina, ne bez posljedica na životni vijek postrojenja.

### 1.1. LINER ISPUŠNOG KUĆIŠTA PLINSKE TURBINE

Liner ispušnog kućišta plinske turbine je element turbine koji prvenstveno ima dvije uloge:

- a) štiti kućište i ležajeve od izloženosti direktnom vrućem mlazu dimnih plinova iz turbinskih stupnjeva (temperatura dimnih plinova na izlazu je preko 600°C)
- b) svojim aerodinamičkim oblikom ispravlja vrtložnu komponentu strujanja i time povećava efikasnost turbine

Uglavnom je izveden kao rebro razapeto između dvije opne, a koje je na njih spojeno kruto - zavarom. Sve su površine hladene zrakom iz kompresora plinske turbine (*bleed air*).

U vrijeme razvoja linera, plinske turbine su se vodile manje fleksibilno i postojeća rješenja nisu imala većih problema s ostvarivanjem očekivanog životnog vijeka. Međutim, danas gotovo da nema proizvođača plinskih turbina koji nije morao financijski nadomjestiti štetu koja je nastala otkazivanjem plinsko-turbinskog postrojenja, posebice zbog linera.

Korelacija između fleksibilnosti i problema s linerom baca sumnju da bi uzrok problema mogao ležati u LCF-u (*Low Cycle Fatigue*) uzrokovanom temperaturnim naprezanjima.

## 2. MATEMATIČKI MODEL

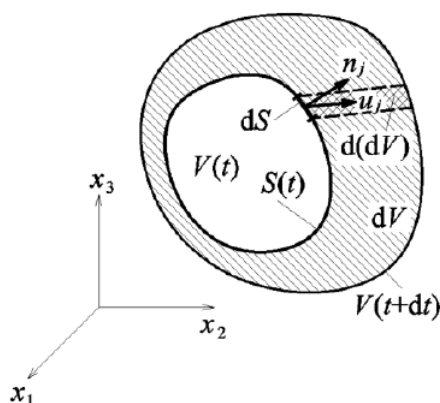
Matematičkim modelom se želi objasniti fizikalna pozadina jednadžbi koje se primjenjuju na kontinuum i kasnije u diskretizaciji metodom konačnih volumena. Sam kontinuum je apstraktan pojam kojim se pretpostavlja kako se skup zasebnih molekula na mikro i nano razini, kad se pomakne na makro razinu mogu promatrati kao jedan proizvoljni volumen sa prosječnim vrijednostima parametara zasebnih molekula. Stoga je moguće opisati bilo koje makroskopsko svojstvo materije kao kontinuiranu funkciju makroskopskih koordinata. Time se značajno pojednostavljuje problem. [2]

### 2.1. OSNOVNE JEDNADŽBE MEHANIKE KONTINUUMA

Osnovni zakoni klasične fizike kojima je opisano strujanje fluida su [2] [3]:

- zakon očuvanja mase,
- zakon očuvanja količine gibanja,
- zakon očuvanja momenta količine gibanja,
- zakon očuvanja energije.

Ti se zakoni izvorno definiraju za materijalni volumen (Slika 2), tj. skup jednih te istih čestica fluida koji ima ulogu tijela u mehanici te zatvorenog sustava u termodinamici.



Slika 2 Materijalni volumen [2]

Mogu se primijeniti i na kontrolni volumen koji je nepromjenjivog položaja i veličine te proizvoljni volumen odnosno volumen koji se može mijenjati.

Stoga će se prvo dati formulacija nabrojanih zakona za ova tri volumena, za koju je potrebno definirati izraze koji definiraju brzinu promjene veličine volumena.

- a) Opći slučaj proizvoljnog volumena  $V$  čija se granica  $S$  giba brzinom  $u_i$

Brzina promjene volumena je po definiciji

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt}, \quad (1)$$

a element površine  $dS$  opisuje element volumena

$$d(dV) = u_i n_i dt dS \quad (2)$$

što integrirano po površini  $S$  daje razliku volumena

$$V(t+dt) - V(t), \quad (3)$$

te je konačno

$$\frac{dV}{dt} = \int_{S(t)} u_i n_i dS = \int_{V(t)} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV. \quad (4)$$

- b) Slučaj proizvoljnog volumena je materijalni volumen čija se granica pomiče brzinom  $v_i$  gibanja čestica  $u_i = v_i$

Vremenska derivacija postaje materijalnom  $\frac{dV}{dt} \rightarrow \frac{DV_M}{Dt}$ , te se može pisati:

$$\frac{DV_M}{Dt} = \int_{S_M(t)} v_i n_i dS = \int_{V_M(t)} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV_M. \quad (5)$$

- c) Slučaj kontrolnog volumena (volumena s nepomičnom granicom  $u_i = 0$ )

Obujam je konstantan pa vrijedi

$$\frac{dV_{KV}}{dt} = 0, \quad (6)$$

što se i dobije iz općeg izraza uz  $u_i = 0$ .

### 2.1.1. OPĆI OBLIK ZAKONA OČUVANJA FIZIKALNOG SVOJSTVA U MATERIJALNOM VOLUMENU

Općenito zakon očuvanja fizikalnog svojstva se može formulirati riječima [2]: Brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar materijalnog volumena jednaka je izvoru ili ponoru tog fizikalnog svojstva. Izvor može biti raspodijeljen po prostoru (razmjeran volumenu) ili po površini materijalnog volumena (u tom slučaju izvor se prikazuje fluksom vektora kroz površinu, a taj se površinski integral primjenom Gaussove formule uvijek može svesti na volumenski integral). Ako se sa  $\varphi$  označi specifično fizikalno svojstvo (izraženo po jedinici mase), tada se može pisati

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho \varphi dV}_{\text{Brzina promjene fizikalnog svojstva unutar } V_M(t)} = \underbrace{\int_{V_M(t)} S^V dV}_{\text{Volumenski dio}} + \underbrace{\int_{S_M(t)} S_j^S n_j dS}_{\text{Površinski dio}}. \quad (7)$$

Izvor ili ponor fizikalnog svojstva

Površinski dio izvorskog člana najčešće je povezan s difuzijskim procesima koji su posljedica postojanja gradijenta fizikalnog svojstva (npr. provođenje topline kroz granicu materijalnog volumena zbog postojanja gradijenta temperature). Ako se s  $\Gamma$  označi koeficijent difuzije, a materijalni volumen sažme u česticu fluida i podijeli cijelu jednadžbu s diferencijalnim volumenom, dolazi se do diferencijalnog oblika zakona očuvanja

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{Lokalna promjena}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)}_{\text{Konvekcija + difuzija}} = \underbrace{S_\varphi}_{\text{Izvor}} \quad (8)$$

pri čemu prvi član označava lokalnu promjenu, drugi član objedinjuje konvekciju i difuziju, a u izvorski član ide sve ostalo.

### 2.1.2. INTEGRALNI OBLICI ZAKONA OČUVANJA ZA PROIZVOLJNI I KONTROLNI VOLUMEN

Polaznu osnovu za metodu konačnih volumena čine integralni oblici osnovnih zakona, za volumen koji ne mora biti materijalni. Najčešće se radi o kontrolnom volumenu (koji je nepromjenjive veličine, položaja i oblika), a može se raditi i o volumenu koji je promjenjiv u vremenu, kada govorimo o proizvoljnom volumenu. Razlika između proizvoljnog i materijalnog volumena je u tome što kroz granicu proizvoljnog volumena postoji protok mase. Ako se u nekom trenutku uoči jedan materijalni volumen u polju strujanja, tada se može zamisliti i jedan proizvoljni volumen koji se u tom trenutku poklapa s materijalnim volumenom. U trenutku poklapanja svi volumenski i površinski integrali po ta dva volumena su isti (dakle i sadržaji fizikalnog svojstva u ta dva volumena su isti). S obzirom da se granica materijalnog volumena giba brzinom  $v_j$  gibanja čestica fluida, a proizvoljni volumen proizvoljnom brzinom  $u_j$ , već u idućem trenutku će se volumeni razlikovati, pa će i sadržaji fizikalnog svojstva u ta dva volumena biti različiti. Iz toga se može zaključiti da će i brzine promjene sadržaja fizikalnih svojstava u dva volumena biti različite.

Kako se u ovom radu granica volumena ne mijenja, dat će se integralni oblik općeg zakona očuvanja za kontrolni volumen:

$$\underbrace{\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV}_{\text{Brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar kontrolnog volumena}} + \underbrace{\int_{S_{KV}} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS}_{\text{Neto protok fizikalnog svojstva kroz kontrolnu površinu}} = \underbrace{\int_{V_{KV}} S_\varphi dV}_{\text{Brzina nastajanja ili nestajanja fizikalnog svojstva unutar kontrolnog volumena}} \quad (9)$$

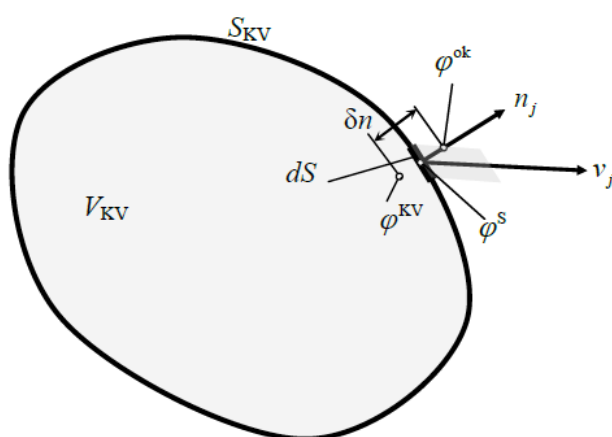
Pri čemu prvi član predstavlja brzinu promjene fizikalnog svojstva unutar kontrolnog volumena, drugi član predstavlja neto protok fizikalnog svojstva kroz kontrolnu površinu, a član s desne strane jednadžbe predstavlja sve ono što utječe na brzinu nastajanja ili nestajanja fizikalnog svojstva unutar kontrolnog volumena.

### 2.1.3. KONVEKCIJSKI I DIFUZIJSKI PROTOCI KROZ KONTROLNU POVRŠINU

Na Slici 3 (dolje), prikazan je jedan kontrolni volumen  $V_{KV}$  i na njemu elementarna površina  $dS$ . Konvekcijski protok kroz elementarnu površinu je definiran izrazom

$$\rho v_j n_j dS \varphi^S = \rho dQ \varphi^S = d\dot{m} \varphi^S$$

u kojem  $v_j n_j$  označuje projekciju brzine na smjer normale, odnosno  $v_j n_j dt$  označuje visinu volumena fluida koji protječe kroz površinu  $dS$  u vremenu  $dt$ .



Slika 3 Kontrolna površina [2]

Unutar toga volumena sadržana je određena količina fizikalnog svojstva, te je prolaskom osjenčanog volumena kroz površinu  $dS$  pronesena i ta količina fizikalnog svojstva od kontrolnog volumena prema njegovoj okolini. Protok je po definiciji jednak pronesenoj količini u jediničnom vremenu; omjer volumena i vremena čini volumenski protok, a volumenski protok pomnožen s gustoćom čini maseni protok. Očito je konvekcijski protok fizikalnog svojstva razmjern masenom protoku fluida kroz površinu  $dS$  i fizikalnog svojstva  $\varphi^S$  na površini  $S_{KV}$  i pozitivan je kada vektor brzine gleda u smjeru vektora vanjske normale, odnosno kada fluid napušta kontrolni volumen. Pozitivni protok fizikalnog svojstva, dakle, označuje iznošenje fizikalnog svojstva iz kontrolnog volumena. Ovaj protok je jednosmjern i uvijek se odvija u smjeru vektora brzine.

Difuzijski protok kroz elementarnu površinu je definiran izrazom

$$-\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_S n_j dS = -\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S dS \approx -\Gamma \frac{\varphi^{ok} - \varphi^{KV}}{\partial n} dS \quad (10)$$

iz kojeg je jasno da difuzijski protok zavisi od derivacije  $\varphi$  u smjeru normale. Ako se na normali uoče dvije simetrično smještene točke udaljene za  $\partial n$ , od kojih je jedna unutar kontrolnog volumena u kojoj je  $\varphi = \varphi^{KV}$ , a druga izvan (u okolini) u kojoj je  $\varphi = \varphi^{ok}$ , aproksimacijom usmjerene derivacije dobije se da se difuzijski protok sastoji iz dva dijela: jednog pozitivnog koji govori o pronosu fizikalnog svojstva iz kontrolnog volumena u okolinu i drugi negativni koji govori o dotoku fizikalnog svojstva u kontrolni volumen iz okoline. Oba se protoka događaju istovremeno, a neto protok jednak je njihovoj razlici. Odnos veličina  $\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}$  se naziva jačina difuzije i očito je da se izborom po volji malog  $\partial n$  uvijek može dobiti po volji velika jačina difuzije.

Za slučaj pozitivne jačine konvekcije (fluid izlazi iz kontrolnog volumena) definirane kao  $\rho v^n dS$ , pri čemu je  $v^n$  normalna komponenta brzine na kontrolnoj površini, kontrolni volumen će predavati okolini fizikalno svojstvo konvekcijskim protokom  $\rho v^n dS \varphi^S$  i difuzijskim protokom  $\Gamma \frac{\partial S}{\partial n} \varphi^{KV}$ , te primati iz okoline fizikalno svojstvo difuzijskim protokom  $\Gamma \frac{\partial S}{\partial n} \varphi^{ok}$ . Odnosom jačine konvekcije i jačine difuzije je definiran Pecletov broj

$$Pe = \frac{\rho v^n dS}{\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}} = \frac{\rho v^n \delta n}{\Gamma} \quad (11)$$

Ako želimo Pecletov broj koristiti kao kriterij važnosti konvekcijskog i difuzijskog prijenosa, onda ne možemo veličinu  $\delta n$  birati proizvoljno.

## 2.2. KONZERVATIVNE FORME OSNOVNIH ZAKONA MEHANIKE FLUIDA

Osnovni zakoni dinamike fluida su [2]: zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja momenta količine gibanja, zakon očuvanja energije te drugi zakon termodinamike (zakon stvaranja entropije). Za slučaj da nema momenata raspodijeljenih po masi i površini materijalnog volumena zakon momenta količine gibanja se svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprežanja, pa ako se ta simetričnost pretpostavi, to znači da je jednačba momenta količine gibanja već zadovoljena. Entropija se pojavljuje samo u Gibbsovoj jednačbi i može se rješavati neovisno od ostalih.

Za homogeni idealni plin, može se dati sljedeći sustav jednačbi:

- Zakon održanja mase (jednačba kontinuiteta)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (12)$$

- Jednačba količine gibanja

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i \quad (13)$$

pri čemu je za stlačivo strujanje, uz zanemarenje volumenske viskoznosti

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} \quad (14)$$

- Energijska jednačba, u ovom slučaju jednačba unutarnje energije za idealni plin

$$\frac{\partial (\rho c_v T)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_v v_j T)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_H \quad (15)$$

pri čemu  $q_H$  označava gustoću toplinskog izvora po volumenu

- Termalna jednačba stanja za idealni plin glasi



$$p = \rho RT \quad (16)$$

pri čemu je  $R$  specifična plinska konstanta, a  $T$  apsolutna temperatura.

### 2.3. MODELIRANJE TURBULENCIJE

Turbulenciju ili turbulentno strujanje je najlakše opisati kao nepravilnu, neorganiziranu, nestacionarnu, trodimenzionalnu, nelinearnu i nepovratnu pojavu pri strujanju fluida koju karakterizira jako miješanje čestica fluida. Turbulentno strujanje je problem koji se razumije i koji je u potpunosti opisan Navier-Stokesovim jednadžbama. Zbog toga se zna kako turbulencija obuhvaća široke prostorne i vremenske skale, kako je interakcija vrtloga nelinearna i jako složena, a zbog nelinearnih interakcija i korelirane prirode, ne može se primijeniti statistički pristup rješavanja problema. Rezultat direktne simulacije bi obuhvaćao vremenske i prostorne skale koje su nebitne ili neprimjenjive u inženjerskoj praksi u kojoj se traže srednje vrijednosti [4].

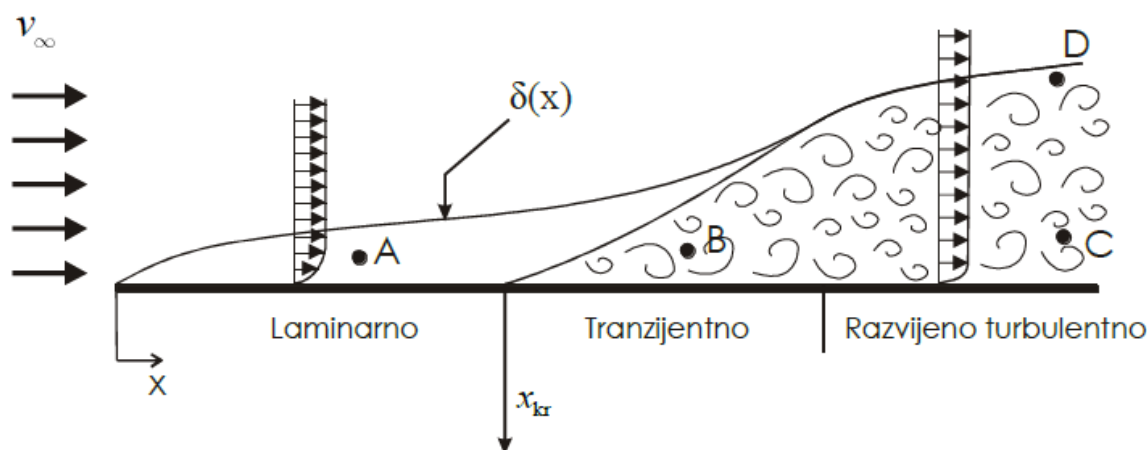
Unatoč kompleksnosti, postoje analitička i druga rješenja za jednostavna turbulentna strujanja koja su jako korisna pri formuliranju i validiranju modela turbulencije o kojima će još biti riječ. Iako se već 100 godina pokušava, ne uspijeva se pronaći dovoljno točna, a opet praktična formulacija problema turbulencije.

Svojstva turbulentnog strujanja su sljedeća:

- **nasumičnost,**
- **vrtložnost,**
- **nelinearnost,**
- **trodimenzionalnost,**
- **kontinuitet vrtložnih struktura,**
- **energetska kaskada,**
- **nepovratnost,**

- **disipativnost,**
- **intermitentnost,**
- **visoka difuzivnost,**
- **samoodržanje i samosličnost,** tj. turbulentna struktura ovisi samo o lokalnim uvjetima.

Turbulenciju karakterizira visoka difuzivnost, povećanje otpora strujanju, jače miješanje, energetska difuzija. Ova svojstva su u praksi ponekad poželjna, a ponekad nepoželjna. U sklopu problema turbulencije, treba spomenuti i proces laminarno-turbulentne tranzicije; proces pri kojem laminarno strujanje bez ikakvog vanjskog utjecaja postaje turbulentno. Primjerice, strujanje duž ravne ploče (Slika 4).



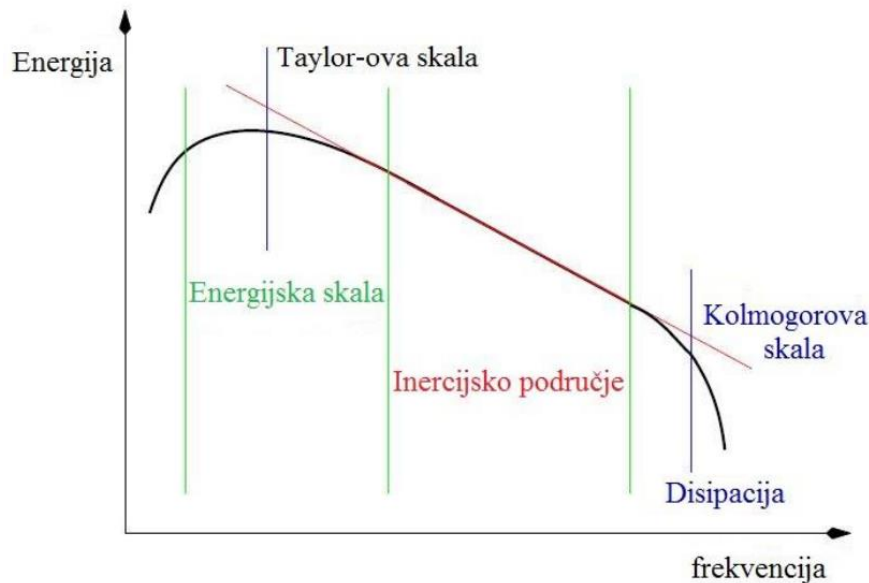
Slika 4 Granični sloj i turbulencija [2]

### 2.3.1. DINAMIKA VRTLOGA I ENERGETSKA KASKADA

Može biti korisno gledati turbulenciju kroz dinamiku vrtloga. Strujanje stvara velike vrtloge, tj. vrtloge na velikoj skali. Ti se vrtlozi procesom razvlačenja vrtloga razbijaju na manje vrtloge i na taj se način energija kreće s velike na manje skale. Što je veći gradijent brzina, to je veća disipacija energije i upravo je zbog toga disipacija energije najjača u malim vrtlozima. Slikom 5 je dana energetska kaskada vrtloga [5].

Na apscisi se nalazi valni broj, mjera za broj vrtloga koji mogu stati u određeni prostor. Lijevo

su veći vrtlozi, a desno manji.



**Slika 5 Energetska kaskada vrtloga**

Energetska se kaskada može podijeliti na sljedeće dijelove ili tipove vrtloga:

- **Vrtlozi velike skale;** na njih utječe oblik domene u kojoj se odvija strujanje i globalno polje strujanja. Na ovoj skali postoji problem što se teško može razaznati vrtloge od koherentnih struktura
- **Vrtlozi u kojima je pohranjena energija;** kao što ime kaže sadrže najveći dio turbulentne kinetičke energije i opisani su *Taylorovom* skalom
- **Inercijalna skala;** u kojoj se rastezanje vrtloga opisuje inercijalnim efektima efektima razbijanja vrtloga
- **Mali vrtlozi;** sadrže mali dio ukupne energije ali daju najveći doprinos disipaciji.

### 2.3.2. PRISTUPI RJEŠAVANJU TURBULENCIJE

Postoji nekoliko pristupa u numeričkom modeliranju turbulentnog strujanja: direktna numerička simulacija (DNS), simulacija velikih vrtloga (LES) i statistički pristup gdje se rješavaju osrednjene Navier-Stokesove (NS) jednačbe [6] [4].

Kod direktne numeričke simulacije numerički se integriraju NS jednadžbe tako da se obuhvati i najmanji vrtlozi Kolmogorovove skale odnosno najveće frekvencije turbulentnih fluktuacija. Ovaj pristup zahtijeva značajne računalne resurse jer je potrebna velika rezolucija geometrijske domene i danas se može primjenjivati za jednostavna strujanja i jednostavne geometrije i nezamjenjiv u alat sa razvijanje model turbulencije.

Kod simulacija velikih vrtloga (*Large Eddy Simulation* - LES) uvodi se prostorni filter kojim se odvajaju veliki od malih vrtloga. Veliki vrtlozi su oni koji se mogu riješiti uz rezoluciju zadane mreže. Mali se moraju modelirati. Logika iza ovog pristupa je da su mali vrtlozi homogeniji i izotropniji pa ih je lakše modelirati. Povećanjem rezolucije mreže, modeliraju se sve manji i manji vrtlozi te se simulacija približava direktnoj numeričkoj simulaciji.

Alternativni pristup u modeliranju turbulencije je statistički. Razdvajanjem trenutne vrijednosti lokalne varijable strujanja na srednju vrijednost i fluktuaciju oko srednje vrijednosti mogu se dobiti jednadžbe u kojima su nepoznanice srednje vrijednosti varijabli strujanja. U slučaju nestlačivog strujanja, osrednjavanje NS jednadžbi se izvodi primjenom

Reynoldsovog osrednjavanja dok se u slučaju stlačivog strujanja to osrednjavanje izvodi primjenom Favreovog osrednjavanja. Osrednjene NS jednadžbe se uz određena pojednostavljenja mogu zapisati u sljedećem obliku [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_i + p \delta_{ij} \\ \rho u_j h \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} + \tau_{ij}^R \\ (\tau_{ij} + \tau_{ij}^R) u_j - q_i - q_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_i \\ W_f + S_E \end{bmatrix} \quad (17)$$

pri čemu je  $\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i' u_j'}$  tenzor Reynoldsovog naprezanja, a  $q_i^R = -\overline{\rho h' u_i'}$  predstavlja vektor turbulentnog toka. Ostale varijable su osrednjene varijable strujanja. Prilikom osrednjavanja jednadžbi pojavljuju se dvije korelacije drugog reda:  $\tau_{ij}^R$  i  $q_i^R$ . Da bismo se riješili nepoznanica, trebamo uvesti dodatne jednadžbe. Međutim, tih jednadžbi nema, tj. sustav osrednjenih Navier-Stokesovih jednadžbi nije zatvoren. Zbog toga je i potrebno pribjeći modeliranju turbulencije.

Dva su osnovna pristupa statističkom modeliranju turbulencije: rješavanje transportne jednačbe za tenzor Reynoldsova naprezanja kod koje se javlja korelacija trećeg reda koja se treba modelirati, a drugi pristup je tzv. Boussinequeova aproksimacija koja definira ovisnost između korelacija drugog reda i gradijenta srednje vrijednosti brzine i temperature:

$$\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \quad (18)$$

u kojem je  $\mu_t$  koeficijent turbulentne viskoznosti koji nije fizikalno svojstvo fluida nego je funkcija uvjeta strujanja, a kod laminarnog strujanja jednak je nuli. Kako je ovaj izraz analogan Newtonovom zakonu viskoznosti, modeli koji se temelje na toj pretpostavci se nazivaju newtonovskim modelima turbulencije.

### 2.3.3. MODEL TURBULENCIJE $k - \omega$ SST

Model  $k - \omega$  SST (*Shear Stress Transport* - Transport smičnog naprezanja) često je korišten model turbulencije iz skupne modela turbulentne viskoznosti koji dolazi s dvije transportne jednačbe [7] [4]: jednačbom za turbulentnu kinetičku energiju  $k$  i jednačbom za specifičnu brzinu disipacije  $\omega$ . SST formulacija kombinira ono najbolje iz dva popularna modela turbulencije,  $k - \omega$  model je dobar uz zid i može prodrijeti i u viskozni podsloj te se može koristiti i za niske vrijednosti Reynoldsova broja bez dodatnih prigušnih funkcija dok se za slobodno strujanje koristi  $k - \varepsilon$  model turbulencije koji se bolje ponaša pri višim Reynoldsovim brojevima.

## 2.4. MODELIRANJE TOPLINSKOG NAPREZANJA U ELASTIČNOM TIJELU

Elastično tijelo se može tretirati kao skup molekula ili kao kontinuum [8]. Kao i kod fluida, odabrana je konceptualizacija kontinuumom koja zanemaruje diskretnu strukturu materije i pretpostavlja kako solid kontinuirano ispunjava prostor. Ovaj pristup zahtijeva da je put koji molekula prijeđe između sudara manja od najmanje duljinske dimenzije u definiranom kontinuumu. Za većinu krutih tijela nema problema kod poštivanja ovog uvjeta.

### 2.4.1. GLAVNI ZAKONI MEHANIKE ZA TERMOELASTIČNO TIJELO

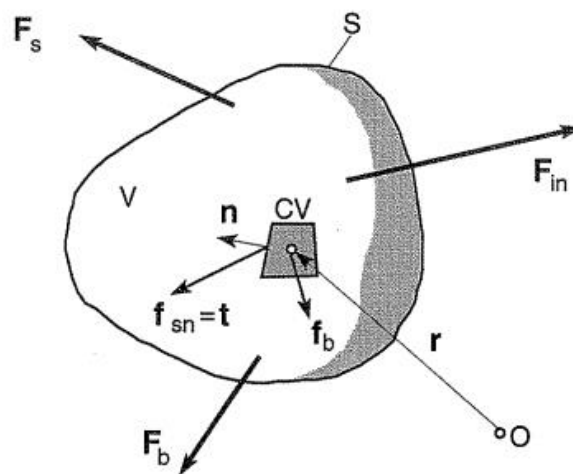
- Momentna jednadžba

Newtonov drugi zakon kada se primijeni na elastično tijelo još je poznat i kao Cauchyjev prvi zakon gibanja.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} dV = \int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho f_{bi} dV \quad (19)$$

Prvi član predstavlja inercijalne sile, drugi član predstavlja površinske sile, a treći član predstavlja volumne sile. Zakon vrijedi za cijelo tijelo kao i za dio tijela volumena  $V$  omeđeno površinom  $S$ .

Jedan primjer elastičnog tijela i sile koje na njega djeluju dan je Slikom 6.



Slika 6 Elastično tijelo [9]

Za slučaj termoelastičnog tijela Duhamel-Neumannova forma Hookeova zakona ima sljedeći oblik [9]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (2\mu + 3\lambda)\alpha T] \delta_{ij}, \quad (20)$$

i daje odnos između tenzora naprezanja  $\sigma_{ij}$ , tenzora deformacije  $\varepsilon_{ij}$  i relativne temperature tijela  $T$ . Relativna temperatura je definirana kao temperaturna razlika između temperature tijela i referentne temperature koja odgovara temperaturno nedeformiranome stanju. Ovdje su, pritom,  $\mu$  i  $\lambda$  koji su Laméovi koeficijenti, a  $\alpha$  je koeficijent linearnog toplinskog širenja. Čameovi su koeficijenti direktno povezani s modulom smičnosti  $G$ , Youngovim modulom elastičnosti  $E$  i ukupnim modulom elastičnosti  $K$ .

Laméov koeficijent  $\mu$  je definiran kao

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (21)$$

koeficijent  $\lambda$  ima sljedeći oblik

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (22)$$

A ukupni modul elastičnosti  $K$  ima sljedeći oblik

$$3K = 2\mu + 3\lambda = \frac{E}{1-2\nu}. \quad (23)$$

Hookeov zakon je ponekad bolje izraziti u sljedećoj formi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \left( \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} - \alpha T \right) \delta_{ij} \quad (24)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (25)$$

- Energetska jednadžba

Kako bi se moglo riješiti momentnu jednadžbu, trebamo poznavati polje temperature  $T$ . U općem se slučaju polje temperature može dobiti rješavanjem jednadžbe toplinske energije

$$e = cT \quad (26)$$

Što nam daje energetska jednačina

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c T dV = \int_S q_j n_j dS + \int_V h dV \quad (27)$$

u kojoj je  $c$  specifični toplinski kapacitet,  $q_j$  je vektor toplinskog toka, a  $h$  predstavlja toplinski izvor.

Odnos toplinskog toka i temperaturnog gradijenta je dan Fourierovim zakonom

$$q_j = k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (28)$$

pri čemu je  $k$  koeficijent toplinske vodljivosti.



### 3. DISKRETIZACIJA METODOM KONTROLNIH VOLUMENA

#### 3.1. UVOD

Matematički modeli su nam dani parcijalnim diferencijalnim jednačbama koje su za većinu realnih problema analitički nerješive. Kako bi se parcijalne diferencijalne jednačbe mogle riješiti, pribjegavamo diskretizaciji. [2] U ovom radu su i jednačbe za fluid i jednačbe za solid diskretizirane metodom kontrolnih volumena. Domena se diskretizira konačnim brojem proizvoljnih volumena koji su nepomični u vremenu koje je diskretizirano vremenskim korakom. Primjenom Gaussovog teorema za transformaciju volumenskih u površinske integrale, integracijom po kontrolnom volumenu i njegovoj površini te uz pomoć shema interpolacije, dobije se sustav linearnih jednačbi koji se rješava za svaki vremenski korak. Rješenja su vektorska i skalarna polja u samim centrima kontrolnih volumena koja opisuju, primjerice, strujanje za fluid. [7]

#### 3.2. DISKRETIZACIJA STANDARDNE TRANSPORTNE JEDNAČBE

Standardna transportna jednačba za skalarno polje  $\varphi$  ima sljedeći oblik [2]

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{Nestacionarni član}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_i \varphi)}{\partial x_i}}_{\text{Konvekcijjski član}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)}_{\text{Difuzijski član}} = \underbrace{S_\varphi(\varphi)}_{\text{Izvorski član}} \quad (29)$$

Poznati su brzina  $u_i$  i koeficijent  $\Gamma_\varphi$ , a skalarno polje  $\varphi$  je nepoznanica. Difuzijski član čini gornju jednačbu diferencijalnom jednačbom drugog reda. Integracijom gornje jednačbe po promatranom kontrolnom volumenu, dobijemo:

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV + \int_{V_M} \frac{\partial(\rho u_i \varphi)}{\partial x_i} dV - \int_{V_M} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dV = \int_{V_M} S_\varphi(\varphi) dV \quad (30)$$

### 3.3. DISKRETIZACIJA NESTACIONARNOG ČLANA

Najjednostavnija vremenska diskretizacija koja osigurava prvi red točnosti je:

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV = V_M \frac{\partial(\rho\varphi)^M}{\partial t} = V_M \frac{\partial(\rho\varphi)^{Mn} - \partial(\rho\varphi)^{Mo}}{\Delta t} \quad (31)$$

pri čemu  $M$  označava vrijednosti u centru kontrolnog volumena,  $Mn$  označava novu vrijednost, a  $Mo$  predstavlja stari trenutak; vrijednost iz starog vremenskog koraka. Ukoliko se ostali članovi u jednadžbi diskretiziraju s obzirom na stari vremenski korak, radi se o eksplicitnoj metodi.

### 3.4. DISKRETIZACIJA KONVEKCIJSKOG ČLANA

Primjenom Gaussovog teorema na konvekcijski član prevodimo volumenski u površinski integral, a diskretizirani oblik konvekcijskog u konačnici ima sljedeći oblik [10] :

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho u_i \varphi)}{\partial x_i} dV = \oint_{S_M} (\rho u_i \varphi) n_i dS = \sum_f S_i^f (\rho u_i \varphi)^f = \sum_f F \varphi^f \quad (32)$$

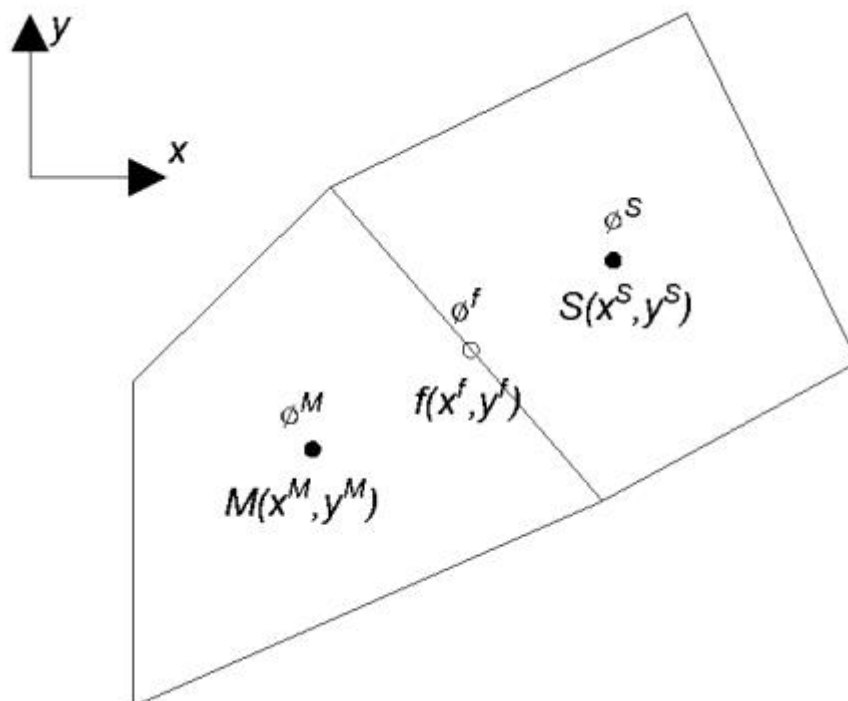
pri čemu gornja oznaka  $^f$  označava vrijednost u težištu stranice (*face*) kontrolnog volumena,  $n_i$  predstavlja vektor vanjske normale na kontrolnu površinu, a  $S_i^f$  je površinski vektor koji ima iznos površine, a smjer normale.

Kako jednadžba zahtijeva vrijednosti varijable  $\varphi$  na stranici kontrolnog volumena, treba definirati konvekcijske interpolacijske sheme koje koriste centre kontrolnih volumena kako bi omogućili interpolaciju  $\varphi^f$  na stranici koju volumeni dijele.

#### 3.4.1. KONVEKCIJSKE INTERPOLACIJSKE SHEME

Uloga konvekcijskih diferencijskih shema je interpolacija skalarnog polja sa centara na stranice kontrolnih volumena. Kako svaka stranica isključivo pripada paru kontrolnih

volumena (osim ako se radi o granici domene), ona u programskom kodu ima svog vlasnika (engleski „owner“) i susjeda (engleski „neighbour“) [7]. Na taj način je moguće u programu napraviti proračun vrijednosti potrebnih u težištu stranice za svaku stranicu, te pridružiti tu vrijednost pripadnim kontrolnim volumenima; umjesto dvostrukog proračuna istih vrijednosti za dva susjedna kontrolna volumena koja dijele tu stranicu Slika 7.



Slika 7 Susjedni kontrolni volumeni [7]

Vrijednost se može dobiti interpolacijom na različite načine. Za proizvoljne mreže u kojima kontrolni volumeni mogu imati proizvoljan broj stranica, najčešće korištene sheme interpolacije su:

- **Centralno diferenciranje** (*Central Differencing*)

Vrijednosti nepoznatog skalarnog ili vektorskog polja se računaju na stranici prema:

$$\phi^f = \lambda \phi^M + (1 - \lambda) \phi^S \quad (33)$$

pri čemu koeficijent linearne interpolacije za proizvoljnu trodimenzionalnu mrežu ima oblik

$$\lambda = \frac{|x_i^f - x_i^S|}{|x_i^M - x_i^S|} \quad (34)$$

Razvojem  $\varphi^f$  i  $\varphi^M$  u Taylorov res oko točke  $S$ , može se dokazati kako je ova shema drugog reda točnosti. Sheme drugog i višeg reda točnosti mogu proizvesti oscilatorna rješenja jer nisu ograničene te se u svom izvornom obliku ova shema ne koristi za konvekcijske članove.

- **Upwind** (Upwind differencing)

Kod upwind sheme, vrijednosti nepoznatog skalarnog ili vektorskog polja na licu se računaju prema izrazu:

$$\varphi^f = \begin{cases} \varphi^M, F \geq 0 \\ \varphi^S, F < 0 \end{cases} \quad (35)$$

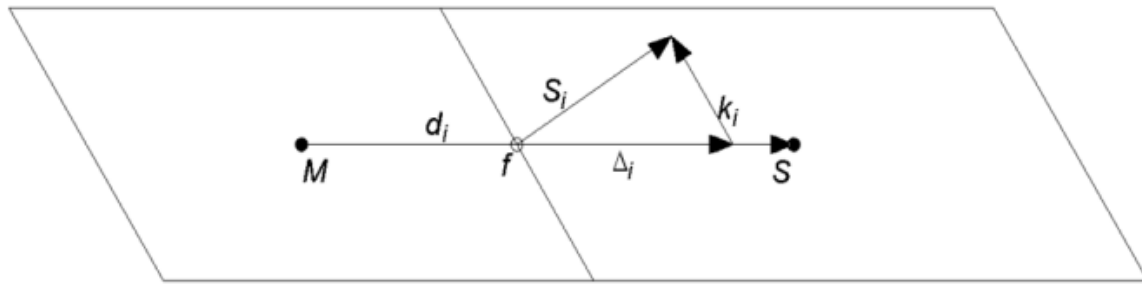
Pri čemu je  $F$  maseni protok na promatranoj stranici. Ova je shema ograničena i ne stvara oscilatorna rješenja. Međutim, razvojem u Taylorov red oko točke  $M$ , vidi se kako je tek prvog reda točnosti te je stoga podložna numeričkoj difuziji. Osobitu se pažnju treba mjestima gdje se očekuju veći gradijenti funkcija i poželjno je na takvim mjestima koristiti finiju mrežu.

### 3.5. DISKRETIZACIJA DIFUZIJSKOG ČLANA

Diskretizacija difuzijskog člana se dobije primjenom Gaussova teorema:

$$\int_{V_M} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dV = \oint_{S_M} \rho \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i dS = \sum_f (\rho \Gamma_\varphi)^f S_i^f \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} \quad (36)$$

Na Slici 8 (sljedeća stranica) se vidi par susjednih kontrolnih volumena koje karakteriziraju vektori  $S_i$  i  $d_i$ .



Slika 8 Vektori na zajedničku stranicu [7]

Vektor  $S_i$  ima smjer normale na stranicu dok vektor  $d_i$  spaja centre kontrolnih volumena. Ako spomenuti vektori nisu kolinearni, radi se o neortogonalnoj mreži. Ukoliko vektori jesu kolinearni, interpolacija gradijenta skalarnog polja se može vršiti prema izrazu:

$$S_i^f \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = |S_i^f| \frac{\varphi^S - \varphi^M}{|d_i|} \quad (37)$$

Kako bi se jednostavna interpolacija mogla iskoristiti, produkt površinskog vektora i gradijenta brzine se dijeli u dva dijela:

$$S_i^f \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = \Delta_i \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} + k_i \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} \quad (38)$$

gdje je vektor  $\Delta_i$  paralelan vektoru  $d_i = x_i^S - x_i^M = \overline{MS}$ . Prvi član s desne strane jednadžbe predstavlja ortogonalni doprinos, a drugi član korekciju usljed neortogonalnosti. Vektori moraju biti takvi da zadovoljavaju

$$S_i^f = \Delta_i + k_i. \quad (39)$$

Od više različitih načina određivanja iznosa vektora  $\Delta_i$  i  $k_i$ , opisat će se tzv. pristup ortogonalne korekcije. Prema tom pristupu, vektor  $\Delta_i$  se definira kao

$$\Delta_i = \frac{d_i}{|d_i|} |S_i^f| \quad (40)$$

Kako su vektori  $\Delta_i$  i  $d_i$  paralelni, ortogonalni doprinos se može zapisati kao:

$$\Delta_i \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = |\Delta_i| \frac{\varphi^S - \varphi^M}{|d_i|}. \quad (41)$$

Doprinos člana usljed neortogonalnosti je manji, a za računanje njegove vrijednosti koriste se vrijednosti iz prethodnog vremenskog koraka te linearna interpolacija:

$$k_i \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = k_i \left( \lambda \frac{\partial \varphi^{fo}}{\partial x_i} + (1 - \lambda) \frac{\partial \varphi^{fo}}{\partial x_i} \right). \quad (42)$$

Konačan izraz glasi:

$$S_i^f \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = |\Delta_i| \frac{\varphi^S - \varphi^M}{|d_i|} + k_i \left( \lambda \frac{\partial \varphi^{fo}}{\partial x_i} + (1 - \lambda) \frac{\partial \varphi^{fo}}{\partial x_i} \right), \quad (43)$$

gdje se vrijednost skalarnog polja u težištu kontrolnog volumena računaju pomoću Gaussovog teorema:

$$\frac{\partial \varphi^{fo}}{\partial x_i} = \frac{1}{V_M} \sum_f S_i^f \varphi^{fo}. \quad (44)$$

### 3.6. DISKRETIZACIJA IZVORSKOG ČLANA

Izvorski su članovi svi oni članovi koji se ne mogu svrstati u nestacionarne, konvekcijske i difuzijske članove. Izvorski član  $S_\varphi(\varphi)$  je bilo koja općenita funkcija skalarnog polja  $\varphi$ .

Ukoliko je izvorski član nelinearan, potrebno ga je linearizirati [4]:

$$S_\varphi(\varphi) = S_u + S_p \varphi \quad (45)$$

Prilikom linearizacije, treba paziti da se nelinearni članovi tretiraju što više implicitno.

Diskretizirani izvorski član ima sljedeći oblik:

$$\int_{V_M} S_\varphi(\varphi) dV = S_u V_M + S_p V_M \varphi^M. \quad (46)$$

### 3.7. DISKRETIZACIJA JEDNADŽBE RAVNOTEŽE ELASTIČNOG TIJELA

Dat će se samo konačni oblik diskretizirane jednadžbe ravnoteže elastičnog tijela za tetraedarski kontrolni volumen [11]:

$$\frac{1}{9V_T} \underbrace{\sum_f [(2\mu_T + \lambda_T) S_i^T \cdot S_j^T \mathbf{I}] \cdot u_j^T}_{\text{implicitni dio}} = - \frac{1}{9V_T} \underbrace{\left\{ \mu_T \sum_f [S_j^T \cdot S_i^T - \text{tr}(S_j^T \cdot S_i^T) \mathbf{I}] + \lambda_T [S_i^T \cdot S_j^T - \text{tr}(S_i^T \cdot S_j^T) \mathbf{I}] \right\} \cdot u_j^T}_{\text{eksplicitni dio}} \quad (47)$$

### 3.8. SUSTAV LINEARNIH JEDNADŽBI

Standardna transportna jednadžba se može zapisati uz pomoć diskretiziranih članova na sljedeći način [7]:

$$V_M \frac{\partial (\rho\varphi)^{Mn} - \partial (\rho\varphi)^{Mo}}{\Delta t} + \sum_f F\varphi^f - \sum_f (\rho\Gamma_\varphi)^f S_i^f \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = S_u V_M + S_p V_M \varphi^M \quad (48)$$

Kako sve interpolacijske sheme u metodi kontrolnih volumena koriste samo vrijednosti u težištima kontrolnih volumena koji dijele zajedničku stranicu, jednadžba se može zapisati i u sljedećem obliku:

$$a^M \varphi^{Mn} + \sum_S a^S \varphi^{Sn} = S^o \quad (49)$$

Ovakva se jednadžba formira za svaki kontrolni volumen. Vrijednost  $\varphi^{Mn}$  ovisi o vrijednostima u susjednim kontrolnim volumenima. Na taj se način dobije sustav algebarskih jednadžbi

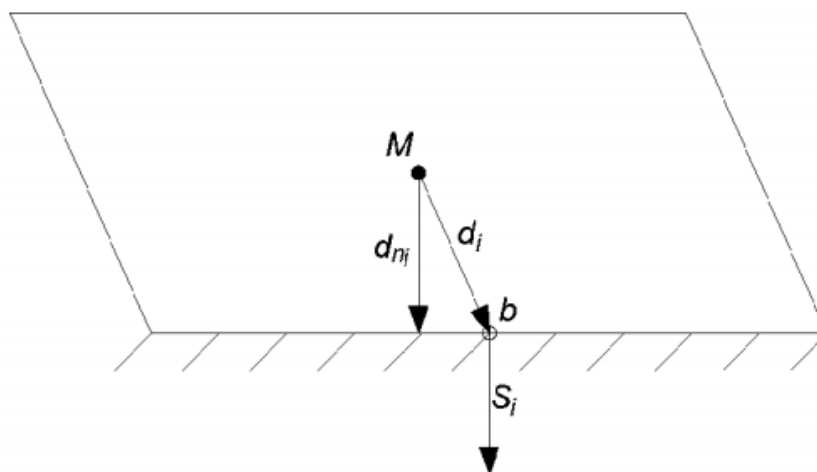
$$[A][\varphi] = [S], \quad (50)$$

pri čemu je matrica  $[A]$  rijetka, odnosno ima mnogo članova koji su nule. Koeficijenti  $a^M$  su dijagonalni koeficijenti matrice dok  $a^S$  predstavlja koeficijente matrice koji nisu na dijagonali.  $S^o$  je vektor koji obuhvaća sve izvorske članove i sve poznate vrijednosti iz starog vremenskog koraka. Rješenje sustava je vektor  $[\varphi]$  odnosno diskretno skalarno polje s vrijednostima danim za centre kontrolnih volumena.

### 3.9. RUBNI UVJETI

Kako bi se mogao riješiti sustav linearnih jednadžbi, potrebni su nam rubni i početni uvjeti. Dosad opisane metode diskretizacije prostornih integrala daju vrijednosti samo na unutarnjim granicama volumena. Na vanjskoj granici diskretizirane prostorne domene treba se definirati rubne uvjete.

Dvije su vrste rubnih uvjeta [3]: Dirichletov rubni uvjet koji zadaje vrijednost varijable na granici i Neumannov koji zadaje normalni gradijent varijable na granici.



**Slika 9** Granični kontrolni volumen [7]

Slikom 9, prikazan je kontrolni volumen kojemu se stranica  $b$  nalazi na rubu prostorne domene. Uz rubnu stranicu vezan je vektor  $d_i = \overline{Mb}$  te vektor  $d_{ni}$  koji je paralelan s vektorom  $S_i$  koji je u smjeru normale.



### 3.9.1. DIRICHLETOV RUBNI UVJET

Kod Dirichletova rubnog uvjeta, propisuje se fiksna vrijednost nekog polja na stranici, tj. tamo gdje se zahtijeva vrijednost polja na stranice, primjerice kod konvekcijskog člana, možemo uzeti da je  $\varphi^f = \varphi^b$ .

Ukoliko se diskretizacijom zahtijeva vrijednost gradijenta polja na rubu, primjerice za difuzni član, aproksimacija je sljedeća:

$$S_i \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = |S_i| \frac{\varphi^b - \varphi^M}{|d_{ni}|} . \quad (51)$$

Diskretizacija je drugog reda točnosti za konstantan  $\varphi^b$  preko stranice. Ukoliko to nije slučaj te ako je mreža neortogonalna, ova je aproksimacija drugog reda točnosti. U tom se slučaju preporuča uvesti korekciju uslijed neortogonalnosti.

### 3.9.2. GENERALIZIRANI VON NEUMANNOV RUBNI UVJET

U osnovi, propisuje se gradijent nekog polja u smjeru normale na granicu.

$$g^b = \frac{\partial \varphi^b}{\partial n} . \quad (52)$$

Često diskretizacija zahtijeva vrijednost polja  $\varphi^f$  na zajedničkoj stranici. Tada se vrši sljedeća ekstrapolacija:

$$\varphi^f = \varphi^M + d_{ni} \frac{\partial \varphi^b}{\partial n_i} = \varphi^M + |d_{ni}| g^b . \quad (53)$$

Tamo gdje je potrebno poznavati vrijednost polja na stranici, uzima se

$$S_i \frac{\partial \varphi^f}{\partial x_i} = |S_i| g^b . \quad (54)$$

Ukoliko je gradijent polja u smjeru normale konstantan preko stranice kontrolnog volumena, diskretizacija za von Neumannov rubni uvjet drugog je reda točnosti. Kao i kod svih diskretizacija, neortogonalnost mreže i mijenjanje gradijenta polja u smjeru normale smanjuje točnost.

---

## 4. PRORAČUN STRUJANJA I PRIJENOSA TOPLINE

Za model proračuna strujanja i prijenosa topline odabran je sveobuhvatni model koji u isto vrijeme računa strujanje u fluidu te naprezanje i provođenje topline u solidu. Kako bi se model mogao primijeniti, potrebno je pripremiti numerički model koji se sastoji od mreže i svih bitnih parametara za simulaciju.

### 4.1. MREŽA KONTROLNIH VOLUMENA

Prostorna domena diskretizirana je mrežom kontrolnih volumena koju se često jednostavno naziva mrežom. Faze izrade mreže su sljedeće:

- **Površinski (surface) model**

Uglavnom iz CAD alata, ali ponekad generiran u samom alatu za izradu mreže).

- **Pojednostavljenje geometrije**

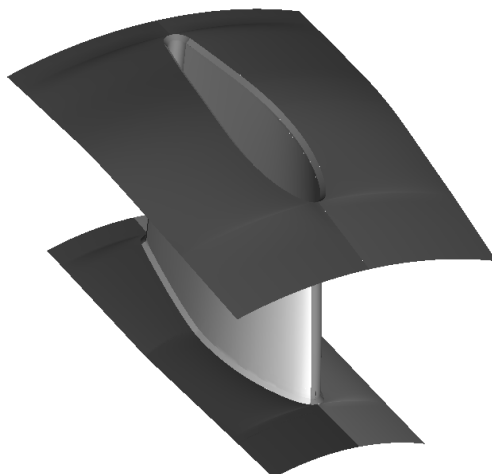
Može se povećati efikasnost simulacije, poboljšati konvergencija i zanemariti područja koja nisu od interesa za simulaciju; u ovaj dio spada i korištenje periodičkih uvjeta gdje je to moguće.

- **Generiranje mreže kontrolnih volumena**

Postoje dva osnovna pristupa: automatski i manualni. Manualni traži više rada, ali može uštediti broj volumena potreban za kvalitetnu simulaciju. Isplativo kod mreže koja će se koristiti kod više slučajeva.

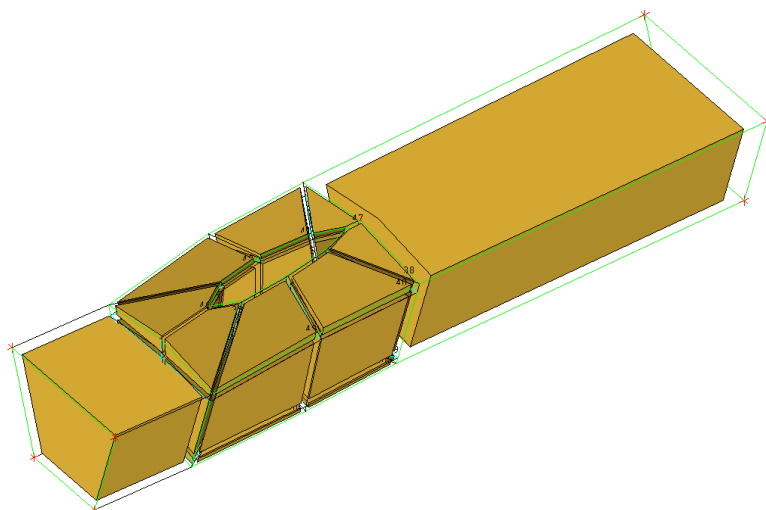
#### 4.1.1. MREŽA KONTROLNIH VOLUMENA ZA FLUID

Za potrebe ovog rada, napravljena je blok.strukturirana heksaedarska mreža. Surface model linera korišten za izradu mreže, vidljiv je na Slici 10. Kako se po obodu može smjestiti deset istih ovakvih linera, a ne postoje tangencijalni tokovi, može se pretpostaviti kako se može primijeniti periodični model i rubni uvjet bez velikog gubitka točnosti.



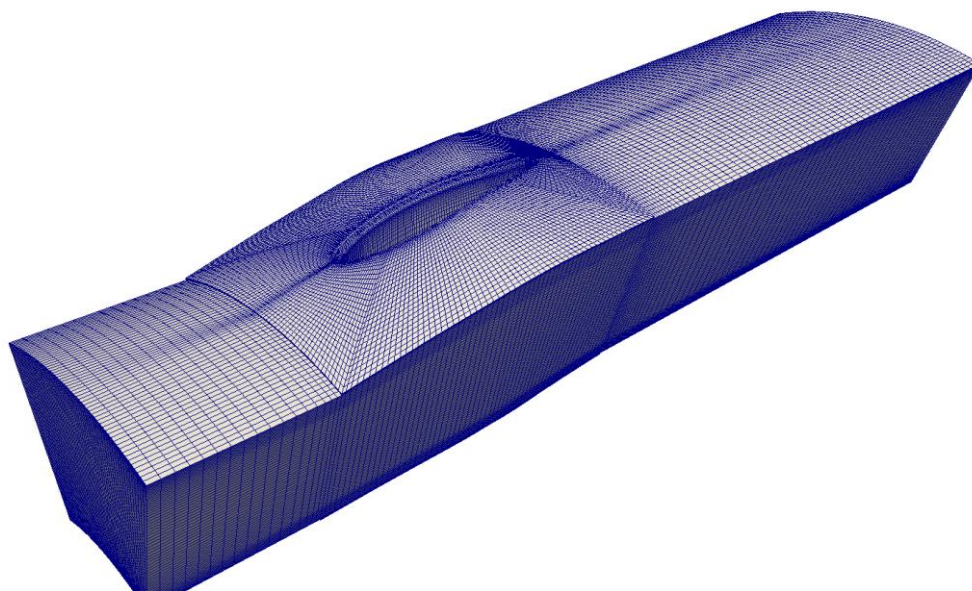
**Slika 10 Surface model**

Kako bi se mogla obuhvatiti geometrija uz zadovoljavajuću kvalitetu mreže, potrebno je odabrati prikladnu blok-strategiju koja će najbolje prionuti uz geometriju, a opet i zadržati parametre kvalitete poput ortogonalnosti, maksimalnog omjera susjednih volumena, dobre determinante bloka i sl. Što je veći broj blokova, moguća je bolja kontrola nad mrežom, ali, s druge strane, povećava se i potreban trud kako bi se sve blokove odgovarajuće podesilo. Na Slici 11,



**Slika 11 Blok-strategija**

prikazana je domena fluida sa pripadajućim joj blokovima. Oko rebra je primijenjena *O-grid* blok strategija kako bi se bolje uhvatila zakrivljenost i uvijenost rebra. Domena je produžena ispred i iza rebra kako bi se moglo razriješiti strujanje.



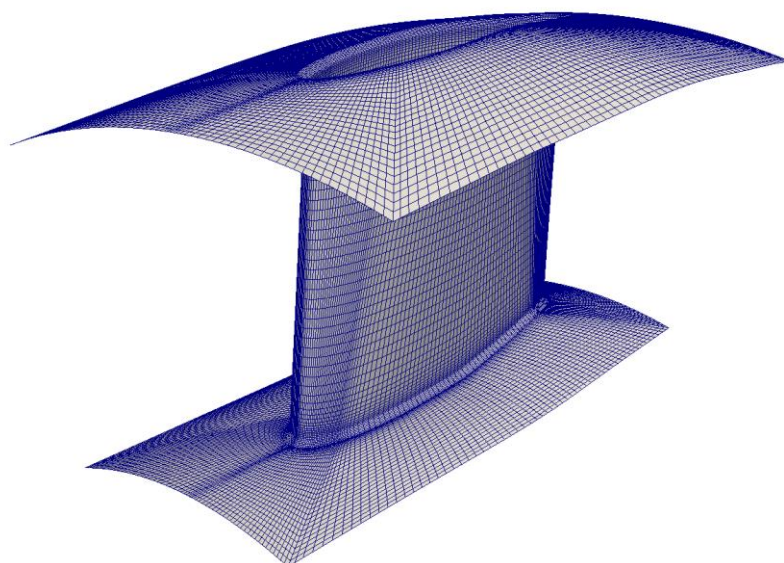
**Slika 12 Mreža - fluid**

Nakon što se podese željene distribucije čvorova na krivuljama blokova, dobije se mreža prikazana Slikom 12. koja broji oko 800.000 kontrolnih volumena.

#### *4.1.2. MREŽA KONTROLNIH VOLUMENA ZA ELASTIČNO TIJELO*

Mreža za elastično tijelo mora biti konformno spojiva, odnosno negativ mreže za fluid na području kontakta. Konačni izgled mreže za elastično tijelo, vidi se na Slici 13.

Po tankoj stijenci zidova linera postavljena su četiri sloja kontrolnih volumena. Mreža za elastično tijelo se sastoji od 150.000 kontrolnih volumena.



Slika 13 Mreža - solid

#### 4.2. FIZIKALNA I MEHANIČKA SVOJSTVA FLUIDA I LINERA

Za potrebe proračuna, potrebno je poznavati fizikalna svojstva dimnih plinova (Tablica 1).

**Tablica 1. Fizikalna svojstva dimnih plinova**

<i>Opis</i>	<i>Oznaka</i>	<i>Iznos</i>	<i>Mjerna jedinica</i>
Temperatura dimnih plinova na ulazu	$T_{DP}$	877	K
Gustoća dimnih plinova na ulazu	$\rho_{DP}$	0,399	kg/m <sup>3</sup>
Specifični toplinski kapacitet fluida pri konstantnom tlaku	$c_p$	1,113	kJ/kgK
Specifični toplinski kapacitet fluida pri konstantnom volumenu	$c_v$	0,826	kJ/kgK
Toplinska vodljivost fluida	$\lambda_F$	$60,88 \times 10^{-3}$	W/mK
Dinamička viskoznost	$\mu$	$38,46 \times 10^{-6}$	Pas

Dok su fizikalna i mehanička svojstva materijala linera od visokolegiranog austenitnog čelika X6CrNiTi18-10 za temperaturu od 550°C dana Tablicom 2.

**Tablica 2 Svojstva materijala linera X6CrNiTi18-10**

<i>Opis</i>	<i>Oznaka</i>	<i>Iznos</i>	<i>Mjerna jedinica</i>
Gustoća	$\rho_L$	7900	kg/m <sup>3</sup>
Specifični toplinski kapacitet	c	0,62	kJ/kgK
Toplinska vodljivost materijala linera	$\lambda_L$	21	W/mK
Youngov modul elastičnosti	E	157x10 <sup>3</sup>	N/mm <sup>2</sup>
Poissonov koeficijent	$\nu$	0,32	-
Vlačna čvrstoća	R <sub>m</sub>	340	N/mm <sup>2</sup>
Linearni koeficijent temperaturnog širenja	$\alpha$	17,6x10 <sup>-6</sup>	K <sup>-1</sup>

### 4.3. POČETNI I RUBNI UVJETI

Za potrebe sveobuhvatne simulacije na granice domene postavljeni su sljedeći početni i rubni uvjeti:

**a) ulaz:** velocity inlet

- promjenjivi profil brzine po visini ulaza od -15° do 0°
- ulazna brzina je 312ms<sup>-1</sup>
- temperatura 877K
- turbulentna kinetička energija 366m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>
- brzina disipacije 333s<sup>-1</sup>

**b) izlaz:** static pressure

- Obar pretlaka

**c) rebro i gornji i donji zid sa strane dimnih plinova:** wall

- uvjet prijanjanja fluida na stijenu

**d) rebro i gornji i donji zid sa strane hlađenja:** wall

- referentna temperatura: 573K
- koeficijent prijelaza topline za jedan slučaj  $50\text{W/m}^2\text{K}$  i  $100\text{W/m}^2\text{K}$  za drugi slučaj

**e) bočne strane:** periodični rubni uvjet – rotacijski periodični rubni uvjet

**f) gornja i donja strana na ulaznom i izlaznom produžetku domene:** slipwall

- tangencijalno naprezanje fluida je jednako nuli

#### 4.4. POSTAVKE RAČUNALNE SIMULACIJE

Odabrane su sljedeće postavke i diskretizacijske sheme:

- Stacionarna simulacija svih modela (strujanje, energetska jednadžba naprezanja)
- Turbulencija se modelira  $k-\omega$  SST modelom turbulencije
- polje brzine i tlaka spregnuto SIMPLE algoritmom
- diskretizacija konvektivnih članova jednadžbi matematičkog modela provedena je primjenom upwind sheme drugog reda točnosti
- difuzijski članovi su diskretizirani primjenom centralne sheme i zbog problema s konvergenzijom ne obuhvaćaju ortogonalnu korekciju
- stacionarno rješenje polja brzine tlaka i temperature postignuto unutar 1000 iteracija



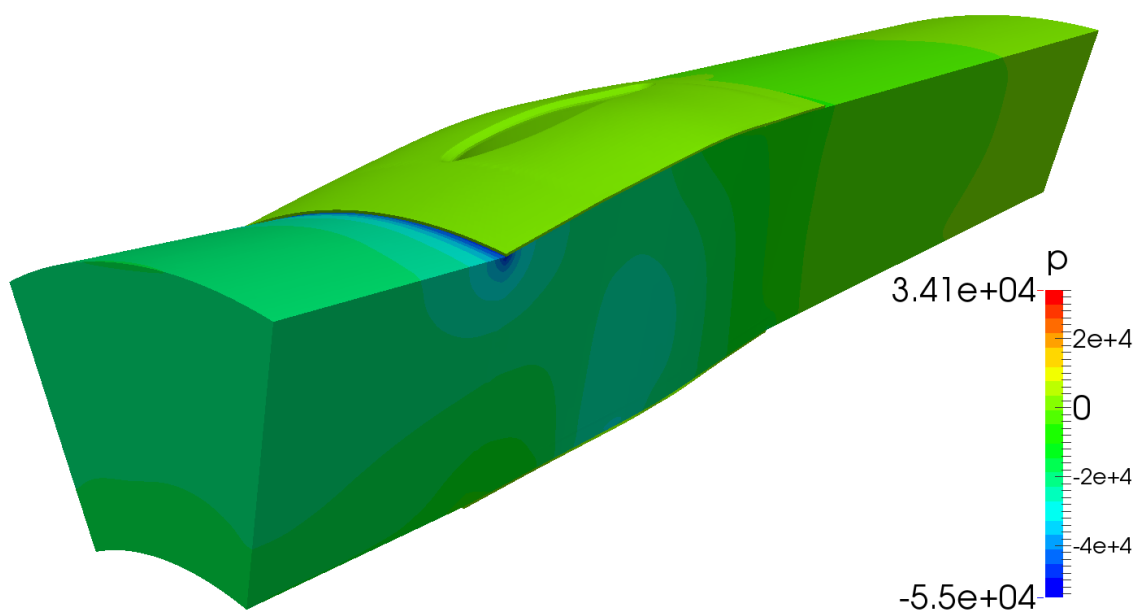
## 5. REZULTATI

Provedene su računalne simulacije za dva slučaja hlađenja stijenke linera. Polje tlaka, temperature i brzine fluida je dato za samo jedan slučaj jer je protok dimnih plinova mnogo veći od protoka hladila tako da se promjena temperature dimnih plinova zbog jačeg hlađenja stijenke linera, a time i strujanja može smatrati zanemarivom.

### 5.1. SLUČAJ ZA $\alpha = 50\text{W/m}^2\text{K}$

- **Polje tlaka**

Polje (manometarskog) statičkog tlaka po volumenu domene dano je Slikom 14.

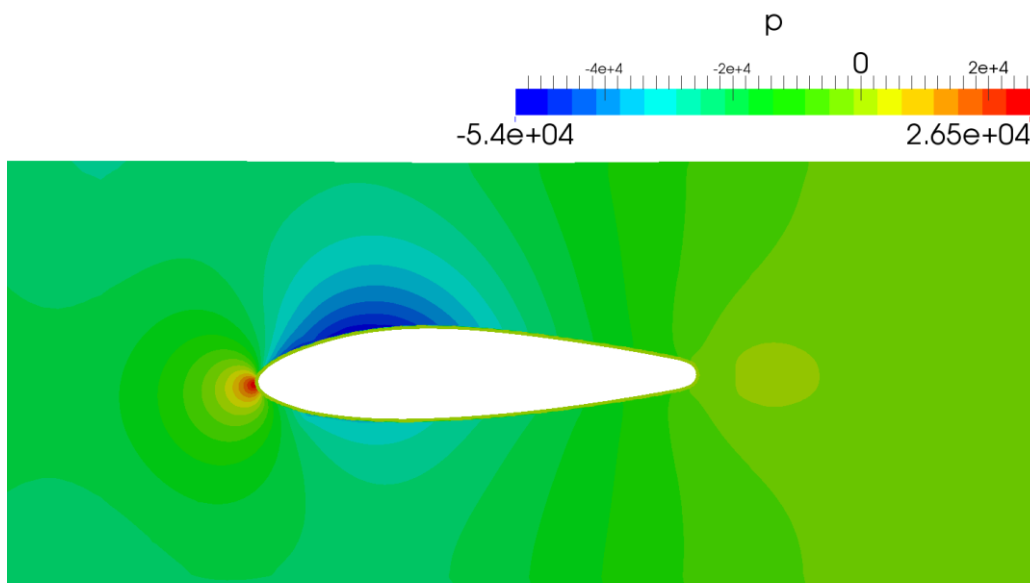


**Slika 14 Polje tlaka - volumen**

Zbog otpora strujanju, dimni plinovi se usporavaju te, prema Bernoullijevu principu, smanjuje se dinamička, a raste statička komponenta tlaka.

Poprečni presjek rebra omogućuje da se dobro vidi zaustavna točka na ulaznom bridu rebra. Treba se primijetiti kako postoji uzgon na ulazu na rebru zbog toga jer strujanje

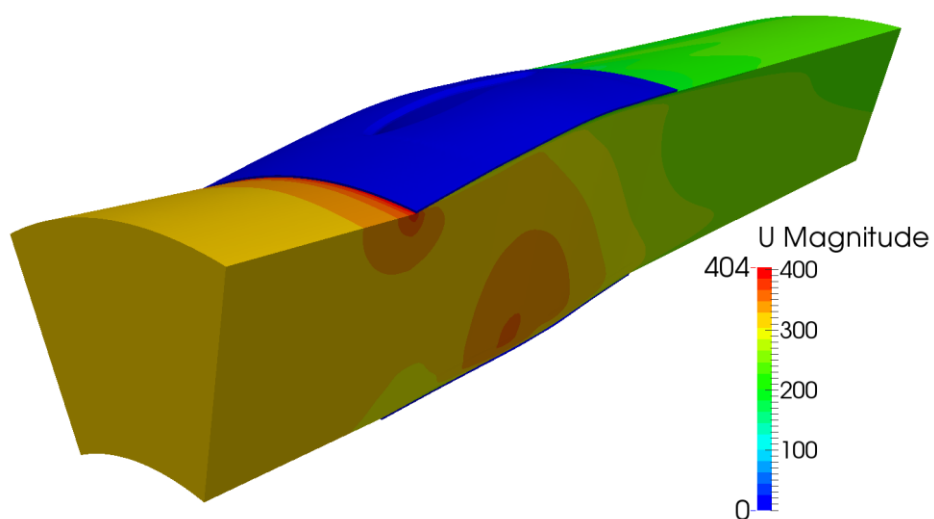
ulazi pod kutem usljed vrtložne komponente strujanja, dok na kraju profila imamo gotovo simetričnu sliku tlaka. Tu se jasno vidi uloga rebra linera pri ispravljanju vrtložne komponente (Slika 15).



Slika 15 Polje tlaka – presjek rebra

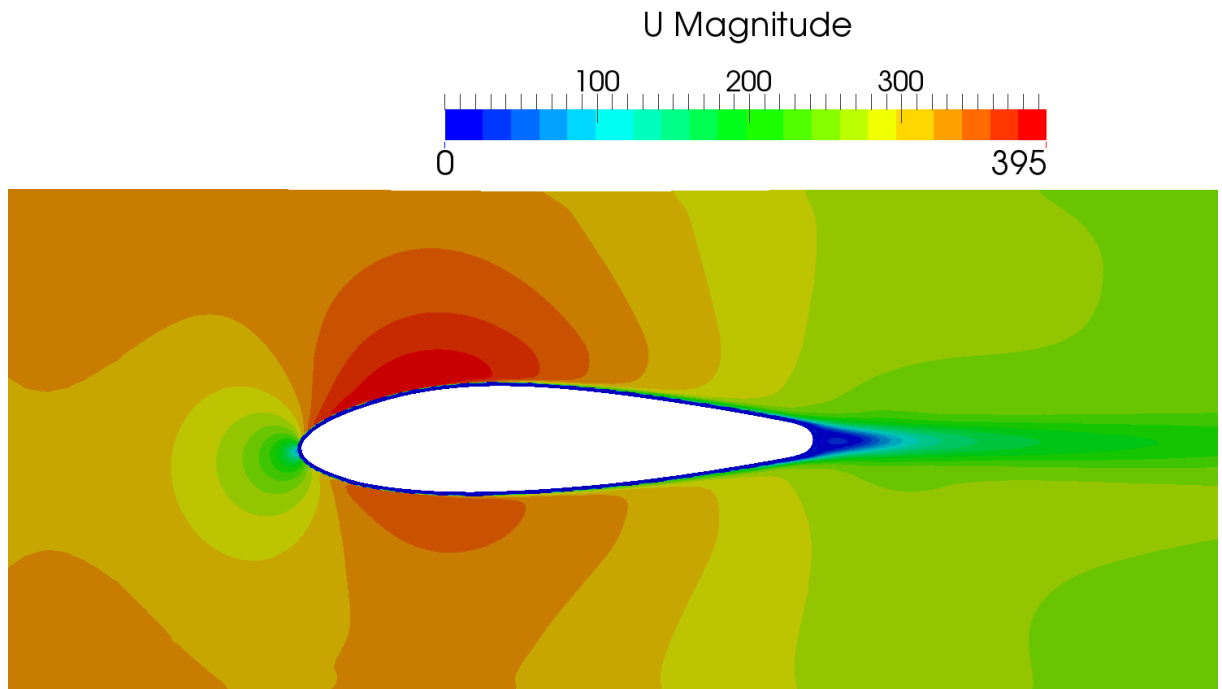
- **Polje brzine**

Polje brzine po vanjskim granicama domene dano je Slikom 16. Jasno se vidi usporavanje strujanja duž domene što je i očekivano.



Slika 16 Polje brzine po volumenu

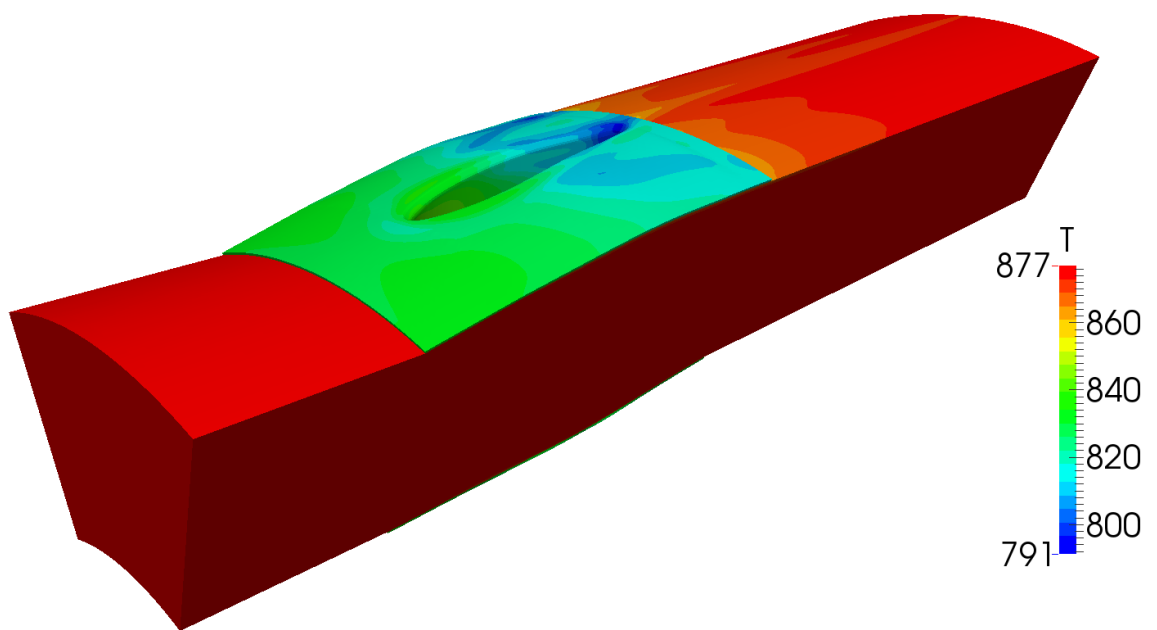
Slikom 17, dano je polje brzine oko profila. Treba se primijetiti kako je maksimalna brzina veća od brzine na ulazu. Tome je tako jer se uz profil linera sužava prostor između strujnica, a kako prema jednadžbi kontinuiteta maseni protok mora biti očuvan, brzina mora rasti. Opet se može primijetiti kako liner svojim oblikom ispravlja strujanje.



Slika 17 Brzina oko presjeka rebra

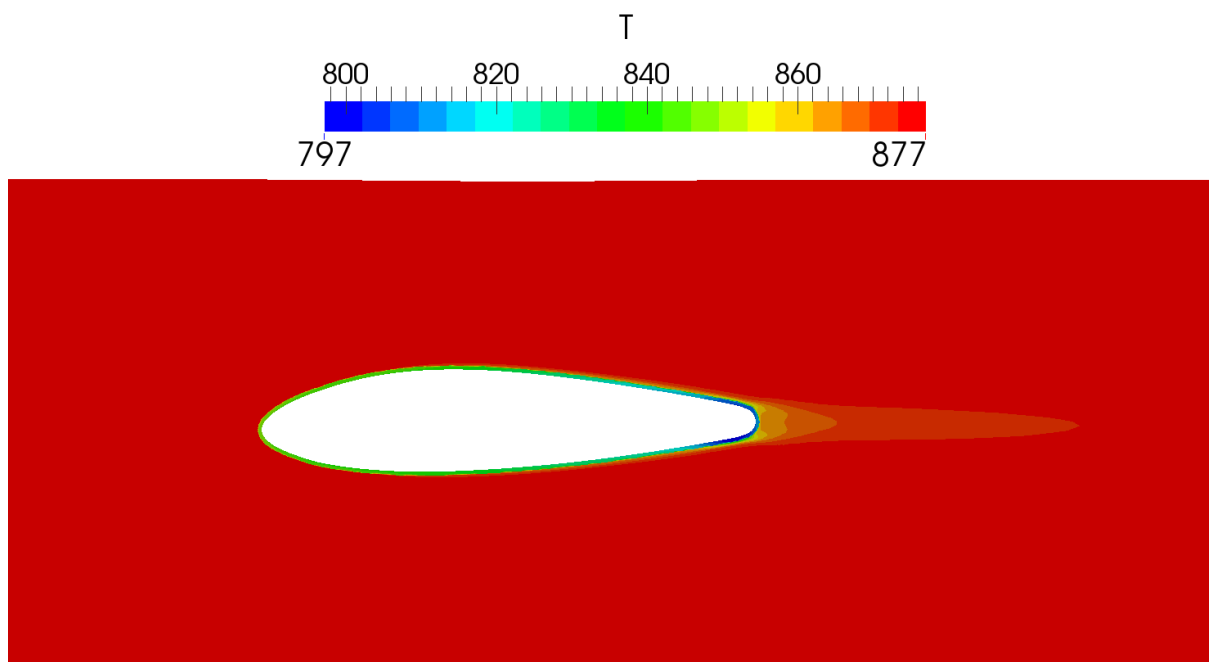
- **Temperaturno polje**

Slikom 18 (sljedeća stranica) je dano temperaturno polje po granici domene. Temperatura dimnih plinova je gotovo konstantna, osim neposredno iza stijenke linera, gdje postoji mali utjecaj hlađenja.



**Slika 18** Temperaturno polje po granici volumena

Temperaturno polje oko profila, a ako se dobro promotri, i kroz stijenku rebra, dano je Slikom 19. Za ove uvjete hlađenja imamo raspon temperatura vidljiv na slici, a temperatura je, očekivano, veća na ulaznom bridu jer je brzina, a time i prijelaz topline, veća upravo na ulaznom bridu. U stvarnosti bi se nastojalo bolje hladiti ulazni brid s nekom boljom metodom hlađenja, primjerice *impingementom* pri kojem se hladni fluid (ovo treba uzeti sa rezervom jer se radi u relativno hladnom fluidu u odnosu na dimne plinove) nasmujava pod velikom brzinom na površinu koju treba hladiti, te bi se time smanjila razlika temperatura unutar samog linera, a time i toplinsko naprezanje.

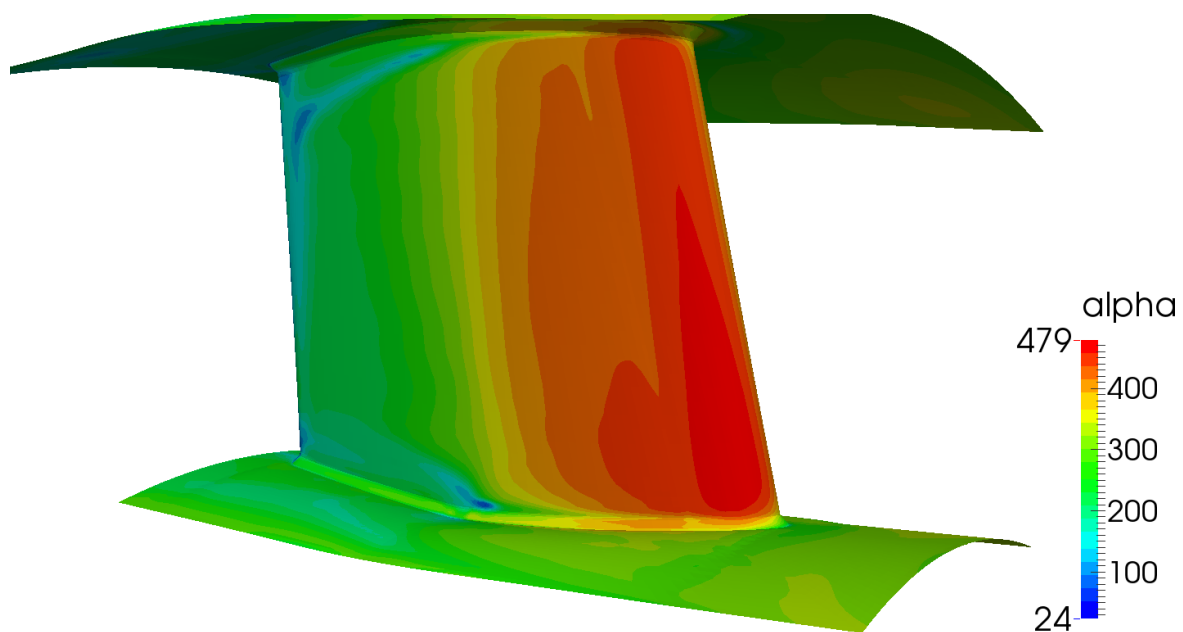


**Slika 19** Temperaturno polje oko rebra i kroz stijenku

Utjecaj hlađenja linera na temperaturu dimnih plinova je gotovo zanemariv.

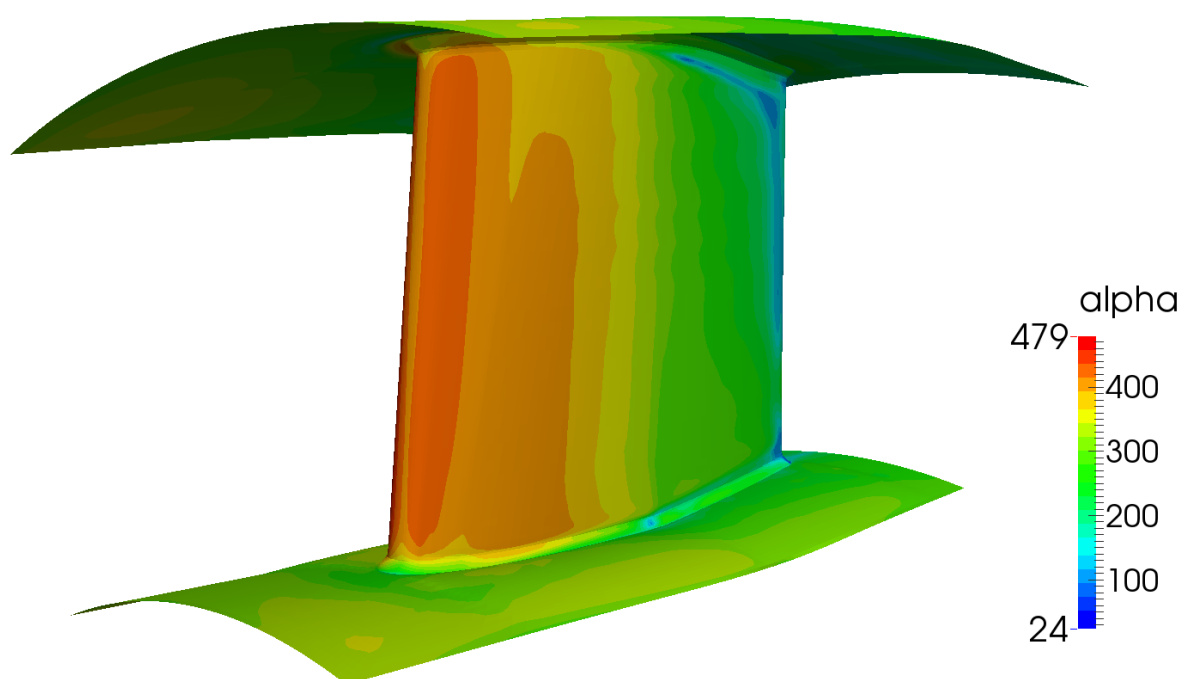
- **Koeficijenti prijelaza topline sa strane strujanja dimnih plinova**

Slikom 20 su dani koeficijenti prijelaza topline na lijevoj strani linera. Gdje je veća brzina strujanja, tamo je i veći koeficijent prijelaza topline. Strujnice se moraju više suziti s ove strane (a strujanje ubrzati) zbog oblika linera te kuta nastrojavanja fluida te je za očekivati kako je s druge strane linera manji koeficijent prijelaza topline.



**Slika 20** Alfe s lijeve strane 1. slucaj

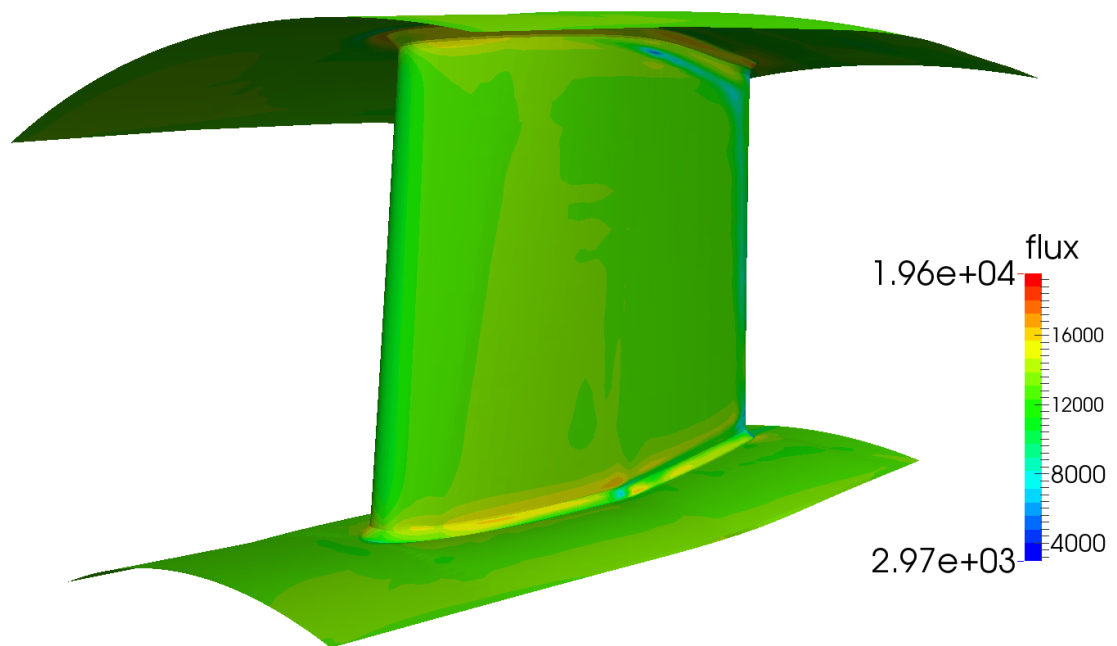
Prema Slici 21 , vidi se kako koeficijent prijelaza topline prati očekivani trend.



**Slika 21** Alfe s desne strane 1. slucaj

- **Gustoća toplinskog toka**

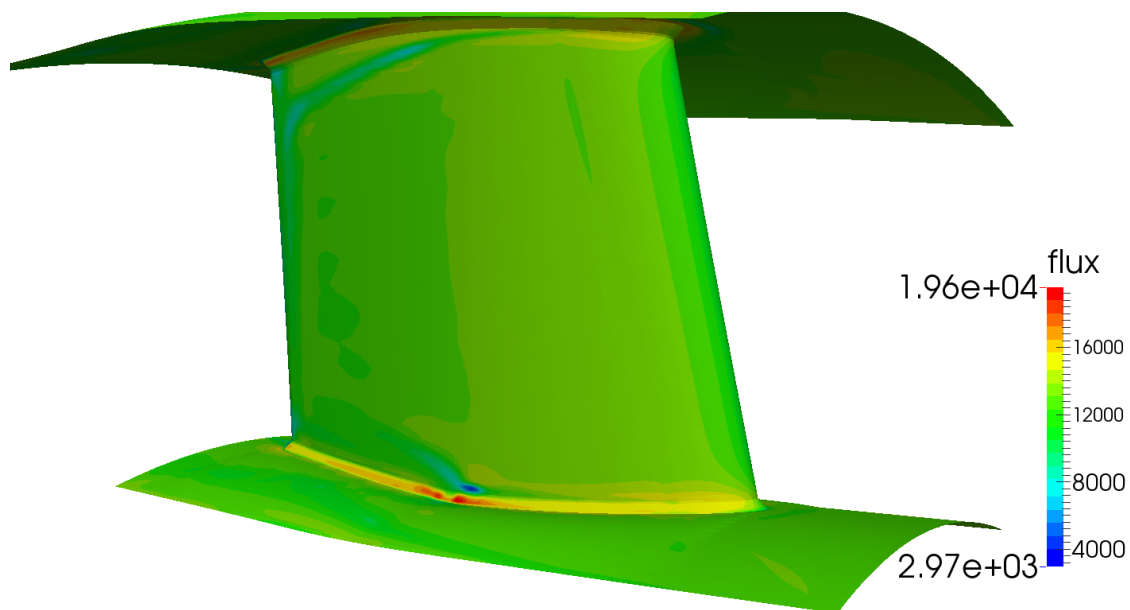
Slikom 22 je prikazana gustoća toplinskog toka po površini linera. Na površini linera, veći je toplinski tok tamo gdje je i veća brzina. No, mnogo je zanimljivija pojava na rubovima linera..



**Slika 22** Gustoća toplinskog toka desno 1. slučaj

Toplinski tok se ne širi samo u smjeru normale na površinu, već i uzduž presjeka stijenke. Tamo gdje se dvije stijenke sastaju, imamo povećanu gustoću toplinskog toka upravo zbog kondukcije uzduž volumena. Analogna pojava bi bili toplinski mostovi kod građevina

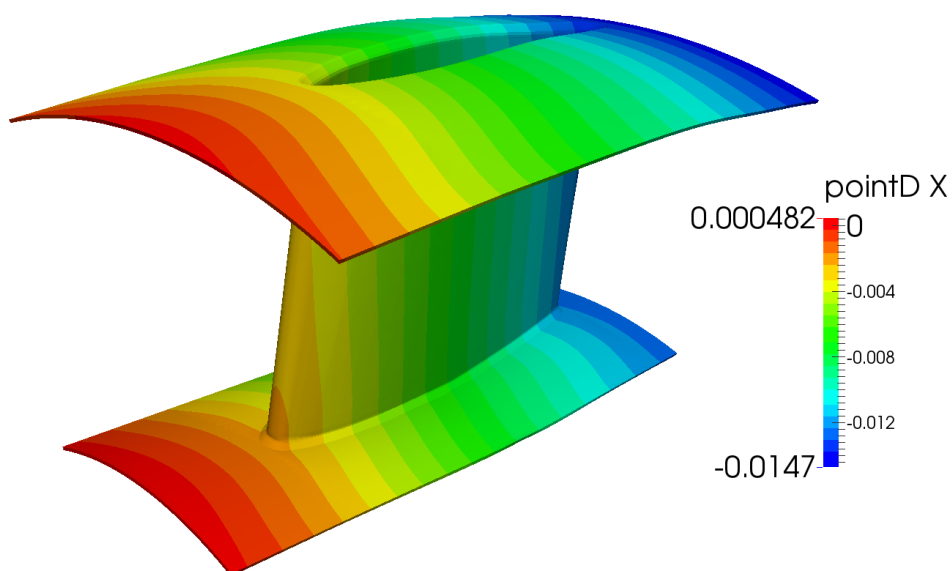
Gustoća toplinskog toka s druge strane dana je Slikom 23. Veće su gustoće toplinskog toka s lijeve strane zbog većeg koeficijenta prijelaza topline s te strane. Primjetno je kako neki dijelovi mreže nisu svojom kvalitetom dorasli problemu i na njima se javljaju nefizikalno velike vrijednosti. Zahtjevi za kvalitetom mreže sa strane solida su stroži nego li kod fluida.



Slika 23 Gustoća toplinskog toka lijevo 1. slučaj

- **Pomak (temperaturno istežanje)**

Pomak u smjeru osi x dan je Slikom 24.

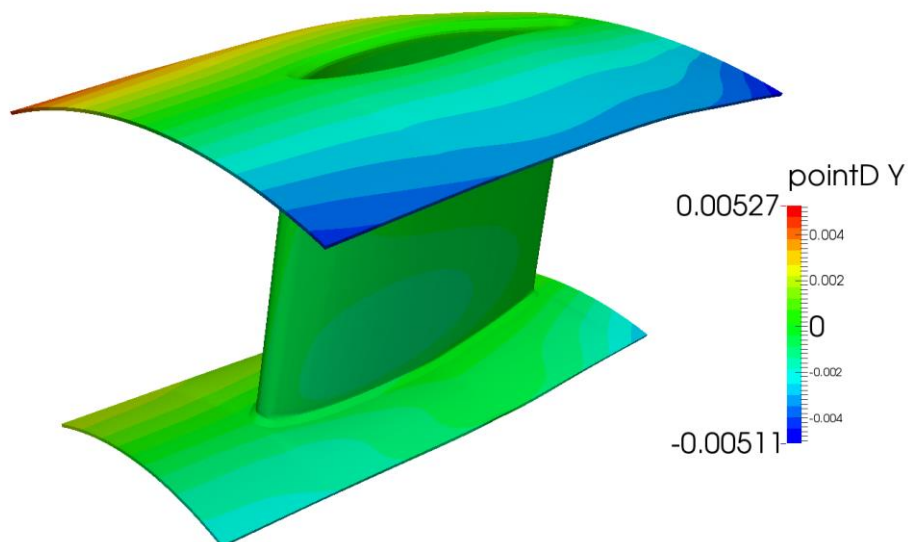


Slika 24 Pomaci x-os 1. slučaj



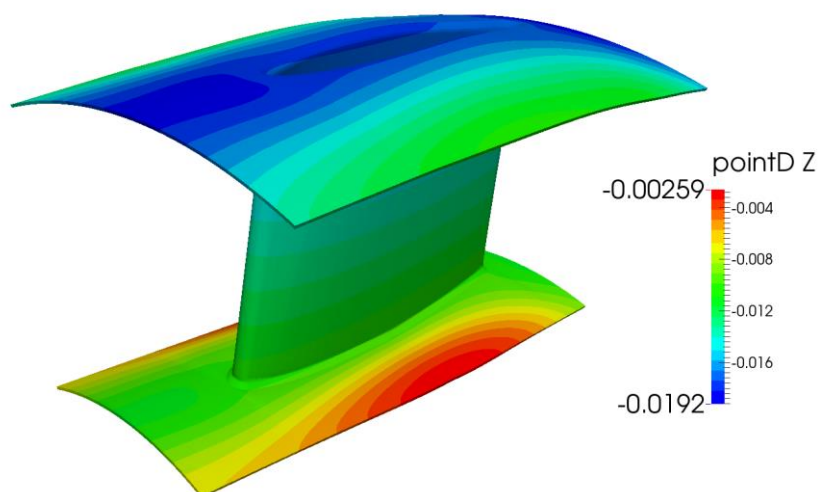
Usljed gradijenata temperatura dolazi do relativnog istežanja materijala. Kako liner nije ograničen u smjeru x osi, vidi se kako se širi iz sredine.

Slikom 25 je prikazan pomak u smjeru y osi. Izokonture na donjem zidu bi trebala biti gotovo paralelne kao i gornje i vjerojatno nisu takve zbog problema s periodičnim rubnim uvjetom na donjem zidu.



Slika 25 Pomaci y-os 1. slucaj

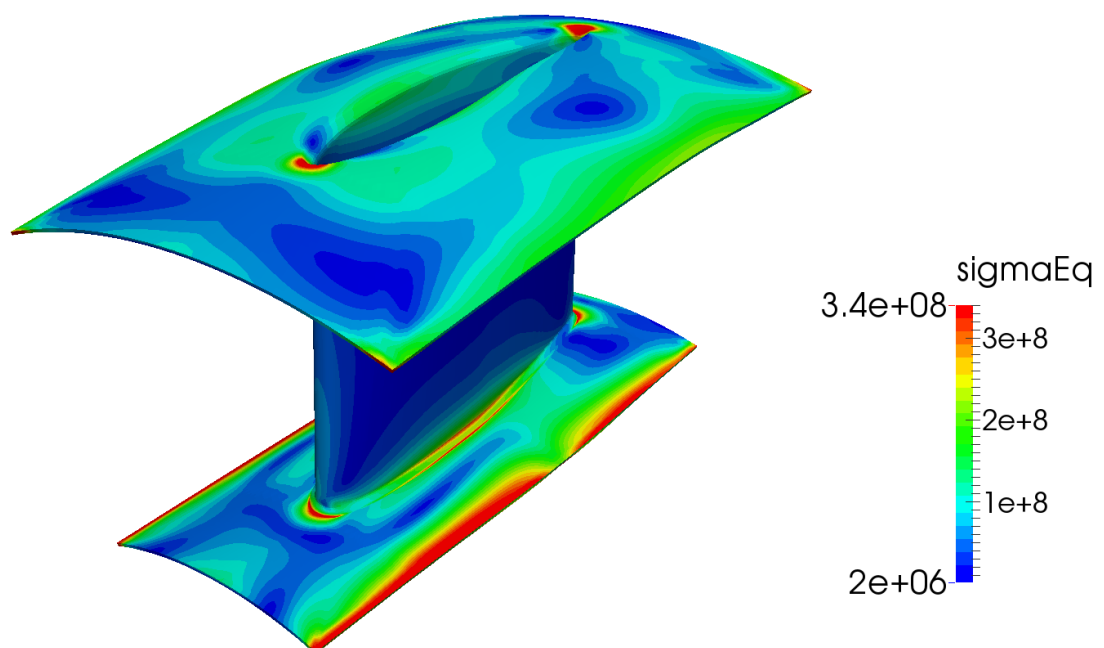
Slika 26 prikazuje pomake u smjeru z osi.



Slika 26 Pomaci z-os 1. slucaj

- **Ekvivalentno naprezanje**

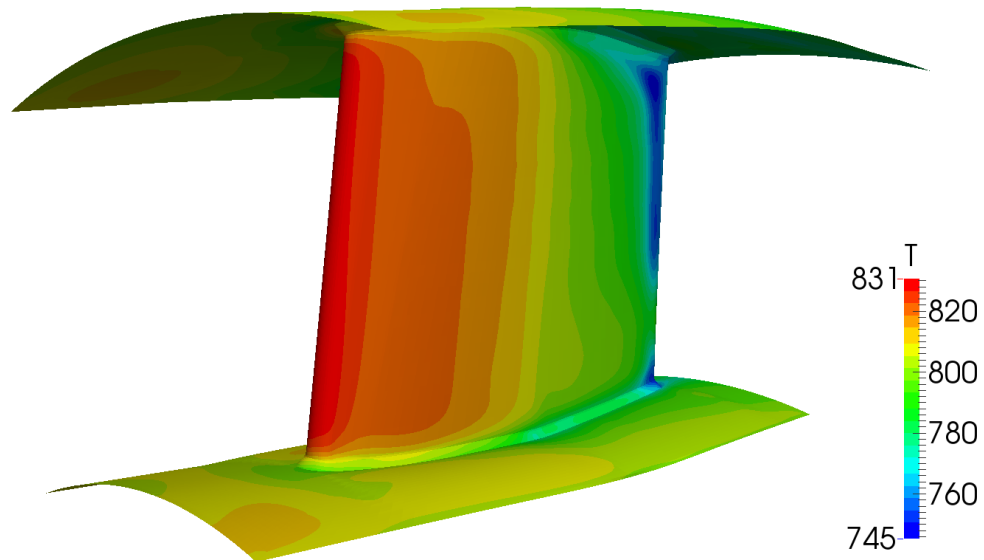
Ekvivalentno naprezanje je prikazano Slikom 27. Kako je zbog nedovoljne kvalitete geometrije bilo problema s generiranjem kvalitetne mreže, da bi se moglo iskonvergirati neko rješenje, isključena je korekcija usljed neortogonalnosti i time se izgubila točnost rezultata. Uz rub rebra su neortogonalniji elementi koji bez ortogonalne korekcije vjerojatno daju prevelike iznose naprezanja. Na donjem zidu uz rub su ortogonalni elementi, a visoki iznosi naprezanja su vjerojatno posljedica prevelike tolerancije pri spajanju strana u periodički rubni uvjet. Kvalitativno se može reći kako do najvećeg naprezanja dolazi na rubovima linera.



Slika 27 Ekvivalentno naprezanje 1. slucaj

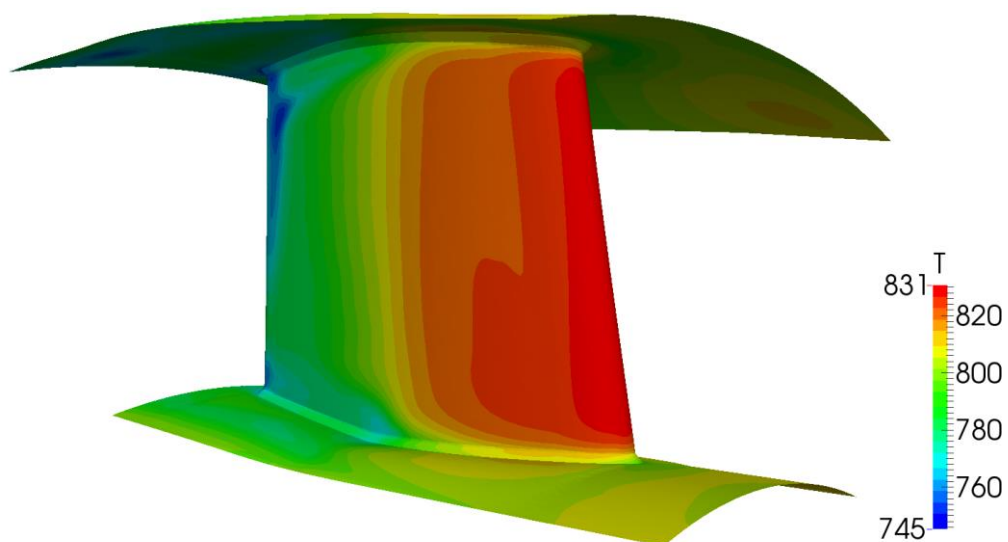
5.2. SLUČAJ ZA  $\alpha = 100\text{W/m}^2\text{K}$ • **Temperaturno polje**

Temperaturno polje za desnu stranu linera dano je Slikom 28.



**Slika 28** Temperaturno polje desna strana 2. slucaj

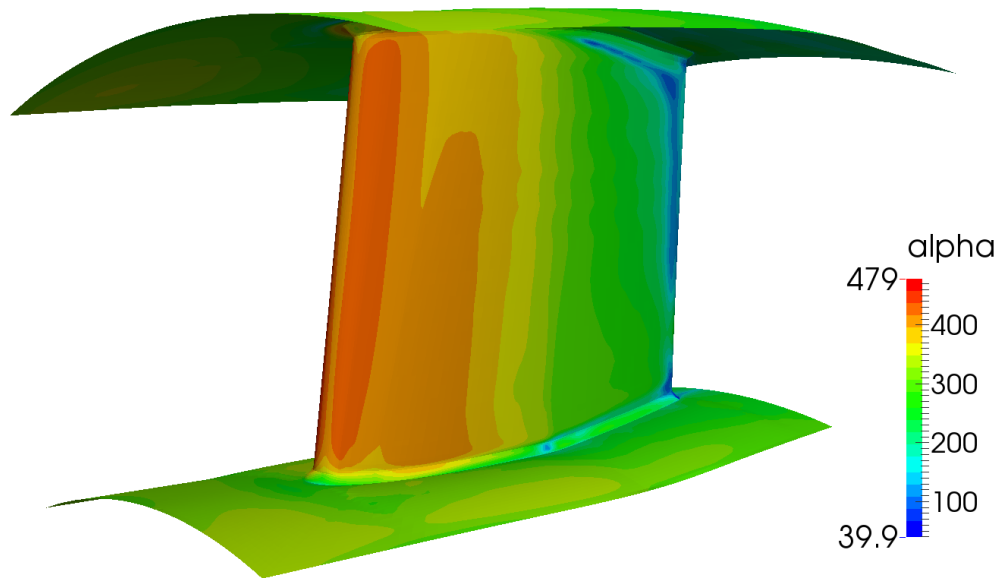
Slikom 29 je prikazano temperaturno polje za lijevu stranu linera. Iznosi temperatura su niži nego li u prethodnom slučaju, što je i očekivano s povećanjem koeficijenta prijelaza topline.



**Slika 29** Temperaturno polje lijeva strana 2. slucaj

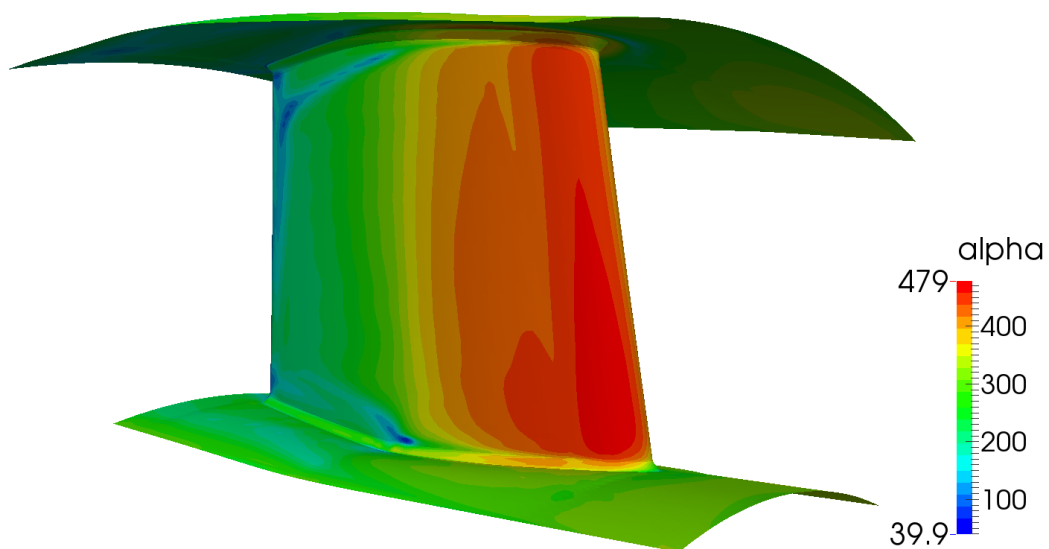
- **Koeficijenti prijelaza topline sa strane strujanja dimnih plinova**

Koeficijenti prijelaza topline na desnoj strani linera vide se na Slici 30, a koeficijenti prijelaza topline s lijeve strane linera na Slici 30 (dolje).



**Slika 30** Alfe desno 2. slucaj

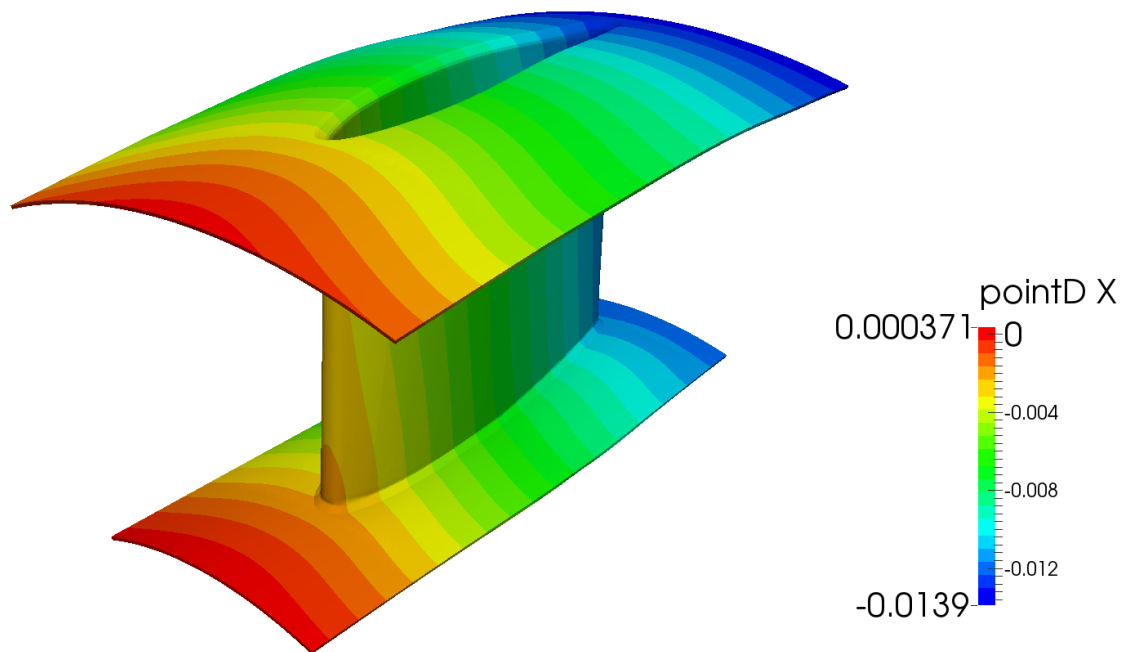
Povećanjem koeficijenta prijelaza topline sa strane hlađenja, povećao se i koeficijent prijelaza sa strane dimnih plinova jer je on funkcija temperature stijenke, koja je u ovom slučaju niža.



**Slika 31** Alfe lijevo 2. slucaj

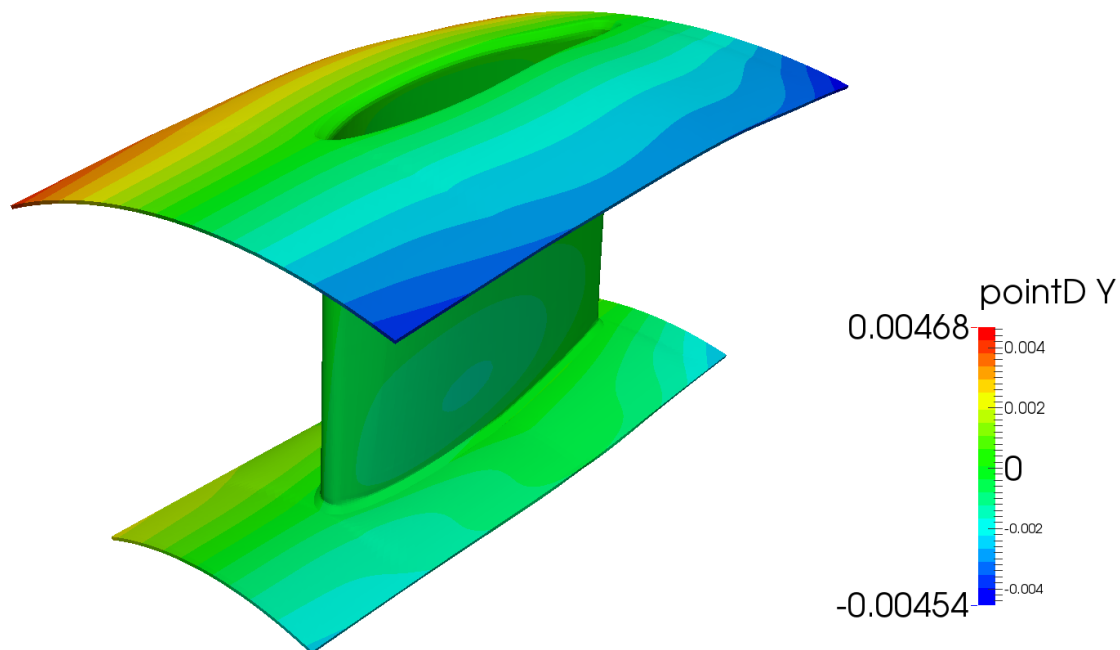
- **Pomak (temperaturno istežanje)**

Pomak u smjeru x osi dan je Slikom 32.



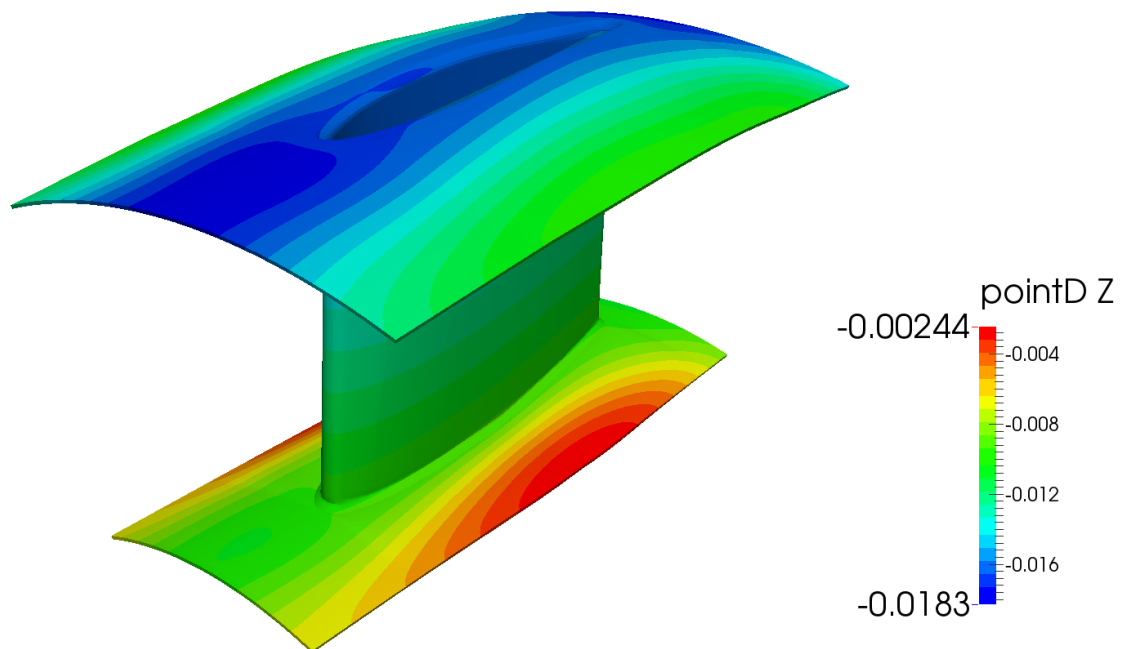
Slika 32 Pomak x-os 2. slucaj

Slika 33 prikazuje pomake u smjeru y osi.



Slika 33 Pomak y-os 2. slucaj

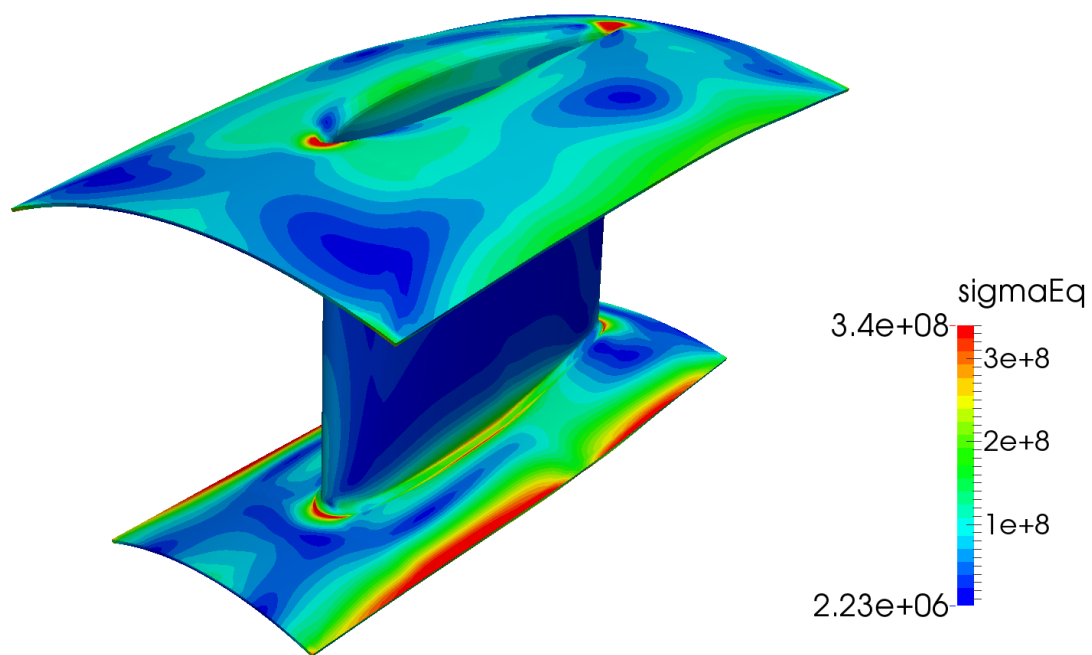
Pomaci u smjeru z osi prikazani su Slikom 34. Može se primijetiti kako su pomaci manji u slučaju jačeg hlađenja što je fizikalno jer temperaturno istežanje ovisi o temperaturi stijenke koja je za slučaj boljeg hlađenja - niža.



Slika 34 Pomaci z-os 2. slucaj

- **Ekvivalentno naprezanje**

Ekvivalentno naprezanje je prikazano Slikom 35 na sljedećoj stranici. Iako su pomaci manji nego li u slučaju sa slabijim hlađenjem, iznos naprezanja je veći. Tome je tako jer su kod jačeg hlađenja veći gradijenti temperatura, a za temperaturna naprezanja je bitno relativno istežanje, veća razlika među susjednim kontrolnim volumenima, veće naprezanje.



Slika 35 Ekvivalentno naprezanje 2. slucaj

## 6. ZAKLJUČAK

Prije svega, rezultate koji nisu validirani s obzirom na eksperimentalne podatke treba uzeti sa rezervom. Međutim, fizikalno ponašanje modela nam ipak omogućuje izvesti neke zaključke.

Uzimajući u obzir rezultate poput distribucije temperatura po lineru, pomaka i naprezanja, može se zaključiti kako se rebro više širi nego li gornji i donji zid linera te se upinje o te površine, a naprezanja su najveća na kontaktu među ploham, tj, na rubovima rebra.

Hlađenje povećava toplinska naprezanja jer se povećavaju gradijenti temperature kroz stijenku.

Prije nego li se da prijedloge kako smanjiti toplinska naprezanja, treba napomenuti kako ovi prijedlozi koji vjerojatno rješavaju dio toplinskih naprezanja mogu dovesti do problema na drugim područjima, primjerice da dođe do *High Cycle Fatigue* (HCF) uzrokovanim vibracijama koje su posljedica novih konstrukcijskih rješenja.

Dat će se nekoliko prijedloga za smanjenje toplinskih naprezanja i potencijalni problemi koji iz toga mogu proizaći:

- **segmentiranje linera** kako bi se omogućilo nesmetano toplinsko istežanje

Prednosti: eliminira problem toplinskih istežanja.

Nedostatci: Skuplja i kompliciranija izvedba, duži remont, gotovo neminovno propuštanje hladnog zraka u dimne plinove što smanjuje koeficijent iskoristivosti kod kombiniranog ciklusa (snižava temperaturu dovođenja)

- **ugradnja kompenzatora istežanja** po uzoru na plaštove izmjenjivača topline

Prednosti: smanjuje toplinska naprezanja

Nedostatci: skuplja i kompliciranija izvedba, potencijalno loše utječe na karakteristike strujanja (povećanje pada tlaka u lineru)

- **smanjenje debljine stijenke linera**



Prednosti: Smanjenje temperaturne razlike s vanjske i unutarnje strane, veća sposobnost izvijanja što opet smanjuje opterećenje na rubovima rebra, jeftinije.

Nedostatci: Manja nosivost konstrukcije, manja krutost gdje je potrebna, manja masa može dovesti do pojave vibracija.

- **promjena materijala linera (veća toplinska otpornost)**

Prednosti: veća dopuštena naprezanja, može se manje hladiti

Nedostatci: Skupo.

---

## LITERATURA

- [1] "Wartsila," [Online]. Available: [www.wartsila.com](http://www.wartsila.com). [Accessed 13. siječanj 2015].
- [2] Z. Virag and I. Džijan, Računalna dinamika fluida - Skripta - predavanja, Zagreb, 2014.
- [3] Ž. Tuković, Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2005.
- [4] H. Jasak, Numerical Solution Algorithms for Compressible Flows, Zagreb, 2007.
- [5] S. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Taylor & Francis, 1980.
- [6] V. Birčić, Mini plinska turbina za toplinsku stanicu - Diplomski rad, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2011.
- [7] V. Vukčević, *Diplomski rad*, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2013..
- [8] I. Demirdžić and A. Ivanković, Finite Volume Stress Analysis - Lecture notes, London, 1999.
- [9] I. Demirdžić and D. Martinović, "Finite volume method for thermo-elasto-plastic stress analysis," *Computer methods in Applied MEchanics and Engineering*, no. 109, pp. 331-349, 1993.
- [10] H. Jasak, Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with application to Fluid Flows, London: Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
- [11] H. Jasak and H. Weller, "Finite Volume Methodology for Contact Problems of Linear Elastic Solids," 2000.
- [12] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, An introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method, Essex, Engleska: Pearson Education Limited, 2007.
- [13] "cfd-online," [Online]. Available: [http://www.cfd-online.com/Wiki/SST\\_k-omega\\_model](http://www.cfd-online.com/Wiki/SST_k-omega_model). [Accessed 8 siječanj 2015].



# PRILOG

## I. CD-R disc