

# Procjena sposobnosti procesa nenormalno distribuiranih podataka

---

**Maršanić, Josipa**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2008**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:070017>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-18**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

**PROCJENA SPOSOBNOSTI PROCESA  
NENORMALNO DISTRIBUIRANIH PODATAKA**

Josipa Maršanić

Zagreb, 2008.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

# **PROCJENA SPOSOBNOSTI PROCESA NENORMALNO DISTRIBUIRANIH PODATAKA**

Voditelj rada:

Doc.dr.sc. Biserka Runje

Josipa Maršanić

Zagreb,2008.

## Zahvala

Najprije hvala doc.dr.sc. Biserki Runje na iznimno zanimljivoj temi diplomskog rada i na pravom mentorskom pristupu kojim me vodila kroz cijelu njegovu izradu.

Ne smijem izostaviti sve profesore i asistente na Fakultetu, koji su nam prenosili svoja znanja kao i svoje kolege sam provela svoje studentske godine.

Hvala mojoj maloj obitelji, a posebice mami, na bezuvjetnoj podršci i ljubavi kroz svih 17 godina školovanja.

U znak zahvale svojim najbližim prijateljima, posvećujem im sljedeći citat i nadam se da ću i ja moći biti uz njih kao što su oni bili uz mene.

*„Ne idi ispred mene, ne mogu te slijediti.*

*Ne idi iza mene, ne mogu te voditi.*

*Jednostavno idi pokraj mene i budi mi prijatelj.“*

Albert Camus

## **Izjava**

Izjavlujem da sam diplomski rad izrađivala sama uz stručno vodstvo mentorice doc.dr.sc. Biserke Runje.

## Sažetak

U radu je opisan i razrađen postupak procjene sposobnosti procesa kako normalno tako i nenormalno distribuiranih podataka. U cilju pravilne interpretacije rezultata definirani su uvjeti, normalnosti i stabilnosti procesa, koje je nužno zadovoljiti prije same procjene. Postupak procjene sposobnosti procesa za raspodjele podataka koje se ponašaju po normalnoj razdiobi proveden je primjenom dobro poznatih indeksa sposobnosti procesa.

Postupci procjene sposobnosti procesa za nenormalne podatke također su provedeni izračunom indeksa sposobnosti procesa. Postupci procjene stabilnosti za nenormalne podatke svode se na odabir nekog od već poznatih distribucijskih modela ili na transformaciju samih podataka.

Odabrani su primjeri, teorijski i praktični, nad kojima je izvršena analiza sposobnosti u programskim paketima *Statistica 7* i *Minitab 15*. Rezultati su komentirani i uspoređeni, kako bi se mogle dati smjernice za daljnju primjenu određenih metoda.

## Sadržaj

<b>1. SPOSOBNOST PROCESA .....</b>	<b>2</b>
1.1 KONTROLNE KARTE .....	4
1.2 KONTROLNE KARTE ZA MJERLJIVE KARAKTERISTIKE.....	5
1.2.1 $\bar{x}$ – R karta .....	5
1.2.2 $\bar{x}$ – s karta .....	6
1.3 TEHNIKE ANALIZE SPOSOBNOSTI .....	7
<b>2. INDEKSI SPOSOBNOSTI .....</b>	<b>8</b>
2.1 Cp .....	9
2.2 Cpk .....	13
2.3 MODIFIKACIJE OSNOVNIH INDEKSA .....	15
<b>3. NORMALNA RAZDIOBA.....</b>	<b>16</b>
3.1 KARAKTERISTIKE NORMALNE RAZDIOBE .....	16
3.2 ZABLUDE PRI KORIŠTENJU NORMALNE RAZDIOBE .....	20
3.3 PROCJENA SPOSOBNOSTI PROCESA NORMALNO DISTRIBUIRANIH PODATAKA .....	21
<b>4. NENORMALNI PODACI.....</b>	<b>22</b>
4.1 ZNAČAJKE I RAZLOZI NEPODVRGAVANJA NORMALNOSTI.....	22
4.2 RJEŠENJA ZA RAD SA NENORMALNIM PODACIMA.....	25
4.3 PROCESI SA JEDNOM GRANICOM ZAHTJEVA.....	27
<b>5. PRORAČUN INDEKSA SPOSOBNOSTI ZA NENORMALNE DISTRIBUCIJE .....</b>	<b>28</b>
5.1 PERCENTILNA METODA .....	28
5.2 DISTRIBUCIJSKI MODELI I TRANSFORMACIJE.....	30
5.2.1 Transformacija podataka.....	31
5.2.2 Log-normalna distribucija.....	32
5.2.3 Savijena normalna razdioba .....	33
5.2.4 Rayleigh-eva distribucija.....	35
5.2.5 Weibull – ova distribucija.....	37
5.2.6 Pearson – ove funkcije .....	39
5.2.7 Johnson – ove transformacije .....	40



<b>6. PRORAČUN INDEKSA SPOSOBNOSTI U SOFTWARE-SKIM PAKETIMA STATISTICA 7 I</b>	
<b><i>MINITAB 15</i>.....</b>	<b>44</b>
6.1 Uvod .....	44
6.2 PRIMJER 1. ....	46
6.3 PRIMJER 2. ....	54
6.4 PRIMJER 3. ....	64
6.5 PRIMJER 4. ....	71
6.6 PRIMJER 5. ....	75
6.7 REZULTATI TEORIJSKIH PRIMJERA .....	82
6.8 PRIMJER 6. KLIPNI PRSTENI .....	85
6.9 PRIMJER 7. MASA ZUBNE PASTE.....	90
<b>7. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>94</b>
<b>8. LITERATURA.....</b>	<b>95</b>

## Popis tablica

TABELA 1. PARAMETRI OBLIKA B ZA DISTRIBUCIJSKE MODELE .....	38
TABELA 2. INDEKSI SPOSOBNOSTI PRIMJERA 1. ....	48
TABELA 3. INDEKSI PERFORMANSI PRIMJERA 1. ....	48
TABELA 4. INDEKSI SPOSOBNOSTI PRIMJERA 2. ....	56
TABELA 5. INDEKSI PERFORMANSI PRIMJERA 2. ....	56
TABELA 6. PODACI VAN TOLERANCIJSKOG POLJA ZA PRIMJER 2. ....	57
TABELA 7. INDEKSI PERFORMANSI PRIMJERA 5. ....	78
TABELA 8. PODACI VAN TOLERANCIJSKOG POLJA ZA PRIMJER 5. ....	78
TABELA 9. USPOREDBA REZULTATA PRIMJERA 1,2,3,4 I 5. ....	82
TABELA 10. INDEKSI SPOSOBNOSTI KLIPNIH PRSTENA .....	86
TABELA 11. INDEKSI PERFORMANSI KLIPNIH PRSTENA .....	87

## Popis slika

SLIKA 1. TOLERANCIJSKO POLJE ZAHTJEVA.....	10
SLIKA 2. PRIMJERI RAZLIČITIH INDEKSA SPOSOBNOSTI.....	12
SLIKA 3. NORMALNA RAZDIOBA.....	18
SLIKA 4. PRORAČUN INDEKSA SPOSOBNOSTI ZA KONTINUIRANE PROCESSE .....	26
SLIKA 5. TRANSFORMACIJA PODATAKA .....	31
SLIKA 6. SAVIJENA NORMALNA RAZDIOBA .....	33
SLIKA 7. RAYLEIGHOVA DISTRIBUCIJA .....	36
SLIKA 8. WEIBULLOVA DISTRIBUCIJA .....	37
SLIKA 9. PEARSON-OVE FUNKCIJE .....	39
SLIKA 10. SUSTAV JEDNADŽBI PO JOHNSON – U .....	41
SLIKA 11. JOHNSON-OVE TRANSFORMACIJE TIP SB .....	43
SLIKA 12. HISTOGRAM I PAPIR VJEROJATNOSTI ZA PRIMJER 1. ....	46
SLIKA 13. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 1. ( $T=0$   $\Delta=\pm 3$ ).....	47
SLIKA 14. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 1. ....	49
SLIKA 15. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 1. ( $T=0$ , $\Delta=\pm 2$ ) .....	50
SLIKA 16. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 1. ....	51
SLIKA 17. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 1. ( $T=0$ , $\Delta=\pm 4$ ) .....	51
SLIKA 18. JOHNSON-OVE TRANSFORMACIJE ZA PRIMJER 1. ....	52
SLIKA 19. ANALIZA SPOSOBNOSTI NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 1. ....	53
SLIKA 20. HISTOGRAM I PAPIR VJEROJATNOSTI ZA PRIMJER 1. ....	55
SLIKA 21. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 2. ....	55

SLIKA 22. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 2. ....	57
SLIKA 23. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 2. ....	59
SLIKA 24. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 2. ....	59
SLIKA 25. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 2. ....	61
SLIKA 26. JOHNSON-OVE TRANSFORMACIJE ZA PRIMJER 2. ....	62
SLIKA 27. ANALIZA SPOSOBNOSTI NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 2. ....	63
SLIKA 28. HISTOGRAM PRIMJERA 3. ....	64
SLIKA 29. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 3. ....	65
SLIKA 30. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 3. ....	66
SLIKA 31. ANALIZA SPOSOBNOSTI NENORMALNIH RAZDIOBA JOHNSON-OVIM TRANSFORMACIJAMA ZA PRIMJER 3. (USL=7) .....	67
SLIKA 32. SPOSOBNOST PROCESA LOG-NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 3. ....	68
SLIKA 33. ANALIZA SPOSOBNOSTI LOG-NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 3. ....	69
SLIKA 34. SPOSOBNOST PROCESA LOG-NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 3. ....	70
SLIKA 35. ANALIZA SPOSOBNOSTI LOG-NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 3. (USL=7) .....	70
SLIKA 36. HISTOGRAM I PAPIR VJEROJATNOSTI ZA PRIMJER 4. ....	71
SLIKA 37. SPOSOBNOST PROCESA ZA NENORMALNE RAZDIOBE ZA PRIMJER 4. ....	72
SLIKA 38. ANALIZA SPOSOBNOSTI NENORMALNIH RAZDIOBA JOHNSON-OVIM TRANSFORMACIJAMA (LSL=0, USL=6) ...	73
SLIKA 39. SPOSOBNOST PROCESA LOG-NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 4. ....	74
SLIKA 40. ANALIZA SPOSOBNOSTI LOG-NORMALNIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 4. (USL=6) .....	74
SLIKA 41. HISTOGRAM I PAPIR VJEROJATNOSTI ZA PRIMJER 5. ....	76
SLIKA 42. SPOSOBNOST PROCESA WEIBULL-OVIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 5. ....	77
SLIKA 43. JOHNSON-OVE TRANSFORMACIJE ZA PRIMJER 5. ....	79

SLIKA 44. ANALIZA SPOSOBNOSTI NENORMALNIH RAZDIOBA POMOĆU JOHNSON-OVIH TRANSFORMACIJA ZA PRIMJER 5. (LSL=0,7, USL=1,3) .....	79
SLIKA 45. ANALIZA SPOSOBNOSTI WEIBULL-OVIH RAZDIOBA ZA PRIMJER 5. (LSL=0,7,USL=1,3) .....	80
SLIKA 46. HISTOGRAM I PAPIR VJEROJATNOSTI ZA KLIPNE PRSTENE .....	86
SLIKA 47. SPOSOBNOST PROCESA NORMALNIH RAZDIOBA ZA KLIPNE PRSTENE.....	86
SLIKA 48. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA KLIPNE PRSTENE (T=74, $\Delta=\pm 0,05$ ) .....	87
SLIKA 49. JOHNSON-OVE TRANSFORMACIJE ZA KLIPNE PRSTENE .....	88
SLIKA 50. ANALIZA SPOSOBNOSTI NENORMALNIH RAZDIOBA POMOĆU JOHNSON-OVIH TRANSFORMACIJA ZA KLIPNE PRSTENE(LSL=73,95,USL=74,05) .....	88
SLIKA 51. HISTOGRAM ZA MASU ZUBNE PASTE .....	90
SLIKA 52. PAPIR VJEROJATNOSTI ZA MASU ZUBNE PASTE .....	91
SLIKA 53. JOHNSON-OVE TRANSFORMACIJE ZA MASU ZUBNE PASTE.....	92
SLIKA 54. ANALIZA SPOSOBNOSTI NENORMALNIH RAZDIOBA POMOĆU JOHNSON-OVIH TRANSFORMACIJA ZA MASU ZUBNE PASTE(LSL=114,9,USL=115,1) .....	92
SLIKA 55. SPOSOBNOST PROCESA NENORMALNIH RAZDIOBA ZA MASU ZUBNE PASTE (T=115, $\Delta=\pm 0,1$ ) .....	93

## Uvod

Aplikacija pojedinih statističkih metoda i procjena rezultata ovisi o fazi u kojoj se nalazi promatrani proces, stroj, proizvodna linija i slično. Važno je razlikovati fazu nabave novoga stroja ili planiranja početka rada proizvodnog procesa od faze u kojoj stroj ili čitavi sustav već izrađuju velike serije.

Prije puštanja u rad stroja, sustava ili procesa izrađuju se studije o njegovoj sposobnosti i kriterijima prihvatljivosti, na temelju kojih se kasnije uspoređuju rezultati i donose odluke.

Nakon što se proglasila sposobnost, moguće je započeti s radom. No, tek tada počinje ona glavna analiza. Nužno je pratiti sve što se događa te bilježiti i najmanje fluktuacije u rezultatima, kako bi se na vrijeme moglo donositi odluke, provoditi korekcije i kontinuirano poboljšavati postojeće stanje.

S razvojem novih tehnologija, metodologija i opće informatizacije, statistička kontrola postala je primjenjivija i bliža korisnicima. Djelomice i iz tog razloga, povišuju se standardi prihvatljivosti i postrožuju mjere.

Prioritet koji se nameće pri korištenju statističke kontrole procesa jest praćenje i procjena zadanog procesa. Potpora kontinuiranom poboljšavanju su odgovarajuće kontrolne karte, histogrami, papiri vjerojatnosti, dijagrami, ali i indeksi sposobnosti, koji su okosnica ovog diplomskog rada. Na taj se način akumulira stečeno znanje, osiguravaju željeni nivoi kvalitete te odvijaju stalna poboljšanja.

# 1. Sposobnost procesa

Analiza sposobnosti procesa, uz statističku kontrolu i planiranje pokusa, statističke su metode, kojima se već godinama pokušava smanjiti varijabilnost proizvodnih procesa i njihovih konačnih proizvoda.

Potreba za što uspješnijom kontrolom procesa postaje neizbježna zbog neprestanog rasta kompleksnosti tehničkih sustava u industriji te okrutnog tržišta koje ju okružuje. U skladu s time, raste i uporaba statističkih metoda i to pogotovo zbog razvoja novih koncepata upravljanja kvalitetom, kao što je primjerice Six Sigma program. U tim novim metodama i konceptima upravljanja, ne samo kvalitetom, već i poduzećem u cjelini, osjeća se snažan utjecaj japanskog načina razmišljanja te se baziraju na statističkim alatima poput analize sposobnosti procesa.

Zadaća ove analize jest procjena sposobnosti proizvodnog procesa, gdje se informacije o samom procesu koriste za poboljšavanje njegove sposobnosti. Svaki izračun sposobnosti procesa baziran je na srednjoj vrijednosti uzorka, standardnoj devijaciji uzorka te poznatim karakteristikama distribucije.

Cilj izračuna sposobnosti procesa jest dobiti informaciju o očekivanim defektima koje proizlaze iz konkretnog poslovanja ili proizvodnje. U tu se svrhu koristi slučajno odabrani uzorak iz poslovnog procesa i računa se traženi broj defekata. Veličina te greške izražava se terminom DPMO – defects per million opportunities ili broj nedostataka na milijun uzoraka. Pomoću analize sposobnosti moguće je odrediti koliko će dobro proces pratiti zadane zahtjeve i specifikacije.

Ona uspoređuje rasipanje procesa sa širinom zadanog tolerancijskog intervala, uzimajući u obzir i položaj procesa. Njome se procjenjuje i smještaj prosjeka u odnosu na centar tolerancijskog polja, stoga sposobnost procesa ovisi o lokaciji i o rasipanju. No, prije same procijene, važno je osigurati

ponovljivost i stabilnosti promatranog procesa.



## 1.1 Kontrolne karte

Stabilnost procesa provjerava se statističkom kontrolom, točnije kontrolnim kartama. Cilj statističke kontrole je otkrivanje i eliminacija prepoznatljivih uzroka varijacija, a njima se prate varijacije procesa u vremenu.

Nastale su u dvadesetim godinama 20. stoljeća i to u laboratorijima Bell – ove kompanije. Autor i glavni istraživač jest dr. Walter A. Shewhart.

Kontrolne karte dijele se u dvije temeljne skupine:

1. Kontrolne karte za mjerljive karakteristike
2. Kontrolne karte za atributivne karakteristike

Tehnika kontrolnih karata sastoji se od uzimanja većeg broja manjih uzoraka i to kroz slučajne obilaske. Kontrolnim kartama prate se varijacije procesa u vremenu, zato je važno za uzorke uzimati zadnje proizvedene jedinice. Iz postojećih uzoraka, računa se tada odgovarajući statistički parametar, ovisno o tome koja se karta primjenjuje.

Na svakoj kontrolnoj karti potrebno je odrediti kontrolne granice te središnju liniju. Postoje donja kontrolna granica – DKG (eng. Lower control limit, LCL) i gornja kontrolna granica – GKG (eng. Upper control limit, UCL). Granice se računaju obzirom na granice rasipanja promatranog statističkog parametra ( $\pm 3\sigma$ ) i to onog čija se karta koristi.

Kada nema podataka izvan tako postavljenih kontrolnih granica, za promatrani proces koristi se termin „proces je pod kontrolom“ ili „stabilan proces“.

Ovaj termin pokazuje da proces varira isključivo pod utjecajem nekih poznatih i očekivanih uzroka te se redovito kaže da je proces zbog toga stabilan.

## 1.2 Kontrolne karte za mjerljive karakteristike

Baziraju se na normalnoj razdiobi te postoje dvije osnovne.

### 1.2.1 $\bar{x} - R$ karta

Zasniva se na procjeni dva parametra, a to su aritmetička sredina uzorka  $\bar{x}$  i raspon uzorka  $R$ . Prvi podatak daje uvid u centriranost procesa, dok drugi govori o njegovom rasipanju.

Određuju li se kontrolne granice u kojim se kreće aritmetička sredina procesa, formula glasi :

$$GKG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm A_2 \bar{R} \quad (1)$$

gdje je :

$$A_2 = 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}, \quad \bar{R} = \frac{\sum R_i}{k},$$

gdje su :

$n$  – veličina uzorka

$k$  – broj obilazaka kontrolora, broj uzetih uzoraka

$d_2$  – tablični koeficijent

Formula za određivanje granica kod procesa u kojima se kreće raspon izgleda ovako :

$$GKG_R = D_4 \bar{R} \quad ; \quad DKG_R = D_3 \bar{R}$$

gdje su :

$D_3, D_4$  - tablični koeficijenti

### 1.2.2 $\bar{x}$ – s karta

U ovoj karti prati se rasipanje preko kretanja standardnog odstupanja. Preporuča se da uzorci za ovu kartu budu veći od 25.

Formula za kretanje aritmetičke sredine izgleda ovako :

$$\frac{GKG_{\bar{x}}}{D} = \bar{x} \pm A_1 \bar{s} \quad (2)$$

gdje je :

$$A_1 = \frac{3}{c_2 \sqrt{n}}, \text{ a } \bar{s} = \frac{\sum s_i}{k},$$

gdje je  $c_2$  - ponovno tablični koeficijent

Naravno, i u ovoj karti moguće je pratiti kretanje drugog parametra, što je u ovom slučaju standardno odstupanje.

$$GKG_s = B_4 \bar{s} \text{ i } DKG_s = B_3 \bar{s}$$

gdje su :

$B_3, B_4$  - tablični koeficijenti

### **1.3 Tehnike analize sposobnosti**

Nakon što je određena stabilnost procesa, koriste se različite tehnike analize sposobnosti. Tako se nudi mogućnost crtanja histograma iz podataka o srednjoj vrijednosti i standardnom odstupanju. Iz njega se dobivaju informacije o učinkovitosti procesa, a iz njegova izgleda podaci o distribuciji promatrane karakteristike.

Druga vrlo jednostavna tehnika je određivanje oblika, centriranosti i protezanja procesa i to pomoću papira vjerojatnosti. No, ako se papir vjerojatnosti iskoristi za prikazivanje distribucije procesa koja nije „normalna“, često se donose krivi zaključci i upravo to je okosnica ovog diplomskog rada.

Treći i najčešći način procjene sposobnosti jest određivanje takozvanih indeksa sposobnosti, koji su tema slijedećeg poglavlja.

Iz svega navedenog moguće je zaključiti da je procjena sposobnosti procesa vrlo važan moment u današnjoj kontroli kvalitete i stoga je potrebno uložiti mnogo truda u njeno bolje razumijevanje.

## 2. Indeksi sposobnosti

Analiza sposobnosti procesa u najvećem broju slučajeva zapravo je proračun indeksa sposobnosti. Kada je željni proces doveden pod kontrolu, indeksi se računaju kako bi se pomoću njih mjerila kvaliteta proizvedenih dobara. Mjerenje kvalitete je procjena koliko dobro proizvodi upadaju unutar zadanog tolerancijskog polja.

Indeksi sposobnosti su mjera kojom se kvantificira odnos između stvarne izvedbe procesa i zadanih zahtjeva. Točnije, indeksom sposobnosti opisuje se stvarna sposobnost procesa da generira točno određenu karakteristiku dosljedno unutar specifikacija. Općenito se može reći da što je viša vrijednost indeksa, manji je broj proizvoda izvan specifikacijskih granica. Na temelju toga moguće je donijeti zaključak o nedovoljnom broju proizvoda koji zadovoljavaju zahtjeve pa su potrebna dodatna poboljšanja.

U moru različitih definicija, tvrtka Ford pronašla je svoje tumačenje indeksa sposobnosti procesa i to na način da uvažava vrijeme odvijanja samog procesa. Tako postoji određivanje sposobnosti procesa u :

- a) duljem vremenskom razdoblju (eng. *Long-Term Process Capability*)
- b) preliminarna sposobnost procesa (eng. *Preliminary Process Capability*)
- c) kratkom vremenskom razdoblju (eng. *Short-Term Capability*)

## 2.1 Cp

Najčešće korišteni indeks jest onaj za izračun potencijalne sposobnosti  $C_p$ . Uveden je 1974. godine, kao rezultat Juranovih istraživanja i on pretpostavlja stabilnost te normalnu razdiobu procesa. Njime se opisuje dozvoljeno protezanje tolerancijskog polja u odnosu na stvarno rasipanje podataka. Formula kojom se računa potencijalna sposobnost glasi ovako :

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (3)$$

gdje su :

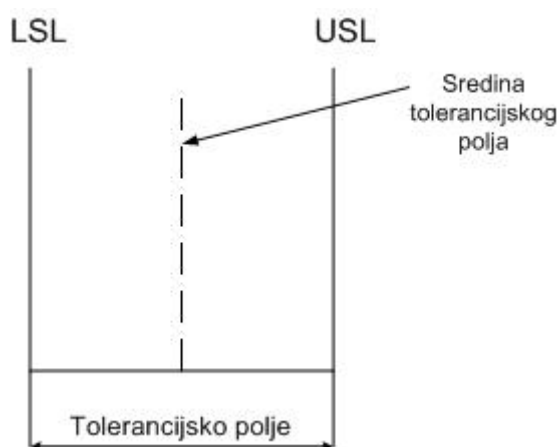
$USL$  – gornja granica zahtjeva

$LSL$  – donja granica zahtjeva

$6\sigma$  – raspon promatranog procesa

Gornja i donja granica zahtjeva čine tolerancijsko polje odnosno raspon zahtjeva, prikazano na slici 1.

Tolerancijsko polje =  $USL - LSL$



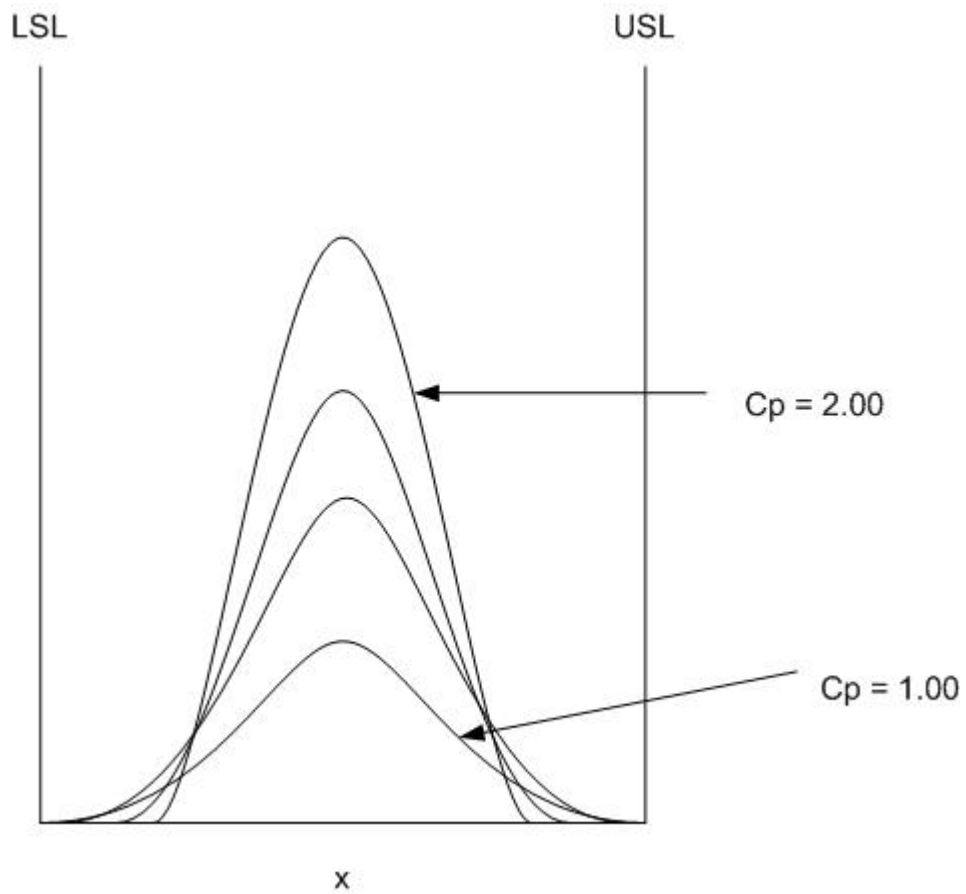
Slika 1. Tolerancijsko polje zahtjeva

Raspon procesa podrazumijeva područje unutar  $\pm 3$  standardna odstupanja, ( $6\sigma$ ) u odnosu na sredinu procesa. To predstavlja točno 99,73% površine ispod krivulje normalne razdiobe, kojom se aproksimira proces. Temeljni uvjet sposobnosti procesa je:

$$\textit{Tolerancijsko polje} \geq 6\sigma$$

Teži se iznosu indeksa  $C_p$  većem ili jednakom od 1, čime se implicira da je broj uzoraka van granica specifikacije vrlo malen. Odnosno, čim je vrijednost indeksa veća, rasipanje procesa je manje. Danas se u razvijenim zemljama zahtjeva da najmanja vrijednost indeksa iznosi 1,33. Taj zahtjev neke kompanije podižu na 1,67 ili čak na više od 2. Na slici 2. lako je uočiti razliku između pojedinih iznosa.





Slika 2. Primjeri različitih indeksa sposobnosti

## 2.2 Cpk

Sljedeći indeks predstavio je Kane 1986. godine i naziva se demonstrirana izvrsnost  $C_{pk}$ . Njome se mjeri udaljenost očekivane vrijednosti i najbliže granice zahtjeva, bilo gornje bilo donje, a u obzir se uzima samo polovica rasipanja procesa, što iznosi  $3\sigma$ . Ovim indeksom moguće je ustvrditi položaj procesa u odnosu na granice zahtjeva, točnije njegovu centriranost. Prihvatljivi iznosi  $C_{pk}$  su viši od 1, a u današnjim sve zahtjevnijim poduzećima, ne pristaje se na ništa manje od 1,5. Formula je sljedeća :

$$C_{pk} = \min \left[ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right] \quad (4)$$

gdje je :

$\mu$  – očekivana vrijednost

Veza između dva navedena indeksa glasi :

$$C_{pk} = C_p(1 - k) \quad (5)$$

U navedenoj formuli pojavljuje se faktor  $k$ , kojim se kvantificira količina procesa koja odmiče od centra. Njegov iznos je uvijek negdje između 0 i 1, a jednažba za izračun izgleda ovako :

$$k = \frac{|m - \mu|}{\frac{USL - LSL}{2}} \quad (6)$$

gdje je :

$m$  – sredina specifikacijskog raspona, to jest  $m = \frac{USL + LSL}{2}$ .

Korekcijskim faktorom izražava se necentriranost u usporedbi sa tolerancijskim područjem. Ako je proces idealno centriran  $k$  će iznositi 0, a

$C_p$  i  $C_{p,k}$  će biti jednaki. Udaljavanjem procesa od ciljanih zahtjeva,  $k$  će se povećavati.

## 2.3 Modifikacije osnovnih indeksa

Prateći trendove novih modernih teorija kvalitete, važno je koristiti podatak o željenoj vrijednosti i održati proces u skladu s njom. Mnogi su autori prepoznali da se aritmetička sredina procesa može razlikovati od ciljane vrijednosti  $T$ . Tako postoji mogućnost korištenja indeksa koji će prepoznati da je proces nesposoban, ako je njegova aritmetička sredina daleko od ciljane vrijednosti. Do sada spomenuti indeksi nemaju tu mogućnost.

Taguchi je ponudio indeks, koji su kasnije 1988. godine Chen i njegovi suradnici prozvali indeksom sposobnosti  $C_{pm}$ . On se razlikuje od dva glavna, po tome što se u njega ukalkulirana ciljana vrijednost. Njime se može mjeriti centriranost procesa, a formula glasi:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{(\mu - T)^2 + \sigma^2}} \quad (7)$$

gdje je :

$T$  – ciljana vrijednost

Veza između ovog modificiranog indeksa i Taguchijeva doprinosa kontroli kvalitete je očita. Kroz funkciju gubitka, želio je upozoriti na gubitke koji nastaju za kupca, ali i za društvo u cjelini. Ti troškovi nastaju u slučaju da određeni proizvod ne postigne točno određenu ciljanu vrijednost. Iz tog je razloga želio  $C_{pm}$  indeksom ukazati kako je ipak važnije pridržavati se ciljanih vrijednosti, a ne toliko specifikacijskih granica.

Kako bi se održao indeks koji bolje prikazuje udaljavanje srednje vrijednosti procesa od cilja, 1992. Pearn, Kotz i Johnson predstavili su  $C_{pmk}$  :

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{(\mu - T)^2 + \sigma^2}} \quad (8)$$

Četiri navedena indeksa vrlo se često nazivaju i osnovnim indeksima sposobnosti.

### 3. Normalna razdioba

#### 3.1 Karakteristike normalne razdiobe

Normalna distribucija, poznata kao i Gaussova distribucija, važan je dio kontinuiranih distribucija vjerojatnosti, a koristi se u mnogim znanstvenim disciplinama. Naziva se još i zvonolikom krivuljom (eng. bell curve), iz razloga što njen grafikon funkcije gustoće vjerojatnosti podsjeća na zvono.

Po prvi je puta predstavljena 1733. godine, u članku autora Abrahama de Moivre - a. Pet godina kasnije, isti je autor u svojoj knjizi „Doctrine of Chances“, koristio ovu razdiobu kako bi aproksimirao binomne distribucije za velike uzorke. Vršeci različite pokuse, znanstvenici tog doba žustro su se raspravljali tko je prvi doista počeo koristiti ovu distribuciju. Najuporniji u tome bio je Carl Friedrich Gauss. U svojim je istraživanjima primijetio da aritmetička sredina uzastopnih mjerenja ima zvonoliku distribuciju te da što je veći uzorak mjerenja, varijacije u distribuciji se smanjuju. Do tada poznata kao Gaussova razdioba, 1875. godine, tri međusobno neovisna znanstvenika, Peirce, Galton i Lexis, nadjenuli su joj ime normalna.

Najlakši način prikazivanja normalne razdiobe je pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti. Krivulju prikazuje slika 3., a funkcija gustoće vjerojatnosti koja definira normalnu razdiobu glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

gdje je :

$\sigma$  – standardna devijacija

$\sigma^2$  – varijanca

$\mu$  – aritmetička sredina, očekivanje

Iz navedene formule moguće je zaključiti kako definicija normalne razdiobe ovisi samo o  $\sigma^2$  i  $\mu$  ili matematički točnije zapisano  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Varijanca osnovnog skupa definira se na slijedeći način :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (10)$$

gdje je :

$N$  – ukupan broj podataka

$x_i$  - slučajna varijabla

U stvarnoj primjeni, nelogično bi bilo raditi sa cijelim skupom podataka, stoga se koriste uzorci. Varijanca uzorka izgleda ovako :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (11)$$

gdje je :

$n$  – broj uzoraka, u mjeriteljstvu broj ponovljenih mjerenja

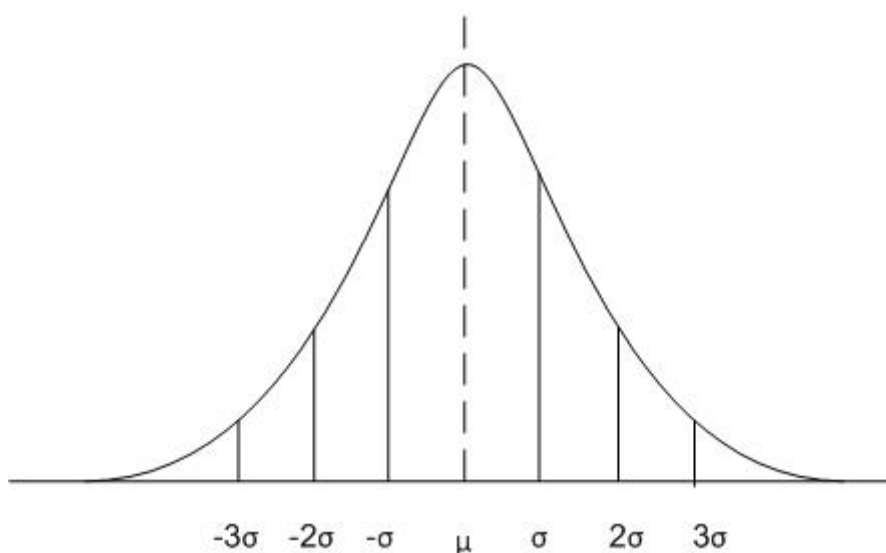
$x_i$  - slučajna varijabla, neki  $i$ -ti rezultat mjerenja

$\bar{x}$  - aritmetička sredina uzorka

Standardno odstupanje se logično dobiva vađenjem drugoga korijena iz navedene jednadžbe za izračun varijance.

Na slici 3. su označeni intervali standardnog odstupanja. U intervalu  $\pm 1\sigma$ , površina ispod krivulje iznosi 68,27 %, kod  $\pm 2\sigma$ , 95,45%, dok je kod  $\pm 3\sigma$  čak 99,73 %. Postotak koji se nalazi ispod krivulje u intervalu  $\pm 6\sigma$  jest gotovo 99,99%, što se može zaokružiti na 100% ili čak reći da je površina ispod krivulje normalne razdiobe jednaka 1.

Vrh krivulje leži na samoj aritmetičkoj sredini  $\mu$ . Krivulja je simetrična s obje strane, a krajevi padaju u zvonolik oblik i asimptotski se približavaju x osi. To znači da ju dodiruju u beskonačnosti. Normalna krivulja ima dvije točke infleksije, čija se udaljenost od aritmetičke sredine naziva standardnom devijacijom  $\sigma$ . Stoga je međusobna udaljenost ovih točaka  $2\sigma$ . Za manje iznose standardne devijacije krivulja je strmija od primjerice krivulja sa većim iznosom odstupanja. Moguće je donijeti zaključak da se širina distribucije povećava kako se povećava i vrijednost  $\sigma$ .



Slika 3. Normalna razdioba

Rasipanje procesa koje se koristi pri izračunu indeksa sposobnosti, definira se kao širina centralnog intervala, koji ograđuje 99,73 % ukupne populacije podataka. U slučaju normalne razdiobe, širina tog intervala lako se izražava pomoću standardne devijacije. Iz razloga što 99,73 % normalno distribuiranih uzoraka oko srednje vrijednosti, upada u interval od  $\pm 3\sigma$ , uzima se da je rasipanje procesa točno  $6\sigma$ .

Iz svega navedenog, lako je doći do zaključka zašto se sve analize sposobnosti tako jako vežu za normalnu razdiobu. To znači, da ako se promatrani proces može opisati dotičnim distribucijskim modelom, proračun indeksa sposobnosti iznimno je jasan i ,što je važnije, dobivene indekse moguće je međusobno uspoređivati i donositi logične zaključke. Dakle, ukoliko ne postoji distribucijski model kojim bi se bolje opisao proces, proračun indeksi sposobnosti trebalo bi se bazirati na normalnoj distribuciji



## 3.2 Zablude pri korištenju normalne razdiobe

Procjena sposobnosti procesa tradicionalno se bazira na pretpostavci kako su podaci uvijek normalno razdijeljeni. Takove pretpostavke vode ka pogrešnim procjenama, a one pak donošenju krivih odluka. Ako je podatke nemoguće prikazati normalnom razdiobom, metode procjene sposobnosti će nesposoban proces prikazati kao sposoban i obrnuto.

Glavna pretpostavka u kojoj se mnogo griješi jest ona, da je svijet oko nas moguće objasniti normalnom razdiobom. Većina prirodnih pojava prati upravo neke nenormalne obrasce. U te prirodne pojave moguće je smjestiti i samo ljudsko ponašanje. Čovjek se nerijetko ponaša potpuno nasumično, stoga je njegovo ponašanje nelogično prikazivati normalnom razdiobom.

Normalna razdioba podataka vrlo je često potpuno neshvaćeni koncept koji se koristi i popularizira kroz metodologiju Six Sigme. Većina korisnika vjeruje kako svi prikupljeni i analizirani podaci moraju biti normalno distribuirani. No, istina je potpuno drugačija. Normalna se distribucija ne događa tako često kako se vjeruje i njeno postizanje nije glavni cilj istraživanja. Ona je samo sredstvo pomoću kojeg se dolazi do određenih zaključaka, a nikako kraj analiza i istraživanja.

Podaci distribuirani normalno, služe pri korištenju niza statističkih alata poput kontrolnih karata, analize sposobnosti, t – testova i analize varijance (ANOVA). Distribucija podataka ne predstavlja problem u onim slučajevima kada se ne koriste ovakve specifične analize. Problem nastaje u trenutku kada je za istraživanje potrebno imati normalno raspodijeljene podatke, a oni to nisu. Procesi koji svojim histogramom prikazuju da su ukošeni ili drugim riječima nenormalni, proglašavaju se defektnima.

Upravo zato nastaju mnoge pogreške, iz razloga što se većina praktičara ne želi opterećivati izborom distribucijskog modela te zbog pojednostavljenja svaki proces proglašava normalnim.

### **3.3 Procjena sposobnosti procesa normalno distribuiranih podataka**

Kao što je već ranije naglašeno, sposobnost procesa procjenjuje se računanjem indeksa sposobnosti. Računanje i pravilna interpretacija spomenutih indeksa temelji se na sljedećim pretpostavkama:

1. Raspodjelu podataka nastalih iz promatranog procesa, moguće je aproksimirati normalnom razdiobom
2. Promatrani proces mora biti stabilan, odnosno „pod kontrolom“

Spomenute je zahtjeve moguće doseći tek nakon što se nad procesom primjeni odgovarajuća kontrolna karta te se on nađe u stanju statističke kontrole.

## 4. Nenormalni podaci

### 4.1 Značajke i razlozi nepodvrgavanja normalnosti

Ne razumijevanje nenormalnosti najčešće komplicira vrlo jednostavne situacije, povećava broj loših proizvoda, smanjuje detekciju posebnih slučajeva i na koncu vodi ka donošenju krivih odluka i propuštanju vrlo unosnih šansi. Sve to rezultira gubljenjem vjere u analizu sposobnosti procesa, što pak narušava odnose između proizvođača i njegova kupca.

Na pitanje što učiniti sa podacima koji ne slijede normalnu razdiobu, dva su odgovora. Najvažnije je identificirati i riješiti uzorke nenormalnosti ili pak koristiti alate kojima nenormalni podaci ne predstavljaju problem.

Točno definiranje razloga i izvora nenormalnosti potrebno je kako bi se na vrijeme mogle poduzeti određene aktivnosti za korekciju, ako je to moguće.

U literaturi su navedena šest razloga kao izvori nepodvrgavanja podataka normalnoj razdiobi.

#### 1. Ekstremne vrijednosti

Postoji li mnogo ekstremnih vrijednosti unutar skupa podataka, rezultat će biti neka ukošena ili strma distribucija. Normalnost se u tom slučaju postiže takozvanim čišćenjem podataka. To uključuje određivanje mjernih pogreški, pogreški nastalih tijekom samog mjerenja te onih nastali zbog nepodobne mjerne okoline. Ključ je u njihovom otklanjanju iz skupa zbog valjanih razloga. Ti valjali razlozi moraju se objasniti kao stvarno posebni slučajevi. Ne smije se smetnuti s uma, kako normalna razdioba dozvoljava mali postotak ekstremnih vrijednosti te da svaki ekstrem nije poseban slučaj. Ukloniti ih treba samo kada ih mnogo više od očekivanog.

## 2. Preklapanje dva ili više procesa

Moguće je da se podaci ne podvrgavaju normalnoj razdiobi zato što dolazi iz više procesa, operatera ili smjena ili čak iz procesa koji se konstantno mijenja. Preklope li se dva skupa, koja svaki zasebno slijede normalnu razdiobu, podaci mogu izgledati bimodalno, točnije rezultat su dvije ili više najfrekventnije vrijednosti. Popravak je moguć utvrđivanjem tih  $x - eva$  koji uzrokuju bimodalnost i raslojavanjem podataka. Nakon toga ponovno se vrši test normalnosti i tako raslojeni procesi spremni su za daljnje analize.

## 3. Diskriminacija zbog neodgovarajućih podataka

Konstantno ponavljanje pogrešaka pri mjerenju i mjerni uređaji sa slabom rezolucijom, mogu kontinuirane i normalno raspodijeljene podatke prikazati kao diskretne i nenormalne. Diskriminacija podataka zbog toga što se nedovoljno razlikuju ili što ih je premalo za analizu, moguće je riješiti korištenjem točnijih mjernih sustava te prikupljanjem većeg broja podataka mjerenja.

## 4. Sortiranje podataka

Prikupljeni podaci možda nisu normalno distribuirani zato što predstavljaju podskup cijelog izlaznog skupa podataka o procesu. Ova je situacija moguća ako se podaci skupljaju i analiziraju nakon sortiranja ili ako se određeni broj podataka, koji ne ulaze u tolerancijsko polje, eliminiraju iz daljnjih analiza. Važno je pripaziti koji podaci se uzimaju u istraživanje i pripaziti na njihovo grupiranje.

## 5. Vrijednosti blizu nule ili prirodne granice

Ima li proces mnogo vrijednosti koje se priklanjaju nuli ili nekoj drugoj prirodnoj granici, cijela će distribucija biti ukošena u lijevu ili desnu stranu. Rješenje ovoga slučaja je u transformaciji, kao što je primjerice Box-Cox transformacija. Bit je u prikupljanju svih podataka, koji se tada transformiraju do eksponenta određenog vrijednošću Lambda. Pri usporedbi transformiranih podataka, sve s čime se uspoređuje potrebno je transformirati na isti način. Važno je ne smetnuti s uma da niti jedna transformacija ne garantira normalne podatke, zato je nakon transformacije važno primijeniti testove normalnosti. Ova će metodologija biti pobliže objašnjena u narednim poglavljima.

## 6. Podaci slijede neku drugu poznatu distribuciju

Mnogi tipovi podataka po svojoj prirodi ne slijede normalnu razdiobu. To su :

- a) Weibullova distribucija – primjenjuje se primjerice kod vremena trajanja proizvoda
- b) Log-normalna distribucija – visine i podaci povezani sa duljinom
- c) Distribucija najekstremnije vrijednosti – primjer su podaci o najduljem zastoju tokom dana
- d) Eksponencijalna distribucija – povezana je sa funkcijom rasta, kao što je na primjer rast i množenje bakterija
- e) Poissonova distribucija – koristi se kod određivanja rijetkih događaja poput broja nesreća
- f) Binomna razdioba – povezuje se sa podacima proporcije, kao što je i postotak defekata

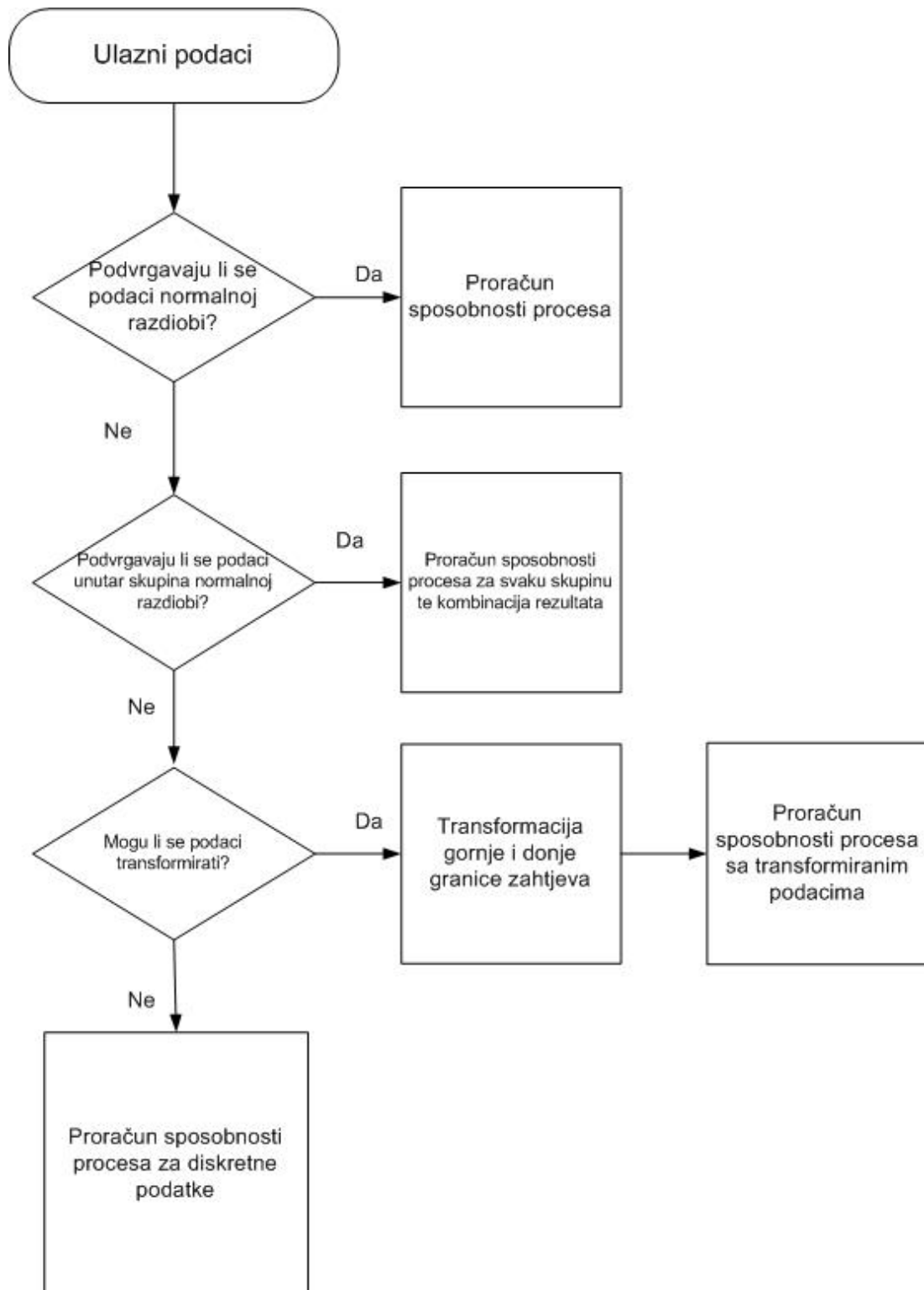
## 4.2 Rješenja za rad sa nenormalnim podacima

U situacijama u kojima je potreban distribucijski model, a Gaussov je očigledno pogrešan, postoji nekoliko solucija. Prva opcija je koristiti neki alat baziran na normalnoj razdiobi na podacima koji ju ne slijede. Tu nastaje problem, jer teško je znati kolike su pogreške nastale i kako će se one reflektirati na krajnji rezultat.

Druga solucija je korištenje alata za koje nisu potrebni određeni parametri distribucije. Treće rješenje je već spomenuta transformacija podataka pomoću Box-Cox i Johnsonovih familija transformacije te njihovo daljnje korištenje u alatima baziranim na normalnoj razdiobi. Transformacija je danas izrazito dostupna jer je ugrađena u skoro sve statističke programe.

Zadnja solucija jest korištenje poznatog distribucijskog modela za koji je poznata i metoda određivanja sposobnosti. Tako, primjerice, za podatke koji se podvrgavaju Poissonovoj ili Binomnoj razdiobi, uobičajeno je koristiti np i c karte za procjenu sposobnosti procesa.

Na slici 4. prikazani su detaljni koraci i sumirana sva navedena teorija oko rada sa nenormalnim podacima.



Slika 4. Proračun indeksa sposobnosti za kontinuirane procese

### 4.3 Procesi sa jednom granicom zahtjeva

Iz teorije o analizi sposobnosti procesa, moguće je vidjeti kako se ona najčešće bavi slučajevima u kojima postoje dvije granice zahtjeva. No, vrlo čest slučaj u industriji su procesi koji su jednostrani, točnije imaju samo jednu granicu ili ciljanu vrijednost te ne postoji tolerancijski interval. Primjer je proces čija je najmanja vrijednost promatrane karakteristike 0 i postoji samo gornja granica zahtjeva. Nerijetko, nula je i najbolja vrijednost za proces, kao što je to u slučaju udjela nečistoća u nekom materijalu ili nešto slično.

Ovakvi su se problemi vrlo često rješavali korištenjem dvostranih intervala, gdje je donja granica zahtjeva bila 0. Iz toga je vidljivo da su vrijednosti promatrane karakteristike izrazito malene jer su blizu 0, što će indicirati kako su indeksi sposobnosti također malene vrijednosti. Na taj će se način sposoban proces, proglašiti nesposobnim.

Rješenje bi bilo pronaći strmu distribuciju, sa dugim repom u smjeru većih vrijednosti. Pogreške će nastati, ako se za takvu strmu distribuciju, koja je uz to nagnuta na jednu od strana, koriste alati koji pretpostavljaju normalnu razdiobu. Ni na koji način neće biti moguće odrediti pogrešku koja se unijela u analizu, ali i svaka odluka povezana sa performansama procesa biti će upitna.

Analiza sposobnosti za karakteristike koje su strme, naklonjene na jednu stranu ili pak imaju svoju ciljanu vrijednost u nuli, nije jednostavna. Do sada nije pronađen niti jedan indeks sposobnosti kojime bi se rješavali ovi česti slučajevi. U narednim poglavljima biti će više govora o ovome problemu.



## 5. Proračun indeksa sposobnosti za nenormalne distribucije

### 5.1 Percentilna metoda

Za početak je važno naglasiti kako ne postoji generalno prihvaćen proračun indeksa za nenormalne distribucije. No, metoda koja je najčešće korištena, bazirana je na želji da se održi, najviše što se može, analogija sa normalnom distribucijom.

U njoj, 99,73 % interval, koji odgovara  $6\sigma$  normalne razdiobe, uspoređuje se sa tolerancijskim intervalom promatrane karakteristike.

Nakon ustanove da odabrani distribucijski model osigurava najbolji opis outputa procesa, definira se interval koji sadrži 99,73 % populacije, što predstavlja rasipanje kao i u slučajevima sa normalnom razdiobom. Granice ovog intervala su 0,135 percentil te 99,865 percentil distribucije. Tako definiran interval baziran na ovim percentilima sadrži 99,73 % ukupne populacije.

To vodi do formule za izračun  $C_p$  indeksa, koja je direktno usporediva sa odgovarajućom formulom za normalnu razdiobu. Ona glasi :

$$C_p = \frac{USL - LSL}{99,865 \text{ percentil} - 0,135 \text{ percentil}} = \frac{USL - LSL}{u_p - l_p} \quad (12)$$

Na osnovi gore ispisane formule, dolazi se i do izraza za  $C_{pk}$  indeks, također usporediva sa izrazima primjenjivim za normalnu razdiobu.

$$C_{up} = \frac{USL - M}{99,865 \text{ percentil} - M} = \frac{USL - M}{u_p - M} \quad (13)$$

$$C_{lp} = \frac{M - LSL}{M - 0,135 \text{ percentil}} = \frac{M - LSL}{M - l_p} \quad (14)$$

gdje je :

$M$  - 50-ti percentil promatrane karakteristike, odnosno medijan

Kao i u indeksima za normalnu distribuciju, manja vrijednost od dvije navedene, koristi se za opis ponašanja procesa i izražava se kao indeks sposobnosti procesa  $C_{pk}$ . Matematički zapisano :

$$C_{pk} = \min\{C_{up}, C_{lp}\} \quad (15)$$

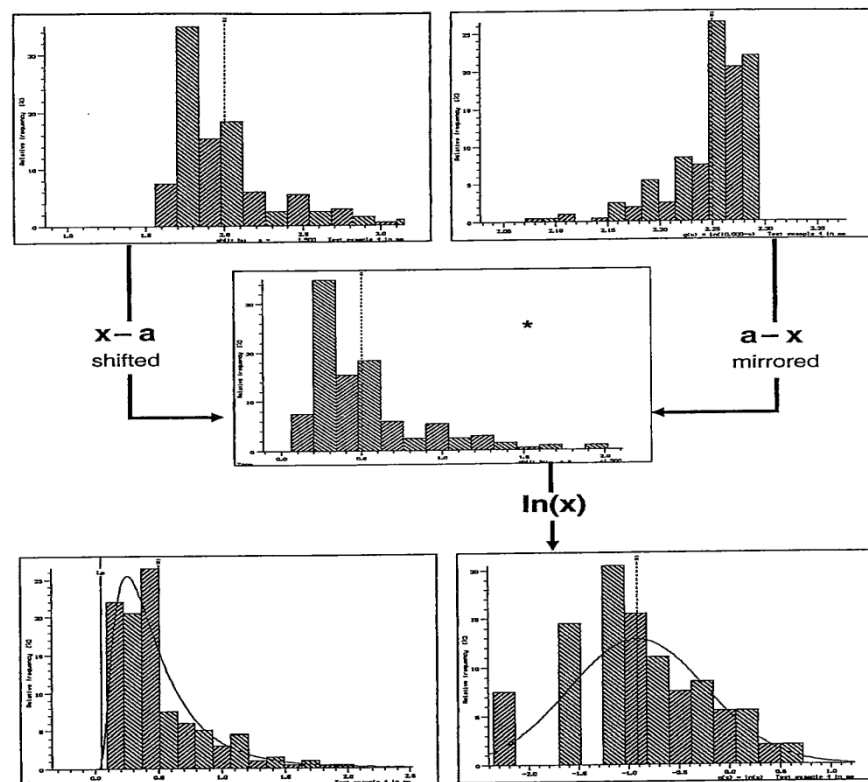
## **5.2 Distribucijski modeli i transformacije**

Za situacije nenormalne razdiobe, preporuča se i korištenje drugih modela, kao što su :

1. Transformacija podatka
2. Poznati distribucijski modeli – Log-normalna distribucija, Weibullova, Rayleigh-ova
3. Pearson-ove funkcije
4. Johnson-ove transformacije

### 5.2.1 Transformacija podataka

Moguće je generirati model uz pomoć transformacija. U tom slučaju, vrijednosti se transformiraju pomoću odgovarajuće funkcije, tako da transformirane vrijednosti odgovaraju poznatim distribucijskim modelima, najčešće normalnoj razdiobi. Uz podatke, potrebno je transformirati i specifikacijske granice. Uobičajene transformacije su one nastale korjenovanjem te logaritamske pomicanjem ( $\log(x - a)$ ) i/ili refleksijom ( $\log(a - x)$ ). Detaljni proces transformacije prikazuje slika 5.



Slika 5. Transformacija podataka

Ovaj je postupak prihvatljiv jedino za procjenu podržanu računalom, budući da isprobavanje različitih varijacija transformacija troši mnogo vremena. Stoga se danas u informatizirano doba, čini razumnijim koristiti već poznate modele distribucija, nego primijeniti transformaciju da dođe do poklapanja.

### 5.2.2 Log-normalna distribucija

Iako je ovaj distribucijski model izgubio na svojem značaju, zbog nepoklapanja sa uobičajenim tehničkim karakteristikama, ali mnogi ju koriste i danas i to zbog jednostavne uporabe za ručne procjene.

Kako se mjerni rezultati mogu premješati gore – dolje i/ili zrcalno reflektirati, log-normalna distribucija se koristi za distribucije ukošene lijevo ili desno. Drugim riječima, ovaj je model moguće primijeniti za opis distribucija sa minimalnom ili maksimalnom granicom. Uobičajeni primjeri korištenja su mjerenja oblika i pozicija, primjerice plosnatosti, ispadanja iz oblina te u nekim slučajevima, debljina prevlaka i tvrdoća.

Utvrđivanje pripadanja podataka ovome modelu, jednostavno je i potrebno ih je nacrtati na papiru vjerojatnosti za log-normalnu distribuciju. Ako se vrijednost na papiru poslažu u ravnu crtu, potvrđen je izbor modela.

Funkcija gustoće vjerojatnosti glasi :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{x-a} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-a)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad (16)$$

gdje je :

$a$  - mjera oblika,  $a < x < \infty$

Iz distribucijskog modela, vidljivo je, da 0,135 % točaka leži iznad i ispod gornjeg i donjeg percentila. To znači da 99,73 % vrijednosti leži unutar intervala koji percentili zaokružuju. Upravo to odgovara intervalu kod normalne razdiobe.

### 5.2.3 Savijena normalna razdioba

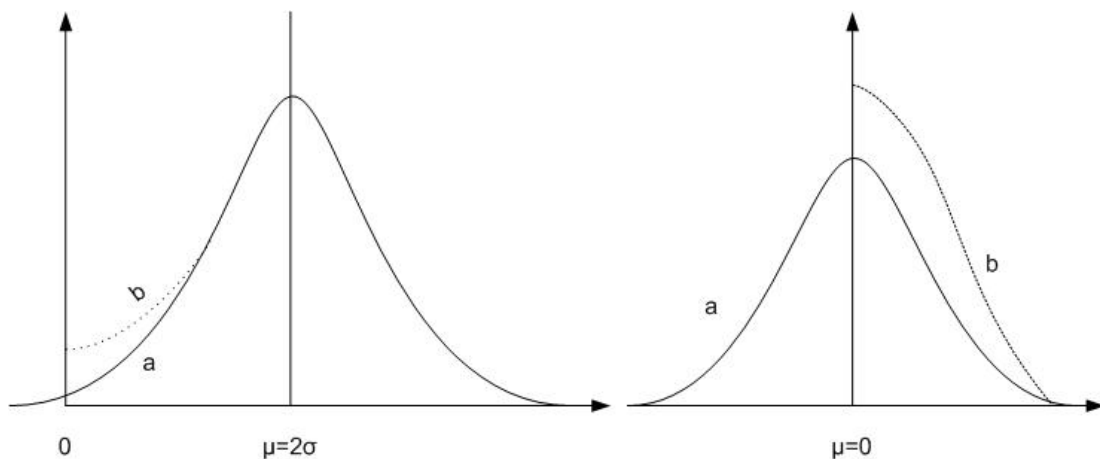
Savijena normalna razdioba je, kako i sam naziv govori, normalna razdioba savinuta u određenoj točki manjoj ili jednakoj  $\mu$ . To savijanje zbraja vrijednosti lijevo od točke savijanja s vrijednostima desno od nje. Oblik distribucijske krivulje mijenja se sa oblika *a*, na oblik *b*.

Slika 6. prikazuje savijanje normalne razdiobe u točki  $\mu=2\sigma$  te njen izgled nakon savijanja, kada je  $\mu=0$ .

Funkcija gustoće vjerojatnosti glasi :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{e^{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}} + \frac{1}{e^{\frac{(x+\mu)^2}{\sigma^2}}} \right] \quad (17)$$

za  $x \geq 0$



Slika 6. Savijena normalna razdioba

Papir vjerojatnosti ne formira ravnu crtu, već krivulju. Izgled krivulje ovisan je o poziciji na kojoj se distribucija savija.

Poseban slučaj savijene normalne distribucije javlja se kada je točka savijanja jednaka aritmetičkoj sredini normalne distribucije. Izraz koji se koristi u tim slučajevima jest sljedeći :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad (18)$$

Ovu je distribuciju moguće udaljiti od točke 0, posebnim faktorom  $a$ . To pomicanje najčešće se primjenjuje zbog netočnog kalibriranja mjernog sustava.

### 5.2.4 Rayleigh-eva distribucija

Ova distribucija je dvodimenzionalna te nalazi svoju primjenu u promatranju karakteristika koje imaju dvije komponente. Važno je da obje komponente imaju jednaku disperziju. Dvodimenzionalna distribucija ima sljedeći izraz :

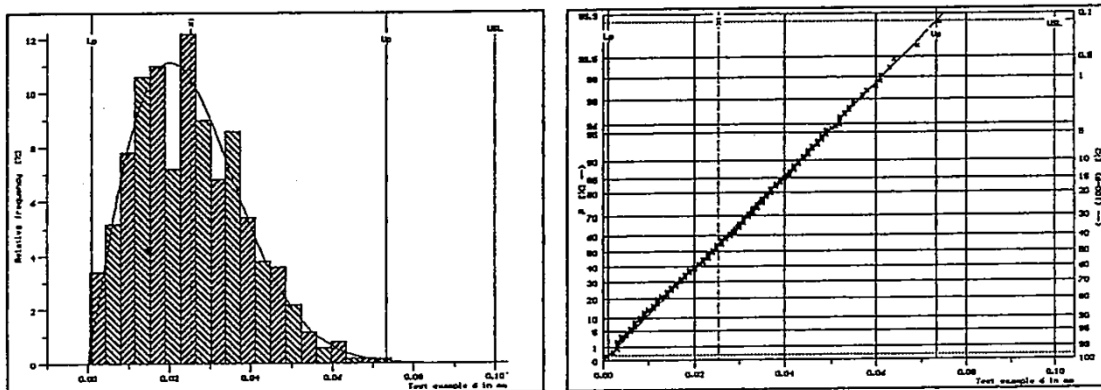
$$f_r = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

gdje je :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Iz izraza je moguće primijetiti kako se koriste polarne koordinate i to zbog rotacijske simetrije ove distribucije.

I ova distribucija može se prikazati histogramom te Rayleigh-ovim papirom vjerojatnosti, čineći travnu liniju. Mogućnost pomicanja distribucije od 0, postoji i u ovom modelu i to za faktor pomaka  $a$ . Taj će se pomak, logično, odraziti na histogram i papir vjerojatnosti. Treća mogućnost koja se nudi u radu s ovim modelom, jest savijanje distribucije u nekoj željenoj točki. Promjene je moguće zamijetiti u oba prikaza, posebice u papiru vjerojatnosti, koji će u ovom slučaju prikazivati krivulju.





Slika 7. Rayleigheva distribucija

### 5.2.5 Weibull – ova distribucija

Weibull – ova distribucija doista je univerzalni model sa širokom lepezom aplikacija i to zahvaljujući matematičkim karakteristikama, kojima se prilagođava svim distribucijskim funkcijama. Glavna uporaba je za procjenu pouzdanosti i probleme u procjeni vijeka trajanja.

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^\beta\right\} \quad (20)$$

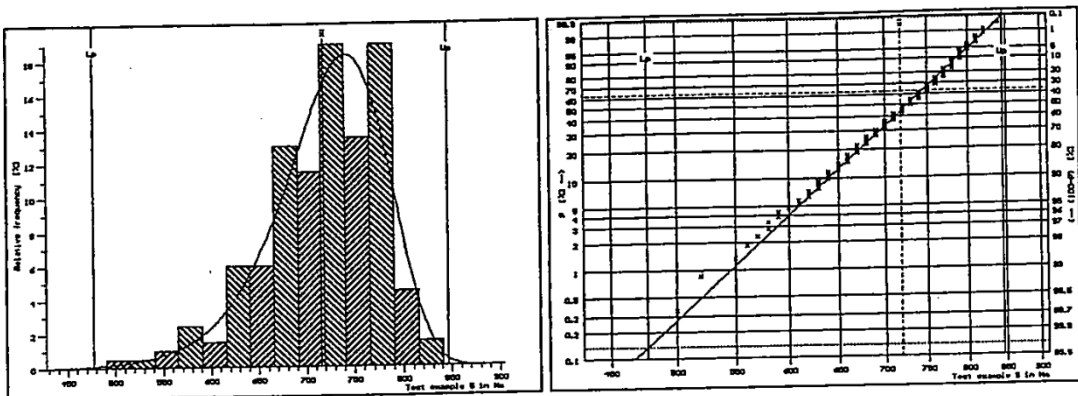
gdje je :

$\alpha$  – parametar veličine

$\beta$  – parametar oblika

$a$  – parametar položaja

Oblik Weibull – ove distribucije tako ovisi o tri parametra;  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $a$ . Na primjeru vijeka trajanja,  $\alpha$  je životni ciklus nekog proizvoda,  $\beta$  nagib koji prikazuje kvarove ili pogreške, a parametar  $a$  je vrijeme bez kvarova ili pogrešaka.



Slika 8. Weibullova distribucija

Do sada navedeni modeli mogu se shvatiti kao posebni slučajevi Weibull – ove distribucije. Značajka koja ih sve razlikuje, jest parametar oblika  $\beta$ .

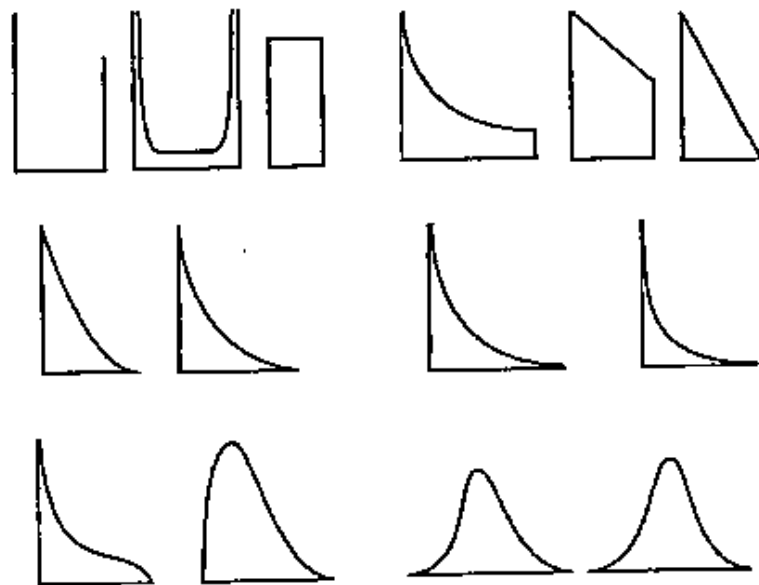
Tabela 1. Parametri oblika  $\beta$  za distribucijske modele

Parametar oblika $\beta$	Distribucijski model
$\beta = 1$	Eksponecijalna distribucija
$1,5 \leq \beta \leq 3$	Lognormalna distribucija
$\beta = 2$	Rayleigh – ova distribucija
$3,1 \leq \beta \leq 3,6$	Lognormalna distribucija
$\beta = 3,6$	Normalna distribucija

### 5.2.6 Pearson – ove funkcije

Pearson – ove funkcije nude dodatne mogućnosti modeliranja distribucija. Funkcije obuhvaćaju familiju od 7 distribucija, sam Karl Pearson ih je naveo čak 12, a prikazane su na slici broj 9. Izbor odgovarajuće distribucije vođen je pomoću dvije statističke veličine, mjera asimetrije i zaobljenosti.

Funkcije je moguće prikazati na papiru vjerojatnosti, kako bi se procijenio model. Budući da ne postoji poseban Pearson – ov papir, prikazuju se papirom vjerojatnosti za normalne razdiobe. Zbog toga njihov će prikaz biti krivulja, a njihove zaobljenosti ovisne o distribuciji.



Slika 9. Pearson-ove funkcije

### 5.2.7 Johnson – ove transformacije

Bazirajući se na mogućnosti transformiranja vrijednosti, američki matematičar Johnson razvio je transformacijski sustav. Pomoću tog sustava moguće je sve važne tipove kontinuiranih distribucija pretvoriti u normalnu. Izbor transformacije bazira se na mjerama asimetrije ( $g_1$ ) i zaobljenosti ( $g_2$ ).

$$g_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad (21)$$

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \quad (22)$$

gdje je :

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k}{n} \quad (23)$$

$g_1$  - mjera asimetrije

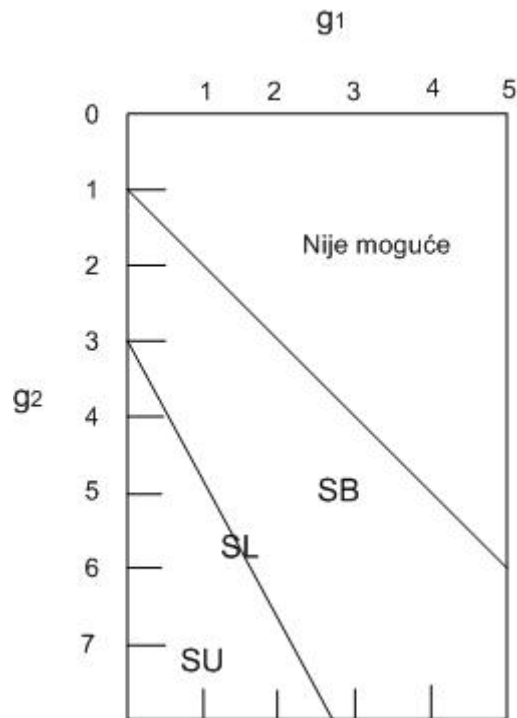
$g_2$  - mjera zaobljenosti

$\mu_3$  - treći moment oko sredine

$\mu_4$  - četvrti moment oko sredine

$\mu_2^2 = \sigma^4$ , standardna devijacija na 4. potenciju ili varijanca na kvadrat

Teoretski gledano, postoji beskonačan broj kombinacija tih dviju vrijednosti. One zauzimaju cijelu ravninu koju Johnson dijeli u tri regije. Tri regije prikazuje slika 10.



Slika 10. Sustav jednađžbi po Johnson – u

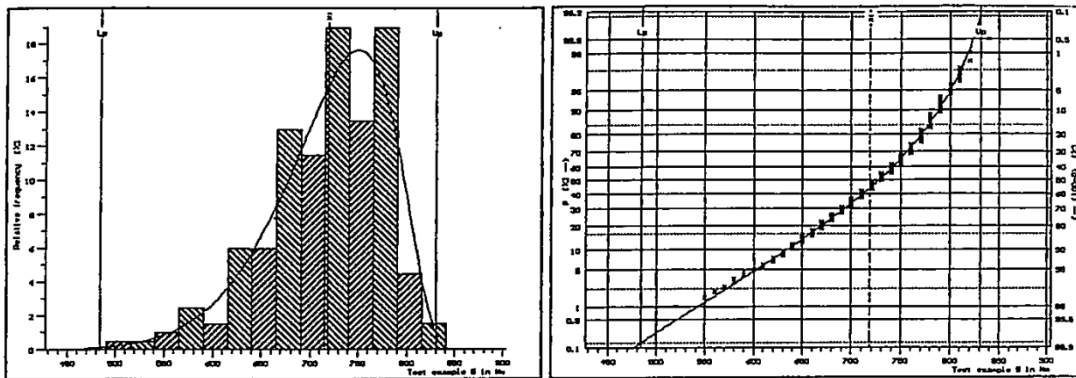
Postoji regija koja se matematički ne može opisati i ona se ne razmatra u praktičnim primjenama. Preostala površina dijeli se na dvije regije. Jedna sadrži kombinacije asimetrije i zaobljenosti koje je moguće opisati sustavom jednađžbi, čiji je raspon limitiran sa dvije strane. Johnson to naziva Ograničeni sustav (eng. *System Bounded* ) ili SB. Ta površina se spaja u regiju gdje je pogodnije koristiti nelimitirane jednađžbe, što se naziva Neograničeni sustav (eng. *System Unbounded* ) ili SU. Između dva sustava postoji prijelazni tip, sustav jednađžbi ograničenih samo na jednoj stani. Sustav uključuje logaritamske transformacije sa tri parametra i nosi skraćenicu SL.

Činjenica da je nejasna granica između spomenuta tri sustava jednađžbi, vodi ka zaključku da će se jedan te isti set podataka opisati sa sva tri sustava jednađžbi te da odabir najprihvatljivijeg, ovisi o poznavanju

granica

sustava.

I ovaj distribucijski model prikazuje se histogramom i papirom vjerojatnosti, čineći krivulju, što prikazuje i slika 11.



Slika 11. Johnson-ove transformacije tip SB



## 6. Proračun indeksa sposobnosti u software-skim paketima *Statistica 7* i *Minitab 15*

### 6.1 Uvod

Kako je računanje indeksa sposobnosti procesa danas doista nužno, programerske tvrtke Statsoft i Minitab Inc. razvile su posebne software-ske pakete *Statistica* odnosno *Minitab*. U ovim rješenjima moguće je analizirati procese na mnoge načine. Tako se nude opcije za izračun osnovnih statističkih vrijednosti, prikazi u histogramima, papirima vjerojatnosti i 3D grafovima, regresija, provjeravanje hipoteza te izračun indeksa sposobnosti procesa.

Najprije će biti prikazani izračuni indeksa sposobnosti za teoretske simulirane podatke, normalnih, poznatih nenormalnih distribucija, a i onih nepoznatih. Na taj će se način najlakše upoznati način rada ovih programskih rješenja te sve mogućnosti koje one nude. *Statistica* nenormalne podatke prilagođava pomoću Johnsonovih i Pearsonovih krivulja. Polazna činjenica je ta da se oblik većine kontinuiranih distribucija može sumirati sa četiri glavna momenta (srednjom vrijednošću, varijancom, zaobljenošću i asimetrijom). Obje transformacije su u principu vrlo slične te program samostalno izabire koja je krivulja najbolja za dani primjer. Prilagođuje se procjenom najmanjih kvadrata ili pomoću izračuna momenata, a nakon toga slijedi vrlo opsežan iterativni postupak.

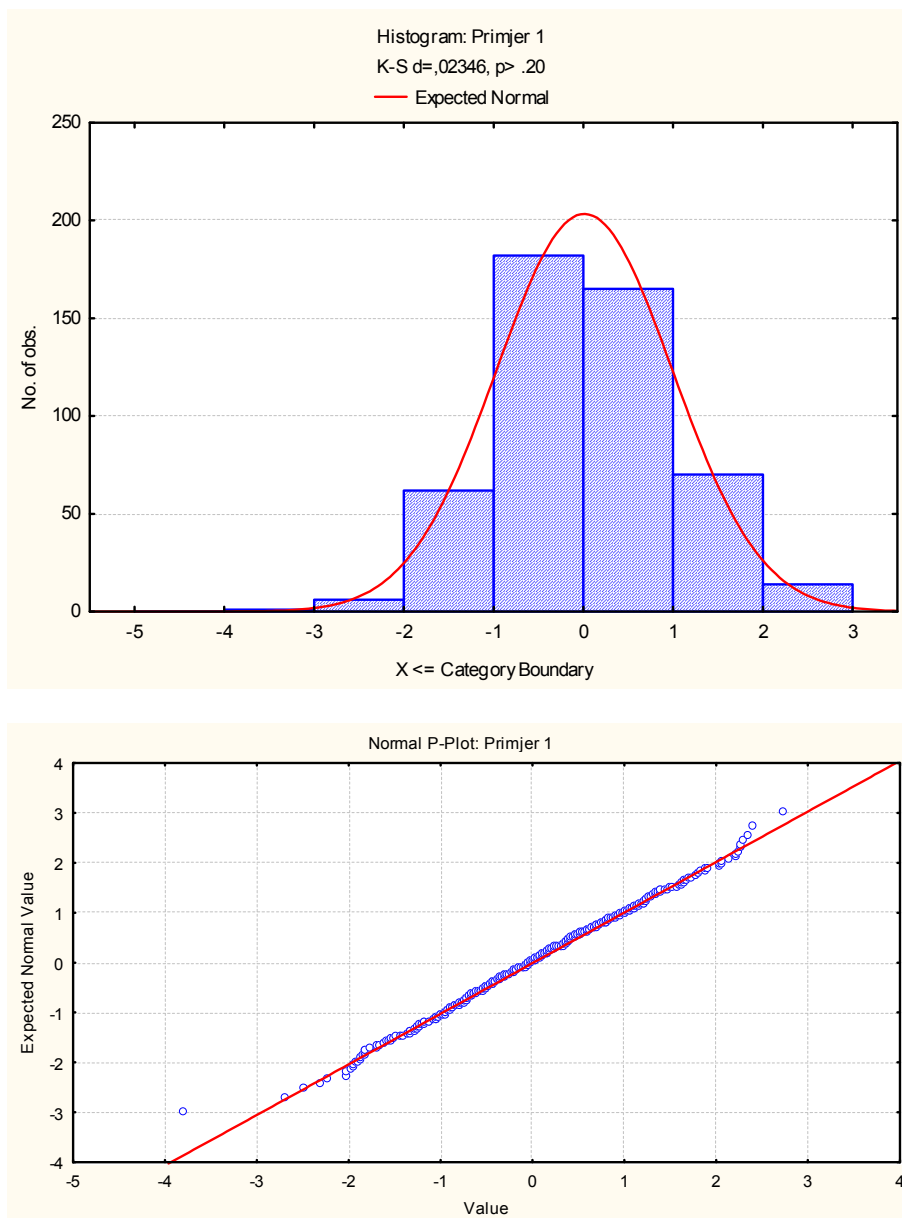
*Minitab*-ova rješenja nalaze se pri kraju svakoga primjera. Transformaciju podataka bazirana je Johnson-ovim funkcijama, a program ispisuje o kojem se području sustava jednadžbi radi.

Za kraj su rezervirani primjeri podataka izračuna indeksa sposobnosti na konkretnim primjerima. Prvi će biti prikazan uobičajeni postupak za normalnu razdiobu i to na primjeru proizvodnje klipnih prstena. Drugi će

primjer biti punjenje tuba zubnih pasti točno određenom masom, koja vidno  
odstupa od normalne.

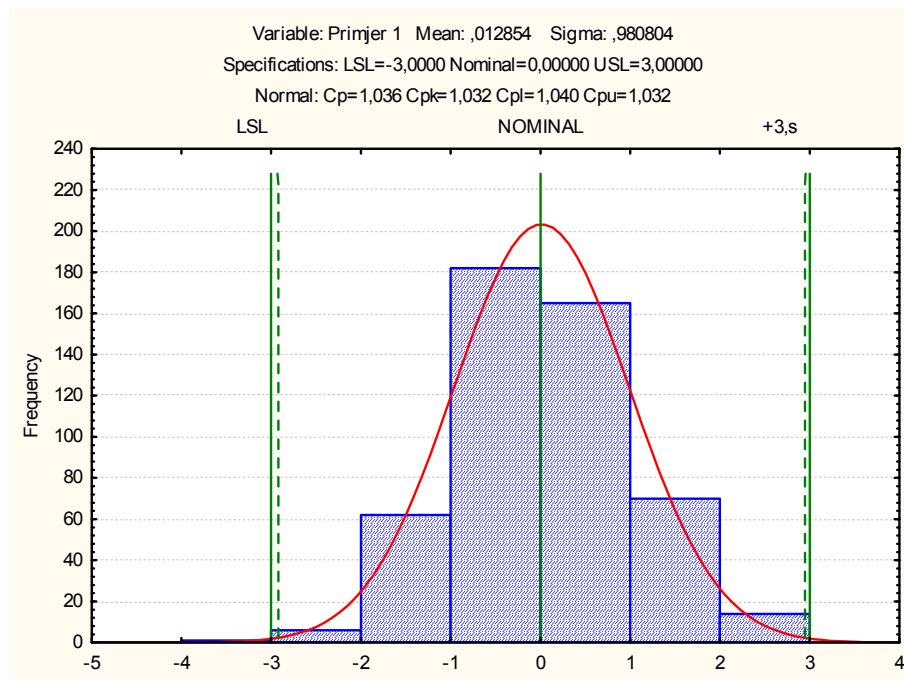
## 6.2 Primjer 1.

U prvome primjeru broj uzoraka je 500, svrstani su u 15 razreda po preporukama te je njegova distribucijska krivulja prikazana u histogramu na slici. Normalnost Primjera 1. provjerena je još i papirom vjerojatnosti.



Slika 12. Histogram i papir vjerojatnosti za Primjer 1.

Slika 13. prikazuje histogram zadane distribucije u odnosu na tolerancijsko polje. Odabrana ciljana vrijednost  $T = 0$ , a tolerancijsko polje zahtjeva iznosi  $\pm 3$ . Dobiveni indeksi upućuju kako je ovaj proces doista sposoban.



Slika 13. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 1.( $T=0$  i  $\delta=\pm 3$ )

Naredne tablice sadrže popis svih indeksa sposobnosti i performansi za Primjer 1.

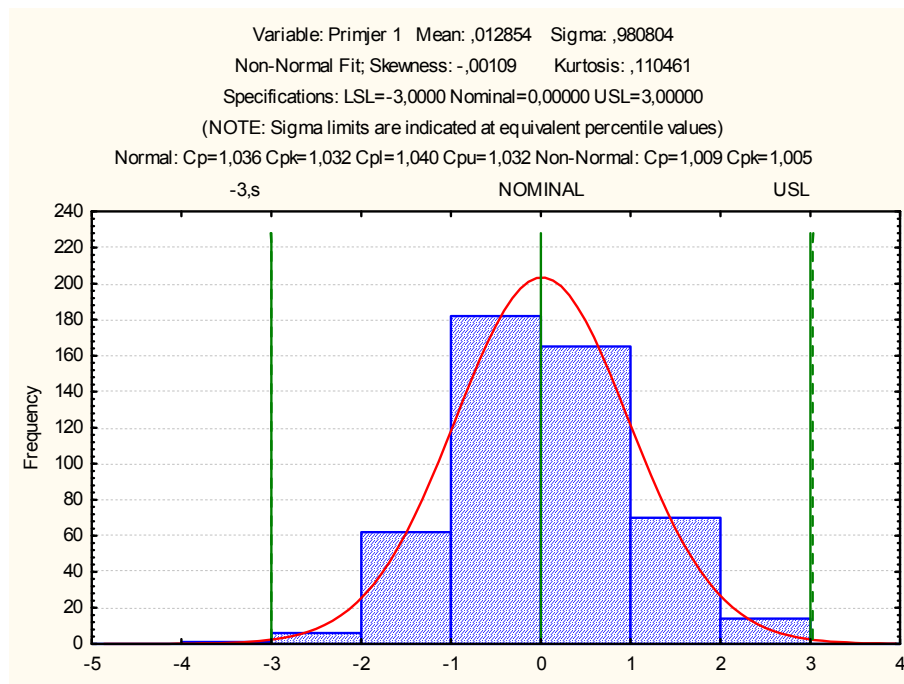
Tabela 2. Indeksi sposobnosti Primjera 1.

Variable: Primjer 1	
	Value
<b>Lower Specification Limit</b>	-3,00000
<b>Nominal Specification</b>	0,00000
<b>Upper Specification Limit</b>	3,00000
<b>CP (potential capability)</b>	1,03604
<b>CR (capability ratio)</b>	0,96522
<b>CPK (demonstrated excellence)</b>	1,03160
<b>CPL (lower capability index)</b>	1,04048
<b>CPU (upper capability index)</b>	1,03160
<b>K (non-centering correction)</b>	0,00428

Tabela 3. Indeksi performansi Primjera 1.

Variable: Primjer 1	
	Value
<b>Lower Specification Limit</b>	-3,00000
<b>Nominal Specification</b>	0,00000
<b>Upper Specification Limit</b>	3,00000
<b>PP (performance index)</b>	1,01957
<b>PR (performance ratio)</b>	0,98080
<b>PPK (perf. demonstr. excell.)</b>	1,01520
<b>PPL (lower performance index)</b>	1,02394
<b>PPU (upper performance index)</b>	1,01520

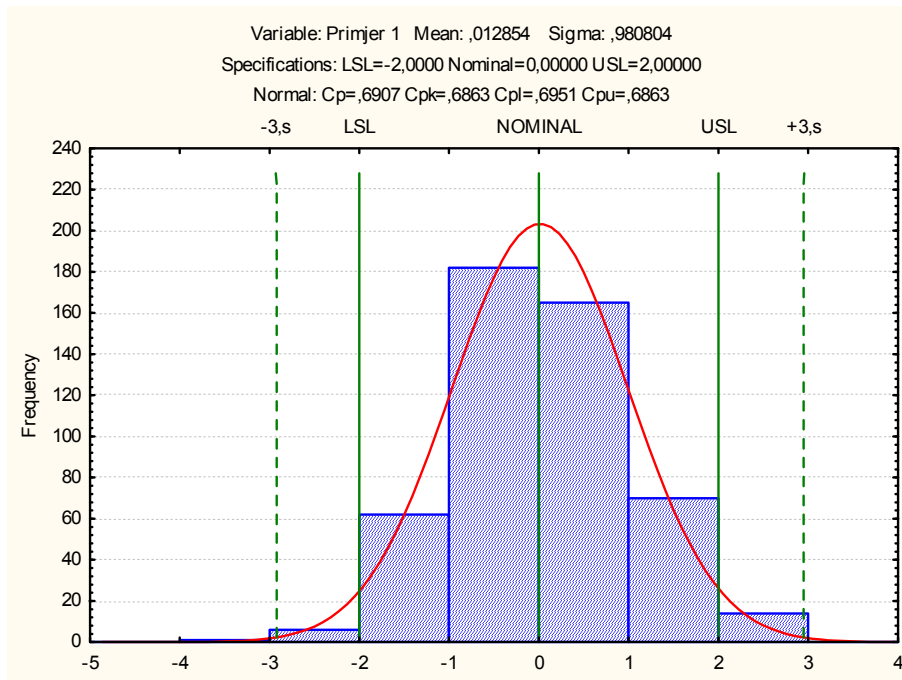
Na slijedećem je histogramu prikazana sposobnost procesa za nenormalne distribucije, sa istim podacima za ciljanu vrijednost i granice zahtjeva. U tab-ovima *Statistice*, nudi se opcija izbora izračuna indeksa za nenormalne distribucije. Ova je opcija za konkretni slučaj nepotrebna, iz razloga što je razdioba normalna pa rezultati pokazuju približno iste vrijednosti indeksa  $C_P$  i  $C_{PK}$ .



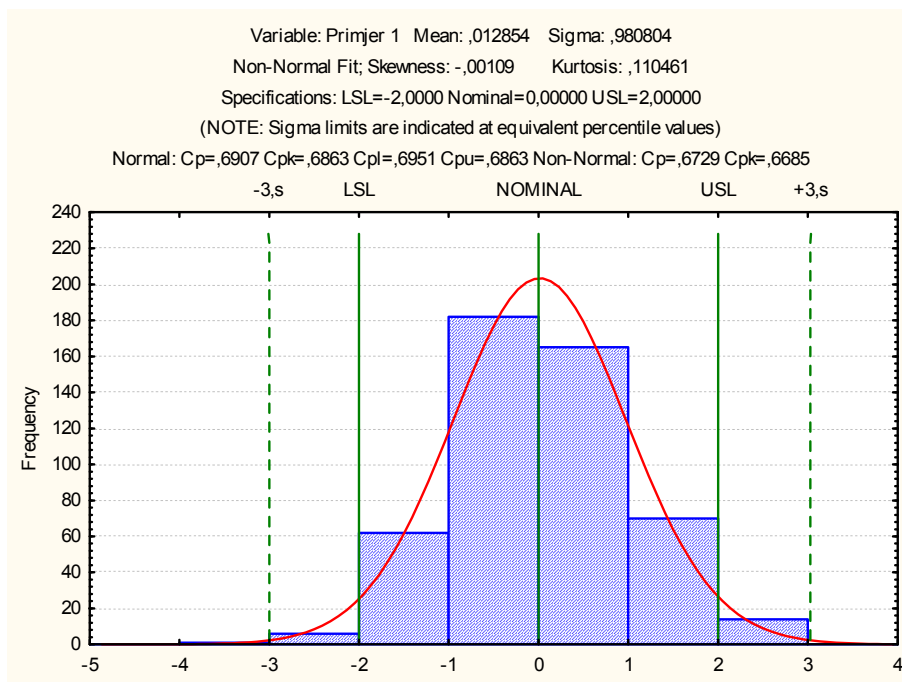
Slika 14. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Primjer 1.

$$(T=0, \delta=\pm 3)$$

U narednim analizama Primjera 1. pokazano je kako promjena granica specifikacije mijenja indekse sposobnosti. Suzi li se područje, proces moramo proglasiti nesposobnim. Napravi li se obratno, u ovom slučaju prošire granice na  $\pm 4$ , rast indeksa sposobnosti ukazivati će na još sposobniji proces.

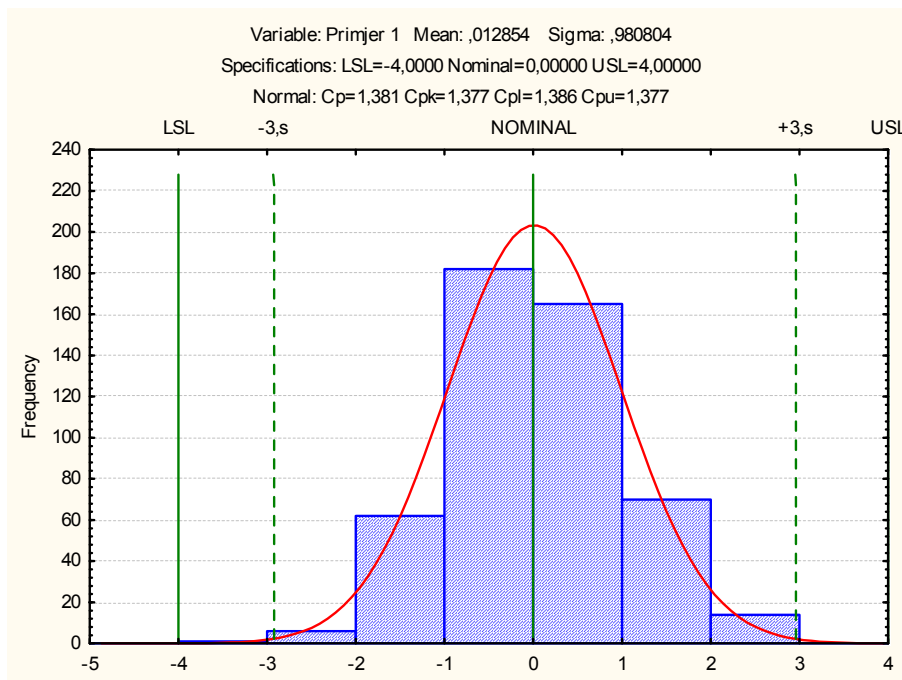


Slika 15. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 1.(  $T=0$ ,  $\delta=\pm 2$ )



Slika 16. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Primjer 1.

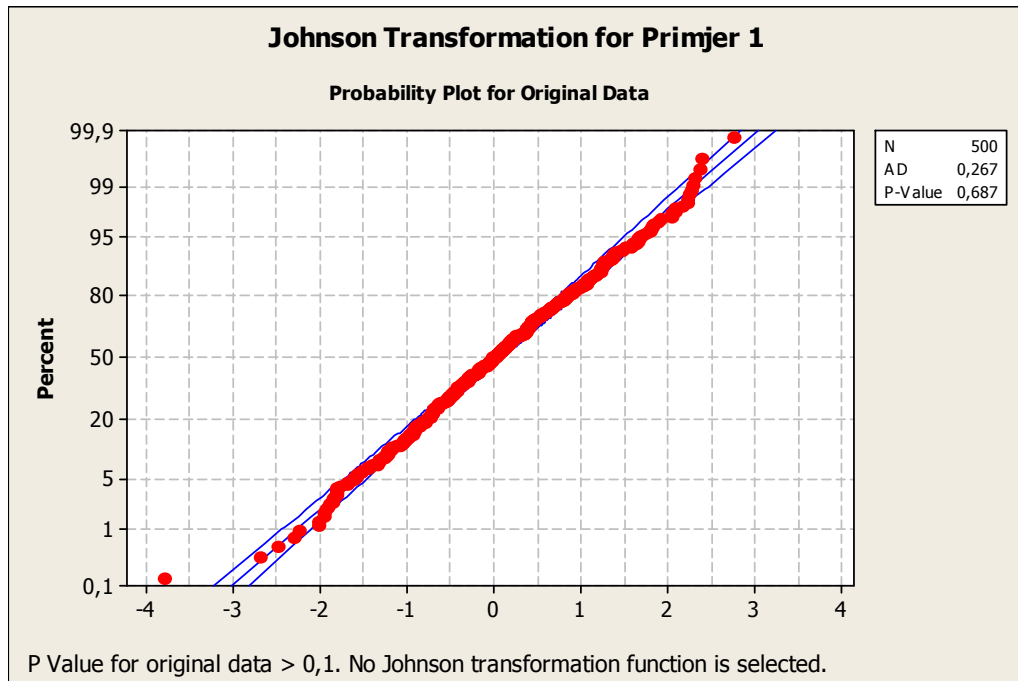
$$(T=0, \delta=\pm 2)$$



Slika 17. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 1. ( $T=0, \delta=\pm 4$ )

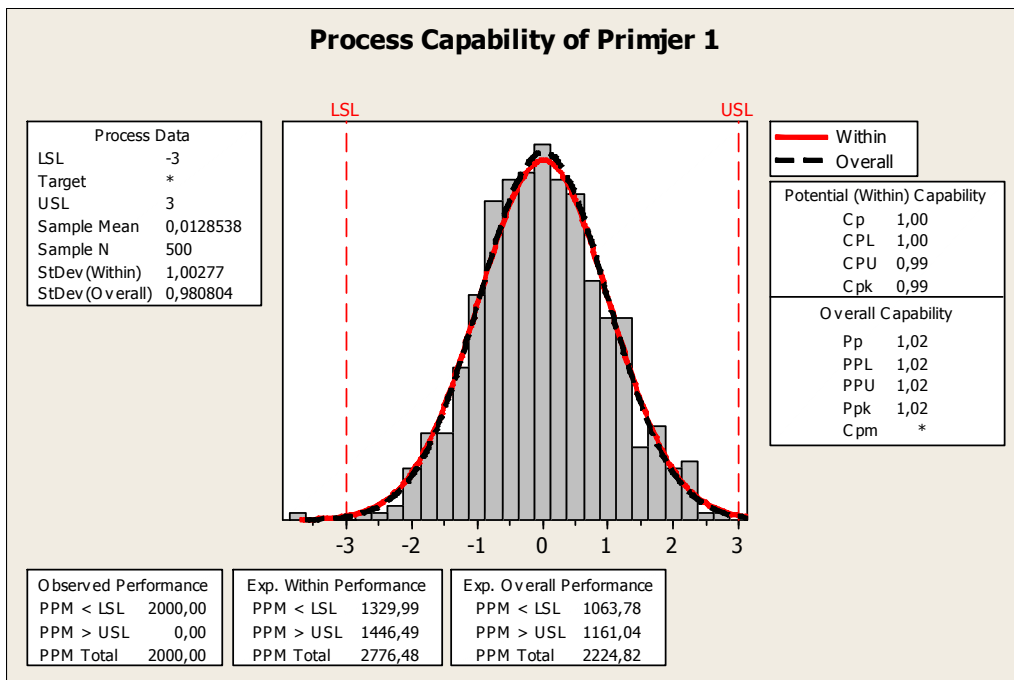


U sljedećem grafičkom prikazu, nad podacima Primjera 1., primijenjene su Johnson-ove transformacije statističkog software-a *Minitab*. On nije pronašao načina da transformira podatke u normalne, budući da su oni već sami po sebi normalno distribuirani.



Slika 18. Johnson-ove transformacije za Primjer 1.

Analizu sposobnosti u *Minitab*-u prikazuje slika 19. iz koje je vidljivo da oba software-a daju približno iste rezultate za indekse sposobnosti.

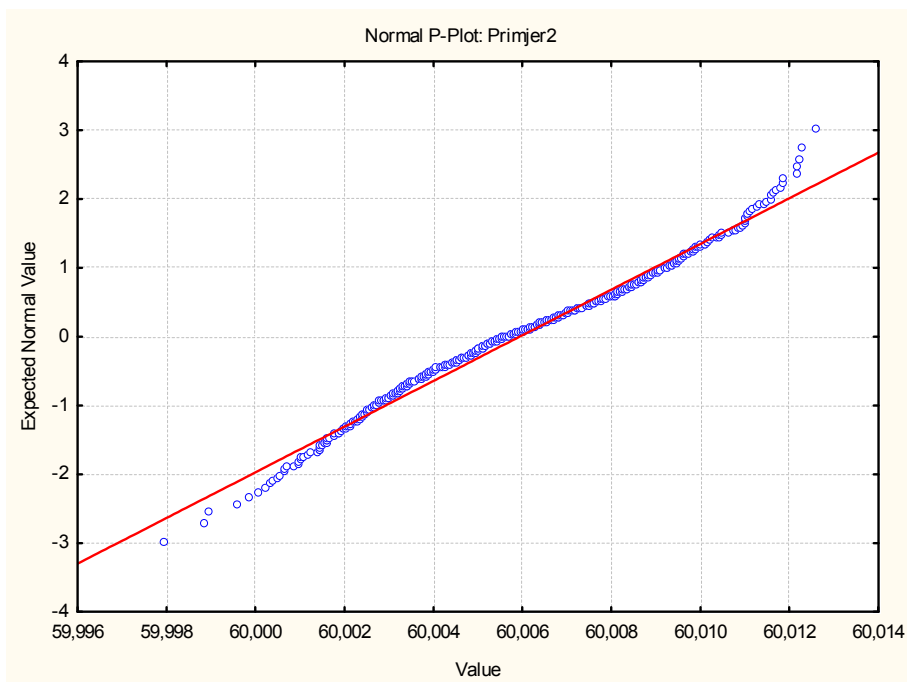
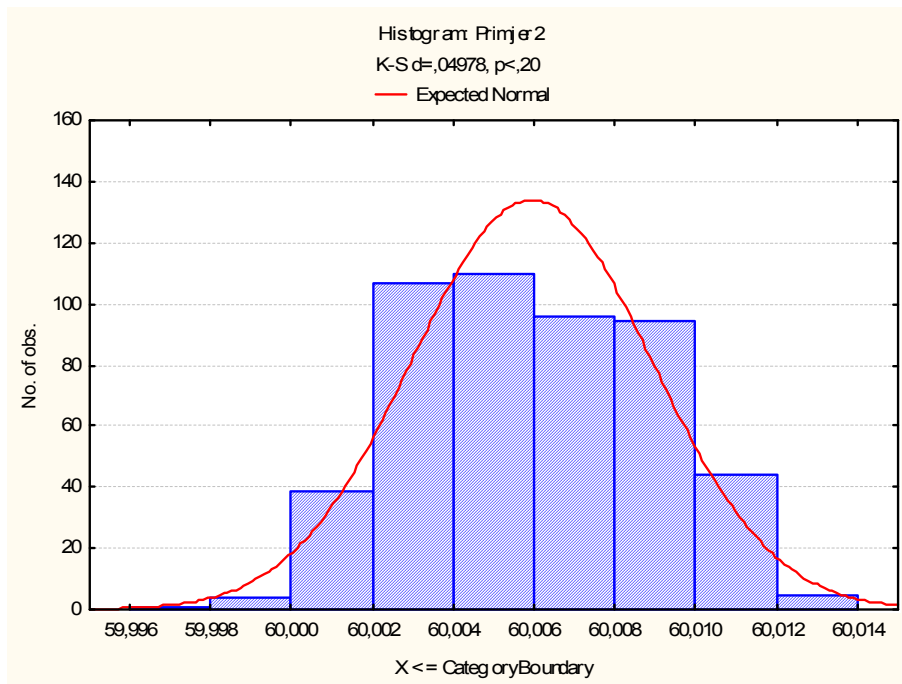


Slika 19. Analiza sposobnosti normalnih razdioba za Primjer 1.

(LSL=-3, USL=3)

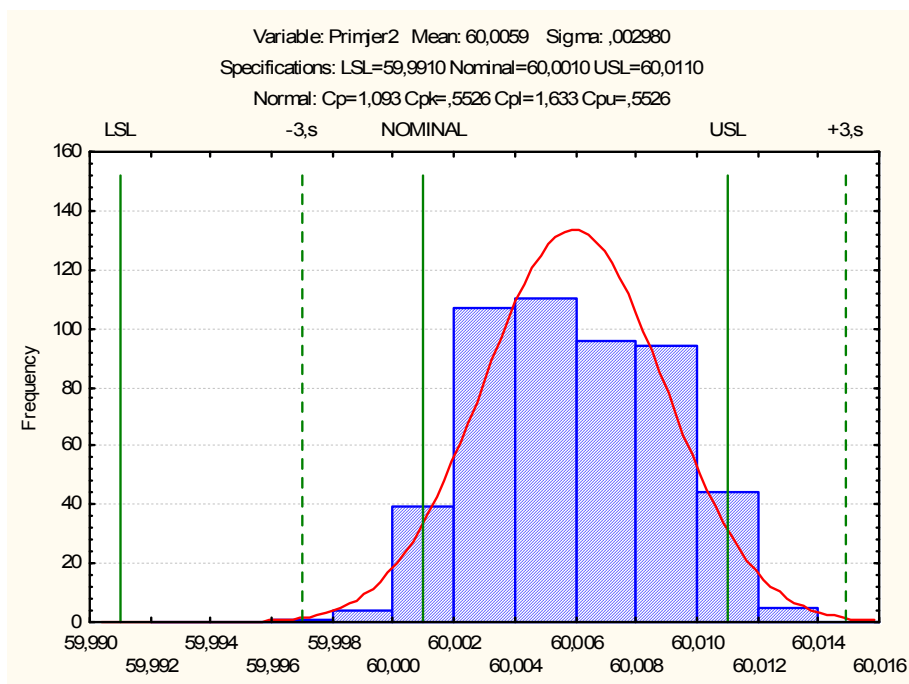
### 6.3 Primjer 2.

Primjerom 2. prikazati će se kako promjena ciljane vrijednosti utječe na iznos indeksa sposobnosti procesa. Za ovu je situaciju simulirano 500 uzoraka i podijeljeno u 15 razreda. Histogram i papir vjerojatnosti prikazuju izgled ove distribucije.



Slika 20. Histogram i papir vjerojatnosti za Primjer 1.

Analiza sposobnosti procesa započeta je procjenom indeksa za normalne distribucije i to sa  $T=60,001$  i granicom zahtjeva  $\pm 0,01$ . Generiran je popis svih indeksa sposobnosti i performansi, ali i tablica u kojoj se nalazi točan broj podatka van tolerancijskog polja. Svi indeksi ukazuju na nesposoban proces.



Slika 21. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 2.

$$(T=60,001, \delta=\pm 0,01)$$

Tabela 4. Indeksi sposobnosti Primjera 2.

Variable: Primjer 2	
	Value
<b>Lower Specification Limit</b>	59,99100
<b>Nominal Specification</b>	60,00100
<b>Upper Specification Limit</b>	60,01100
<b>CP (potential capability)</b>	1,09287
<b>CR (capability ratio)</b>	0,91502
<b>CPK (demonstrated excellence)</b>	0,55263
<b>CPL (lower capability index)</b>	1,63311
<b>CPU (upper capability index)</b>	0,55263
<b>K (non-centering correction)</b>	0,49433

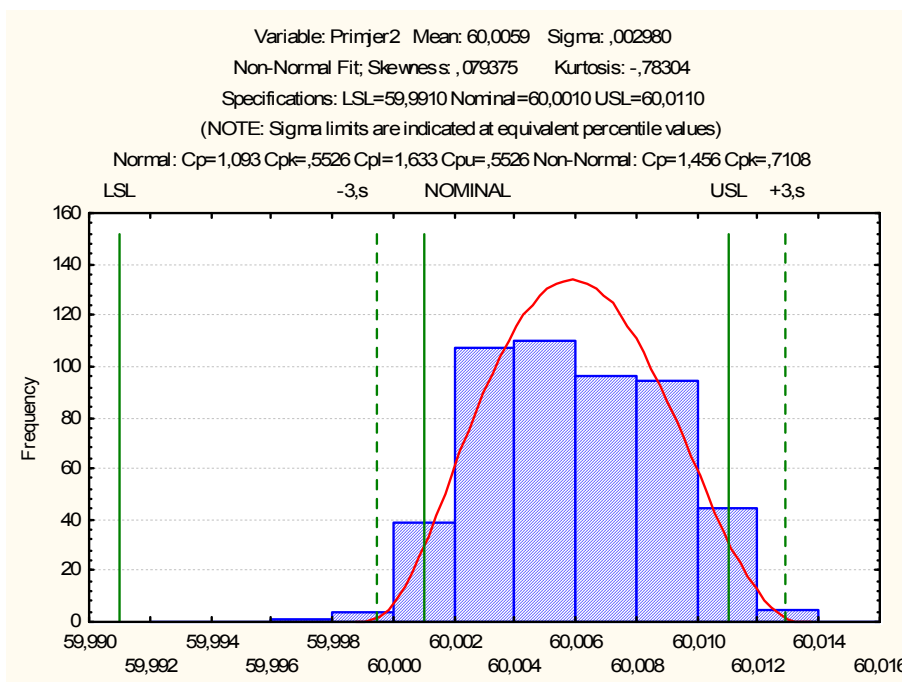
Tabela 5. Indeksi performansi Primjera 2.

Variable: Primjer 2	
	Value
<b>Lower Specification Limit</b>	59,99100
<b>Nominal Specification</b>	60,00100
<b>Upper Specification Limit</b>	60,01100
<b>PP (performance index)</b>	1,11846
<b>PR (performance ratio)</b>	0,89409
<b>PPK (perf. demonstr. excell.)</b>	0,56557
<b>PPL (lower performance index)</b>	1,67135
<b>PPU (upper performance index)</b>	0,56557

Tabela 6. Podaci van tolerancijskog polja za Primjer 2.

Variable: Primjer 2				
	Observed	Percent	Expected	Percent
<b>Above USL:</b>	26	5,200000	22,43806	4,487611
<b>Below LSL:</b>	0	0,000000	0,00013	0,000027
<b>Total</b>	26	5,200000	22,43819	4,487638

Kako indeksi za normalne razdiobe ne daju dovoljno dobre rezultate, pokušavalo se opcijom za nenormalne distribucije i to sa istim podacima za ciljanu vrijednost i granice zahtjeva. Dobiveni indeks  $C_p$  sada je prihvatljiv, ali ne i  $C_{pk}$ .

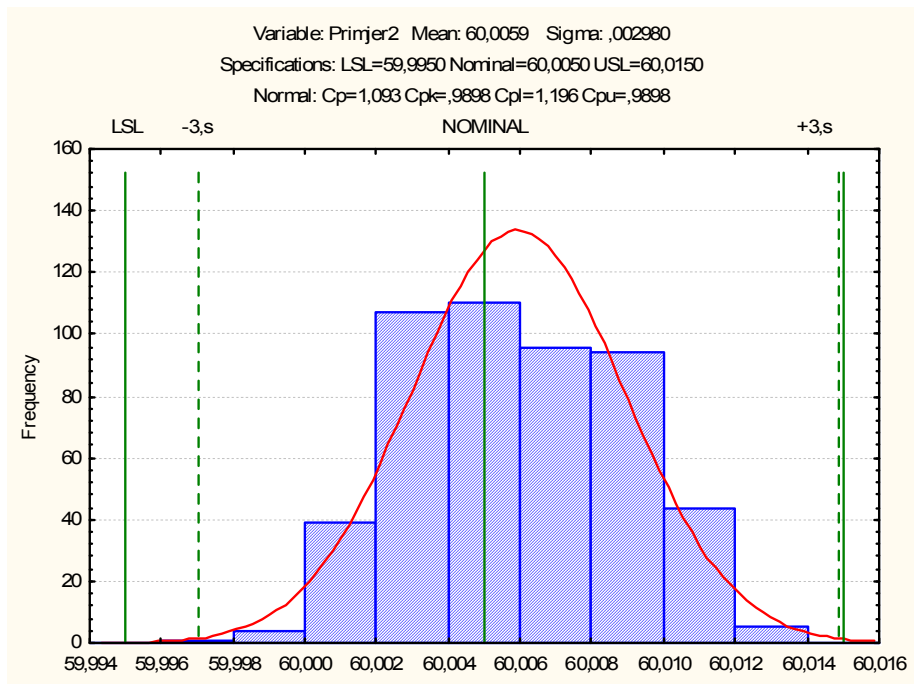


Slika 22. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Primjer 2.

$$(T=60,001, \delta=\pm 0,01)$$

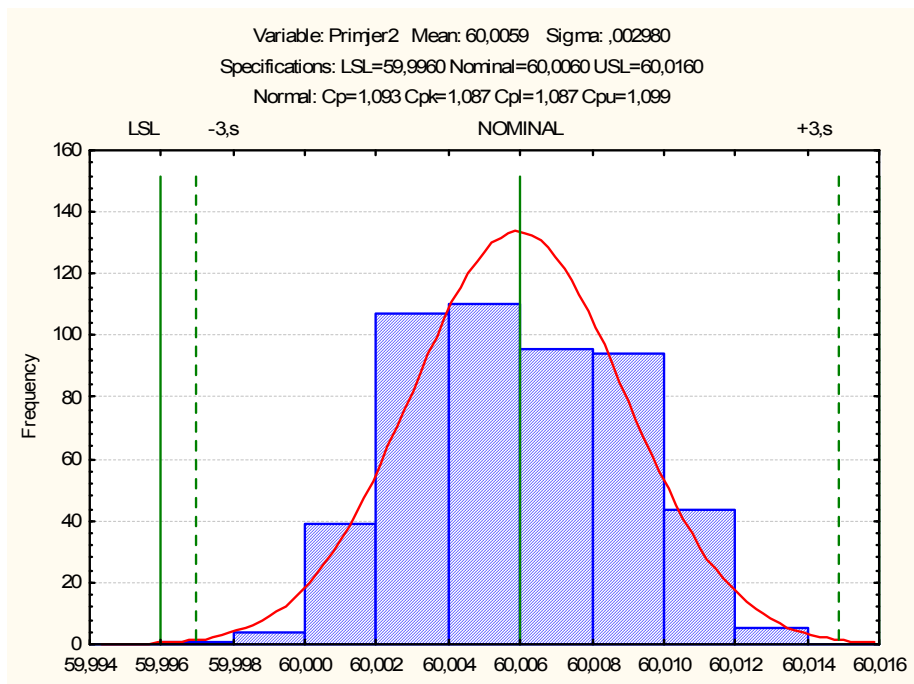
U narednim histogramima mijenjana je smo vrijednosti T, sve kako bi i indeks  $C_{pk}$  došao na prihvatljivi iznos veći od 1. U prvome grafu T je

promijenjeno na 60,005, a u drugome on iznosi 60,006.



Slika 23. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 2.

$$(T=60,006, \delta=0,01)$$

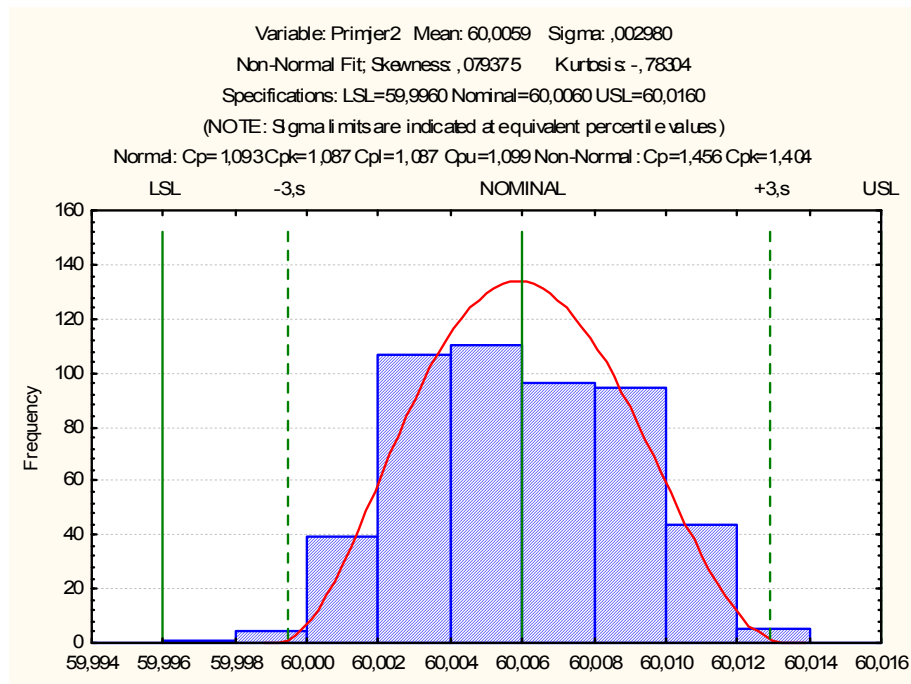


Slika 24. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 2.



( $T=60,006$ ,  $\delta=\pm 0,01$ )

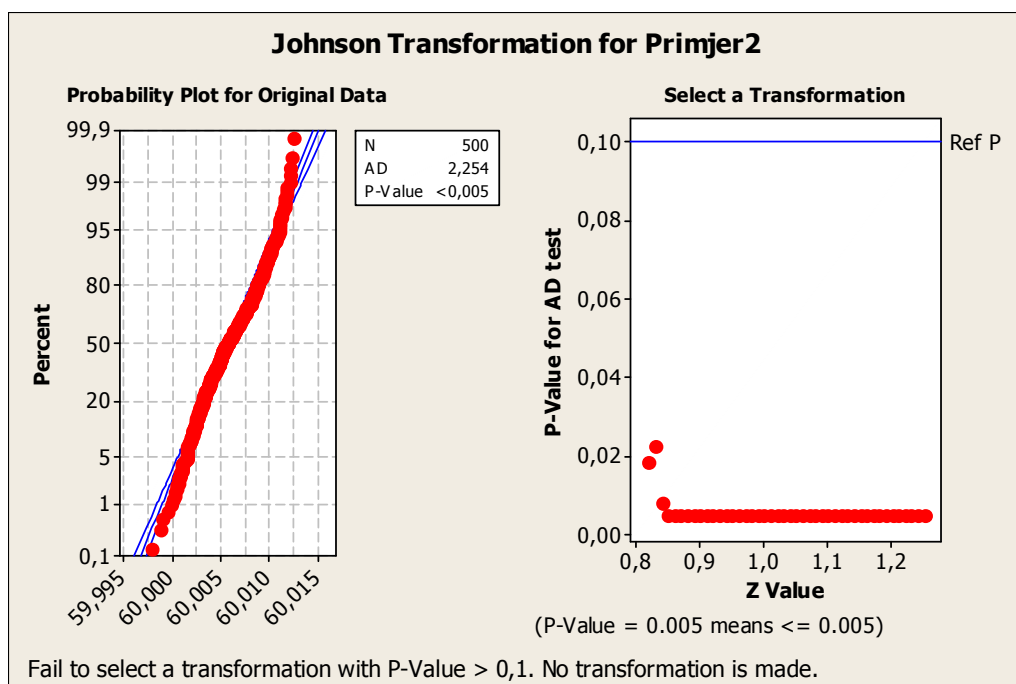
U posljednjem *Statistica* grafu izabrana je opcija proračuna indeksa sposobnosti za nenormalne distribucije te je vrijednost željenog indeksa  $C_{pk}$  napokon dosegla vrijednost od 1,404, zbog čega je proces moguće proglasiti sposobnim.



Slika 25. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Primjer 2.

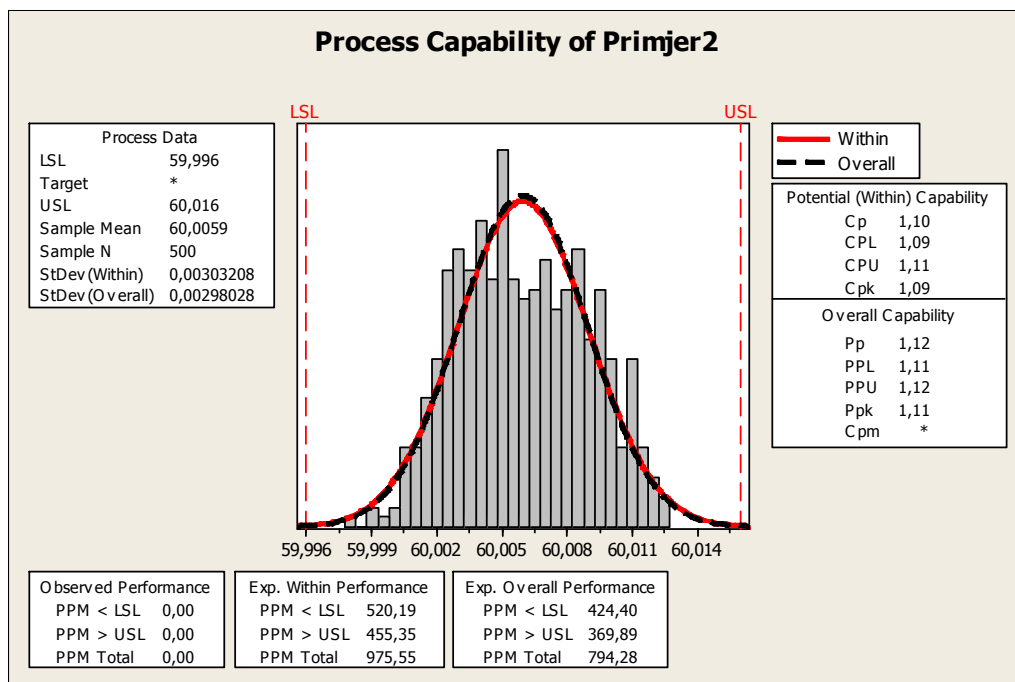
$$(T=60,006, \delta=\pm 0,01)$$

No, rezultati koje daje *Minitab* potpuno su drugačiji, jer Johnson-ove transformacije za Primjer 2. ne daju nikakvo rješenje. Transformacije na papiru vjerojatnosti prikazuje slika 26.



Slika 26. Johnson-ove transformacije za Primjer 2.

Budući da *Minitab* nije pronašao odgovarajuću transformaciju za Primjer 2., analizirana je kao normalna razdioba. Dobiveni rezultati jednaki su rezultatima Statistice za procjenu sposobnosti normalnih razdioba.



Slika 27. Analiza sposobnosti normalnih razdioba za Primjer 2.

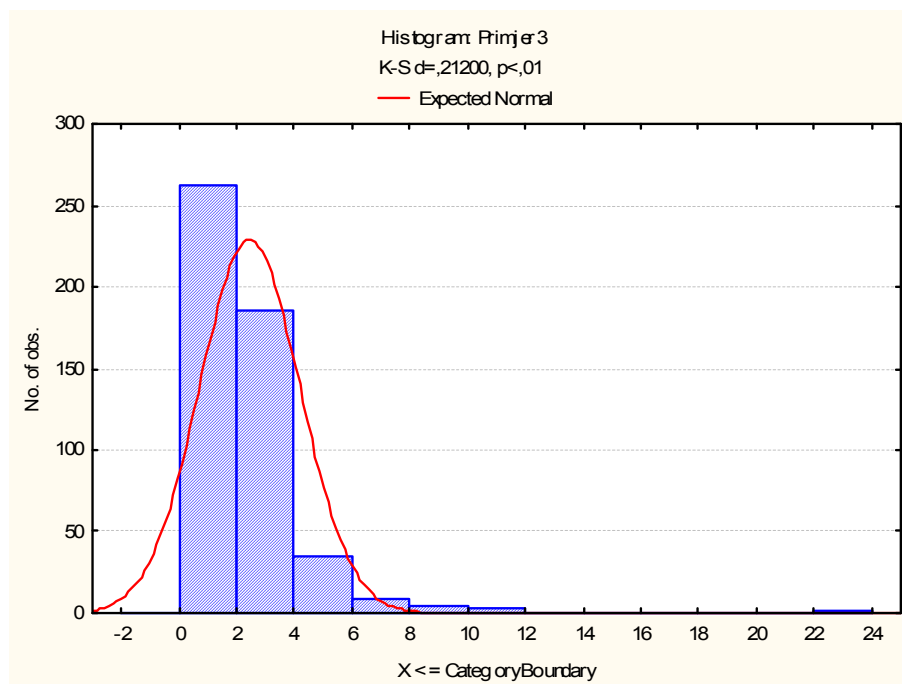
(LSL=59,996, USL=60,016)

Pitanje koje se postavlja je kako je *Statistica* bila u mogućnosti transformirati podatke. Odgovor na to pitanje sigurno je pohranjen negdje u programskom kodu, do kojeg nije moguće doći. Korisnici nisu u mogućnosti vidjeti matematičke izraze kojima program transformira podatke. Drugim riječima, procjena sposobnosti nenormalnih razdioba pomoću Johnson-ovih ili Pearson-ovih krivulja ne daje uvijek pouzdane rezultate.

## 6.4 Primjer 3.

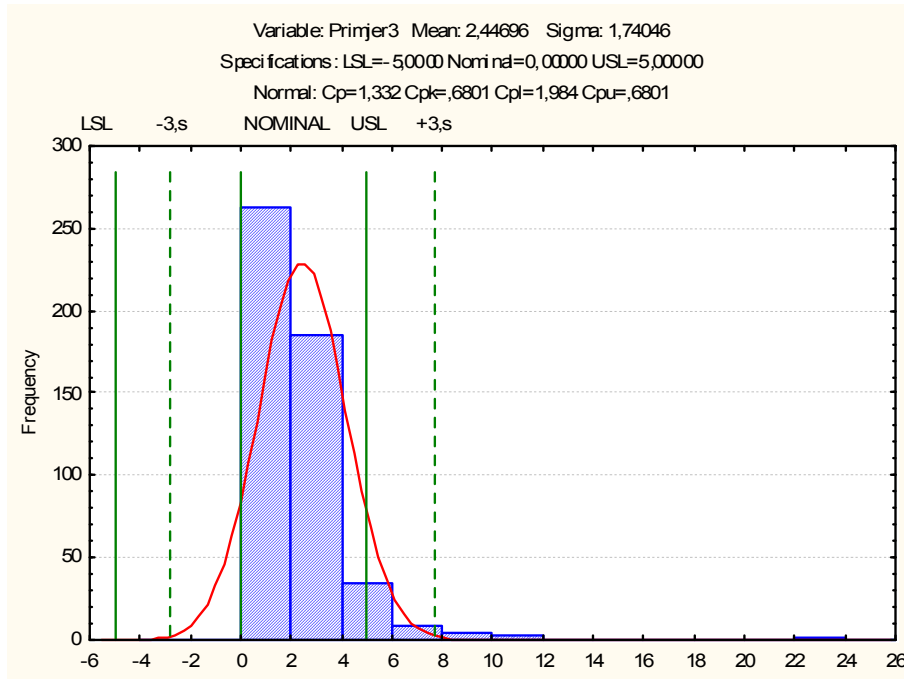
Ovim primjerom prikazani su procesi za koje nema smisla postavljati dvije granice zahtjeva, to jest tolerancijsko polje. To su procesi u kojima se želi postići ciljana vrijednost, a dozvoljeno je i neko manje odstupanje, veće ili manje od cilja. To je primjerice udio nečistoća, koji logično mora biti jednak nuli, ali tolerira se određeno odstupanje. Za takve će procese postojati samo ciljana vrijednost  $T$  i gornja granica zahtjeva  $USL$ .

Na prvim prikazima, vidljiv je histogram simuliranog procesa koji očigledno pokazuju da se ne radi o normalnoj razdiobi podataka.



Slika 28. Histogram Primjera 3.

I u ovome primjeru nalazi se 500 podataka, koji su grupirani u 15 razreda. Prvi grafikon određuje sposobnost procesa za normalne razdiobe, sa  $T=0$  te tolerancijskim poljem u granicama od  $\pm 5$ .

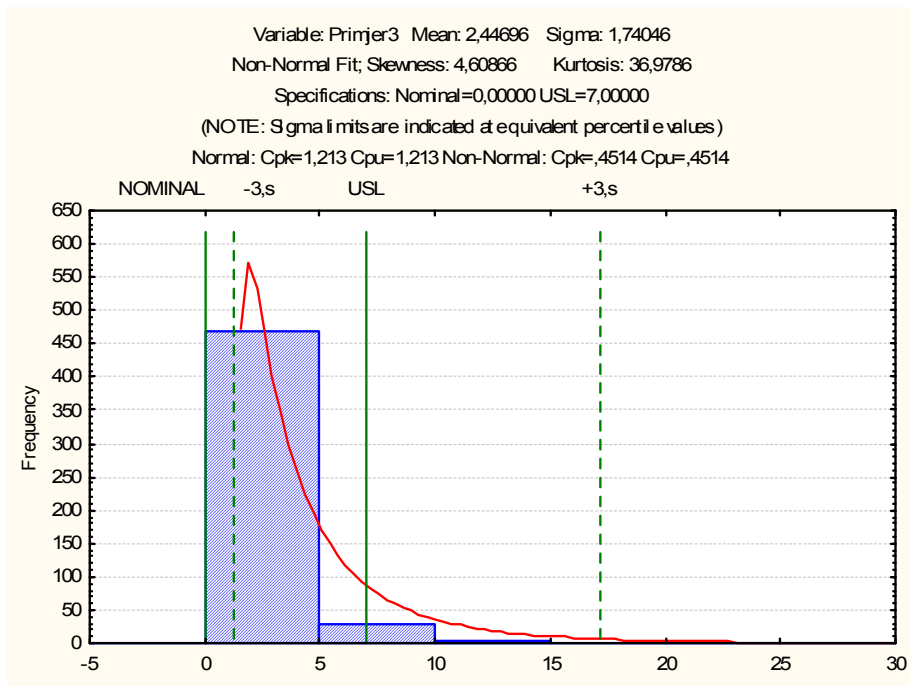


Slika 29. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Primjer 3.

( $T=0$ ,  $\delta=\pm 5$ )

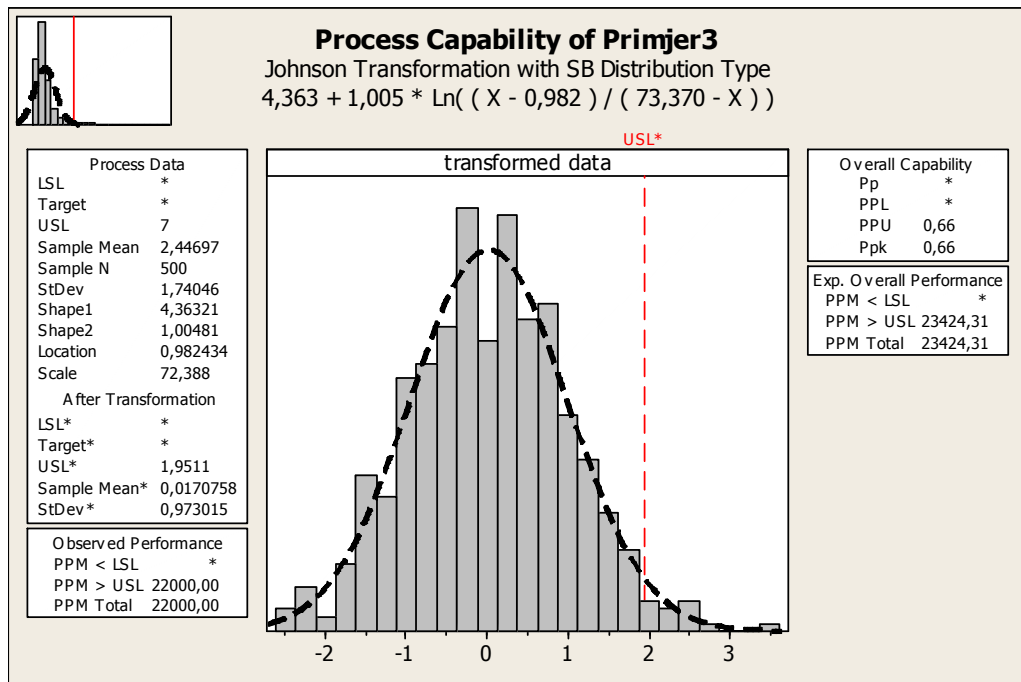
Slijedi analiza sposobnosti procesa nenormalnih distribucija sa jednom granicom zahtjeva u oba programa. Slika 30. prikazuje rješenje *Statistica*, a 31. *Minitab*-a.

Važno je primijetiti da budući da ne postoji tolerancijsko polje USL – LSL, nije moguće izraziti indeks  $C_p$ .



Slika 30. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Primjer 3.

(T=0, USL=7)

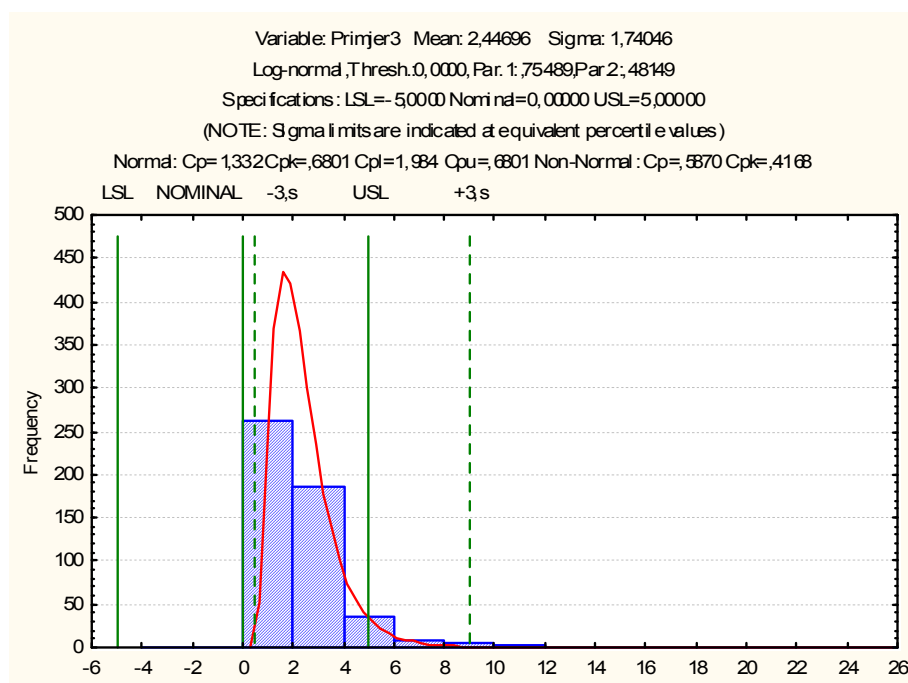


Slika 31. Analiza sposobnosti nenormalnih razdioba Johnson-ovim transformacijama za Primjer 3. (USL=7)



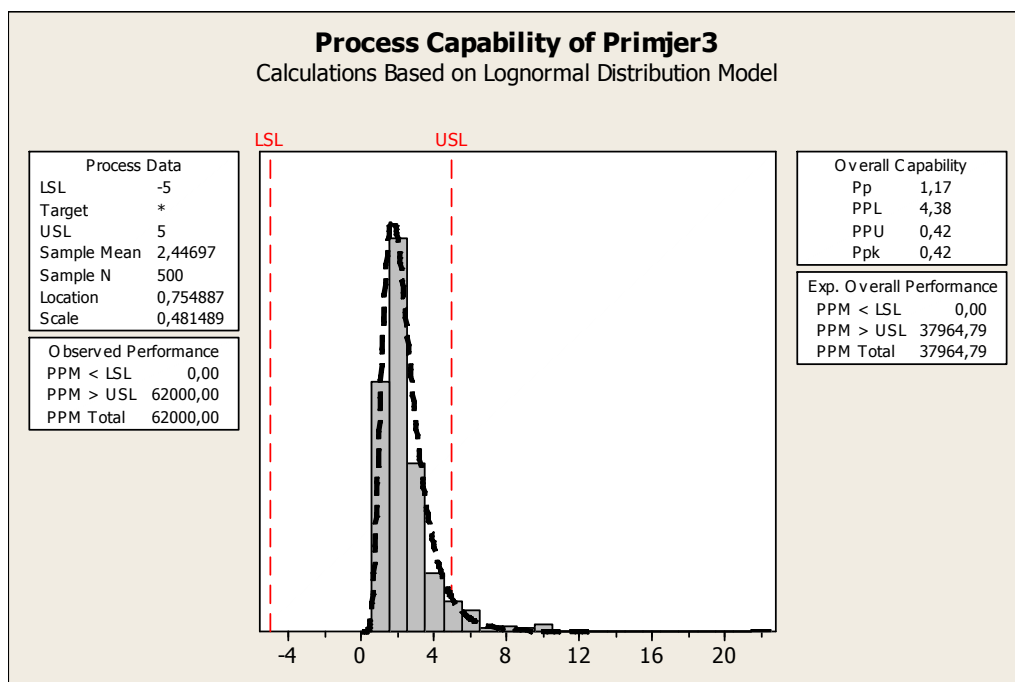
Dobiveni podaci nisu ni usporedivi iz razloga što *Statistica* ne prikazuje iznose  $P_p$  indeksa, a *Minitab* spominje samo njih. No, zanimljiva je formula koja prikazuje transformaciju Primjera 3. Vidimo da je program prepoznao da se jednadžba nalazi u polju SB ili ograničenog sustava te da sadrži logaritamsku funkciju.

Ali, kako se u programima nude opcije za izračun indeksa sposobnosti za druge poznate razdiobe, Primjer 3. testiran je za log-normalne i to za početak sa tolerancijskim poljem  $\pm 5$ .



Slika 32. Sposobnost procesa log-normalnih razdioba za Primjer 3.

( $T=0$ ,  $\delta=\pm 5$ )



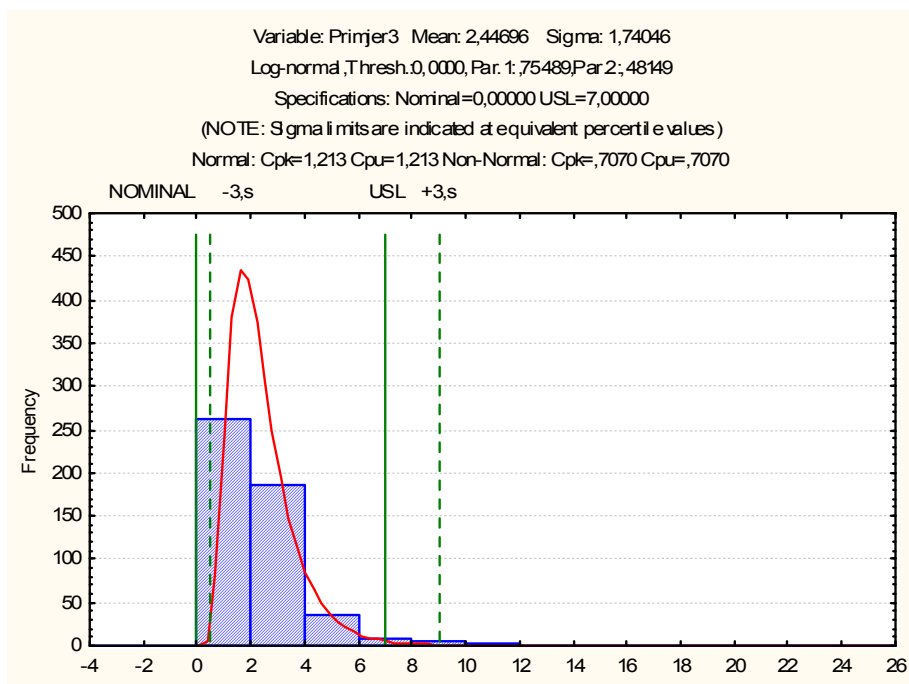
Slika 33. Analiza sposobnosti log-normalnih razdioba za Primjer 3.

(LSL=-5, USL=5)

*Statistica* je za ovaj slučaj izračunala  $P_p = 0,95$ , a  $P_{pk} = 0,48$ . To znači da se programi slažu u izračunu  $P_{pk}$ , budući da je rezultat sličan.

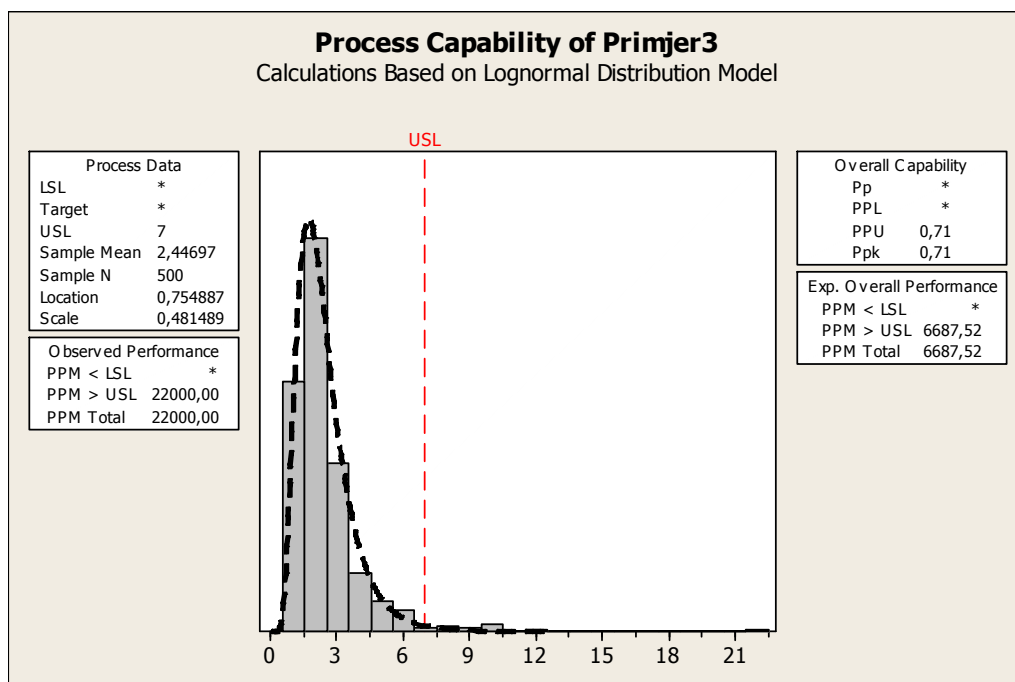
Sljedeća analiza log-normalnih distribucija, bazirana je samo na gornjoj granici, USL=7, a prikazuju je slike 34. i 35. Rezultate će se komentirati ponovno preko indeksa performansi. *Minitab* nudi  $P_{pk}$  u iznosu od 0,71, a *Statistica* 0,87. To i nije tako različito, a zaključak je i dalje da je proces Primjera 3. nesposoban.

Dakle, proces Primjera 3. nakon obrade u oba programa i dalje je moguće proglasiti nesposobnim.



Slika 34. Sposobnost procesa log-normalnih razdioba za Primjer 3.

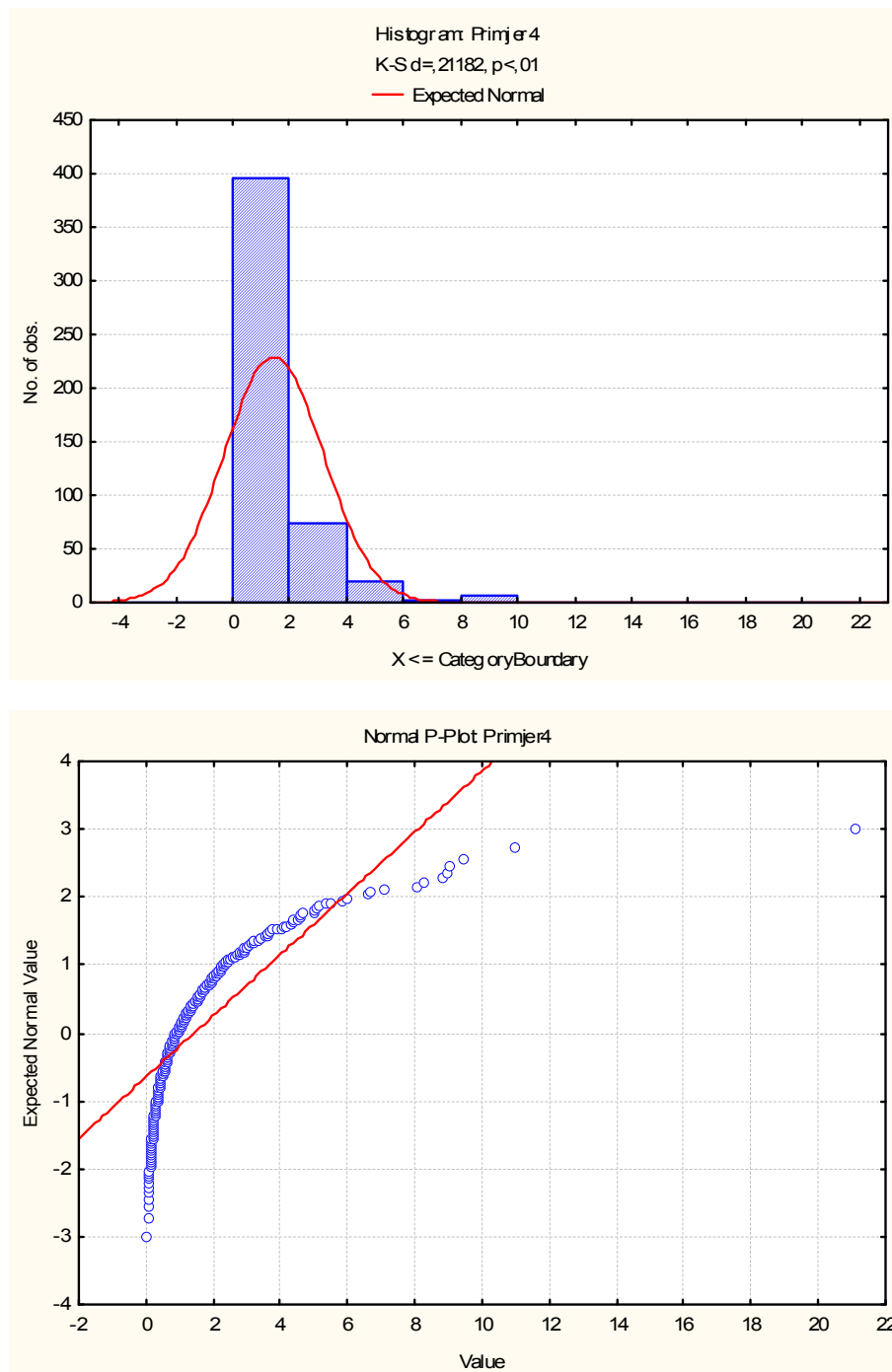
( $T=0$ ,  $USL=7$ )



Slika 35. Analiza sposobnosti log-normalnih razdioba za Primjer 3. ( $USL=7$ )

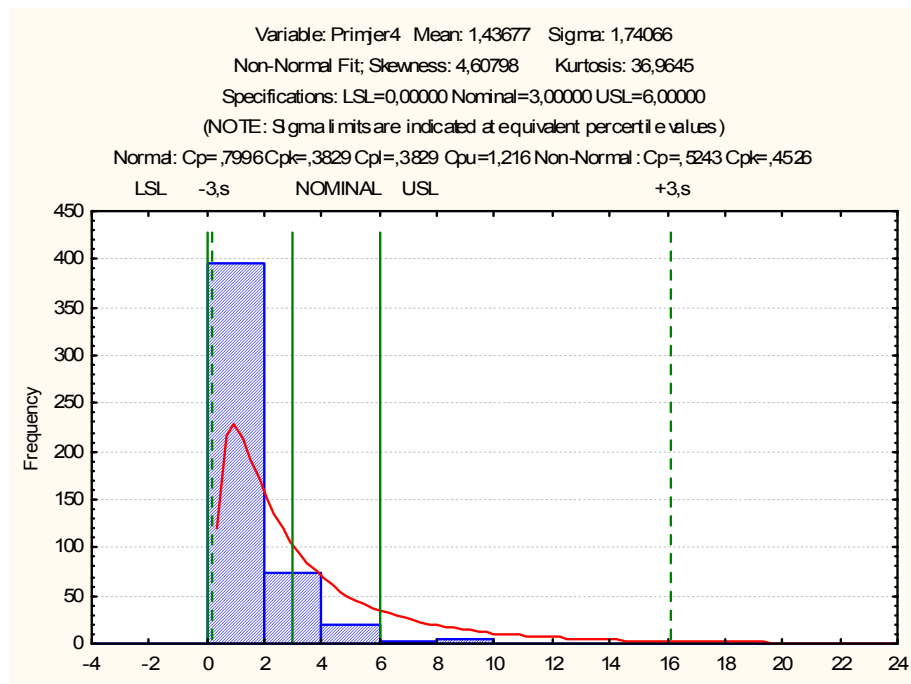
## 6.5 Primjer 4.

Ovim primjerom obrađena je jedna uobičajena log-normalna razdioba. Njen izgled prikazan je histogramom i papirom vjerojatnosti.



Slika 36. Histogram i papir vjerojatnosti za Primjer 4.

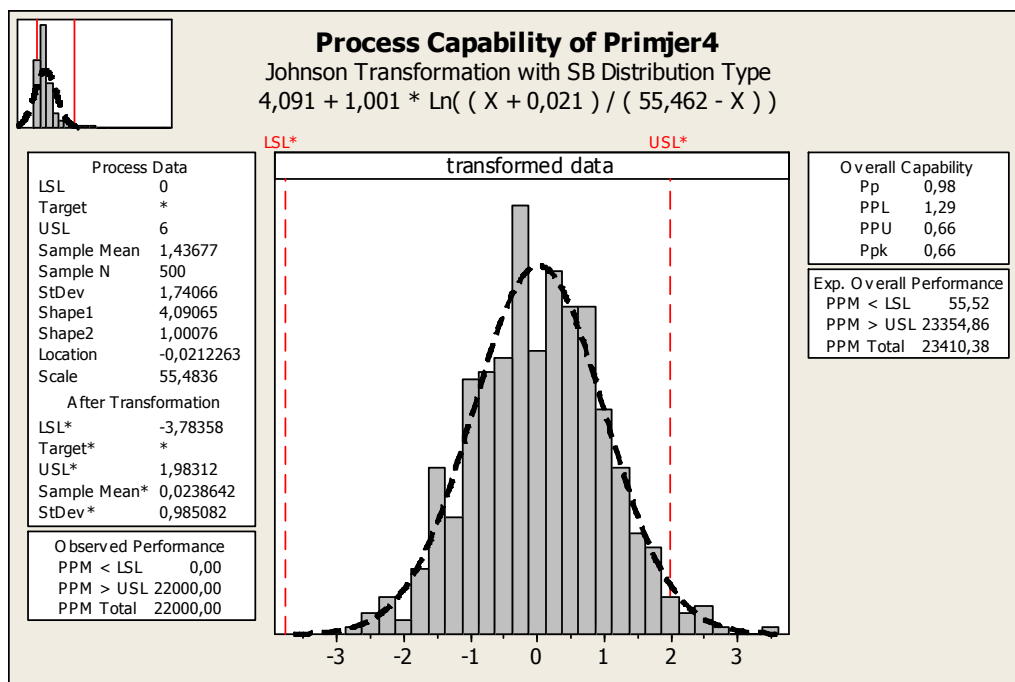
Odmah je pokušano odrediti sposobnost Primjera 4. za nenormalne razdiobe i to u oba statistička programa.



Slika 37. Sposobnost procesa za nenormalne razdiobe za Primjer 4.

$$(T=3, \delta=\pm 3)$$

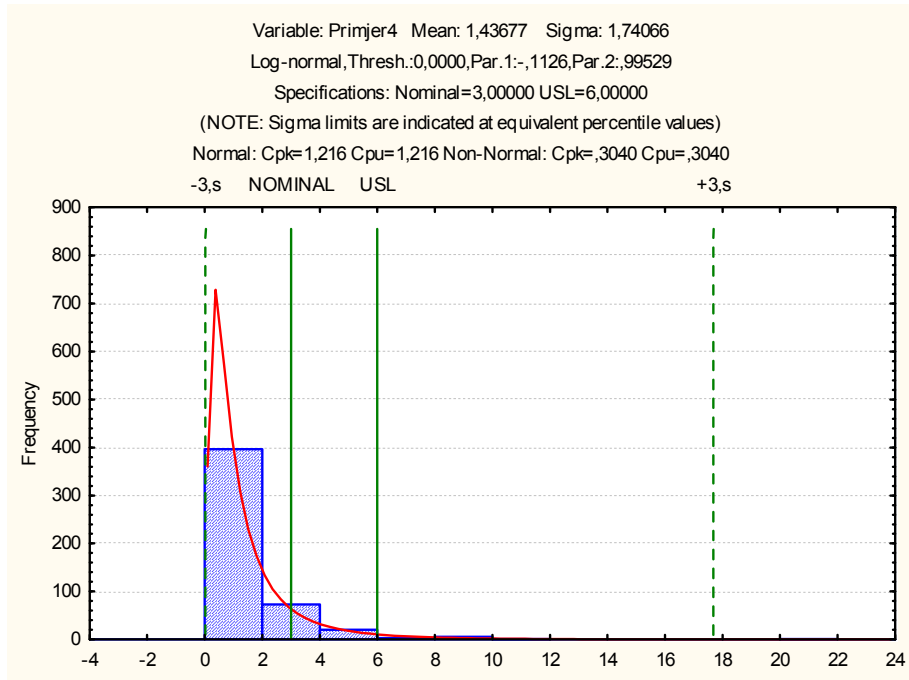
Sa slike 37. moguće je proces ocijeniti nesposobnim, ali ni rješenje *Minitaba* nije mnogo bolje, iako su rješenja izražena indeksom  $P_p$ , točnije indeksom performansi ili preliminarne sposobnosti.



Slika 38. Analiza sposobnosti nenormalnih razdioba Johnson-ovim transformacijama (LSL=0, USL=6)

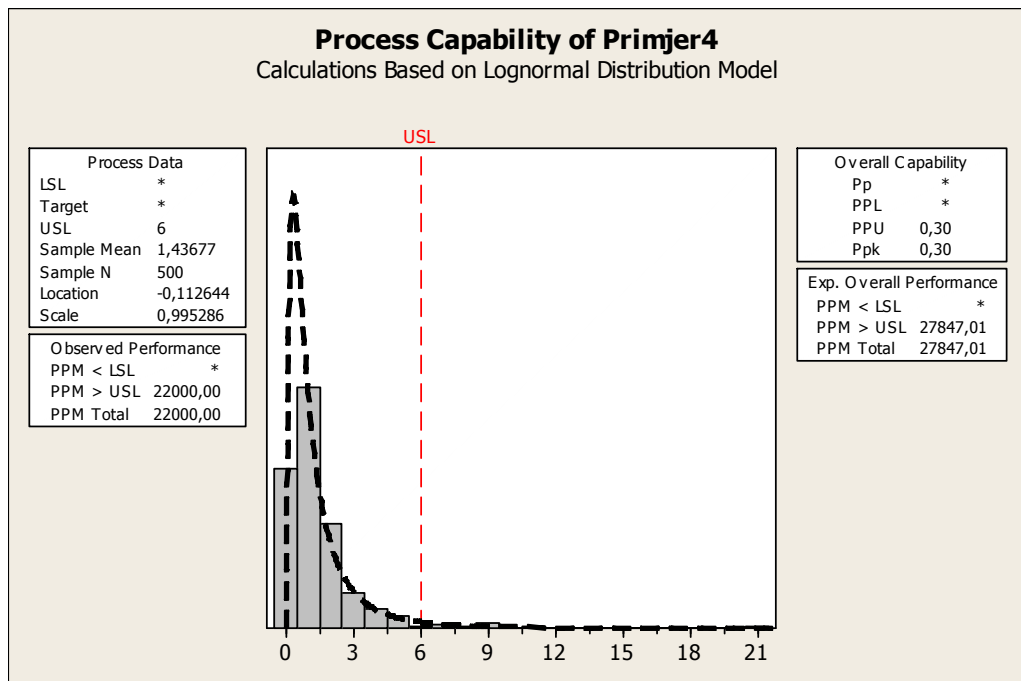
Analiziravši Primjer 4. kao log-normalnu distribuciju (slika 39.), sa ciljanom vrijednošću  $T = 3$  i samo jednom granicom zahtjeva, ponovno gornjom (USL=6), dobiveni su mnogo povoljniji iznosi indeksa ( $C_{pk} = 1,216$ ), zbog čega je moguće Primjer 4. proglasiti sposobnim.

Rješenje na slici 40. ukazuje da je proces itekako nesposoban i to zato što je vrijednost  $P_p = 0,3$ . Vrijednost koju pokazuje *Statistica* je  $P_{pk} = 0,87$ . Opet su rezultati različiti i mogu voditi ka krivim zaključcima.



Slika 39. Sposobnost procesa log-normalnih razdioba za Primjer 4.

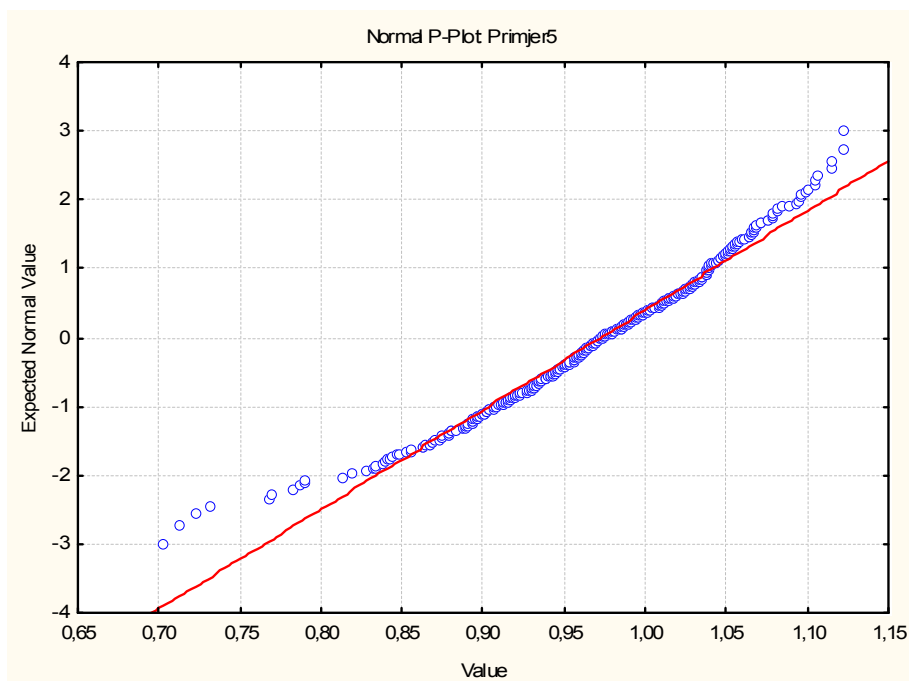
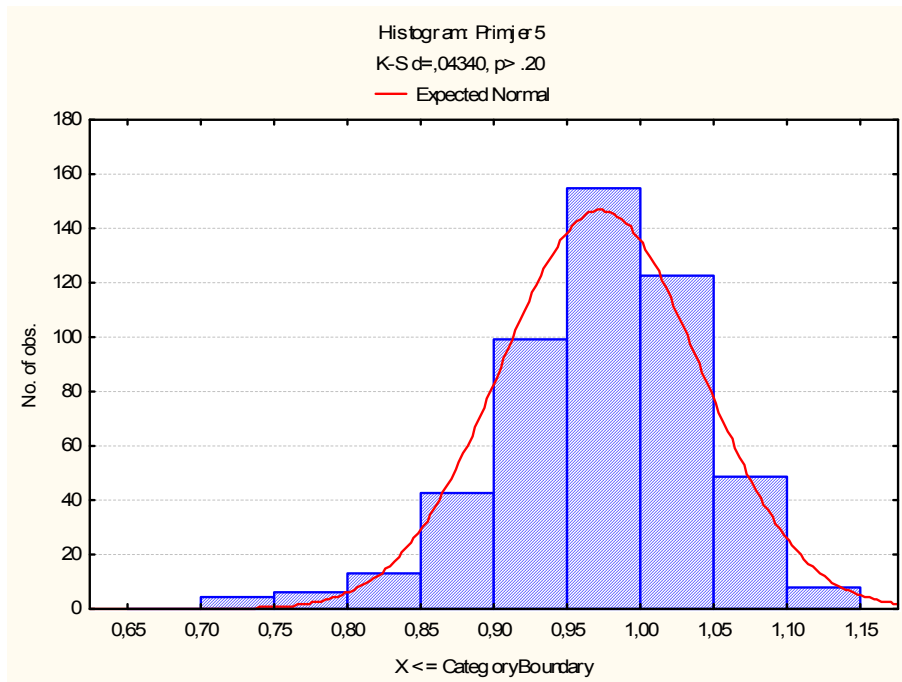
(T=3, USL=6)



Slika 40. Analiza sposobnosti log-normalnih razdioba za Primjer 4. (USL=6)

## 6.6 Primjer 5.

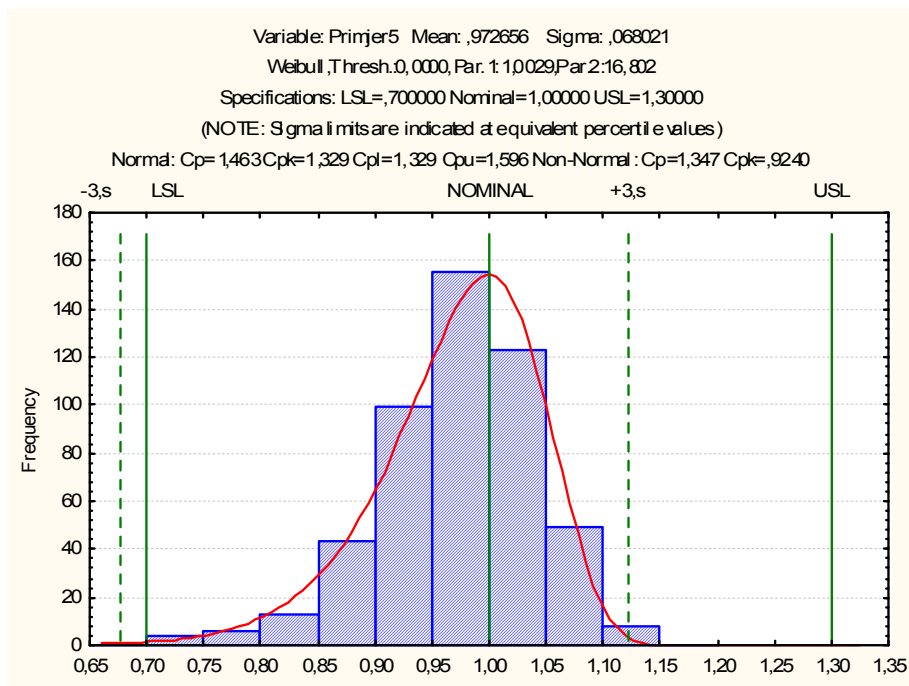
Weibull-ova razdioba jedna je od također vrlo čestih, stoga je Primjer 5. upravo analiza sposobnosti procesa upravo za nju. Slika prikazuje histogram i papir vjerojatnosti za Primjer 5.





Slika 41. Histogram i papir vjerojatnosti za Primjer 5.

Statsoft-ovo statističko programsko rješenje nudi i opciju za analizu sposobnosti procesa koji se podvrgavaju Weibull-ovoj razdiobi. Za procjenu je određeno tolerancijsko polje od  $\pm 0,3$  te ciljana vrijednost 1. Kako se radi o idealnoj Weibull-ovoj razdiobi, transformacija podataka i uobičajena procjena indeksa, dali su naslutiti kako je proces sposoban. To prikazuju naredne slike i tablični prikazi.



Slika 42. Sposobnost procesa Weibull-ovih razdioba za Primjer 5.

$$(T=1, \delta=\pm 0,3)$$

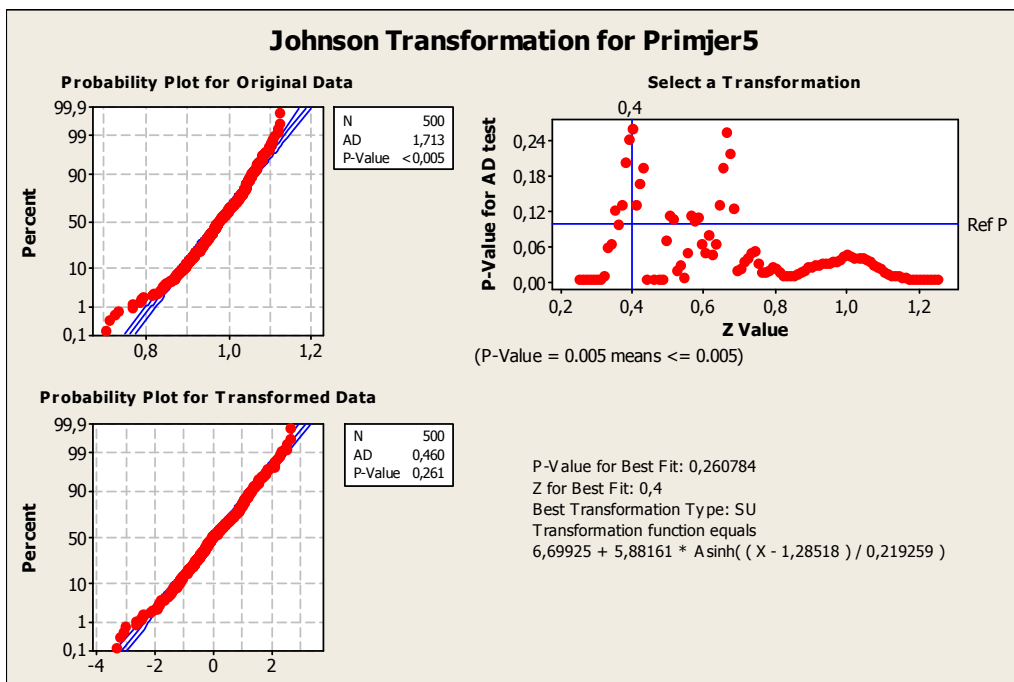
Tabela 7. Indeksi performansi Primjera 5.

Variable: Primjer 5	
	Value
<b>Lower Specification Limit</b>	0,700000
<b>Nominal Specification</b>	1,000000
<b>Upper Specification Limit</b>	1,300000
<b>PP (performance index)</b>	1,470142
<b>PR (performance ratio)</b>	0,680207
<b>PPK (perf. demonstr. excell.)</b>	1,336146
<b>PPL (lower performance index)</b>	1,336146
<b>PPU (upper performance index)</b>	1,604138

Tabela 8. Podaci van tolerancijskog polja za Primjer 5.

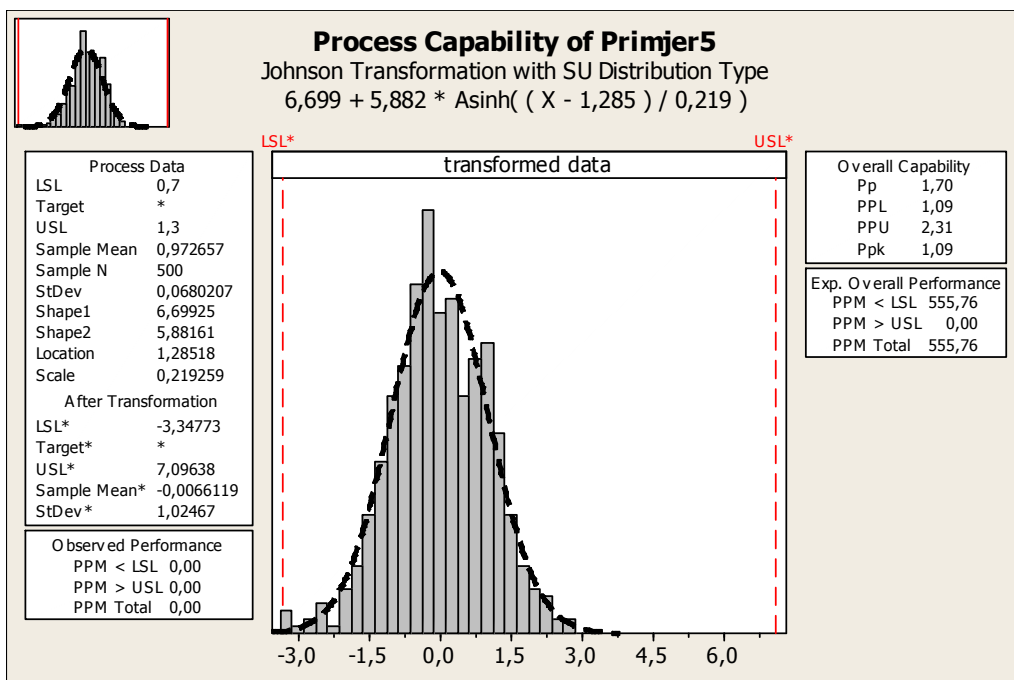
Variable: Primjer 5				
	Observed	Percent	Expected	Percent
<b>Above USL:</b>	0	0,00	0,000000	0,000000
<b>Below LSL:</b>	0	0,00	1,186681	0,237336
<b>Total</b>	0	0,00	1,186681	0,237336

S istim se podacima krenulo u analizu u *Minitab*-u. Prvo su slijedile transformacije podataka.



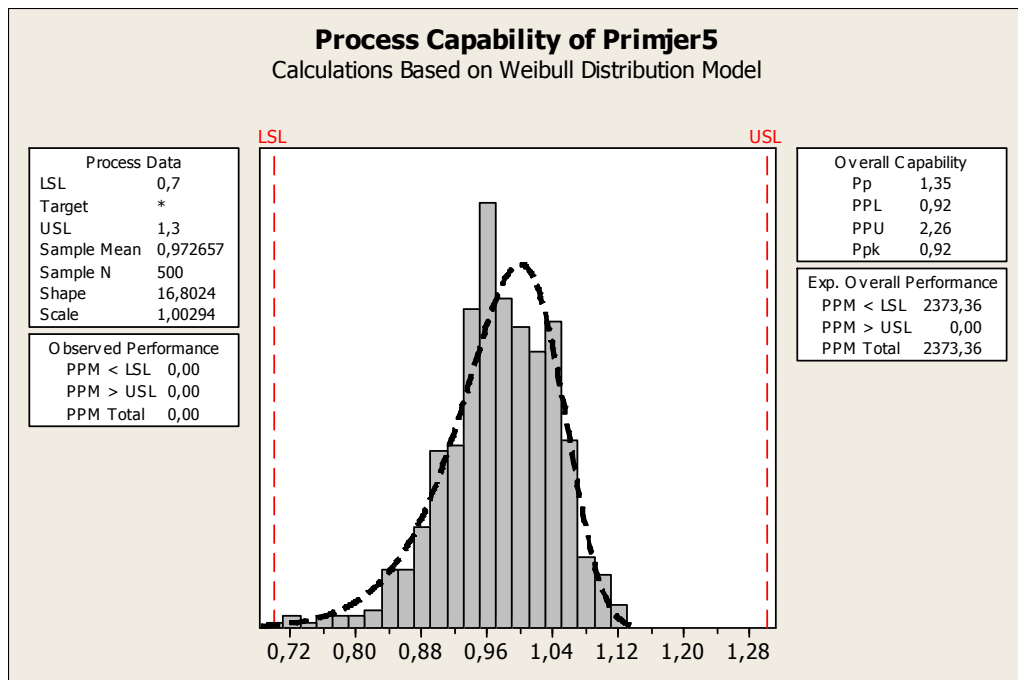
Slika 43. Johnson-ove transformacije za Primjer 5.

Program je izabrao područje SU (neograničeni sustav) kao najbolji za transformaciju. Graf koji prikazuje analizu sposobnosti za Primjer 5. nalazi se na slici 44.



Slika 44. Analiza sposobnosti nenormalnih razdioba pomoću Johnson-ovih transformacija za Primjer 5. (LSL=0,7, USL=1,3)

Nakon transformacije uslijedila je analiza za Weibull-ove distribucije.



Slika 45. Analiza sposobnosti Weibull-ovih razdioba za Primjer 5.  
(LSL=0,7,USL=1,3)

Rezultati analiza doista su zanimljivi. Transformacijom podataka pomoću Johnson-ovog sustava jednadžbi, indeksima performansi moguće je zaključiti o sposobnosti procesa.

No, odabir Weibull-ovog distribucijskog modela u statističkim software-ima dao je različite ishode. U *Statistici* su visoki i upućuju na sposobnost procesa ( $P_p=1,47$ ,  $P_{pk}=1,33$ ). *Minitab* je za Weibull-ov distribucijski model ispisao  $P_p=1,35$ , a  $P_{pk}=0,92$ .



## 6.7 Rezultati teorijskih primjera

Tabela 9.  
Usporedba  
rezultata  
Primjera  
1,2,3,4 i 5.

				Statistica				Minitab			
	LSL	USL	Razdioba	$C_p$	$C_{pk}$	$P_p$	$P_{pk}$	$C_p$	$C_{pk}$	$P_p$	$P_{pk}$
Primjer 1.	-3	3	Normalna	1,036	1,031	1,019	1,015	1,00	0,99	1,02	1,02
			Nenormalna(transformacije)	1,009	1,005	-	-	-	-	-	-
Primjer 2.	59,99 6	60,0 016	Normalna	1,092	1,086	1,118	1,112	1,10	1,09	1,12	1,11
			Nenormalna(transformacije)	1,455	1,404	-	-	-	-	-	-
Primjer 3.	-5	5	Nenormalna(transformacije)	0,873	0,269	-	-	-	-	-	0,51
			Log-normalna	0,587	0,416	0,957	0,488	-	-	1,17	0,42
	-	7	Nenormalna(transformacije)	-	0,451	-	-	-	-	-	0,66
			Log-normalna	-	0,707	-	0,871	-	-	-	0,71
Primjer 4.	0	6	Nenormalna(transformacije)	0,524	0,452	-	-	-	-	0,98	0,66
	-	6	Log-normalna	-	0,303	-	0,873	-	-	-	0,30
Primjer 5.	0,7	0,3	Weibull-ova	1,347	0,923	1,470	1,336	-	-	1,35	0,92

Primjerom 1. pokazana je procjena sposobnosti za normalne distribucije. Oba su software-a došla do istih rezultata za indekse sposobnosti, ali i za indekse performansi. Probavši transformirati podatke *Minitab* nije uspio, točnije nije pronašao jednadžbu koja bi bila u stanju to učiniti, dok je *Statistica* bez problema ispisala indekse sposobnosti transformiranih podataka.

U Primjeru 2. jasno je vidljivo kako su oba programa dobila ista rješenja za analizu sposobnosti normalnih razdioba. Dobiveni iznosi za indekse sposobnosti i performansi identični su. Problem je nastao ponovno pri transformaciji podataka, gdje je *Statistica* jednostavno došla do rješenja, a *Minitab* ponovno nije našao Johnson-ovu jednadžbu kojom bi podatke transformirao.

Treći je primjer najprije transformiran. *Statistica* je ispisala indekse sposobnosti, ali je iz nepoznatog razloga izostavila izračun indeksa performansi. Transformacijom u *Minitab*-u, nestala je donja granica zahtjeva, a s njom i tolerancijsko polje za izračun  $P_p$  indeksa. Zato su vrijednosti ove transformacije neusporedive. Sljedeći pokušaj bio je odabir log-normalnog distribucijskog modela sa istim granicama zahtjeva. *Minitab* je napravio jedinu logičnu stvar, nije mogao izračunati indekse sposobnosti jer nema odgovarajuće karte za provjeru stabilnosti ovih podataka. Dobiveni indeksi performansi u ovom su koraku vrlo slični.

Postavivši samo jednu granicu zahtjeva na podatke Primjera 3., uslijedila je transformacija. Oba su programa izostavila  $C_p$  i  $P_p$  indekse, jer više ne postoji tolerancijsko polje, no *Minitab* se izjasnio putem indeksa performansi, a *Statistica* indeksom sposobnosti. Odabirom analize sposobnosti log-normalnih razdioba, dobili smo približno iste iznose  $P_{pk}$ .

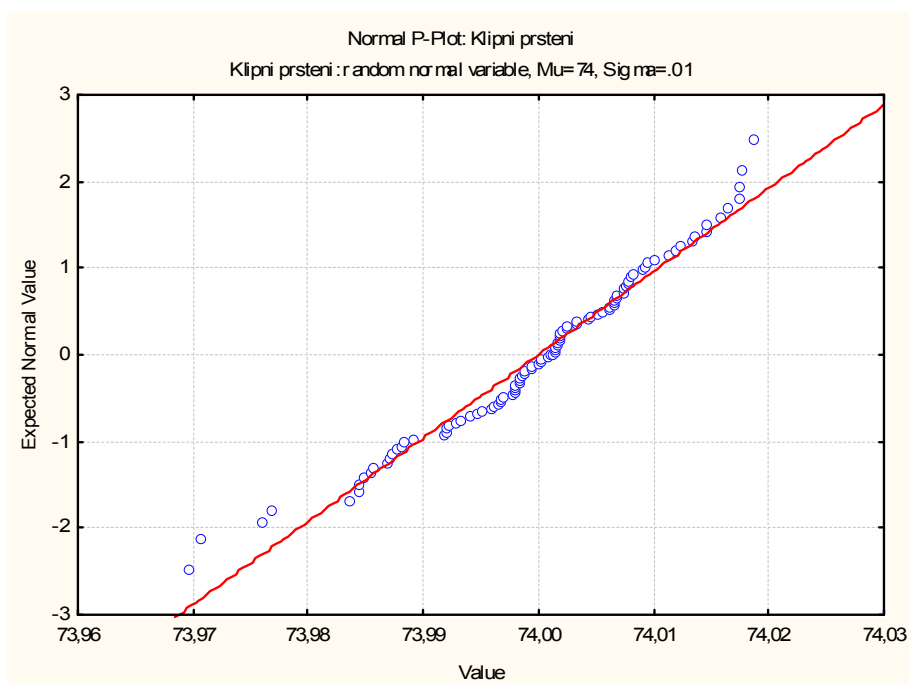
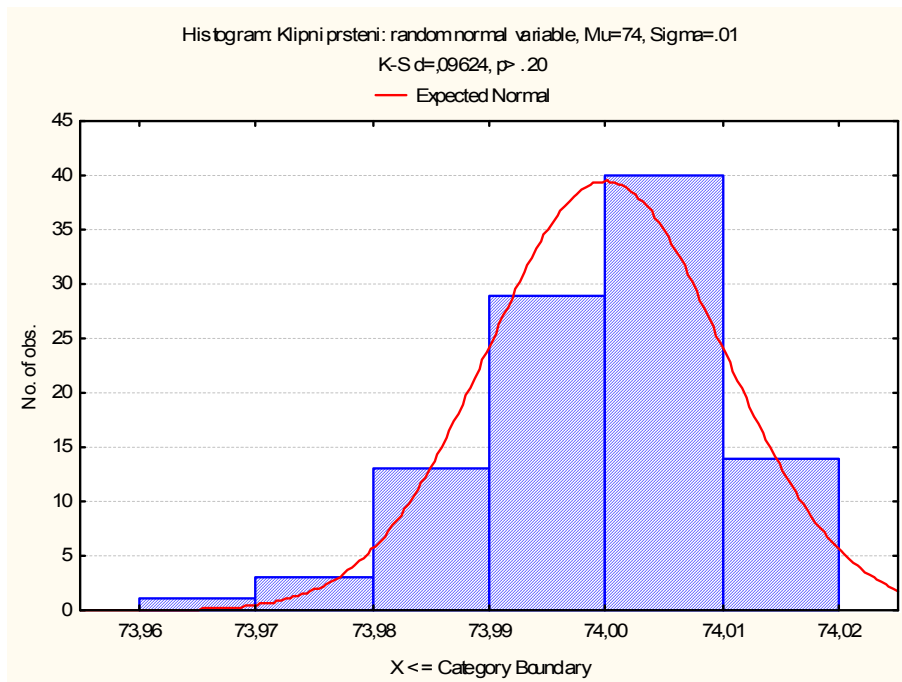


Log-normalni Primjer 4. predstavlja procese u kojima nema logike postaviti tolerancijsko polje, već samo ciljanu vrijednost i gornju granicu zahtjeva. Transformirani podaci ponovno su neusporedivi jer su izraženi različitim indeksima. Log-normalnim distribucijskim modelom moguće je zamijetiti isti rezultat za  $C_{pk}$  u *Statistici* i  $P_{pk}$  u *Minitab*-u.

Peti je primjer teorijska Weibull-ova razdioba, nad kojom je vršena analiza sposobnosti Weibull-ovim distribucijskim modelom. *Minitab* ponovno ispisuje samo indekse performansi, prepoznavši nenormalnost i nestabilnost procesa. No, oni neodoljivo podsjećaju na iznose indeksa sposobnosti koje je dobila *Statistica*.

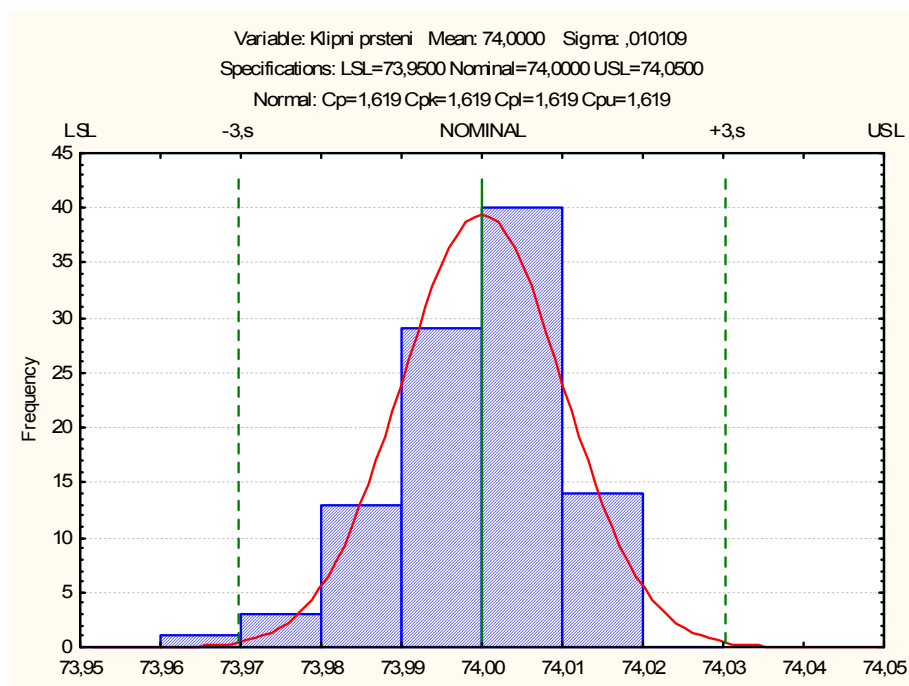
## 6.8 Primjer 6. Klipni prsteni

Pratila se proizvodnja klipnih prstena za automobilske motore. Njihov promjer mora biti 74 mm, a proizvođač tolerira da budu u granicama  $\pm 0,05$ . Slijedi prikaz svih 120 podataka u histogramu i na papiru vjerojatnosti.



Slika 46. Histogram i papir vjerojatnosti za Klipne prstene

Kako je očito da se Primjer 6. ponaša po normalnoj razdiobi, primijeniti će se analiza sposobnosti za normalne razdiobe. Na taj će se način dobiti prikaz cijelog tolerancijskog polja i histograma procesa, ali i tablice sa svim važnim podacima za analizu.



Slika 47. Sposobnost procesa normalnih razdioba za Klipne prstene

$$(T=74, \delta=\pm 0,05)$$

Tabela 10. Indeksi sposobnosti Klipnih prstena

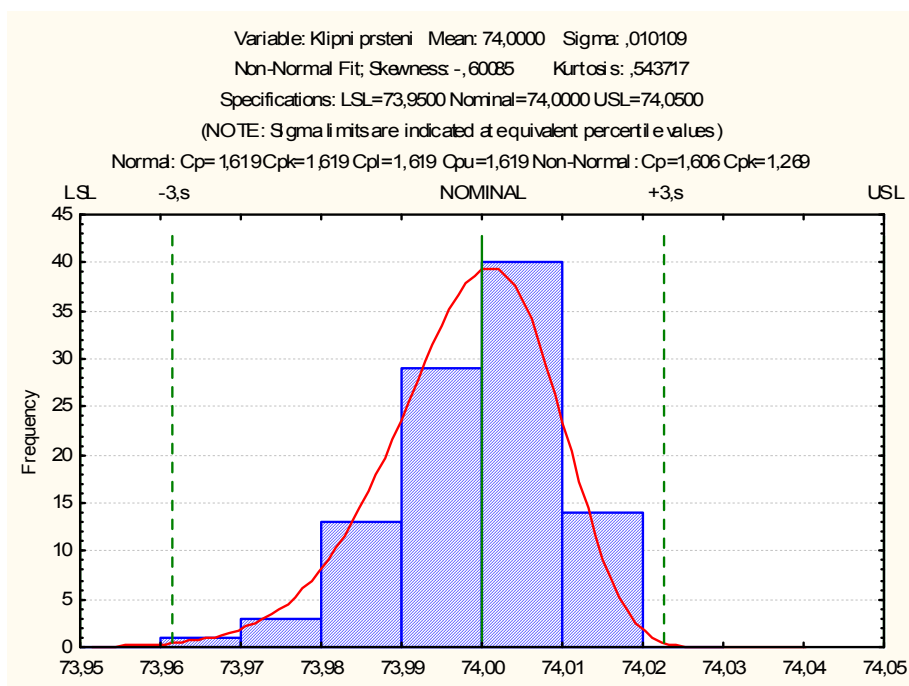
Variable: Klipni prsteni	
	Value
Lower Specification Limit	73,95000
Nominal Specification	74,00000
Upper Specification Limit	74,05000
CP (potential capability)	1,61881
CPK (demonstrated excellence)	1,61859
CPL (lower capability index)	1,61859
CPU (upper capability index)	1,61903

<b>K (non-centering correction)</b>	0,00014
-------------------------------------	---------

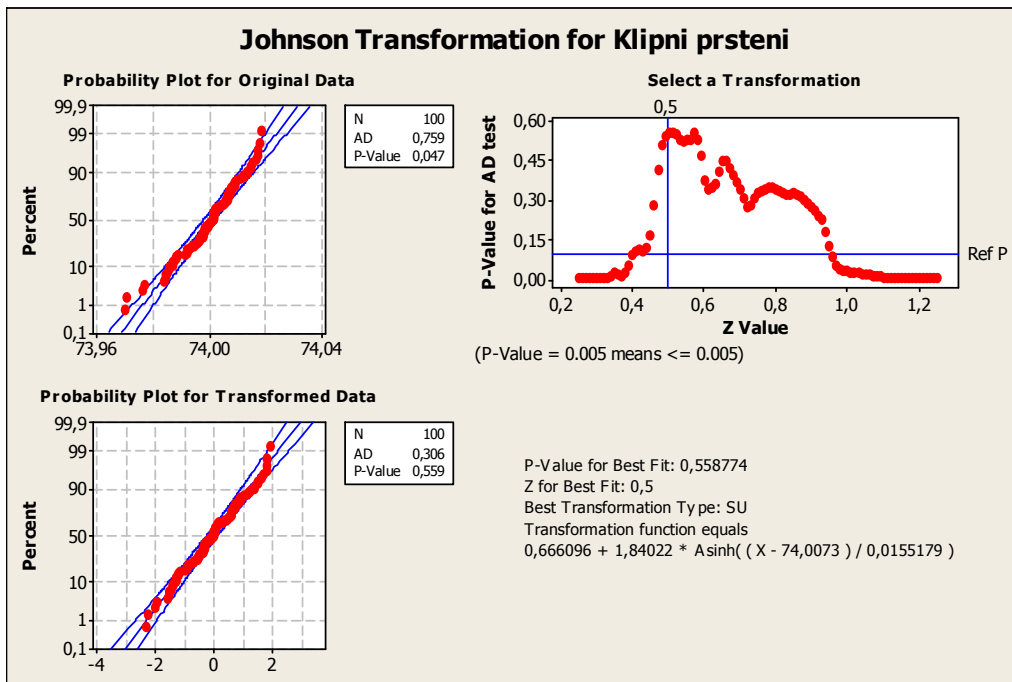
Tabela 11. Indeksi performansi Klipnih prstena

Variable: Klipni prsteni	
	Value
<b>Lower Specification Limit</b>	73,95000
<b>Nominal Specification</b>	74,00000
<b>Upper Specification Limit</b>	74,05000
<b>PP (performance index)</b>	1,64867
<b>PR (performance ratio)</b>	0,60655
<b>PPK (perf. demonstr. excell.)</b>	1,64844
<b>PPL (lower performance index)</b>	1,64844
<b>PPU (upper performance index)</b>	1,64889

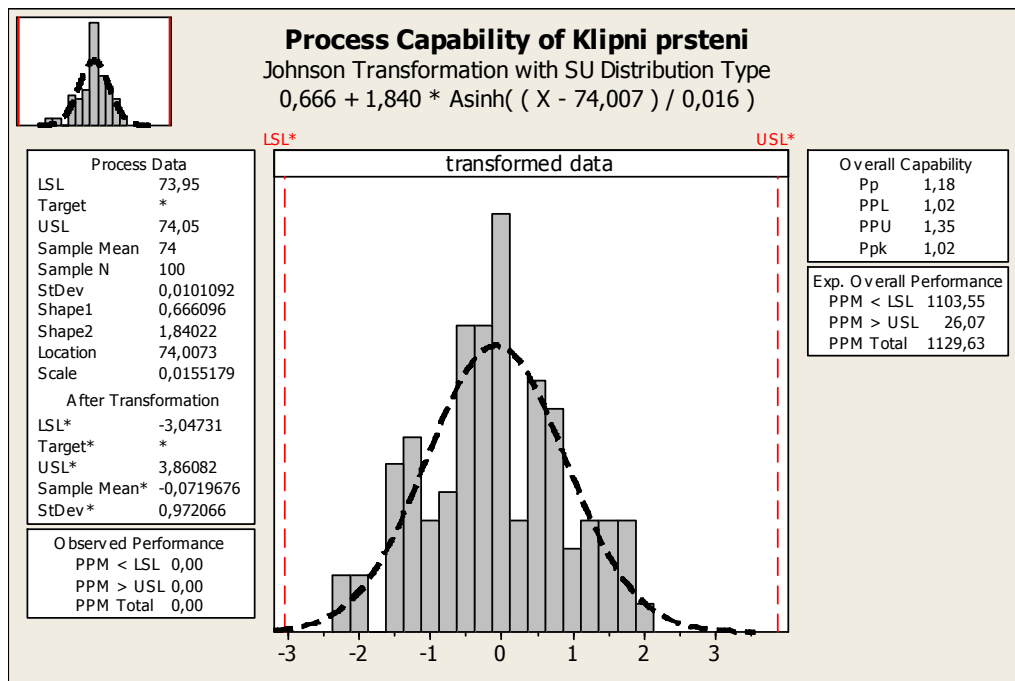
Iako je već moguće potvrditi sposobnost procesa za proizvodnju klipnih prstena, provjeriti će se što se događa ako se takvi normalni podaci transformiraju i to će se učiniti pomoću oba programa.



Slika 48. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Klipne prstene ( $T=74$ ,  $\delta=\pm 0,05$ )



Slika 49. Johnson-ove transformacije za Klipne prstene



Slika 50. Analiza sposobnosti nenormalnih razdioba pomoću Johnson-ovih transformacija za Klipne prstene (LSL=73,95, USL=74,05)

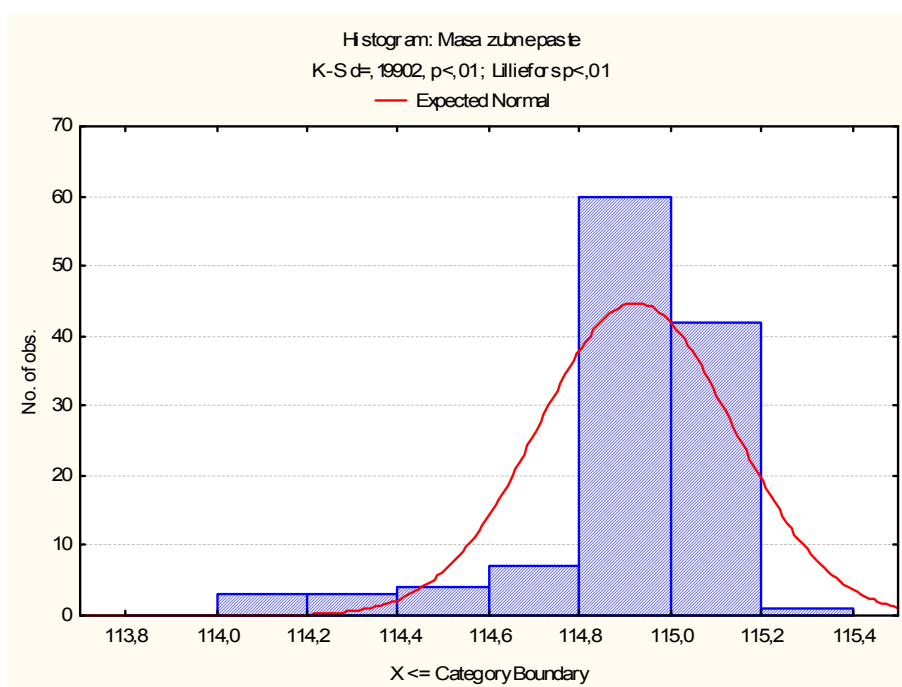
Rezultati odaju kako postoji veliko neslaganje između dva programska paketa. Podatke za koje smo mislili da su normalni, *Minitab* je bez problema transformirao u području SU (neograničenog sustava.).

Moguće je komentirati dobivene rezultate samo indeksima performansi. *Statistica* je dobila  $P_p = 1,648 = P_{pk}$ , što znači da oba indeksa imaju istu vrijednost. *Minitab* je dobio nešto niže rezultate i oni su vidljivi na histogramu koji prikazuje slika 50.

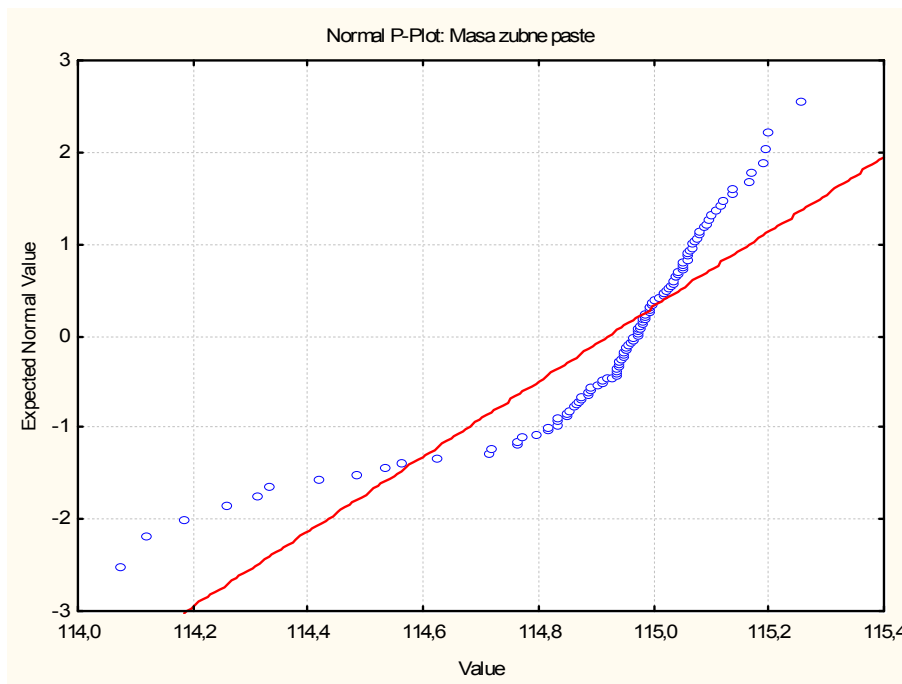
## 6.9 Primjer 7. Masa zubne paste

U proizvodnji zubne paste, tubu je potrebno napuniti masom zubne paste od 115g. Na početku proizvodnog ciklusa tube su bile popunjene nešto manjom masom od zadane, no ubrzo se sve normaliziralo i punjenje je dostiglo ciljanu vrijednost.

Na slikama su prikazani histogram i papir vjerojatnosti ovog primjera.



Slika 51. Histogram za Masu zubne paste



Slika 52. Papir vjerojatnosti za Masu zubne paste

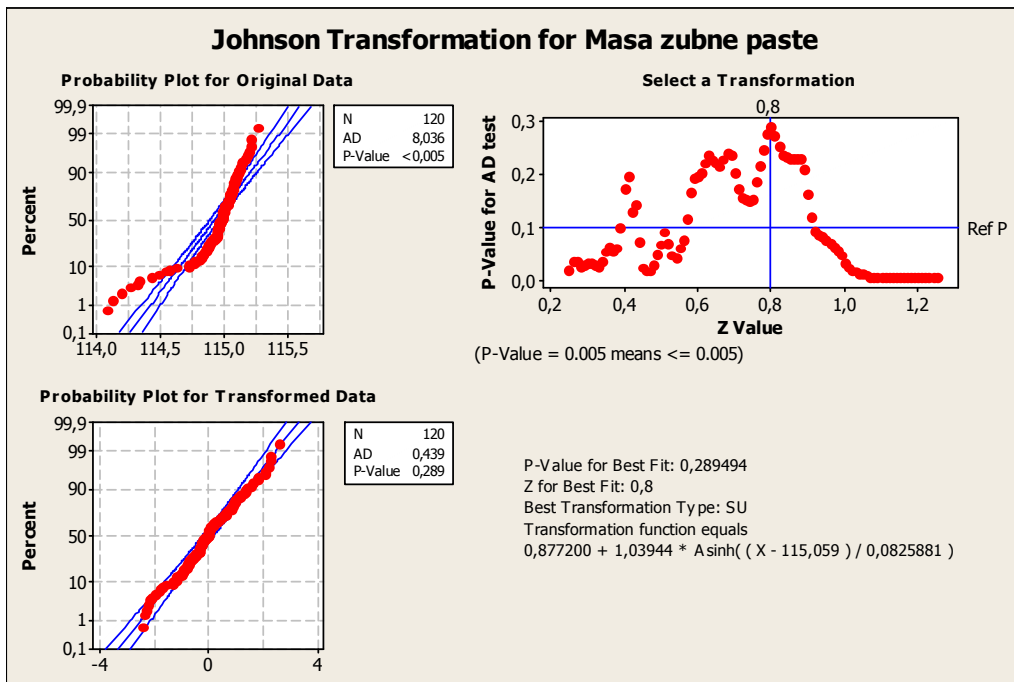
Pretpostavka kako je proces normalan, bila bi suluda. Iz slike 52. jasno se vidi kako je proces spljošten.

Software-sko rješenje Minitab ne može uz pomoć ijednog poznatog modela, poput Weibull-ovog, prilagoditi podatke na odgovarajući način. No, Johnson-ov postupak osigurava dobru transformaciju.

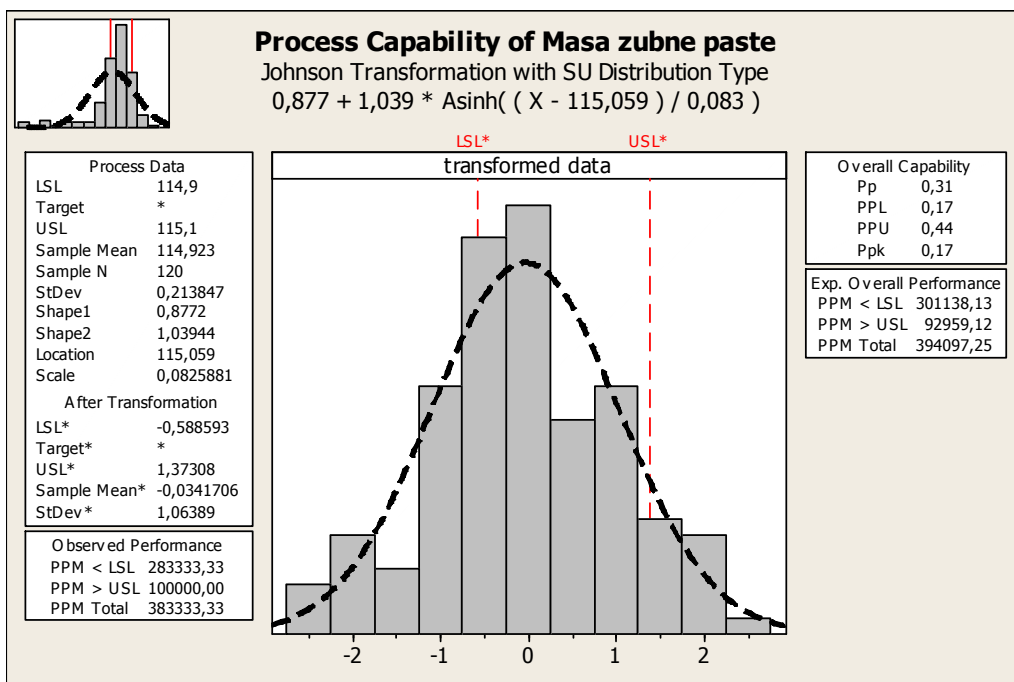
Kao što i prikazuju slike 53. i 54., stvarni model koji podatke o punjenju zubne paste pretvara u normalnu razdiobu, vrlo je kompliciran jer uključuje inverzni hiperbolni sinus.

Ciljana vrijednost je dakle 115 g, a dozvoljeno odstupanje 0,1, što znači da je USL = 115,1 g, a LSL=114,9 g.



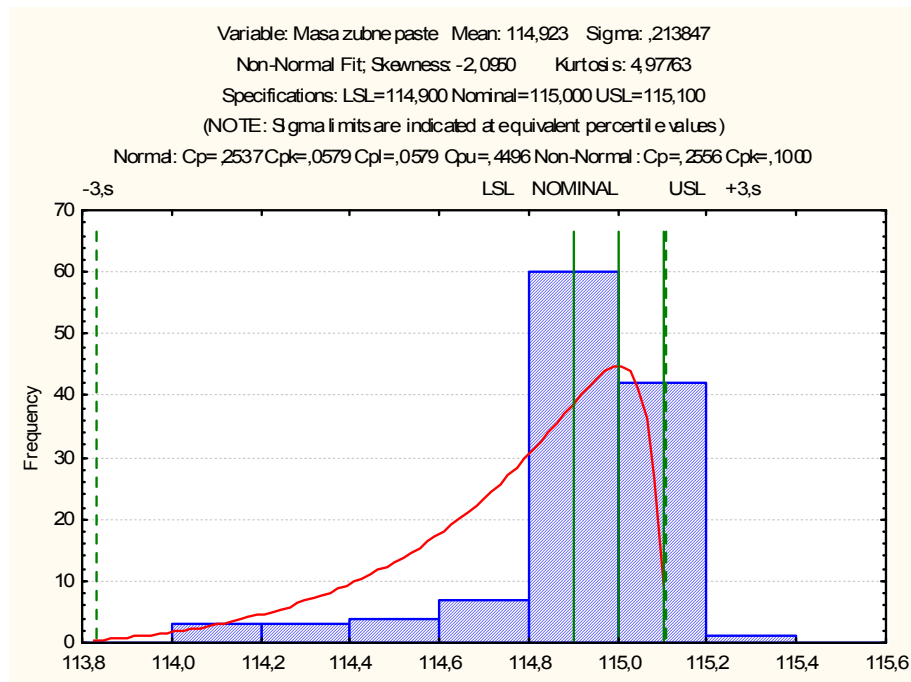


Slika 53. Johnson-ove transformacije za Masu zubne paste



Slika 54. Analiza sposobnosti nenormalnih razdioba pomoću Johnson-ovih transformacija za Masu zubne paste(LSL=114,9,USL=115,1)

Zadatak je bio dobiti približno iste rezultate kao što su i ovi dobiveni u *Minitab*-u. Primijenjena je opcija za određivanje sposobnosti procesa nenormalnih razdioba. Rezultati su prikazani na sljedećim grafikonima i tablicama.



Slika 55. Sposobnost procesa nenormalnih razdioba za Masu zubne paste  
 ( $T=115, \delta=\pm 0,1$ )

Kako je nemoguće uspoređivati rezultate zato što opcija za nenormalne razdiobe u *Statistici* ne ispisuje indekse performansi, ovaj proces je nemoguće proglasiti sposobnim ili nesposobnim.

## 7. Zaključak

Ovim diplomskim radom željelo se ukazati na probleme olakog prihvaćanja i korištenja normalne razdiobe. Navedeni su uzroci zbog kojih nastaju stvarni, vrlo često nenormalni procesi. Sva literatura govori upravo o tome kako se praktičari vrlo često ne žele zamarati sa drugim distribucijskim modelima pa zbog pojednostavljenja biraju upravo normalni, što ih na koncu može dovesti do netočnih zaključaka.

Jedno od mnogih područja korištenja normalne razdiobe je i analiza sposobnosti procesa. Preduvjeti za izračun indeksa su normalna razdioba i stabilnost procesa, to jest korištenje kontrolne karte. Upravo tu leži problem, što ne postoje kontrolne granice unutar karata koje bi se mogla prilagoditi tim nesavršenim podacima.

U radu sa nenormalnim podacima korištena su postojeća software-ska rješenja, koja su na kraju dovela do mnogih novih pitanja. Pojavili su se problemi sa transformacijom podataka, zato što je *Statistica* nudila nejasna rješenja, bez konkretnih jednadžbi same transformacije. Zbog transparentnosti postupka, pohvala ide *Minitab*-ovom rješenju. Pri analizi nenormalnih podataka, generirao je samo  $P_{\bar{y}}$  i  $P_{\bar{y}k}$  indekse, što je i jedino logično jer razdiobe nisu bile normalne.

Ovo područje potrebno je stoga razvijati u tom smjeru. Kao prvo, odrediti nove kontrolne granice karata, koje bi bile fleksibilne obzirom na zadani slučaj. Drugo što bi se i dalje trebalo razvijati je transformiranje podataka i integriranje u software-ska rješenja. I posljednje, što bi najviše pomoglo točnijoj procjeni sposobnosti, su sami indeksi. Sigurno će se kroz par godina pojaviti entuzijasti koji će osmisliti novu koncepciju njihovih izračuna ili predstaviti neke nove indekse.

## 8. Literatura

[1] Muir Alastair: Process Capability Calculations with Non-Normal Data, s Interneta, <http://www.isixsigma.com/library/content/c050725a.asp>, 26.3.2008.

[2] Malin Albing : Process Capability Analysis with Focus on Indices for One-sided Specification Limits, s Interneta, 28.5.2008.

[3] Forrest W. Breyfolge III: „Implementing Six Sigma“, Awiley-Interscience Publication, 1999.

[4] Edgar Dietrich, Alfred Schulze : „Statistical Procedures for Machine and Process Qualification, ASQ Quality Press, 1998.

[5] „Non-Normal Process Capability Evaluator; Symphony Technologies, s Interneta, <http://www.symphonytech.com/nnpc.html>, 26.3.2008.

[6] Thomas Pyzdek: „Non-Normal Distributions in the Real World“, s Interneta, <http://www.qualitydigest.com/dec99/html/nonnormal.html>, 27.3.2008.

[7] Arne Buthmann: „Dealing with Non-Normal Data; Strategies and Tools“, s Interneta, <http://www.europe.isixsigma.com/library/content/c0804020.asp>, 15.6.2008.

[8] Andy Sleeper : „What if there was no Normal distribution ?“, s Interneta, <http://www.asq.org>, 16.6.2008.

[9] s Interneta, <http://www.wikipedia.org>, 10.7.2008.

[10] Matt Savage: „How do we determine process capability if the process isn't normal?“, s Interneta, [http://www.qualityadvisor.com/library/capability\\_process\\_capability](http://www.qualityadvisor.com/library/capability_process_capability), 26.3.2008.

[11] „Statistical Process Control for Nonnormal Distributions“, s Interneta, <http://www.ct-yankee.com/spc/nonnormal.html>, 26.3.2008.

[12] Keith M. Bower: „Capability Analysis with Non-Normal Data“, s Interneta, <http://asq.org/sixsigma>, 15.5.2008.

[13] Statistica 7, Electronical Manual