

# Primjena teorije noseće linije na krilo složene geometrije

---

Hećimović, Maja

Undergraduate thesis / Završni rad

2012

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:095106>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Maja Hećimović**

Zagreb, 2012.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**PRIMJENA TEORIJE NOSEĆE LINIJE  
NA KRILO SLOŽENE GEOMETRIJE**

Mentor:

Doc. dr. sc. Milan Vrdoljak, dipl. ing.

Studentica:

Maja Hećimović

Zagreb, 2012.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Milanu Vrdoljaku na pruženoj pomoći.

Maja Hećimović



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Maja Hećimović** Mat. br.: 0035173005

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Primjena teorije noseće linije na krilo složene geometrije**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Application of the lifting line theory on the complex wing geometry**

Opis zadatka:

Model noseće linije temeljen na Prandtlovoj teoriji predstavlja jednostavan, ali upotrebljiv inženjerski alat za estimaciju aerodinamičkih koeficijenata nosećih površina, prvenstveno sile uzgona i inducirano otpora.

S postojećim modelom noseće linije, primijenjenim u okviru kolegija Aerodinamika 1, moguće je analizirati strelasto, ravninsko, krilo jednostavne geometrije. Konfiguracije krila modernih zrakoplova imaju složenu geometriju: promjenjiv kut uvijanja, promjenjiv kut dihedrala, prijelome (promjena strijele i/ili suženja, engl. kink), winglete. Uz navedene geometrije nosećih površina od interesa je analiza i drugih nekonvencionalnih konfiguracija (npr. leteće krilo) i oblika nosećih površina (npr. za stabilizirajuće površine V-rep, T-rep).

U završnom radu potrebno je koncipirati numerički model noseće linije te:

- napraviti programsku realizaciju modela temeljenu na modularnom pristupu,
- osmisliti i realizirati generalni zapis ulaznih veličina krila složene geometrije: promjenjiv kut uvijanja, promjenjiv dihedral, prijelom krila,
- rezultati modela trebaju obuhvatiti promjenu lokalnog aerodinamičkog koeficijenta sile uzgona po rasponu te ukupne koeficijente sile uzgona i inducirano otpora,
- razvijeni numerički model primijeniti na odabranom krilu složene geometrije.

Rezultate je potrebno usporediti s rezultatima postojećih numeričkih metoda te s drugim dostupnim rezultatima. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
14. studenog 2011.

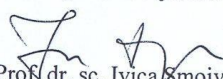
Rok predaje rada:  
1. rok: 10. veljače 2012.  
2. rok: 6. srpnja 2012.  
3. rok: 14. rujna 2012.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 15., 16. i 17. veljače 2012.  
2. rok: 9., 10. i 11. srpnja 2012.  
3. rok: 19., 20. i 21. rujna 2012.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Ivice Šmojver

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	6
2. NUMERIČKI MODEL NOSEĆE LINIJE PRIMJENJEN NA SLOŽENU GEOMETRIJU KRILA .....	7
3. USPOREDBA REZULTATA SA REZULTATIMA POSTOJEĆEG NUMERIČKOG MODELA .....	14
4. PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA NA KRILO SLOŽENE GEOMETRIJE .....	18
5. ZAKLJUČAK.....	30
6. LITERATURA	

## POPIS SLIKA

- Slika 1. Krilo zrakoplova Airbus A320
- Slika 2. Krila i rep bespilotne letjelice
- Slika 2. Krila i rep bespilotne letjelice Slika 3. Prikaz rezultata za promjenu intenziteta cirkulacije po rasponu krila
- Slika 4. Prikaz rezultata za promjenu koeficijenta uzgona normiranog sa ukupnim koeficijentom uzgona po rasponu krila
- Slika 5. Geometrija krila bespilotne letjelice „Albatros“
- Slika 6. Geometrijski prikaz bespilotne letjelice „Albatros“ u programu MATLAB
- Slika 7. Prikaz u y-z ravnini
- Slika 8. Geometrijski prikaz krila bespilotne letjelice „Albatros“ bez dokrilaca
- Slika 9. Rezultati usporedbe utjecaja intenziteta cirkulacije po rasponu krila za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca
- Slika 10. Rezultati usporedbe utjecaja normiranog koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca
- Slika 11. Rezultati usporedbe utjecaja koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca
- Slika 12. Geometrijski prikaz krila letjelice „Albatros“ bez prijeloma
- Slika 13. Geometrijski prikaz krila letjelice „Albatros“ sa prijelomom
- Slika 14. Rezultati usporedbe utjecaja intenziteta cirkulacije po rasponu krila za krilo sa prijelomom i krilo bez prijeloma
- Slika 15. Rezultati usporedbe utjecaja normiranog koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa prijelomom i krilo bez prijeloma
- Slika 16. Rezultati usporedbe utjecaja koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa prijelomom i krilo bez prijeloma

**POPIS TABLICA**

Tabela 1. Ulazni podatci za usporedbu prikazanog numeričkog modela sa Weissinger modelom

Tabela 2. Ulazni podatci za geometriju krila bespilotne letjelice „Albatros“

Tabela 3. Usporedba ukupnog koeficijenta uzgona i koeficijenta inducirano g otpora za krilo za dokrilcima i krilo bez dokrilaca

Tabela 4. Ulazni podatci za geometriju krila sa prijelomom i bez prijeloma

Tabela 5. Usporedba ukupnog koeficijenta uzgona i koeficijenta inducirano g otpora za krilo za prijelomom i krilo bez prijeloma



**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$b$	$m$	Raspon krila
$c_r$	$m$	Korijena tetiva
$c_t$	$m$	Vršna tetiva
$\Phi$	$^\circ$	Kut dihedrala
$\Lambda_{LE}$	$^\circ$	Strijela napadnog ruba
$\alpha_{tw_r}$	$^\circ$	Kut uvijanja u korijenu krila
$\alpha_{tw_t}$	$^\circ$	Kut uvijanja u vrhu krila
$\Gamma$	$m^2/s$	Intenzitet cirkulacije
$V$	$m/s$	Brzina

## **SAŽETAK**

Pomoću numeričkog modela noseće linije prezentiranog u ovom radu moguće je izračunati promjenu koeficijentu uzgona i koeficijenta induciranog otpora po rasponu krila složene geometrije. Naziv „krilo složene geometrije“ odnosi se na krilo sa strijelom kojemu se duž raspona mijenja kut uvijanja, kut dihedrala i tetiva aeroprofila te koje na određenom mjestu ima prijelom. Promjenom ulaznih parametara moguće su razne geometrijske kombinacije. Za primjer su prikazani rezultati za krilo bespilotne letjelice sa prijelomom. Kod je napisan u programskom paketu MATLAB a točnost modela potvrđena usporedbom sa već postojećim numeričkim modelom.

## 1. UVOD

U okviru ovog završnog rada bilo je potrebno napraviti numerički model koji bi primjenom teorije noseće linije izračunavao koeficijente uzgona i induciranog otpora po rasponu krila te ukupni koeficijent uzgona i ukupni koeficijent induciranog otpora za krilo složene geometrije. Ove veličine moguće je izračunati zadavanjem početnih parametara za krilo određene geometrije. U daljnjem tekstu pod pojmom „krilo složene geometrije“ podrazumijevamo krilo kojemu možemo mijenjati strijelu napadnog ruba, kut dihedrala, kut uvijanja i tetivu.

### 1.1. Teorije noseće linije

Prandtllova teorija noseće linije razvijena je kao matematički model za izračunavanje uzgona na realnim konstrukcijama krila. U slučaju pozitivnog napadnog kuta, zbog razlike tlaka na donjoj i gornjoj površini krila dolazi do strujanja zraka i stvaranja vrtloga na izlaznom rubu krila. Vrtlozi su najjači na vrhu i smanjuju se prema sredini raspona te tako stvaraju vrtložnu „plahtu“ koja izlazi sa izlaznog ruba krila i proteže se u beskonačnost. Weissingerova metoda računa intenzitete cirkulacije za  $\Pi$  vrtloge koji ulaze i izlaze na istom polukrilu dok kod Prandtllove metode  $\Pi$  vrtlozi ulaze na jednom polukrilu a izlaze na drugom. Poznavanjem funkcije promjene cirkulacije po rasponu krila  $\Gamma(y)$  moguće je izračunati aerodinamičke koeficijente.

### 1.2. Pregled rada

Najprije je opisano koje je ulazne geometrijske parametre potrebno poznavati i način na koji su ti geometrijski parametri upotrijebljeni da bi numerički model mogao izračunavati tražene vrijednosti koeficijenata uzgona i induciranog otpora. Nakon toga slijedi teorijski postupak izračunavanja aerodinamičkih koeficijenata. Provjera točnosti numeričkog modela provedena je usporedbom sa već poznatom Weissingerovom metodom uz iste ulazne parametre. Na kraju rada numerički model primjenjen je na odabrano stvarno krilo i prikazani su grafički rezultati. Numeričkim modelom prikazanim u ovom radu nije moguće analizirati konstrukcije krila kod kojih se tetiva ili kut uvijanja mijenjaju nelinearno od korijena do vrha krila.

## 2. NUMERIČKI MODEL NOSEĆE LINIJE PRIMJENJEN NA SLOŽENU GEOMETRIJU KRILA

### 2.1. Izrazi za izračunavanje bezdimenzijske cirkulacije

#### 2.1.1 Geometrija

Ulazni geometrijski parametri za numerički model su:

- raspon krila  $b$
- korijena tetiva  $c_r$
- vršna tetiva  $c_t$
- kut dihedrala  $\Phi$
- strijela napadnog ruba  $\Lambda_{LE}$
- kut uvijanja u korijenu krila  $\alpha_{tw_r}$
- kut uvijanja na vrhu krila  $\alpha_{tw_t}$
- prijelom (kink) krila

Tetiva i kut uvijanja mijenjaju se linearno od korijena do vrha krila.

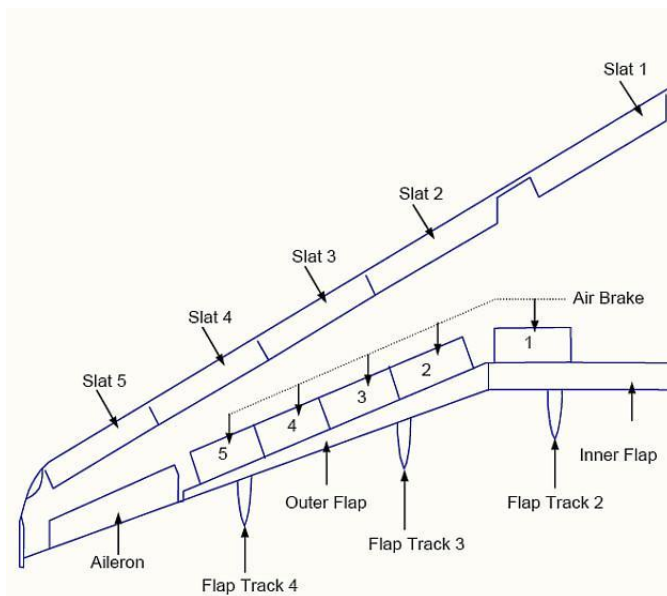
Pod pojmom „prijelom krila“ podrazumijevamo da krilo mijenja ili strijelu napadnog ruba ili kut dihedrala proizvoljan broj puta na određenoj duljini raspona krila.

Površina krila izračunava se za trapezno krilo i promatra se tlocrt krila. Krilo je simetrično a polukrila su spojena zanemarujući trup.

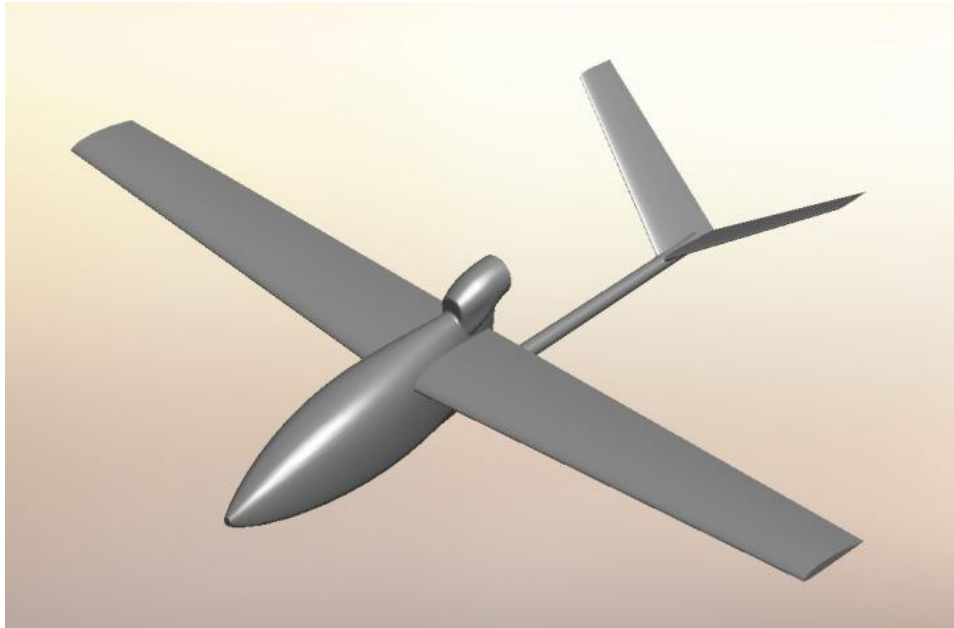
$$S = \frac{b}{2} \cdot \frac{c_r + c_t}{2} \cdot 2 \quad (1)$$

Krilo je podijeljeno na  $m$  segmenata. Svaki segment definiran je sa 6 karakterističnih točaka. Točke D,E,F,G definiraju rubove segmenta dok se točke A i B nalaze na nosećoj liniji. Točka C je kontrolna točka i nalazi se na polovici svakog segmenta u smjeru y-osi i na tri četvrtine tetive u smjeru x-osi. Na osnovu tih karakterističnih točaka model crta krilo zadane geometrije. Kombiniranjem ulaznih parametara moguće je nacrtati razne geometrije krila.

Realna krila koja mogu biti analizirana ovim numeričkim modelom



**Slika 1. Krilo zrakoplova Airbus A320**



**Slika 2. Krila i rep bespilotne letjelice**

### 2.1.3 Izračunavanje brzina induciranih $\Pi$ vrtlogom

Krilo podijelimo na  $m$  segmenata i svakom segmentu pridružimo  $\Pi$  vrtlog koji ima intenzitet cirkulacije  $\Gamma_i$ . Svaki segment ima kontrolnu točku „j“. U kontrolnoj točki izračunavamo brzinu induciranu  $\Pi$  vrtlogom pomoću Biot-Savarovog zakona [1]. Brzine će se razlikovati ovisno o tome inducira li ih vezani vrtlog ili slobodni vrtlozi.

U ovom modelu  $\Pi$  vrtlog se sastoji od vezanog vrtloga i dva slobodna vrtloga. Vezani vrtlog sastoji se od tri dijela. Prvi dio nalazi se na nosećoj liniji tj. na četvrtini tetive dok se ostala dva spajaju sa prvim dijelom, paralelni su jedan drugomu i protežu se po krilu do izlaznog ruba. Slobodni vrtlozi nastavljaju se na vezani vrtlog i protežu se od izlaznog ruba krila do beskonačnosti.

Brzina inducirana slobodnim vrtlogom od beskonačnosti do točke na izlaznom rubu krila:

$$\vec{V}_{s1} = -\frac{\Gamma}{4\pi r_{s1}} \frac{\vec{n}_x \times \vec{r}_{s1}}{(r - \vec{n}_x \cdot \vec{r}_{s1})} \quad (1)$$

Brzina je negativna zato što ovaj slobodni vrtlog djeluje u suprotnom smjeru od smjera osi  $x$ .

$\vec{r}_{s1}$  –vektor položaja točke na izlaznom rubu krila (točke koja se nalazi na kraju slobodnog vrtloga) od kontrolne točke

Brzina inducirana slobodnim vrtlogom od točke na izlaznom rubu krila do beskonačnosti:

$$\vec{V}_{s2} = \frac{\Gamma}{4\pi r_{s2}} \frac{\vec{n}_x \times \vec{r}_{s2}}{(r_{s2} - \vec{n}_x \cdot \vec{r}_{s2})} \quad (2)$$

$\vec{r}_{s2}$  –vektor udaljenosti točke na izlaznom rubu krila (točke koja se nalazi na početku slobodnog vrtloga) od kontrolne točke

$\vec{n}_x$  -ort koji djeluje u smjeru neporemećene brzine

Brzina inducirana vezanim vrtlogom:

$$\vec{V}_{vk} = \frac{\Gamma}{4\pi r_{v1k} r_{v2k}} \frac{r_{v1k} + r_{v2k}}{(r_{v1k} r_{v2k} + \vec{r}_{v1k} \cdot \vec{r}_{v2k})} \vec{r}_{v1k} \times \vec{r}_{v2k} \quad (3)$$

Indeks „k“ poprima vrijednosti 1,2,3 ovisno o tome za koji dio vezanog vrtloga izračunavamo induciranu brzinu.

$\vec{r}_{v1k}, \vec{r}_{v2k}$  – vektori udaljenosti rubnih točaka vezanog vrtloga od kontrolne točke

Ukupna inducirana brzina sastoji se od zbroja dviju brzina induciranih slobodnim vrtlozima ( $\vec{V}_{s1}, \vec{V}_{s2}$ ) i tri brzine inducirane vezanim vrtlogom ( $\vec{V}_{v1}, \vec{V}_{v2}, \vec{V}_{v3}$ ). Svaki dio vezanog vrtloga inducira brzinu u kontrolnoj točki.

$$\vec{w} = \vec{V}_{s1} + \vec{V}_{v1} + \vec{V}_{v2} + \vec{V}_{v3} - \vec{V}_{s2} \quad (4)$$

#### 2.1.4 Rubni uvjeti

Ukupna inducirana brzina u točki  $C_j$  inducirana je od  $m$   $\Pi$  vrtloga od kojih svaki ima intenzitet cirkulacije  $\Gamma_i$ .

$$\vec{w}_j = \sum_{i=1}^m \vec{B}_{ij} \Gamma_i \quad (5)$$

Vektor normale na segment u matricnom zapisu:

$$\mathbf{n}_{zc_j} = [\sin(\alpha_{twc_i}) \quad -\sin(\Phi) \quad \cos(\alpha_{twc_i}) \cdot \cos(\Phi)]^T \quad (6)$$

Vektor brzine u matricnom zapisu:

$$\mathbf{V} = [V_\infty \cos(\alpha) \quad 0 \quad V_\infty \sin(\alpha)]^T \quad (7)$$

Prema rubnom uvjetu u kontrolnoj točki  $C_j$  zbroj ukupne inducirane brzine i normalne komponente brzine iz beskonačnosti mora biti jednak nuli.

$$\sum_{i=1}^m (\vec{n}_{zc_j} \cdot \vec{B}_{ij}) \cdot \Gamma_i = -\vec{V} \cdot \vec{n}_{zc_j} \quad (8)$$

Prikažemo li ovu jednadžbu matricnom obliku slijedi:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{E} \quad (9)$$

## 2.2. Izrazi za izračunavanje koeficijenta uzgona i inducirano otpora

### 2.2.1. Koeficijent uzgona

Intenzitet brzine neporemećene struje:

$$V_\infty = \sqrt{(V_\infty \cos(\alpha))^2 + 0^2 + (V_\infty \sin(\alpha))^2} \quad (10)$$

Prema [1] slijede izraz za koeficijent uzgona i površinu izraženu preko vitkosti i raspona krila:

$$C_L = \frac{2}{S} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma b}{V_\infty} d\bar{y} \quad (11)$$

$$S = \frac{b^2}{AR} \quad (12)$$

Površinu zamijenimo sa omjerom kvadrata raspona krila i vitkosti:

$$C_L = \frac{2Ab}{b^2} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma}{V_\infty} d\bar{y} \quad (13)$$



$$C_L = \frac{A}{b} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma}{V_\infty} d\bar{y} \quad (14)$$

Promatramo koeficijent uzgona po rasponu polukrila:

$$C_L = \frac{2A}{b} \int_0^1 \frac{\Gamma}{V_\infty} d\bar{y} \quad (15)$$

Kad raspon krila podijelimo na  $m$  dijelova dobijemo konačnu razliku  $\Delta y$ . Ako tu konačnu razliku normiramo sa polovicom raspona krila  $b/2$  slijedi da je:

$$\Delta\bar{y} = \frac{1}{m} \quad (16)$$

Diferencijal  $d\bar{y}$  zamijenjujemo konačnom razlikom normiranom sa polovicom raspona krila  $\Delta\bar{y}$  pa slijedi da suma zamjenjuje integral. Nakon ovih izmjena moguće je numerički izračunati koeficijent uzgona.

$$C_L = \frac{2A}{b} \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_i}{m \cdot V_\infty} \quad (17)$$

### 2.2.2. Koeficijent inducirano g otpora

Inducirana brzina koja se pojavljuje kod koeficijenta inducirano g otpora je inducirana brzina na jednoj četvrtini tetive. Ta inducirana brzina nije jednaka induciranoj brzini kod izračunavanja koeficijenta uzgona. Noseća linija se nalazi na jednoj četvrtini tetive iz čega slijedi da centralni dio vezanog vrtloga neće inducirati brzinu na dijelu krila koji promatramo dok će cijeli  $\Pi$  vrtlog sa druge polovice krila inducirati brzinu.

$$\vec{w} = \vec{V}_{s_1} + \vec{V}_{v_1} + \vec{V}_{v_3} - \vec{V}_{s_2} \quad (18)$$

Ako formulu za inducirano brzinu prikažemo u matričnom obliku slijedi:

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \Gamma_j \quad (19)$$

Prema [1] izraz za inducirano g otpor je:

$$CD_i = \frac{2\rho \int_0^{\frac{b}{2}} w \Gamma dy}{\frac{\rho V_\infty^2 S}{2}} \quad (20)$$

$$CD_i = \frac{4}{S} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{w\Gamma}{V_\infty^2} dy \quad (21)$$

Kad diferencijal  $dy$  normiramo sa polovicom raspona krila slijedi  $d\bar{y}$ :

$$CD_i = \frac{4}{S} \int_0^1 \frac{w\Gamma}{V_\infty^2} \frac{b}{2} d\bar{y} \quad (22)$$

$$CD_i = \frac{2A}{b} \int_0^1 \frac{w\Gamma}{V_\infty^2} d\bar{y} \quad (23)$$

Postupak zamjene integrala sa sumom je identičan kao kod izračunavanja koeficijenta uzgona.

$$CD_i = \frac{2A}{b} \sum_{j=1}^m \frac{w_j \Gamma_j}{V_\infty^2 m} \quad (24)$$

### 3. USPOREDBA REZULTATA SA REZULTATIMA POSTOJEĆEG NUMERIČKOG MODELA

Zbog provjere točnosti, prikazani numerički model uspoređen je sa već postojećim numeričkim modelom. Prema [1] koristi se Weissinger model za izračunavanje ukupnog gradijenta koeficijenta uzgona i ukupnog gradijenta koeficijenta induciranog otpora te njihovu promjenu po raspona krila. Weissinger model moguće je primjeniti na krilo kojemu je promjenjiva strijela napadnog ruba ali on ne uzima u obzir promjenu kuta dihedrala, kuta uvijanja i tetive.

Numerički model prikazan u ovom radu primjenjiv je na složenije geometrije krila koje imaju promjenu ovih parametara.

Da bi ova dva numerička modela bilo moguće usporediti potrebno je numerički model prikazan u ovom radu pojednostaviti tj. prilagoditi Weissinger modelu. To je napravljeno tako da su kut dihedrala i kut uvijanja jednaki nuli a korijena tetiva jednaka vršnoj tetivi. Kutevi strijele napadnog ruba jednaki su u oba modela.

Razlika ovog modela i Weissinger modela je i u vezanim vrtlozima. Kod Weissingera se vezani vrtlog nalazi na jednoj četvrtini tetive a slobodni vrtlozi se nastavljaju odmah na vezani vrtlog i u pravcu x-osi idu prema beskonačnosti. Kod ovdje prikazanog modela vezani vrtlog se sastoji od tri dijela (jedan dio na četvrtini tetive a ostala dva po krilu do izlaznog ruba) na koje se nastavljaju slobodni vrtlozi. Iz toga proizlazi da će proračun za ova dva modela biti isti samo u slučaju ravninskog krila jer će se samo tad dijelovi vezanog vrtloga koji se protežu od vezanog vrtloga na nosećoj liniji do izlaznog ruba krila poklapati za slobodnim vrtlozima kod Weissingera.

#### 3.1. Izmjene kod Weissinger modela

Zbog usporedbe napravljeno je i nekoliko izmjena na ulaznim podacima i izrazima kod izračunavanja koeficijenta uzgona i induciranog otpora kod Weissinger modela. Weissinger model u originalnoj verziji izračunava gradijent koeficijenta uzgona i gradijent koeficijenta induciranog otpora.

Izmjene su napravljene zato što je u Weissinger modelu brzina skalar,

$$V = V_{\infty} \sin(\alpha) \quad (25)$$

dok se u promatranom modelu brzina mora razmatrati kao vektor :

$$\mathbf{V} = [V_{\infty} \cos(\alpha) \ 0 \ V_{\infty} \sin(\alpha)]^T \quad (26)$$

U Weissinger modelu krilo je planarno i inducirane brzine su okomite na krilo. Zbog toga, prema [1] jednačba za inducirane brzine u kontrolnoj točki kod planarnog krila nije vektorska nego skalarna. Iz toga slijedi da za izračunavanje gradijenta koeficijenta uzgona i gradijenta koeficijenta induciranog otpora kod Weissinger modela nije potrebno poznavati brzinu iz beskonačnosti i napadni kut.

Kod promatranog modela inducirane brzine nisu okomite na krilo zato što krilo nije planarno. Zbog rubnog uvjeta u kontrolnoj točki brzina iz beskonačnosti se mora razmatrati kao vektor, jednadžba za induciranu brzinu je vektorska i za izračunavanje intenziteta cirkulacije, koeficijenata uzgona i inducirano otpora potrebno je poznavati  $V_\infty$  i  $\alpha$ . Zbog jednostavnosti računa se sa intenzitetom cirkulacije umjesto sa bezdimenzionalnom cirkulacijom te sa koeficijentima a ne sa gradijentima koeficijenata.

Iz navedenoga slijedi da je u ulazne parametre kod Weissinger modela potrebno dodati iznos za brzinu iz beskonačnosti i napadni kut te umjesto sa gradijentima koeficijenata računati sa koeficijentima da bi usporedba bila moguća.

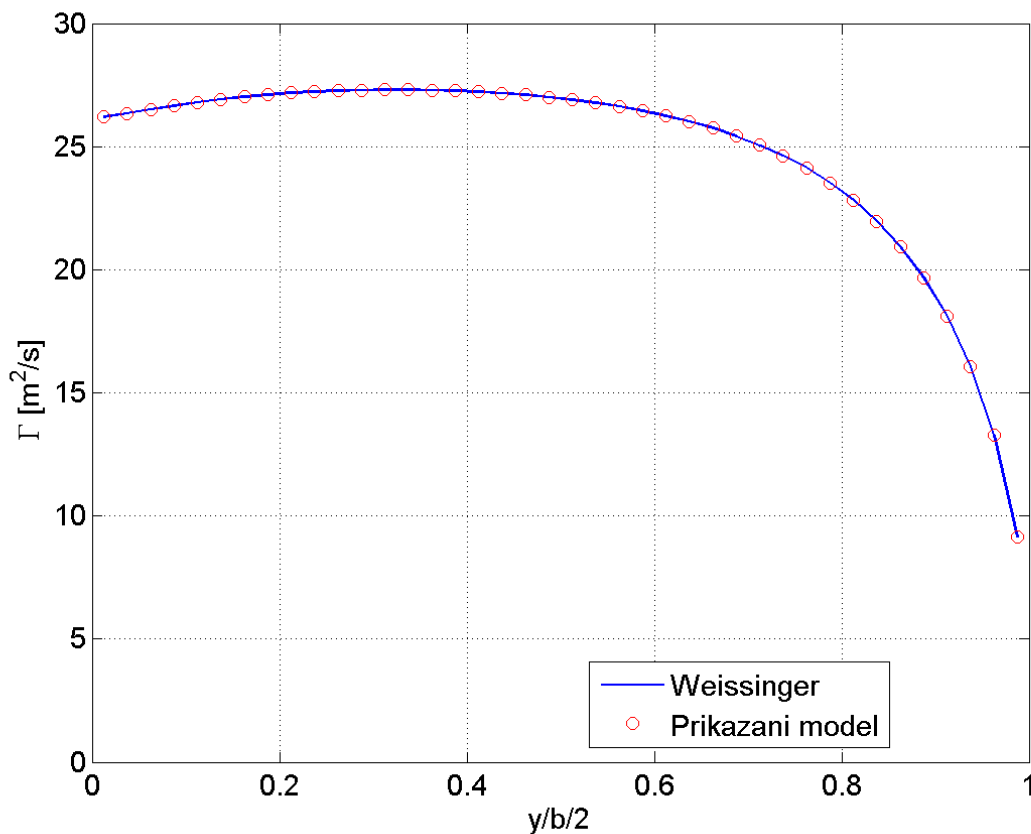
### 3.2. Ulazni geometrijski podatci za usporedbu modela

Podatci nisu uzeti za konkretan primjer već za neku proizvoljnu bespilotnu letjelicu.

**Tabela 1. Ulazni podatci za usporedbu prikazanog numeričkog modela sa Weissinger modelom**

Krilo	Weissinger model	Prikazani model
Raspon $b$ [m]	$b_w = 20$	$b_p = 20$
Strijela napadnog ruba $\Lambda_{LE}$ [°]	$\Lambda_{LE_w} = 15$	$\Lambda_{LE_p} = 15$
Korijena tetiva $c_r$ [m]	$c_{r_w} = 2$	$c_{r_p} = 2$
Vršna tetiva $c_t$ [m]	$c_{t_w} = 2$	$c_{t_p} = 2$
Kut dihedrala $\Phi$ [°]	ne uzima u obzir	$\Phi_p = 0$
Kut uvijanja u korijenu krila $\alpha_{tw_r}$ [°]	ne uzima u obzir	$\alpha_{tw_r_p} = 0$
Kut uvijanja u vrhu krila $\alpha_{tw_t}$ [°]	ne uzima u obzir	$\alpha_{tw_t_2} = 0$
Broj segmenata $m$	$m_w = 80$	$m_p = 80$

### 3.3. Usporedba rezultata za intenzitet cirkulacije

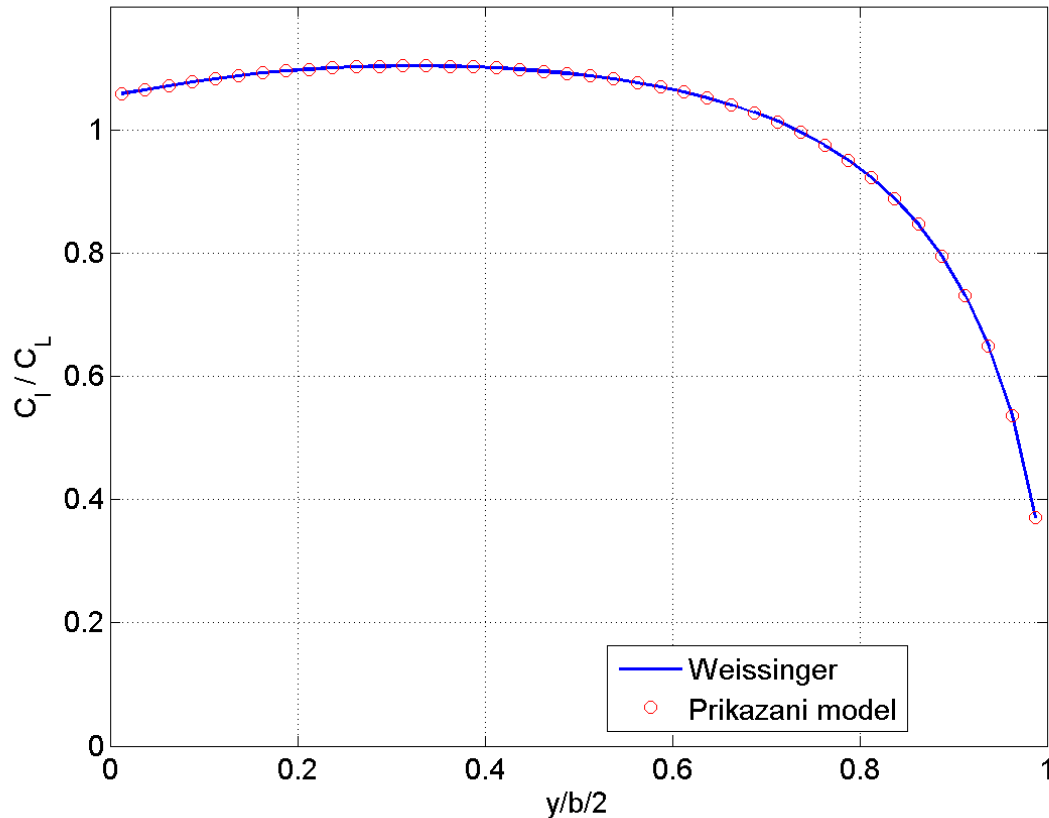


Slika 3. Prikaz rezultata za promjenu intenziteta cirkulacije po rasponu krila

Zanemarivanjem geometrijskih parametara koje Weissinger ne uzima u obzir, ovdje prikazani numerički model trebao se ponašati kao i Weissinger model. Iz prikazanog dijagrama je vidljivo da se za iste ulazne geometrijske podatke intenzitet cirkulacije po rasponu krila mijenja jednako i ima iste vrijednosti za oba modela. Prema tome, možemo zaključiti da se prikazani numerički model ponaša kao Weissinger u zadanim uvjetima. Budući da je Weissinger metoda testirana i točna iz ovoga je dokazana točnost prikazanog numeričkog modela u slučaju promijenjive strijele napadnog ruba.

Rezultati se odnose na polukrilo a to je moguće prikazati zato što je krilo simetrično pa su rezultati identični i za drugo polukrilo.

### 3.4. Usporedba rezultata za koeficijent uzgona



**Slika 4. Prikaz rezultata za promjenu koeficijenta uzgona normiranog sa ukupnim koeficijentom uzgona po rasponu krila**

Kao što je u jednažbi (17) pokazano, koeficijent uzgona ovisi o intenzitetu cirkulacije i zbog toga su ovakvi rezultati očekivani. Rezultati gornjeg dijagrama dodatno potvrđuju točnost prikazanog numeričkog modela.

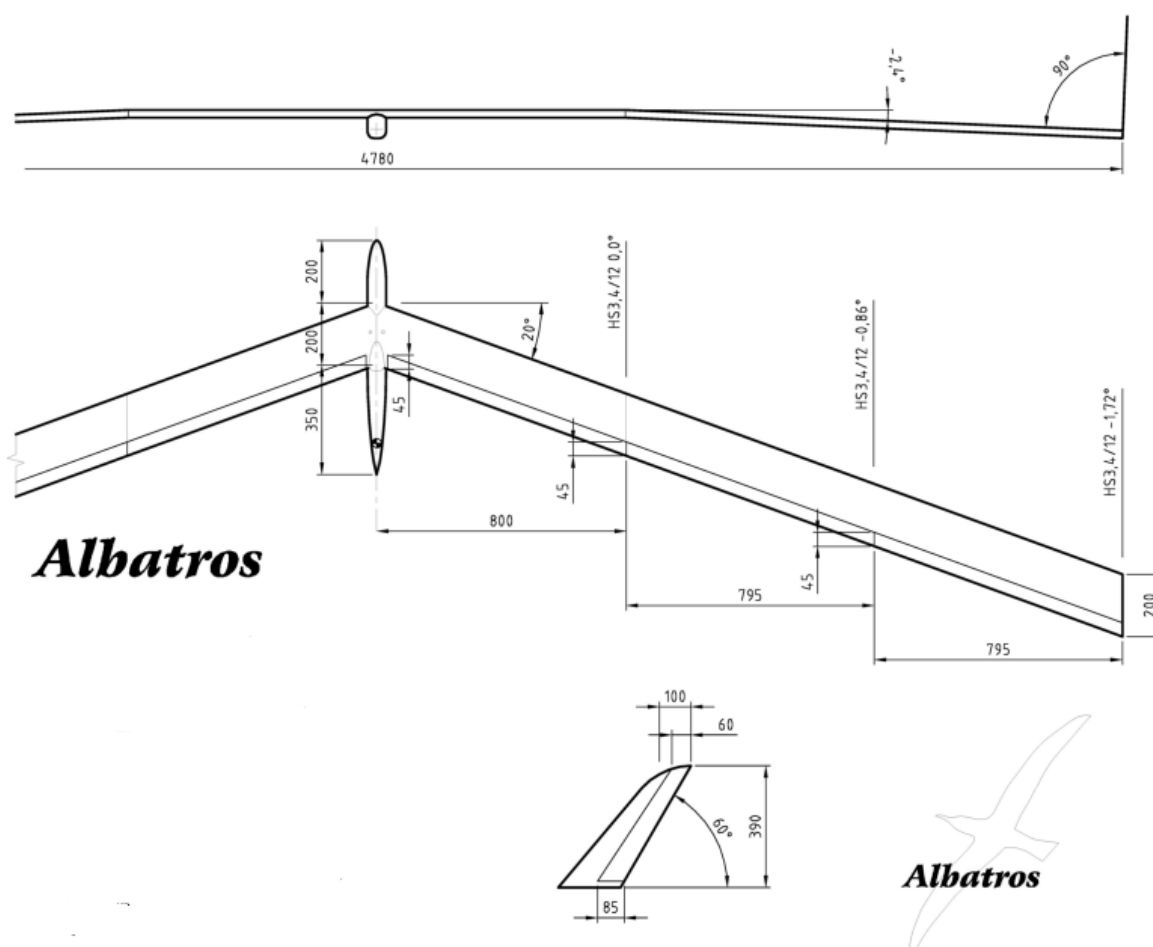
Oblik krivulje je ovakav zato što su vrtlozi najjači u korijenu krila pa im je i intenzitet cirkulacije najjači u korijenu i opada prema vrhu krila. Koeficijent uzgona linearno ovisi o intenzitetu cirkulacije i zbog toga su oba dijagrama istog oblika.

## 4. PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA NA KRILO SLOŽENE GEOMETRIJE

Nakon provjere točnosti za jednostavnu geometriju, zadatak je bio primjeniti model na odabrano krilo složene geometrije. Za primjer je odabrano krilo bespilotne letjelice „Albatros“ koja je privatne izrade a odabrana je zbog toga što se na njezinoj geometriji mogu prikladno prikazati mogućnosti numeričkog modela.

### 4.1. Geometrijske karakteristike krila „Albatros“

Kao što je već naglašeno u prvom poglavlju o geometriji krila, trup se zanemaruje i krilo se promatra kao da je spojeno. Krilo se sastoji od tri dijela pri čemu treći dio krila ima veliki kut dihedrala i nazivamo ga „winglet“. Pokušaj prijevoda ovog izraza na Hrvatski jezik bio bi „dokrilce“.



Slika 5. Geometrija krila bespilotne letjelice „Albatros“

Tabela 2. Ulazni podatci za geometriju krila bespilotne letjelice „Albatros“

Krilo	1.dio	2.dio	3.dio (dokrilce)
Raspon $b$ [m]	$b_1 = 1.6$	$b_2 = 3.18$	$b_3 = 0.034$
Strijela napadnog ruba $\Lambda_{LE}$ [°]	$\Lambda_{LE1} = 20$	$\Lambda_{LE2} = 20$	$\Lambda_{LE3} = 4.4$
Korijena tetiva $c_r$ [m]	$c_{r1} = 0.2$	$c_{r2} = 0.2$	$c_{r3} = 0.2$
Vršna tetiva $c_t$ [m]	$c_{t1} = 0.2$	$c_{t2} = 0.2$	$c_{t3} = 0.17$
Kut dihedrala $\Phi$ [°]	$\Phi_1 = 0$	$\Phi_2 = -2.4$	$\Phi_3 = 87.6$
Kut uvijanja u korijenu krila $\alpha_{tw_r}$ [°]	$\alpha_{tw_{r1}} = 0$	$\alpha_{tw_{r2}} = 0$	$\alpha_{tw_{r1}} = 0$
Kut uvijanja u vrhu krila $\alpha_{tw_t}$ [°]	$\alpha_{tw_{t1}} = 0$	$\alpha_{tw_{t2}} = -1.72$	$\alpha_{tw_{t3}} = 0$
Broj segmenata $m$	$m_1 = 30$	$m_2 = 50$	$m_3 = 30$

Potrebno je napomenuti da u modelu raspon dokrilca nije definiran kao 0.4 m već kao projekcija te duljine na y-os (koja se proteže u smjeru raspona krila) tj.  $b_3 = \tan\Phi_3$ . Također, ukupan raspon krila je  $b = b_1 + b_2$  i ne uzima u obzir projekciju raspona dokrilca na y-os ( $b_3$ ). To je zato što je tako naznačeno na crtežu „Albatrosa“.

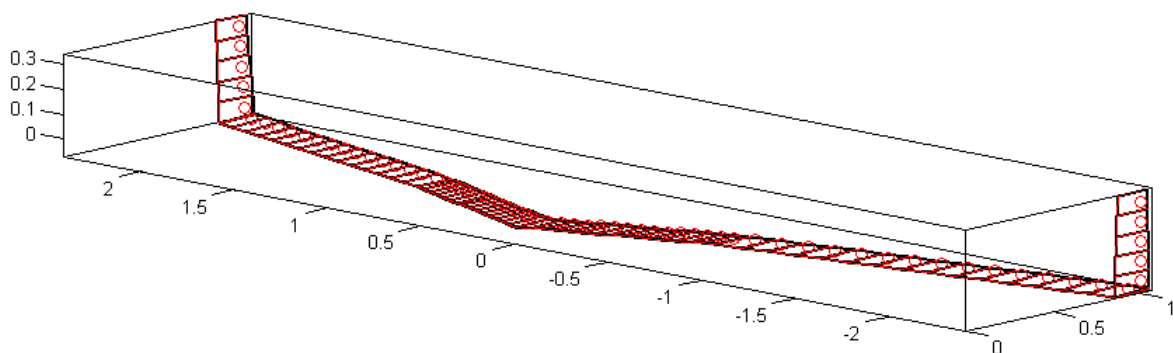


Model ne uzima u obzir zaobljenje vršne tetive dokrilca. Ako želimo da promjena tetive bude linearna i da bi je model mogao uzeti u razmatranje, duljina vršne tetive približno je uzeta kao dvostruka debljina zakrilca na dokrilcu tj.  $c_{t3} = 0.17$ .

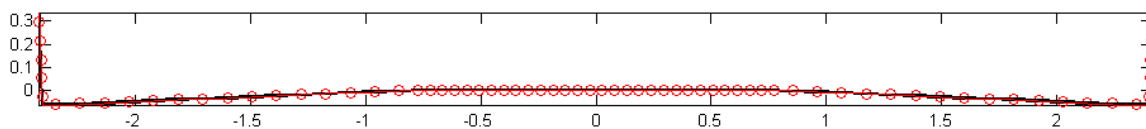
Oznake HS3.4-712  $0.0^\circ$ , HS3.4-712  $-0.86^\circ$ , HS3.4-712  $-1.72^\circ$  odnose se na oznake profila na pojedinom dijelu krila i iz njih očitavamo kut uvijanja na pojedinom dijelu krila.

S obzirom na zadanu geometriju pretpostavljena je brzina leta  $V = 100 \text{ m/s}$  i napadni kut  $\alpha = 3^\circ$ .

Broj segmenata da određenom dijelu krila ( $m_1, m_2, m_3$ ) određen je proporcionalno površini pojedinog dijela krila. Provjerom je utvrđeno da povećavanje broja segmenata nema veliki utjecaj na kasniji proračun za koeficijent uzgona i koeficijent inducirano otpora.



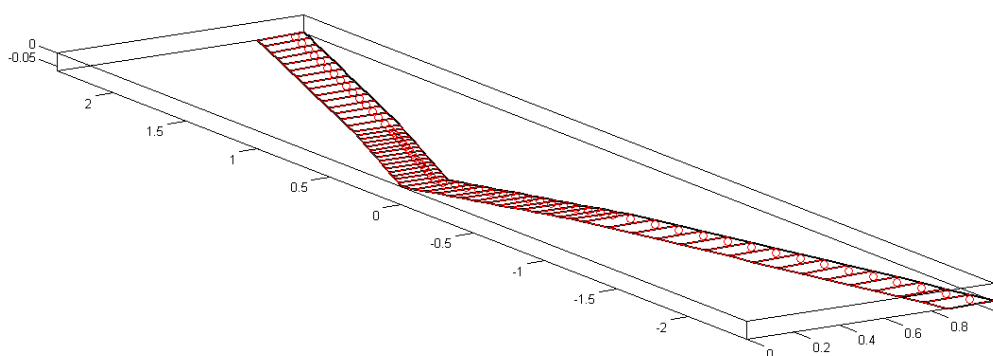
**Slika 6. Geometrijski prikaz bespilotne letjelice „Albatros“ u programu MATLAB**



Slika 7. Prikaz u y-z ravnini

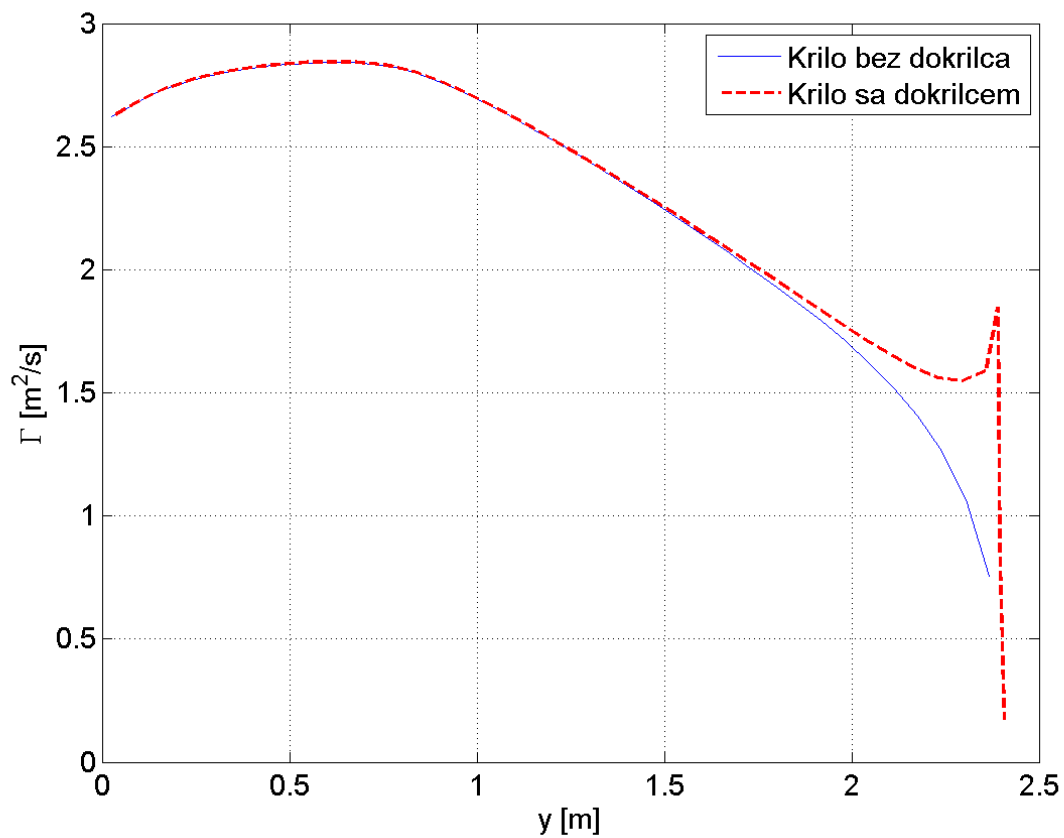
#### 4.2. Utjecaj dokrilaca na ukupni koeficijent uzgona i ukupni koeficijent induciranoog otpora te na promjenu intenziteta cirkulacije i koeficijenta uzgona po rasponu krila

Krilo bez dokrilaca ima iste ulazne geometrijske parametre kao i krilo sa dokrilcima.



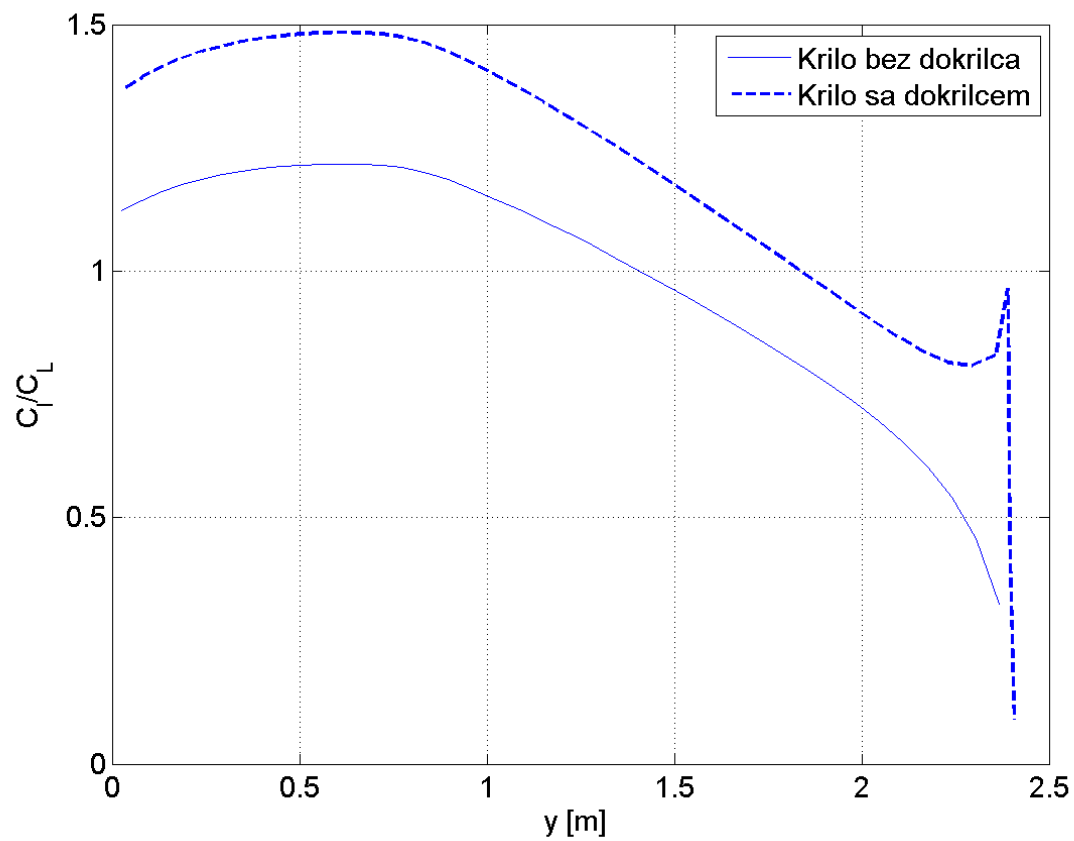
Slika 8. Geometrijski prikaz krila bespilotne letjelice „Albatros“ bez dokrilaca

#### 4.2.1. Utjecaj dokrilaca na promjenu intenziteta cirkulacije po rasponu krila



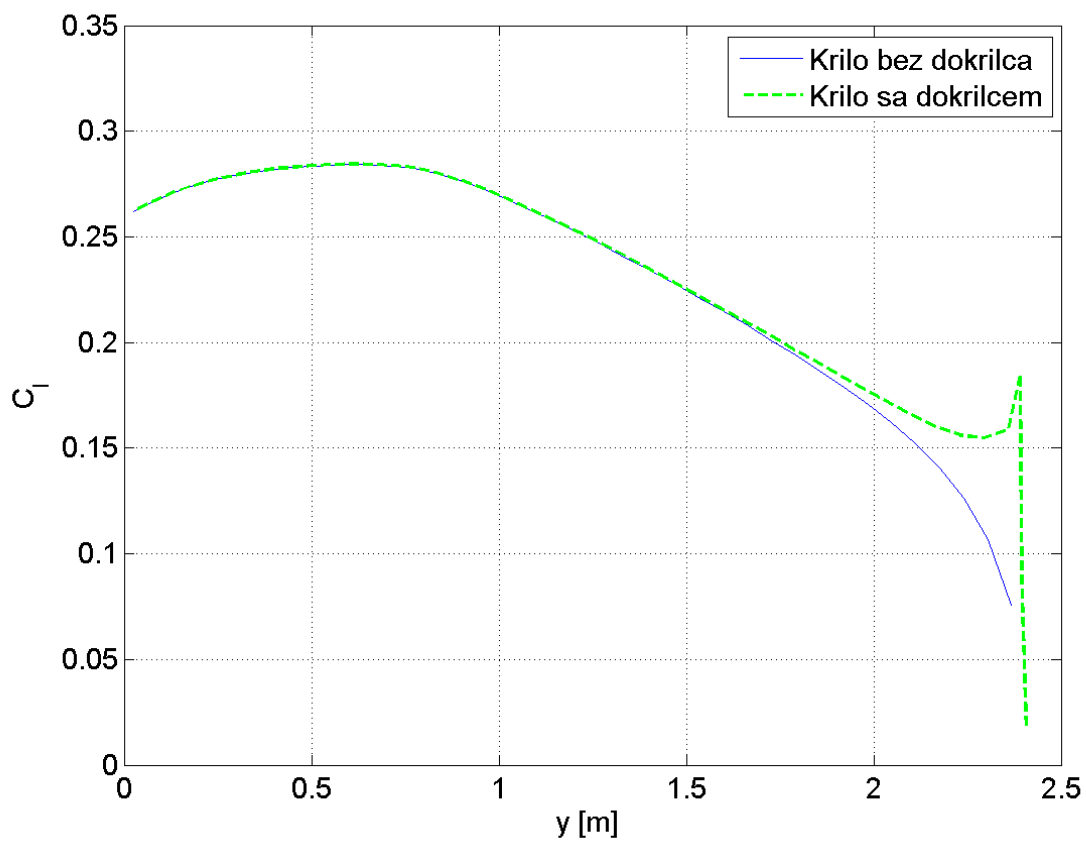
Slika 9. Rezultati usporedbe utjecaja intenziteta cirkulacije po rasponu krila za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca

#### 4.2.2. Utjecaj dokrilaca na promjenu koeficijenta uzgona po rasponu krila



Slika 10. Rezultati usporedbe utjecaja normiranog koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca

### 4.2.3. Utjecaj dokrilaca na promjenu nenormiranog koeficijenta uzgona po rasponu krila

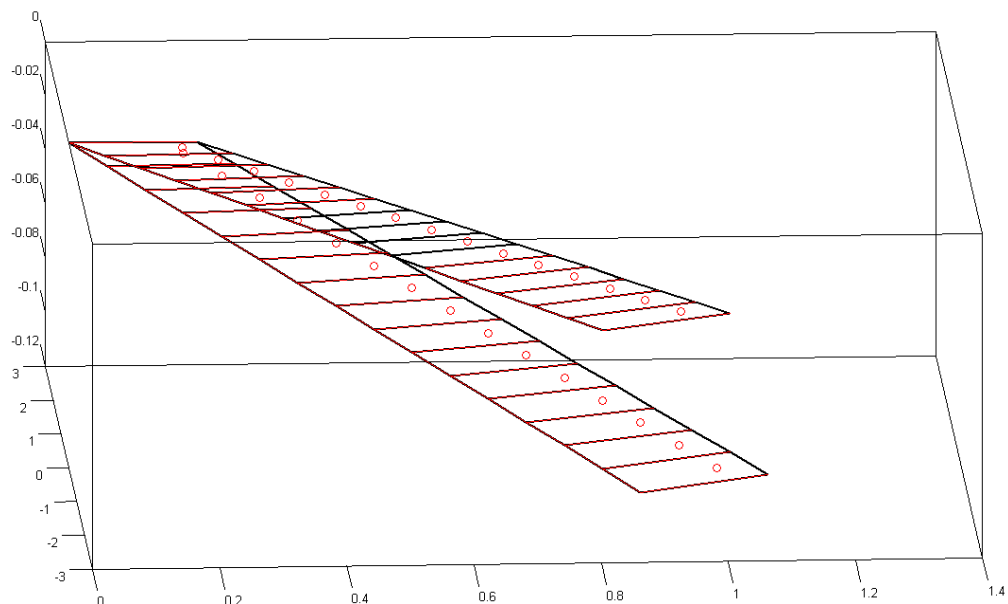


Slika 11. Rezultati usporedbe utjecaja koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca

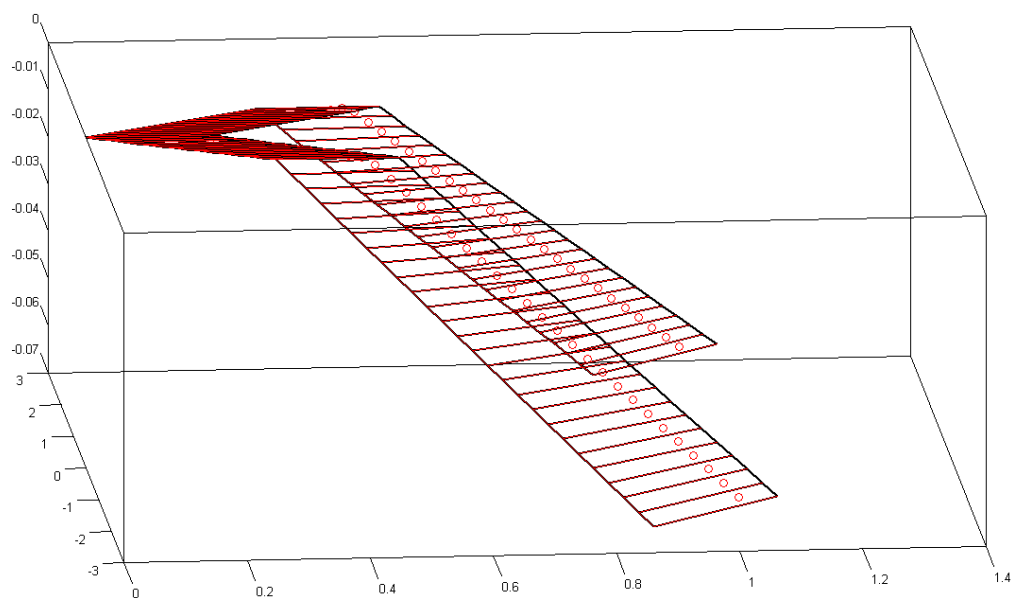
Tabela 3. Usporedba ukupnog koeficijenta uzgona i koeficijenta induciranog otpora za krilo sa dokrilcima i krilo bez dokrilaca

	Krilo bez dokrilca	Krilo sa dokrilcem
$CD_i$	0.000754	0.000562
$C_L$	0.2334	0.1916

### 4.3. Usporedba krila sa jednim prijelomom i bez prijeloma



Slika 12. Geometrijski prikaz krila letjelice „Albatros“ bez prijeloma

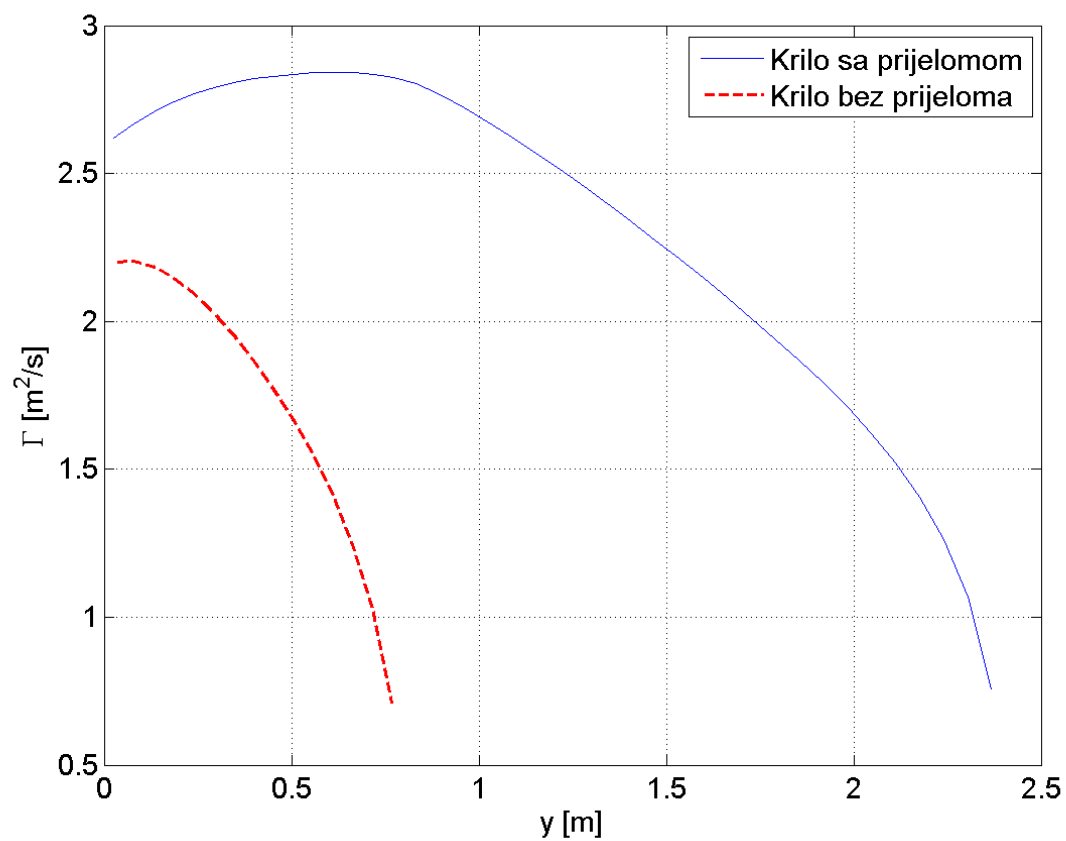


Slika 13. Geometrijski prikaz krila letjelice „Albatros“ sa prijelomom

**Tabela 4. Ulazni podatci za geometriju krila sa prijelomom i bez prijeloma**

Krilo	Krilom sa prijelomom		
	Krilo bez prijeloma	Krilo sa prijelomom	Krilo sa prijelomom
Raspon $b$ [m]	$b_1 = 4.78$	$b_1 = 1.6$	$b_2 = 3.18$
Strijela napadnog ruba $\Lambda_{LE}$ [°]	$\Lambda_{LE_1} = 20$	$\Lambda_{LE_1} = 20$	$\Lambda_{LE_2} = 20$
Korijena tetiva $c_r$ [m]	$c_{r_1} = 0.2$	$c_{r_1} = 0.2$	$c_{r_2} = 0.2$
Vršna tetiva $c_t$ [m]	$c_{t_1} = 0.2$	$c_{t_1} = 0.2$	$c_{t_2} = 0.2$
Kut dihedrala $\Phi$ [°]	$\Phi_1 = -2.4$	$\Phi_1 = 0$	$\Phi_2 = -2.4$
Kut uvijanja u korijenu krila $\alpha_{tw_r}$ [°]	$\alpha_{tw_{r_1}} = 0$	$\alpha_{tw_{r_1}} = 0$	$\alpha_{tw_{r_2}} = 0$
Kut uvijanja u vrhu krila $\alpha_{tw_t}$ [°]	$\alpha_{tw_{t_1}} = -1.72$	$\alpha_{tw_{t_1}} = 0$	$\alpha_{tw_{t_2}} = -1.72$
Broj segmenata $m$	$m_1 = 50$	$m_1 = 30$	$m_2 = 50$

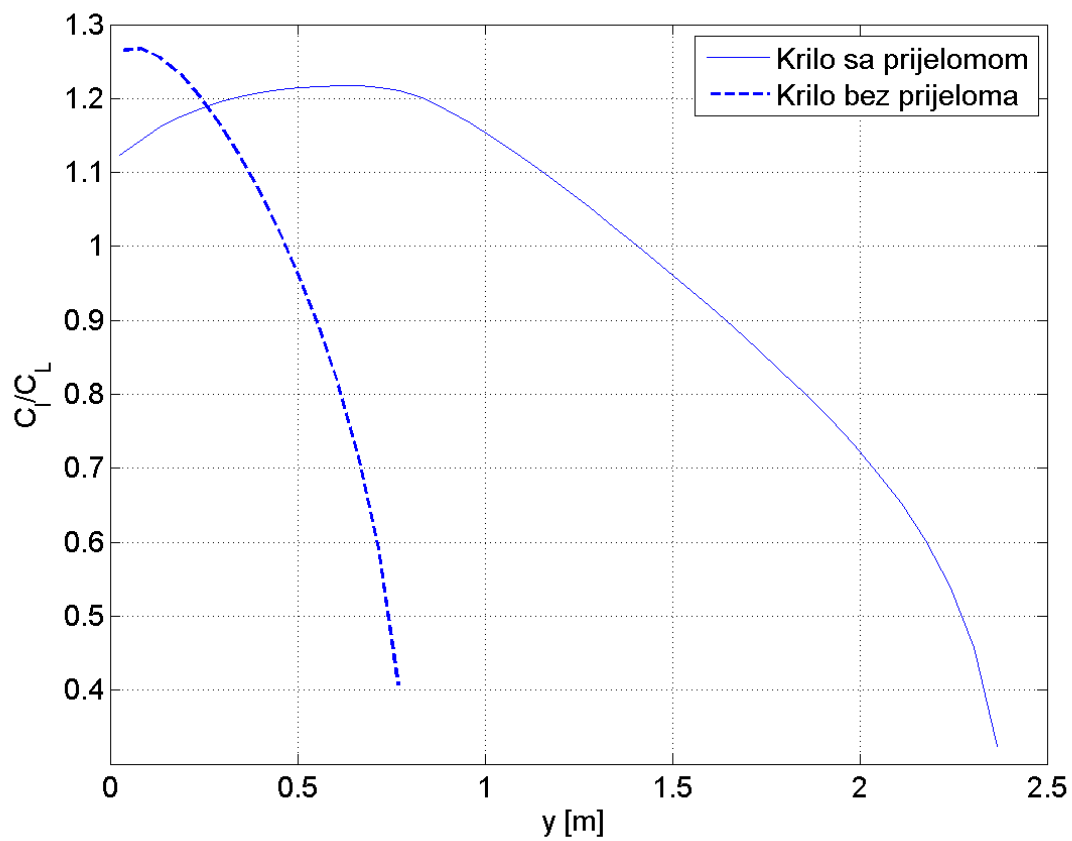
### 4.3.1 Utjecaj prijeloma na promjenu intenziteta cirkulacije po rasponu krila



Slika 14. Rezultati usporedbe utjecaja intenziteta cirkulacije po rasponu krila za krilo sa prijelomom i krilo bez prijeloma

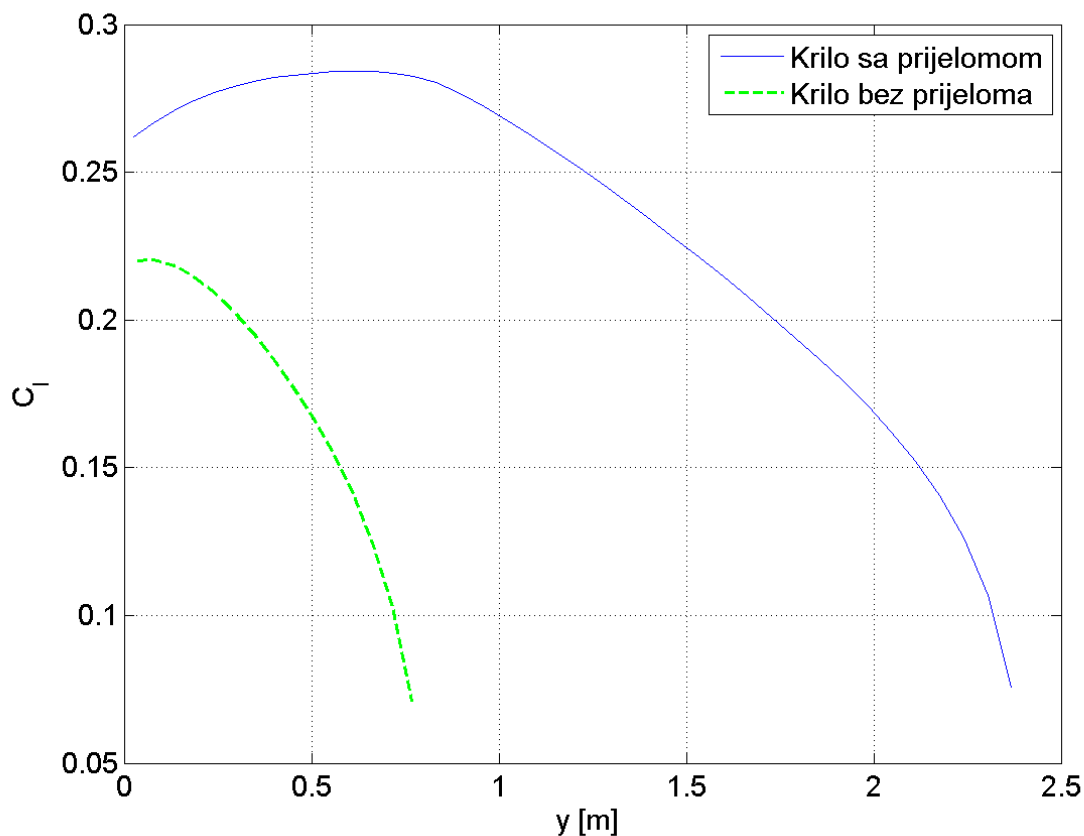


### 4.3.2. Utjecaj prijeloma na promjenu koeficijenta uzgona po rasponu krila



Slika 15. Rezultati usporedbe utjecaja normiranog koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa prijelomom i krilo bez prijeloma

### 4.3.3. Utjecaj prijeloma na promjenu nenormiranog koeficijenta uzgona po rasponu krila



Slika 16. Rezultati usporedbe utjecaja koeficijenta uzgona po rasponu krila za krilo sa prijelomom i krilo bez prijeloma

Tabela 5. Usporedba ukupnog koeficijenta uzgona i koeficijenta induciranog otpora za krilo za prijelomom i krilo bez prijeloma

	Kriilo bez prijeloma	Kriilo sa prijelomom
$CD_i$	0.000509	0.000754
$C_L$	0.2045	0.2334

## 5. ZAKLJUČAK

Temeljem metode noseće linije u ovom radu razvijen je model kojim možemo proračunati aerodinamičke karakteristike krila složene geometrije: krila s prijelomima, promijenjivim izosima suženja, kuta strijele, kuta dihedrala i kuta uvijanja. Opisanim numeričkim modelom moguće je izračunati promjenu intenziteta cirkulacije i koeficijenta uzgona po rasponu krila te ukupni koeficijent uzgona i ukupni koeficijent induciranog otpora. Numerički model primjenjen je na složenu geometriju krila bespilotne letjelice „Albatros“, konfiguracije letećeg krila. Raznim kombinacijama ulaznih geometrijskih parametara i promjenama neporemećene brzine i napadnog kuta moguće je dobiti veliki broj geometrija krila i predmeta analize na kojima je moguće provesti osnovni aerodinamički proračun. Točnost numeričkog modela ovdje prikazanog je dokazana samo kad je strijela napadnog ruba promijenjiva zato što je ovaj model samo u tom slučaju mogao biti uspoređen sa Weissinger metodom. Da bi se provjerila točnost ovog modela i pri promjeni ostalih parametara potrebno je metodu usporediti sa nekom drugom složenijom metodom. Glavna prednost ovog numeričkog modela je u tome što ga je lako moguće nadograditi i učiniti još zanimljivijim i praktičnijim za rad.

## **PRILOZI**

- I. CD-R disc

## **LITERATURA**

- [1] Janković,S., Virag, Z., Vrdoljak,M.: Aerodinamika I, FSB, Zagreb, 2009.
- [2] <http://www.aerodesign.de/modelle/HS/hs09.htm>