SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mateo Budimlić

Zagreb, 2012.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentori: Student:

Prof. dr. sc. Biserka Runje, dipl. ing. Mateo Budimlić

Zagreb, 2012.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Posebne zahvale dugujem mentorici, Prof. dr. sc. Biserki Runje na odabiru diplomskog rada te na vodstvu i savjetima pruženima tijekom rada. Također zahvaljujem svima ostalima koji su mi pomogli tijekom rada svojim savjetima i dobronamjernim primjedbama.

Mateo Budimlić

SADRŽAJ

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

SAŽETAK

U svrhu boljeg kontroliranja ali i poboljšavanja proizvodnih procesa potreban je kvalitetan mjerni sustav koji mjeri značajke procesa. U ovom radu opisani su postupci za analizu mjernih sustava (procjenu kvalitete mjernih sustava). Navedene su i opisane osnovne sastavnice mjernog sustava, te su definirani mjeriteljski pojmovi i statističke veličine za procjenu kvalitete mjernog sustava.

Postoji razlika u analizi mjernih sustava, ovisno o tome dali se taj mjerni sustav koristi u laboratorijskim uvjetima ili u industrijskim uvjetima. Kod analize laboratorijskih mjernih sustava potrebno je analizirati dali postoje grube pogreške u izmjerenim podacima. To se radi sa različitim testovima koji su opisani u ovome radu. Potom se radi usporedba rezultata mjerenja. Sve metode za usporedbu rezultata mjerenja i testovi za određivanje grubih pogrešaka opisani su u radu i u skladu su sa normom ISO 5725:1994, te su dani primjeri provedbe analize takvog jednog laboratorijskog mjernog sustava.

Mjerni podaci se općenito dijele na mjerljive i atributivne . Iz toga proizlazi da se i metode za procjenu kvalitete tih sustava moraju razlikovati ovisno o tipu podataka. U radu su opisane sve metode za procjenu kvalitete inustrijskih mjernih sustava i za mjerljive i za atributivne podatke. Metode su popraćene primjerima u svrhu lakšeg razumjevanja. Za analizu podataka u industriji koriste se različiti softverski paketi za jednostavnije računanje opisanih metoda, pa se pri izradi ovog rada koristio takav jedan program pod nazivom Minitab 16-probna verzija. U radu je također procijenjen utjecaj kvalitete mjernog sustava na procjenu sposobnosti procesa.

Kvaliteta mjernog sustava u laboratorijskim uvijetima se u posljednje vrijeme najčešće procjenjuje izračunom mjerne nesigurnosti. U radu je opisana GUM metoda za određivanje mjerne nesigurnosti. Mjerna nesigurnost je najvažniji statistički podatak u mjeriteljstvu, a procjenjuje se radi nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe mjernih rezultata dobivenih u različitim umjernim i ispitnim laboratorijima ali i radi usporedbe mjernih rezultata sa specifikacijama proizvođača ili zadanom tolerancijom. Izračun mjerne nesigurnosti popraćen je primjerom.

1. Uvod

Kako bi se pravilno kontrolirao i poboljšao proizvodni proces, potrebno je mjeriti značajke izlaza iz procesa. Mjerni podaci se danas koriste na više različitih načina nego ikad prije. Na primjer, odluka o prilagodi proizvodnog procesa se donosi na temelju mjernih podataka. Mjerni podaci , ili neka statistika izračunata na temelju njih, se uspoređuju sa statističkim kontrolnim granicama za određeni proces. Ukoliko ta usporedba ukazuje da je taj proces izvan statističke kontrole, onda je potrebno izvršiti prilagodbe i poboljšanja. U suprotnom, procesu je dozvoljen nekontroliran rad. Još jedna korist mjernih podataka je određivanje potencijalnih signifikantnih veza između dviju varijabli.

Za svaku skupinu izmjerenih podataka prikupljenih kako bi se kontrolirao neki proces, barem dio varijacije je uzrok mjernog sustava. Razlog tomu je što se pri ponavljanju mjerenja iste značajke ne dobivaju uvijek iste vrijednosti. Kako bi se osiguralo da varijabilnost mjernog sustava nije štetno velika, potrebno je provesti studiju sposobnosti mjernog sustava. Cilj te studije je:

- Utvrđivanje varijabilnosti (koja je uzrok mjernog sustava) sakupljenih podataka,
- Izoliranje izvora varijabilnosti u mjernom sustavu,
- Procjenjivanje prikladnosti primjene mjernog sustava.

Postoji razlika u analizi podataka dobivenih iz mjernih laboratorija i podataka dobivenih iz industrijskih sustava. U nastavku rada objašnjene su te razlike, te su opisani postupci za procjenjivanje kvalitete mjernog sustava. [1,2,3]

2. Osnovni mjeriteljski pojmovi

Mjerenje- je definirano kao dodjeljivanje vrijednosti materijalnim stvarima kako bi se prikazale veze među njima s obzirom na pojedina svojstva. Proces dodjele vrijednosti je definiran kao proces mjerenja.

Mjerilo- je bilo koji uređaj koji se koristi za dobivanje mjera.

Mjerni sustav- je skupina instrumenata, mjerila, standarda, operacija, metoda, sofvera, osoblja, okolina i pretpostavki korištenih kako bi se kvantificirala jedinica mjere ili kako bi se popravila procjena karakteristika mjere koja se mjeri.

Standard- bi trebao biti operacijska definicija. To je definicija koja će pružiti iste rezultate kada ju primjenjuje dobavljač ili kupac, sa istim značenjem i jučer i danas i sutra.

Rezolucija- najmanja čitljiva jedinica mjerila.

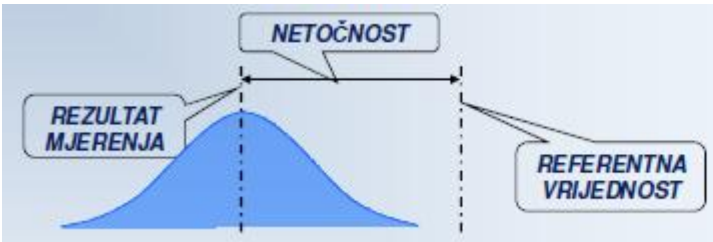
Efektivna rezolucija- osjetljivost mjernog sustava na varijacije procesa.

Referentna vrijednost- je vrijednost koja služi kao dogovorena referenca za mjernu vrijednost, a može biti utvrđena na osnovi srednje vrijednost rezultata više mjerenja provedenih mjernom opremom više razine točnosti.

Prava vrijednost- točna vrijednost mjere predmeta (nepozntata i nije ju moguće znati).

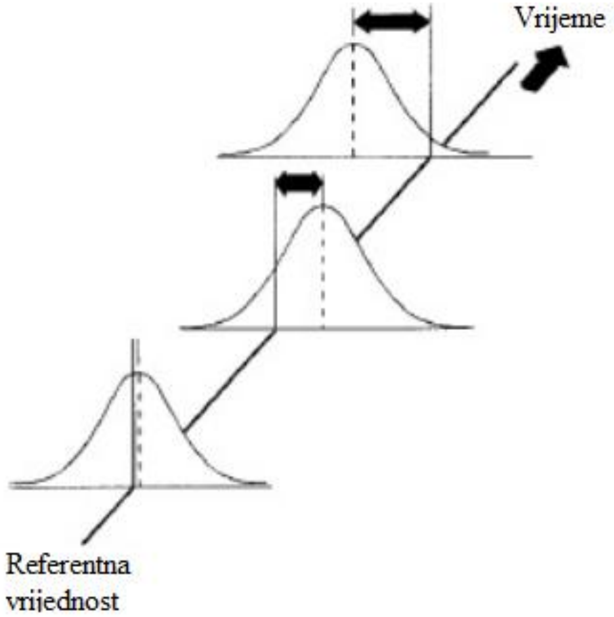
Točnost- bliskost pravoj mjeri ili prihvaćenoj referentnoj mjeri.

Netočnost- je razlika između prave vrijednosti (referentne vrijednosti) i promatrane sredine mjernih rezultata iste karakteristike na istom dijelu (slika 1.).



Slika 1. Netočnost, [4]

Stabilnost- promjena u netočnosti tijekom vremena. Ukupna varijacija rezultata mjerenja dobivenih mjernim sustavom tijekom mjerenja pojedine karakteristike na istom dijelu tijekom dužeg vremenskog perioda.



Slika 2. Stabilnost, [1]

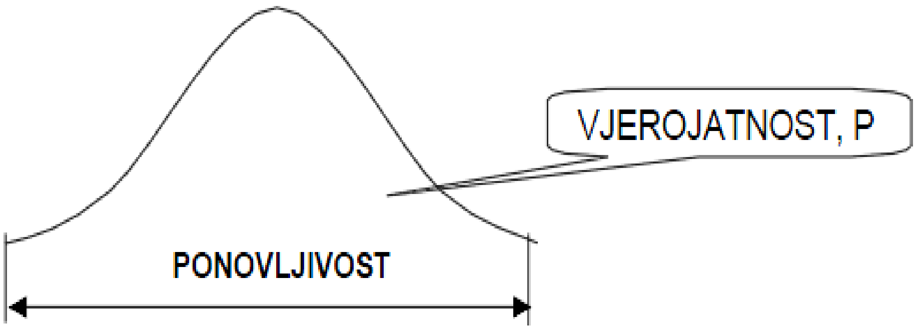
<u>Linearnost</u>- promjena u netočnosti tijekom normalnog raspona. Komponenta sistemske greške mjernog sustava.

<u>Preciznost</u>- bliskost očitanja ponovljenih mjerenja. Usko vezana sa ponovljivosti.

<u>Mjerna ponovljivost EV(Equipment variation)</u> - usko slaganje između rezultata uzastopnih mjerenja iste mjerene veličine izvedenih u istim mjernim uvjetima koji uključuju:

- Isti mjerni postupak,
- Istog mjeritelja
- Isto mjerilo upotrebljavano u istim uvjetima
- Isto mjerno mjesto
- Ponavljanje u kratkom vremenu

Ponovljivost se može izraziti količinski s pomoću značajki rasipanja rezultata mjerenja. Ponovljivost u najvećoj mjeri određuje utjecaj mjerila u varijaciji mjernog sustava.

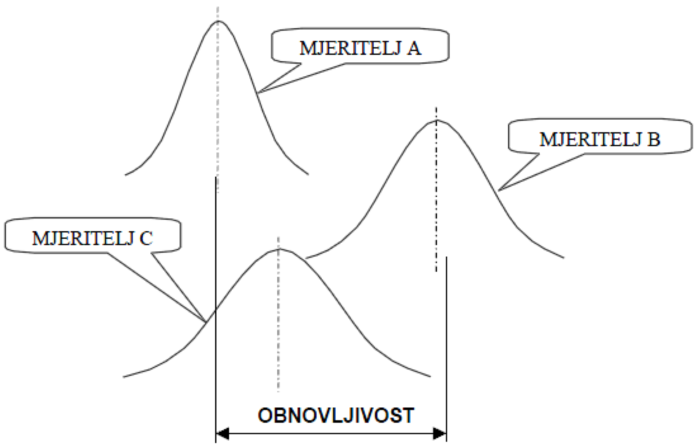


Slika 3. Ponovljivost mjernih rezultata,[4]

Mjerna vrijednost ponovljivosti *r* je vrijednost unutar koje se može očekivati da leži razlika između dvaju pojedinačnih rezultata mjerenja dobivena uz uvjete ponovljivosti, uz vjerojatnost od 95 %.

Kritična razlika ponovljivosti *CrDr* je vrijednost unutar koje se može očekivati da leži razlika dvaju pojedinačnih rezultata ispitivanja dobivena uz uvjete ponovljivost sa specificiranom vjerojatnosti.

<u>Obnovljivost AV(Appraiser variation)</u> **-** je rasipanje rezultata mjerenja dobiveno od strane većeg broja mjeritelja pri višestrukom mjerenju iste karakteristike na istim djelovima uz korištenje istog ili različitog mjernog instrumenta. Obnovljivost se može izraziti količinski s pomoću značajki rasipanja rezultata mjerenja. Obnovljivost u najvećoj mjeri određuje utjecaj mjeritelja u varijaciji mjernog sustava. U slučaju da u mjernom sustavu sudjeluje samo jedan mjeritelj, obnovljivost je definirana kao rasipanje rezultata mjerenja dobiveno pri višestrukom mjerenju identične karakteristike na istim djelovima uz korištenje istog ili različitog mjernog instrumenta kroz duži vremenski period.



Slika 4. Obnovljivost mjernih rezultata, [4]

Mjerna vrijednost obnovljivosti *R* je vrijednost unutar koje se može očekivati da leži apsolutna razlika između dvaju rezultata mjerenja, dobivena uz uvjete obnovljivosti, uz vjerojatnost 95 %.

Kritična razlika obnovljivosti CrD_R je vrijednost unutar koje se može očekivati da leži apsolutna razlika između dvaju rezultata ispitivanja, dobivena uz uvjete obnovljivosti sa specificiranom vjerojatnosti.

R&R ili GRR- udružena ponovljivost i obnovljivost mjernog sustava.

$$\sigma^2{}_{GRR} = \sigma^2{}_{ponovljivost} + \sigma^2{}_{obnovljivost} \tag{1.1}$$

Sposobnost mjernog sustava- predstavlja udio varijabilnosti mjernog sustava (R&R) iskazanog postotkom područja dopuštenog odstupanja (T).

Konzistentnost- razlika u varijaciji rezultata mjerenja dobivenih u vremenu. Tijekom dužeg vremena može se smatrati kao ponovljivost.

Sposobnost (Capability)- varijabilnost očitanja pribavljenih tijekom vremenski kratkog perioda.

$$\sigma^2{}_{sposobnost} = \sigma^2{}_{netočnost} + \sigma^2{}_{GRR} \tag{1.2}$$

Učinak (Performance)- varijabilnost očitanja pribavljenih tijekom vremenski dugog perioda.

$$\sigma^2{}_{učinak} = \sigma^2{}_{sposobnost} + \sigma^2{}_{stabilnost} + \sigma^2{}_{konzistentnost} \tag{1.3}$$

Mjerna nesigurnost- definirana je kao parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini uz određenu vjerojatnost.

$$prava\ vrijednost = rezultat\ mjerenja \pm U \tag{1.4}$$

$$U = k \cdot u_c \tag{1.5}$$

3. Procjena kvalitete mjernog sustava sukladno ISO 5725:1994

3.1. Određivanje grubih grešaka

Kako bi se rezultati mjerenja mogli uspoređivati potrebno je odrediti da li u skupini podataka ima grubih pogrešaka koje bi mogle poremetiti te usporedbe. Grube pogreške se mogu određivati na grafički ali i na numerički način. Pod grafičke metode određivanja grubih pogrešaka spadaju:

- Mandelov k-test
- Mandelov h-test

Pod numeričke metode za određivanje grubih pogrešaka spadaju:

- Cochran-ov test
- Grubbs-ov test

3.1.1. Grafička metoda

Prije obavljanja bilo kakvih testova za određivanje potencijalne pogreške potrebno je napraviti grafički prikaz sirovih podataka. Mnogo informacija se može dobiti pregledom grafičkog prikaza sirovih podataka. Iz grafičkog prikaza sirovih podataka može se nagovijestiti gruba pogreška, ili neobične razlike postanu očite prilikom vizulanog pregleda grafičkog prikaza.

3.1.1.1. Mandelov k-test

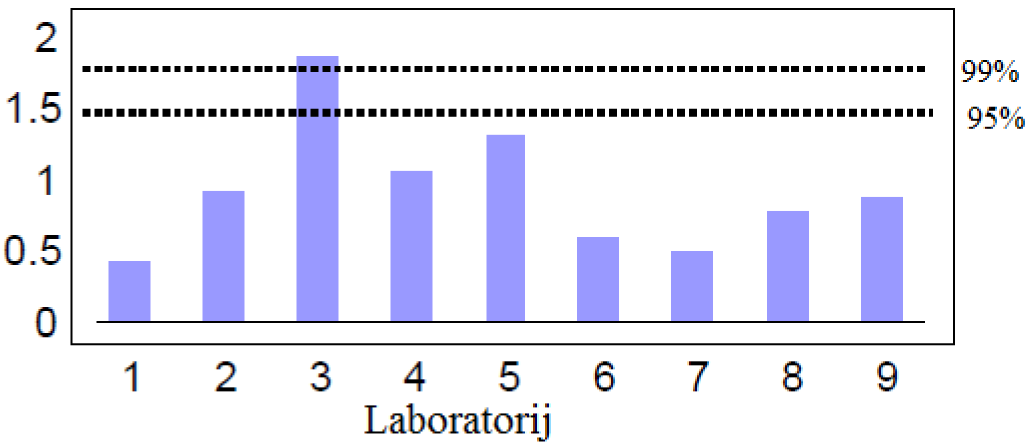
Na određenoj razini interesa, standardna odstupanja dobivena od svih laboratorija se koriste za izračunavanje srednjeg standardnog odstupanja. Ova vrijednost se koristi za izračun Mandelove k-statistike za sve laboratorije za tu razinu. Mandelova k-statistika definirana je jednadžbom 1.8. To je kvocijent standardnog odstupanja rezultata i srednjeg ili skupnog standardnog odstupanja. Standardno odstupanje rezultata unutar laboratorija je definirano izrazom 1.6 , a skupno standardno odstupanje svih laboratorija (standardno odstupanje ponovljivosti) je definiranom izrazom 1.7.

$$s_{ij} = \sqrt{\frac{1}{n_{ij}-1}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2} \tag{1.6}$$

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p} s_i^2}{p_i}} \quad (1.7)$$

$$k_{ij} = \frac{s_{ij}\sqrt{p_j}}{\sqrt{\sum s_{ij}{}^2}} = \frac{s_{ij}}{s_r} \quad (1.8)$$

Na slici 5. prikazan je primjer Mandelovog k-dijagrama s ucrtanim razinama značajnosti od 95% i 99%. Svi podaci koji prolaze te razine se mogu smatrati kao grube pogreške. Na danom primjeru se može vidjeti da je laboratorij 3 prošao kritičnu vrijednost razine značajnosti od 99%, stoga se može zaključiti da je ta vrijednost gruba pogreška.



Slika 5. Primjer Mandelovoh k-dijagrama, [6]

Tablica 1. Pokazatelji za Mandelovu h i k statistiku na razini značajnosti od 5 %, [3]

p	h	k								
		n								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1,15	1,65	1,53	1,45	1,40	1,37	1,34	1,32	1,30	1,29
4	1,42	1,76	1,59	1,50	1,44	1,40	1,37	1,35	1,33	1,31
5	1,57	1,81	1,62	1,53	1,46	1,42	1,39	1,36	1,34	1,32
6	1,66	1,85	1,64	1,54	1,48	1,43	1,40	1,37	1,35	1,33
7	1,71	1,87	1,66	1,55	1,49	1,44	1,41	1,38	1,36	1,34
8	1,75	1,88	1,67	1,56	1,50	4,45	1,41	1,38	1,36	1,34
9	1,78	1,90	1,68	1,57	1,50	1,45	1,42	1,39	1,36	1,34

10	1,80	1,90	1,68	1,57	1,50	1,46	1,42	1,39	1,37	1,35
11	1,82	1,91	1,69	1,58	1,50	1,46	1,42	1,40	1,37	1,35
12	1,83	1,92	1,69	1,58	1,51	1,46	1,42	1,40	1,37	1,35
13	1,84	1,92	1,69	1,58	1,51	1,46	1,43	1,40	1,37	1,35
14	1,85	1,92	1,70	1,59	1,51	1,47	1,43	1,40	1,37	1,35
15	1,86	1,93	1,70	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,38	1,36
16	1,86	1,93	1,70	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,38	1,36
17	1,87	1,93	1,70	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,38	1,36
18	1,88	1,93	1,71	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,38	1,36
19	1,88	1,93	1,71	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,38	1,36
20	1,89	1,94	1,71	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,38	1,36
21	1,89	1,94	1,71	1,60	1,52	1,47	1,44	1,41	1,38	1,36
22	1,89	1,94	1,71	1,60	1,52	1,47	1,44	1,41	1,38	1,36
23	1,90	1,94	1,71	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
24	1,90	1,94	1,71	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
25	1,90	1,94	1,71	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
26	1,90	1,94	1,71	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
27	1,91	1,94	1,71	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
28	1,91	1,94	1,71	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
29	1,91	1,94	1,72	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
30	1,91	1,94	1,72	1,60	1,53	1,48	1,44	1,41	1,38	1,36
p = broj laboratorija na nekoj razini *n* = broj ponavljanja unutar svakog laboratorija na toj razini										

Tablica 2. Pokazatelji za Mandelovu h i k statistiku na razini značajnosti od 1 %, [3]

p	h	k								
		n								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1,15	1,71	1,64	1,58	1,53	1,49	1,46	1,43	1,41	1,39
4	1,49	1,91	1,77	1,67	1,60	1,55	1,51	1,48	1,45	1,43
5	1,72	2,05	1,85	1,73	1,65	1,59	1,55	1,51	1,48	1,46
6	1,87	2,14	1,90	1,77	1,68	1,62	1,57	1,53	1,50	1,47
7	1,98	2,20	1,94	1,79	1,70	1,63	1,58	1,54	1,51	1,48
8	2,06	2,25	1,97	1,81	1,71	1,65	1,59	1,55	1,52	1,49
9	2,13	2,29	1,99	1,82	1,73	1,66	1,60	1,56	1,53	1,50
10	2,18	2,32	2,00	1,84	1,74	1,66	1,61	1,57	1,53	1,50
11	2,22	2,34	2,01	1,85	1,74	1,67	1,62	1,57	1,54	1,51
12	2,25	2,36	2,2	1,85	1,75	1,68	1,62	1,58	1,54	1,51
13	2,27	2,38	2,03	1,86	1,76	1,68	1,63	1,58	1,55	1,52
14	2,30	2,39	2,04	1,87	1,76	1,69	1,63	1,58	1,55	1,52
15	2,32	2,41	2,05	1,87	1,76	1,69	1,63	1,59	1,55	1,52
16	2,33	2,42	2,05	1,88	1,77	1,69	1,63	1,59	1,55	1,52
17	2,35	2,44	2,06	1,88	1,77	1,69	1,64	1,59	1,55	1,52
18	2,36	2,44	2,06	1,88	1,77	1,70	1,64	1,59	1,56	1,52
19	2,37	2,44	2,07	1,89	1,78	1,70	1,64	1,59	1,56	1,53

20	2,39	2,45	2,07	1,89	1,78	1,70	1,64	1,60	1,56	1,53
21	2,39	2,46	2,07	1,89	1,78	1,70	1,64	1,60	1,56	1,53
22	2,40	2,46	2,08	1,90	1,78	1,70	1,65	1,60	1,56	1,53
23	2,41	2,47	2,08	1,90	1,78	1,71	1,65	1,60	1,56	1,53
24	2,42	2,47	2,08	1,90	1,79	1,71	1,65	1,60	1,56	1,53
25	2,42	2,47	2,08	1,90	1,79	1,71	1,65	1,60	1,56	1,53
26	2,43	2,48	2,09	1,90	1,79	1,71	1,65	1,60	1,56	1,53
27	2,44	2,48	2,09	1,90	1,79	1,71	1,65	1,60	1,56	1,53
28	2,44	2,49	2,09	1,91	1,79	1,71	1,65	1,60	1,57	1,53
29	2,45	2,49	2,09	1,91	1,79	1,71	1,65	1,60	1,57	1,53
30	2,45	2,49	2,10	1,91	1,79	1,71	1,65	1,61	1,57	1,53
p = broj laboratorija na nekoj razini n = broj ponavljanja unutar svakog laboratorija na toj razini										

3.1.1.2. Mandelov h-test

Ovaj test se primjenjuje onda kada želimo ispitati statističku dosljednost rezultata h između laboratorija.

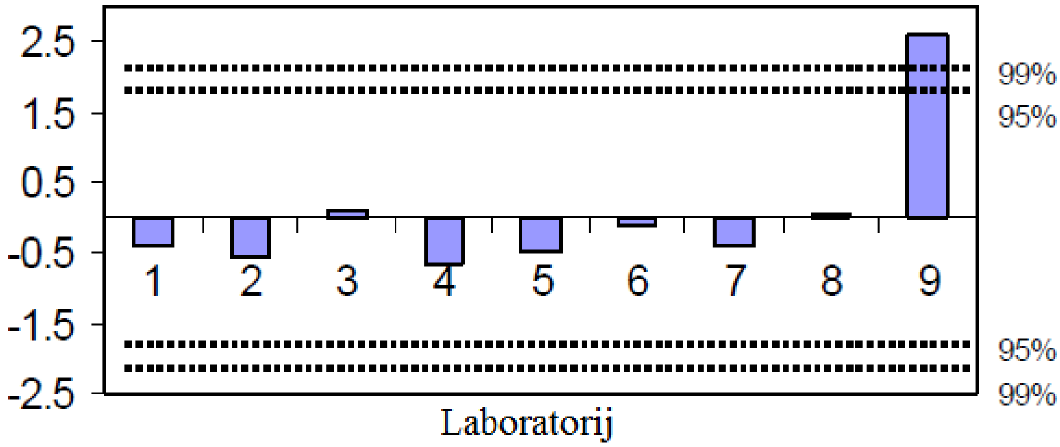
Na određenoj razini interesa, aritmetičke sredine rezultata svakog laboratorija se koriste za izračunavanje aritmetičke sredine rezultata svih laboratorija. Ova vrijednost se koristi za izračun Mandelove h-statistike za sve laboratorije za tu razinu. Mandelova h-statistika definirana je jednadžbom 2.1. Mandelova h-statistika je omjer razlike aritmetičke sredine pojedine skupine podataka i aritmetičke sredine svih podataka, i standardnog odstupanja aritmetičkih sredina od ukupne aritmetičke sredine. Taj omjer se nacrta u dijagram i usporedi s tabličnim vrijednostima tog omjera za razine značajnosti od 95% ili 99%. Tablične vrijednosti Mandelove h-statistike se također očitavaju iz tablice 1. ili tablice 2.

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} \tag{1.9}$$

$$\bar{\bar{y}}_j = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}\bar{y}_{ij}}{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}} \tag{1.10}$$

$$h_{ij} = \frac{\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j}{\sqrt{\frac{1}{(p_j - 1)} \sum_{i=1}^{p_i} (\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j)^2}} \tag{2.1}$$

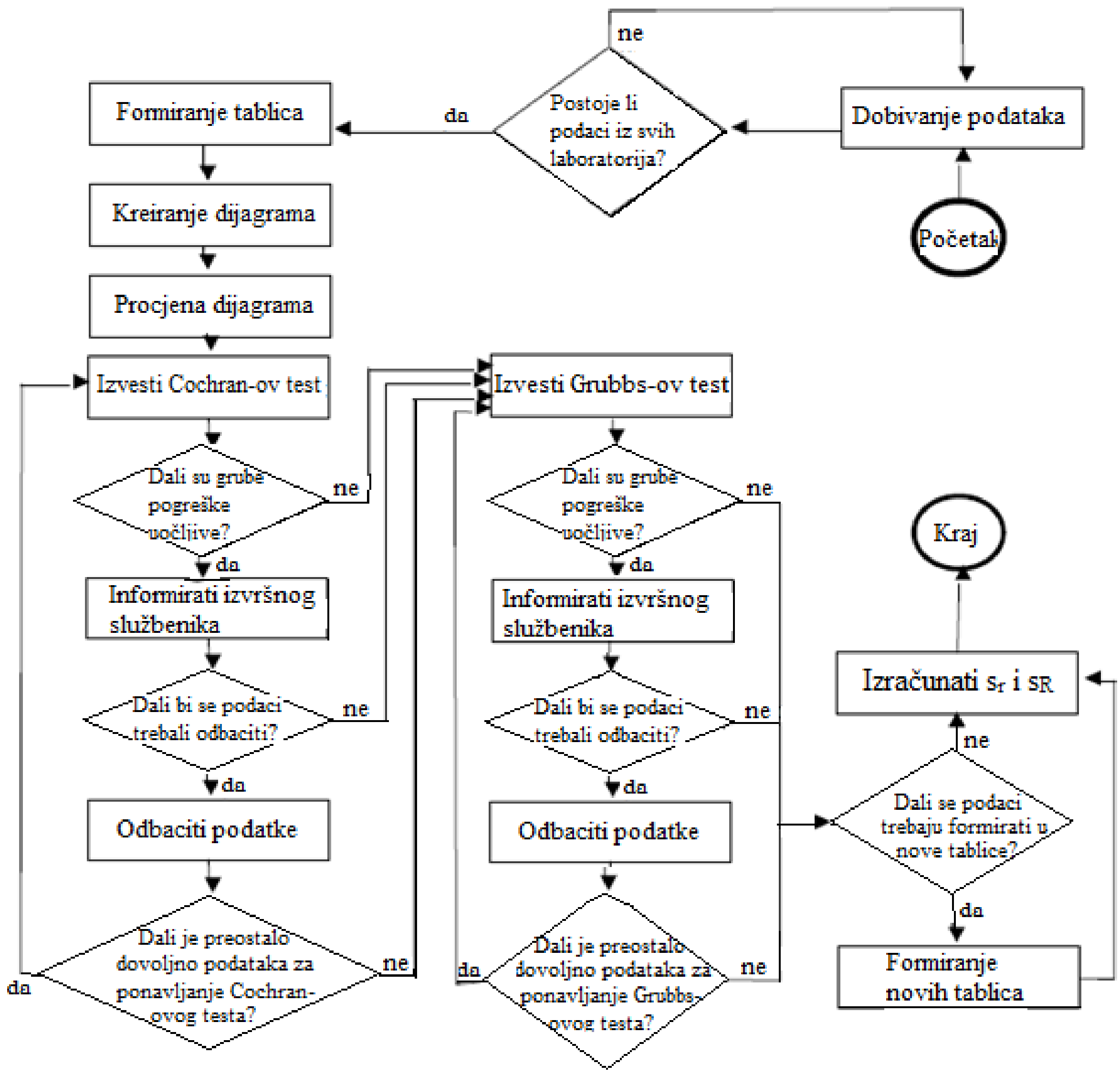
Na slici 6. prikazan je primjer Mandelovog h-dijagrama s ucrtanim razinama značajnosti od 95% i 99%. Svi podaci koji prolaze te razine se mogu smatrati kao grube pogreške.



Slika 6. Primjer Mandelovog h-dijagrama, [6]

3.1.2. Numeričke metode

Tipični predstavnici numeričkih metoda za određivanje grubih pogrešaka su Cochranov i Grubbsov test. Ovi testovi mogu poslužiti za istraživanje kada statistički grube pogreške i/ili lutajuće pogreške mogu biti objašnjene nekom tehničkom pogreškom (propust u izvođenju mjerenja, greška u računanju, administrativna pogreška u prepisivanju rezultata mjerenja, obrada krivog uzorka). Na slici 7. prikazan je dijagram toka pomoću kojeg se može vidjeti postupak provođenja numeričkog ispitivanja grubih pogrešaka.



Slika 7. Shematski dijagram toka za statističku obradu grube pogreške, [6]

Pri obavljanju ispitivanja za grube pogreške treba shvatiti da grube pogreške ne bi trebale biti odbačene samo iz statističke točke gledišta. Za svaki uzorak kod kojeg je rezultat različit od ostalih, treba tražiti razlog zašto je drugačiji od ostalih. Testovi za ispitivanje grubih pogrešaka pokazuju ima li dovoljno statističkih pokazatelja da se pojavila gruba pogreška. Ti testovi neće navesti zašto se to dogodilo. To se može utvrditi tek nakon temeljitog istraživanja, te se onda može odlučiti da li podaci trebaju biti deklarirani kao grube pogreške i odbačeni.

3.1.2.1. Cochranov test

Cochranov test nam služi za ispitivanje unutar-laboratorijskih standardnih odstupanja. Cochranov test će identificirate one varijance koje su veće od očekivanih varijanci za te razine značajnosti. Cochranov test uspoređuje najveće standarno odstupanje u grupi s zbrojem svih standarnih odstupanja. Cochranov test ispituje samo najveću vrijednost u grupi standardnih odstupanja i to je jednostrani test grubih pogrešaka. U Cochranovom testu veličine uzoraka n u svakom laboratoriju moraju biti iste. Vrijednost Cochranove statističe vrijednosti *C* računa se prema slijedećem izrazu :

$$C = \frac{s^2{}_{max}}{\sum_{i=1}^{p} s_i{}^2} \tag{2.2}$$

Gdje je $s^2{}_{max}$ najveće kvadratno odstupanje jednog od laboratorija.

Nakon što je izračunata Cochranova vrijednost C ona se uspoređuje s kritičnom vrijednosti iz tablice 3. Ako je najveće standardno odstupanje klasificirano kao gruba pogreška, tada vrijednost treba biti izostavljena i Cochranov test treba biti ponovljen na preostalim vrijednostima.

Klasifikacija pogreške izvodi se prema sljedećim pravilima:

- ako je statistika testa *C* manja ili jednaka 5 % kritične vrijednosti, ispitivana vrijednost je korektna
- ako je statistika testa *C* veća od 5 % kritične vrijednosti,a manja ili jednaka 1 % kritične vrijednosti tada se ispitivana vrijednost naziva lutajuća pogreška i označava se jednom zvijezdicom (*)
- ako je statistika testa *C* veća od 1 % kritične vrijednosti, ispitivana vrijednost se naziva statistički gruba pogreška i označava se sa dvije zvijezdice (**)

Tablica 3. Kritične vrijednosti za Cochranov test, [3]

p	*n*=2		*n*=3		*n*=4		*n*=5		*n*=6	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%
2	-	-	0,995	0,975	0,979	0,939	0,959	0,906	0,937	0,877
3	0,993	0,967	0,942	0,871	0,883	0,798	0,834	0,746	0,793	0,707
4	0,968	0,906	0,864	0,768	0,781	0,684	0,721	0,629	0,676	0,590
5	0,928	0,841	0,788	0,684	0,696	0,598	0,633	0,544	0,588	0,506
6	0,883	0,781	0,722	0,616	0,626	0,532	0,564	0,480	0,520	0,445
7	0,838	0,727	0,664	0,561	0,568	0,480	0,508	0,431	0,466	0,397
8	0,794	0,680	0,615	0,516	0,521	0,438	0,463	0,391	0,423	0,360
9	0,754	0,638	0,573	0,478	0,481	0,403	0,425	0,358	0,387	0,329
10	0,718	0,602	0,536	0,445	0,447	0,373	0,393	0,331	0,357	0,303

11	0,684	0,570	0,504	0,417	0,418	0,348	0,366	0,308	0,332	0,281
12	0,653	0,541	0,475	0,392	0,392	0,326	0,343	0,288	0,310	0,262
13	0,624	0,515	0,450	0,371	0,369	0,307	0,322	0,271	0,291	0,243
14	0,599	0,492	0,427	0,352	0,349	0,291	0,304	0,255	0,274	0,232
15	0,575	0,471	0,407	0,335	0,332	0,276	0,288	0,242	0,259	0,220
16	0,553	0,452	0,388	0,319	0,316	0,262	0,274	0,230	0,246	0,208
17	0,532	0,434	0,372	0,305	0,301	0,250	0,261	0,219	0,234	0,198
18	0,514	0,418	0,356	0,293	0,288	0,240	0,249	0,209	0,223	0,189
19	0,496	0,403	0,343	0,281	0,276	0,230	0,238	0,200	0,214	0,181
20	0,480	0,389	0,330	0,270	0,265	0,220	0,229	0,192	0,205	0,174
21	0,465	0,377	0,318	0,261	0,255	0,212	0,220	0,185	0,197	0,167
22	0,450	0,365	0,307	0,252	0,246	0,204	0,212	0,178	0,189	0,160
23	0,437	0,354	0,297	0,243	0,238	0,197	0,204	0,172	0,182	0,155
24	0,425	0,343	0,287	0,235	0,230	0,191	0,197	0,166	0,176	0,149
25	0,413	0,334	0,278	0,228	0,222	0,185	0,190	0,160	0,170	0,144
26	0,402	0,325	0,270	0,221	0,215	0,179	0,184	0,155	0,164	0,140
27	0,391	0,316	0,262	0,215	0,209	0,173	0,179	0,150	0,159	0,135
28	0,382	0,308	0,255	0,209	0,202	0,168	0,173	0,146	0,154	0,131
29	0,372	0,300	0,248	0,203	0,196	0,164	0,168	0,142	0,150	0,127
30	0,363	0,293	0,241	0,198	0,191	0,159	0,164	0,138	0,145	0,124
31	0,355	0,286	0,235	0,193	0,186	0,155	0,159	0,134	0,141	0,120
32	0,347	0,280	0,229	0,188	0,181	0,151	0,155	0,131	0,138	0,117
33	0,339	0,273	0,224	0,184	0,177	0,147	0,151	0,127	0,134	0,114
34	0,332	0,267	0,218	0,179	0,172	0,144	0,147	0,124	0,131	0,111
35	0,325	0,262	0,213	0,175	0,168	0,140	0,144	0,121	0,127	0,108
36	0,318	0,256	0,208	0,172	0,165	0,137	0,140	0,118	0,124	0,106
37	0,312	0,251	0,204	0,168	0,161	0,134	0,137	0,116	0,121	0,103
38	0,306	0,246	0,200	0,164	0,157	0,131	0,134	0,113	0,119	0,101
39	0,300	0,242	0,196	0,161	0,154	0,129	0,131	0,111	0,116	0,099
40	0,294	0,237	0,192	0,158	0,151	0,126	0,128	0,108	0,114	0,097
p = broj laboratorija na nekoj razini n = broj rezultata mjerenja po uzorku										

3.1.2.2. Grubbsov test

Grubbsovim testom se može odrediti da li su najveće i najmanje vrijednosti rezultata mjerenja grube pogreške. Grubbsov test daje nam dvije mogućnosti promatranja rezultata i to jednostrano vanjsko promatranje i dvostrano vanjsko promatranje. Izračunate vrijednosti za oba dva promatranja uspoređujemo s kritičnim vrijednostima Grubbsovog testa koje se nalaze u tablici 4.

Varijanca ponovljivosti ${s_{rj}}^2$računa se prema izrazu:

$$ {s_{rj}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p}(n_{ij}-1){s_{ij}}^2}{\sum_{i=1}^{p}(n_{ij}-1)} \tag{2.3} $$

pri čemu je s_{ij} jednak izrazu 1.6 :

$$ s_{ij} = \sqrt{\frac{1}{n_{ij}-1}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij})^2} \tag{1.6} $$

Međulaboratorijsko standardno odstupanje izračunava se prema izrazu:

$$ {s_{Lj}}^2 = \frac{{s_{Dj}}^2 - {s_{rj}}^2}{\bar{\bar{n}}_j} \tag{2.4} $$

Pri čemu se ${s_{Dj}}^2$ i $\bar{\bar{n}}_j$ računaju prema sljedećim izrazima:

$$ {s_{Dj}}^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p} n_{ij}(\bar{y}_{ij}-\bar{\bar{y}}_j)^2 \tag{2.5} $$

$$ \bar{\bar{n}}_j = \frac{1}{p-1}\left[\sum_{i=1}^{p} n_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^{p}{n_{ij}}^2}{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}}\right] \tag{2.6} $$

Varijanca obnovljivosti ${s_R}^2$ računa se prema izrazu:

$$ {s_R}^2 = {s_{Lj}}^2 + {s_{rj}}^2 \tag{2.7} $$

Jedno najveće promatranje

Ova metoda se koristi kada je dana grupa podataka uzlazno raspoređena, i tada se određuje koje je najveće promatranje gruba pogreška tako da se izračuna Grubbsova statistika G_p i to po formuli 2.8 :

$$ G_p = \frac{x_p - \bar{x}}{s} \tag{2.8} $$

Gdje se pritom $\bar{x}$ i s računaju na slijedeći način :

$$ \bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_i \tag{2.9} $$

$$ s = \sqrt{\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2} \tag{2.10} $$

Za ispitivanje značajnosti jednostranog najmanjeg promatranja, izračunamo statistički test G_1 i to po formuli :

$$ G_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s} \tag{3.1} $$

Za Grubbsov test jednostranog najvećeg promatranja primjenjuju se slijedeći kriteriji :

- ako je statistika testa *G* manja ili jednaka 5 % kritične vrijednosti, ispitivana vrijednost je korektna
- ako je statistika testa *G* veća od 5 % kritične vrijednosti,a manja ili jednaka 1 % kritične vrijednosti tada se ispitivana vrijednost naziva lutajuća pogreška i označava se jednom zvijezdicom (*)
- ako je statistika testa *G* veća od 1 % kritične vrijednosti, ispitivana vrijednost se naziva statistički gruba pogreška i označava se sa dvije zvijezdice (**)

Tablica 4. Kritične vrijednosti za Grubbsov test, [3]

p	jedna najveća ili jedna najmanja		dvije najveće ili dvije najmanje	
	gornja 1 %	gornja 5 %	donja 1%	donja 5 %
3	1,155	1,155	-	-
4	1,496	1,481	0,000 0	0,000 2
5	1,764	1,715	0,001 8	0,009 0
6	1,973	1,887	0,011 6	0,034 9
7	2,139	2,020	0,030 8	0,070 8
8	2,274	2,216	0,056 3	0,110 1
9	2,387	2,215	0,085 1	0,149 2
10	2,482	2,290	0,115 0	0,186 4
11	2,564	2,355	0,144 8	0,221 3
12	2,636	2,412	0,173 8	0,253 7
13	2,699	2,462	0,201 6	0,283 6
14	2,755	2,507	0,228 0	0,311 2
15	2,806	2,549	0,253 0	0,336 7
16	2,852	2,585	0,276 7	0,360 3
17	2,894	2,620	0,299 0	0,382 2
18	2,932	2,651	0,320 0	0,402 5
19	2,968	2,681	0,339 8	0,421 4
20	3,001	2,709	0,358 5	0,439 1
21	3,031	2,733	0,376 1	0,455 6
22	3,060	2,758	0,392 7	0,471 1
23	3,087	2,781	0,408 5	0,485 7
24	3,112	2,802	0,423 4	0,499 4
25	3,135	2,822	0,437 6	0,512 3
26	3,157	2,841	0,451 0	0,524 5
27	3,178	2,859	0,463 8	0,536 0
28	3,199	2,876	0,475 9	0,547 0
29	3,218	2,893	0,487 5	0,557 4
30	3,236	2,908	0,498 5	0,567 2
31	3,253	2,924	0,509 1	0,576 6
32	3,270	2,938	0,519 2	0,585 6
33	3,286	2,952	0,528 8	0,594 1
34	3,301	2,965	0,538 1	0,602 3
35	3,316	2,979	0,546 9	0,610 1
36	3,330	2,991	0,555 4	0,617 5

37	3,343	3,003	0,563 6	0,624 7
38	3,356	3,014	0,571 4	0,631 6
39	3,369	3,025	0,578 9	0,638 2
40	3,381	3,036	0,586 2	0,644 5
p = broj laboratorija na nekoj razini				

Dvostruko najveće promatranje

Metoda koja se provodi kada su dva najveća promatranja moguće grube pogreške. Izračun Grubbsove statistike računa se po formuli :

$$G = \frac{{s^2}_{p-1.p}}{{s_0}^2} \tag{3.2}$$

Gdje su ${s_0}^2$, ${s^2}_{p-1.p}$ izračunati po formulama:

$${s_0}^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 \tag{3.3}$$

$${s^2}_{p-1.p} = \sum_{i=1}^{p-2} (x_i - x_{p-1.p})^2 \tag{3.4}$$

Pri čemu je

$$\bar{x}_{p-1.p} = \frac{1}{p-2} \sum_{i=1}^{p-2} x_i \tag{3.5}$$

Isto tako, za ispitivanje dva najmanja promatranja koja mogu biti grube pogreške koristimo slijedeće formule:

$$G = \frac{{s_{1,2}}^2}{{s_0}^2} \tag{3.6}$$

Gdje je vrijednost ${s_{1,2}}^2$ izračunata kako slijedi :

$${s_{1,2}}^2 = \sum_{i=3}^{p} (x_i - \bar{x}_{1,2})^2 \tag{3.7}$$

Pri čemu je vrijednost $\bar{x}_{1,2}$ izračunata prema :

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{p-2} \sum_{i=3}^{p} x_i \tag{3.8}$$

Za Grubbsov test dvostrukog najvećeg promatranja primjenjuju se slijedeći kriteriji :

- ako je statistika testa *G* veća ili jednaka 5 % kritične vrijednosti, ispitivana vrijednost je korektna
- ako je statistika testa *G* veća ili jednaka od 1 % kritične vrijednosti, a manja od 5 % kritične vrijednosti tada se ispitivana vrijednost naziva lutajuća pogreška i označava se jednom zvijezdicom (*)
- ako je statistika testa *G* manja od 1 % kritične vrijednosti, ispitivana vrijednost se naziva statistički gruba pogreška i označava se sa dvije zvijezdice (**)

3.2. Usporedba rezultata mjerenja

3.2.1. Dvije grupe mjerenja iz jednog laboratorija

Ako se u laboratoriju, u uvjetima ponovljivosti, izvode dvije grupe mjerenja od kojih se jedna grupa sastoji od n_1 rezultata mjerenja sa aritmetičkom sredinom od $\bar{y}_1$ a druga se sastoji od n_2 rezultata mjerenja sa pripadajućom aritmetičkom sredinom od $\bar{y}_2$, onda je standardno odstupanje od $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$ jednako:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_r{}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \tag{3.9}$$

Kritična razlika ponovljivosti CrDr za $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$ se računa prema izrazu:

$$C_r D_r = 2{,}8\sigma_r \sqrt{\left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)} \tag{3.10}$$

Pošto je $r = 2{,}8\sigma_r$ tada gornji izraz prelazi u sljedeći oblik:

$$C_r D_r = r \sqrt{\left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)} \tag{4.1}$$

3.2.2. Dvije grupe mjerenja u dva laboratorija

Ako prvi laboratorij dobije n_1 rezultata mjerenja s aritmetičkom sredinom od $\bar{y}_1$, a drugi laboratorij dobije n_2 rezultat mjerenja s aritmetičkom sredinom od $\bar{y}_2$, u oba slučaja u uvjetima ponovljivosti je standardno odstupanje jednako:

$$\sigma = \sqrt{2(\sigma_L{}^2 + \sigma_r{}^2) - 2\sigma_r{}^2\left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)} \tag{4.2}$$

Kritična razlika obnovljivosti C_RD_R za $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$ sa 95% vjerojatnosti iznosi:

$$C_RD_R = \sqrt{(2{,}8\sigma_R)^2 - (2{,}8\sigma_r)^2 \left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)} \tag{4.3}$$

Pošto se granica ponovljivosti računa prema izrazu $r = 2{,}8\sigma_r$, a granica obnovljivosti po izrazu $R = 2{,}8\sigma_R$ jednadžba 4.3. se može zapisati na sljedeći način:

$$C_RD_R = \sqrt{R^2 - r^2 \left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)} \tag{4.4}$$

3.2.3. Usporedba mjernih rezultata jednog laboratorija sa referentnom vrijednosti

Rezultati mjerenja (n), dobiveni u uvjetima ponovljivosti, unutar jednog laboratorija koji imaju aritmetičku sredinu od $\bar{y}$ uspoređuju se sa referentnom vrijednosti μ_0. Standardno odstupanje za $(\bar{y} - \mu_0)$ izračunava se formulom:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2({\sigma_L}^2 + {\sigma_r}^2) - 2{\sigma_r}^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)} \tag{4.5}$$

Kritična razlika ponovljivosti za $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$ se računa prema izrazu:

$$C_rD_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2{,}8\sigma_R)^2 - (2{,}8\sigma_r)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)} \tag{4.6}$$

Granica ponovljivosti se računa prema izrazu $r = 2{,}8\sigma_r$, a granica obnovljivosti prema izrazu $R = 2{,}8\sigma_R$ pa je izraz 4.6 jednak izrazu:

$$C_r D_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2 - r^2\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

(4.7)

3.2.4. Usporedba mjernih rezultata više laboratorija sa referentnom vrijednosti

Ako p laboratorija dobije n_i rezultata mjerenja s aritmetičkim sredinama od $\bar{y}_i$ (u svakom slučaju u uvjetima ponovljivosti) onda je ukupna aritmetička sredina:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{p}\sum \bar{y}_i$$

(4.8)

Ta ukupna aritmetička sredina se uspoređuje sa referentnom vrijednosti μ_0. U tom slučaju standardno odstupanje za ($\bar{\bar{y}} - \mu_0$) se računa po izrazu 4.9:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2p}}\sqrt{2({\sigma_L}^2 + {\sigma_r}^2) - 2{\sigma_r}^2\left(1 - \frac{1}{p}\sum \frac{1}{n_i}\right)}$$

(4.9)

Kritična razlika obnovljivosti za $|\bar{\bar{y}} - \mu_0|$ se tada računa prema izrazu 4.10 ili izrazu 5.1 uz vjerojatnost od 95%.

$$C_R D_R = \frac{1}{\sqrt{2p}}\sqrt{(2{,}8\sigma_R)^2 - (2{,}8\sigma_r)^2\left(1 - \frac{1}{p}\sum \frac{1}{n_i}\right)}$$

(4.10)

$$C_R D_R = \frac{1}{\sqrt{2p}}\sqrt{R^2 - r^2\left(1 - \frac{1}{p}\sum \frac{1}{n_i}\right)}$$

(5.1)

3.3. Primjer 1.

Provedeno je ispitivanje točke omekšanja smole u 16 laboratorija na 4 razine mjerenja. Svi podaci navedeni su u tablici 5.

Tablica 5. Podaci primjera 1

Laboratorij	Razina j			
i	1	2	3	4
1	91,0 89,6	97,0 97,2	96,5 97,0	104,0 104,0
2	89,7 89,8	98,5 97,2	97,2 97,0	102,6 103,6
3	88,0 87,5	97,8 94,5	94,2 95,8	103,0 99,5
4	89,2 88,5	96,8 97,5	96,8 98,0	102,5 103,5
5	89,0 90,0	97,2 -	98,2 98,5	101,0 100,2
6	88,5 90,5	97,8 97,2	99,5 103,2	102,2 102,0
7	88,9 88,2	96,6 97,5	98,2 99,0	102,8 102,2
8	- -	96,0 97,5	98,4 97,4	102,6 103,9
9	90,1 88,4	95,5 96,8	98,2 96,7	102,8 102,0
10	89,0 85,8	95,2 95,0	94,8 93,0	99,8 100,8
11	87,6 84,4	93,2 93,4	93,6 93,9	98,5 97,8
12	88,2 87,4	95,8 95,4	95,8 95,4	101,7 101,2
13	91,0 90,4	98,2 99,5	98,0 97,0	104,5 105,6
14	87,5 87,8	97,0 95,5	97,1 96,6	105,2 101,8
15	87,5 87,6	95,0 95,2	97,8 99,2	101,5 100,9
16	88,8 85,0	95,0 93,2	97,2 97,8	99,5 99,8

U tablici 6. prikazane su izračunate srednje vrijednosti rezultata za svaki laboratorij na određenoj razini ispitivanja.

Tablica 6. Srednje vrijednosti : Točka omekšanja smole (°C)

Laboratorij	Razina *j*			
i	1	2	3	4
1	90,30	97,10	96,75	104,00
2	89,75	97,85	97,10	103,10
3	87,75	96,15	95,00	101,25
4	88,85	97,15	97,00	103,00
5	89,50	-	98,35	100,60
6	89,50	97,50	101,35	102,10
7	88,55	97,05	98,60	102,50
8	-	96,75	97,90	103,25
9	89,25	96,15	97,45	102,40
10	85,90	95,10	93,90	100,30
11	86,00	93,30	93,75	98,00
12	87,80	95,60	95,60	101,45
13	90,70	98,85	97,50	105,05
14	87,65	96,25	96,85	103,50
15	87,55	95,10	98,50	101,20
16	86,90	94,10	97,50	99,65

Primjena Cochranovog testa

Kritične Cochranove vrijednosti očitane su iz tablice 3. Za broj ponavljanja testa *n*=2 očitane vrijednosti na razini značajnosti od 5 % su 0,471 za 15 laboratorija, i 0,452 za 16 laboratorija. U tablici 7. prikazane su vrijednosti standardnih odstupanja.

Tablica 7.Primjer1.- vrijednosti standardnih odstupanja

Laboratorij *i*	Razina *j*							
	1		2		3		4	
	s_{ij}	n_{ij}	s_{ij}	n_{ij}	s_{ij}	n_{ij}	s_{ij}	n_{ij}
1	0,9899	2	0,1414	2	0,3535	2	0	2
2	0,0707	2	0,9192	2	0,1414	2	0,7071	2
3	0,3535	2	2,3334	2	1,1314	2	2,4748	2
4	0,4949	2	0,4949	2	1,4142	2	0,7071	2
5	0,7071	2	-	-	0,2121	2	0,5657	2
6	1,4142	2	0,4243	2	2,6163	2	0,1414	2
7	0,4949	2	0,6364	2	0,5657	2	0,4243	2
8	-	-	1,0606	2	0,7071	2	0,9192	2
9	1,2020	2	0,9192	2	1,0606	2	0,5657	2

10	0,1414	2	0,1414	2	1,2728	2	0,7071	2
11	2,2620	2	0,1414	2	0,2121	2	0,2828	2
12	0,5656	2	0,2828	2	0,2828	2	0,3535	2
13	0,4243	2	0,9192	2	0,7071	2	0,7778	2
14	0,2121	2	1,0606	2	0,3535	2	2,4042	2
15	0,0707	2	0,1414	2	0,9899	2	0,4243	2
16	2,6870	2	1,2728	2	0,4243	2	0,2121	2

Vrijednost *s* za laboratorij 1 na razini 1 računa se prema izrazu 1.6 i iznosi:

$$s_{ij} = \sqrt{\frac{1}{n_{ij}-1}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij})^2} = 0{,}9899$$

Analogno tome izračunati će se sva standardna odstupanja za preostale laboratorije na sve 4 razine.

Nakon toga pristupa se izračunu Cochranove statistike *C*. Izračun *C* za razinu 1 računa se prema izrazu 2.2 i iznosi:

$$C = \frac{s^2{}_{max}}{\sum_{i=1}^{p} s_i{}^2} = 0{,}391$$

Analogno ovome izračunat će se Cochranove vrijednosti *C* za preostale 4 razine.

U tablici 8. prikazane su izračunate Cochranove vrijednosti *C* za sve 4 razine testa.

Tablica 8. Primjer1.- vrijednosti Cochranove statistike C

Razina *j*	1	2	3	4
C	0,391 (15)	0,424 (15)	0,434 (16)	0,380 (16)
Napomena-broj laboratorija se nalazi u zagradama				

Niti jedna izračunata vrijednost *C* nije prošla kritičnu vrijednost *C* na razini značajnosti od 5% za p=15 koja iznosti 0,452 i kritičnu vrijednost *C* na razini značajnosti od 5% za p=16 stoga se zaključuje da grubih pogrešaka nema.

Primjena Grubbsovog testa

U tablici 9. prikazane su izračunate Grubbsove statistike testa.

Tablica 9. Primjer1.- Primjena Grubbsovog testa na srednje vrijednosti

Razina	jednostrano najmanje promatranje	jednostrano vanjsko promatranje	dvostruko najmanje promatranje	dvostruko vanjsko promatranje	Vrsta testa
1	1,69	1,80	0,539	0,298	Grubbsove statistike testa
2	2,04	2,09	0,699	0,108	
3	1,76	1,58	0,378	0,459	
4	2,22	2,09	0,679	0,132	
Lutajuće pogreške					Grubbsove kritične vrijednosti
n=15	2,549	2,549	0,336 7	0,336 7	
n=16	2,585	2,585	0,360 3	0,360 3	
Grube pogreške					
n=15	2,806	2,806	0,253 0	0,253 0	
n=16	2,852	2,852	0,276 7	0,276 7	

Objašnjenje izračuna Grubbsove statistike testa za razinu 1.

Jedno najmanje promatranje

Za razinu 1 u tablici 6. izračunata je srednja vrijednost za svaki laboratorij posebno. Iz razloga što nas zanima da li neki laboratorij ima grube i/ili lutajuće pogreške u odnosu na druge laboratorije, primjenit ćemo Grubbsov test na srednje vrijednosti u tablici 6. Izračunati će se aritmetička sredina srednjih vrijednosti za razinu prema izrazu 2.9 i ona iznosi:

$$\bar{x} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i = 88{,}3966$$

Nakon što je izračunata ukupna srednja vrijednost za sve ispitne laboratorije, pristupa se izračunu standardnog odstupanja prema izrazu 2.10 koje onda iznosi:

$$s = \sqrt{\frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}(x_i - \bar{x})^2} = 1{,}474$$

pri čemu su u izrazu 2.10 x_i srednje vrijednosti dobivene u tablici 6. za razinu 1.

Za izračun Grubbsove statistike koristimo izraz 2.8 gdje je x_p najveća vrijednost za razinu 1, koja onda iznosi:

$$G_p = \frac{x_p - \bar{x}}{s} = 1{,}56$$

Dvostruko najmanje promatranje

Za izračun Grubbsove statistike testa najprije moramo izračunati srednju vrijednost rezultata mjerenja, ali na način da u račun ne ulaze dvije najmanje vrijednosti, i to prema izrazu 3.8, pa srednja vrijednost rezultata iznosi:

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{p-2}\sum_{i=3}^{p} x_i = 88{,}773$$

Nakon toga pristupa se izračunu ${s_{1,2}}^2$, tako da u račun ne ulaze dvije najmanje vrijednosti, prema izrazu 3.7 koja tada iznosi:

$${s_{1,2}}^2 = \sum_{i=3}^{p} (x_i - \bar{x}_{1,2})^2 = 16{,}598$$

Slijedeće je potrebno izračunati varijancu ${s_0}^2$, ali u ovaj račun ulaze i dvije najmanje vrijednosti i to prema izrazu 3.3, pa ona iznosi :

$${s_0}^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 = 30{,}4173$$

Nakon izračuna varijanci ${s_{1,2}}^2$ i ${s_0}^2$ pristupa se izračunu Grubbsove statistike prema izrazu 3.6 koja iznosi:

$$G = \frac{{s_{1,2}}^2}{{s_0}^2} = 0{,}546$$

Dvostruko najveće promatranje

Za izračun Grubbsove statistike testa najprije moramo izračunati srednju vrijednost rezultata mjerenja i to prema izrazu 3.5, ali na način da u račun ne ulaze dvije najveće vrijednosti, pa srednja vrijednost iznosi:

$$\bar{x}_{p-1.p} = \frac{1}{p-2}\sum_{i=1}^{p-2} x_i = 88{,}073$$

Prema izrazu 3.4 potrebno je izračunati varijancu ${s^2}_{p-1.p}$ također na način da u račun ne ulaze dvije najveće vrijednosti, koja onda iznosi:

$$ {s^2}_{p-1.p} = \sum_{i=1}^{p-2} (x_i - x_{p-1.p})^2 = 20{,}12 $$

Slijedeće je potrebno izračunati varijancu ${s_0}^2$, tako da u račun ulaze i dvije najveće vrijednosti, pa je iznos varijance jednak kao i kod dvostrukog najmanjeg promatranja i iznosi:

$$ {s_0}^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 = 30{,}4173 $$

Nakon izračuna varijanci ${s^2}_{p-1.p}$ i ${s_0}^2$ pristupa se izračunu Grubbsove statistike prema izrazu 3.2 koja tada iznosi:

$$ G = \frac{{s^2}_{p-1.p}}{{s_0}^2} = 0{,}662 $$

Analogno postupcima koji su primjenjeni za razinu 1, izračunavaju se vrijednosti za preostale 3 razine.

Za izračun standarnih odstupanja ponovljivosti i obnovljivosti potrebno je izračunati varijance ponovljivosti i obnovljivosti. Izračunati rezultati prikazani su u tablici 10.

Tablica 10. Primjer 1.- izračunate vrijednosti $\widehat{m}_j, s_{rj}$ i s_{Rj}

Razina *j*	p_j	$\widehat{m}_j$	s_{rj}	s_{Rj}
1	15	88,40	1,109	1,670
2	15	96,27	0,925	1,597
3	16	97,07	0,993	2,010
4	16	101,96	1,004	1,915

U nastavku će biti objašnjen postupak računanja $\widehat{m}_j$, s_{rj} i s_{Rj} za razinu 1.

Izračun aritmetičke sredine od *N* rezultata mjerenja $\widehat{m}$ ($\bar{\bar{y}}$) računa se prema izrazu 1.10 i iznosi:

$$ \widehat{m} = \bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}\bar{y}_{ij}}{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}} = 88{,}3966 $$

Varijanca ponovljivosti ${s_{rj}}^2$ računa se prema izrazu 2.3 gdje su ${s_{ij}}^2$ izračunate vrijednosti iz tablice 7., te ${s_{rj}}^2$ tada iznosi :

$$ {s_{rj}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p}(n_{ij} - 1){s_{ij}}^2}{\sum_{i=1}^{p}(n_{ij} - 1)} = 1{,}23 $$

Kako je varijanca obnovljivosti ${s_R}^2$ jednaka je izrazu 2.7 potrebno je još izračunati međulaboratorijsko standardno odstupanje ${s_{Lj}}^2$ i to prema izrazu 2.4.

U izrazu 2.4 ${s_{Dj}}^2$ računa se prema izrazu 2.5 i iznosi:

$$ {s_{Dj}}^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p} n_{ij}(\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j)^2 = 4{,}345 $$

dok se $\bar{\bar{n}}_j$ računa prema izrazu 2.6 i iznosi:

$$ \bar{\bar{n}}_j = \frac{1}{p-1}\left[\sum_{i=1}^{p} n_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^{p} {n_{ij}}^2}{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}}\right] = 2 $$

Nakon što imamo izračunate vrijednosti $\bar{\bar{n}}_j$ i ${s_{Dj}}^2$ možemo izračunati ${s_{Lj}}^2$ prema izrazu 2.4 koje tada iznosi:

$$ {s_{Lj}}^2 = \frac{{s_{Dj}}^2 - {s_{rj}}^2}{\bar{\bar{n}}_j} = 1{,}5575 $$

Varijanca obnovljivosti ${s_R}^2$ tada je jednaka izrazu 2.7 i iznosi:

$$ {s_R}^2 = {s_{Lj}}^2 + {s_{rj}}^2 = 2{,}7875 $$

Nakon što nam je poznata varijanca obnovljivosti ${s_R}^2$ i varijanca ponovljivosti ${s_{rj}}^2$ izračunat ćemo standardno odstupanje obnovljivosti s_R i standardno odstupanje ponovljivosti s_r tako da se izračuna drugi korijen, pa onda one iznose:

$$ s_R = 1{,}6696 $$

$$ s_r = 1{,}1091 $$

U tablici 10. vrijednosti ne pokazuju neke značajne ovisnosti, osim možda za obnovljivost. Može se zaključiti da preciznost ne ovisi o m, stoga m mogu biti uzeti kao konačne vrijednosti za standardno odstupanje ponovljivosti i standardno odstupanje obnovljivosti. Za praktičnu upotrebu precizne vrijednosti za mjernu metodu mogu se smatrati nezavisne za razinu materijala i one iznose:

$$s_r = 1{,}0°C$$

$$s_R = 1{,}8°\mathrm{C}$$

3.4. Primjer 2.

Laboratorij je imao zadatak izmjeriti debljinu lima. Lim je bio podijeljen na 12 jednakih dijelova, te je bilo potrebno na naznačenim mjestima izvršiti po tri mjerenja. Rezultati mjerenja prikazani su u tablici 20. Potrebno je utvrditi:

a) Da li su rezultati mjerenja ponovljivi, odnosno obnovljivi
b) Da li su izmjereni podaci točni (istiniti), ako se zna da referentna (stvarna) debljina lima iznosi μ = 90 mm.

Tablica 11.Primjer 2. –rezultati mjerenja debljine stjenke

Mjerno mjesto	Očitana vrijednost, mm		
	Mjerni niz I	Mjerni niz II	Mjerni niz III
1	88,01	89,56	89,32
2	89,54	89,89	89,59
3	90,12	89,68	89,77
4	90,20	89,73	89,97
5	90,19	90,91	90,07
6	89,22	90,86	90,37
7	89,76	90,63	90,15
8	90,24	90,04	90,31
9	90,26	89,92	89,89

10	90,38	90,24	90,57
11	89,39	90,25	90,25
12	89,07	90,83	90,21

a)

Kako bi mogli utvrditi da li su rezultati obnovljivi odnosno ponovljivi, potrebno je prije toga izračunati potrebne vrijednosti koje su nam potrebne. Prvo što je potrebno izračunati je aritmetička sredina mjernih nizova prema izrazu 1.9, koja tada iznosi:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} = 89{,}6983$$

Analogno tome izračunati će se i preostale dvije aritmetičke sredine.

$$\bar{y}_2 = 90{,}2116$$

$$\bar{y}_3 = 90{,}0391$$

Slijedeće što je potrebno izračunati je standardno odstupanje za svaki mjerni niz, prema izrazu 1.6, i ona iznose:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n_{ij}-1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2} = 0{,}6969$$

$$s_2 = 0{,}4885$$

$$s_3 = 0{,}3529$$

Nakon toga pristupamo izračunu varijance ponovljivosti prema izrazu 2.3 i ona iznosi:

$$s_r^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{p} (n_{ij}-1) s_{ij}^{\,2}}{\sum_{i=1}^{p} (n_{ij}-1)} = 0{,}2829$$

Varijanca obnovljivosti $s_R{}^2$jednaka je izrazu :

$$s_R{}^2 = s_{Lj}{}^2 + s_{rj}{}^2$$

Kako je varijanca obnovljivosti $s_R{}^2$ jednaka izrazu 2.7 potrebno je još izračunati međulaboratorijsko standardno odstupanje $s_{Lj}{}^2$ prema izrazu 2.4 pri čemu se $s_{Dj}{}^2$ računa prema izrazu 2.5 i iznosi:

$$s_{Dj}{}^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p} n_{ij}(\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j)^2 = 0{,}8197$$

dok se $\bar{\bar{n}}_j$ računa prema izrazu 2.6 i iznosi:

$$\bar{\bar{n}}_j = \frac{1}{p-1}\left[\sum_{i=1}^{p} n_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}{}^2}{\sum_{i=1}^{p} n_{ij}}\right] = 2$$

Nakon što imamo izračunate vrijednosti $\bar{\bar{n}}_j$ i $s_{Dj}{}^2$ možemo izračunati $s_{Lj}{}^2$ prema izrazu 2.4 koje tada iznosi:

$$s_L{}^2 = \frac{s_{Dj}{}^2 - s_{rj}{}^2}{\bar{\bar{n}}_j} = 0{,}0493$$

Sada kada imamo izračunate vrijednosti $s_L{}^2$ i $s_r{}^2$ možemo izračunati varijancu obnovljivosti prema izrazu 2.7 koja iznosi:

$$s_R{}^2 = s_{Lj}{}^2 + s_{rj}{}^2 = 0{,}3321$$

Slijedeće što je potrebno izračunati su mjerne vrijednosti ponovljivosti r i mjernu vrijednost obnovljivosti R, i to prema izrazu:

$$r = t\sqrt{2}\, s_r \tag{5.2}$$

$$R = t\sqrt{2}\, s_R \tag{5.3}$$

Ono što je potrebno odrediti su studentovi faktori *t* za ponovljivost i obnovljivost. Njih ćemo iščitati iz tablice 12. ili ih možemo odrediti u programu excel sa naredbom TINV.

Studentov faktor *t* za obnovljivost iznosi 4,3027
Studentov faktor *t* za ponovljivost iznosi 2,2010

Tablica 12. Tablica kvantila Studentove t-razdiobe, [3]

m	α									
	0,1	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025	0,0015	0,001	0,0005
1	3.0777	6.3138	12.7062	25.4517	31.8205	63.6567	127.3213	212.2050	318.3088	636.6192
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.2053	6.9646	9.9248	14.0890	18.2163	22.3271	31.5991
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.1765	4.5407	5.8409	7.4533	8.8915	10.2145	12.9240
4	1.5332	3.1318	2.7764	3.4954	3.7469	4.6041	5.5976	6.4348	7.1732	8.6103
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.1634	3.3649	4.0321	4.7733	5.3760	5.89343	6.8688
6	1.4398	1.9432	2.4469	2.9687	3.1427	3.7074	4.3168	4.8002	5.2076	5.9588
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.8412	2.9980	3.4995	4.0293	4.4421	4.7853	5.4079
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.7515	2.8965	3.3554	3.8325	4.1991	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.6850	2.8214	3.2498	3.6897	4.0240	4.2968	4.7809
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.6338	2.7638	3.1693	3.5814	3.8920	4.1437	4.5869
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.5931	2.71808	3.1058	3.4966	3.7890	4.0247	4.4370
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.5600	2.6810	3.0545	3.4284	3.7890	3.9296	4.3178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.5326	2.6503	3.0123	3.3725	3.7065	3.8520	4.2208
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.5096	2.6245	2.9768	3.3257	3.6389	3.7874	4.1405
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.4899	2.6025	2.9467	3.2860	3.5827	3.7328	4.0728
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.4729	2.5835	2.9208	3.2520	3.5350	3.6862	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.4581	2.5669	2.8982	3.2224	3.4942	3.6458	3.9651
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.4450	2.5524	2.8784	3.1966	3.4589	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.4334	2.5395	2.8609	3.1737	3.4279	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.4231	2.5280	2.8453	3.1534	3.4007	3.5518	3.8495
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.4138	2.5176	2.8314	3.1352	3.3764	3.5272	3.8193
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.4055	2.5083	2.8188	3.1188	3.3548	3.5050	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.3979	2.4999	2.8073	3.1040	3.3353	3.4850	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.3909	2.4922	2.7969	3.0905	3.3176	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.3846	2.4851	2.7874	3.0782	3.3016	3.4502	3.7251
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.3788	2.4786	2.7787	3.0669	3.2870	3.4350	3.7066
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.3734	2.4727	2.7707	3.0565	3.2736	3.4210	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.3685	2.4671	2.7633	3.0469	3.2613	3.4082	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.3638	2.4620	2.7564	3.0380	3.2499	3.3962	3.6594
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.3596	2.4573	2.7500	3.0298	3.2296	3.3852	3.6460
∞	1.2816	1.6449	1.9510	2.2414	2.3264	2.5758	2.8070	2.9677	3.0902	3.2905

Sada kada znamo *t*, možemo izračunati mjerne vrijednosti ponovljivosti r i obnovljivosti R:

$$r = 1{,}6553$$

$$R = 3{,}5067$$

Sada se konačno može pristupiti izračunu kritičnih razlika ponovljivosti i obnovljivosti. Kritična razlika ponovljivosti računa se prema izrazu 4.1 i iznosi:

$$C_r D_r(0{,}5133) = r\sqrt{\left(\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}\right)} = 0{,}4778$$

Kritična razlika obnovljivosti računa se prema izrazu 4.4 i iznosi:

$$C_R D_R(0{,}5133) = \sqrt{R^2 - r^2\left(1-\frac{1}{2n_1}-\frac{1}{2n_2}\right)} = 3{,}1281$$

Može se zaključiti da su rezultati ponovljivi, ali nisu obnovljivi.

b)

Točnost tj. istinitost izmjerenih podataka provjerit ćemo po slijedećem izrazu :

$$|\mu - \bar{\bar{y}}| \leq 2\sqrt{\left[{s_R}^2 - \left(1-\frac{1}{n}\right){s_r}^2\right]} \tag{5.4}$$

$$0{,}01694 \leq 0{,}5011$$

Zaključuje se da su izmjereni podaci točni tj. istiniti.

4. Procjena kvalitete mjernog sustava u industriji

Postupak procjenjivanja kvalitete mjernog sustava ovisi o tipu karakteristika tog sustava. Karakteristike sustava mogu biti mjerljive i atributivne. Mjerljive karakteristike su one koje imaju brojčanu vrijednost i neku mjernu jedinicu, atributivne karakteristike su one kod kojih postoje samo dvije razine (npr. dobro-loše). Atributivne karakteristike su slične binarnom sustavu (odziv je 0 ili 1).

4.1. Procjena kvalitete mjernog sustava u industriji za mjerljive karakteriskike

U svim navadenim izrazima broj 5,15 predstavlja koeficijent pomoću kojeg se obuhvaća 99% rezultata mjerenja a ukoliko se želi obuhvatiti 99,73% stavlja se 6 umjesto 5,15.

Stabilnost

Prije numeričke analize dobivenih rezultata mjerenja, podatke je potrebno grafički analizirati te odrediti stabilnost procesa. Grafička analiza rezultata mjerenja provodi se pomoću kontrolnih karata, i to najčešće sa $\bar{x} - R$ i $\bar{x} - s$ kontrolnim kartama.

Postoje tri osnovne metode za analizu mjernog sustava:

- Metoda aritmetičkih sredina i raspona
- Metoda raspona
- Metoda ANOVA

4.1.1. Metoda raspona

Metoda raspona će pružiti brzu aproksimaciju varijabilnosti mjerenja. Ova metoda će dati samo općenitu sliku mjernog sustava. Ne odvaja varijabilnost na ponovljivost i obnovljivost. Tipično se koristi kako bi se brzo ustanovilo dali se R&R mijenjao.

Kod metode raspona obično 2 mjeritelja mjere 5 dijelova. Svaki mjeritelj svaki dio mjeri jedan put.

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{g} \tag{5.5}$$

$$R\&R = \frac{\bar{R}}{d_2} \tag{5.6}$$

gdje je:

g- broj dijelova (najčešće 5)

d_2- empirijski faktor koji povezuje procijenjeno standardno odstupanje i raspon rezultata mjerenja. Faktor d_2 u funkciji je broja dijelova g i broja mjeritelja m=2.

Kako bi se utvrdilo koji dio standardnog odstupanja procesa otpada na varijabilnost mjerenja, potrebno je R&R pomnožiti sa 100 i podijeliti sa standardnim odstupanjem procesa.

$$\%R\&R = 100 \times \frac{R\&R}{standardno\ odstupanje\ procesa} \tag{5.7}$$

4.1.2. Metoda aritmetičkih sredina i raspona

Metoda aritmetičkih sredina i raspona ($\bar{x} - R$) je pristup koji će pružiti procjenu i ponovljivosti i obnovljivosti mjernog sustava. Za razliku od metode raspona, ovaj pristup će osigurati odvajanje na dvije različite komponente, ponovljivost i obnovljivost, ali ne i njihovu interakciju.

Ponovljivost EV (Equipment variation)

Do vrijednosti EV dolazi se pomoću sljedećeg izraza:

$$EV = 5{,}15 \times \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_{ij}}{ak} \right) \times \frac{1}{d_2} \tag{5.8}$$

kod kojeg je:

a-broj dijelova

k-broj mjeritelja

R_{ij}-raspon mjerenja od strane procjenitelja j za dio i

d_2- empirijski faktor koji povezuje procijenjeno standardno odstupanje i raspon rezultata mjerenja. Faktor d_2 u funkciji je broja ponovljenih mjerenja m i broja raspona g (tablica 1.). Broj raspona g jednak je umnošku broja dijelova (uzoraka) i broja mjeritelja.

Obnovljivost AV (Appraiser variation)

Do vrijednosti AV dolazi se pomoću sljedećeg izraza:

$$AV = \sqrt{\left[5{,}15 \times \bar{X}_{ras} \times \frac{1}{d_2}\right]^2 - \left[\frac{ponovljivost^2}{a \times r}\right]} \tag{5.9}$$

$$\bar{X}_{ras} = \bar{x}_{max} - \bar{x}_{min} \tag{5.10}$$

gdje je:

$\bar{X}_{ras}$- razlika najveće i najmanje aritmetičke sredine svih rezultata svih mjeritelja

a-broj dijelova

r- broj ponovljenih mjerenja

d_2 – empirijski faktor koji povezuje procijenjeno standardno odstupanje i raspon rezultata mjerenja. Faktor d_2 u funkciji je broja mjeritelja m i broja raspona g (tablica 13.). Broj raspona g u ovom slučaju jednak je 1.

Tablica 13. Vrijednosti faktora d_2, [7]

		m													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	1,41	1,91	2,24	2,48	2,67	2,83	2,96	3,08	3,18	3,27	3,35	3,42	3,49	3,55
	2	1,28	1,81	2,15	2,40	2,60	2,77	2,91	3,02	3,13	3,22	3,30	3,38	3,45	3,51
	3	1,23	1,77	2,12	2,38	2,58	2,75	2,89	3,01	3,11	3,21	3,29	3,37	3,43	3,50
	4	1,21	1,75	2,11	2,37	2,57	2,74	2,88	3,00	3,10	3,20	3,28	3,36	3,43	3,49
	5	1,19	1,74	2,10	2,36	2,56	2,73	2,87	2,99	3,10	3,19	3,28	3,35	3,42	3,49
	6	1,18	1,73	2,09	2,35	2,56	2,73	2,87	2,99	3,10	3,19	3,27	3,35	3,42	3,49
	7	1,17	1,73	2,09	2,35	2,55	2,72	2,87	2,99	3,10	3,19	3,27	3,35	3,42	3,48
g	8	1,17	1,72	2,08	2,35	2,55	2,72	2,87	2,98	3,09	3,19	3,27	3,35	3,42	3,48
	9	1,16	1,72	2,08	2,34	2,55	2,72	2,86	2,98	3,09	3,18	3,27	3,35	3,42	3,48
	10	1,16	1,72	2,08	2,34	2,55	2,72	2,86	2,98	3,09	3,18	3,27	3,34	3,42	3,48
	11	1,16	1,71	2,08	2,34	2,55	2,72	2,86	2,98	3,09	3,18	3,27	3,34	3,41	3,48
	12	1,15	1,71	2,07	2,34	2,55	2,72	2,85	2,98	3,09	3,18	3,27	3,34	3,41	3,48
	13	1,15	1,71	2,07	2,34	2,55	2,71	2,85	2,98	3,09	3,18	3,27	3,34	3,41	3,48
	14	1,15	1,71	2,07	2,34	2,54	2,71	2,85	2,98	3,08	3,18	3,27	3,34	3,41	3,48
	15	1,15	1,71	2,07	2,34	2,54	2,71	2,85	2,98	3,08	3,18	3,26	3,34	3,41	3,48
	>15	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078	3,173	3,258	3,336	3,407	3,472

Varijacija dijelova PV (Part variation)

Varijacija dijelova PV u najvećoj mjeri određuje utjecaj predmeta mjerenja u ukupnoj varijaciji mjernog sustava TV.

$$PV = 5{,}15 \times \frac{\bar{R}_p}{d_2} \tag{6.1}$$

gdje je:

$\bar{R}_p$-raspon prosječnih sredina

d_2- empirijski faktor koji povezuje procijenjeno standardno odstupanje i raspon rezultata mjerenja. Faktor d_2 u funkciji je broja dijelova m i broja raspona g (tablica 13.). Broj raspona g u ovom slučaju jednak je 1.

R&R- Ukupna ponovljivost i obnovljivost (Repeatability and Reproducibility)

R&R **je** ukupno rasipanje rezultata mjerenja uslijed zajedničkog učinka ponovljivosti i obnovljivosti. Izračun varijacije mjernog sustava dan je izrazom 6.2.:

$$R\&R = \sqrt{EV^2 + AV^2} \tag{6.2}$$

Ukupna varijacija TV (Total variation)

Ukupna varijacija mjernog sustava osim utjecaja ponovljivosti i obnovljivosti uzima u obzir i varijaciju dijelova.

$$TV = \sqrt{(R\&R)^2 + PV^2} \tag{6.3}$$

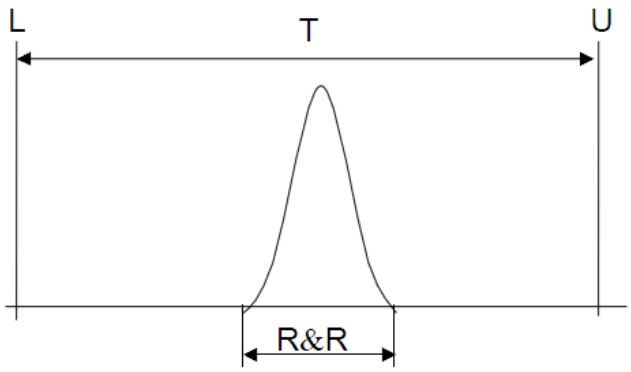
Sposobnost mjernog sustava

Sposobnost mjernog sustava predstavlja udio varijabilnosti mjernog sustava (R&R) iskazanog postotkom područja dopuštenog odstupanja (T).

$$Sposobnost\ mjernog\ sustava = \frac{R\&R}{T} \cdot 100\% \tag{6.4}$$

$$Sposobnost\ mjernog\ sustava = \frac{R\&R}{TV} \cdot 100\% \tag{6.5}$$

$$Doprinos = \frac{\sigma^2{}_{R\&R}}{\sigma^2{}_{TV}} \cdot 100\% \tag{6.6}$$



Slika 8. Sposobnost mjernog sustava, [4]

Ukoliko je udio R&R u tolerancijskom polju T ili ukupnoj varijaciji TV:

- **<10%** - mjerni sustav je zadovoljavajući
- **10% - 30%** - mjerni sustav se može smatrati zadovoljavajućim (ovisno o značajnosti primjene)
- **>30%** - potrebna su poboljšanja u mjernom sustavu

Kriterij za ocjenu kvalitete mjernog sustava R&R za postotak doprinosa:

- **< 1%** – mjerni sustav je zadovoljavajući
- **1% - 9%** - mjerni sustav je granični
- **>9%** - mjerni sustav je neprihvatljiv

4.1.3. Metoda ANOVA

Analiza varijance (ANOVA) je standardna statistička tehnika, a može se koristiti u svrhu analize greške mjerenja ali i drugih izvora varijabilnosti podataka studije mjernog sustava. U analizi varijance, varijanca se može rastaviti na četiri kategorije: dijelovi, mjeritelji,interakcija između dijelova i mjeritelja, i greška ponavljanja.

Pri procjeni kvalitete mjernog sustava metodom ANOVA uvjek se koristi tablica u koju se upisuju podaci koji su zadani ali i izračunati. U tablici 14. prikazane su svi izrazi kojima se vrši izračun.

U tablici 14. oznake koje se pojavljuju su sljedeće:

- a – broj dijelova
- b – broj mjeritelja

- n – broj ponavljanja
- $\bar{x}_i$ - aritmetička sredina za svaki dio
- $\bar{x}$ - ukupna aritmetička sredina
- $\bar{x}_j$ - aritmetička sredina svakog mjeritelja
- $\bar{x}_{ij}$ – aritmetička sredina na svakoj razini
- x_{ijk} – pojedino promatranje
- SS – stupnjevi slobode
- SKO – suma kvadrata odstupanja
- SSKO – srednja suma kvadrata odstupanja
- $F_{rač}$ – računska vrijednost F

Tablica 14. Metoda ANOVA sa interakcijom

Izvor varijacije	**Stupnjevi slobode**	**Suma kvadrata odstupanja**	**Srednja suma kvadrata odstupanja**	$\mathbf{F_{rač}}$
Mjeritelj	b-1	$an \times \sum (\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$\frac{SKO_{mjeritelj}}{SS_{mjeritelj}}$	$\frac{SSKO_{mjeritelj}}{SSKO_{interakcija}}$
Dijelovi	a-1	$bn \times \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$\frac{SKO_{dijelovi}}{SS_{dijelovi}}$	$\frac{SSKO_{dijelovi}}{SSKO_{interakcija}}$
Interakcija mjeritelja i dijelova	(a-1)×(b-1)	$SKO_{ukupno} - (SKO_{dijelovi} + SKO_{mjeritelj} + SKO_{oprema})$	$\frac{SKO_{interakcija}}{SS_{interakcija}}$	$\frac{SSKO_{interakcija}}{SSKO_{oprema}}$
Oprema (Ponovljivost)	ab×(n-1)	$\sum\sum\sum (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$	$\frac{SKO_{oprema}}{SS_{oprema}}$	
Ukupna varijacija	abn-1	$\sum\sum\sum (x_{ijk} - \bar{x})^2$		

Nakon izračuna $F_{rač}$ vrši se usporedba $F_{rač}$ i F_{tabl} koja se očitava iz tablice. Ako je $F_{rač}$ veće od F_{tabl} taj izvor varijacije nije signifikantan što je poželjno. Ako je varijacija interakcije mjeritelja i dijelova nesignifikantna ona se izbacuje te se radi novi izračun. U tablici 15. prikazani su izrazi za metoda ANOVA bez interakcije.

Tablica 15. Metoda ANOVA bez interakcije

Izvor varijacije	**Stupnjevi slobode**	**Suma kvadrata odstupanja**	**Srednja suma kvadrata odstupanja**	**$F_{rač}$**
Mjeritelj	b-1	$an \times \sum (\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$\frac{SKO_{mjeritelj}}{SS_{mjeritelj}}$	$\frac{SSKO_{mjeritelj}}{SSKO_{oprema}}$
Dijelovi	a-1	$bn \times \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$\frac{SKO_{dijelovi}}{SS_{dijelovi}}$	$\frac{SSKO_{dijelovi}}{SSKO_{oprema}}$
Oprema (Ponovljivost)	ab×(n-1)+ (a-1)×(b-1)	$SKO_{ukupno} - (SKO_{dijelovi} + SKO_{mjeritelj})$	$\frac{SKO_{oprema}}{SS_{oprema}}$	
Ukupna varijacija	abn-1	$\sum\sum\sum (x_{ijk} - \bar{x})^2$		

Postupak analize rezultata je identičan kao i sa interakcijom. Sljedeći korak je izračun pojedinih komponenti varijacije. Kod metode ANOVA sa interakcijom komponente varijacije se računaju na sljedeći način:

Tablica 16. Komponente varijacije sa interakcijom

Komponenta	Formula
Ponovljivost (VarComp Repeatability)	$SSKO_{oprema}$
Mjeritelj (VarComp Operator)	$\frac{SSKO_{mjeritelj} - SSKO_{interakcija}}{a \times n}$
Interakcija (VarComp Operator*Part)	$\frac{SSKO_{interakcija} - SSKO_{oprema}}{n}$
Dijelovi (VarComp Part)	$\frac{SSKO_{dijelovi} - SSKO_{interakcija}}{b \times n}$
Obnovljivost (VarComp Reproducibility)	VarComp Operator + VarComp Operator*Part
Ukupni R&R (VarComp Total Gage R&R)	VarComp Repeatability + VarComp Reproducibility
Ukupna varijacija	VarComp Total Gage R&R + VarComp Part

Za izračun komponenti varijacije kod metode ANOVA bez interakcije koriste se izrazi u tablici 17.

Tablica 17. Komponente varijacije bez interakcije

Komponenta	Formula
Ponovljivost (VarComp Repeatability)	$SSKO_{oprema}$
Mjeritelj (VarComp Operator)	$\dfrac{SSKO_{mjeritelj} - SSKO_{oprema}}{a \times n}$
Dijelovi (VarComp Part)	$\dfrac{SSKO_{dijelovi} - SSKO_{oprema}}{b \times n}$
Obnovljivost (VarComp Reproducibility)	VarComp Operator
Ukupni R&R (VarComp Total Gage R&R)	VarComp Repeatability + VarComp Reproducibility
Ukupna varijacija	VarComp Total Gage R&R + VarComp Part

Udio pojedinih komponenti varijacije u ukupnoj varijaciji se može lako izraziti ako se pojedina komponenta varijacije podijeli sa ukupnom varijacijom. Taj iznos se pomnoži sa 100 i dobije se doprinos pojedinih komponenti varijacije u postotcima.

4.1.4. Primjer 3.

U sljedećem primjeru izabrano je 3 dijela koji predstavljaju očekivani raspon varijacije procesa. Tri mjeritelja su mjerila 3 dijela, tri puta po dijelu, slučajnim odabirom. Izmjereni podaci prikazani su u tablici 18.

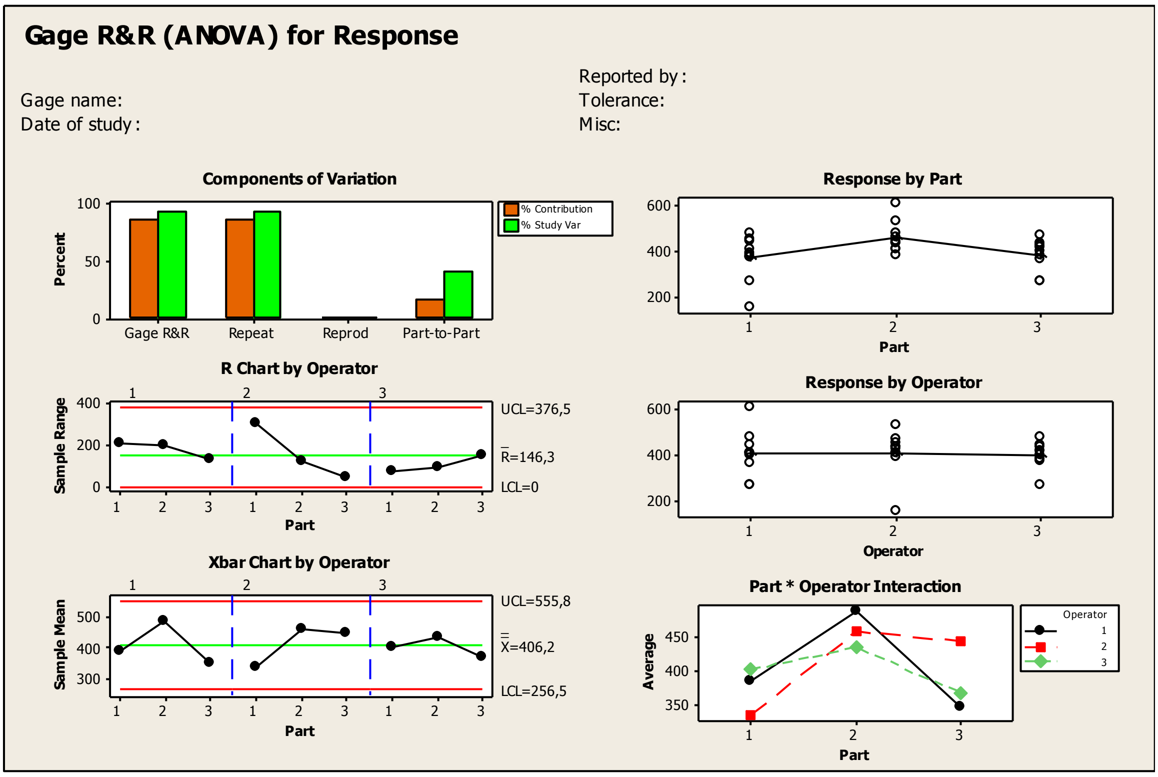
Tablica 18. Podaci primjera 3.

Dio	Mjeritelj	Izmjera	Proba
3	3	413,75	3
3	3	268,75	2
3	3	420,00	1
3	2	426,25	3
3	2	471,25	2
3	2	432,50	1
3	1	368,75	3
3	1	270,00	2
3	1	398,75	1
2	3	386,25	3
2	3	478,75	2
2	3	436,25	1
2	2	406,25	3
2	2	531,25	2
2	2	435,00	1
2	1	408,75	3
2	1	608,75	2
2	1	443,75	1
1	3	383,75	3
1	3	373,75	2
1	3	446,25	1
1	2	388,75	3
1	2	157,50	2
1	2	456,25	1
1	1	405,00	3
1	1	273,75	2
1	1	476,25	1

Primjer 3 je riješen pomoću metode ANOVA i pomoću metode aritmetičkih sredina i raspona kako bi se vidjele razlike u rezultatima dobivenih pomoću tih dvaju metoda.

4.1.4.1. Primjer 3 – Metoda ANOVA

Rezultati dobiveni sofverskim paketom Minitab za metodu ANOVA prikazani su na slici 9. i u tablici 19.



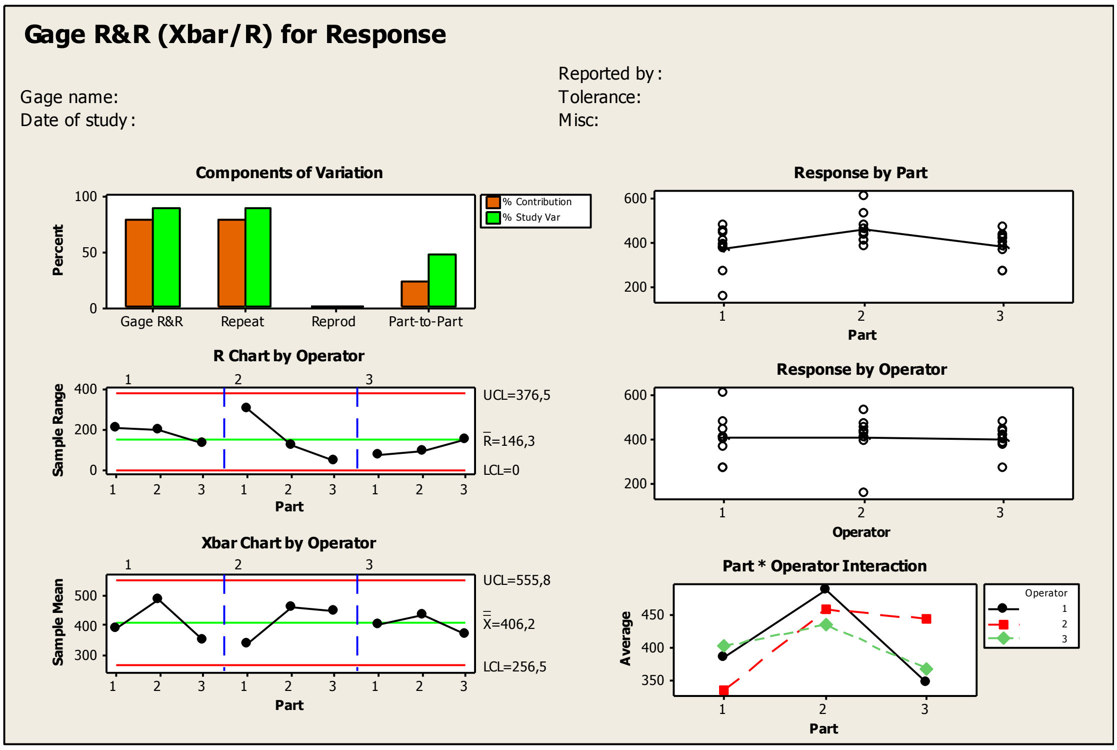
Slika 9. Rezultati dobiveni Minitabom (Primjer 3 - ANOVA)

Tablica 19. Rezultati dobiveni Minitabom (Primjer 3 - ANOVA)

Izvor varijacije	Standardno odstupanje	Varijacija studije (6*σ)	Udio varijacije
Ukupni R&R	85,4673	512,804	91,85
Ponovljivost	85,4673	512,804	91,85
Obnovljivost	0	0	0
Mjeritelji	0	0	0
Dijelovi	36,8036	220,821	39,55
Ukupna varijacija	93,0547	558,328	100

4.1.4.2. Primjer 3 – Metoda aritmetičkih sredina i raspona

Rezultati primjera 3 dobiveni metodom aritmetičkih sredina i raspona prikazani su na slici 10. i u tablici 20.



Slika 10. Rezultati primjera 3 – metoda aritmetičkih sredina i raspona

Tablica 20. Rezultati primjera 3 – metoda aritmetičkih sredina i raspona

Izvor varijacije	Standardno odstupanje	Varijacija studije (6*σ)	Udio varijacije
Ukupni R&R	85,0291	510,174	88,38
Ponovljivost	85,0291	510,174	88,38
Obnovljivost	0	0	0
Dijelovi	45,0116	270,070	46,79
Ukupna varijacija	96,2081	577,248	100

U primjeru 3. uočljivo je da varijacija dijelova ima mali utjecaj na ukupnu varijaciju procesa. Iz toga sljedi da je najveći dio varijacije sustava uslijed mjernog sustava a ne uslijed razlike među dijelovima. To se vidi iz prvog grafa s lijeve strane na slici 10. Na slici 10. je također vidljivo da je utjecaj mjeritelja minimalan. To se vidi na drugom grafu desne kolone zbog ravne linije, što ukazuje da nema razlike između mjeritelja. Ukupni R&R je odgovoran za 91,85% varijacije procesa kod metode ANOVA i 88,38% kod metode aritmetičkih sredina i raspona, što ukazuje da mjerni sustav nije prihvatljiv te se mora poboljšati.

4.2. Procjena kvalitete mjernog sustava za atributivne karakteriskike

4.2.1. Netočnost i ponovljivost atributivnog mjernog sustava

Procjena kvalitete mjernog sustava u slučaju atributivnih karakteristika izračunava iznos netočnosti i ponovljivosti jednog mjernog sustava i daje liniju pravca regresije.

U svrhu lakšeg shvaćanja proveden je jedan primjer sa svim pripadajućim jednadžbama i komentarima.

Prvi korak je izračunavanje vjerojatnosti prihvaćanja. Vjerojatnosti se računaju prema izrazima 6.7. i 6.8., kod kojih je a broj prihvaćenih jedinica a m ukupan broj jedinica.

Ako je je a/m<0,5 koristi se izraz:

$$Pa = \frac{a + 0{,}5}{m} \tag{6.7}$$

U slučaju a/m>0,5 koristi se izraz:

$$Pa = \frac{a - 0{,}5}{m} \tag{6.8}$$

U slučaju a/m=0,5 vjerojatnost prihvaćanja je $Pa = 0{,}5$.

Sljedeći korak je izračunavanje netočnosti. Kako bi se izračunala netočnost prvo je potrebno odrediti jednadžbu pravca regresije točnije koeficijente b_0 i b_1. Koeficijenti b_0 i b_1 se izračunavaju pomoću izraza 6.9. i 6.10.

$$b_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \tag{6.9}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \tag{6.10}$$

Jednadžba pravca regresije glasi:

$$y = b_0 + b_1 x \tag{7.1}$$

Kada su poznati koeficijenti b_0 i b_1 netočnost se može izračunati preko izraza 7.2. gdje je L donja granica tolerancije.

$$netočnost = L + \frac{b_0}{b_1} \tag{7.2}$$

Sjedeći korak je izračunavanje neusklađene ponovljivosti. Neusklađena ponovljivost računa se prema izrazu 7.3.

$$\sigma_{rnp} = x_T(P_a 0{,}995) - x_T(P_a 0{,}005) \tag{7.3}$$

Gdje x_T predstavlja procijenjene referentne vrijednosti na 99,5% i 0,5% vjerojatnosti prihvaćanja.

Usklađena ponovljivost se računa tako da se izraz za neusklađenu ponovljivost podijeli sa 1,08. Vrijednost 1,08 je faktor prilagođavanja dan od AIAG (Automotive Industry Action Group). [1]

$$\sigma_r = \frac{x_T(P_a 0{,}995) - x_T(P_a 0{,}005)}{1{,}08} \tag{7.4}$$

Sljedeći korak je provođenje t-testa kako bi se utvrdilo dali netočnost signifikantno utječe na sustav. Kako bi se to odredilo izračunava se faktor t prema sljedećem izrazu.

$$t = \frac{31{,}3 \times netočnost}{\sigma_r} \tag{7.5}$$

Nakon izračuna vrijednosti t postavljaju se hipoteze.

H_0: netočnost=0 H_1: netočnost $\neq 0$

Nakon toga se taj iznos uspoređuje sa tabličnim iznosom t koji je dobiven uz vrijednost α=0,05 i uz broj stupnjeva slobode jednak broju ponovljenih mjerenja umanjeno za 1. Usporedbom tih vrijednosti dobiva se p koji ako je manji od α ukazuje na signifikantni utjecaj netočnosti na sustav.

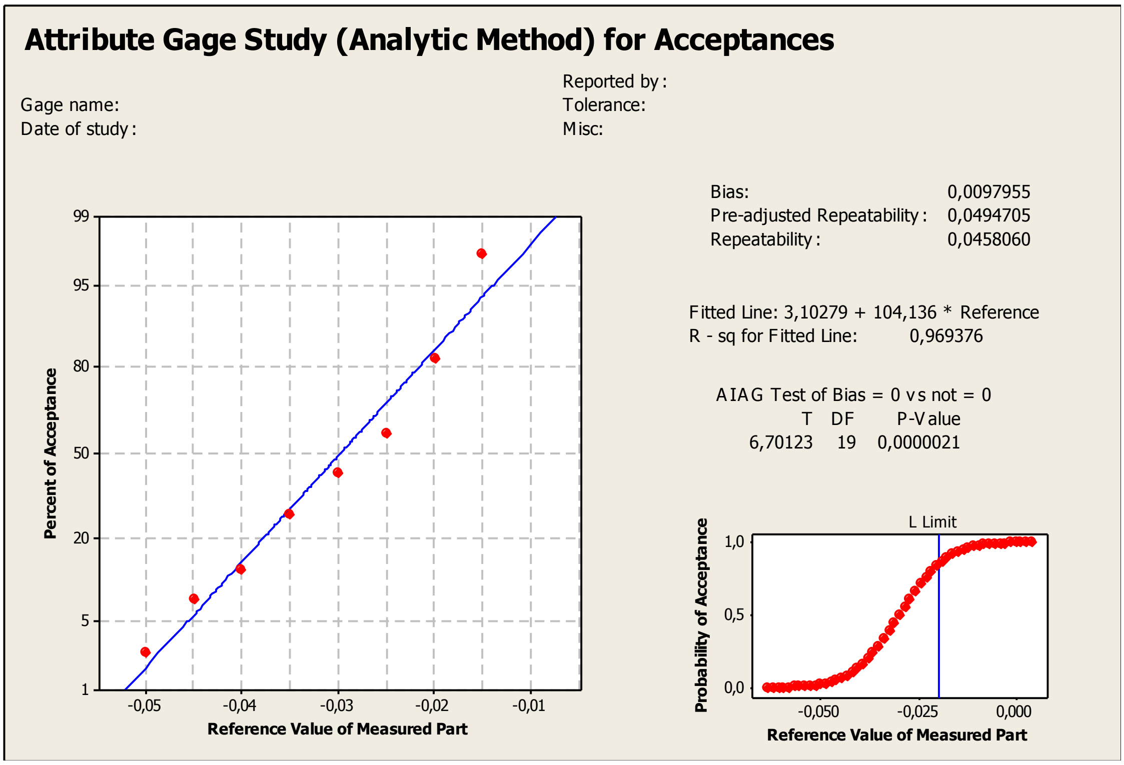
4.2.2. Primjer 4.

Proizvođač automobila želi mjeriti netočnost i ponovljivost automatiziranog mjernog sustava. Sustav ima donju toleranciju od -0,020 mm i gornju od 0,020 mm. Svaki od 10 dijelova je mjereno 20 puta. Svaki dio ima svoju referentnu vrijednost.

Tablica 21. Podaci Primjera 4.

Broj dijela	**Referentna vrijednost**	**Broj prihvaćenih jedinica**
1	-0,050	0
2	-0,045	1
3	-0,040	2
4	-0,035	5
5	-0,030	8
6	-0,025	12
7	-0,020	17
8	-0,015	20
9	-0,010	20
10	-0,005	20

Na slici 11. prikazani su rezultati dobiveni računalnim softverom "Minitab".



Slika 11. Rezultati primjera 4

Iz izraza 6.9 i 6.10 izračunate su vrijednosti b_0 i b_1 i one iznose:

$$b_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = 104{,}136$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 3{,}10279$$

Prema dobivenim vrijednostima b_0 i b_1 slijedi da je jednadžba pravca regresije sljedećeg oblika:

$$y = 3{,}10279 + 104{,}136x$$

Sljedeći podatak koji se može izračunati je netočnost prema izrazu 7.2. Netočnost iznosi:

$$netočnost = L + \frac{b_0}{b_1} = 0{,}0097955$$

Neusklađena ponovljivost računa se prema izrazu 7.3 i iznosi.

$$\sigma_{rnp} = x_T(P_a 0{,}995) - x_T(P_a 0{,}005) = 0{,}0494705$$

Usklađena ponovljivost iznosi:

$$\sigma_r = \frac{x_T(P_a 0{,}995) - x_T(P_a 0{,}005)}{1{,}08} = 0{,}0458060$$

Faktor t potreban za provođenje t-testa izračunat je preko izraza 7.5 i iznosi:

$$t = \frac{31{,}3 \times netočnost}{\sigma_r} = 6{,}70123$$

Nakon izračuna vrijednosti t postavljaju se hipoteze.

H_0: netočnost=0 H_1: netočnost $\neq 0$

U prikazanom primjeru p (0,0000021) je puno manji od α (0,05) pa se hipoteza H_0 odbacuje te se prihvaća hipoteza H_1, a temeljem hipoteze H_1 zaključuje se da je utjecaj netočnosti na mjerni sustav signifikantan.

4.2.3. Kappa analiza

Mjerenja su subjektivne procjene ljudi, a ne izravne fizičke mjere. Primjeri toga su:

- Ocjene performansi automobila
- Klasifikacija kvaliete tkanine kao dobro ili loše
- Ocjene boje, mirisa i okusa vina, na skali od 1 do 10.

U tim situacijama, osobine kvalitete je teško definirati i ocijeniti. Da bi se dobile smislene klasifikacije, više od jednog procijenitelja treba klasificirati mjeru odziva. Ako se procijenitelji slažu, postoji mogućnost da su ocjene točne. Ako se procijenitelji ne slažu, korisnost ocjene je ograničena.

Kappa označava stupanj slaganja nominalnih i ordinalnih procjena od strane višebrojnih mjeritelja pri procjeni nekih uzoraka.

$$Kappa = \frac{P(A) - P(E)}{1 - P(E)} \tag{7.6}$$

Gdje je:

$P(A)$: broj slaganja mjeritelja

$P(E)$: očekivan broj slaganja mjeritelja za koje je dogovor očekivan slučajnim izborom

$$P(A) = \frac{\sum_i n_{ij}}{n_{++}} \tag{7.7}$$

$$P(E) = \frac{\sum_i n_{i+} \times n_{+i}}{{n_{++}}^2} \tag{7.8}$$

Gdje su :

n_{i+} = broj promatranja u i-tom redu

n_{+i} = broj promatranja u i-tom stupcu

n_{ij} = promatranja u ćeliji koja odgovara i-tom redu i j-tom stupcu

n_{++} = ukupan broj promatranja

Vrijednosti Kappa:

- 0,90 – 1,00 = mjerni sustav je izvrstan,
- 0,70 – 0,89 = mjerni sustav je sposoban-nastaviti poboljšavati,
- 0,50 – 0,69 = mjerni sustav je graničan-potrebno poboljšanje,
- 0,00 – 0,40 = mjerni sustav je neprihvatljiv.

4.2.4. Primjer 5.

Poduzeće koje vrši testiranja obrazovanja, trenira 5 novih procijenitelja za pismeni dio testa u obliku eseja. Potrebno je procijeniti procijeniteljevu sposobnost ocjenjivanja eseja u skladu sa standardima. Svaki procijenitelj je ocjenio 15 eseja. Ocjene za ocjenjivanje eseja su: -2, -1, 0, 1, 2.

Nakon ispravljanja eseja dobiveni su sljedeći rezultati:

Tablica 22. Podaci Primjera 5.

Procjenitelj	Uzorak	Ocjena	Standard
Simpson	1	2	2
Montgomery	1	2	2
Holmes	1	2	2
Duncan	1	1	2
Hayes	1	2	2
Simpson	2	-1	-1
Montgomery	2	-1	-1
Holmes	2	-1	-1
Duncan	2	-2	-1
Hayes	2	-1	-1
Simpson	3	1	0
Montgomery	3	0	0

Holmes	3	0	0
Duncan	3	0	0
Hayes	3	0	0
Simpson	4	-2	-2
Montgomery	4	-2	-2
Holmes	4	-2	-2
Duncan	4	-2	-2
Hayes	4	-2	-2
Simpson	5	0	0
Montgomery	5	0	0
Holmes	5	0	0
Duncan	5	-1	0
Hayes	5	0	0
Simpson	6	1	1
Montgomery	6	1	1
Holmes	6	1	1
Duncan	6	1	1
Hayes	6	1	1
Simpson	7	2	2
Montgomery	7	2	2
Holmes	7	2	2
Duncan	7	1	2
Hayes	7	2	2
Simpson	8	0	0
Montgomery	8	0	0
Holmes	8	0	0
Duncan	8	0	0
Hayes	8	0	0
Simpson	9	-1	-1
Montgomery	9	-1	-1
Holmes	9	-1	-1
Duncan	9	-2	-1
Hayes	9	-1	-1
Simpson	10	1	1
Montgomery	10	1	1
Holmes	10	1	1
Duncan	10	0	1
Hayes	10	2	1
Simpson	11	-2	-2
Montgomery	11	-2	-2
Holmes	11	-2	-2

Duncan	11	-2	-2
Hayes	11	-1	-2
Simpson	12	0	0
Montgomery	12	0	0
Holmes	12	0	0
Duncan	12	-1	0
Hayes	12	0	0
Simpson	13	2	2
Montgomery	13	2	2
Holmes	13	2	2
Duncan	13	2	2
Hayes	13	2	2
Simpson	14	-1	-1
Montgomery	14	-1	-1
Holmes	14	-1	-1
Duncan	14	-1	-1
Hayes	14	-1	-1
Simpson	15	1	1
Montgomery	15	1	1
Holmes	15	1	1
Duncan	15	1	1
Hayes	15	1	1

Rezultati dobiveni nakon obrade tih podataka sa svim vrijednostima Kappa su:

Usuglašenje procjenitelja sa standardom

Tablica 23. Usuglašenje pojedinog procijenitelja sa standardom

Procjenitelj	Testovi (ukupno)	Broj testova usklađenih sa standardom	Postotak [%]	Kappa
Duncan	15	8	53,33	0,41176
Hayes	15	13	86,67	0,82955
Holmes	15	15	100	1
Montgomery	15	15	100	1
Simpson	15	14	93,33	0,91597

Tablica 24. Vrijednosti Kappa

Procjenitelj	Ocjena	Kappa
Duncan	-2	0,5833
	-1	0,16667
	0	0,44099
	1	0,44099
	2	0,42308
	Ukupno	0,41176
Hayes	-2	0,62963
	-1	0,81366
	0	1,00000
	1	0,76000
	2	0,81366
	Ukupno	0,82955
Holmes	-2	1,00000
	-1	1,00000
	0	1,00000
	1	1,00000
	2	1,00000
	Ukupno	1,00000
Montgomery	-2	1,00000
	-1	1,00000
	0	1,00000
	1	1,00000
	2	1,00000
	Ukupno	1,00000
Simpson	-2	1,00000
	-1	1,00000
	0	0,81366
	1	0,81366
	2	1,00000
	Ukupno	0,91597

Iz dobivenih rezultata uočljivo je da su procjenitelji Holmes, Montgomery i Simpson izvrsno usklađeni sa standardom. Procjenitelj Hayes je zadovoljavajuće usklađen sa standardom, dok je procjenitelj Duncan neprihvatljivo loše usklađen sa standardom.

Usuglašenost između procjenitelja

Tablica 25. Usuglašenje procjenitelja između sebe

Ispitano	Usuglašeno	Postotak [%]
15	6	40

Ocjena	Kappa
-2	0,680398
-1	0,602574
0	0,707602
1	0,642479
2	0,736534
Ukupno	0,672965

Iz gore navedenih vrijednosti se vidi da se u samo 6 slučajeva poklopilo da su svi procjenitelji dali istu ocjenu. Kappa statistika se kreće oko 0,7 što je zadovoljavajuće ali je potrebno daljnje poboljšavanje.

Usuglašenost svih procjenitelja sa standardom

Potrebno je pronaći u koliko slučajeva su se svi mjeritelji usuglasili oko ocjene ali i da su usuglašeni sa standardom.

Tablica 26. Usuglašenost svih procijenitelja sa standardom

Ispitano	Usuglašeno	Postotak [%]
15	6	40

Ocjena	Kappa
-2	0,842593
-1	0,796066
0	0,850932
1	0,802932
2	0,847348
Ukupno	0,831455

Iz svih navedenih podataka zaključuje se da je kandidatima Duncanu, Hayesu i Simpsonu potrebno dodatno školovanje, dok su Holmes i Montgomery kandidati kojima nije potrebno poboljšavanje.

5. Utjecaj kvalitete mjernog sustava na procjenu sposobnosti procesa

Analiza sposobnosti procesa uz statističku kontrolu i planiranje pokusa, statističke su metode, kojima se već godinama pokušava smanjiti varijabilnost proizvodnih procesa i njihovih konačnih proizvoda. Sposobnost procesa označuje prirodno ponašanje procesa kada na njega ne djeluju značajni uzroci, a uobičajeno je da se brojčano izražava kao udjel procesa unutar zadanih tolerancija. Temeljni uvjet sposobnosti procesa je $T \geq 6\sigma$. Proces je sposoban ako je raspon zahtjeva T, veći ili jednak od raspona procesa 6σ. Raspon procesa podrazumjeva područje unutar ± 3 standardna odstupanja σ u odnosu na sredinu procesa $\bar{x}$, što predstavlja 99,73% površine ispod krivulje normalne razdiobe kojom se aproksimira proces. Sposobnost procesa se procjenjuje računanjem tzv. indeksa sposobnosti procesa. Računanje i pravilna interpretacija indeksa sposobnosti procesa temelji se na sljedećim pretpostavkama:

- Raspodjela podataka se može aproksimirati normalnom raspodjelom
- Pouzdana procjena sposobnosti procesa može se donijeti samo temeljem praćenja procesa primjenom odgovarajuće kontrolne karte i nakon dovođenja procesa u stanje statističke kontrole (stanje pod kontrolom).

Uvažavajući vrijeme odvijanja procesa, sukladno tumačenju tvrtke Ford, indekse sposobnosti procesa moguće je procjeniti u duljem vremenskom razdoblju (eng. Long-Term Process Capability), kao preliminarnu sposobnost procesa (eng. Preliminary Process Capability), i u kratkom vremenskom razdoblju (eng. Short-Term Capability).

Indeksi sposobnosti procesa u duljem vremenskom razdoblju računaju se nakon odvijanja procesa tijekom vremenskog razdoblja u kojem su se mogli pojaviti svi mogući utjecaji varijacija procesa. Najčešće korišteni indeksi su indeks za izračun potencijalne sposobnosti C_p i iznos demonstrirane izvrsnosti C_{pk}. Indeks C_p opisuje raspon tolerancijskog polja u odnosu na stvarno rasipanje podataka, dok indeks C_{pk} utvrđuje položaj procesa u odnosu na granice zahtjeva. Indeksi sposobnosti procesa dani su izrazima 7.9 i 7.10.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{T}{6\sigma} \tag{7.9}$$

$$C_{pk} = min\left(\frac{USL - \bar{x}}{3\sigma}; \frac{\bar{x} - LSL}{3\sigma}\right) \tag{7.10}$$

gdje su:

USL – gornja granica zahtjeva

LSL – donja granica zahtjeva

T – područje tolerancije

$\bar{x}$ - aritmetička sredina (centralna linija kontrolne karte)

6σ – raspon promatranog procesa

U gore navedenim izrazima standardno odstupanje σ procjenjeno je temeljem podataka iz kontrolne karte. Raznovrsne kontrolne karte se koriste za otkrivanje varijacija u procesu, te za utvrđivanje iznosa standardnog odstupanja procesa.

Preliminarno procjenjivanje sposobnosti procesa provodi se na početku odvijanja procesa ili nakon kratkog vremena praćenja procesa. Indeksi za preliminarnu procjenu sposobnosti procesa se označuju sa P_p i P_{pk}. Računaju se na isti način kao i C_p i C_{pk} osim što se standardno odstupanje procjenjuje iz svih podataka temeljem izraza 8.1

$$\sigma = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{8.1}$$

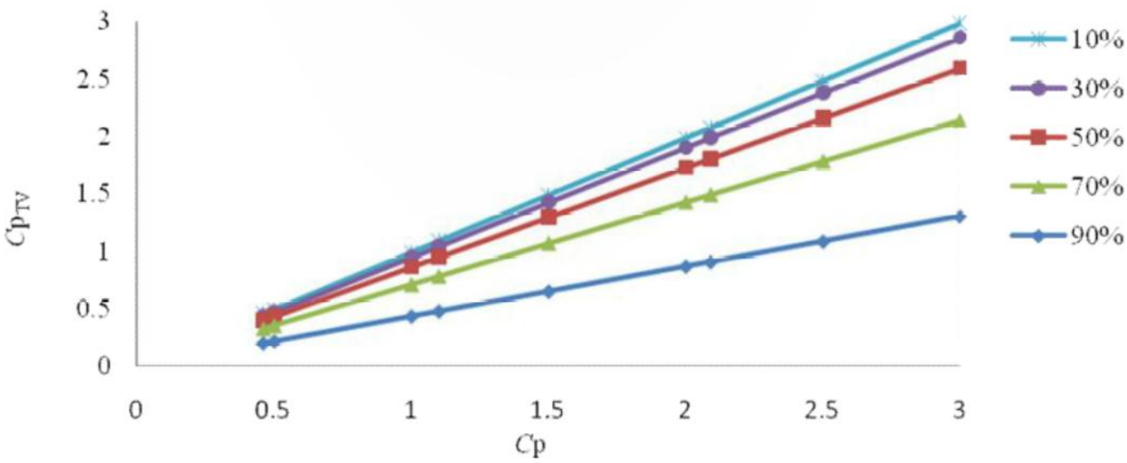
Pri analizi sposobnosti procesa upravo najveću težinu ima koeficijent C_p koji se temelji na rasipanju procesa. Ukoliko se želi doći do spoznaje o stvarnoj sposobnosti procesa mjerni sustav mora biti u mogućnosti detektirati odstupanja procesa ili proizvoda koji se prati. U daljnjoj analizi prikazan je odnos promatranog koeficijenta sposobnosti procesa C_{pTV} koji je posljedica ukupne varijabilnosti TV i stvarnog koeficijenta C_p koji se temelji na varijaciji dijelova u procesu PV.

$$C_p = \frac{T}{6\sigma_{PV}} = \frac{T}{6 \times \sqrt{1-(R\&R)^2}} \tag{8.2}$$

$$C_{pTV} = \frac{T}{6\sigma_{TV}} \tag{8.3}$$

$$C_{pTV} = C_p \times \sqrt{1-(R\&R)^2} \tag{8.4}$$

Odnosi koeficijenata sposobnosti procesa C_{pTV} i C_p u ovisnosti o kvaliteti mjernog sustava R&R prikazani su slikama 12. i 13. te tablicama 27. i 28.



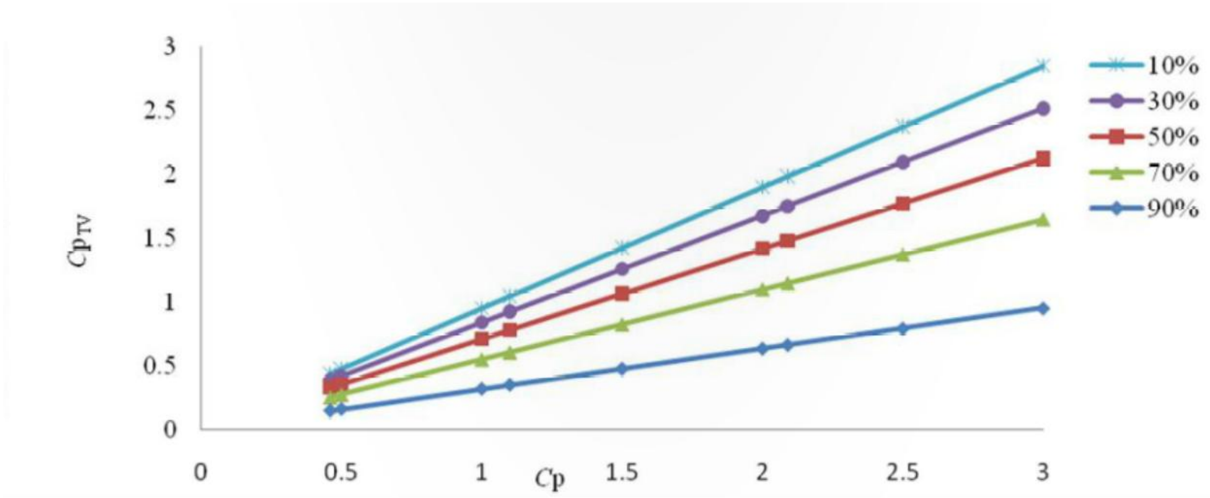
Slika 12. Odnosi koeficijenata sposobnosti procesa C_{pTV} i C_p, [5]

Tablica 27. Odnosi koeficijenata C_{pTV} i C_p, [5]

C_p	Sposobnost mjernog sustava				
	90%	70%	50%	30%	10%
	C_{pTV}				
0,5	0,22	0,36	0,43	0,48	0,50
1	0,44	0,71	0,87	0,95	0,99
1,5	0,65	1,07	1,30	1,43	1,49
2	0,87	1,43	1,73	1,91	1,99
2,5	1,09	1,79	2,17	2,38	2,49
3	1,31	2,14	2,60	2,86	2,98

Ukoliko je kvaliteta mjernog sustava R&R iskazana odnosom varijance mjernog sustava $\sigma^2{}_{R\&R}$ i ukupne varijance $\sigma^2{}_{TV}$ veza koficijenata sposobnosti procesa C_{pTV} i C_p u ovisnosti o kvaliteti mjernog sustava R&R dana je izrazom 8.5. Rezultati su prikazani na slici 13. i u tablici 28.

$$C_{pTV} = C_p \times \sqrt{1-(R\&R)} \tag{8.5}$$



Slika 13. Odnosi koeficijenata sposobnosti procesa C_{pTV} i C_p o doprinosu R&R, [5]

Tablica 28. Odnosi koeficijenata sposobnosti procesa C_{pTV} i C_p o doprinosu R&R, [5]

C_p	Sposobnost mjernog sustava				
	90%	70%	50%	30%	10%
	C_{pTV}				
0,5	0,16	0,27	0,35	0,42	0,47
1	0,32	0,55	0,71	0,84	0,95
1,5	0,47	0,82	1,06	1,25	1,42
2	0,63	1,10	1,41	1,67	1,90
2,5	0,79	1,37	1,77	2,09	2,37
3	0,95	1,64	2,12	2,51	2,85

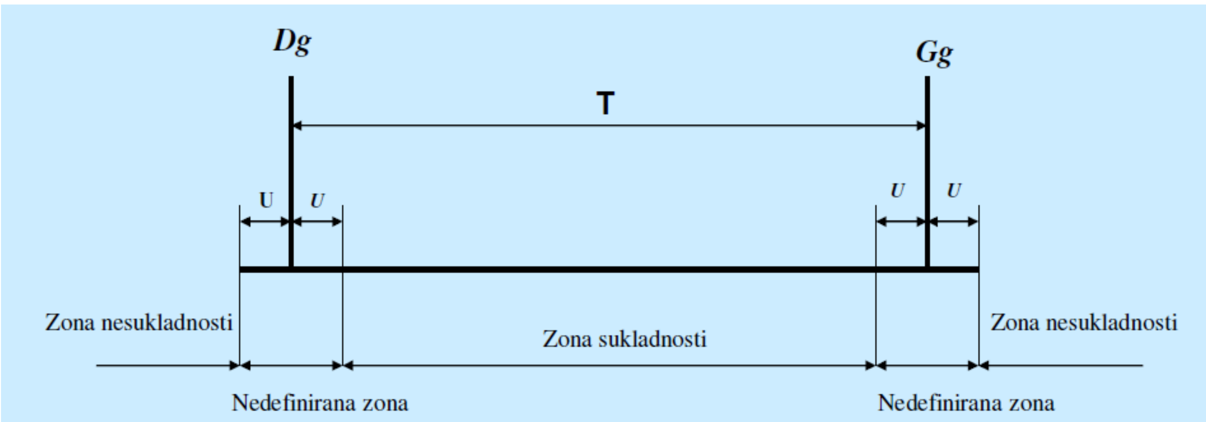
Iz prikazanih rezultata može se zaključiti da postoji značajan utjecaj kvalitete mjernog sustava R&R na iznos koeficijenata sposobnosti procesa C_p. Ukoliko je promatrani koeficijent sposobnosti procesa C_{pTV}=1,41 a mjerni sustav troši 50% ukupne varijacije ili polja tolerancije stvarni koeficijent sposobnosti procesa iznosit će C_p=2. Ako pak mjerni sustav troši 10% ukupne varijacije ili polja tolerancije stvarni koeficijent sposobnosti procesa iznosit će C_p=1,42 što je značajno bolja procjena sposobnosti procesa. Isto tako, treba naglasiti ukoliko je varijacija mjernog sustava značajna u odnosu na utvrđenu varijaciju predmeta mjerenja u procesu, mjerni sustav neće ispravno procijeniti sposobnost procesa.

6. Određivanje mjerne nesigurnosti

Mjerna nesigurnost je definirana kao parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini uz određenu vjerojatnost.

Mjerna nesigurnost se procjenjuje radi nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe mjernih rezultata dobivenih u različitim umjernim i ispitnim laboratorijima ali i radi usporedbe mjernih rezultata sa specifikacijama proizvođača ili zadanom tolerancijom. Mjerenja nisu savršena kako zbog djelovanja slučajnih utjecaja (trenutna promjena temperature, tlaka i vlage ili neiskustvo mjeritelja, nesavršenost uređaja i osjetila) tako i zbog ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja (promjena karakteristike instrumenta između dva umjeravanja, utjecaj mjeritelja pri očitanju analogne skale, nesigurnost vrijednosti referentnog etalona itd). Mjerna nesigurnost je upravo posljedica djelovanja slučajnih utjecaja i ograničenih mogućnosti korekcije sustavnih djelovanja.

Na slici 14. prikazane su zona sukladnosti, zone nesukladnosti i nedefinirane zone. Kada mjerni rezultat pada u zonu sukladnosti može se prihvatiti jer će taj rezultat biti unutar granica tolerancije i ako se uzme u obzir i njegova mjerna nesigurnost. Zona neukladnosti pokazuje da je rezultat koji pada u nju svakako izvan granica tolerancije bez obzira na mjernu neigurnost. Problem se javlja u nedefiniranim zonama gdje prava vrijednost izmjere može ležati i unutar granica tolerancije ali i izvan. Prema gore navedenom za prihvatljive mjere se uzimaju one koje padaju u zonu sukladnosti.



Slika 14. Zone sukladnosti i nesukladnosti, [4]

Procjena mjerne nesigurnosti s vrši uglavnom preko GUM metode. Prvi korak pri procjeni mjerne nesigurnosti GUM metodom je određivanje matematičkog modela. U većini slučajeva mjerena veličina Y ne mjeri se izravno nego se određuje iz N drugih veličina (X_1, X_2, ... X_n) na temelju funkcijskog odnosa koji predstavlja osnovni matematički model za potpuno određenje mjerene veličine.

$$Y = f(X_1, X_2, \dots X_N) \tag{8.6}$$

6.1. Određivanje standardnih nesigurnosti u(x_i)

Svaka procjena ulazne veličine x_i i njezina pridružena standardna nesigurnost u(x_i) dobivaju se iz razdiobe mogućih vrijednosti ulazne veličine X_i. Ta razdioba vjerojatnosti može se temeljiti na frekvenciji, tj. na nizu opažanja $X_{i.k}$ veličine X_i, ili to može biti kakva apriorna razdioba. Određivanja A-vrste sastavnica standardne nesigurnosti temelje se na čestotnim razdiobama, dok se određivanja B-vrste temelje na apriornim razdiobama. Mora se shvatiti da su u oba slučaja te razdiobe modeli koji služe za prikaz stanja našeg znanja.

6.1.1. Određivanje standardne nesigurnosti A-vrste

Određivanje standardne nesigurnosti A-vrste se dobiva iz niza ponovljenih mjerenja uz primjenu normalne i studentove razdiobe. Zasniva se na bilo kojoj vrijedećoj sttističkoj metodi (računanje standardnog odstupanja srednje vrijednosti mjernog niza, primjena metode najmanjih kvadrata odstupanja, ANOVA).

Procjena standardne nesigurnosti A-vrste iz niza ponovljenih mjerenja:

$$u(x_i) = s(\bar{x}_i) \tag{8.7}$$

$$s(\bar{x}_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} \tag{8.8}$$

6.1.2. Određivanje standardne nesigurnosti B-vrste

Procjena se temelji na znanstvenoj prosudbi svih raspoloživih podataka o X_i. Takav skup podataka može uključivati:

- Iskustvo ili poznavanje ponašanja i svojstava instrumenata
- Prethodni mjerni podaci
- Proizvođačevi tehnički podaci
- Podaci s umjernica i ovjernica
- Podaci iz priručnika

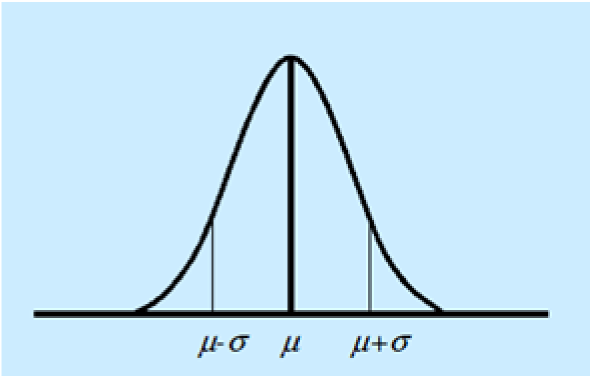
Procjena se zasniva na aprionim razdiobama vjerojatnosti:

- Normalna ili Gaussova
- Pravokutna ili jednolika
- Trokutasta i dr.

Normalna razdioba

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(8.9)

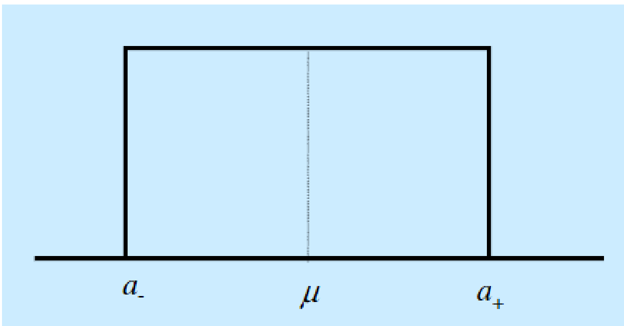


Slika 15. Normalna razdioba

Pravokutna razdioba

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(8.10)

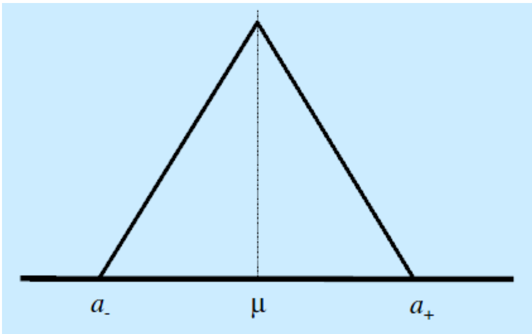


Slika 16. Pravokutna razdioba

Trokutasta razdioba

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

(9.1)



Slika 17. Trokutasta razdioba

6.2. Određivanje sastavljene standardne nesigurnosti

Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$, određuje se odgovarajućim sastavljanjem standardnih nesigurnosti procjena ulaznih veličina.

Nekorelirane ulazne veličine

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)}$$

(9.2)

Korelirane ulazne veličine

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

(9.3)

Gdje su:

$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ koeficijenti osjetljivosti

(9.4)

6.3. Određivanje proširene nesigurnosti

Proširena nesigurnost je veličina koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća veliki dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini.

Proširena nesigurnost dobiva se množenjem sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ s faktorom pokrivanja k, a označuje se sa U.

$$U = k \cdot u_c(y) \tag{9.5}$$

Vrijednost faktora pokrivanja k odabire se na temelju zahtijevane razine povjerenja za interval $y - U$ do $y + U$. Općenito k će biti u području između 2 i 3. Međutim, za posebne primjene k može biti i izvan tog područja. Izbor prave vrijednosti za k može olakšati bogato iskustvo i potpuno znanje primjena koje će se postavljati na mjerni rezultat. Može se pretpostaviti da uzimanje k=2 daje interval koji ima razinu povjerenja od približno 95%, a uzmanje k=3 daje interval koji ima razinu povjerenja od približno 99%.

6.4. Primjer 6.

Primjer 6. pokazuje primjer procjene mjerne nesigurnosti u postupku umjeravanja kratkih etalona duljine (od 0,5 mm do 100 mm) usporedbenom metodom.

Utjecajne veličine u postupku umjeravanja etalona duljine, usporedbenom metodom:

Referentni etaloni duljine:

- izmjerena duljina referentnog etalona;
- vremensko starenje materijala etalona duljine.

Izmjerena razlika duljine referentnog i umjeravanog etalona:

- ponovljivost pozicioniranja komparatora;
- nelinearnost komparatora;
- geometrija površine etalona.

Utjecaj temperature:

- razlika temperatura referentnog i umjeravanog etalona;
- varijacija temperature okoline;
- rezolucija termometra;
- umjeravanje termometra;
- linearni koeficijent temperaturnog rastezanja.
-

6.4.1. Matematički model

$$L_e = L_{ref} + \delta L_D + \delta L + \delta L_C - L_{ref}\left(\theta_e \delta\alpha + \alpha_{ref}\delta\theta\right) - \delta L_V \tag{9.6}$$

pri čemu je:

$\delta\theta = \theta_e - \theta_{ref}$

$\delta\alpha = \alpha_e - \alpha_{ref}$

L_e - duljina umjeravanog etalona pri temperaturi od 20°C

L_{ref} - duljina referentnog etalona pri temperaturi od 20°C

δL_D - utjecaj vremenskog starenja materijala etalona

δL - izmjerena razlika duljine umjeravanog i referentnog etalona

δL_C - utjecaj nelinearnosti komparatora

θ_e - odstupanje temperature umjeravanog etalona od 20 °C

α_e - linearni koeficijent temperaturnog rastezanja umjeravanog etalona

α_{ref} - linearni koeficijent temperaturnog rastezanja referentnog etalona

θ_{ref} - odstupanje temperature referentnog etalona od 20 °C

δL_V - utjecaj središnje točke na mjernoj površini etalona

Duljina umjeravanog etalona L_e, odnosno nesigurnost dobivenog rezultata, u funkciji je sljedećih veličina:

$$L_e = f\left(L_{ref}, \delta L_D, \delta L, \delta L_C, \alpha_{ref}, \theta_e, \delta\alpha, \delta\theta, \delta L_V\right)$$

6.4.2. Procjena utjecajnih veličina

Nesigurnost umjeravanja duljine referentnog etalona *u*(L_{ref})

Nesigurnost korekcije duljine referentnog etalona $u(L_{ref})$ proizlazi iz potvrde o umjeravanju etalona duljine interferometrijskom metodom. To je sastavnica mjerne nesigurnosti B vrste.

Za LFSB postupak iz potvrde o umjeravanju broj 4317/2003 izdane od PTB, slijedi proširena nesigurnost umjeravanja duljine referentnog etalona.

$u\left(L_{ref}\right) = (20 + 0{,}30L)\ nm$, L u mm, uz faktor pokrivanja k=2 i P=95%

Stoga je standardna nesigurnost:

$$u\left(L_{ref}\right) = \frac{U\left(L_{ref}\right)}{2} = (10 + 0{,}15L)\ nm\text{ , L u mm}$$

Nesigurnost uslijed vremenskog starenja materijala *u(δL$_D$)*

Ovisno o načinu proizvodnje materijala pojedini etaloni mogu bubriti ili smanjivati duljinu kroz vremenski interval. U nedostatku statističkih analiza i studija, procjena nesigurnosti zbog vremenskog starenja materijala može se bazirati na iskustvu i istraživanju drugih. Prema normi ISO 3650:1998(E) najveća dopuštena promjena duljine kroz godinu dana iznosi $\pm(20+0{,}25L)\ nm,\ L\ u\ mm$. Uz pretpostavku trokutaste raspodjele standardna nesigurnost iznosi:

$$u(\delta L_D) = \frac{20\ +\ 0{,}25L}{\sqrt{6}} = (8 + 0{,}102L)\ nm$$

Nesigurnost mjerenja razlike duljina *u(δL)*

Nesigurnost mjerenja razlike duljina između referentnih i umjeravanih etalona procijenjena je na osnovu mjerenja pet etalona nazivnih duljina 0,5 mm; 1,005 mm; 1,010 mm; 4 mm i 100 mm. Mjerenja su provedena u uvjetima ponovljivosti koji uključuju: iste etalone, istog mjeritelja, konstantne uvjete okoline, isti instrument i višestruko mjerenje u kratkom vremenskom intervalu. Rezultati mjerenja razlike duljina između referentnih i umjeravanih etalona prikazani su u tablici 29.

Tablica 29. Rezultati mjerenja razlike duljina između referentnih i umjeravanih etalona

Mjerenje broj	Nazivna duljina etalona, mm				
	0,5	1,005	1,01	4	100
	Izmjerena razlika, µm				
1	0,09	0,03	0,03	0,08	0,32
2	0,08	0,06	0,04	0,07	0,31
3	0,08	0,05	0,05	0,07	0,31
4	0,07	0,06	0,05	0,09	0,32
5	0,08	0,06	0,05	0,08	0,32
s_i	0,007	0,013	0,009	0,008	0,005
s_p	0,009				

Za svaki etalon izvršeno je pet ponovljenih mjerenja. Zbirna procjena standardnog odstupanja s_p [GUM H.3.6] iznosi:

$$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2}{5}} = 9\,nm \tag{9.7}$$

Standardna nesigurnost izmjerenih razlika za pet ponovljenih mjerenja koliko se izvodi u postupku umjeravanja iznosi:

$$u(\delta L) = s(\overline{\delta L}) = \frac{9{,}0}{\sqrt{5}} = 4{,}0\,nm$$

<u>Nesigurnost uslijed nelinearnosti komparatora *u*(δL_c)</u>

Ispitivanjem je utvrđena nelinearnost komparatora u iznosu od ±32 nm.

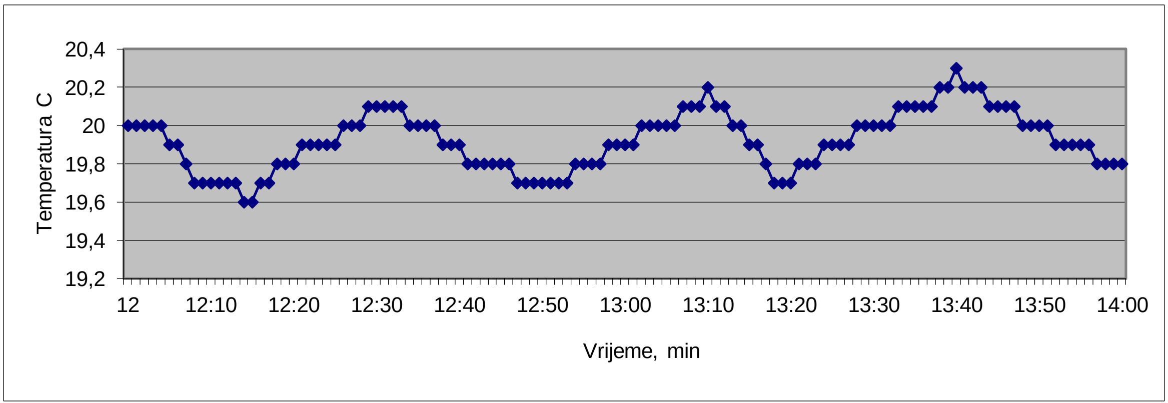
Uz pretpostavku pravokutne razdiobe standardna nesigurnost iznosi:

$$u(\delta L_C) = \frac{32}{\sqrt{3}} = 18{,}5\,nm$$

<u>Nesigurnost temperature etalona *u*(θ_e)</u>

U LFSB-u je komparator za mjerenje duljine etalona smješten u klimatiziranoj prostoriji. Komparator i prostor gdje se smještaju etaloni duljine, prije i za vrijeme umjeravanja, dodatno su termalno zaštićeni pleksiglasom. Termalna zaštita je otvorena s prednje strane, što omogućuje jednostavno rukovanja etalonima.

Da bi se utvrdile varijacije temperature, na mjestu gdje se provodi umjeravanje etalona, izvršeno je praćenje kretanja temperature unutar termalne zaštite u vremenskom intervalu od dva sata. Cikličke promjene temperature u tijeku 2 sata prikazane su dijagramom na slici 18.



Slika 18. Promjena temperature okoliša, u toku 2 sata, na mjestu gdje se nalazi komparator

Praćenjem temperature unutar dva sata utvrđena je srednja vrijednost temperature u iznosu od 19,9 °C. Maksimalno odstupanje temperature od srednje vrijednosti u periodu od 2 sata iznosi 0,4 °C . Radi se o sastavnici B mjerne nesigurnosti. Uz pretpostavku pravokutne razdiobe unutar ±0,4 °C slijedi standardna nesigurnost:

$$u(\theta_1) = \frac{0{,}4\ ℃}{\sqrt{3}} = 0{,}231\ ℃$$

Nesigurnost razlike temperatura etalona *u(δθ)*

Može se pretpostaviti da su referentni i umjeravani etalon duljine na istoj temperaturi, ali bi razlika temperatura mogla ležati s istom vjerojatnošću bilo gdje u procijenjenom intervalu od -0,1 °C do +0,1 °C. Standardna nesigurnost te razlike sastavnica je B vrste koja se može procijeniti pravokutnom razdiobom u granicama ±0,1 °C.

Nesigurnost razlika temperatura etalona $u(\delta\theta)$ iznosi:

$$u(\delta\theta) = \frac{0{,}1\ ℃}{\sqrt{3}} = 0{,}058\ ℃$$

Nesigurnost koeficijenta temperaturnog rastezanja $u(\alpha_{ref})$

Prihvaćena praksa je da iznos mjerne nesigurnosti koeficijenta temperaturnog rastezanja iznosi oko 10 % nazivne vrijednosti. Stoga se, za slučaj etalona izrađenih iz čelika, procjenjuje da koeficijent temperaturnog rastezanja leži s istom vjerojatnošću u intervalu α = (11,5 ± 1)·10^{-6}, K^{-1}. Standardna nesigurnost koeficijenta rastezanja referentnog etalona $u(\alpha_{ref})$ jednaka je standardnoj nesigurnosti koeficijenta rastezanja umjeravanog etalona $u(\alpha_e)$ i iznosi:

$$u(\alpha_e) = u(\alpha_{ref}) = \frac{1 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$$

Nesigurnost razlike koeficijenata temperaturnog rastezanja $u(\delta\alpha)$

Nesigurnost razlike koeficijenata temperaturnog rastezanja $u(\delta\alpha)$ uz pretpostavku trokutaste razdiobe unutar intervala $\delta\alpha$ = ± 2·10^{-6} K^{-1} iznosi:

$$u(\delta\alpha) = \frac{2 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}}{\sqrt{6}} = 0{,}816\ \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$$

Nesigurnost uslijed mjerenja duljine u okolišu središnje točke $u(\delta L_V)$

Utvrđeno je da standardna nesigurnost promjenjivosti duljine etalona u okolišu središnje točke iznosi:

za etalone do 50 mm: $u(\delta L_V) = 3{,}2\ nm$

za etalone od 50 mm do 100 mm: $u(\delta L_V) = 3{,}9\ nm$

tako da se procjena $u(\delta L_V)$ može aproksimirati binomnim izrazom:

$$u(\delta L_V) = (3{,}2 + 0{,}0067L)\ nm,\ \text{L u mm}$$

6.4.3. Sastavljena mjerna nesigurnost $u_c(L_e)$

$$u_c^2(L_e) = c_{L_{ref}}^2 u^2(L_{ref}) + c_{\delta L_D}^2 u^2(\delta L_D) + c_{\delta L}^2 u^2(\delta L) + c_{\delta L_C}^2 u^2(\delta L_C) + c_{\alpha_{ref}}^2 u^2(\alpha_{ref}) + c_{\theta_e}^2 u^2(\theta_e) + c_{\delta\alpha_e}^2 u^2(\delta\alpha_e) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) + c_{\delta L_V}^2 u^2(\delta L_V) \tag{9.8}$$

gdje su koeficijenti osjetljivosti c_i dani u tablici 30.

Tablica 30. Koeficijenti osjetljivosti c_i

x_i	$c_i = \frac{\delta f}{\delta x_i}$
L_{ref}	$1 - (\delta\alpha\theta_e + \alpha_{ref}\delta\theta) \approx 1$
δL_D	1
δL	1
δL_c	1
θ_e	$-\delta\alpha \cdot L \approx 0$
$\delta\alpha$	$-L_{ref}\theta$
α_{ref}	$-L_{ref}\delta\theta \approx 0$
$\delta\theta$	$-L_{ref} \cdot \alpha_{ref}$
δL_V	-1

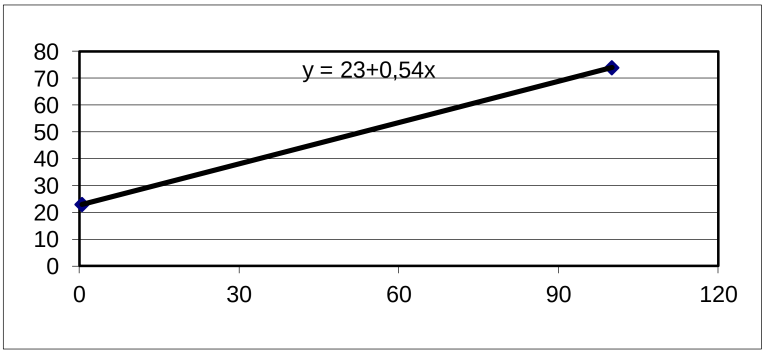
Tablica 31. Sastavnice standardne nesigurnosti u postupku umjeravanja kratkih etalona duljine usporedbenom metodom

Sastavnica standardne nesigurnosti	Izvor nesigurnosti	Iznos standardne nesigurnosti	$c_i = \frac{\delta f}{\delta x_i}$	Doprinos mjernoj nesigurnosti, nm L u mm
$u(L_{ref})$	Umjeravanje duljine referentnog etalona	$10+0{,}150\ L$ nm	1	$10+0{,}150L$
$u(\delta L_D)$	Vremensko starenje materijala	$8+0{,}102\ L$ nm	1	$8+0{,}102L$
$u(\delta L)$	Mjerenje razlika duljina	4,0 nm	1	4,0
$u(\delta L_C)$	Nelinearnost komparatora	18,5 nm	1	18,5
$u(\theta_e)$	Odstupanje temperature etalona	0,231 ^{o}C	$-\delta\alpha L \approx 0$	0
$u(\delta\alpha)$	Razlika koeficijenata linearnih rastezanja	0,816 K^{-1}	$-L\theta_e$ $\theta_e = 0{,}1\ ^{o}$C	$0{,}082L$
$u(\alpha_{ref})$	Koeficijent linearnog rastezanja referentnog etalona	$0{,}577\cdot10^{-6}$ K^{-1}	$L\delta\theta \approx 0$	0
$u(\delta\theta)$	Razlika temperatura etalona	0,058 ^{o}C	$-L\cdot11{,}5\cdot10^{-6}$	$0{,}067L$
$u(\delta L_V)$	Mjerenje duljine u okolišu središnje točke	$3{,}2+0{,}0067L$ nm	-1	$3{,}2+0{,}0067L$

Iznosi sastavljenih standardnih nesigurnosti za etalone nazivnih duljina 0,5 i 100 mm dani su u tablici 32 .

Tablica 32. Sastavljene standardne nesigurnosti uc(Le), u nm

Nazivna duljina, mm	$u(L_{ref})$	$u(\delta L_D)$	$u(\delta L)$	$u(\delta L_C)$	$u(\theta_e)$	$u(\delta\alpha)$	$u(\alpha_{ref})$	$u(\delta\theta)$	$u(\delta L_V)$	$u_c(L_e)$
0,5	10,1	8,1	4,0	18,5	0	0	0	0,3	3,2	23
100	25,0	18,2	4,0	18,5	0	8,2	0	66,7	3,9	77



Slika 19. Sastavljena mjerna nesigurnost (pravac)

6.4.4. Proširena mjerna nesigurnost

U = (46 + 1,08*L*) nm, *L* u mm; *k*=2, *P*=95%

ili

U = (0,05 + 1,1*L*) μm, *L* u m; *k*=2, *P*=95%

7. ZAKLJUČAK

Temeljem zadatka za diplomski rad moguće je zaključiti da se odgovarajućom primjenom metoda opisanih u radu mogu na vrlo kvalitetan način analizirati izmjereni podaci. Puno puta u praksi se dogodi situacija da se posjeduju izmjereni podaci, ali da se ne razumiju metode ni postupci s kojima bi se mogli ti izmjereni podaci analizirati. Pomoću metoda koje su objašnjene u radu moguće je utvrditi da li su rezultati mjerenja točni i precizni, da li su ponovljivi odnosno obnovljivi, te da li su neki od njih rezultat grube pogreške.

Primjenom različitih statističkih softverskih paketa moguće je puno jednostavnije doći do zaključaka o procesu i mjernom sustavu, iz statistike izmjerenih podataka. Takvi računalni programi vrlo brzo i precizno daju niz podataka, parametara, dijagrama iz kojih se može puno informacija saznati o nekom procesu.

Metode za analizu laboratorijskih mjernih sustava su puno kompliciranije od metoda za analizu mjernih sustava u industriji. U posljednje vrijeme jedina priznata metoda procjene kvalitete mjernog sustava, u laboratorijskim uvjetima, temelji se na procjeni mjerne nesigurnosti. Pri tome se koriste složene analitičke i numeričke metode izračuna.

Iz ovog rada je vidljivo da kvaliteta mjernog sustava značajno utječe na daljnju statističku analizu izmjerenih podataka kao što je npr. procjena sposobnosti procesa .

Važno je napomenuti da osoba koja analizira rezultate mjerenja mora imati određena statistička predznanja kako bi pravilno i ne dvosmisleno mogla interpretirati dobivene rezultate testa.

LITERATURA

[1] Automotive Industry Action Group (AIAG): *Measurement Systems Analysis Reference Manual*, 3rd edition, Chrysler, Ford, General Motors Supplier Quality Requirements Task Force, 2002

[2] Burdick, R. ; Borror, C. ; Montgomery, D. : Design and analysis of gauge R&R studies, Siam, Philadelphia, 2005

[3] Grdenić, I. : Analiza rezultata mjerenja sukladno normi ISO 5725:1994, Zagreb, 2011.

[4] Mahović, S. : Predavanja iz kolegija Teorija i tehnika mjerenja, Zagreb, 2007.

[5] Runje, B.; Baršić, G. ; Kralj, H. : Utjecaj kvalitete mjernog sustava na procjenu sposobnosti procesa, Zagreb, 2011.

[6] Practical guide to ISO 5725-2 : 1994

[7] Minitab 16, softverski paket