

# 6DOF model četverorotornog helikoptera

---

**Peleh, Stjepko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2012**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:075892>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-04**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Stjepko Peleh

ZAGREB, 2012.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

6DOF model četverorotornog helikoptera

Voditelj rada:

Doc. dr. sc. Milan Vrdoljak

Stjepko Peleh

ZAGREB, 2012.

— *Ovdje umetni tekst zadatka za diplomski rad!* —

*Zahvaljujem svom mentoru docentu dr. sc. Milanu Vrdoljaku na pomoći, znanju i potpori koju mi je pružio u izradi diplomskog rada. Također zahvaljujem najbližoj rodbini, kolegama i prijateljima na potpori tijekom studija, osobito onima koji su mi pružili krov nad glavom (AiA, SA, DM, MM, MĐ, AŠ). Najveću zahvalu upućujem svojoj sestri i mami koje su me bodrile i bile uz mene kroz sve ove godine.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno, koristeći se navedenom literaturom i vlastitim stečenim znanjem za vrijeme studija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, smjer zrakoplovstvo.

Zagreb, siječanj 2012.

Stjepko Peleh

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>v</b>
<b>Sažetak</b>	<b>viii</b>
<b>Popis slika</b>	<b>ix</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>xiii</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>xiv</b>
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Definicija i namjena četverorotornog helikoptera . . . . .	1
1.2. Upravljanje četverorotornim helikopterom . . . . .	2
1.3. Prednosti i nedostaci četverorotornog helikoptera . . . . .	4
1.3.1. Prednosti . . . . .	4
1.3.2. Nedostaci . . . . .	5
1.4. Kratki pregled rada i literature . . . . .	6
1.5. Pretpostavke i ograničenja modela . . . . .	7
<b>2. Koordinatni sustavi</b>	<b>8</b>
2.1. Lokalni koordinatni sustav (L) . . . . .	8
2.2. Nošeni koordinatni sustav (O) . . . . .	9

2.3. Koordinatni sustav letjelice (F) . . . . .	10
2.4. Koordinatni sustav rotora (R) . . . . .	12
2.5. Koordinatni sustav ravnine vrhova krakova rotora (TPP) . . . . .	12
<b>3. Konfiguracija promatranog četverorotornog helikoptera</b>	<b>14</b>
3.1. Pogonski motor . . . . .	15
3.2. Propeler . . . . .	16
3.2.1. Kut uvijanja . . . . .	16
3.2.2. Karakteristike aeroprofila . . . . .	18
3.2.3. Model mahanja kraka . . . . .	20
3.3. Baterija . . . . .	24
3.4. Inercijske značajke . . . . .	24
<b>4. Vertikalni let</b>	<b>26</b>
4.1. Bezdimenzionalni koeficijenti . . . . .	26
4.2. Kombinirana teorija elementarnog kraka i teorije diska . . . . .	27
4.2.1. Koeficijent gubitaka na vrhu kraka . . . . .	30
4.2.2. Numeričko rješenje . . . . .	35
4.2.3. Usporedba rezultata aerodinamičkog modela rotora s eksperimentalnim . . . . .	38
<b>5. Horizontalni let</b>	<b>40</b>
5.1. Aerodinamički model rotora . . . . .	40
5.2. Momenti uzrokovani mahanjem . . . . .	42
5.3. Pojednostavljeni ravnotežni let . . . . .	42
<b>6. Model leta sa 6 stupnjeva slobode gibanja</b>	<b>47</b>
6.1. Matrične jednadžbe . . . . .	47
6.1.1. Derivacija vektora položaja . . . . .	47
6.1.2. Derivacija brzine leta . . . . .	48
6.1.3. Derivacija kinetičkog momenta . . . . .	49
6.1.4. Derivacija stava . . . . .	49
6.1.5. Derivacija kinetičkih momenata motora . . . . .	50
6.2. 6DOF model promatranog četverorotornog helikoptera . . . . .	51



6.2.1. Sile u 6DOF modelu . . . . .	53
6.2.2. Momenti u 6DOF modelu . . . . .	54
<b>7. Rezultati simulacije</b>	<b>56</b>
7.1. Vertikalni let . . . . .	58
7.1.1. Vertikalno penjanje - step pobuda . . . . .	60
7.1.2. Vertikalno penjanje - impulsna pobuda . . . . .	63
7.1.3. Zanošenje . . . . .	66
7.1.4. Propinjanje . . . . .	70
7.2. Horizontalni let . . . . .	74
7.2.1. Horizontalni let bez pobude . . . . .	76
7.2.2. Horizontalni let s pobudom . . . . .	81
7.2.3. Pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	86
7.2.4. Usporedba s postojećim modelom . . . . .	91
<b>8. Zaključak</b>	<b>95</b>
<b>A. Matrice transformacije</b>	<b>99</b>
A.1. Temeljne matrice transformacije . . . . .	99
A.2. Matrica transformacije $\mathbf{L}_{LO}$ . . . . .	99
A.3. Matrica transformacije $\mathbf{L}_{FO}$ . . . . .	100
A.4. Matrica transformacije $\mathbf{L}_{RTPP}$ . . . . .	100
<b>B. Karakteristike aeroprofila NACA 0012</b>	<b>101</b>
<b>Literatura</b>	<b>105</b>

# Sažetak

U ovom diplomskom radu napravljen je model gibanja za poznatu konfiguraciju četverorotornog helikoptera kao krutog tijela (6DOF model). Razvijeni 6DOF model primjenjen je u vertikalnom i horizontalnom letu. Numerička implementacija modela napravljena je u MATLAB-u i rezultati su uspoređeni s postojećim modelom. Pri tome je provedeno nekoliko simulacija za vertikalni i horizontalni let. Aerodinamički model rotora u vertikalnom letu modeliran je metodom kombinirane teorije elementarnog kraka i teorije diska (BEMT). U model su implementirani gubici na vrhu kraka prema Prandtllovom modelu. Dobiveni rezultati za vertikalni let uspoređeni su s eksperimentalnim podacima. Za model rotora u horizontalnom letu korišteno je analitičko rješenje teorije elementarnog kraka (BET) korigirano koeficijentom gubitaka na vrhu kraka. U horizontalnom letu bitna značajka postaje asimetričnost strujanja na rotor i mahanje kraka uslijed razlike opterećenja napredujuće i povratne strane rotora. Uslijed toga dolazi do uzdužnog i bočnog mahanja kraka rotora. U radu je zanemareno bočno mahanje i promatran samo utjecaj uzdužnog mahanja na gibanje četverorotornog helikoptera.

# Popis slika

1.1	Četverorotorni helikopteri: a) Draganflyer X4, b) Parrot AR.Drone . . .	2
1.2	STARMAC II četverorotorni helikopter . . . . .	2
1.3	Upravljanje četverorotornim helikopterom promjenom pogonske sile i okret- nog momenta na pojedinom rotoru: a) penjanje, b) valjanje ili propinjanje, c) zanošenje . . . . .	3
2.1	Položaj nošenog u odnosu na lokalni koordinatni sustav . . . . .	9
2.2	Koordinatni sustav letjelice . . . . .	10
2.3	Veza između koordinatnog sustava TPP i koordinatnog sustava rotora: a) pogled s lijeva, b) pogled odozda . . . . .	13
3.1	CAD model četverorotornog helikoptera . . . . .	14
3.2	<i>Hacker A20-22L EVO Brushless Outrunner RC Motor</i> . . . . .	15
3.3	Par suprotno rotirajućih propelera <i>APC Slow Flyer 10 × 4.7</i> . . . . .	16
3.4	Putanja vrha kraka propelera na razvijenom plaštu cilindra radijusa $R$ .	17
3.5	Usporedba hiperboličke i linearne raspodjele kuta uvijanja po rasponu kraka . . . . .	18
3.6	Raspodjela tangencijalnih brzina po rasponu kraka za horizontalni let . .	21
3.7	Model mahanja kraka . . . . .	22
4.1	Elementarni presjek $dy$ kraka rotora na radijusu $y$ , pogled odozgo . . . .	27
4.2	Raspodjela koeficijenta inducirane brzine po rasponu kraka . . . . .	32
4.3	Raspodjela gradijenta pogonske sile po rasponu kraka . . . . .	32

4.4	Usporedba za krakove s hiperboličkom i linearnom raspodjelom kuta uvi- janja: a) raspodjela koeficijenta inducirane brzine, b) raspodjela gradi- jenta pogonske sile . . . . .	34
4.5	Raspodjela pogonske sile po rasponu kraka u vertikalnom letu (BEMT) .	37
4.6	Usporedba BEMT rezultata s eksperimentalnim za pogonsku silu ovisno o brzini penjanja . . . . .	38
4.7	Usporedba BEMT rezultata s eksperimentalnim za snagu ovisno o brzini penjanja . . . . .	39
5.1	Utjecaj mahanja na rotor u napredujućem letu . . . . .	43
5.2	Moment oko glavčine . . . . .	44
5.3	Kvazi ravnotežno stanje jednog rotora u horizontalnom letu (zanemareni su momenti uzrokovani mahanjem) . . . . .	45
6.1	Ekvivalentni strujni krug istosmjernog elektromotora . . . . .	50
7.1	Usporedba rezultata snage za različite modele otpora profila i različite korake integracije . . . . .	57
7.2	Pobuda - vertikalno penjanje (step pobuda) . . . . .	60
7.3	Kutna brzina sva četiri rotora - vertikalno penjanje (step pobuda) . . . .	60
7.4	Položaj - vertikalno penjanje (step pobuda) . . . . .	61
7.5	Brzine - vertikalno penjanje (step pobuda) . . . . .	61
7.6	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (step pobuda)	62
7.7	Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (step pobuda)	62
7.8	Pobuda - vertikalno penjanje (impulsna pobuda) . . . . .	63
7.9	Kutna brzina sva četiri rotora - vertikalno penjanje (impulsna pobuda) .	63
7.10	Položaj - vertikalno penjanje (impulsna pobuda) . . . . .	64
7.11	Brzine - vertikalno penjanje (impulsna pobuda) . . . . .	64
7.12	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (impulsna pobuda) . . . . .	65
7.13	Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (impulsna pobuda) . . . . .	65
7.14	Pobuda - zanošenje . . . . .	66
7.15	Kutna brzina rotora - zanošenje . . . . .	66

7.16	Položaj - zanošenje . . . . .	67
7.17	Brzine - zanošenje . . . . .	67
7.18	Stav - zanošenje . . . . .	68
7.19	Kutne brzine - zanošenje . . . . .	68
7.20	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ - zanošenje . . . . .	69
7.21	Pogonska sila i snaga - zanošenje . . . . .	69
7.22	Pobuda - propinjanje . . . . .	70
7.23	Kutna brzina motora - propinjanje . . . . .	70
7.24	Položaj - propinjanje . . . . .	71
7.25	Brzine - propinjanje . . . . .	71
7.26	Stav - propinjanje . . . . .	72
7.27	Kutne brzine - propinjanje . . . . .	72
7.28	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ - propinjanje . . . . .	73
7.29	Pogonska sila i snaga - propinjanje . . . . .	73
7.30	Pobuda - horizontalni let bez pobude . . . . .	76
7.31	Kutna brzina sva četiri motora - horizontalni let bez pobude . . . . .	76
7.32	Položaj - horizontalni let bez pobude . . . . .	77
7.33	Brzine - horizontalni let bez pobude . . . . .	77
7.34	Stav - horizontalni let bez pobude . . . . .	78
7.35	Kutne brzine - horizontalni let bez pobude . . . . .	78
7.36	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ (sva četiri rotora) - horizontalni let bez pobude . . . . .	79
7.37	Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - horizontalni let bez pobude . . . . .	79
7.38	Kutovi mahanja (sva četiri rotora) - horizontalni let bez pobude . . . . .	80
7.39	Napadni kut trupa letjelice - horizontalni let bez pobude . . . . .	80
7.40	Pobuda - horizontalni let s pobudom . . . . .	81
7.41	Kutna brzina motora - horizontalni let s pobudom . . . . .	81
7.42	Položaj - horizontalni let s pobudom . . . . .	82
7.43	Brzine - horizontalni let s pobudom . . . . .	82
7.44	Stav - horizontalni let s pobudom . . . . .	83
7.45	Kutne brzine - horizontalni let s pobudom . . . . .	83
7.46	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ (sva četiri rotora) - horizontalni let s pobudom . . . . .	84
7.47	Pogonska sila i snaga - horizontalni let s pobudom . . . . .	84
7.48	Kutovi mahanja (sva četiri rotora) - horizontalni let s pobudom . . . . .	85

7.49	Napadni kut trupa letjelice - horizontalni let s pobudom . . . . .	85
7.50	Pobuda - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	86
7.51	Kutna brzina sva četiri motora - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	86
7.52	Položaj - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	87
7.53	Brzine - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	87
7.54	Stav - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	88
7.55	Kutne brzine - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	88
7.56	Koeficijenti $C_T$ i $C_P$ (sva četiri rotora) - pojednostavljeni horizontalni let	89
7.57	Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - pojednostavljeni horizontalni let	89
7.58	Kutovi mahanja (sva četiri rotora) - pojednostavljeni horizontalni let . .	90
7.59	Napadni kut trupa letjelice - pojednostavljeni horizontalni let . . . . .	90
7.60	Pobuda za usporedbu modela - vertikalno penjanje . . . . .	92
7.61	Usporedba odziva modela u vertikalnom penjanju - visina . . . . .	92
7.62	Usporedba odziva modela u vertikalnom penjanju - vertikalna brzina . .	93
7.63	Pobuda za usporedbu modela - zanošenje . . . . .	93
7.64	Kut zanosa . . . . .	94
7.65	Kutna brzina zanošenja . . . . .	94
B.1	Promjena kuta nagiba linearne ovisnosti uzgona o napadnom kutu profila NACA 0012 s Machovim brojem . . . . .	103
B.2	Promjena koeficijenta uzgona i otpora profila NACA 0012 za napadne kuteve od $-180^\circ$ do $-80^\circ$ . . . . .	103
B.3	Promjena koeficijenta uzgona profila NACA 0012 po napadnom kutu prema podacima iz tablice B.1 . . . . .	104
B.4	Promjena koeficijenta otpora profila NACA 0012 po napadnom kutu prema podacima iz tablice B.1 . . . . .	104

# Popis tablica

3.1	Karakteristike motora <i>Hacker A20-22L EVO</i> . . . . .	15
3.2	Karakteristike baterije <i>Saehan 3400 HS</i> . . . . .	24
3.3	Mase komponenata promatranog četverorotornog helikoptera . . . . .	25
B.1	Promjena aerodinamičkih koeficijenata profila NACA 0012 s Machovim brojem . . . . .	102

# Popis oznaka

$A$	koeficijent promjene uzgona profila u području velikih napadnih kutova . . .	19
$A$	površina diska rotora, $m^2$ . . . . .	26
$B$	koeficijent gubitaka na vrhu kraka . . . . .	30
$C_H$	koeficijent sile otpora rotora . . . . .	40
$C_P$	koeficijent snage . . . . .	26
$C_{P0}$	koeficijent snage potreban za svladavanje otpora profila . . . . .	29
$C_{Pc}$	koeficijent snage potrebne za penjanje . . . . .	29
$C_{Pi}$	koeficijent inducirane snage . . . . .	29
$C_Q$	koeficijent okretnog momenta . . . . .	26
$C_T$	koeficijent pogonske sile . . . . .	26
$D$	sila otpora tijela letjelice, [N] . . . . .	45
$D$	koeficijent otpora profila u području velikih napadnih kutova . . . . .	19
$DL$	opterećenje diska, [Pa] . . . . .	31
$E$	koeficijent promjene otpora profila u području velikih napadnih kutova . . .	19
$F$	Prandtlov koeficijent gubitaka na vrhu kraka . . . . .	30
$\mathbf{F}$	matrica sume svih sila koje djeluju na letjelicu, [N] . . . . .	48
$\vec{H}$	vektor kinetičkog momenta, [Nms] . . . . .	49
$H$	sila otpora rotora, [N] . . . . .	40
$\mathbf{H}$	matrica komponenti kinetičkog momenta, [Nms] . . . . .	49
$\mathbf{H}_D$	matrica komponenti sile otpora rotora, [N] . . . . .	53
$H_g$	korak propelera, [m] . . . . .	16
$\mathbf{I}$	tenzor inercije, [ $\text{kgm}^2$ ] . . . . .	24



$I_b$	moment inercije kraka oko zgloba mahanja, [kgm <sup>2</sup> ] . . . . .	23
$I_p$	moment inercije propelera, [kgm <sup>2</sup> ] . . . . .	51
$K_1$	koeficijent otpora okvira letjelice . . . . .	45
$K_2$	koeficijent otpora centralnog dijela letjelice . . . . .	45
$K_D$	koeficijent otpora profila u području do pojave divergencije otpora . . . . .	19
$K_{DD}$	koeficijent otpora nakon pojave divergencije otpora . . . . .	19
$K_Q$	konstanta momenta motora, [A/Nm] . . . . .	50
$K_V$	konstanta brzine vrtnje motora, [rad/s/V] . . . . .	50
$L$	induktivnost, [H] . . . . .	50
$L$	moment valjanja, [Nm] . . . . .	52
$\frac{dL}{dy}$	lokalni koeficijent sile uzgona kraka rotora . . . . .	22
$\mathbf{L}_{AB}$	matrica transformacije iz koordinatnog sustava B u koordinatni sustav A . . . . .	9
$\mathbf{L}_X$ $\mathbf{L}_Y$ $\mathbf{L}_Z$	temeljne matrice transformacija . . . . .	11
$M$	moment propinjanja, [Nm] . . . . .	52
$M_b$	masa kraka, [kg] . . . . .	22
$\mathbf{M}$	matrica sume svih momenata koji djeluju na letjelicu, [Nm] . . . . .	49
$\mathbf{M}_H$	matrica komponenti momenata uslijed djelovanja sile otpora rotora, [Nm] . . . . .	55
$M_{HUB}$	moment oko glavčine, [Nm] . . . . .	42
$\mathbf{M}_{HUB}$	matrica komponenti momenata oko glavčine, [Nm] . . . . .	55
$\mathbf{M}_T$	matrica komponenti momenata uslijed djelovanja pogonske sile, [Nm] . . . . .	55
$N$	moment zanošenja (skretanja), [Nm] . . . . .	52
$N_b$	broj krakova rotora . . . . .	28
$Q$	okretni moment, [Nm] . . . . .	26
$Q_m$	moment motora, [Nm] . . . . .	50
$P$	snaga, [W] . . . . .	26
$R$	najveći radijus rotora, [m] . . . . .	16
$R_m$	unutarnji otpor motora, [ $\Omega$ ] . . . . .	50
$S_{f1}$	frontalna projekcija površine okvira letjelice, [m <sup>2</sup> ] . . . . .	45
$S_{f2}$	frontalna projekcija površine centralnog dijela letjelice, [m <sup>2</sup> ] . . . . .	45
$S_{h1}$	horizontalna projekcija površine okvira letjelice, [m <sup>2</sup> ] . . . . .	53
$S_{h2}$	horizontalna projekcija površine centralnog dijela letjelice, [m <sup>2</sup> ] . . . . .	53
$T$	pogonska sila, [N] . . . . .	26

<b>T</b>	matrica komponenti pogonske sile, [N] . . . . .	53
$U$	napon, [V] . . . . .	50
$U_L$	pad napona na zavojnici, [V] . . . . .	50
$U_m$	povratna elektromotorna sila, [V] . . . . .	50
$U_r$	pad napona uslijed unutarnjeg otpora motora, [V] . . . . .	50
$V_\infty$	brzina neporemećene struje zraka, [m/s] . . . . .	20
$\vec{V}_\infty$	vektor neporemećene brzine struje zraka, [m/s] . . . . .	44
$\vec{V}_K$	vektor brzine leta, [m/s] . . . . .	44
$\vec{V}$	vektor aerodinamičke brzine, [m/s] . . . . .	44
$V_c$	brzina penjanja, [m/s] . . . . .	28
<b>V<sub>K</sub></b>	matrica komponenti brzine leta, [m/s] . . . . .	48
$W$	težina letjelice, [N] . . . . .	44
$a_0$	kut konusa . . . . .	21
$a_1$	uzdužni ciklički kut mahanja . . . . .	21
$b_1$	bočni ciklički kut mahanja . . . . .	21
$c$	duljina tetive kraka, [m] . . . . .	23
$c_d$	koeficijent otpora profila . . . . .	19
$c_{d0}$	koeficijent otpora profila pri nultom napadnom kut . . . . .	19
$c_l$	koeficijent uzgona profila . . . . .	19
$c_{l\alpha}$	gradijent uzgona profila po napadnom kutu . . . . .	19
$d_1$	koeficijent otpora profila $d_1$ . . . . .	20
$d_2$	koeficijent otpora profila $d_2$ . . . . .	20
$e$	bezdimenzionalna udaljenost zgloba mahanja od osi rotacije . . . . .	20
$h$	korak integracije . . . . .	56
$i$	struja, [A] . . . . .	50
$i_0$	nulta struja, [A] . . . . .	50
$k_\beta$	torzijska konstanta opruge, [Nm/rad] . . . . .	20
$m$	masa letjelice, [kg] . . . . .	48
$\bar{m}$	normirana masa kraka . . . . .	23
$p$ $q$ $r$	komponente kutne brzine letjelice, [rad/s] . . . . .	11
$q_d$	dinamički tlak, [Pa] . . . . .	45
$\vec{r}$	vektor položaja, [m] . . . . .	47

<b>r</b>	matrica komponenti vektora položaja, [m] . . . . .	47
<b>s</b>	matrica stava letjelice . . . . .	11
$v_K$	$v_K$ $w_K$ komponente brzine, [m/s] . . . . .	48
$v_i$	inducirana brzina na disku, [m/s] . . . . .	23
$x_0$	normirani korijenski isječak . . . . .	41
$y$	radijalna koordinata na kraku rotora, [m] . . . . .	16
$\vec{\Omega}$	vektor kutne brzine letjelice, [rad/s] . . . . .	11
$\Omega$	matrica vektora kutne brzine letjelice, [rad/s] . . . . .	11
$\alpha$	napadni kut lokalnog presjeka kraka . . . . .	19
$\alpha_0$	napadni kut nultog uzgona . . . . .	19
$\alpha_D$	napadni kut divergencije otpora . . . . .	19
$\alpha_f$	napadni kut trupa letjelice . . . . .	44
$\alpha_R$	napadni kut diska rotora u napredujućem letu . . . . .	23
$\alpha_s$	napadni kut pojave sloma uzgona . . . . .	101
$\beta$	kut mahanja kraka . . . . .	21
$\gamma$	Lockov broj . . . . .	23
$\theta$	postavni kut lokalnog presjeka kraka, kut uvijanja . . . . .	16
$\theta_0$	kolektivni postavni kut . . . . .	18
$\theta_{75}$	postavni kut za referentni radijus $0.75R$ . . . . .	23
$\theta_{tip}$	postavni kut na vrhu kraka . . . . .	33
$\theta_{TPP}$	kut propinjanja ravnine TPP . . . . .	44
$\theta_{tw}$	linearni koeficijent promjene postavnog kuta po rasponu . . . . .	18
$\lambda$	koeficijent vertikalne brzine struje . . . . .	28
$\lambda'$	koeficijent vertikalne brzine struje, oznaka prema Proutyju [17] . . . . .	41
$\lambda_\beta$	omjer frekvencije mahanja i kutne brzine motora . . . . .	23
$\lambda_c$	normirana brzina penjanja . . . . .	28
$\lambda_h$	koeficijent vertikalne brzine u lebdenju . . . . .	28
$\lambda_i$	koeficijent inducirane brzine . . . . .	23
$\mu_x$	koeficijent napredovanja paralelan ravnini diska . . . . .	23
$\mu_z$	koeficijent napredovanja okomit na ravninu diska . . . . .	23
$\rho$	gustoća zraka, [kg/m <sup>3</sup> ] . . . . .	23
$\sigma$	koeficijent ispunjenosti kraka . . . . .	28

$\phi$	kut nagiba struje . . . . .	30
$\phi$ $\theta$ $\psi$	kutovi stava letjelice . . . . .	10
$\psi$	kut položaja kraka rotora, kut azimuta . . . . .	22
$\omega$	kutna brzina rotora/motora, [rad/s] . . . . .	20
$\omega_\beta$	frekvencija mahanja kraka, [rad/s] . . . . .	24
$\omega R$	tangencijalna brzina na vrhu kraka, referentna brzina, [m/s] . . . . .	23

## Indeksi

$c$	penjanje, <i>engl.</i> climb . . . . .	28
$h$	lebdenje, <i>engl.</i> hover . . . . .	28
$i$	inducirano . . . . .	28
$j$	oznaka rotora/motora . . . . .	51

## Kratice

$6DOF$	Six Degrees of Freedom . . . . .	6
$BET$	Blade Element Theory . . . . .	7
$BEMT$	Blade Element Momentum Theory . . . . .	7
$CAD$	Computer-Aided Design . . . . .	14
$DC$	Direct Current . . . . .	50
$MT$	Momentum Theory . . . . .	27
$NACA$	National Advisory Committee for Aeronautics . . . . .	19
$RC$	Radio-Controlled . . . . .	15
$STARMAC$	Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi-Agent Control . . . . .	2
$TPP$	Tip Path Plane . . . . .	12
$UAV$	Unmanned Aerial Vehicle . . . . .	1
$VTOL$	Vertical Take-Off and Landing . . . . .	1

## Akcenti

$F$	komponente u koordinatnom sustavu letjelice (obično se izostavlja) . . . . .	11
$L$	komponente u lokalnom koordinatnom sustavu . . . . .	9
$O$	komponente u nošenom koordinatnom sustavu . . . . .	9
$R$	komponente u koordinatnom sustavu rotora . . . . .	13
$T$	transponirano . . . . .	11
$TPP$	komponente u koordinatnom sustavu ravnine vrha krakova . . . . .	13

# 1 | Uvod

## 1.1. Definicija i namjena četverorotornog helikoptera

Četverorotorni helikopter (*engl.* quadrotor) je vrsta rotokoptera koja za ostvarivanje sile uzgona koristi četiri rotora simetrično raspoređena oko svog središta. Ima sposobnost lebdenja, horizontalnog leta i vertikalnog polijetanja i slijetanja što ga svrstava u VTOL (*engl.* Vertical Take-Off and Landing) grupu zrakoplova.

Prva generacija četverorotornih helikoptera bila je namijenjena prijevozu jednog ili više putnika. Letjelice ove generacije bile su među prvim uspješnim VTOL letjelicama težim od zraka, ali karakterizirale su ih loše performanse te su zbog loše upravljivosti i stabilnosti, zahtijevale veliku angažiranost pilota [1].

Drugu generaciju četverorotornih helikoptera čine radio upravljane letjelice bez posade (UAV, *engl.* Unmanned Aerial Vehicle). To su kompaktne letjelice male mase i dobre upravljivosti. Zbog svoje jednostavnosti i robusnosti koriste se kao eksperimentalne platforme te su vrlo atraktivne za istraživanje, pogotovo u područjima teorije upravljanja, automatizacije i mehatronike. Osim u istraživačke svrhe koriste se za zabavu, nadzor, akcije potrage i spašavanja i sl. Postoji nekoliko komercijalno dostupnih četverorotornih helikoptera (slika 1.1 [2, 3]) te velik broj motora i propelera za avio modele koji se mogu iskoristiti za izgradnju vlastitog modela.

Zbog navedenih karakteristika, danas se na sveučilištima diljem svijeta razvijaju četverorotorni helikopteri. Jedan takav projekt je STARMAC sa Sveučilišta Stanford iz Kalifornije. STARMAC je kratica pokusnog poligona za testiranje novih metoda u



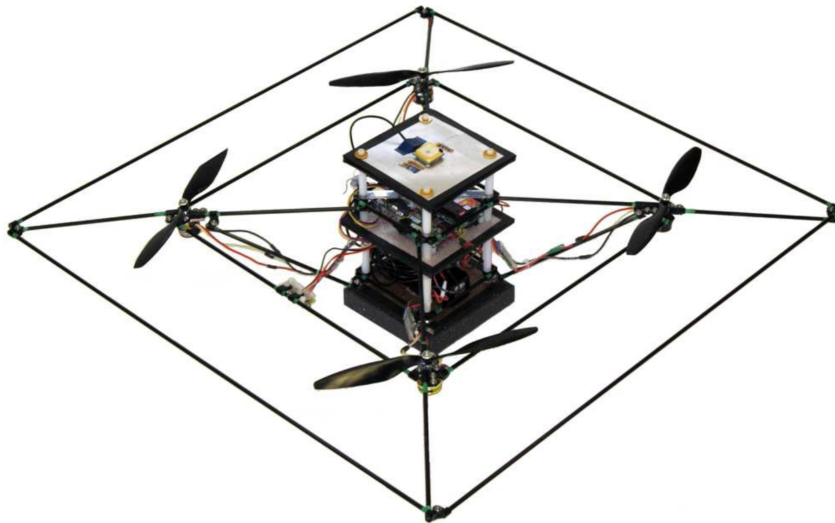
a)



b)

Slika 1.1: Četverorotorni helikopteri: a) Draganflyer X4, b) Parrot AR.Drone

području više-agentnih sustava koji koristi šest četverorotornih helikoptera razvijenih na tom sveučilištu (slika 1.2 [4]).

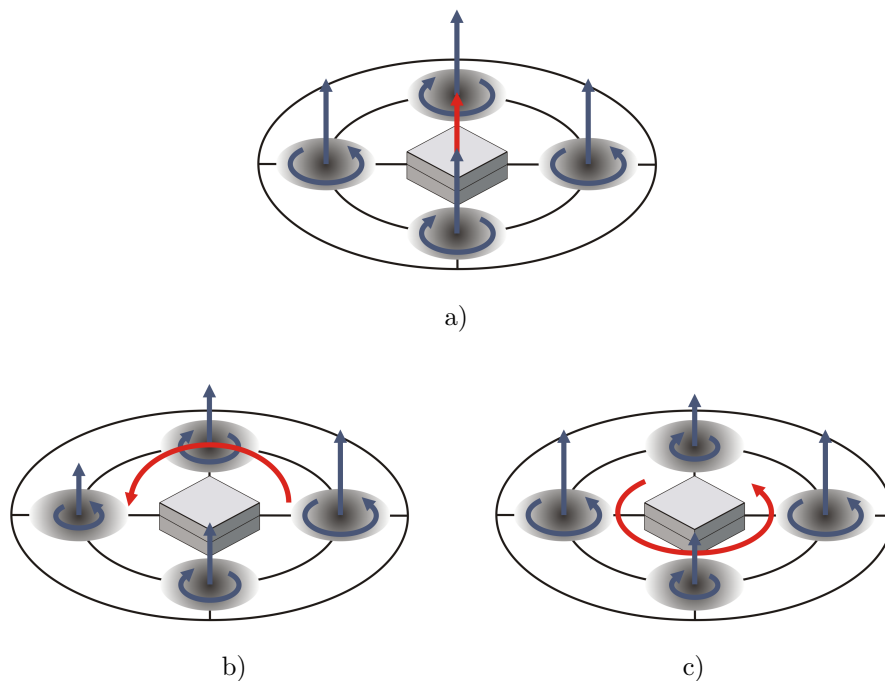


Slika 1.2: STARMAC II četverorotorni helikopter

## 1.2. Upravljanje četverorotornim helikopterom

Rotori četverorotornog helikoptera podijeljeni su u dva suprotno rotirajuća para. Zbog suprotnih smjerova rotacije, parove čine potisni odnosno vučni propeleri. Svaki rotor proizvodi pogonsku silu i okretni moment suprotnog smjera od smjera rotacije

rotora. Konvencionalnim helikopterom upravlja se promjenom postavnog kuta kraka glavnog i repnog rotora pri čemu broj okretaja rotora ostaje konstantan. Za razliku od toga, četverorotorni helikopteri imaju rotore konstantnog postavnog kuta i upravljanje je ostvareno kontroliranjem broja okretaja rotora. Promjenom broja okretaja pojedinog rotora mijenja se pogonska sila i okretni moment na tom rotoru, a time i resultantna sila i moment koji djeluju na letjelicu (slika 1.3). Iako je upravljanje promjenom broja okretaja sasvim dovoljno za većinu režima leta četverorotornog helikoptera, razvijeni su i modeli s promjenjivim postavnim kutom u svrhu postizanja veće pokretljivosti četverorotornog helikoptera [5, 6].



Slika 1.3: Upravljanje četverorotornim helikopterom promjenom pogonske sile i okretnog momenta na pojedinom rotoru: a) penjanje, b) valjanje ili propinjanje, c) zanošenje

## 1.3. Prednosti i nedostaci četverorotornog helikoptera

### 1.3.1. Prednosti

#### Veća nosivost

Pogonska sila koju proizvede rotor raste s promjerom rotora [7]. Prema tome, povećanjem promjera rotora moguće je povećati pogonsku silu, a time i masu korisnog tereta. Porastom promjera rotora raste i obodna brzina te se vrijednosti Machovog broja na vrhovima krakova mogu približiti transoničnom području. Ako se, zbog ovog ograničenja, promjer rotora više ne može povećati, veću pogonsku silu moguće je ostvariti dodavanjem još jednog ili više rotora. Primjer ovoga je CH-47 Chinook, helikopter s tandem rotorima projektiran za podizanje teških tereta [8].

#### Jednostavan sustav upravljanja

Kao što je objašnjeno u poglavlju 1.2., konvencionalnim helikopterom upravlja se promjenom postavnog kuta kraka rotora što zahtijeva složen i težak mehanizam. Istovremeno, potreban je i repni rotor koji služi za poništavanje okretnog momenta glavnog rotora te za skretanje helikoptera. Nasuprot tome, četverorotornim helikopterom upravlja se promjenom broja okretaja rotora pa nema potrebe za složenim mehanizmom upravljanja. Osim toga, zbog dva para suprotno rotirajućih rotora, četverorotorni helikopter ne treba imati repni rotor. Ovi razlozi pridonose smanjenju troškova i mase same letjelice.

#### Manji žiroskopski efekti

Žiroskopski efekti mogu utjecati na svako rotirajuće tijelo, pa tako i na rotor helikoptera. Ovisno o vrsti rotora, ovi efekti će se razlikovati. Potpuno ozglobljeni rotor imat će tendenciju zadržati orijentaciju kinetičkog momenta neovisno o promjeni stava helikoptera. S druge strane, kruti rotor će pri promjeni stava helikoptera proizvesti žiroskopski moment koji će djelovati na helikopter. Žiroskopski efekti ovisit će o smjeru rotacije i kutnoj brzini rotora. Kako četverorotorni helikopter ima dva para suprotno rotirajućih rotora, žiroskopski efekti međusobno će se poništiti ako rotori imaju jednaku



kutnu brzinu. U realnim uvjetima postoje male razlike u položaju i masi rotora pa se žiroskopski efekti ne moraju nužno poništiti. U svakom slučaju žiroskopski efekti bit će manji nego kod helikoptera s jednim rotorom.

### 1.3.2. Nedostaci

#### Veća težina

Iako povećanjem broja rotora raste pogonska sila i nosivost korisnog tereta, raste i masa same letjelice, odnosno dolazi do smanjenja omjera mase korisnog tereta i mase uzlijetanja letjelice. Također, povećanjem broja rotora potrebno je povećati i dimenzije konstrukcije, zbog čega njihova primjena može biti nepraktična.

#### Veća potrošnja energije

Veći broj rotora podrazumijeva veće (ili više njih) pogonske agregate, a samim time i veće zalihe energije (bilo baterije ili rezervoare s gorivom). Kod malih, daljinski upravljanih četverorotornih helikoptera pogonjenih elektromotorima ovo može predstavljati ozbiljan problem. Njihova velika potrošnja značajno smanjuje vrijeme leta. Tipično vrijeme leta ovih letjelica je 15 - 20 minuta. Ovo predstavlja ozbiljno ograničenje i jedan je od razloga zašto UAV četverorotorni helikopteri nisu u široj upotrebi [8, 9].

#### Sporiji odziv na pobudu pilota

Rečeno je kako je upravljanje promjenom broja okretaja rotora velika prednost četverorotornog helikoptera jer nema potrebe za složenim mehanizmom kojim se mijenja postavni kut kraka rotora. Međutim, svaki motor (bilo električni, s unutrašnjim izgaranjem ili plinska turbina) ima određenu inerciju na promjene režima rada, odnosno postoji određeno kašnjenje na pobudu pilota. Kod elektromotora ovo ne predstavlja veći problem jer imaju brz odziv, ali male razlike između motora mogu uzrokovati dovoljno različite odzive i otežati upravljanje bez pomoći autopilota. S druge strane, upravljanje promjenom postavnog kuta ima skoro trenutačan odziv [8].

## Urođena nestabilnost

Kako će se pokazati u poglavlju 7., četverorotorni helikopter nije stabilna letjelica te je potreban odgovarajući sustav za stabilizaciju odnosno autopilot. Čini se da je upravo razvoj, a time i manji troškovi i masa uređaja za stabilizaciju omogućio razvoj četverorotornih helikoptera u posljednjih 10-tak godina [9].

## 1.4. Kratki pregled rada i literature

U ovom radu napravljen je 6DOF (*engl.* Six Degrees of Freedom) model četverorotornog helikoptera kao krutog tijela. Konfiguracija promatranog četverorotornog helikoptera, inercijske karakteristike, pogonski motor i propeler preuzeti su iz [1]. Razvijeni 6DOF model primjenjen je u analizi vertikalnog i horizontalnog leta. Numerička implementacija napravljena je u MATLAB-u. Pristup modeliranju dinamike letjelice kao krutog tijela koristili su i [10, 11, 12, 13]. Ovakav pristup znatno pojednostavljuje matematički model gibanja, ali dovodi do zanemarivanja određenih efekata koji mogu utjecati na dinamiku modela. Drugi pristup dao je Martínez [8] koji je dinamiku letjelice modelirao Newton-Eulerovom formulacijom za konstrukcijski sustav krutih tijela, uzimajući u obzir, između ostalog, i utjecaj rotacije armature elektromotora.

Većina radova na temu četverorotornih helikoptera usmjerena je na probleme upravljanja i koristi jednostavne modele za opisivanje aerodinamike rotora. U radovima [11, 13, 14, 15] rotor je smatran krutim pa je zanemareno mahanje rotora (pogonska sila i okretni moment paralelni su osi rotacije rotora), zanemarena je sila otpora rotora. U stvarnosti rotor je fleksibilan te dolazi do mahanja-gibanja kraka izvan ravnine rotacije. Usljed toga, pogonska sila i okretni moment nisu paralelni osi rotacije. Aerodinamički model rotora u lebdenju i vertikalnom letu modeliran je metodom kombinirane teorije diska i elementarnog kraka (BEMT, *engl.* Blade Element Momentum Theory) prema [16]. U horizontalnom letu aerodinamički model rotora modeliran je analitičkim rješenjem teorije elementarnog kraka (BET, *engl.* Blade Element Theory) prema [17].

Dinamiku samog rotora čine četiri gibanja. Najočitiije gibanje je gibanje rotora oko osi rotacije. Rotacija kraka oko uzdužne osi naziva se uvijanje (*engl.* feathering). Gibanje kraka gore-dolje naziva se mahanje (*engl.* flapping). Na rotirajući krak pri mahanju djeluje Coriolisova sila u ravnini diska koja nastoji ubrzati/usporiti krak. Ovo gibanje

naziva se zabacivanje (*engl.* lead-lag). Newman [18] je razvio jednostavan model mahanja, koji se često koristi zbog svoje jednostavnosti. Taj model koristio je Hoffmann [19] i korišten je u ovom radu. Zbog dva para suprotno rotirajućih rotora, pretpostavljeno je da se bočno mahanje može zanemariti [19] i razmatrano je samo uzdužno mahanje. Martinez [8] i Pounds [10] koristili su složeniji model prema Proutyju [17]. Koeficijenti viših harmonika kuta mahanja zanemareni su u analizi gibanja letjelice [16, 8, 19]. Modelirati uvijanje kraka iznimno je težak zadatak, a zabacivanje nema utjecaj na gibanje letjelice [8] te su uvijanje i zabacivanje kraka zanemareni. Detaljniji opis gibanja kraka dan je u [16, 7, 17, 18].

## 1.5. Pretpostavke i ograničenja modela

U okviru analize četverorotornog helikoptera u vertikalnom i horizontalnom leta uvedene su sljedeće pretpostavke i ograničenja:

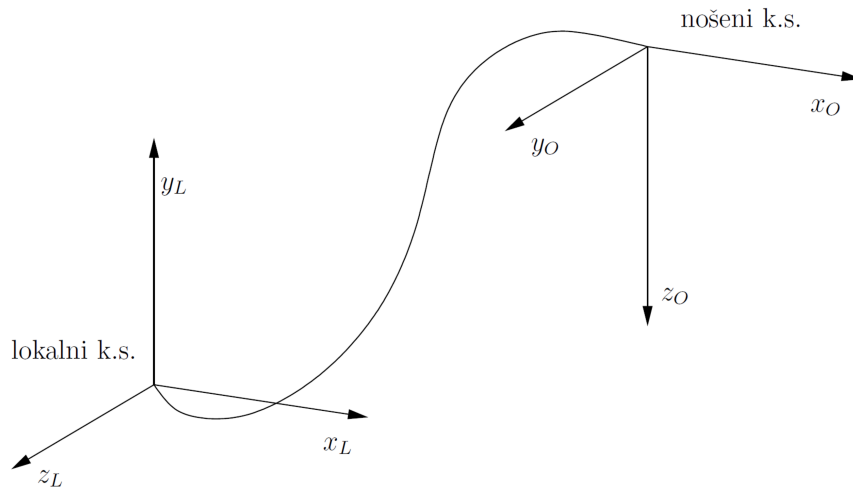
- pretpostavljena je konstantna gustoća zraka,
- zanemaren je utjecaj vjetra,
- zanemaren je utjecaj tla,
- zanemareni su žiroskopski efekti uslijed rotacije rotora,
- zbog ograničenja na teoriju diska u vertikalnom spuštanju pri kretanju iz lebdenja, a samim time i na BEMT, vertikalno spuštanje nije razmatrano,
- u horizontalnom letu zanemareno je bočno mahanje, uvijanje i zabacivanje kraka.

## 2 | Koordinatni sustavi

U mehanici leta zrakoplova koristi se nekoliko koordinatnih sustava. Svaki problem zahtijeva neki primjeren koordinatni sustav. Zato se prije analize dinamike četverorotornog helikoptera i rotora moraju definirati pojedini koordinatni sustavi i veze između njih. Veza između koordinatnih sustava omogućava izračun komponenti nekog vektora u bilo kojem koordinatnom sustavu, ako su komponente znane u jednom od koordinatnih sustava. U ovom poglavlju definirat će se korišteni koordinatni sustavi prema [20]. Svi koordinatni sustavi su desni, što znači da je dovoljno definirati dvije osi, a treća čini desni triedar. Indeks dolje označava o kojem se koordinatnom sustavu radi. Zakrivljenost Zemljine površine i rotacija Zemlje je zanemarena.

### 2.1. Lokalni koordinatni sustav (L)

Lokalni koordinatni sustav nije propisan ISO standardima. Odabire se onako kako je potrebno za zadani problem. U slučaju promatranog četverorotornog helikoptera, ishodište ovog koordinatnog sustava stavljeno je u središte mase letjelice prije polijetanja, os  $x_L$  je horizontalna i usmjerena prema vrhu letjelice, a os  $y_L$  je vertikalna u smjeru prema gore (slika 2.1 [21]). Os  $z_L$  čini desni triedar. Iako je letjelica simetrična, vrh letjelice označen je rotorom broj 1 (slika 2.2).



Slika 2.1: Položaj nošenog u odnosu na lokalni koordinatni sustav

## 2.2. Nošeni koordinatni sustav (O)

Nošeni koordinatni sustav ima ishodište u središtu mase letjelice. Os  $x_O$  je u horizontalnoj ravnini, a os  $z_O$  je vertikalna u smjeru prema dolje (slika 2.1). Zbog zanemarivanja zakrivljenosti Zemljine površine, taj koordinatni sustav nema kutnu brzinu, tj. ne rotira tijekom leta, već ostaje paralelan samom sebi. Drugim riječima, nošeni koordinatni sustav tijekom leta letjelice ima samo translatorno gibanje. Pojednostavljena radi, nošeni koordinatni sustav postavljen je paralelno s lokalnim. Tijekom leta ostaje paralelan lokalnom, ali putuje sa središtem mase letjelice.

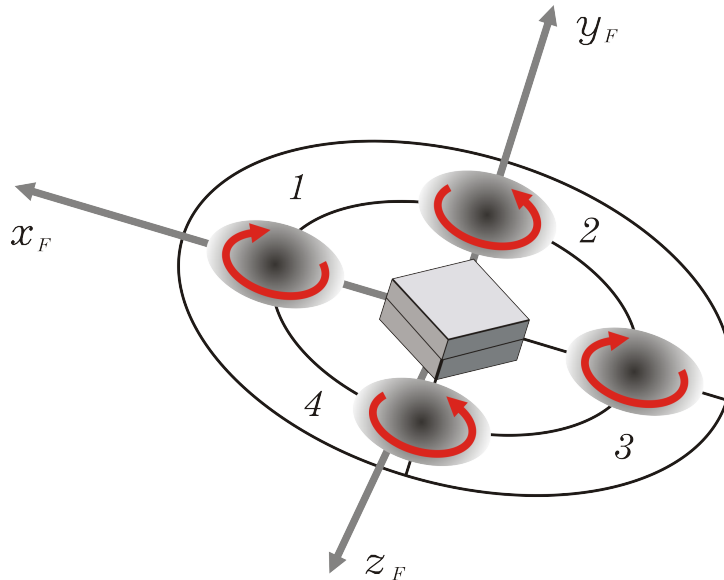
Ako matricu  $\mathbf{n}^O$  čine komponente vektora  $\vec{n}$  u nošenom koordinatnom sustavu, tada su komponente tog vektora u lokalnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{n}^L = \mathbf{L}_{LO}\mathbf{n}^O. \quad (2.1)$$

Matrica  $\mathbf{L}_{LO}$  je matrica transformacije iz nošenog koordinatnog sustava u lokalni koordinatni sustav i nalazi se u prilogu A..

### 2.3. Koordinatni sustav letjelice (F)

Koordinatni sustav letjelice kruto je vezan za tijelo letjelice. Ishodište mu je u središtu mase, a osi su mu glavne osi tromosti letjelice. Os  $x_F$  i os  $z_F$  nalaze se u uzdužnoj ravnini simetrije letjelice i to os  $x_F$  duž tijela i usmjerena prema vrhu letjelice, os  $z_F$  je usmjerena prema dolje, dok os  $y_F$  čini desni triedar. Koordinatni sustav letjelice označava se slovom F, ali kako je to najviše upotrebljavan koordinatni sustav, sve veličine definirane u tom koordinatnom sustavu nemaju nikakvih oznaka. Na slici 2.2 prikazan je koordinatni sustav letjelice zajedno s usvojenim oznakama rotora promatranog četverorotornog helikoptera i smjerovima rotacije istih.



Slika 2.2: Koordinatni sustav letjelice

Zato što je taj koordinatni sustav kruto vezan za letjelicu, njegova kutna brzina ujedno je i kutna brzina letjelice. Usmjerenost osi ovog koordinatnog sustava određena je u odnosu na nošeni pomoću tri kuta:

- $\psi$  u horizontalnoj ravnini oko osi  $z_O$ , naziva se *kut zanosa*,
- $\theta$  u vertikalnoj ravnini oko osi  $y_O$ , naziva se *kut propinjanja*,
- $\phi$  oko osi  $x_O$ , naziva se *kut valjanja letjelice*.

Matrica transformacije za ove tri rotacije  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , odnosno matrica transformacije iz nošenog u koordinatni sustav letjelice je

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi)\mathbf{L}_Y(\theta)\mathbf{L}_Z(\psi). \quad (2.2)$$

Veza između koordinatnog sustava letjelice i lokalnog je

$$\mathbf{n}^L = \mathbf{L}_{LO}\mathbf{L}_{OF}\mathbf{n}^F. \quad (2.3)$$

Matrica  $\mathbf{L}_{OF}$  je matrica transformacije iz koordinatnog sustava letjelice u nošeni za koju vrijedi

$$\mathbf{L}_{OF} = \mathbf{L}_{FO}^T. \quad (2.4)$$

Kutna brzina letjelice, koja je ujedno i kutna brzina njenog koordinatnog sustava, jednaka je zbroju triju rotacija

$$\vec{\Omega} = \vec{\psi} + \vec{\theta} + \vec{\phi}. \quad (2.5)$$

Projekcije kutne brzine letjelice na osi koordinatnog sustava letjelice su

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(\phi)\mathbf{L}_Y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Poslije množenja matrica i zamjene

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Matrica na desnoj strani gornje jednadžbe može se rastaviti u produkt dviju matrica

$$\begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Matrica  $3 \times 3$  na desnoj strani označava se slovom  $\mathbf{R}$ . Matrica  $\mathbf{s}$  označava pojam *stav*. To je matrica koju čine tri kuta

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T . \quad (2.9)$$

S ovim oznakama je

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}(\phi, \theta) \dot{\mathbf{s}} , \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\phi, \theta)^{-1} \boldsymbol{\Omega} , \quad (2.11)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} . \quad (2.12)$$

Matrica transformacije iz nošenog u koordinatni sustav letjelice  $\mathbf{L}_{FO}$  i temeljne matrice transformacije  $\mathbf{L}_X(\phi)$ ,  $\mathbf{L}_Y(\theta)$ ,  $\mathbf{L}_Z(\psi)$  nalaze se u prilogu A.

## 2.4. Koordinatni sustav rotora ( $\mathbf{R}$ )

Koordinatni sustav rotora ima ishodište u središtu rotacije rotora, orijentiran je kao koordinatni sustav letjelice i paralelan je s njim. S obzirom na to da četverorotorni helikopter ima četiri rotora tako ima i četiri koordinatna sustava rotora.

## 2.5. Koordinatni sustav ravnine vrhova krakova rotora ( $\mathbf{TPP}$ )

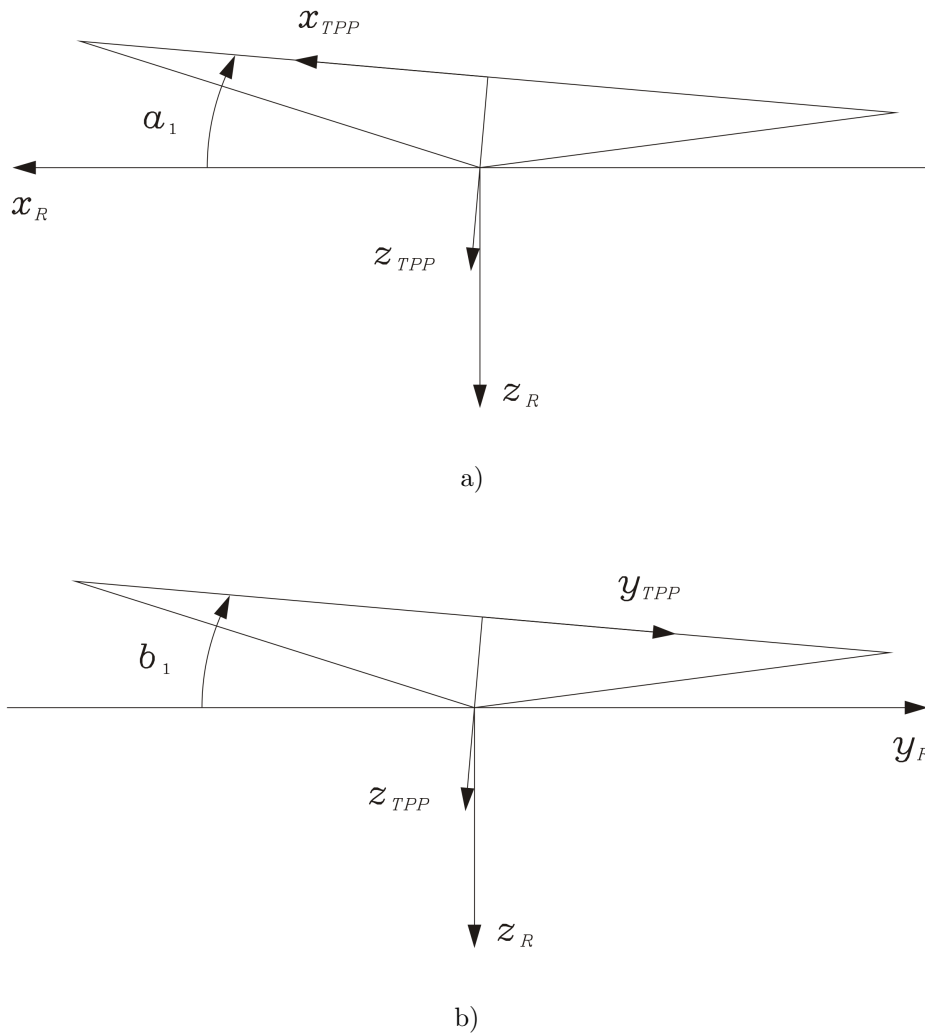
Ravnina vrhova krakova rotora ( $\mathbf{TPP}$ , *engl.* Tip Path Plane) definirana je putanjom vrhova krakova rotora. Os  $x_{\mathbf{TPP}}$  i os  $y_{\mathbf{TPP}}$  nalaze se u toj ravnini. Os  $x_{\mathbf{TPP}}$  usmjerena je prema vrhu letjelice, a os  $y_{\mathbf{TPP}}$  nadesno. Os  $z_{\mathbf{TPP}}$  čini desni triedar i predstavlja os konusa kojeg opisuju rotirajući krakovi. U lebdenju i vertikalnom letu, odnosno kad nema uzdužnog ni bočnog mahanja, taj koordinatni sustav orijentiran je kao koordinatni sustav rotora, odnosno koordinatni sustav letjelice i paralelan je s njim. Uzdužno mahanje definirano je kao pozitivno kad je disk rotora nagnut unazad, a bočno mahanje definirano je kao pozitivno kad je disk rotora nagnut nadesno (slika 2.3).

Veza između koordinatnog sustava ravnine vrhova krakova i koordinatnog sustava rotora je



$$\mathbf{n}^R = \mathbf{L}_{RTPP} \mathbf{n}^{TPP} . \quad (2.13)$$

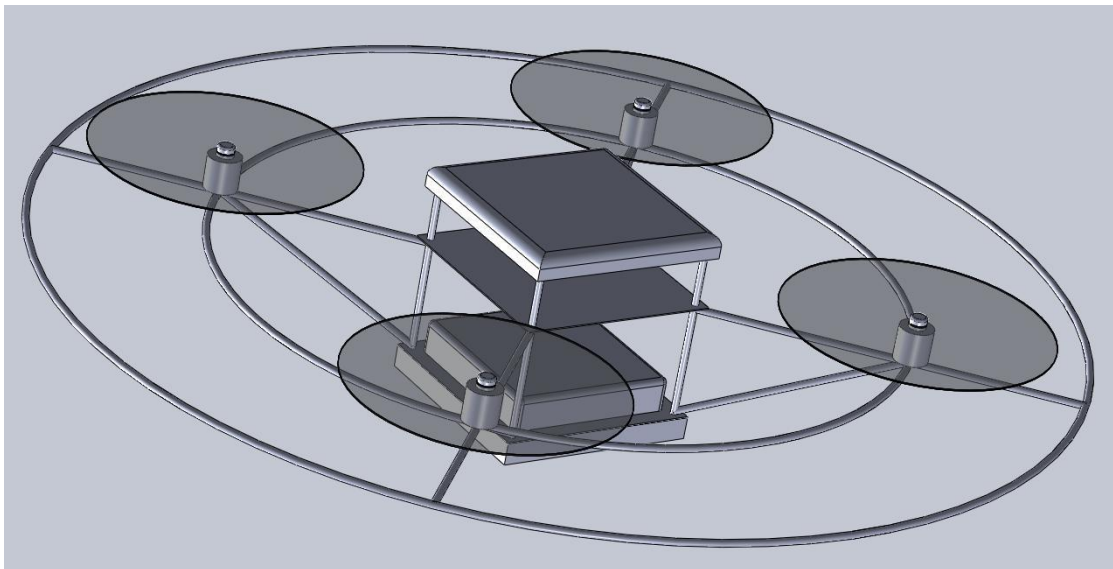
Matrica transformacije iz koordinatnog sustava TPP u koordinatni sustav rotora  $\mathbf{L}_{RTPP}$  nalazi se u prilogu A.



Slika 2.3: Veza između koordinatnog sustava TPP i koordinatnog sustava rotora: a) pogled s lijeva, b) pogled odozda

### 3 Konfiguracija promatranog četverorotornog helikoptera

Konfiguracija četverorotornog helikoptera promatrana u ovom radu predložena je u [1]. Konstrukcija se sastoji od centralnog kućišta iz kojeg se radijalno šire ukrute koje nose motore i propelere. Radi veće krutosti dodani su unutarnji obroč i kose ukrute koje su povezane s dnom kućišta. Na dno kućišta postavljena je spužva, koja ublažava tvrda slijetanja letjelice dok vanjski obroč štiti propelere od sudara s preprekama. U teretnom prostoru nalaze se četiri baterije, po jedna za svaki motor. Na slici 3.1 prikazan je CAD geometrijski model promatrane konfiguracije napravljen u programu SolidWorks 2009.



Slika 3.1: CAD model četverorotornog helikoptera

### 3.1. Pogonski motor

Za pogon promatranog četverorotornog helikoptera koriste se četiri identična elektromotora. Ovisno o načinu spajanja motora na bateriju mijenja se smjer vrtnje motora. Prema [1] odabran je *Hacker A20-22L EVO Brushless Outrunner RC Motor* (slika 3.2).



Slika 3.2: *Hacker A20-22L EVO Brushless Outrunner RC Motor*

U tablici 3.1 navedene su karakteristike odabranog motora [22]. Oznaka *Brushless* označava električni izmjenjivač polariteta elektromagneta, a *Outrunner* znači da se permanentni magnet okreće oko zavojnice elektromagneta.

Tablica 3.1: Karakteristike motora *Hacker A20-22L EVO*

Tip motora	Brushless, Outrunner
Masa	57 g
Snaga	200 W
Konstanta brzine vrtnje	924 RPM/V
Nulta struja	0.75 A
Istosmjerna struja	6 - 14 A
Kratkotočna maksimalna struja	17 A
Električni otpor	89 mΩ
Preporučeni propeler	10 × 4.7
Preporučena baterija	TP-1350-3SPL2 ili TP-2100-3SPL2

## 3.2. Propeler

Za rotore promatranog četverorotornog helikoptera koriste se dva para suprotno rotirajućih propelera. Propeleri su montirani direktno na vratilo motora. Prema [1] odabran je propeler *APC Slow Flyer 10 × 4.7* (slika 3.3).



Slika 3.3: Par suprotno rotirajućih propelera *APC Slow Flyer 10 × 4.7*

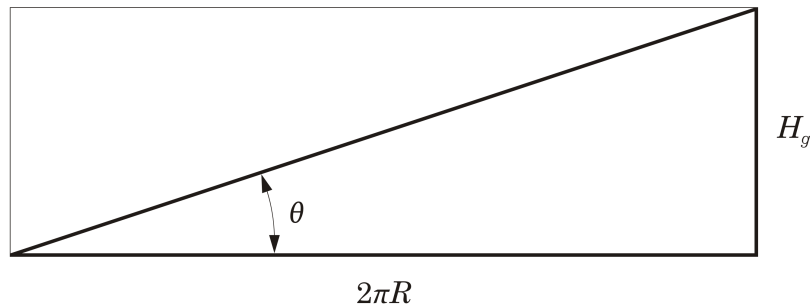
### 3.2.1. Kut uvijanja

Propeler *APC Slow Flyer* ima oznaku  $10 \times 4.7$ . Prvi broj označava promjer, a drugi broj označava korak propelera, oboje izraženo u inčima. Korak  $H_g$  (*engl.* pitch) je put koji točka na kraku propelera s radijusom  $R$  prijeđe pri jednom okretaju propelera. Pri tome je putanja promatrane točke tzv. konstruktivna helikoidna linija pod konstantnim kutom uvijanja  $\beta$  (*engl.* blade angle, pitch angle). Kod helikopterskog rotora isti kut označava se s  $\theta$  te će se u daljnjem tekstu kut uvijanja propelera isto označavati s  $\theta$ . Opseg cilindra radijusa  $R$  promatrane točke iznosi  $2\pi R$  (razvijeni plašt cilindra prikazan je na slici 3.4) tako da je za  $\theta$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H_g}{2\pi R}. \quad (3.1)$$

Lokalni presjek kraka propelera na udaljenosti  $y$  od osi rotacije ima oblik aeroprofila. Ako je bezdimenzionalni radijus kraka  $\bar{r} = \frac{y}{R}$ , onda je aeroprofil na toj udaljenosti  $y$  uvijen pod lokalnim kutom uvijanja  $\theta(r)$  s *lokalnim geometrijskim korakom*

$$H_g = 2\pi\bar{r}R\operatorname{tg} \theta(\bar{r}). \quad (3.2)$$



Slika 3.4: Putanja vrha kraka propelera na razvijenom plaštu cilindra radijusa  $R$

Lokalni geometrijski korak može biti konstantan ili promjenjiv po radijusu propelera od korijena do vrha. Češće je u primjeni propeler s konstantnim korakom duž kraka za koji se kut uvijanja s radijusom mijenja prema relaciji

$$\theta(\bar{r}) = \operatorname{arctg} \frac{H_g}{2\pi\bar{r}R}. \quad (3.3)$$

Lokalni kut uvijanja kraka propelera je kut između ravnine rotacije propelera i tetive lokalnog aeroprofila na promatranom presjeku kraka. Krak propelera uvijen je po rasponu tako da se i kut uvijanja mijenja po rasponu propelera (*engl.* pitch distribution) od korijena do vrha kraka [23].

Avionski propeleri imaju velike promjene kuta uvijanja krakova koje približno prate raspodjelu hiperboličke spirale po funkciji (3.3). Kod helikopterskih rotora takva promjena kuta uvijanja nije optimalna za cjelokupno područje rada. Naime, u horizontalnom letu velikih brzina leta takve velike vrijednosti lokalnog kuta uvijanja dovele bi do manjih iznosa sile uzgona na krakovima na napredujućoj strani. No, kako je za helikoptere značajan i vertikalni let, krakovi rotora imaju određenu vrijednost kuta uvijanja [16].

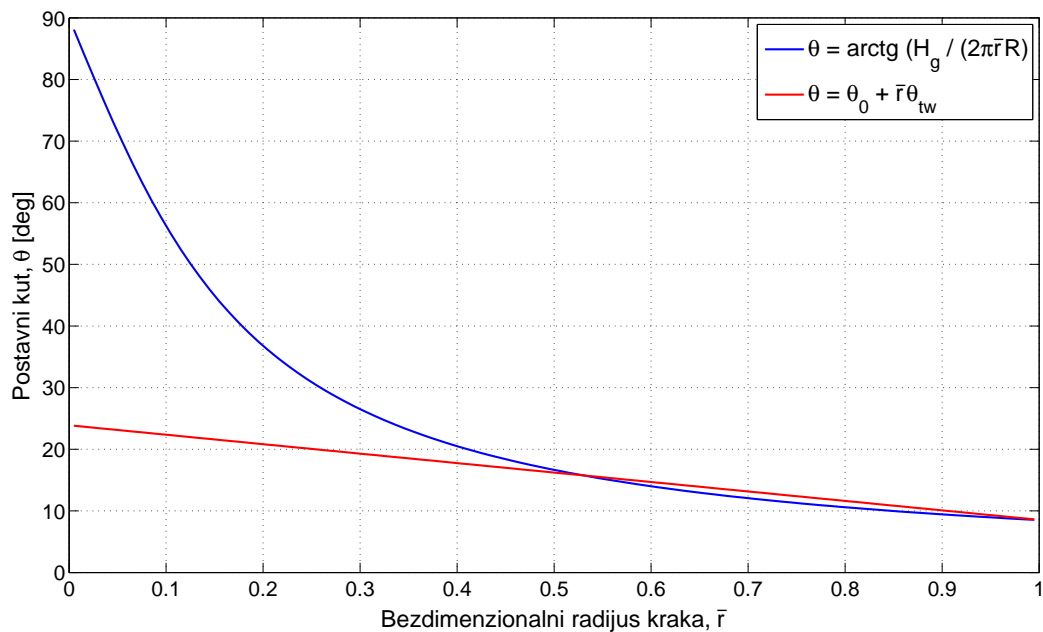
Kut uvijanja krakova rotora helikoptera naziva se i *postavni kut lokalnog presjeka kraka*. Pod pretpostavkom linearne raspodjele kuta uvijanja po rasponu kraka za postavni kut vrijedi

$$\theta = \theta_0 + \bar{r}\theta_{tw}, \quad (3.4)$$

pri čemu je  $\theta_0$  kolektivni postavni kut odnosno komanda pilota (kolektiv), dok je  $\theta_{tw}$

linearni koeficijent promjene kuta uvijanja kraka po rasponu. Kod promatranog četverorotornog helikoptera,  $\theta_0$  je, naravno, konstantan.

U modelu vertikalnog leta (poglavlje 4.), za izračun potrebnih bezdimenzionalnih koeficijenata, korištena je hiperbolička raspodjela kuta uvijanja prema izrazu (3.3). Izrazi potrebni za izračun potrebnih bezdimenzionalnih koeficijenata u napredujućem letu koriste izraz za linearnu raspodjelu kuta uvijanja (3.4). Prema tome, potrebno je odrediti veličine  $\theta_0$  i  $\theta_{tw}$  koje će dati linearnu aproksimaciju hiperboličke raspodjele kuta uvijanja po rasponu kraka. Prema izrazu (4.21) u poglavlju 4.2.1., uz pretpostavku linearnog koeficijenta promjene kuta uvijanja kraka i uz poznati koeficijent pogonske sile u lebdenju, dobiven modelom za vertikalni let, određena je linearna aproksimacija raspodjele kuta uvijanja (slika 3.5). Detaljan postupak opisan je u poglavlju 4.2.1..



Slika 3.5: Usporedba hiperboličke i linearne raspodjele kuta uvijanja po rasponu kraka

### 3.2.2. Karakteristike aeroprofila

Aeroprofil odabranog propelera nije poznat. Prema [1] pretpostavljen je aeroprofil NACA 0012. Za izračun koeficijenata uzgona i otpora aeroprofila korištena su dva

modela, model A i model B.

### Model A

Kako bi se što bolje opisale karakteristike aeroprofila potrebno je obratiti pozornost na promjenu koeficijenta otpora profila  $c_d$  i gradijenta uzgona po napadnom kutu  $c_{l\alpha}$  s Machovim brojem. Kako se povećava Machov broj utjecaj stlačivosti postaje značajan i ne može se zanemariti. U području manjih napadnih kutova (do  $14^\circ$ ), prema [7], za koeficijent uzgona profila vrijedi

$$c_l = c_{l\alpha}\alpha . \quad (3.5)$$

Utjecaj stlačivosti na aerodinamičke koeficijente zadanog aeroprofila dan je promjenom gradijenta  $c_{l\alpha}$  s Machovim brojem [17] (slika B.1). Za slučaj lebdenja i vertikalnog leta, napadni kut kraka ostaje u domeni malih napadnih kutova. U tom području koeficijent otpora profila ima oblik

$$c_d = c_{d0} + K_D\alpha^2 . \quad (3.6)$$

Ukoliko dođe do pojave divergencije otpora, za dani Machov broj pri napadnom kutu većem od kuta divergencije  $\alpha_D$ , mijenja se i način izračuna koeficijenta otpora

$$c_d = c_{d0} + K_D\alpha^2 + K_{DD}(\alpha - \alpha_D)^2 . \quad (3.7)$$

Za slučaj horizontalnog leta karakteristične su velike promjene napadnih kutova iz razloga povratnog strujanja na krak u povratnoj strani rotora i velikih razlika brzina nastrujavanja napredujuće i povratne strane rotora. Tada je potrebno proračun aerodinamičkih koeficijenata profila provesti prema drugim jednadžbama jer pretpostavka malog napadnog kuta nije zadovoljena. Pri velikim napadnim kutovima, iznad vrijednosti kutova sloma uzgona i divergencije otpora (od  $-180^\circ$  do  $180^\circ$ ), promjena koeficijenata uzgona i otpora, prema [7], izražena je jednadžbama

$$c_l = A \sin 2(\alpha - \alpha_0) , \quad (3.8)$$

$$c_d = D + E \cos 2(\alpha - \alpha_0) . \quad (3.9)$$

Karakteristike aeroprofila NACA 0012 potrebne za izračun koeficijenata uzgona i otpora profila modelom A nalaze se u prilogu B., a prikazane su i promjene koeficijenta uzgona i otpora s napadnim kutom za različite Machove brojeve. Model A, zajedno s karakteristikama aeroprofila, u potpunosti je preuzet iz [24].

### Model B

Osim modela A korišten je i jednostavniji model koji pretpostavlja konstantnu vrijednost  $c_{l\alpha}$  za sve lokalne presjeke kraka i koeficijent otpora  $c_d$  neovisan o Machovom broju. Po ovom modelu koeficijent otpora izražen je kao polinom drugog stupnja (*engl.* three-term drag polar)

$$c_d = c_{d0} + d_1\alpha + d_2\alpha^2. \quad (3.10)$$

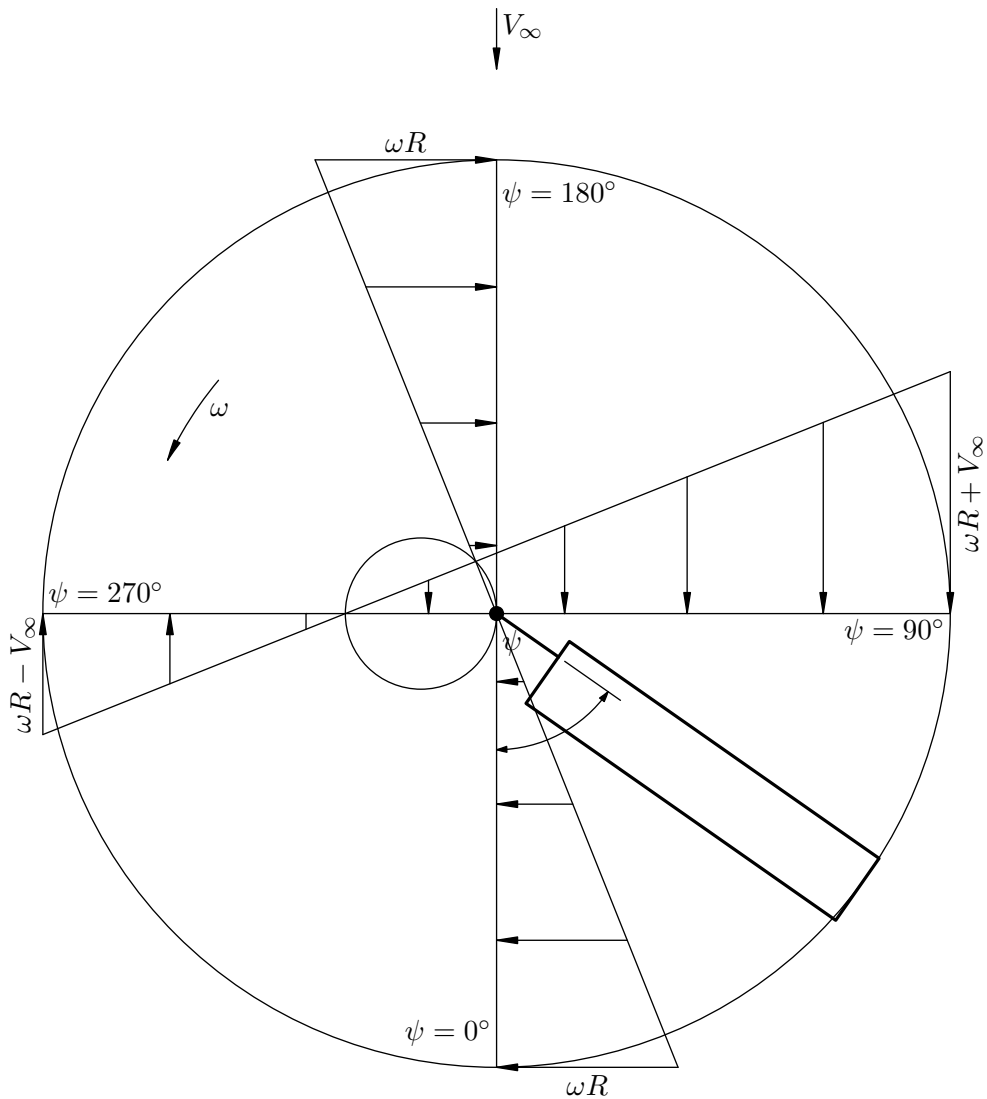
Karakteristike aeroprofila NACA 0012 za model B prema [ref prouty] su:

- $c_{l\alpha} = 5.73$  - gradijent uzgona profila po napadnom kutu,
- $c_{d0} = 0.0081$  - koeficijent nultog otpora profila,
- $d_1 = -0.014$  - koeficijent otpora profila  $d_1$ ,
- $d_2 = 0.4$  - koeficijent otpora profila  $d_2$ .

### 3.2.3. Model mahanja kraka

Za rotor helikoptera u horizontalnom letu opstrujavanje nije osnosimetrično i okomito na ravninu rotacije rotora, kao kod vertikalnog leta, već zrak nastrujava na rub rotora. Za dani smjer rotacije kutnom brzinom  $\omega$  i brzinu neporemećene struje zraka koja nastrujava na disk rotora u horizontalnom letu  $V_\infty$  napredujući krak rotora ima veću brzinu u odnosu na zrak dok povratni krak ima manju (slika 3.6 [16]). Razlika u brzini uzrokuje nesimetričnu raspodjelu uzgona po disku rotora zbog čega dolazi do mahanja kraka gore-dolje. Uslijed mahanja dolazi do nagiba diska rotora što znatno utječe na dinamiku i upravljanje same letjelice [4, 25]. Krak odabranog propelera je krut i nema zglobova mahanja. Krutost kraka opisana je ekvivalentnim zglobom mahanja u koji je postavljena torzijska opruga, a sam zglob mahanja odmaknut je od osi rotacije (slika 3.7). Za propeler jednakog promjera kao i propeler odabran u ovom radu izmjereni su u [4] bezdimenzionalna udaljenost ekvivalentnog zglobova mahanja od osi rotacije  $e = 25\%$  i torzijska konstanta opruge  $k_\beta = 0.23 \text{ Nm/rad}$ .



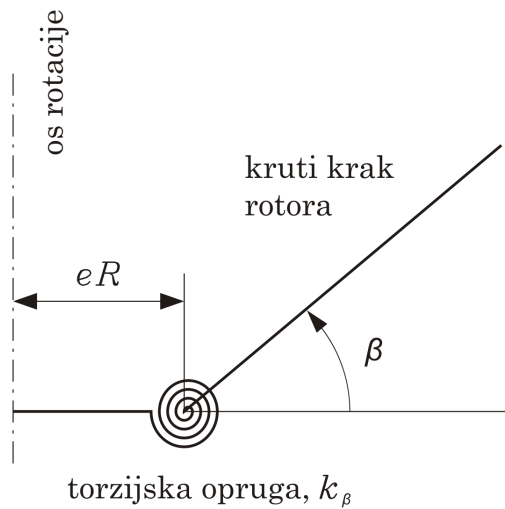


Slika 3.6: Raspodjela tangencijalnih brzina po rasponu kraka za horizontalni let

Kut mahanja kraka rotora  $\beta$  definiran je kao odklon kraka od horizontale u koordinatnom sustavu letjelice za svaku točku rotacije. Kut mahanja definiran je izrazom [16]

$$\beta(\psi) = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi . \quad (3.11)$$

Koeficijent  $a_1$  predstavlja uzdužni naklon rotora (uzdužni nagib ravnine diska, ravnine vrhova krakova), koeficijent  $b_1$  predstavlja bočni naklon rotora (bočni nagib ravnine



Slika 3.7: Model mahanja kraka

diska, ravnine vrhova krakova),  $a_0$  je kut konusa (*engl.* coning angle), a  $\psi$  je kut azimuta. Uzdužno mahanje  $a_1$  definirano je kao pozitivno kada se krak rotora na repu giba prema dolje, a na vrhu letjelice prema gore, odnosno kada je disk rotora nagnut unazad. Bočno mahanje  $b_1$  definirano je kao pozitivno kada se napredujući krak giba prema dolje, a povratni krak prema gore, odnosno kada je disk rotora nagnut nadesno.

U lebdenju i vertikalnom letu opstrujavanje rotora je osnosimetrično i okomito na ravninu rotacije rotora. Prema tome, kut mahanja neovisan je o kutu azimuta te vrijedi

$$\beta(\psi) = a_0. \quad (3.12)$$

Kut konusa  $a_0$  predstavlja kut koji zadovoljava uvjet ravnoteže momenata uslijed djelovanja aerodinamičke i centrifugalne sile na krak u letu. Za pretpostavljenu uniformnu raspodjelu mase po rasponu kraka, ukupna masa kraka je  $M_b = mR(1 - e)$ , a kut konusa prema [16] je

$$a_0 = \frac{3 \int_{eR}^R \left( \frac{dL}{dy} \right) y R dy}{M_b \omega^2 R^2 (1 + e)}. \quad (3.13)$$

U napredujućem letu rotor helikoptera uslijed mahanja imat će tendenciju naginjanja unazad i, ovisno o smjeru rotacije, nadesno ili nalijevo. Nagib rotora uzrokovat će određene momente koji djeluju na helikopter. Međutim, kako četverorotorni helikopter

ima dva para suprotno rotirajućih rotora, momenti uslijed bočnog nagiba rotora će se poništiti [19]. Zbog toga je bočno mahanje u ovom radu zanemareno i promatrano je samo uzdužno. Opis momenata nastalih uslijed uzdužnog mahanja nalazi se u poglavlju 5.2..

Ravnotežni kutovi mahanja za horizontalni let računani su rješavanjem matricne jednadžbe [19]

$$\begin{bmatrix} \lambda_\beta^2 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{6}\mu_x & (1 - \lambda_\beta^2) & -\frac{\gamma}{8} \\ 0 & \frac{\gamma}{8} & (1 - \lambda_\beta^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & -\frac{\gamma}{6} \\ 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{3}\mu_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{75} \\ \mu_z + \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Ako je kut između brzine leta i ravnine diska  $\alpha_R$  pozitivan prema dolje, koeficijent napredovanja paralelan ravnini diska je

$$\mu_x = \frac{V_\infty \cos \alpha_R}{\omega R}, \quad (3.15)$$

koeficijent napredovanja okomit na ravninu diska

$$\mu_z = \frac{V_\infty \sin \alpha_R}{\omega R}, \quad (3.16)$$

koeficijent inducirane brzine

$$\lambda_i = \frac{v_i}{\omega R}, \quad (3.17)$$

a  $\theta_{75}$  je postavni kut na referentnom radijusu kraka  $\bar{r} = 0.75$

$$\theta_{75} = \theta(0.75). \quad (3.18)$$

Bezdimenzionalni Lockov broj

$$\gamma = \frac{\rho c_{l\alpha} c R^4}{I_b}, \quad (3.19)$$

omjer je aerodinamičkih i centrifugalnih sila. Pri tome je  $c$  tetiva aeroprofila kraka, a  $I_b$  je moment inercije kraka oko zgloba mahanja.

Ako je ukupna masa kraka  $M_b = \bar{m}R(1 - e)$ , moment inercije kraka oko zgloba mahanja je

$$I_b = \int_{eR}^R \bar{m} (y - eR)^2 dy, \quad (3.20)$$

odnosno nakon integriranja

$$I_b = \frac{1}{3}M_b R^2(1 - 2e) + \frac{1}{3}M_b R^2 e^2. \quad (3.21)$$

U literaturi [18, 7] izraz (3.21) je pojednostavljen i zanemarene su više potencije bezdimenzionalne udaljenosti  $e$ . S obzirom na to da je u ovom radu promatran propeler znatno manjeg promjera nego što je stvarni helikopterski rotor, uzeto je u obzir cijelo rješenje integrala.

Koeficijent  $\lambda_\beta$  je omjer frekvencije mahanja  $\omega_\beta$  i kutne brzine motora  $\omega$  i može se izračunati izrazom [4]

$$\lambda_\beta = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}e\right) + \frac{k_\beta}{I_b \omega^2}}. \quad (3.22)$$

### 3.3. Baterija

Za odabir baterije nije se koristila preporuka proizvođača, već je prema [1] odabrana baterija *Saehan 3400 HS*. Karakteristike odabrane baterije dane su u tablici 3.2.

Tablica 3.2: Karakteristike baterije *Saehan 3400 HS*

Kapacitet	3400 mAh
Nominalni napon	7.32 V
Dimenzije	46 × 136.5 × 23.5 mm
Masa	174 g
Tip baterije	Li-poly

### 3.4. Inercijske značajke

Inercijske značajke promatranog četverorotornog helikoptera preuzete su iz [1]. Mase pojedinih komponenata navedene su u tablici 3.3. Tenzor inercije za čitavu letjelicu je

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.034 & 0 & 0 \\ 0 & 0.034 & 0 \\ 0 & 0 & 0.055 \end{bmatrix} [\text{kgm}^2].$$

Tablica 3.3: Mase komponenata promatranog četverrotornog helikoptera

Komponenta	Masa [kg]
kućište	0.164
vanjski obruč	0.076
unutarnji obruč	0.051
horizontalni štapovi	$4 \times 0.00875$
kose ukrute	$4 \times 0.00375$
lopatice	$8 \times 0.008$
glavčina rotora	$4 \times 0.002$
stator motora	$4 \times 0.042$
armatura motora	$4 \times 0.015$
baterije	$4 \times 0.174$
amortizirajuća spužva	0.004
UKUPNO	1.341

## 4 | Vertikalni let

U ovom poglavlju razmatran je problem lebdenja i vertikalnog leta četverrotornog helikoptera. Aerodinamika rotora modelirana je metodom kombinirane teorije elementarnog kraka i teorije diska (BEMT). Pri tome je pretpostavljen let u zatvorenom prostoru bez vjetrova i konstantne gustoće zraka na dovoljnoj visini da nema utjecaja tla (visina veća od dvostrukog promjera rotora). Razmatrano je samo vertikalno penjanje. Osim kratkog pregleda same metode, u poglavlju su prikazani rezultati BEMT aerodinamičkog modela rotora u vertikalnom letu i uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima iz [26] i s numeričkim rješenjem BEMT modela iz [7].

### 4.1. Bezdimezionalni koeficijenti

Kao što je uobičajeno u aerodinamici tako se i kod aerodinamike rotora koriste bezdimezionalne veličine. Pri tome se za rotor maksimalnog promjera  $R$  koji rotira kutnom brzinom  $\omega$  kao referentna veličina uzima obodna brzina  $\omega R$ . Tako su bezdimezionalni koeficijenti rotora [16]:

$$C_T = \frac{T}{\rho A \omega^2 R^2}, \quad (4.1)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho A \omega^2 R^2}, \quad (4.2)$$

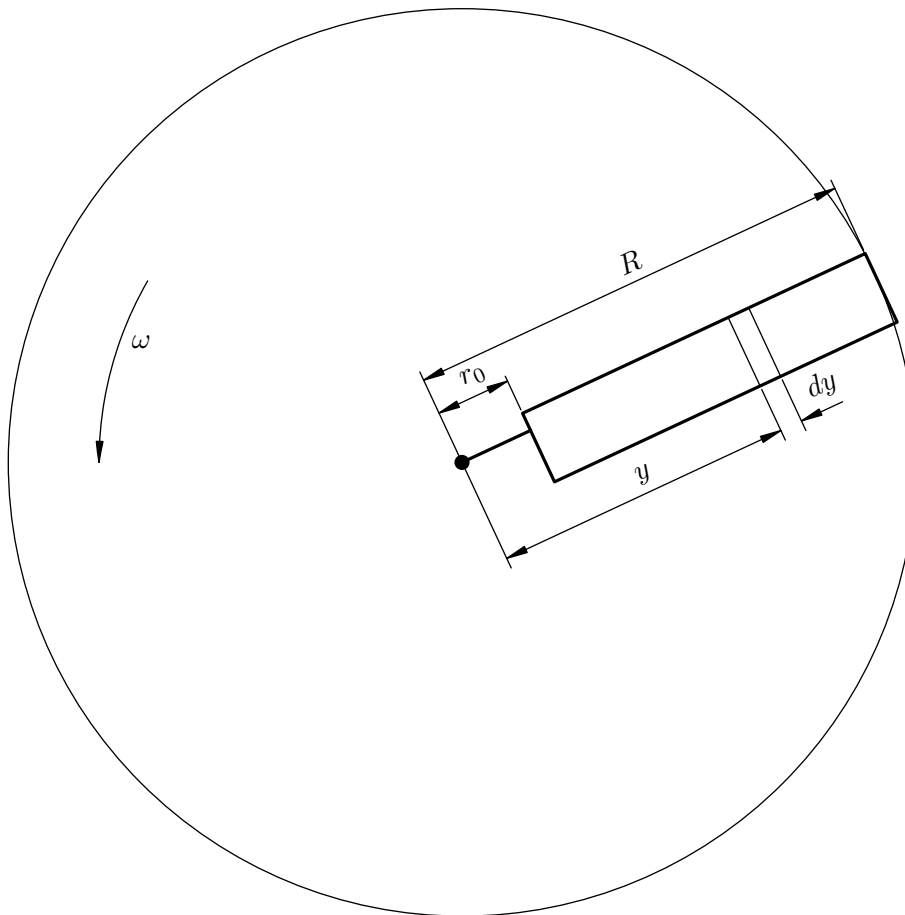
$$C_Q = \frac{Q}{\rho A \omega^2 R^2}. \quad (4.3)$$

Kako je veza snage i okretnog momenta rotora  $P = \omega Q$ , to su koeficijenti snage i okretnog momenta jednaki  $C_P = C_Q$ .

## 4.2. Kombinirana teorija elementarnog kraka i teorije diska

Ovom hibridnom teorijom kombiniraju se osnovne postavke teorije elementarnog kraka (BET) s teorijom diska (MT, *engl.* Momentum Theory), a kao rezultat dobije se neuniformna raspodjela koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$  [16].

Teorija elementarnog kraka razmatra sile na infinitezimalnom radijalnom dijelu kraka rotora  $dy$  na udaljenosti  $y$  od osi rotacije (slika 4.1 [16]).



Slika 4.1: Elementarni presjek  $dy$  kraka rotora na radijusu  $y$ , pogled odozgo

Prema teoriji elementarnog kraka, elementarni doprinos koeficijenta pogonske sile uz pretpostavku linearne ovisnosti koeficijenta sile uzgona o napadnom kutu i simetrični aeroprofil daje rezultat

$$dC_T = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} (\theta \bar{r}^2 - \lambda \bar{r}) d\bar{r}. \quad (4.4)$$

Koeficijent ispunjenosti kraka (*engl.* solidity ratio)  $\sigma$ , za rotor s  $N_b$  krakova, definiran je kao omjer površine pravokutnih krakova rotora i površine diska rotora

$$\sigma = \frac{N_b c R}{\pi R^2} = \frac{N_b c}{\pi R}. \quad (4.5)$$

U skladu s pretpostavkama teorije diska, za infinitezimalni kružni vijenac na disku rotora širine  $dy$ , a na radijusu  $y$  površine  $dA = 2\pi y dy$ , elementarni doprinos koeficijenta pogonske sile je

$$dC_T = 4\lambda \lambda_i \bar{r} d\bar{r}. \quad (4.6)$$

Za brzinu penjanja  $V_c$  koeficijent vertikalne brzine je

$$\lambda = \frac{V_c + v_i}{\omega R} = \lambda_c + \lambda_i. \quad (4.7)$$

Kako je prema (4.7) koeficijent inducirane brzine  $\lambda_i = \lambda - \lambda_c$  slijedi

$$dC_T = 4\lambda (\lambda - \lambda_c) \bar{r} d\bar{r}. \quad (4.8)$$

Kombiniranjem relacija za elementarni doprinos pogonskoj sili prema teoriji elementarnog kraka (4.4) i teoriji diska (4.8) može se dobiti kvadratna jednadžba po koeficijentu  $\lambda$  koja ima realno rješenje oblika

$$\lambda(\bar{r}, \lambda_c) = \sqrt{\left(\frac{\sigma c_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma c_{l\alpha}}{8} \theta \bar{r}} - \left(\frac{\sigma c_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right). \quad (4.9)$$

Za slučaj lebdenja  $\lambda_c = 0$  slijedi

$$\lambda(\bar{r}) \equiv \lambda_i(\bar{r}) \equiv \lambda_h(\bar{r}) = \frac{\sigma c_{l\alpha}}{16} \left( \sqrt{1 + \frac{32}{\sigma c_{l\alpha}} \theta \bar{r}} - 1 \right). \quad (4.10)$$



Relacijom (4.10) opisana je promjena koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$  po rasponu kraka  $\bar{r}$  za poznate funkcije bezdimenzionalnog radijusa  $\bar{r}$ : vrijednost postavnog kuta  $\theta(\bar{r})$ , promjene tetive po rasponu  $c(\bar{r})$  te karakteristike aeroprofila ( $c_{l\alpha}$  i  $\alpha_0$ ). Tako određenim neuniformnim koeficijentom vertikalne brzine  $\lambda(\bar{r})$  može se integracijom izraza (4.8) odrediti ukupna pogonska sila.

Potrebna snaga helikoptera u vertikalnom letu ima komponente inducirane snage (ovisne o uzgonu rotora), snage potrebne za svladavanje otpora profila kraka i snage potrebne za penjanje

$$C_P = C_{P_i} + C_{P_0} + C_{P_c}. \quad (4.11)$$

Primjenom izvoda za elementarni doprinos pogonske sile od kružnog vijenca prema teoriji diska (izraz (4.8)), elementarni doprinos inducirane snage je

$$dC_{P_i} = 4\lambda^2 (\lambda - \lambda_c) \bar{r} d\bar{r}, \quad (4.12)$$

odnosno vrijedi

$$dC_{P_i} = \lambda dC_T. \quad (4.13)$$

Korištenjem modela A (poglavlje 3.2.2.) za modeliranje koeficijenta otpora profila, elementarni doprinos snage potrebne za svladavanje otpora profila je

$$dC_{P_0} = \frac{1}{2} \sigma c_d \bar{r}^3 d\bar{r}. \quad (4.14)$$

Usporedbe radi u radu je korišten i model B karakteristika aeroprofila (3.10). Prema tom modelu elementarni doprinos snage potrebne za svladavanje otpora profila je [7]

$$dC_{P_0} = \frac{1}{2} \sigma \left[ c_{d0} + d_1 \left( \theta - \frac{\lambda}{\bar{r}} \right) + d_2 \left( \theta - \frac{\lambda}{\bar{r}} \right)^2 \right] \bar{r}^3 d\bar{r}. \quad (4.15)$$

Elementarni doprinos snage penjanja potrebne za povećanje gravitacijske potencijalne energije helikoptera je [7]

$$dC_{P_c} = dC_T \lambda_c. \quad (4.16)$$

### 4.2.1. Koeficijent gubitaka na vrhu kraka

Gubici na vrhovima krakova nastaju zbog velikih lokalnih induciranih brzina uslijed snažnih vršnih slobodnih vrtloga koji nastaju zbog prestrujavanja s donje strane kraka na gornju. Posljedica toga je smanjenje cirkulacije, a time i lokalnog opterećenja na vrhu kraka rotora [16].

U nekoj literaturi gubici na vrhovima krakova interpretiraju se pretpostavkom da vrhovi krakova nisu u mogućnosti ostvariti silu uzgona. Koeficijent gubitaka na vrhu kraka  $B$  opisuje ovaj gubitak uzgona razmatranjem rotora ekvivalentnog radijusa  $R_e = BR$ . Za helikopterske rotore uobičajene su vrijednosti koeficijenta  $B = 0.95 \dots 0.98$ . Korektnija interpretacija gubitaka na vrhovima krakova je da će za jednaki iznos sile uzgona odnosno pogonske sile doći do povećanja vertikalne brzine struje množenjem s koeficijentom  $B^{-1}$  [27, 7]. Umjesto koeficijenta  $B$ , gubici na vrhu kraka mogu se odrediti primjenom metode koju je razvio Prandtl [7]. Tom metodom uvodi se koeficijent korekcije inducirane brzine  $F$ , kao funkcija broja krakova  $N_b$ , promatranog radijusa  $\bar{r}$  i koeficijenta vertikalne brzine  $\lambda$ . Primjenom Prandtlovog koeficijenta  $F$  raspodjela koeficijenta pogonske sile po rasponu kraka poprima realne vrijednosti. Koeficijent korekcije inducirane brzine je

$$F = \left( \frac{2}{\pi} \right) \arccos (\exp^{-f}) , \quad (4.17)$$

gdje je

$$f = \frac{N_b}{2} \left( \frac{1 - \bar{r}}{\bar{r}\phi} \right) , \quad (4.18)$$

a kut nagiba struje (*engl.* inflow angle)

$$\phi = \frac{\lambda(\bar{r})}{\bar{r}} . \quad (4.19)$$

Koeficijent vertikalne brzine prema BEMT metodi korigiran koeficijentom  $F$ , za slučaj lebdenja  $\lambda_c = 0$  ima oblik

$$\lambda(\bar{r}) = \frac{\sigma c_{l\alpha}}{16F} \left( \sqrt{1 + \frac{32F}{\sigma c_{l\alpha}} \theta \bar{r}} - 1 \right) . \quad (4.20)$$

Za slučaj kad  $N_b \rightarrow \infty$ , što aproksimira aktuator disk, koeficijent korekcije inducirane brzine  $F \rightarrow 1$ . Prema tome, povećanjem broja krakova, uz zadani koeficijent

ispunjenosti kraka i opterećenje diska rotora ( $DL = \frac{T}{A}$ , *engl.* Disc Loading), moguće je poboljšati učinkovitost rotora [7].

Koeficijent gubitaka na vrhu kraka može se proširiti i za modeliranje gubitka u korijenu kraka [7]. Međutim, u ovom radu, pretpostavljeno je da gubici u korijenu kraka, zbog malih brzina, nisu značajni te su prilikom modeliranja rotora četverorotornog helikoptera, gubici u korijenu zanemareni.

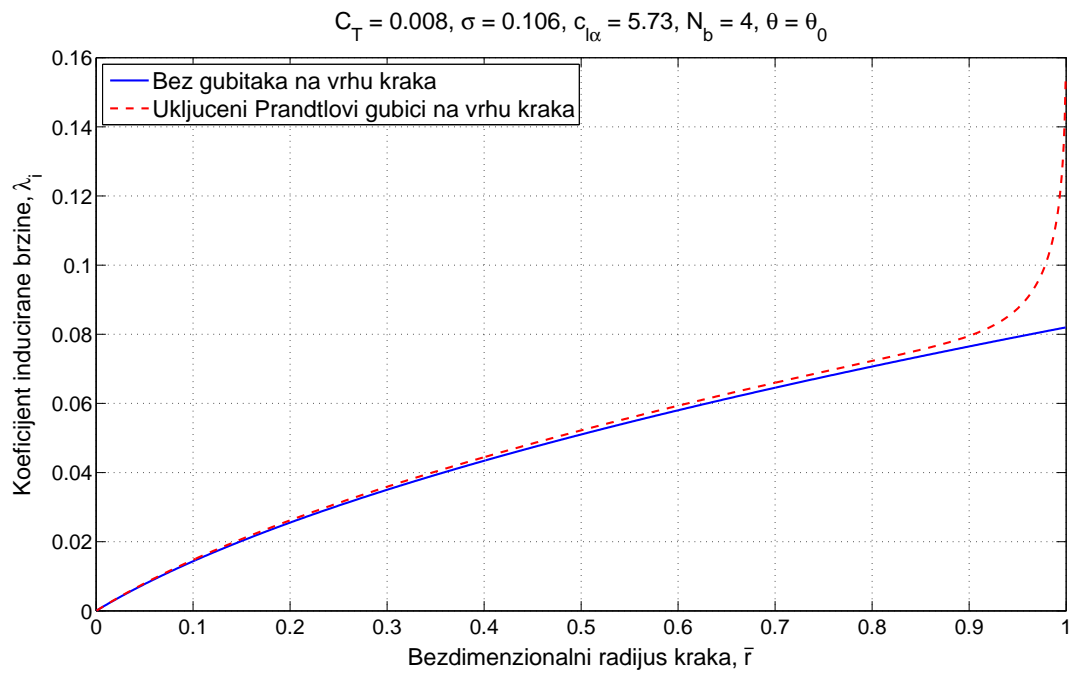
Kako je ranije napomenuto, korektna interpretacija gubitaka na vrhu kraka je povećanje vertikalne brzine struje uz jednaki koeficijent pogonske sile. To znači da će rotor za postizanje zadanog koeficijenta pogonske sile uz gubitke na vrhovima krakova trebati imati veći postavni kut. Za rotor poznatog kuta uvijanja  $\theta_{tw}$  i zadanog koeficijenta pogonske sile  $C_{Treq}$ , kolektivni postavni kut  $\theta_0$  može se odrediti iterativnim postupkom [7]

$$\theta_0^{(n+1)} = \theta_0^{(n)} + \left[ \frac{6 \left( C_{Treq} - C_T^{(n)} \right)}{\sigma c_{l\alpha}} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \left( \sqrt{C_{Treq}} - \sqrt{C_T^{(n)}} \right) \right], \quad (4.21)$$

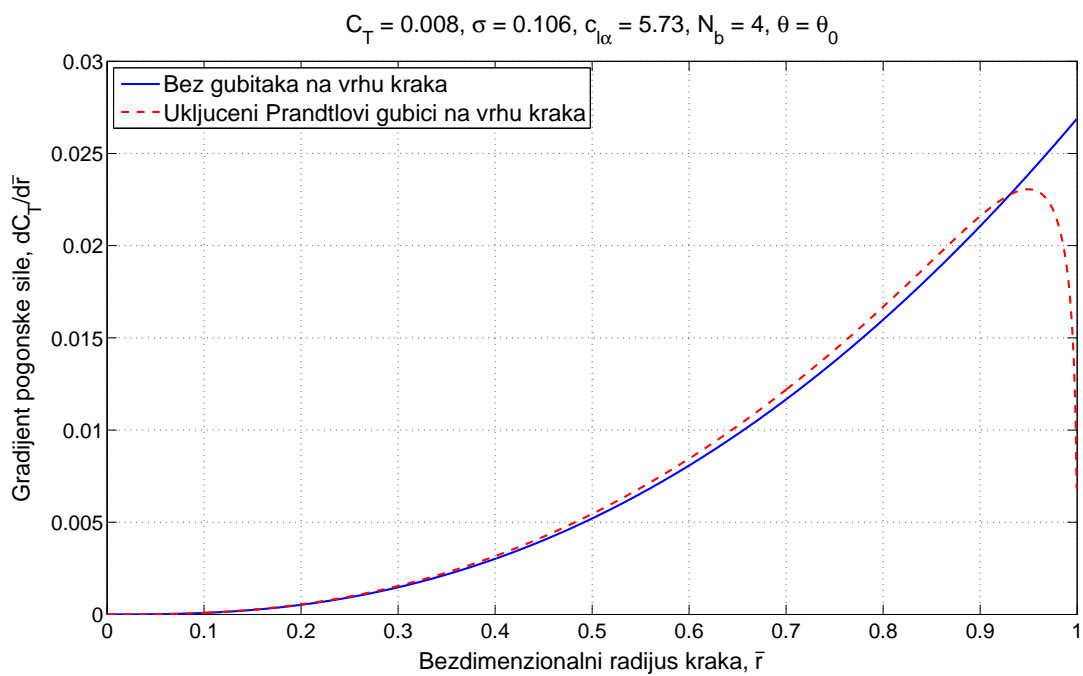
počinjući od početne vrijednosti

$$\theta_0^{(0)} = \frac{6C_{Treq}}{\sigma c_{l\alpha}} - \frac{3}{4}\theta_{tw} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{C_{Treq}}. \quad (4.22)$$

Na slikama 4.2 i 4.3 prikazana je raspodjela koeficijenta inducirane brzine i koeficijenta pogonske sile za rotor u lebdenju pri jednakom koeficijentu pogonske sile, bez i s uključenim gubicima na vrhu kraka. Vidljivo je povećanje koeficijenta inducirane brzine i smanjenje pogonske sile na samom vrhu kraka.



Slika 4.2: Raspodjela koeficijenta inducirane brzine po rasponu kraka



Slika 4.3: Raspodjela gradijenta pogonske sile po rasponu kraka

Iterativni postupak (4.21) korišten je i za određivanje linearne raspodjele kuta uvijanja odabranog propelera (slika 3.5). Linearni kut uvijanja potreban je za izračun koeficijenata u horizontalnom letu u poglavlju 5.. Kako je na slici 4.2 vidljivo da je lokalni koeficijent inducirane brzine najveći upravo na vrhu kraka, u iterativni postupak uveden je i uvjet

$$\theta_{tw}^{(n+1)} = \theta_{tip} - \theta_0^{(n)}, \quad (4.23)$$

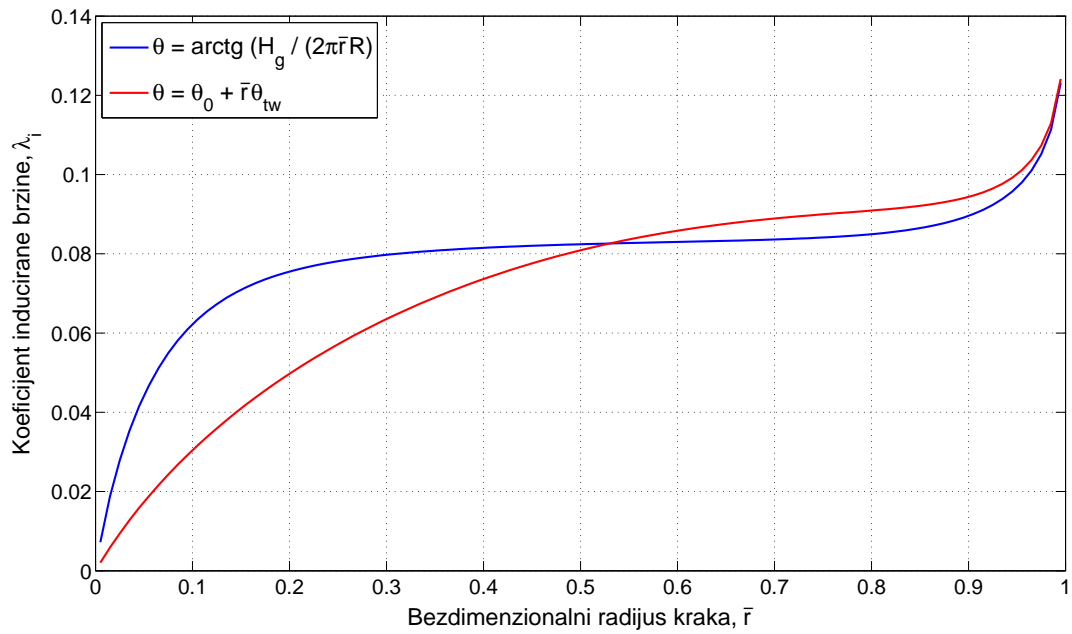
gdje je  $\theta_{tip}$  postavni kut na vrhu kraka prema izrazu (3.3), odnosno

$$\theta_{tip} \equiv \theta(1) = \operatorname{arctg} \frac{H_g}{2\pi R}. \quad (4.24)$$

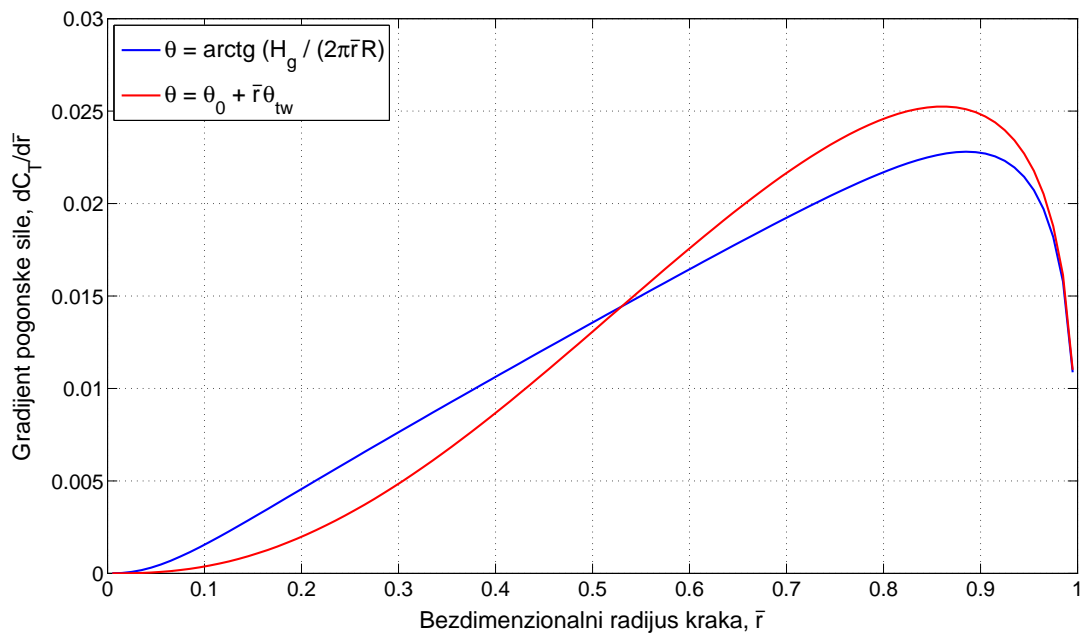
Time je osigurano da postavni kut prema linearnoj raspodjeli kuta uvijanja na vrhu kraka odgovara stvarnom postavnom kutu, odnosno postavnom kutu prema hiperboličkoj raspodjeli.

Početnom pretpostavkom linearnog koeficijenta promjene kuta uvijanja po rasponu kraka  $\theta_{tw} = -20^\circ$  i uz poznati koeficijent pogonske sile  $C_T = 0.0126$  (izračunat BEMT-om za slučaj lebdenja) dobivene su vrijednosti  $\theta_0 = 24.13^\circ$  i  $\theta_{tw} = -15.62^\circ$ . Usporedba hiperboličke raspodjele kuta uvijanja i linearne aproksimacije s dobivenim vrijednostima prikazana je na slici 3.5.

Usporedba raspodjele koeficijenata inducirane brzine i pogonske sile po rasponu kraka za hiperboličku i linearnu raspodjelu kuta uvijanja, pri jednakom koeficijentu pogonske sile, prikazana je na slikama 4.4 a) i 4.4 b). Vidljivo je da je koeficijent inducirane brzine za hiperboličku raspodjelu kuta uvijanja većim dijelom raspona kraka približno konstantan te da je opterećenje odnosno gradijent pogonske sile na vrhu kraka veći za krak s linearnom raspodjelom kuta uvijanja.



a)



b)

Slika 4.4: Usporedba za krakove s hiperboličkom i linearnom raspodjelom kuta uvijanja: a) raspodjela koeficijenta inducirane brzine, b) raspodjela gradijenta pogonske sile

### 4.2.2. Numeričko rješenje

Numerički pristup rješavanju problema vertikalnog leta helikoptera BEMT metodom sastoji se od nekoliko koraka. Osnovni princip je diskretiziranje kraka na  $K$  elemenata širine  $\Delta\bar{r}$ . Sve veličine za element  $k$  računaju se za presjek na sredini tog elementa [7].

Svakom elementu odgovara vrijednost vertikalne brzine na rotoru definirana karakteristikama presjeka na sredini elementa

$$\lambda_k = \lambda(\bar{r}_k, \lambda_c) = \sqrt{\left(\frac{\sigma c_{l\alpha}(\bar{r}_k)}{16F} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma c_{l\alpha}(\bar{r}_k)}{8F} \theta(\bar{r}_k) \bar{r}_k} - \left(\frac{\sigma c_{l\alpha}(\bar{r}_k)}{16F} - \frac{\lambda_c}{2}\right), \quad (4.25)$$

gdje su  $\bar{r}_k$  i  $\theta(\bar{r}_k)$  radijus odnosno postavni kut presjeka na sredini elementa. Za model A karakteristika profila vrijedi

$$c_{l\alpha}(\bar{r}_k) = c_{l\alpha}(Ma), \quad (4.26)$$

dok je za model B

$$c_{l\alpha}(\bar{r}_k) = c_{l\alpha} = \text{konst.} \quad (4.27)$$

Elementarni doprinos koeficijenta pogonske sile za svaki element može se izračunati izrazom

$$\Delta C_{Tk} = \frac{\sigma c_{l\alpha}(\bar{r}_k)}{2} (\theta(\bar{r}_k) \bar{r}_k^2 - \lambda(\bar{r}_k) \bar{r}_k) \Delta\bar{r}_k. \quad (4.28)$$

Ukupni potisak dobije se numeričkom integracijom po rasponu kraka. Ako se pretpostavi da su vertikalna brzina i pogonska sila konstantni po rasponu svakog elementa, ukupni koeficijent pogonske sile je

$$C_T = \sum_{k=1}^K \Delta C_{Tk}. \quad (4.29)$$

Pretpostavka konstantne pogonske sile i vertikalne brzine po rasponu elementa ne vrijedi ako se krak podijeli na mali broj elemenata. Za prihvatljive rezultate potrebno je krak podijeliti na minimalno 20 elemenata, ali preporučeno je koristiti 40 ili više elemenata. U ovom radu, prilikom izračuna BEMT metodom, krak je podijeljen na 100 elemenata.

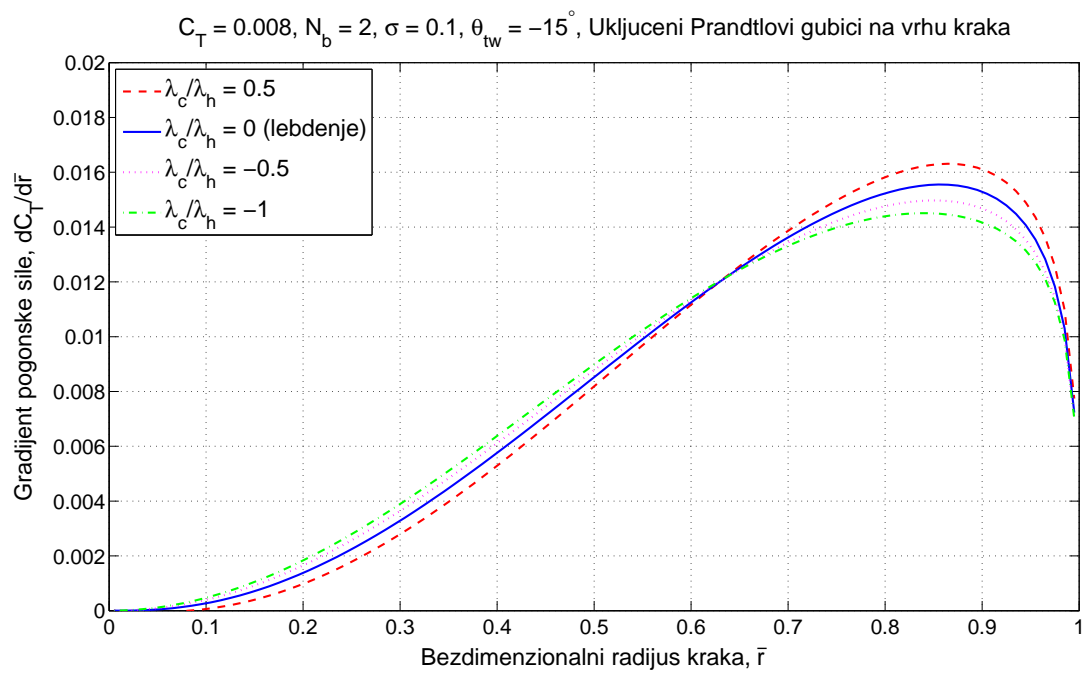
Ukupni koeficijent okretnog momenta (ili potrebne snage) helikoptera u vertikalnom letu može se izračunati koristeći izraz

$$C_Q \equiv C_P = \sum_{k=1}^K \lambda_k \Delta C_{T_k} + \sum_{k=1}^K \Delta C_{P_{0k}} + \sum_{k=1}^K \Delta C_{T_k} \lambda_c. \quad (4.30)$$

Koristeći prethodno navedene izraze može se izračunati raspodjela opterećenja po rasponu kraka za različite brzine penjanja/spuštanja helikoptera. U vertikalnom letu, ako se zanemari otpor tijela helikoptera, pogonska sila jednaka je težini helikoptera. Prema tome, potrebno je iterativnim postupkom (4.21) odrediti kolektivni postavni kut za svaku brzinu penjanja/spuštanja.

Na slici 4.5 prikazana je raspodjela pogonske sile po rasponu kraka za lebdenje i različite brzine penjanja/spuštanja pri jednakom koeficijentu pogonske sile. Sa slike se vidi da raspodjela pogonske sile pri penjanju postaje naglašenija na vrhu kraka, dok je u spuštanju suprotno. S tim promjenama raspodjele pogonske sile mijenja se raspodjela uzgonske sile i momenta. Kako pretpostavke teorije diska ne vrijede u vertikalnom spuštanju pri kretanju iz lebdenja, tako ni BEMT ne vrijedi u ovom režimu. Iako je, prema [7], BEMT rješenje dovoljno dobro za male brzine spuštanja, u ovom radu, neće se razmatrati vertikalno spuštanje. Problemu vertikalnog spuštanja Martínez [8] je pristupio modificiranjem teorije diska dok su Hoffmann [19] i Adamić [1] koristili empirijsku formulu prema [7].

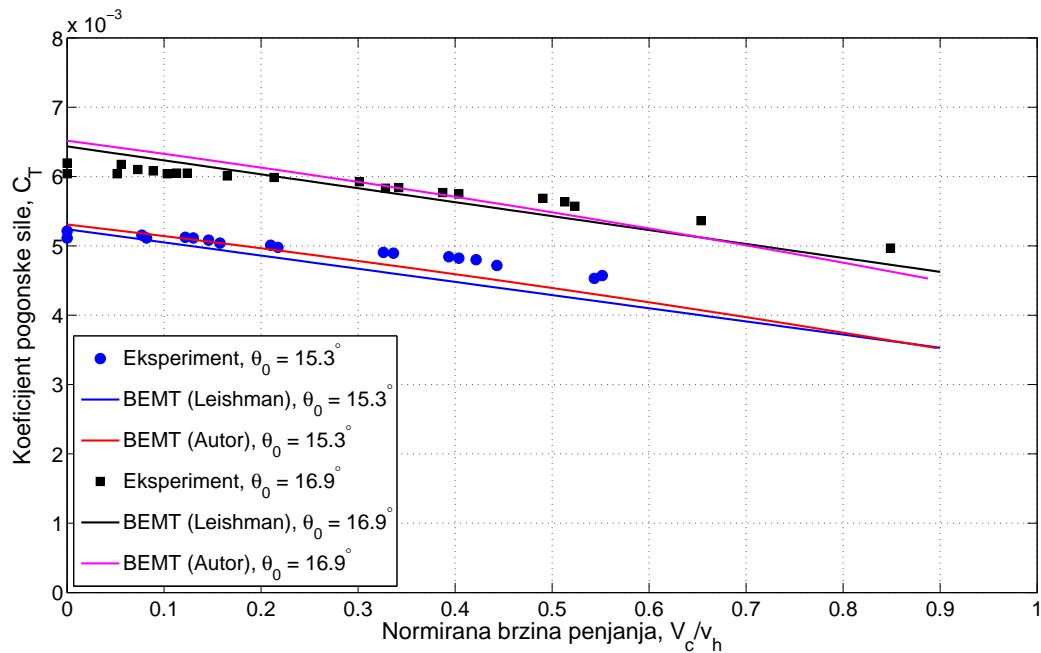




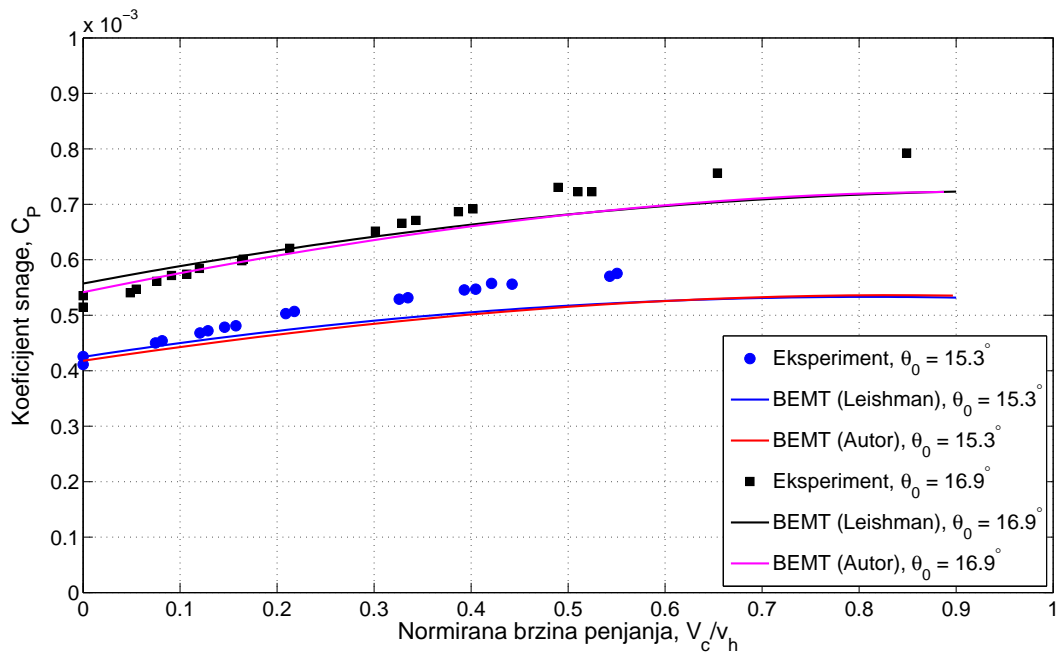
Slika 4.5: Raspodjela pogonske sile po rasponu kraka u vertikalnom letu (BEMT)

### 4.2.3. Usporedba rezultata aerodinamičkog modela rotora s eksperimentalnim

U ovom poglavlju prikazani su rezultati BEMT aerodinamičkog modela rotora u vertikalnom letu i uspoređeni s eksperimentalnim podacima [26] i numeričkim rješenjem BEMT modela iz [7]. Na slici slika 4.6 prikazana je usporedba rezultata za pogonsku silu ovisno o brzini penjanja (normiranoj s induciranom brzinom u lebdenju). Na slici 4.7 prikazana je usporedba rezultata za snagu ovisno o brzini penjanja. Uspoređujući rezultate BEMT modela korištenog u ovom radu s numeričkim rješenjem iz literature vidljivo je da BEMT model daje zadovoljavajuće rezultate.



Slika 4.6: Usporedba BEMT rezultata s eksperimentalnim za pogonsku silu ovisno o brzini penjanja



Slika 4.7: Usporedba BEMT rezultata s eksperimentalnim za snagu ovisno o brzini penjanja

## 5 Horizontalni let

U ovom poglavlju razmatran je problem horizontalnog leta. Aerodinamika rotora modelirana je analitičkim rješenjem teorije elementarnog kraka (BET) prema [17]. Pri tome su uvedene iste pretpostavke kao i kod vertikalnog leta (nema vjetra, zanemareni su utjecaj tla i zanemareni su žiroskopski efekti). Uz izračun koeficijenata pogonske sile i okretnog momenta odnosno snage, u horizontalnom letu računani su i koeficijent sile otpora rotora. Sila otpora rotora ili H-sila (*engl.* H-force) u osnovi predstavlja silu otpora profila rotora. Kao što je rečeno u poglavlju 3.2.3., u horizontalnom letu napredujući krak ima veću brzinu od povratnog (slika 3.6). Uslijed toga, na napredujućem kraku veća je i sila otpora od odgovarajuće na povratnom kraku i kao rezultat javlja se sila otpora rotora [16]. Bezdimezionalni koeficijent sile otpora rotora je

$$C_H = \frac{H}{\rho A \omega^2 R^2}. \quad (5.1)$$

### 5.1. Aerodinamički model rotora

Kao i u lebdenju odnosno vertikalnom letu i u horizontalnom letu postoje gubici na vrhu kraka, ali Prouty [17] ne daje model za Prandtlov koeficijent gubitaka na vrhu kraka. Stoga se za korekciju koeficijenata koristi ranije spomenuti koeficijent gubitaka na vrhu  $B$  odnosno integracija se provodi za ekvivalentni radijus  $R_e = BR$ . Uz koeficijent korekcije za gubitak na vrhu kraka može se koristiti i normirani korijenski isječak  $x_0$  za korekciju zbog gubitaka u korijenu kraka. U ovom radu pretpostavljena je vrijednost koeficijenta  $B = 0.95$ , a gubici u korijenu su, kao i kod vertikalnog leta, zanemareni ( $x_0 =$

0). Prema ovom modelu bezdimenzionalni koeficijenti pogonske sile, okretnog momenta i sile otpora rotora su:

$$\frac{C_T}{\sigma} = \frac{c_{l\alpha}}{4} \left\{ \theta_0 \left[ \frac{2}{3}(B^3 - x_0^3) + \mu_x^2(B - x_0) \right] + \theta_{tw} \left[ \frac{1}{2}(B^4 - x_0^4) + \frac{\mu_x^2}{2}(B^2 - x_0^2) \right] + \right. \\ \left. + \lambda'(B^2 - x_0^2) - \mu_x a_1(B^2 - x_0^2) \right\}, \quad (5.2)$$

$$\frac{C_Q}{\sigma} = \frac{c_d}{8}(1 + \mu_x^2) - \frac{c_{l\alpha}}{4} \left\{ \frac{\lambda'}{(B^4 - x_0^4) + \frac{3}{2}\mu_x^2(B^2 - x_0^2)} \left\{ \left[ \frac{2}{3}\theta_0(B^3 - x_0^3) + \frac{1}{2}\theta_{tw}(B^4 - x_0^4) \right] \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left[ (B^4 - x_0^4) - \frac{1}{2}\mu_x^2(B^2 - x_0^2) \right] + \lambda'(B^2 - x_0^2) \left[ (B^4 - x_0^4) + \frac{1}{2}\mu_x^2(B^2 - x_0^2) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_x^2}{(B^4 - x_0^4) + \frac{1}{2}\mu_x^2(B^2 - x_0^2)} \left\{ a_0^2 \left[ -\frac{4}{9}(B^3 - x_0^3)^2 + \frac{1}{2}(B^2 - x_0^2)(B^4 - x_0^4) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{4}\mu_x^2(B^2 - x_0^2) \right] + \frac{1}{3}a_0\mu_x\lambda_i(B^3 - x_0^3)(B^2 - x_0^2) + \frac{1}{8}\lambda_i^2(B^2 - x_0^2)(B^4 - x_0^4) \right\} \right\}, \quad (5.3)$$

$$\frac{C_H}{\sigma} = \frac{c_d}{4}\mu_x - \frac{c_{l\alpha}}{4} \left\{ \frac{\lambda'\mu_x}{(B^4 - x_0^4) + \frac{3}{2}\mu_x^2(B^2 - x_0^2)} \left\{ \theta_0 [(B - x_0)(B^4 - x_0^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2}\mu_x^2(B - x_0)(B^2 - x_0^2) - \frac{4}{3}(B^2 - x_0^2)(B^3 - x_0^3)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_{tw} \left[ -\frac{1}{2}(B^2 - x_0^2)(B^4 - x_0^4) + \frac{3}{4}\mu_x^2(B^2 - x_0^2)^2 \right] - \lambda'(B^2 - x_0^2)^2 \right\} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_x}{(B^4 - x_0^4) + \frac{1}{2}\mu_x^2(B^2 - x_0^2)} \left\{ a_0^2 \left[ -\frac{4}{9}(B^3 - x_0^3)^2 + \frac{1}{2}(B^2 - x_0^2)(B^4 - x_0^4) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{4}\mu_x^2(B^2 - x_0^2)^2 \right] + \frac{1}{3}a_0\mu_x\lambda_i(B^3 - x_0^3)(B^2 - x_0^2) + \frac{1}{8}\lambda_i^2(B^2 - x_0^2)(B^4 - x_0^4) \right\} \right\} + \\ + \frac{C_T}{\sigma}a_1. \quad (5.4)$$

Pri tome je koeficijent vertikalne brzine okomite na ravninu vrhova krakova (TPP)

$$\lambda' = -\mu_z - \lambda_i. \quad (5.5)$$

S obzirom na to da navedeni izrazi predstavljaju analitičko rješenje teorije elementarnog kraka nije moguće pratiti promjenu karakterističnih veličina po rasponu kraka ( $\alpha, Ma$ ) te je korišten je model B karakteristika aeroprofila, odnosno vrijede relacije

$$\begin{aligned} c_{l\alpha} &= \text{konst} \\ c_d &= c_{d0} . \end{aligned} \tag{5.6}$$

## 5.2. Momenti uzrokovani mahanjem

Kao što je ranije napomenuto (poglavlje 3.2.3.) u napredujućem letu rotor helikoptera imat će tendenciju naginjanja unazad i, ovisno o smjeru rotacije, nadesno ili nalijevo što će uzrokovati određene momente. Zbog dva para suprotno rotirajućih rotora, momenti nastali zbog bočnog mahanja će se poništiti te su u ovom radu analizirani samo momenti nastali uslijed uzdužnog mahanja.

Pogonska sila i sila otpora rotora definirane su u koordinatnom sustavu TPP s hvatištem sile u središtu tog koordinatnog sustava. Pogonska sila djeluje u negativnom smjeru osi  $z_{TPP}$ , a sila otpora rotora u negativnom smjeru osi  $x_{TPP}$ . Uslijed nagiba diska rotora unazad nastat će horizontalne (u koordinatnom sustavu letjelice) komponente pogonske sile i sile otpora rotora koje će stvarati pozitivan moment propinjanja oko središta mase s obzirom na to da im se hvatište po vertikali ne poklapa sa središtem mase letjelice (slika 5.1). Hoffmann i suradnici [4, 25] opisali su ovu pojavu i identificirali ju kao problem upravljanja (*engl.* pitch control).

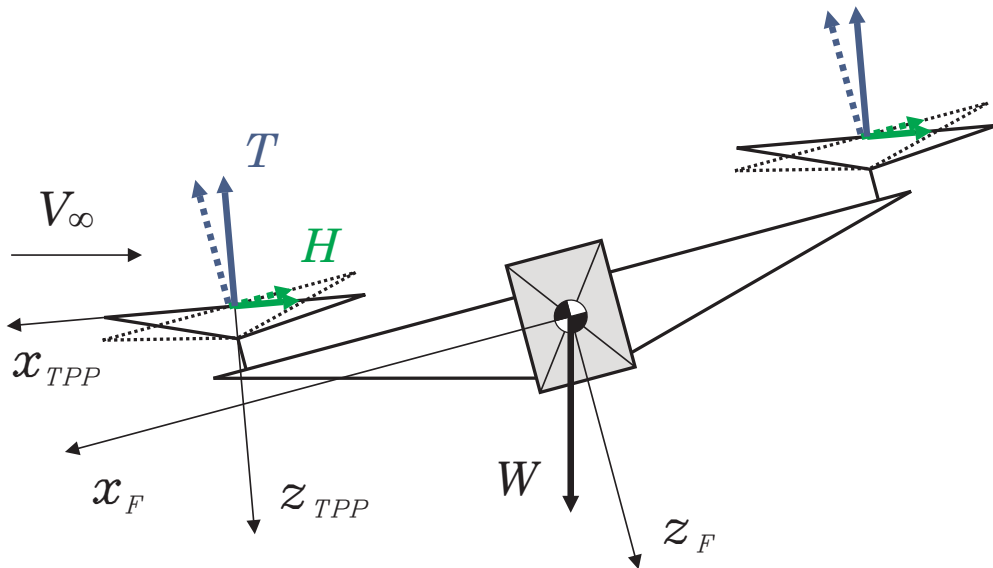
Kod krutih rotora, koji se većinom koriste kod četverorotornih helikoptera, uslijed centrifugalnih sila u ekvivalentnim zglobovima mahanja javlja se spreg koji uzrokuje moment oko glavčine (*engl.* hub moment) uslijed kojeg dolazi do propinjanja letjelice (slika 5.2) [18]. Moment oko glavčine prema [19] je

$$M_{HUB} = k_{\beta} a_1 . \tag{5.7}$$

S obzirom na to da momenti nastali uslijed uzdužnog mahanja djeluju u istom smjeru očito je da će letjelica biti nestabilna. Ovaj problem zahtijeva stalnu angažiranost pilota tijekom leta ili, bolje, upotrebu odgovarajuće povratne veze odnosno autopilota.

## 5.3. Pojednostavljeni ravnotežni let

Za let helikoptera u horizontalnom, napredujućem letu potrebno je nagnuti disk rotora prema dolje kako bi nastala horizontalna komponenta pogonske sile koja omogućava

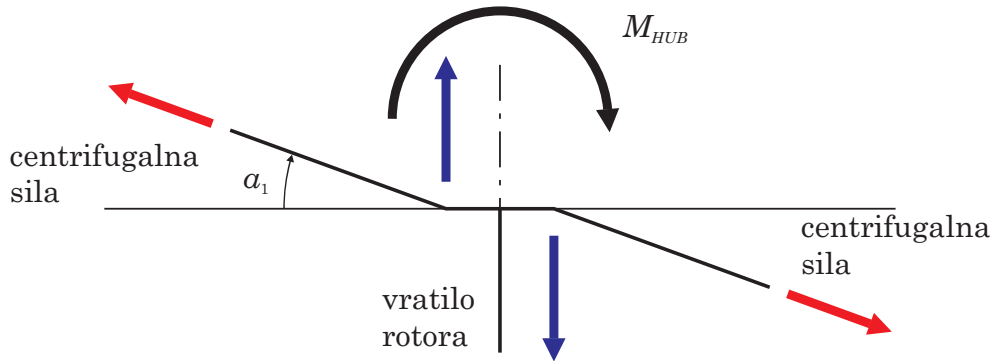


Slika 5.1: Utjecaj mahanja na rotor u napredujućem letu

napredujući let helikoptera. U isto vrijeme potrebno je povećati pogonsku silu kako bi vertikalna komponenta pogonske sile, u horizontalnom letu, bila jednaka težini helikoptera. U napredujućem letu s penjanjem vertikalna komponenta pogonske sile treba biti veća od težine helikoptera. Kod konvencionalnih helikoptera za nagnjanje diska rotora koristi se ciklička promjena postavnog kuta kraka, a za povećanje pogonske sile kolektivna promjena postavnog kuta kraka.

Četverorotorni helikopteri uobičajeno koriste rotore s konstantnim postavnim kutom kraka. Prema tome, za napredujući let, potrebno je nagnuti cijelu letjelicu prema dolje. To se postiže smanjenjem broja okretaja, a time i pogonske sile, na prednjem rotoru uz istovremeno povećanje broja okretaja, odnosno pogonske sile na stražnjem rotoru. Uslijed toga nastat će negativan moment propinjanja i letjelica će se nagnuti prema dolje. Kad se letjelica krene gibati prema naprijed, potrebno je uravnotežiti pogonske sile nasuprotnih rotora kako se letjelica ne bi nastavila nagnjati prema dolje. Pri tome, za horizontalni let, vertikalna komponenta pogonske sile pojedinog rotora mora biti jednaka četvrtini težine četverorotornog helikoptera.

Određivanje pobude za napravljeni model četverorotornog helikoptera koja bi uzrokovala horizontalni, napredujući let pri kretanju iz lebdjenja složen je zadatak. Zbog toga, u ovom radu, odlučeno je kao referentno stanje horizontalnog leta uzeti ravnotežno stanje



Slika 5.2: Moment oko glavčine

letjelice u horizontalnom letu pri određenoj brzini leta.

Naravno, zbog prethodno navedenih momenata koji nastaju u horizontalnom letu uslijed uzdužnog mahanja rotora, nije jednostavno odrediti ravnotežno stanje letjelice niti je u ovom radu određivano. Zbog toga je određeno kvazi ravnotežno stanje u kojem su zanemareni momenti uzrokovani mahanjem rotora. Ravnoteža sila koje djeluju na rotor prikazana je na slici 5.3. Pri tome je napadni kut trupa  $\alpha_f$  kut između uzdužne osi tromosti letjelice i aerodinamičke brzine. Kada nema vjetra, što je slučaj za sva razmatranja u ovom radu, brzina leta jednaka je aerodinamičkoj i suprotnog je smjera od neporemećene struje zraka

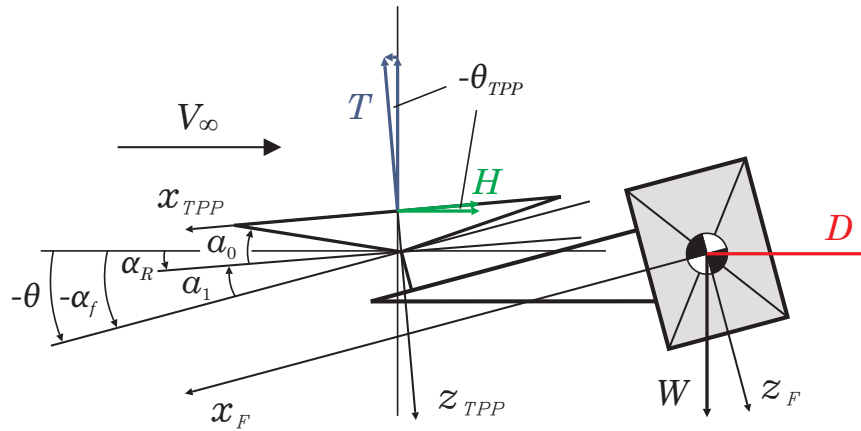
$$\vec{V}_K = \vec{V} = -\vec{V}_\infty . \quad (5.8)$$

Kut između vertikalne osi nošenog koordinatnog sustava i pravca okomitog na ravninu TPP, u ovom radu, nazvan je kut propinjanja ravnine TPP  $\theta_{TPP}$ . Kutovi  $\alpha_f$  i  $\theta_{TPP}$  definirani su kao pozitivni za pozitivnu rotaciju oko osi  $y_F$ , odnosno  $y_{TPP}$ . Kut između ravnine TPP i brzine leta  $\alpha_R$ , u poglavlju 3.2.3. definiran je kao pozitivan za negativnu rotaciju oko osi  $y_{TPP}$  (pozitivan je prema dolje). U horizontalnom, napredujućem letu vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha_R &= -\theta_{TPP} , \\ \alpha_f &= \theta . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Koristeći vrijednosti u lebdenju dobivene modelom za vertikalni let, iterativnim postupkom određeno je kvazi ravnotežno stanje jednog rotora (za ostale rotore vrijedi isto) u horizontalnom letu za određenu brzinu leta. Ako je ukupna težina četverorotornog





Slika 5.3: Kvazi ravnotežno stanje jednog rotora u horizontalnom letu (zane-  
marenjeni su momenti uzrokovani mahanjem)

helikopter  $W$ , tada je vertikalna komponenta pogonske sile

$$T_z^O = \frac{1}{4}W. \quad (5.10)$$

Horizontalna komponenta pogonske sile jednaka je

$$T_x^O = D^O + H_x^O = D + H \cos \theta_{TPP}. \quad (5.11)$$

U prvoj iteraciji pretpostavljeno je  $\theta_{TPP} = 0$  pa je  $H_x^O \approx H$ . Koeficijent sile otpora rotora pretpostavljen je u obliku [16]

$$C_H = \frac{1}{4}\sigma c_{d0}\mu_x, \quad (5.12)$$

a sila otpora  $D$  predstavlja parazitski otpor tijela letjelice i definirana je istim pravcem i smjerom kao i brzina neporemećene struje zraka  $V_\infty$ . Intenzitet sile otpora je

$$D = q_d(K_1 S_{f1} + K_2 S_{f2}), \quad (5.13)$$

gdje  $q_d$  dinamički tlak određen brzinom neporemećene struje zraka,  $S_{f1}$  i  $S_{f2}$  su frontalne projekcije površine okvira i površine centralnog dijela letjelice,  $K_1$  i  $K_2$  su koeficijenti otpora okvira i centralnog dijela. Uz koeficijent sile otpora rotora dobiven u prethodnom koraku iz izraza (5.1) određena je sila  $H$ . Kut propinjanja ravnine TPP za slijedeću iteraciju je

$$\theta_{TPP} = \operatorname{arctg} \left( \frac{D^O + H_x^O}{T_z^O} \right). \quad (5.14)$$

Pogonska sila potrebna za horizontalni let u prvoj iteraciji je

$$T = \sqrt{(T_z^O)^2 + (D^O + H_x^O)^2}. \quad (5.15)$$

Koeficijent inducirane brzine dobiven je zasebnim iterativnim postupkom [7]

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu_x^2 + (\mu_z + \lambda_i)^2}}, \quad (5.16)$$

gdje je  $C_T$  dobiven iz izraza (4.1), a za početnu pretpostavku koeficijenta inducirane brzine uzima se vrijednost u lebdenju

$$\lambda_i = \lambda_h = \sqrt{\frac{C_{Th}}{2}}. \quad (5.17)$$

Izračunom  $\lambda'$  iz izraza (5.5), koeficijent pogonske sile za slijedeću iteraciju dobiven je iz (5.2). Kutna brzina rotora za horizontalni let dobivena je iz (4.1). U prvoj iteraciji sve bezdimenzionalne veličine normirane su kutnom brzinom rotora u lebdenju. Nakon izračuna kutova mahanja pomoću jednadžbe (3.14) iz poglavlja 3.2.3., koeficijent okretnog momenta i koeficijent sile otpora rotora dobiveni su iz izraza (5.3) i (5.4). Cijeli postupak ponovljen je dok rješenje nije konvergiralo (u ovom radu usvojeno je deset iteracija). Dobivenim koeficijentima i kutovima mahanja određeni su referentni napon i referentni vektor stanja letjelice za kvazi ravnotežni horizontalni let.

# 6 Model leta sa 6 stupnjeva slobode gibanja

U ovom radu četverrotorni helikopter promatran je kao kruto tijelo. Zrakoplov kao kruto tijelo ima šest stupnjeva slobode te se zato taj model naziva skraćeno 6DOF. Čine ga četiri matrice jednačbe:

- derivacija vektora položaja središta mase letjelice,
- derivacija brzine leta središta mase letjelice,
- derivacija kinetičkog momenta letjelice za središte mase,
- derivacija stava letjelice.

## 6.1. Matrične jednačbe

### 6.1.1. Derivacija vektora položaja

Vektor položaja  $\vec{r}$  počinje u ishodištu lokalnog koordinatnog sustava i završava u središtu mase letjelice. Njegove projekcije na osi lokalnog koordinatnog sustava su

$$\mathbf{r}^L = \begin{bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Brzina leta  $\vec{V}_K$  definirana je kao brzina u odnosu na tlo, a to znači da su komponente

brzine leta u lokalnom koordinatnom sustavu derivacije komponenta vektora položaja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^L \\ \dot{y}^L \\ \dot{z}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_K^L \\ v_K^L \\ w_K^L \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

odnosno matrično

$$\dot{\mathbf{r}}^L = \mathbf{V}_K^L. \quad (6.3)$$

Integracijom ove vektorske jednadžbe dobivaju se koordinate središta mase letjelice. Za tu integraciju potrebne su komponente brzine leta u lokalnom koordinatnom sustavu. S obzirom na to da se komponente brzine leta  $\mathbf{V}_K = [u_K \ v_K \ w_K]^T$  metodom 6DOF dobivaju duž osi tromosti letjelice (koordinatni sustav letjelice), onda se ova vektorska jednadžba koristi u obliku

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^L &= \mathbf{L}_{LO}\mathbf{L}_{OF}\mathbf{V}_K, \\ \begin{bmatrix} \dot{x}^L \\ \dot{y}^L \\ \dot{z}^L \end{bmatrix} &= \mathbf{L}_{LF} \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.1.2. Derivacija brzine leta

Kako su komponente brzine leta  $\mathbf{V}_K = [u_K \ v_K \ w_K]^T$  poznate duž glavnih osi tromosti letjelice, a taj koordinatni sustav ima kutnu brzinu  $\vec{\Omega}$  (u odnosu na lokalni koordinatni sustav) čije su komponente duž tih istih glavnih osi tromosti  $\boldsymbol{\Omega} = [p \ q \ r]^T$ , prema [20] komponente ubrzanja duž glavnih osi tromosti bit će

$$\mathbf{a} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K. \quad (6.5)$$

Primjenom Newtonovog zakona klasične mehanike, izraz (6.5) može se zapisati

$$m \left( \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K \right) = \mathbf{F}, \quad (6.6)$$

pri čemu je  $\mathbf{F}$  suma svih sila koje djeluju na letjelicu.

### 6.1.3. Derivacija kinetičkog momenta

Kinetički moment gibanja  $\vec{H}$  uzima se za središte mase letjelice. Komponente kinetičkog momenta duž osi koordinatnog sustava letjelice jednake su produktu tenzora inercije  $\mathbf{I}$  i vektora kutne brzine letjelice  $\boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}. \quad (6.7)$$

S obzirom da su usvojene glavne osi tromosti, matrica tenzora inercije je dijagonalna. Članovi na dijagonali su momenti inercije za te osi pa su komponente kinetičkog momenta za glavne osi tromosti

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x p \\ I_y q \\ I_z r \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Budući da su komponente kinetičkog momenta poznate duž glavnih osi tromosti  $\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$ , koje imaju kutnu brzinu kao i letjelica  $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$ , komponente derivacije kinetičkog momenta duž tih osi izračunavaju se izrazom

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{H} + \dot{\mathbf{H}}. \quad (6.9)$$

Izjednačavanjem derivacije kinetičkog momenta i sume svih momenata koji djeluju na letjelicu  $\mathbf{M}$ , duž osi tromosti bit će

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{H} + \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}. \quad (6.10)$$

### 6.1.4. Derivacija stava

Za izračun prve matrice jednadžbe potrebna je matrica transformacije  $\mathbf{L}_{OF}$ . Kako vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{FO} &= \mathbf{L}_X(\phi)\mathbf{L}_Y(\theta)\mathbf{L}_Z(\psi). \\ \mathbf{L}_{OF} &= \mathbf{L}_{FO}^T, \end{aligned} \quad (6.11)$$

za određivanje te matrice transformacije potrebno je znati stav zrakoplova  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$ .

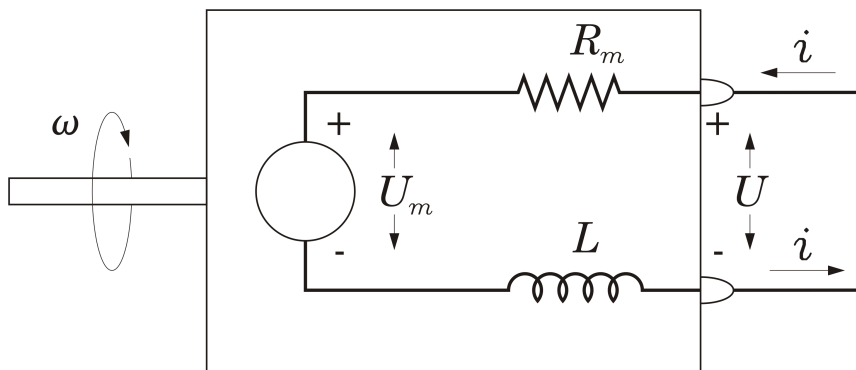
U poglavlju 2.3. izvedena je jednadžba koja daje derivaciju stava za poznatu kutnu brzinu letjelice  $\boldsymbol{\Omega}$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\Omega}. \quad (6.12)$$

### 6.1.5. Derivacija kinetičkih momenata motora

Kao što je već rečeno, četverrotornim helikopterom upravlja se promjenom broja okretaja rotora. Zato je u ovom radu, uz prethodno navedene četiri matrične jednačbe, 6DOF modelu dodana još jedna matrična jednačba kojom su računane kutne brzine motora.

Ponašanje istosmjernog elektromotora (*engl.* DC electric motor) opisano je ekvivalentnim strujnim krugom prikazanim na slici 6.1 [28].



Slika 6.1: Ekvivalentni strujni krug istosmjernog elektromotora

Prema drugom Kirchhoffovom zakonu napon izvora jednak je zbroju svih padova napona u strujnom krugu

$$U = U_R + U_L + U_m, \quad (6.13)$$

gdje je  $U_R$  pad napona uslijed unutarnjeg otpora motora,  $U_L$  je pad napona na zavojnici, a  $U_m$  je povratna elektromotorna sila. Izraz (6.13) može se zapisati kao

$$U = R_m i + L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\omega}{K_V}, \quad (6.14)$$

pri čemu je  $R_m$  unutarnji otpor motora,  $i$  je struja kroz motor,  $L$  je induktivnost,  $\omega$  je broj okretaja motora, a  $K_V$  je konstanta brzine vrtnje. Prema [5] induktivnost malih elektromotora je mala te se može zanemariti. Martínez je u svom radu induktivnost

uzeo u obzir i potvrdio da je zaista zanemariva [8]. Moment motora  $Q_m$  može se izraziti kao omjer razlike struje kroz motor  $i$  i nulte struje (struja kroz neopterećeni motor)  $i_0$  i konstante momenta  $K_Q$

$$Q_m = \frac{i - i_0}{K_Q}. \quad (6.15)$$

Ako se  $K_V$  izrazi u rad/s/V, a  $K_Q$  u A/Nm, prema [28] vrijedi

$$K_Q = K_V. \quad (6.16)$$

Dinamika motora modelirana je kao jednostavna diferencijalna jednačba prvog reda [5]

$$I\dot{\omega} = Q_m - Q, \quad (6.17)$$

gdje je  $I$  moment inercije motora i propelera,  $\dot{\omega}$  je kutna brzina motora, a  $Q$  je okretni moment uslijed otpora propelera. Moment inercije motora i propelera je zbroj momenata inercije rotirajućeg dijela motora i propelera. Pretpostavljeno je da je moment inercije rotirajućeg dijela motora zanemariv. Uvrštavanjem izraza (6.14) (uz zanemarivanje induktivnosti) i (6.15) u jednačbu (6.17), uz pretpostavku da je moment inercije  $I$  jednak momentu inercije propelera  $I_p$ , dobivena je diferencijalna jednačba kutne brzine motora  $j$

$$I_p\dot{\omega}_j = \left[ \left( U_j - \frac{\omega_j}{K_V} \right) \frac{1}{R_m} - i_0 \right] \frac{1}{K_Q} - Q_j, \quad (6.18)$$

$$I_p\dot{\omega}_j = D_j.$$

Prema tome, matična jednačba kutnih brzina svih motora je

$$I_p\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{D}, \quad (6.19)$$

pri čemu je  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\dot{\omega}_1 \ \dot{\omega}_2 \ \dot{\omega}_3 \ \dot{\omega}_4]^T$  i  $\mathbf{D} = [D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4]^T$ .

## 6.2. 6DOF model promatranog četverorotornog helikoptera

Okosnicu 6DOF modela čine pet matičnih jednačbi: derivacija vektora položaja (6.20), derivacija vektora brzine leta (6.21), derivacija vektora kinematičkog momenta

(6.22), derivacija stava (6.23) i derivacija kinetičkih momenata motora (6.24).

$$\dot{\mathbf{r}}^L = \mathbf{L}_{LF} \mathbf{V}_K, \quad (6.20)$$

$$m \left( \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K \right) = \mathbf{F}, \quad (6.21)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} + \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}, \quad (6.22)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Omega}, \quad (6.23)$$

$$I_p \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{D}. \quad (6.24)$$

U tim jednadžbama ima 16 nepoznanica:

$$x \quad y \quad z \quad u_K \quad v_K \quad w_K \quad p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4$$

Te nepoznanice čine jedan vektor koji se naziva *vektor stanja* letjelice. Raspisivanjem matičnih jednadžbi dobiven je cjelokupan razvijen sustav jednadžbi koje čine 6DOF model četverorotornog helikoptera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^L \\ \dot{y}^L \\ \dot{z}^L \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{LF} \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_K \\ \dot{v}_K \\ \dot{w}_K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} I_x \\ \dot{q} I_y \\ \dot{r} I_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p I_x \\ q I_y \\ r I_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$



$$\begin{bmatrix} I_p \dot{\omega}_1 \\ I_p \dot{\omega}_2 \\ I_p \dot{\omega}_3 \\ I_p \dot{\omega}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \left( U_1 - \frac{\omega_1}{K_V} \right) \frac{1}{R_m} - i_0 \right] \frac{1}{K_Q} - Q_1 \\ \left[ \left( U_2 - \frac{\omega_2}{K_V} \right) \frac{1}{R_m} - i_0 \right] \frac{1}{K_Q} - Q_2 \\ \left[ \left( U_3 - \frac{\omega_3}{K_V} \right) \frac{1}{R_m} - i_0 \right] \frac{1}{K_Q} - Q_3 \\ \left[ \left( U_4 - \frac{\omega_4}{K_V} \right) \frac{1}{R_m} - i_0 \right] \frac{1}{K_Q} - Q_4 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

### 6.2.1. Sile u 6DOF modelu

Pogonska sila i sila otpora rotora definirane su u koordinatnom sustavu TPP s hvatištem u ishodištu tog koordinatnog sustava. Pogonska sila djeluje u negativnom smjeru osi  $z_{TPP}$ , a sila otpora rotora u negativnom smjeru osi  $x_{TPP}$ . Prema tome, pogonska sila i sila otpora rotora za rotor  $j$  u koordinatnom sustavu rotora (koji se poklapa s koordinatnim sustavom letjelice) su:

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{L}_{RTPP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{H}_{Dj} = \mathbf{L}_{RTPP} \begin{bmatrix} -H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Sila otpora tijela letjelice predstavlja parazitski otpor tijela letjelice  $i$ , kao što je rečeno u poglavlju 5.3., definirana je istim pravcem i smjerom kao i brzina neporemećene struje  $V_\infty$ . Kako je u vertikalnom penjanju brzina neporemećene struje usmjerena prema dolje, tako je u modelu vertikalnog leta sila otpora tijela u koordinatnom sustavu letjelice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Intenzitet sile otpora u vertikalnom letu je

$$D = q_d(K_1 S_{h1} + K_2 S_{h2}). \quad (6.33)$$

Dinamički tlak  $q_d$  određen je brzinom neporemećene struje,  $S_{h1}$  i  $S_{h2}$  su horizontalne projekcije površine okvira i površine centralnog dijela letjelice,  $K_1$  i  $K_2$  su koeficijenti otpora za okvir i centralni dio. U horizontalnom letu, uz pretpostavku da nema vjetrova, sila otpora u koordinatnom sustavu letjelice je

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_Y(\alpha_F) \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Intenzitet sile otpora u horizontalnom letu dan je u poglavlju 5.3. izrazom

$$D = q_d(K_1 S_{f1} + K_2 S_{f2}). \quad (6.35)$$

Težina letjelice usmjerena je prema dolje duž osi  $z$  nošenog koordinatnog sustava. U koordinatnom sustavu letjelice težina letjelice je

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Suma svih sila koje djeluju na letjelicu je

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{T}_j + \sum_{j=1}^4 \mathbf{H}_{Dj} + \mathbf{D} + \mathbf{W}. \quad (6.37)$$

### 6.2.2. Momenti u 6DOF modelu

Okretni momenti rotora definirani su u koordinatnom sustavu TPP. Ovisno o smjeru rotacije rotora predznak im je pozitivan odnosno negativan. U skladu sa smjerovima rotacija rotora prikazanim na slici 2.2 okretni moment na prvom i trećem rotoru su negativni, a na drugom i četvrtom pozitivni. Okretni momenti u koordinatnom sustavu letjelice su

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{L}_{RTPP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm Q \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Momenti uslijed djelovanja pogonske sile i sile otpora rotora na kraku oko središta mase u koordinatnom sustavu letjelice su:

$$\mathbf{M}_{Tj} = \tilde{\mathbf{r}}_j \mathbf{T}_j, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{M}_{Hj} = \tilde{\mathbf{r}}_j \mathbf{H}_{Dj}, \quad (6.40)$$

pri čemu je  $\tilde{\mathbf{r}}_j$  kososimetrična matrica vektora položaja ishodišta ravnine TPP odnosno hvatišta pogonske sile i sile otpora rotora. U koordinatnom sustavu letjelice vektor položaja  $\vec{r}$  za rotor  $j$  radijusa  $R$  i s koordinatama centra rotacije rotora  $x, y, z$  ovisi o kutovima mahanja

$$\vec{r}_j = \begin{bmatrix} x_j - R \sin a_0 \sin a_1 \\ y_j + R \sin a_0 \sin b_1 \\ z_j - R \sin a_0 \cos a_1 \cos b_1 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Moment oko glavčine rotora uzrokovan djelovanjem centrifugalnih sila uzrokuje pozitivan moment propinjanja oko osi  $y$  u koordinatnom sustavu letjelice

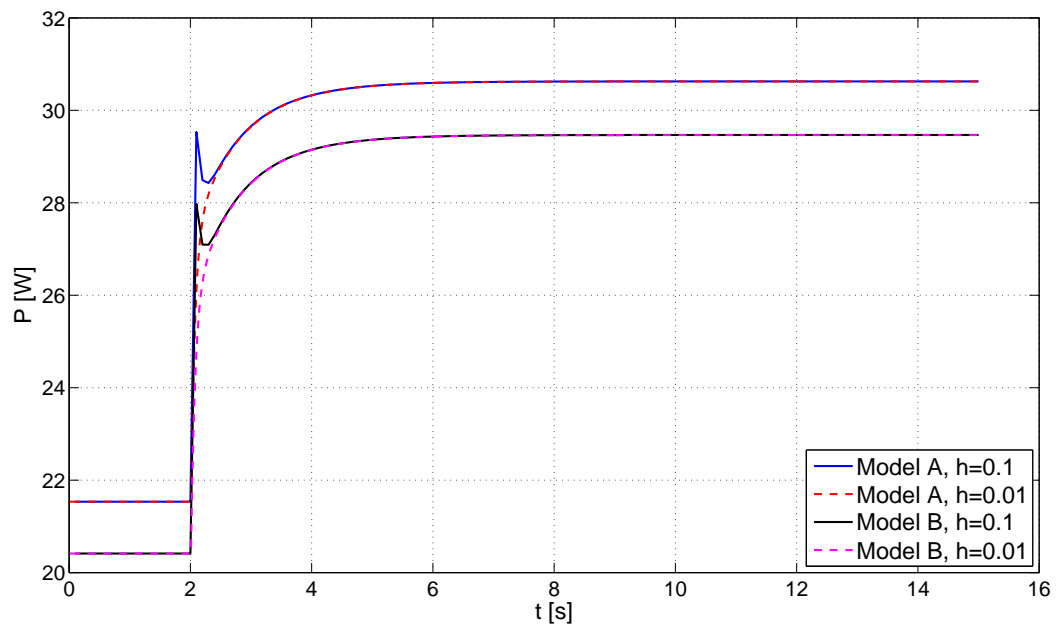
$$\mathbf{M}_{HUBj} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{HUB} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Suma svih momenata koje djeluju na letjelicu je

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{Q}_j + \sum_{j=1}^4 \mathbf{M}_{Tj} + \sum_{j=1}^4 \mathbf{M}_{Hj} + \sum_{j=1}^4 \mathbf{M}_{HUBj}. \quad (6.43)$$

## 7 Rezultati simulacije

Numerička integracija jednadžbi 6DOF modela rađena je metodom Runge-Kutta četvrtog reda s korakom integracije  $h = 0.1$ . Upotreba većeg koraka daje bolje rezultate prijelaznog stanja, ali znatno usporava izvođenje numeričkog algoritma u simulacijama vertikalnog leta te je u tim simulacijama korišten korak integracije  $h = 0.1$ . Na slici 7.1 uspoređeni su rezultati za snagu u vertikalnom penjanju pri različitim koracima integracije  $h$ . Na istoj slici prikazana je i usporedba modela A i modela B karakteristika profila. Vidljivo je da je potrebna snaga veća kad se koristi model A. Taj model korišten je u svim simulacijama vertikalnog leta. Kako se u simulacijama horizontalnog leta koristi analitičko rješenje teorije elementarnog kraka, samo izvođenje numeričkog algoritma znatno je brže nego u simulacijama vertikalnog leta te su sve simulacije horizontalnog leta provedene s korakom integracije  $h = 0.01$ . Zadana brzina leta u simulacijama horizontalnog leta je 1 m/s.



Slika 7.1: Usporedba rezultata snage za različite modele otpora profila i različite korake integracije

## 7.1. Vertikalni let

### Vertikalno penjanje

Vertikalno penjanje ostvareno je step pobudom sva četiri motora. Uslijed toga dolazi do povećanja ukupne pogonske sile te se letjelica počinje vertikalno penjati i ubrzavati. Nakon nekog vremena, zbog otpora zraka, letjelica će prestati ubrzavati i, uz pretpostavku konstantne gustoće zraka, nastaviti se penjati konstantnom brzinom.

Provedena je i simulacija na impulsnu pobudu kojom je ostvareno vertikalno penjanje letjelice do određene visine i lebdenje na toj visini.

### Zanošenje (rotacija oko vertikalne osi letjelice)

Povećanjem broja okretaja, odnosno pogonske sile na jednom paru nasuprotnih rotora uz istovremeno smanjenje broja okretaja na drugom paru nasuprotnih rotora stvorit će se okretni moment koji će, ovisno o pobudi, uzrokovati zanošenje letjelice (rotaciju letjelice oko vertikalne osi nošenog koordinatnog sustava). Međutim, kako veza između broja okretaja rotora i pogonske sile nije linearna povećanje pogonske sile na jednom paru nasuprotnih rotora neće odgovarati smanjenju pogonske sile na drugom paru i letjelica će se, ovisno o iznosu napona, početi penjati ili padati. Točan iznos napona potreban za rotaciju oko vertikalne osi, a da letjelica ostane lebdjeti nije jednostavno odrediti i, u ovom radu, nije postignuto stabilno zanošenje letjelice.

### Propinjanje

Za propinjanje letjelice potrebno je na jednom rotoru povećati pogonsku silu, a u isto vrijeme smanjiti na nasuprotnom. Za negativan moment propinjanja letjelica će se nagnuti prema dolje. Uslijed toga, kao što je rečeno u poglavlju 5.3., letjelica će se početi gibati prema naprijed. Gibanje prema naprijed, uslijed momenata uzrokovanih mahanjem kraka, stvorit će pozitivan moment propinjanja. Rezultati simulacije propinjanja uz samo propinjanje pokazuju i gibanje letjelice prema naprijed.

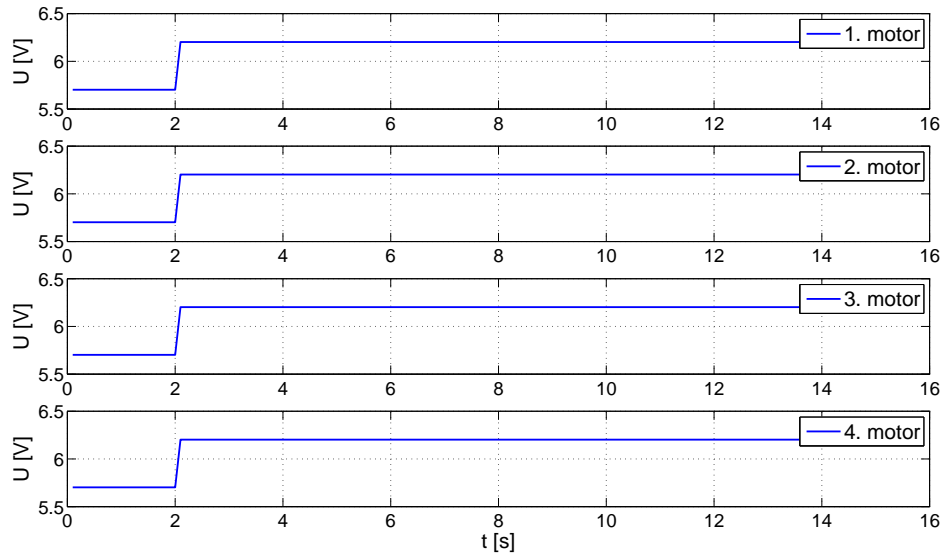
S obzirom na to da su ulazne varijable napravljenog aerodinamičkog modela rotora veličine vektora stanja letjelice, pri izračunu bezdimenzionalnih koeficijenata pojedinog rotora, algoritam jedinu informaciju o kojem se rotoru radi dobiva iz kutnih brzina motora. U slučaju da letjelica ima vertikalnu brzinu, prilikom izračuna, sva četiri rotora

tretirana su kao da se penju tom brzinom. Dok se u stvarnosti, prilikom propinjanja, jedan rotor giba prema gore, a drugi prema dolje te su brzine protoka struje zraka različite.

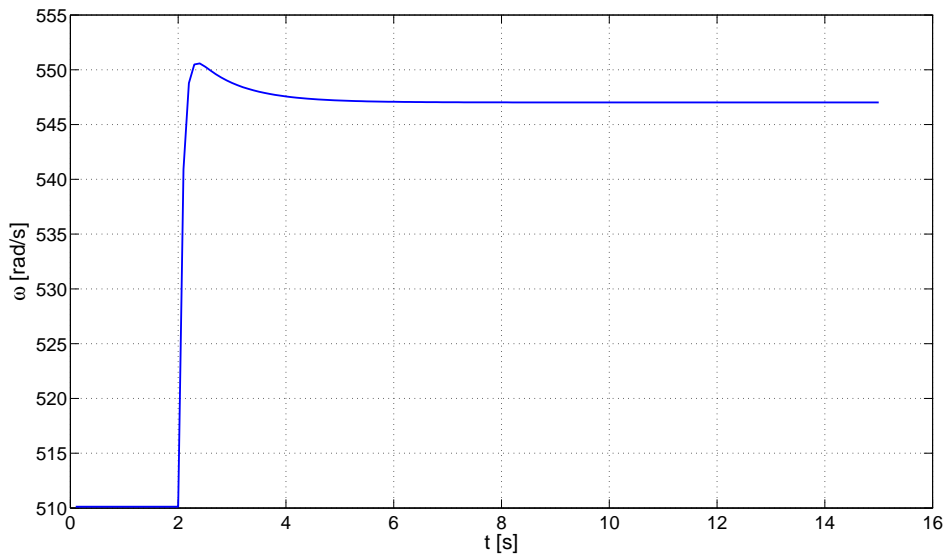
Isto tako, negativno propinjanje uzrokuje gibanje letjelice prema naprijed te nas-trujavanje zraka na rotor prestaje biti osnosimetrično. Kako je simulacija propinjanja rađena modelom za vertikalni let, ne može se provesti odgovarajući izračun inducirane brzine i bezdimenzionalnih koeficijenata.

Prema tome, napravljeni aerodinamički model rotora nije korektno koristiti za simu-laciju propinjanja. Zbog istih razloga, aerodinamički model korišten u horizontalnom letu nije korektan za velike brzine propinjanja.

### 7.1.1. Vertikalno penjanje - step pobuda

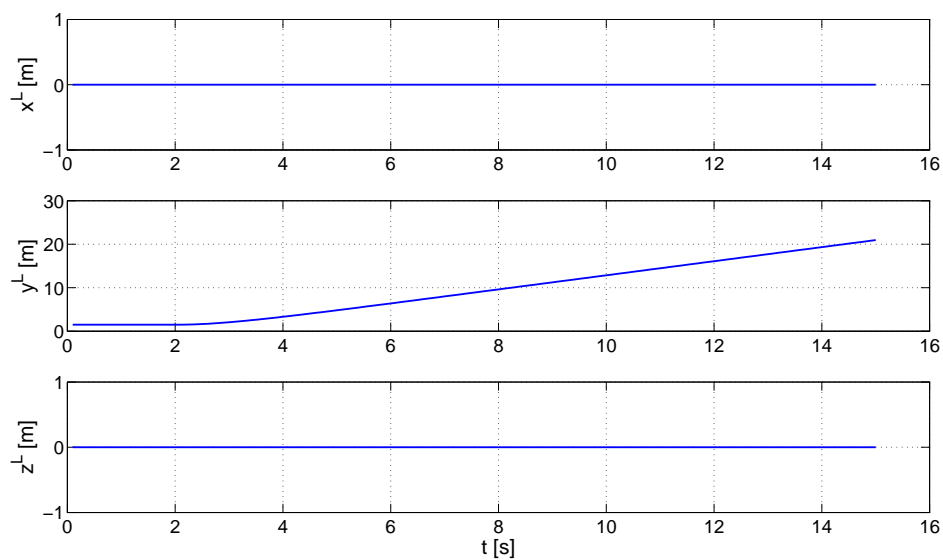


Slika 7.2: Pobuda - vertikalno penjanje (step pobuda)

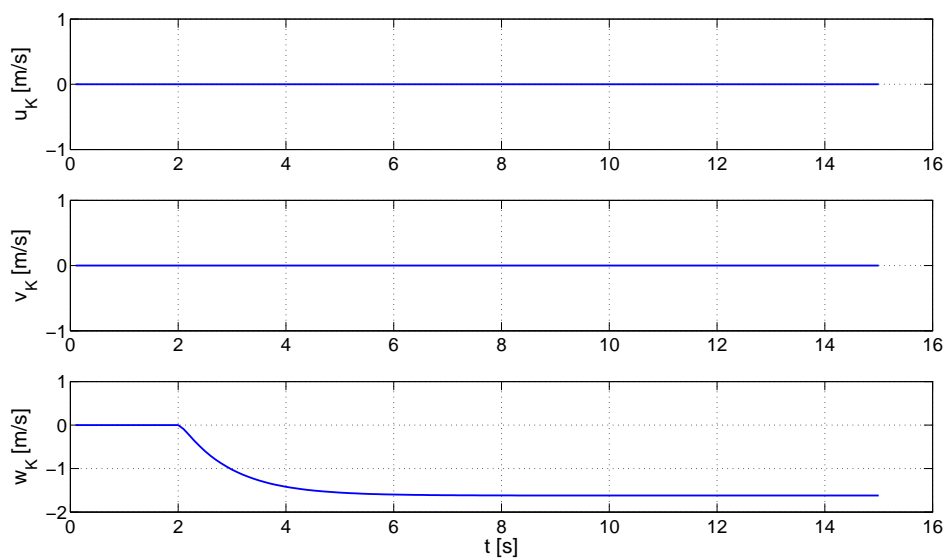


Slika 7.3: Kutna brzina sva četiri rotora - vertikalno penjanje (step pobuda)

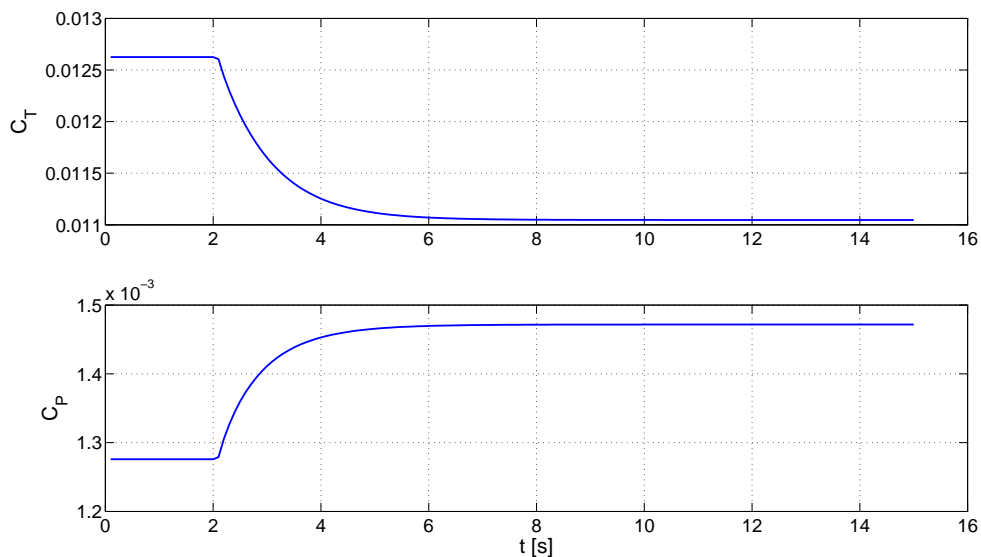




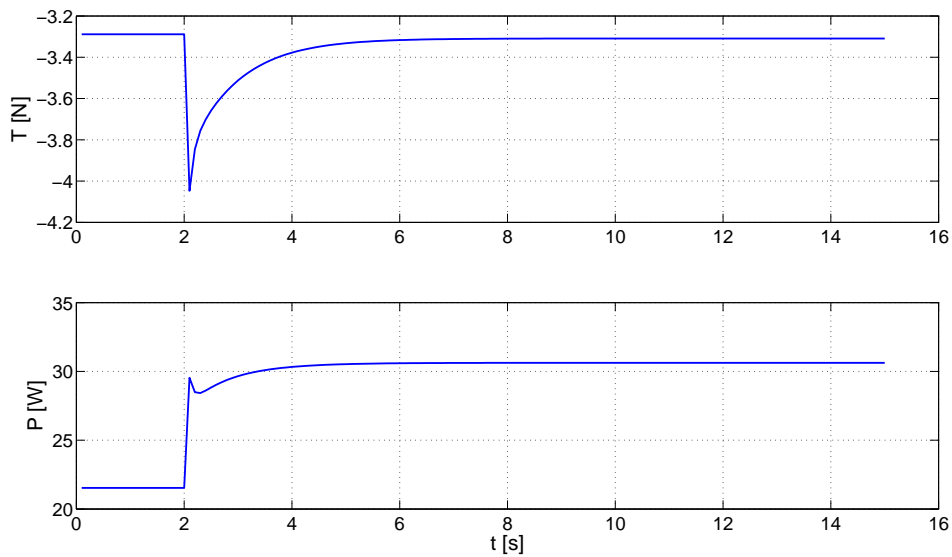
Slika 7.4: Položaj - vertikalno penjanje (step pobuda)



Slika 7.5: Brzine - vertikalno penjanje (step pobuda)

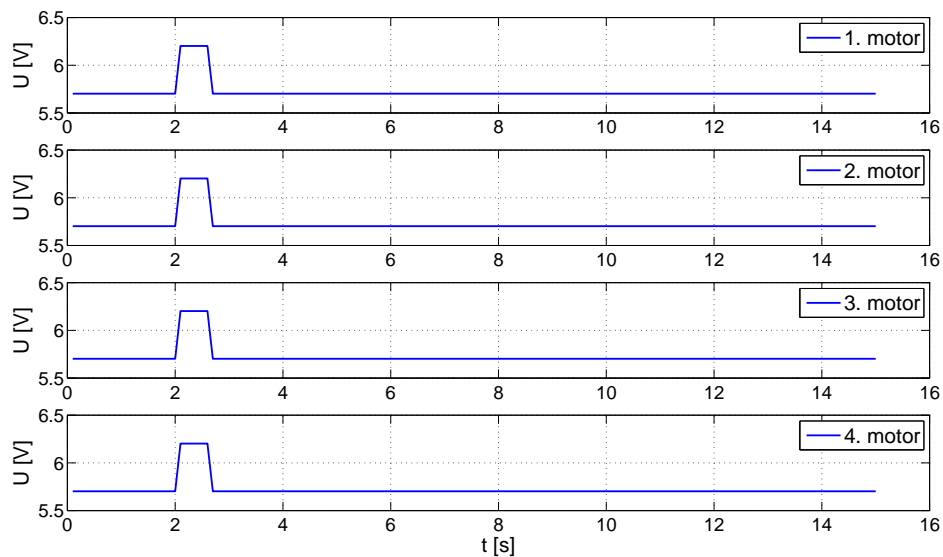


Slika 7.6: Koeficijenti  $C_T$  i  $C_P$  (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (step pobuda)

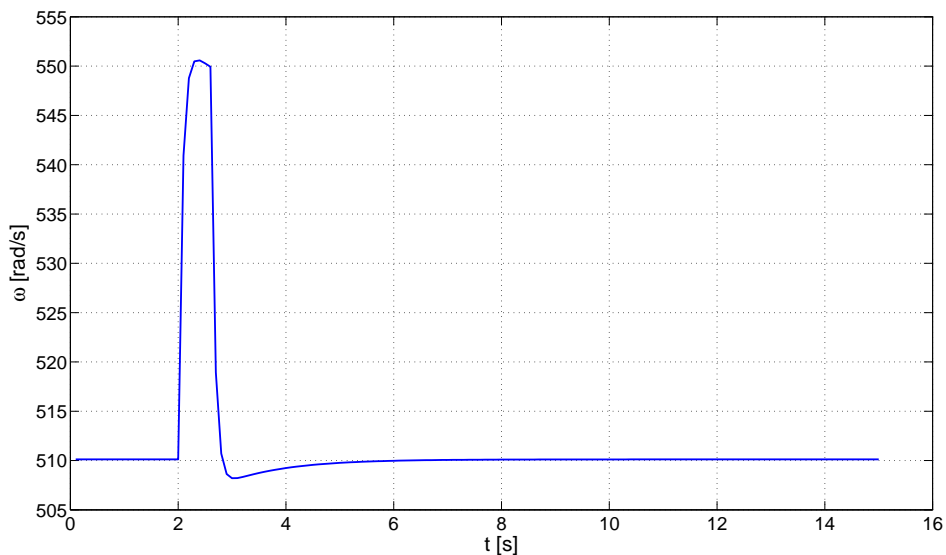


Slika 7.7: Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (step pobuda)

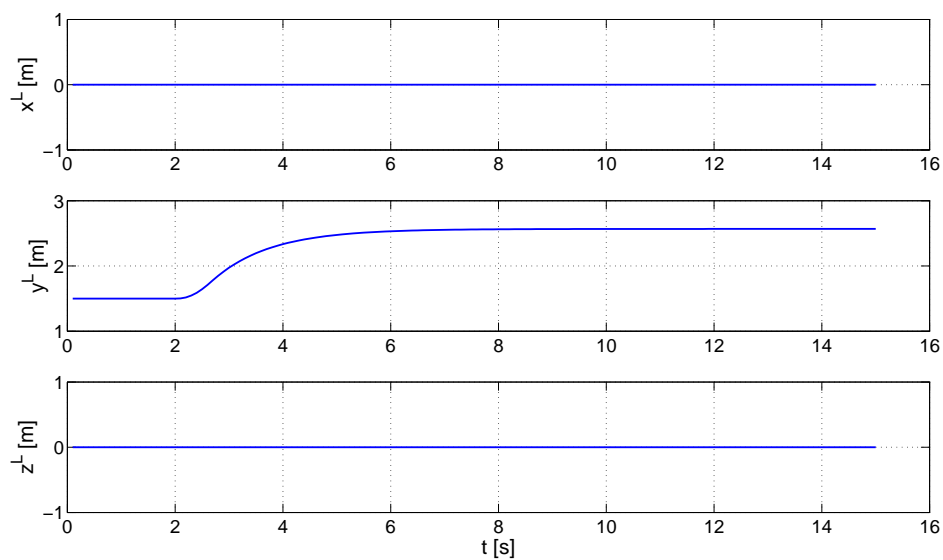
### 7.1.2. Vertikalno penjanje - impulsna pobuda



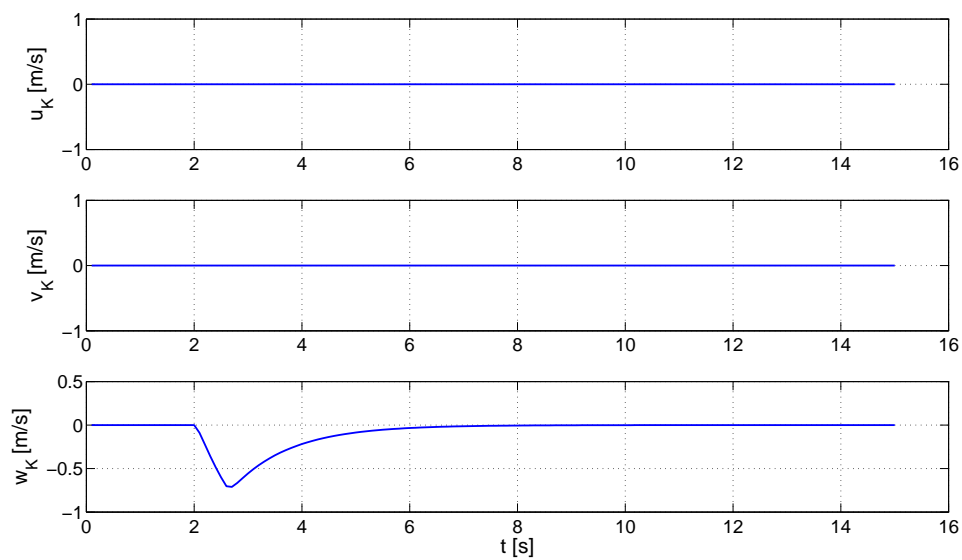
Slika 7.8: Pobuda - vertikalno penjanje (impulsna pobuda)



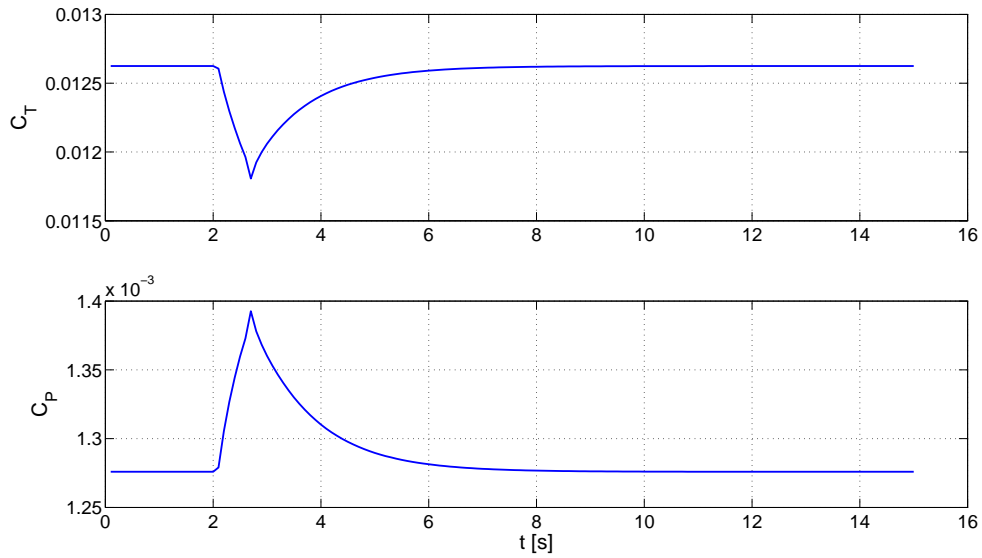
Slika 7.9: Kutna brzina sva četiri rotora - vertikalno penjanje (impulsna pobuda)



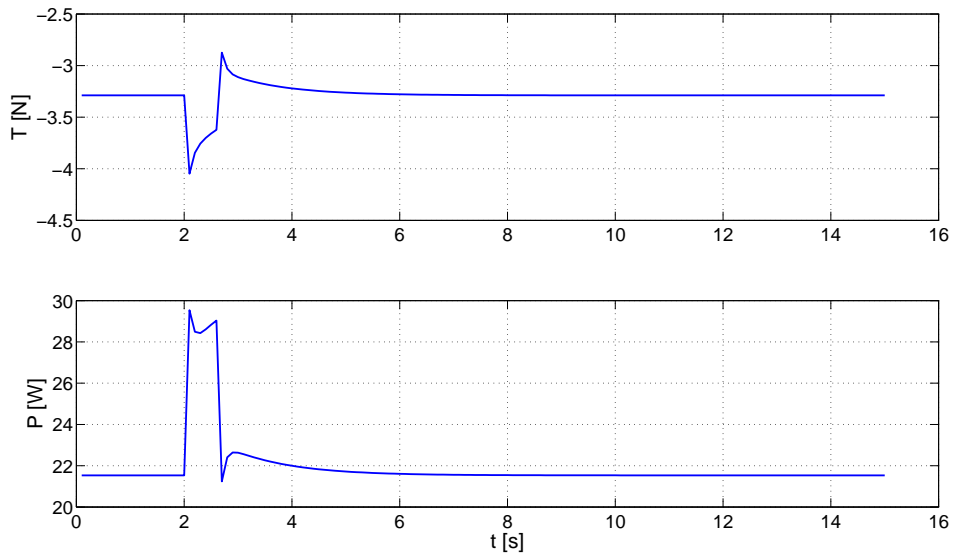
Slika 7.10: Položaj - vertikalno penjanje (impulsna pobuda)



Slika 7.11: Brzine - vertikalno penjanje (impulsna pobuda)

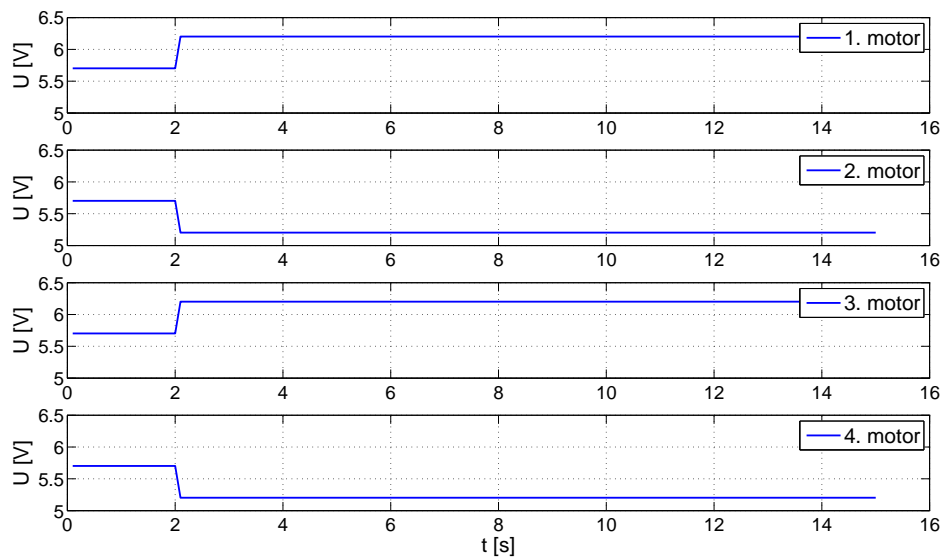


Slika 7.12: Koeficijenti  $C_T$  i  $C_P$  (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (impulsna pobuda)

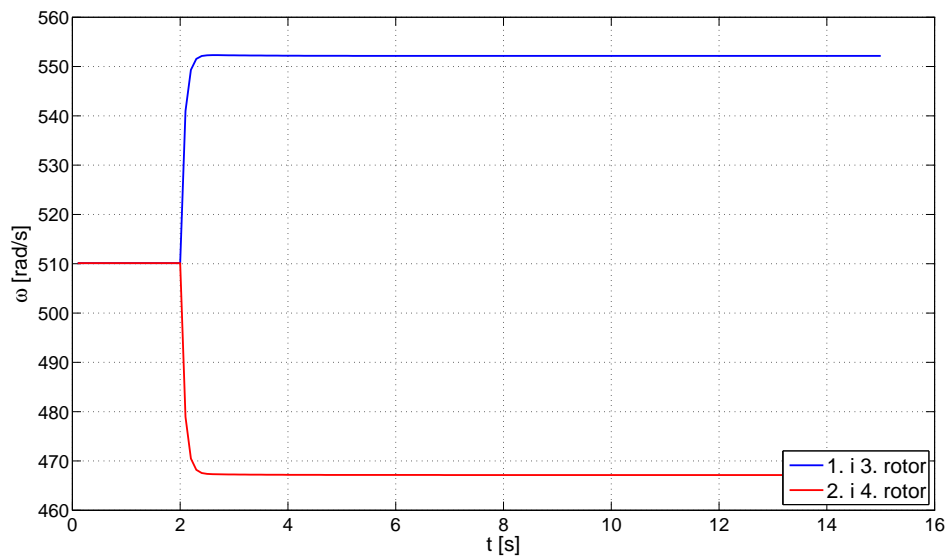


Slika 7.13: Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - vertikalno penjanje (impulsna pobuda)

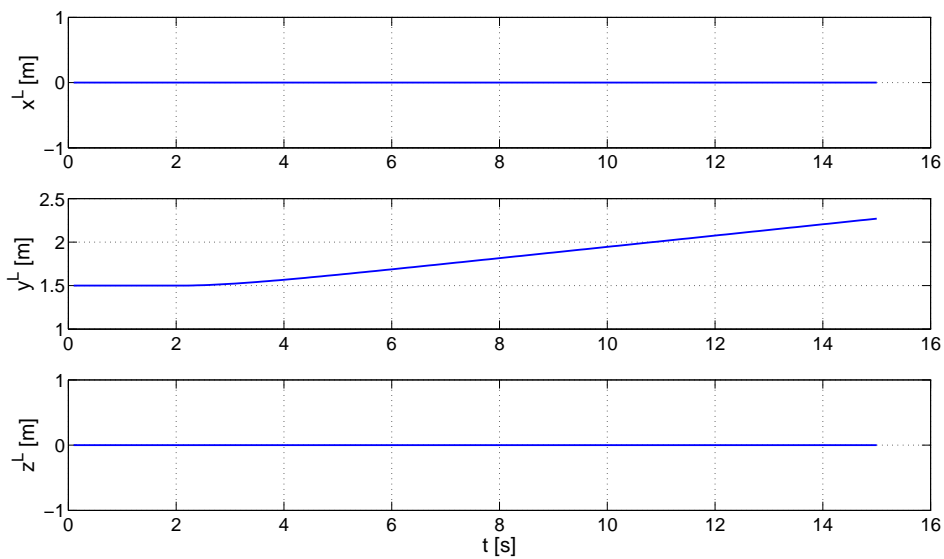
### 7.1.3. Zanošenje



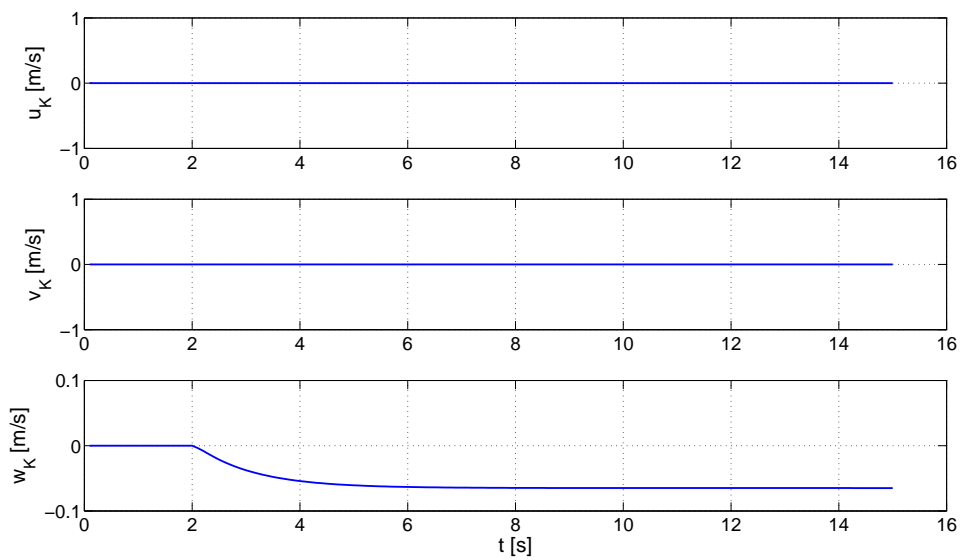
Slika 7.14: Pobuda - zanošenje



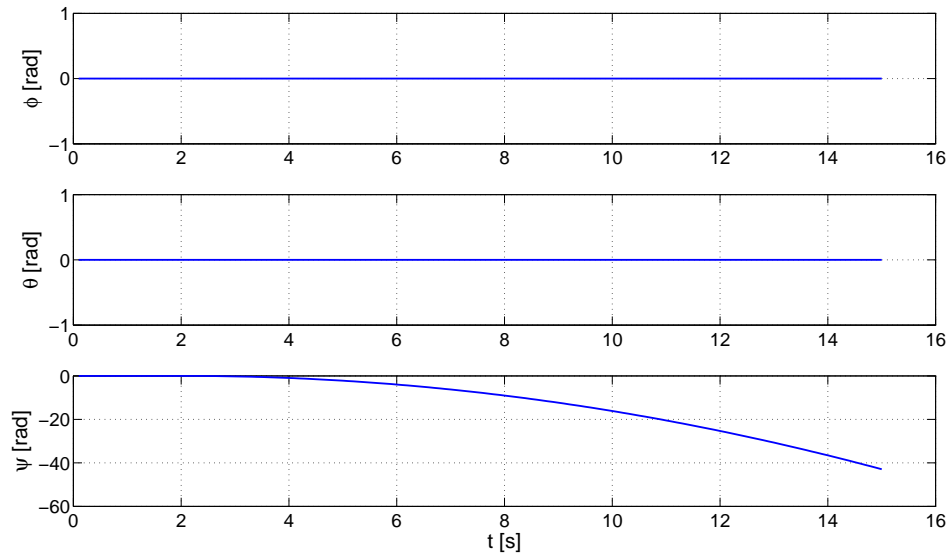
Slika 7.15: Kutna brzina rotora - zanošenje



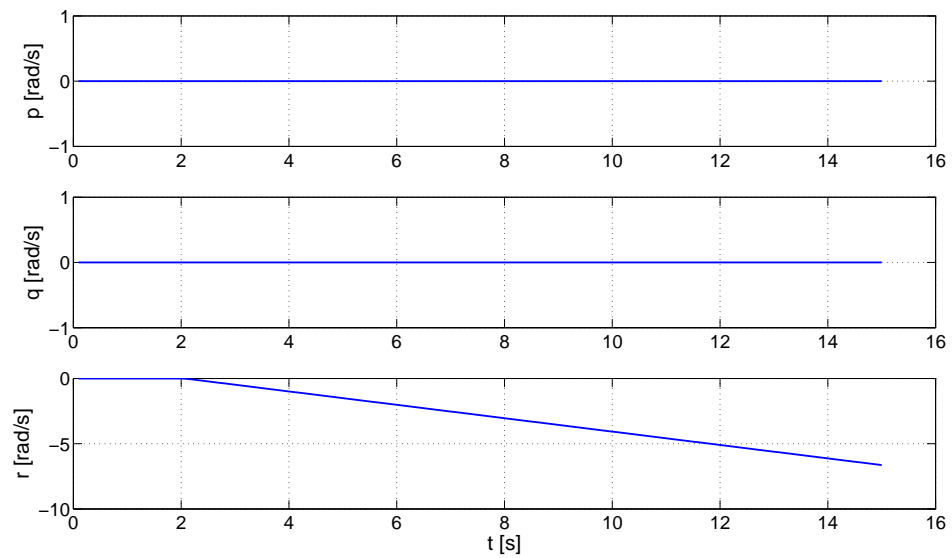
Slika 7.16: Položaj - zanošenje



Slika 7.17: Brzine - zanošenje

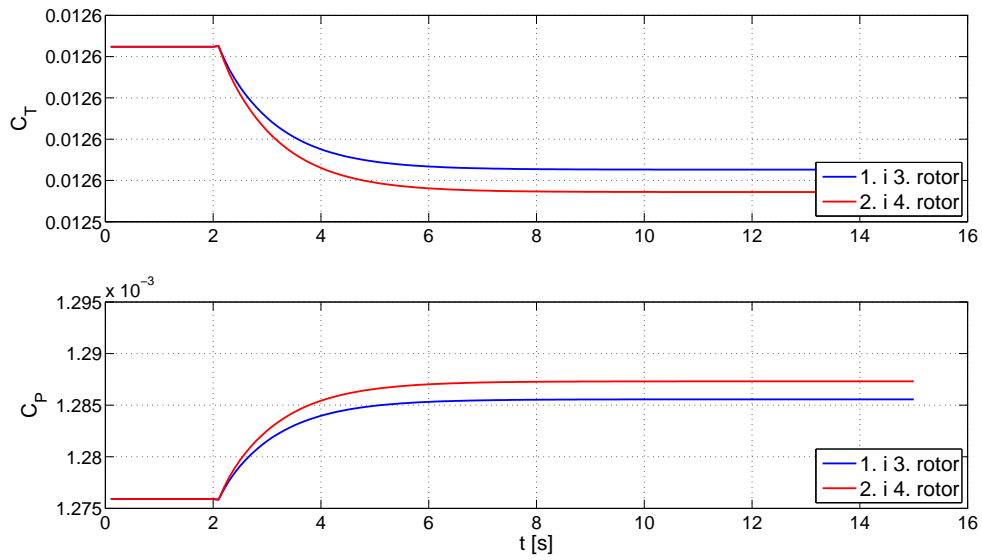


Slika 7.18: Stav - zanošenje

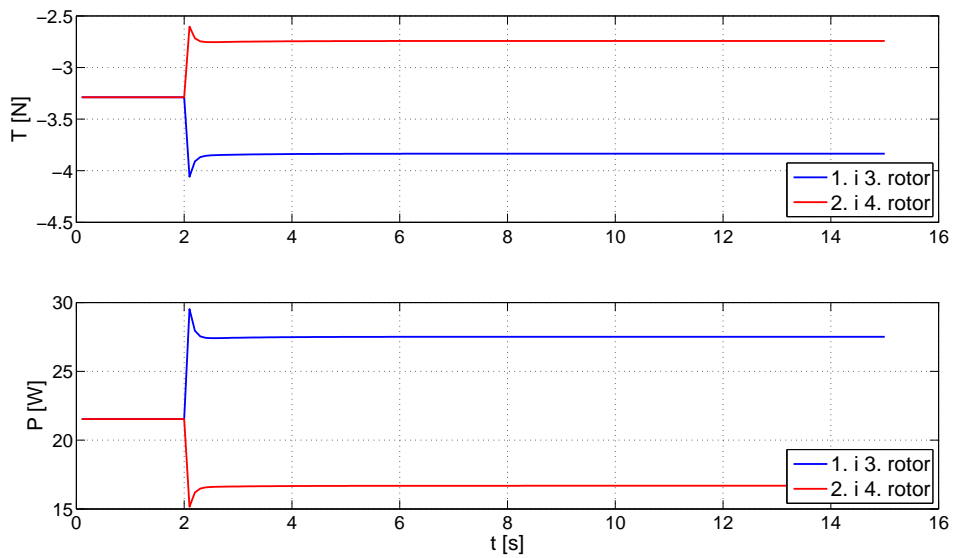


Slika 7.19: Kutne brzine - zanošenje



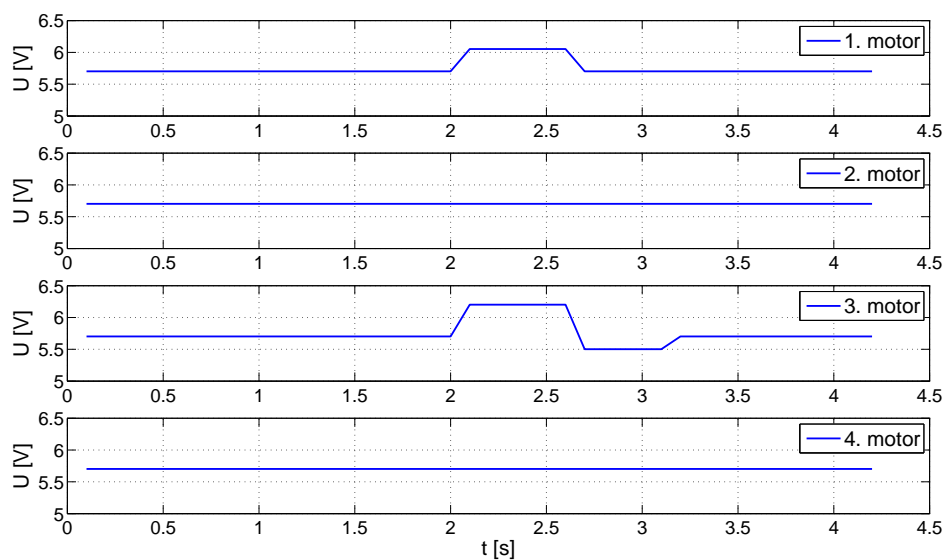


Slika 7.20: Koeficijenti  $C_T$  i  $C_P$  - zanošenje

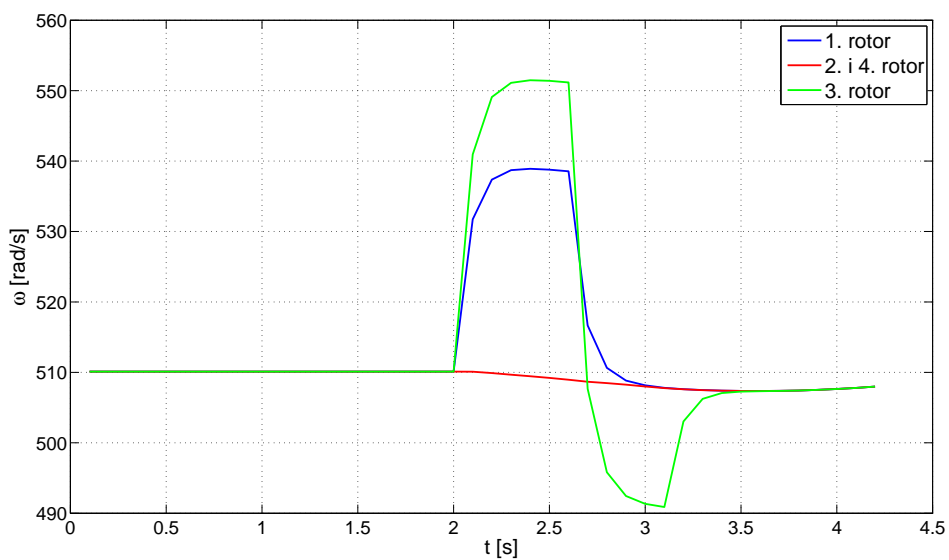


Slika 7.21: Pogonska sila i snaga - zanošenje

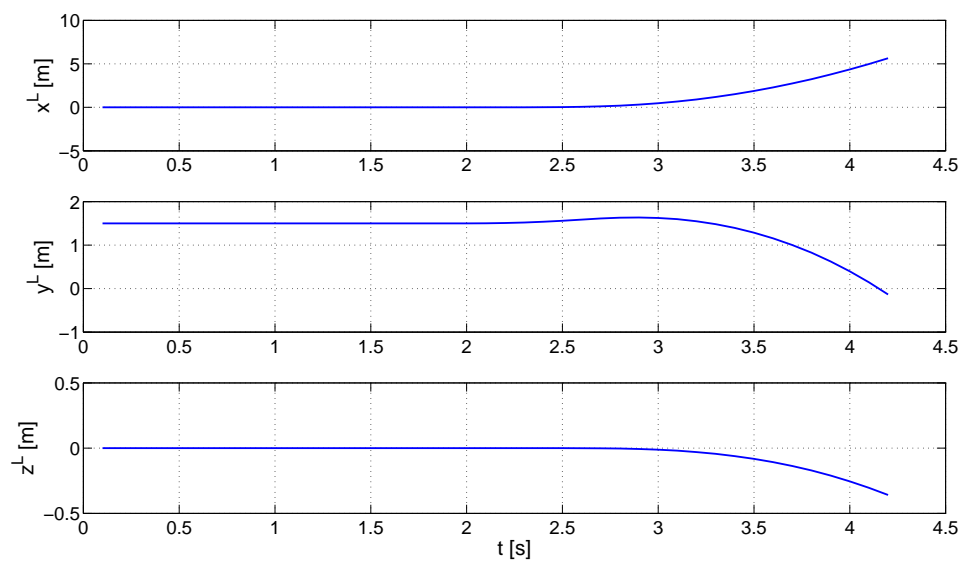
### 7.1.4. Propinjanje



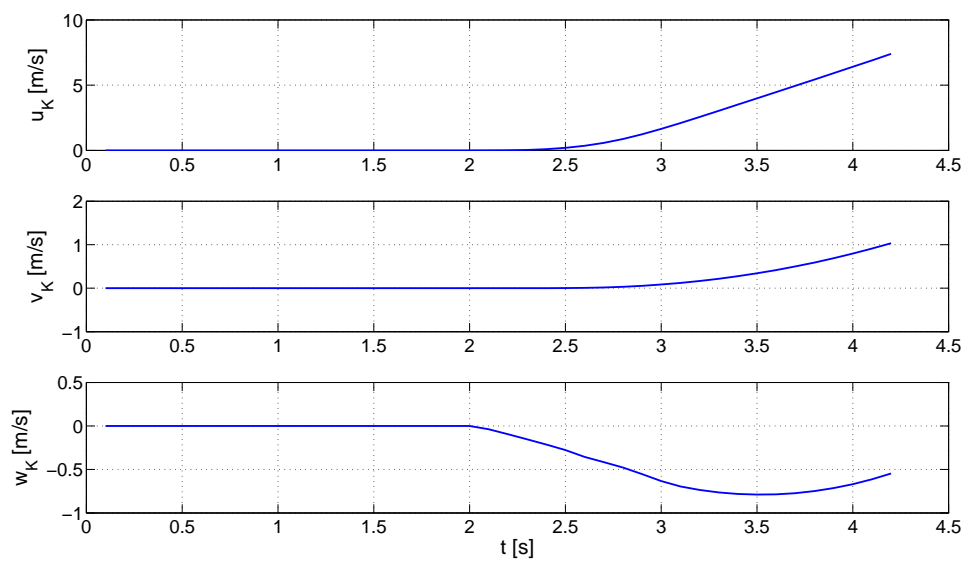
Slika 7.22: Pobuda - propinjanje



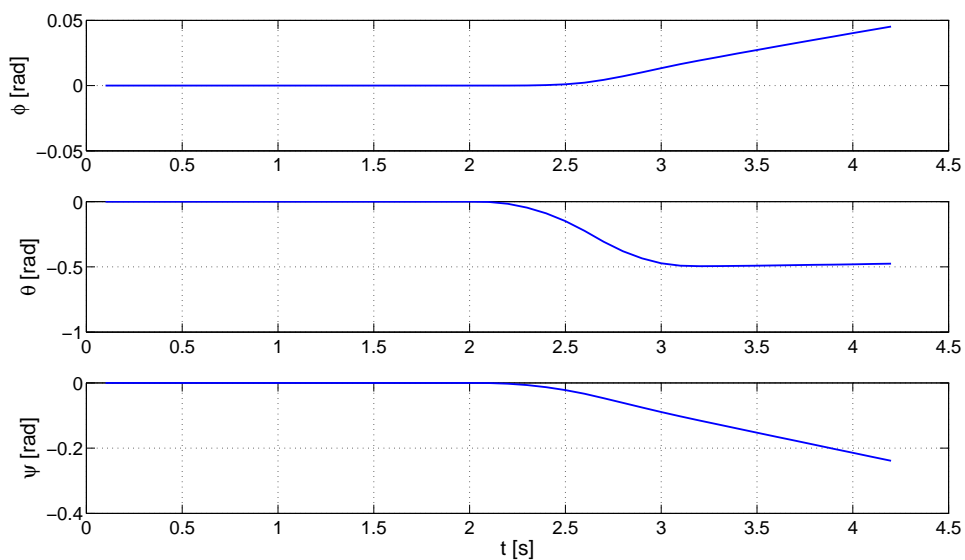
Slika 7.23: Kutna brzina motora - propinjanje



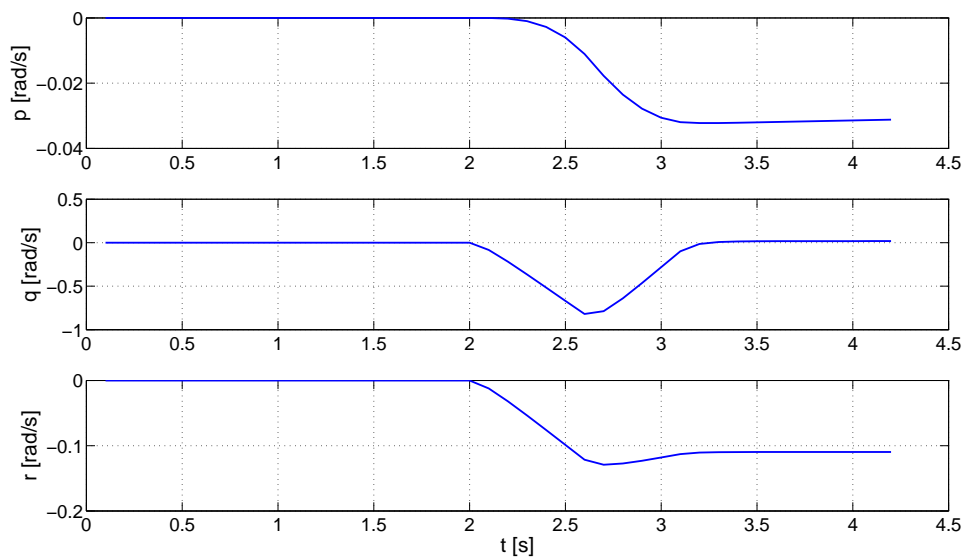
Slika 7.24: Položaj - propinjanje



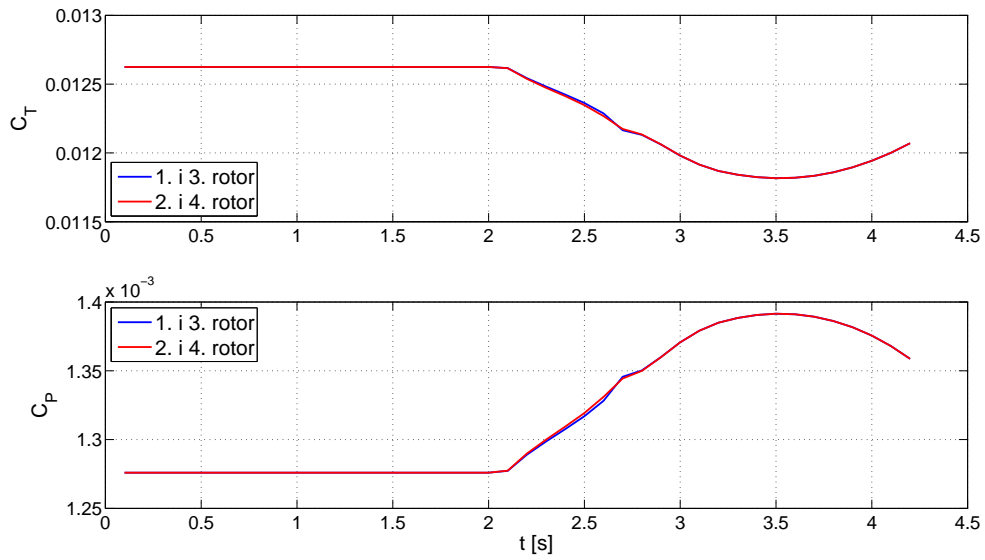
Slika 7.25: Brzine - propinjanje



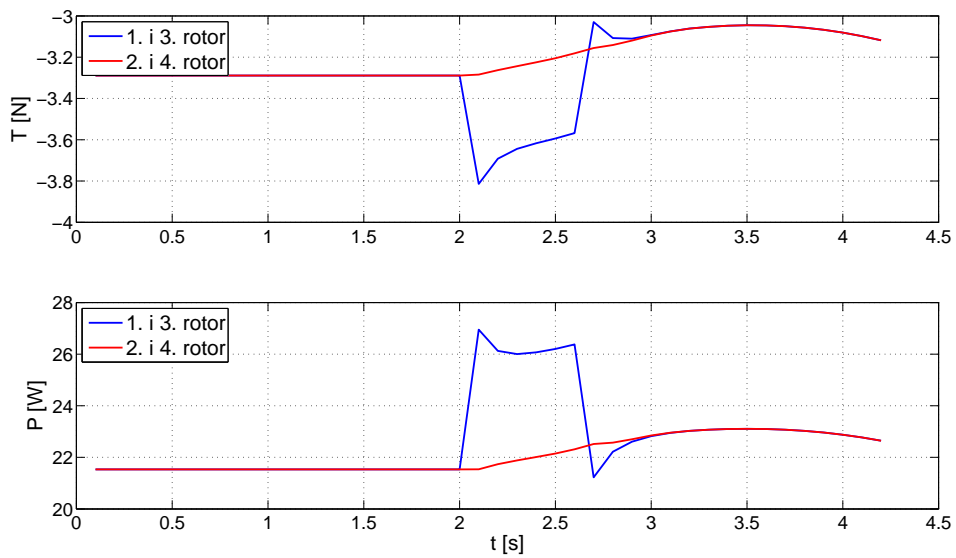
Slika 7.26: Stav - propinjanje



Slika 7.27: Kutne brzine - propinjanje



Slika 7.28: Koeficijenti  $C_T$  i  $C_P$  - propinjanje



Slika 7.29: Pogonska sila i snaga - propinjanje

## 7.2. Horizontalni let

### Horizontalni let bez pobude

Koristeći ravnotežno stanje za pojednostavljeni horizontalni let iz poglavlja 5.3. provedena je simulacija letjelice u horizontalnom letu bez pobude. Očekivano, zbog momenta uzrokovanih mahanjem, odmah na početku simulacije nastaje pozitivan moment propinjanja koji naginje letjelicu prema nazad i u određenom trenutku letjelica se počinje gibati unazad. Rezultati poslije tog trenutka nisu mjerodavni. Kako je objašnjeno u poglavlju 7.1. i u ovom slučaju, zbog propinjanja letjelice, razvijeni model aerodinamike rotora nije korektan.

### Horizontalni let s pobudom

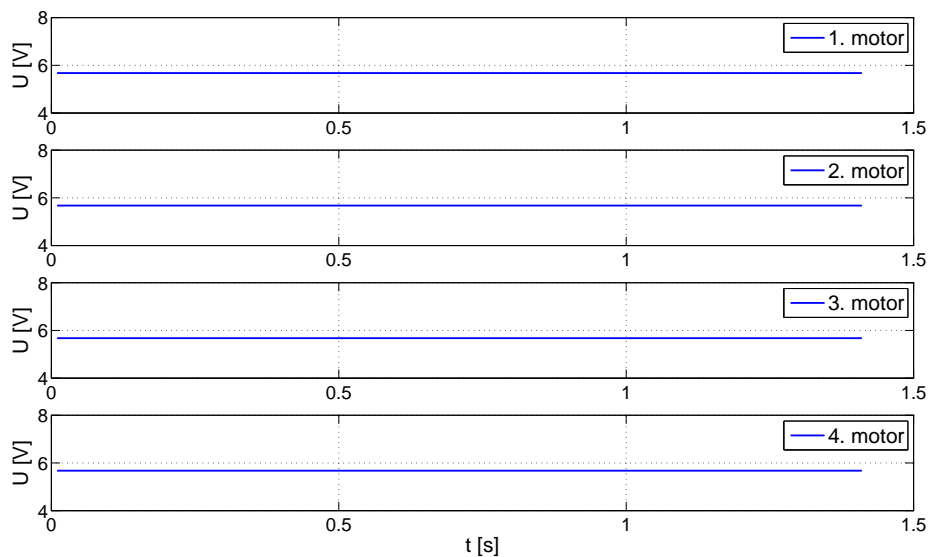
S ciljem zadržavanja napredujućeg leta letjelice provedena je simulacija s dovedenim određenim iznosom napona na stražnjem motoru. Povećanje pogonske sile na tom stražnjem rotoru stvara negativan moment propinjanja koji se suprotavlja momentu uzrokovanim mahanjem. Rezultati ove simulacije pokazuju da s ovom pobudom letjelica uspijeva zadržati smjer gibanja prema naprijed. Međutim, veća pogonska sila uzrokuje ubrzanje letjelice te je za pretpostaviti da u određenom trenutku momenti uzrokovani mahanjem postanu izraženiji te dolazi do ponovnog propinjanja letjelice i ubrzo se letjelica počinje gibati unazad. Kako rezultati poslije tog trenutka nisu mjerodavni, simulacija je u tom trenutku prekinuta. Zanimljivo je primjetiti i oscilacije u visini tijekom leta. Također, zbog povećanja broja okretaja na jednom rotoru poremećena je ravnoteža između okretnih momenata te dolazi do zanošenja letjelice. Posljedično kutna brzina propinjanja i zanošenja dolazi i do valjanja letjelice. S obzirom na to da je kutna brzina propinjanja do trenutka kad momenti uzrokovani mahanjem postanu dominantniji znatno manja nego u prethodnom slučaju, za pretpostaviti je da se doprinos brzini protoka kroz rotor uslijed rotacije tijela može zanemariti. Prema tome, smatra se da je aerodinamički model rotora u ovoj simulaciji korektan.

### Horizontalni let sa zanemarenim momentima

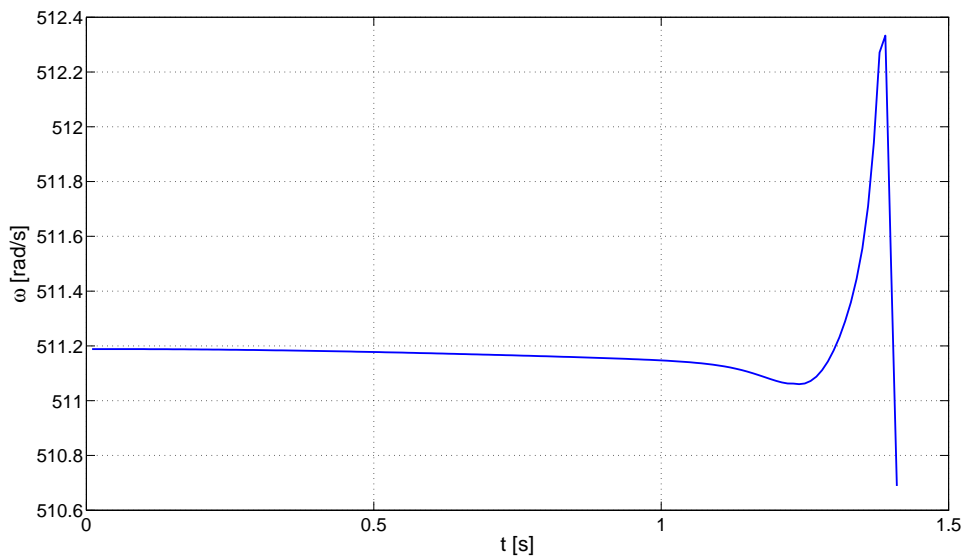
Provedena je simulacija horizontalnog leta sa zanemarenom silom otpora rotora i zanemarenim momentima uzrokovanim mahanjem. Prema očekivanju, rezultati pokazuju

da letjelica zadržava smjer gibanja prema naprijed i da nema promjene stava letjelice. Ovo potvrđuje da je mahanje glavni uzrok problema upravljanja u horizontalnom letu.

### 7.2.1. Horizontalni let bez pobude

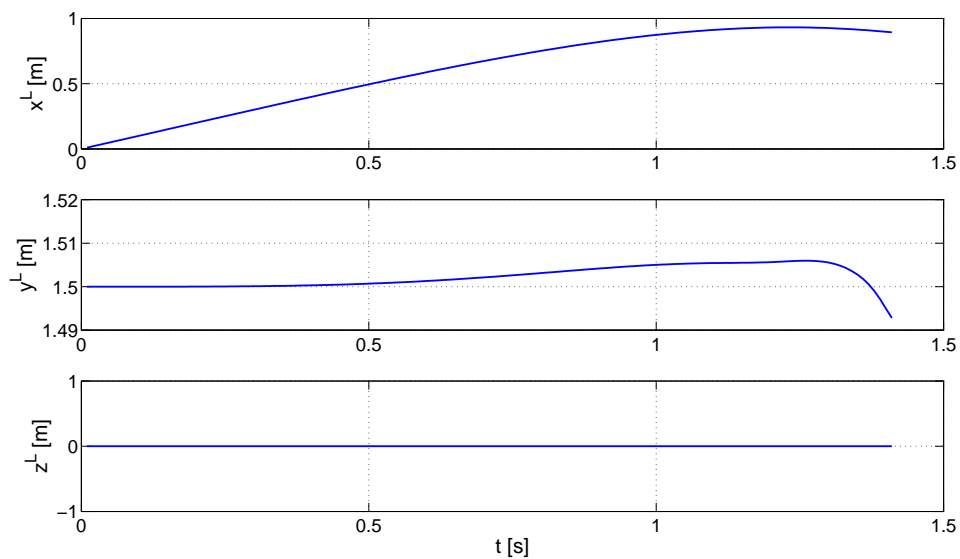


Slika 7.30: Pobuda - horizontalni let bez pobude

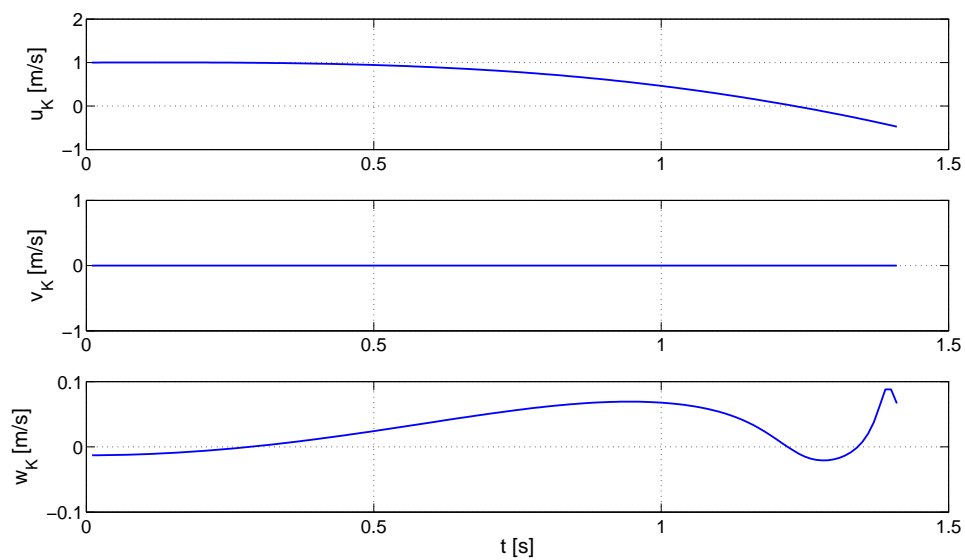


Slika 7.31: Kutna brzina sva četiri motora - horizontalni let bez pobude

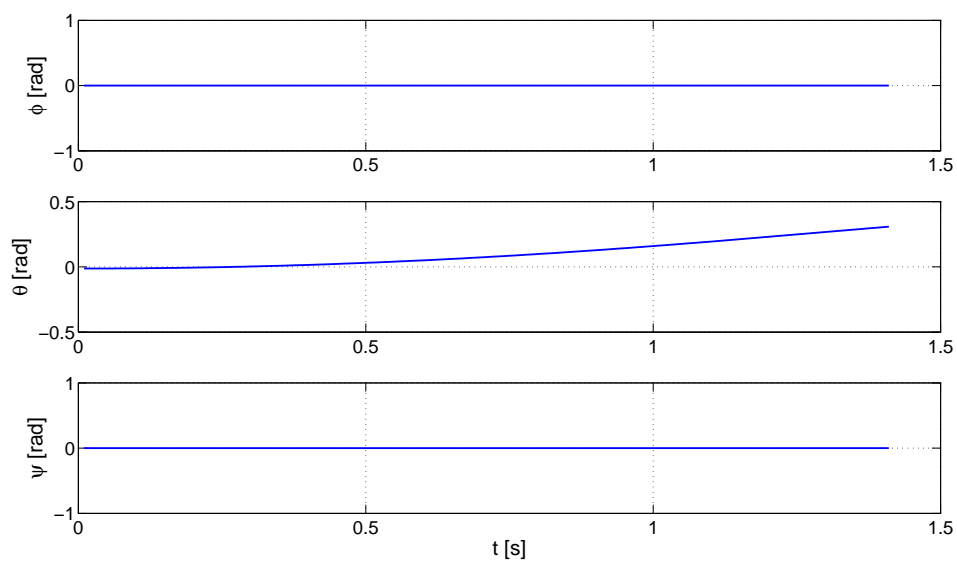




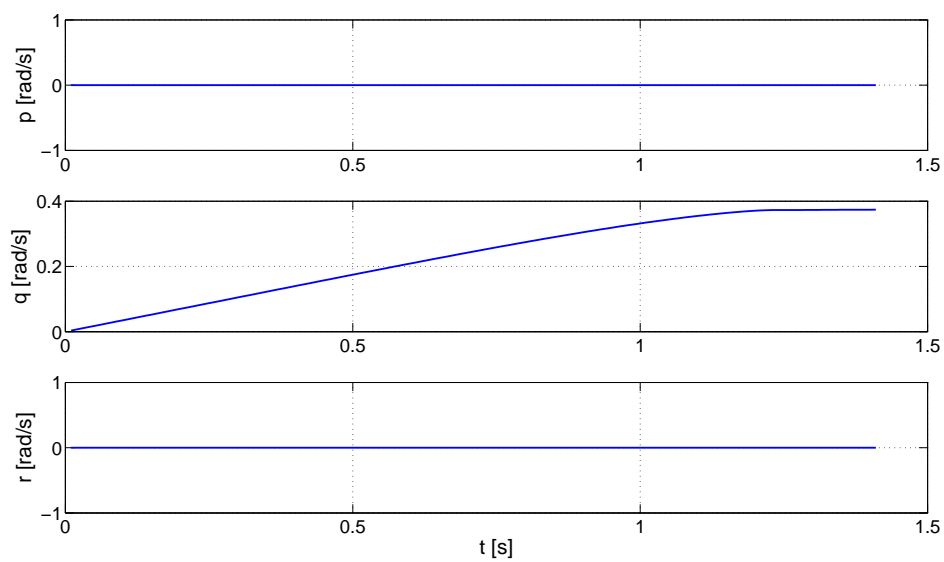
Slika 7.32: Položaj - horizontalni let bez pobude



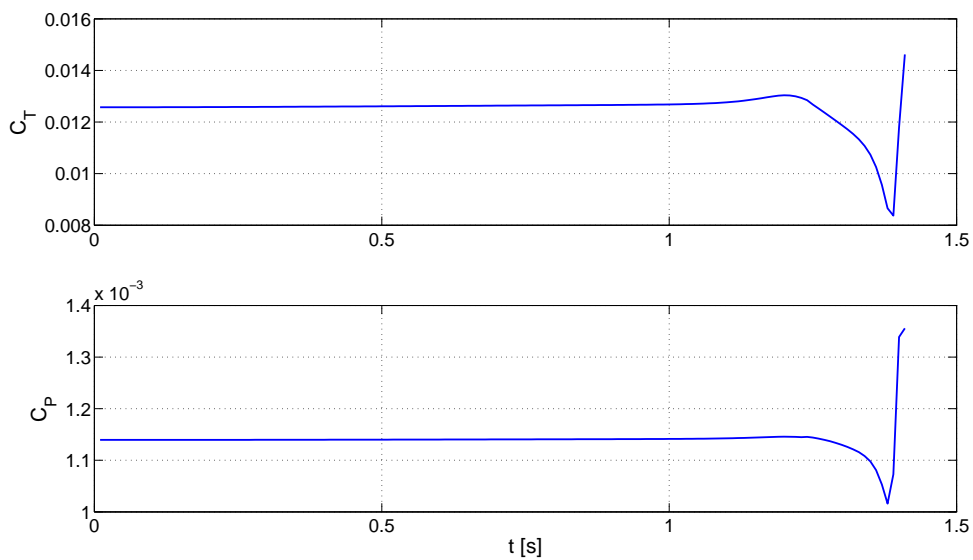
Slika 7.33: Brzine - horizontalni let bez pobude



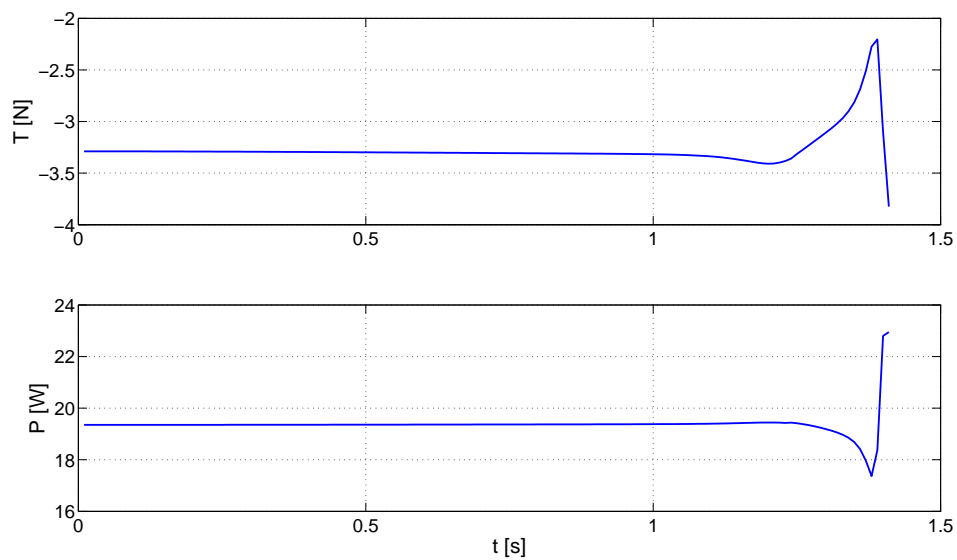
Slika 7.34: Stav - horizontalni let bez pobude



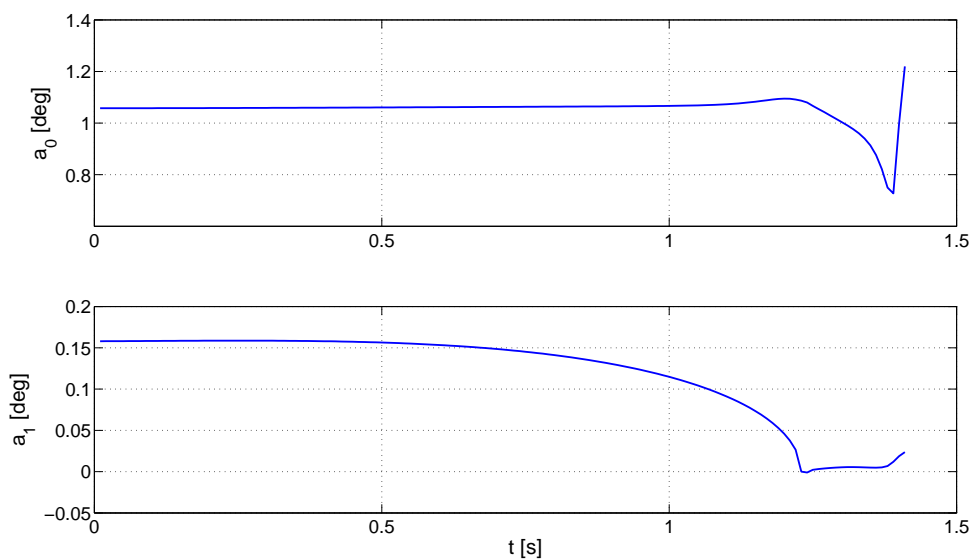
Slika 7.35: Kutne brzine - horizontalni let bez pobude



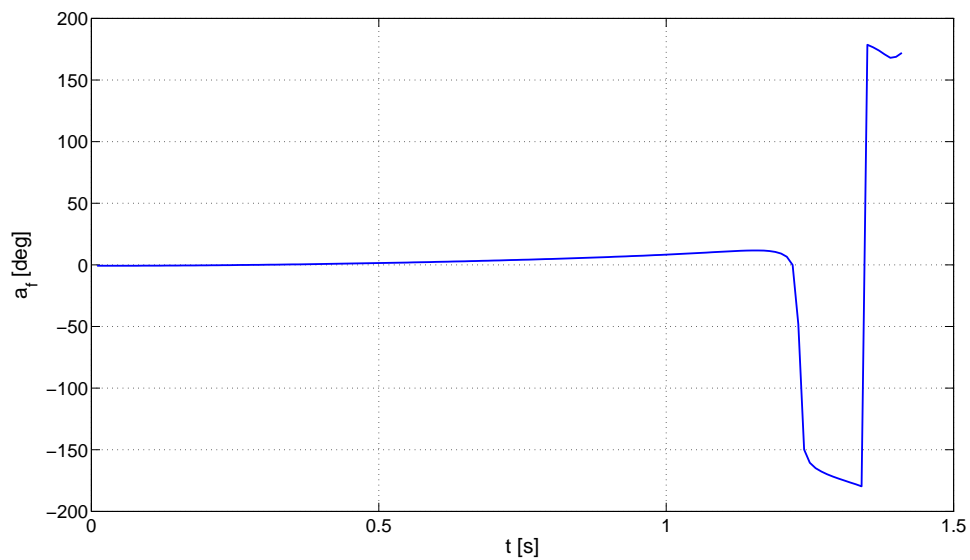
Slika 7.36: Koefficienti  $C_T$  i  $C_P$  (sva četiri rotora) - horizontalni let bez pobude



Slika 7.37: Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - horizontalni let bez pobude

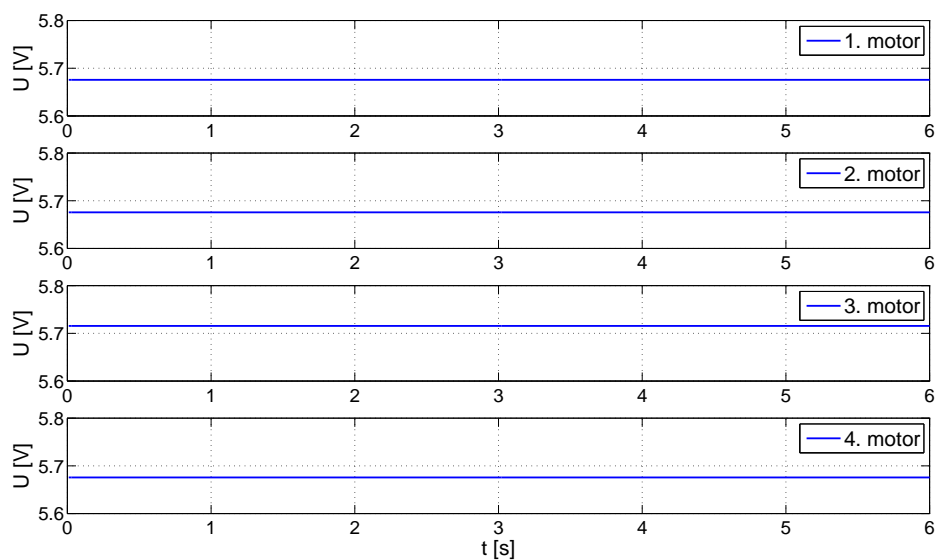


Slika 7.38: Kutovi mahanja (sva četiri rotora) - horizontalni let bez pobude

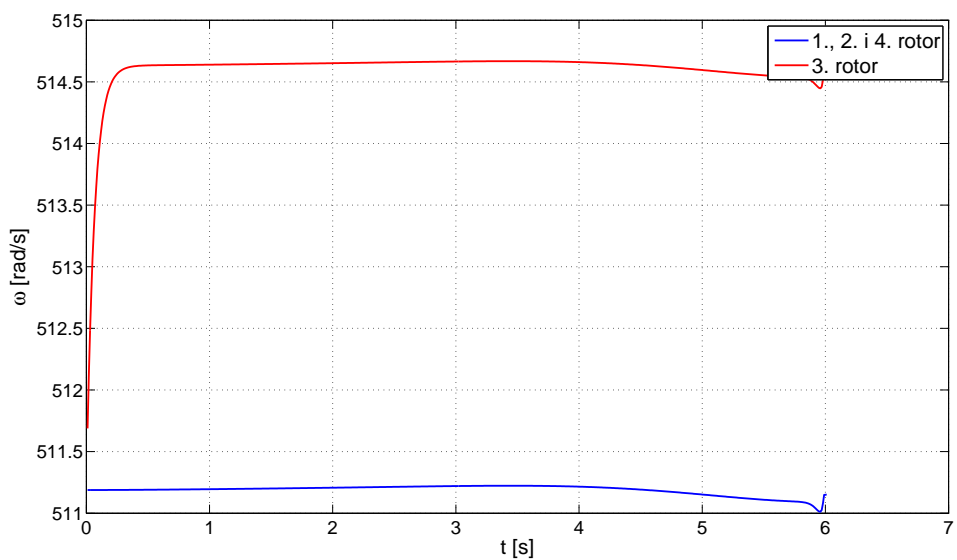


Slika 7.39: Napadni kut trupa letjelice - horizontalni let bez pobude

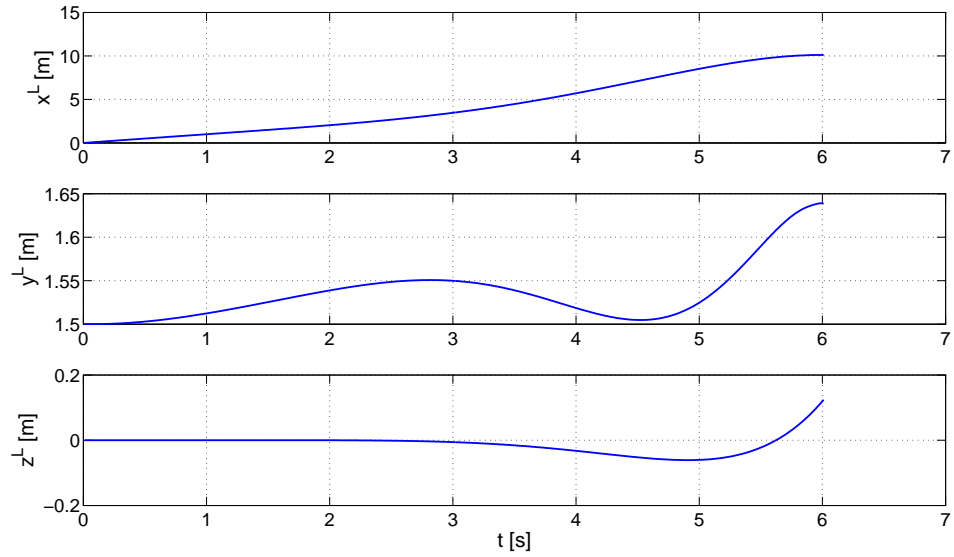
### 7.2.2. Horizontalni let s pobudom



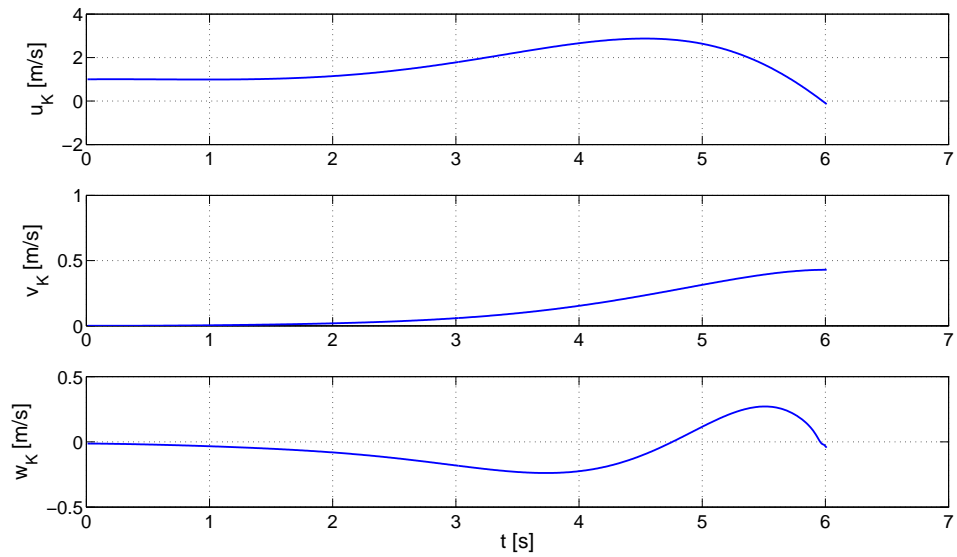
Slika 7.40: Pobuda - horizontalni let s pobudom



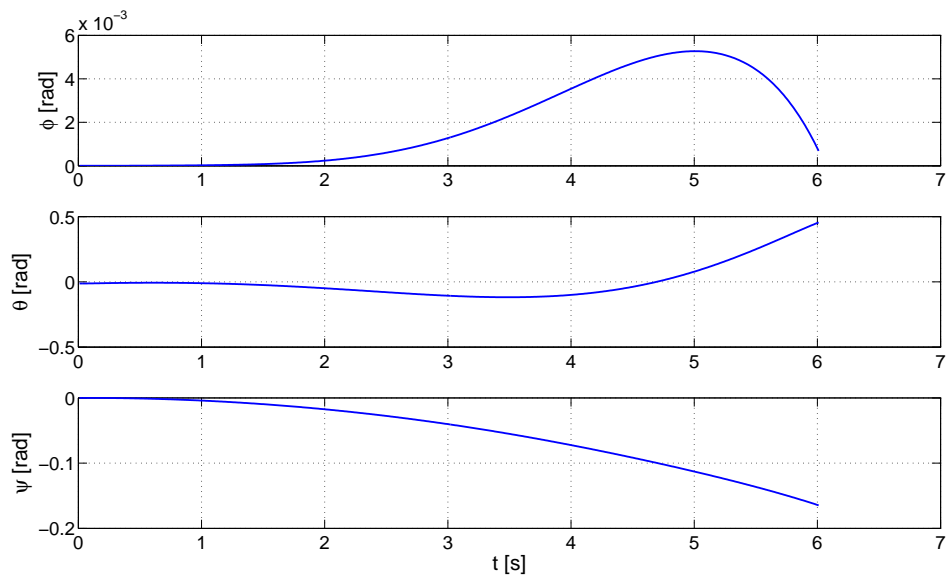
Slika 7.41: Kutna brzina motora - horizontalni let s pobudom



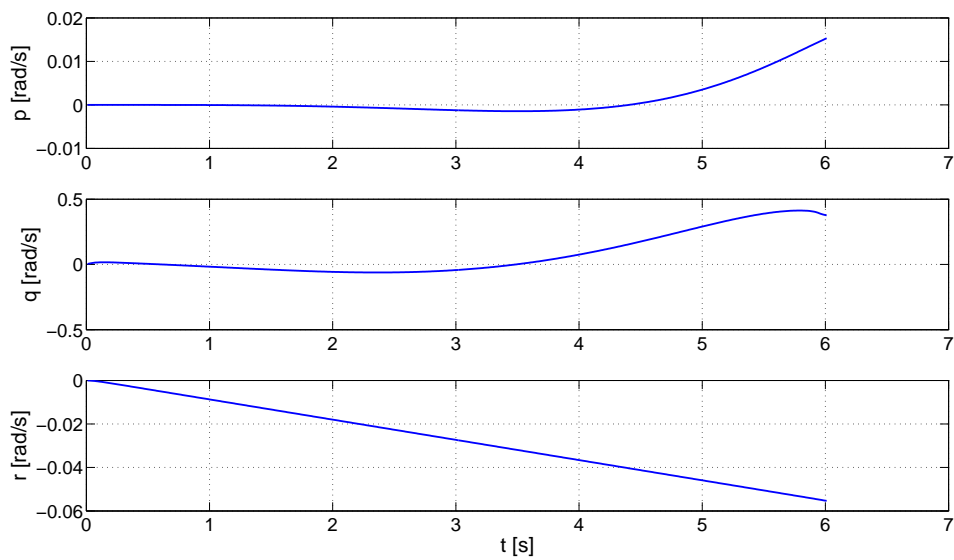
Slika 7.42: Položaj - horizontalni let s pobudom



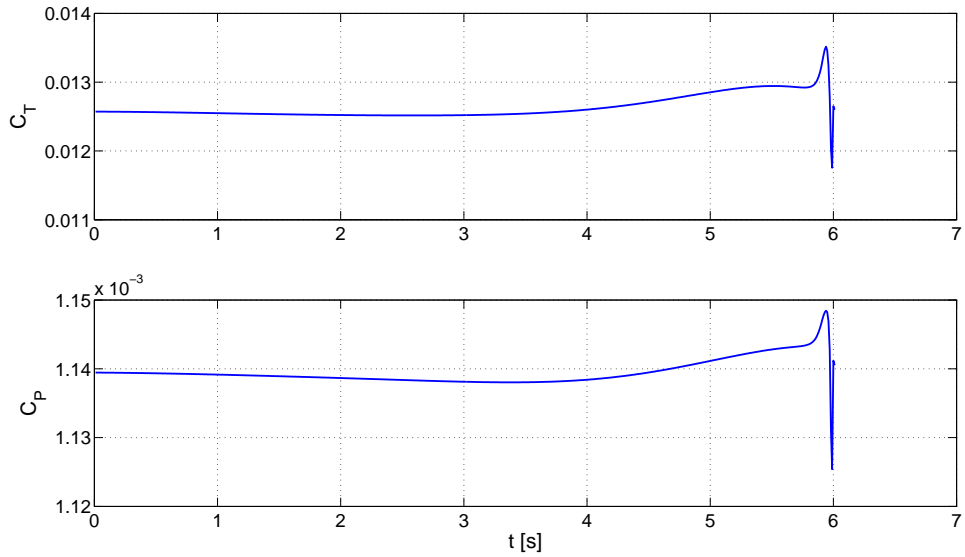
Slika 7.43: Brzine - horizontalni let s pobudom



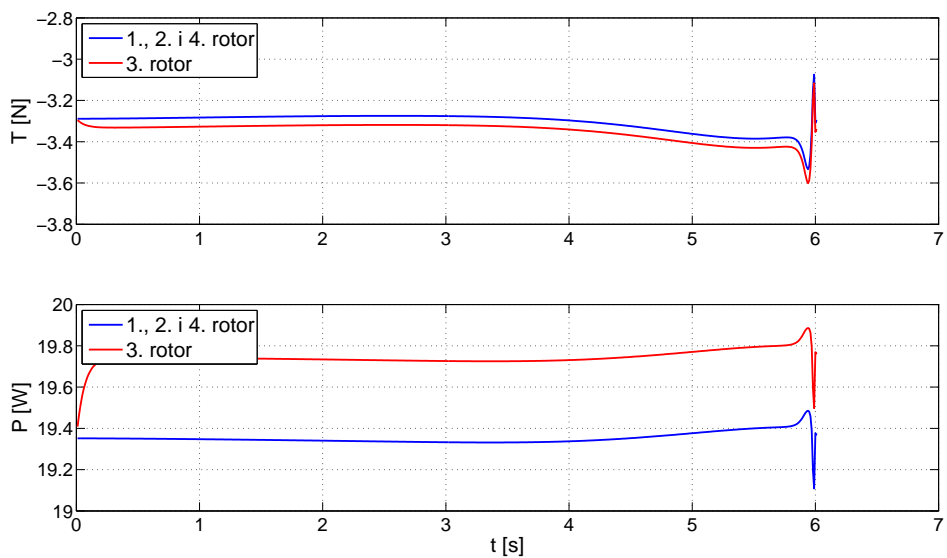
Slika 7.44: Stav - horizontalni let s pobudom



Slika 7.45: Kutne brzine - horizontalni let s pobudom

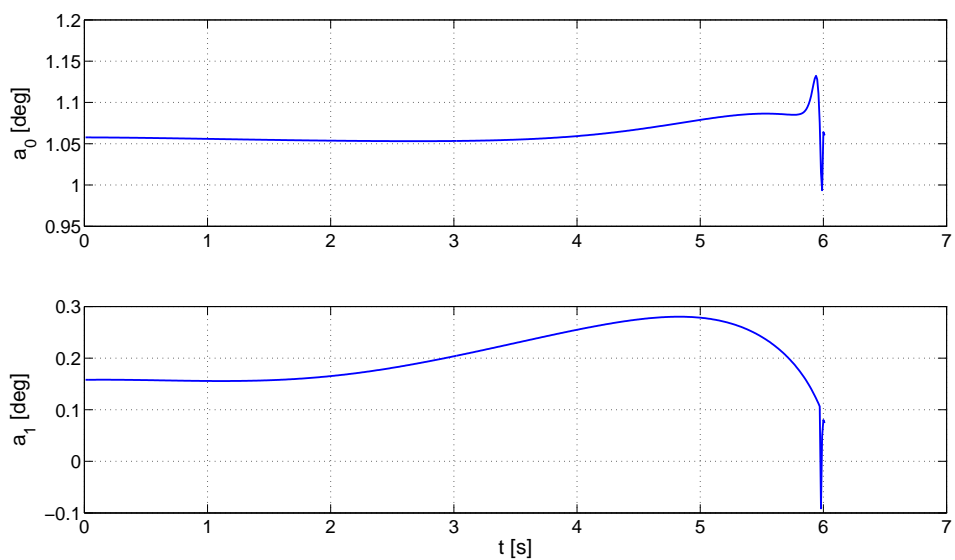


Slika 7.46: Koeficijenti  $C_T$  i  $C_P$  (sva četiri rotora) - horizontalni let s pobudom

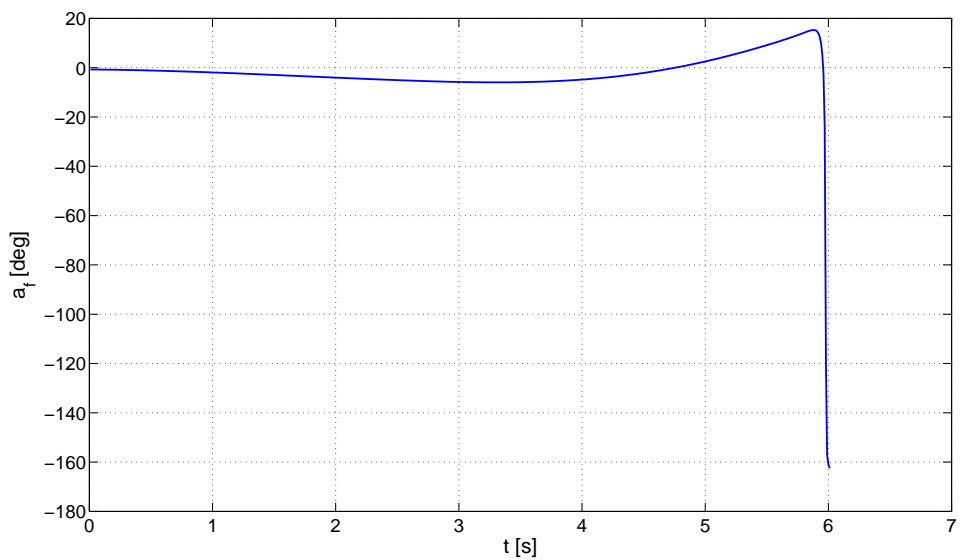


Slika 7.47: Pogonska sila i snaga - horizontalni let s pobudom



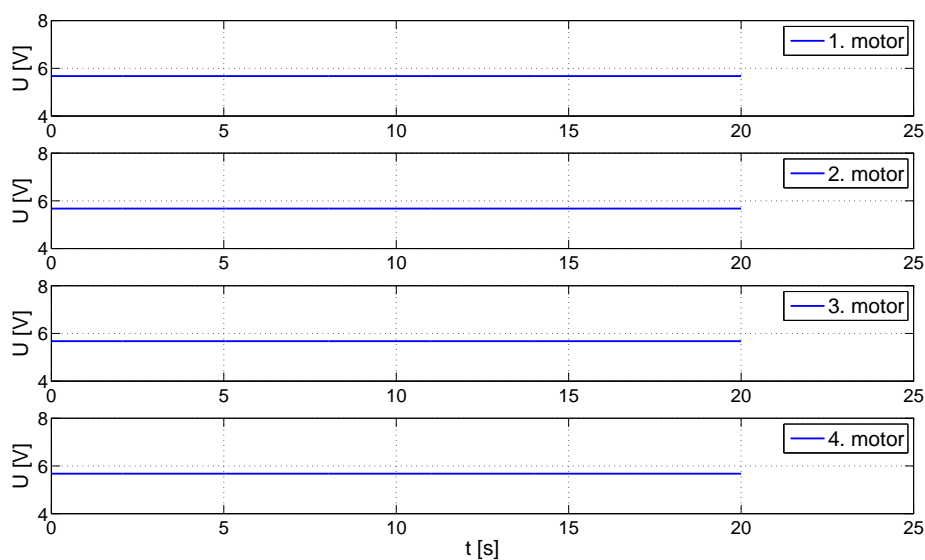


Slika 7.48: Kutovi mahanja (sva četiri rotora) - horizontalni let s pobudom

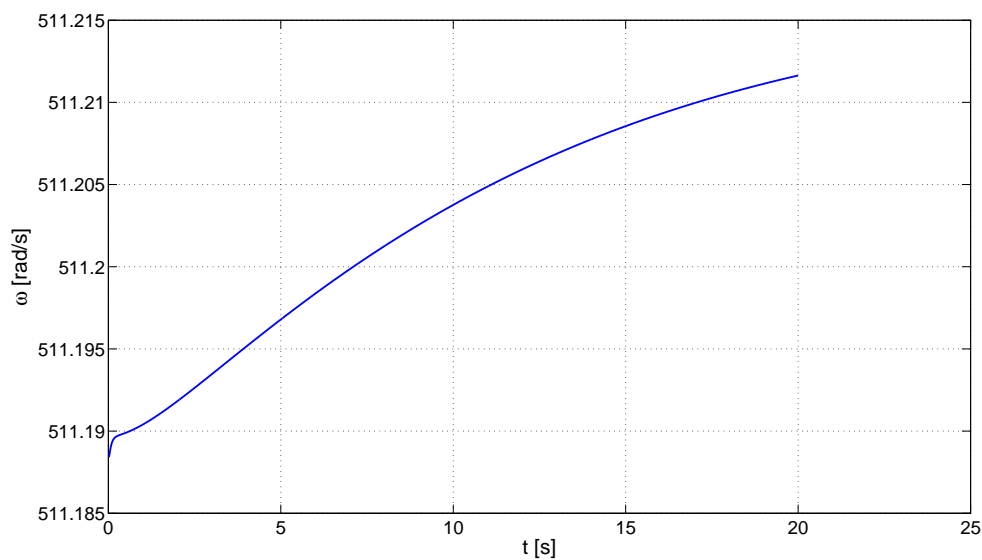


Slika 7.49: Napadni kut trupa letjelice - horizontalni let s pobudom

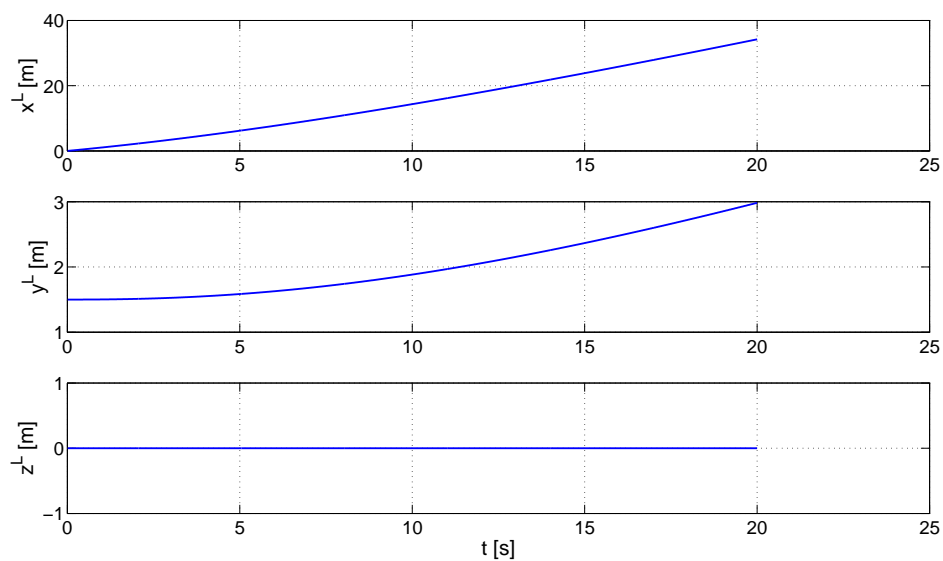
### 7.2.3. Pojednostavljeni horizontalni let



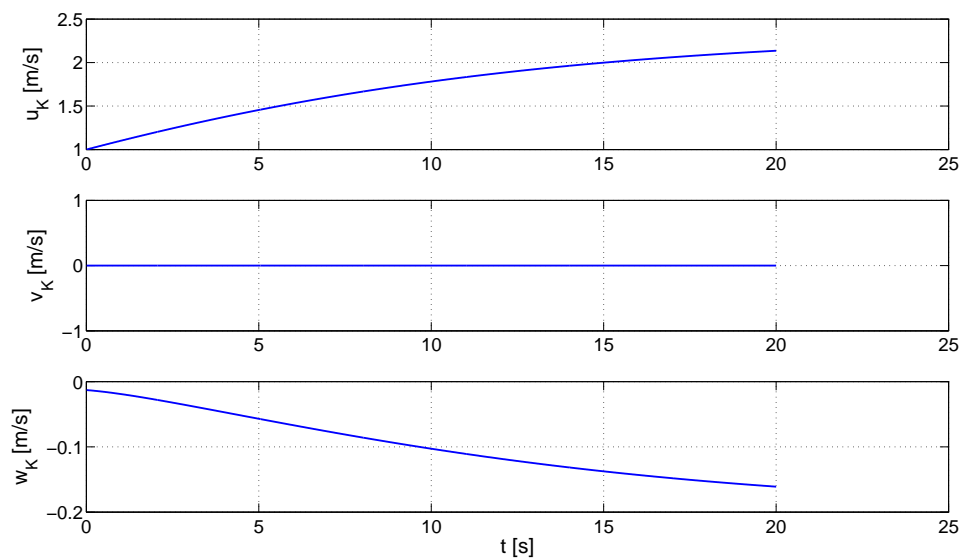
Slika 7.50: Pobuda - pojednostavljeni horizontalni let



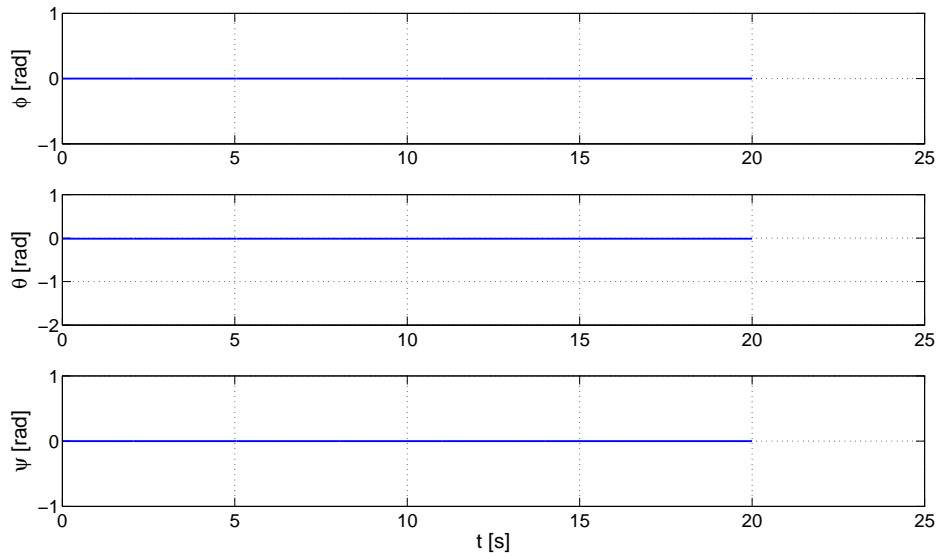
Slika 7.51: Kutna brzina sva četiri motora - pojednostavljeni horizontalni let



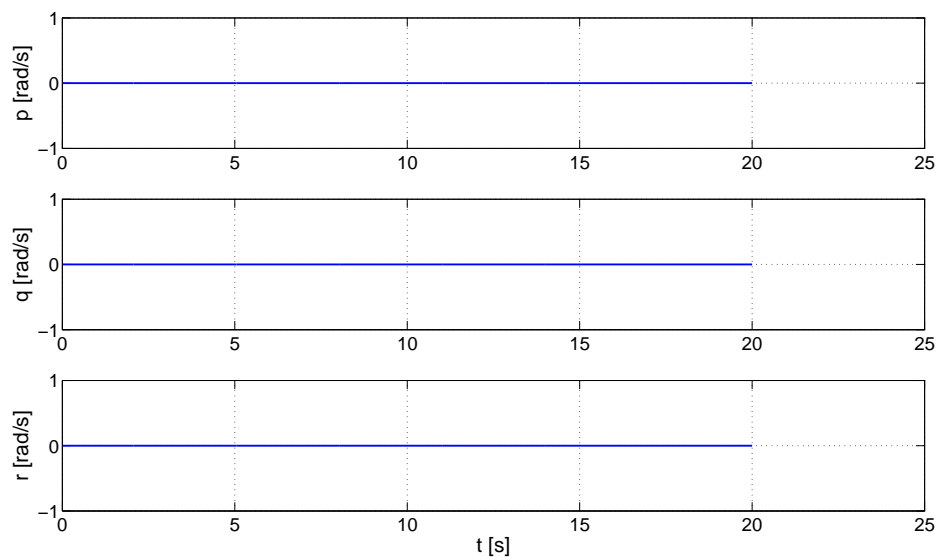
Slika 7.52: Položaj - pojednostavljeni horizontalni let



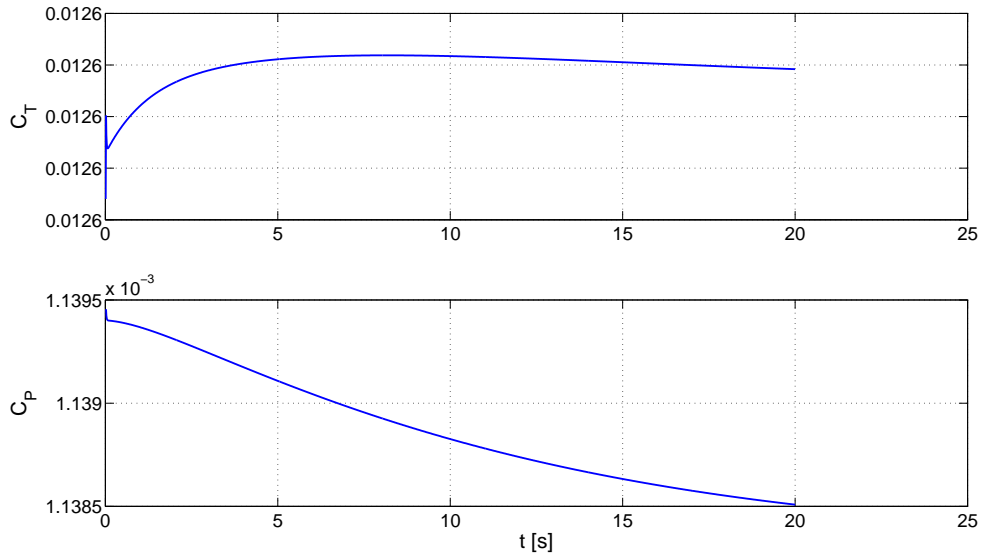
Slika 7.53: Brzine - pojednostavljeni horizontalni let



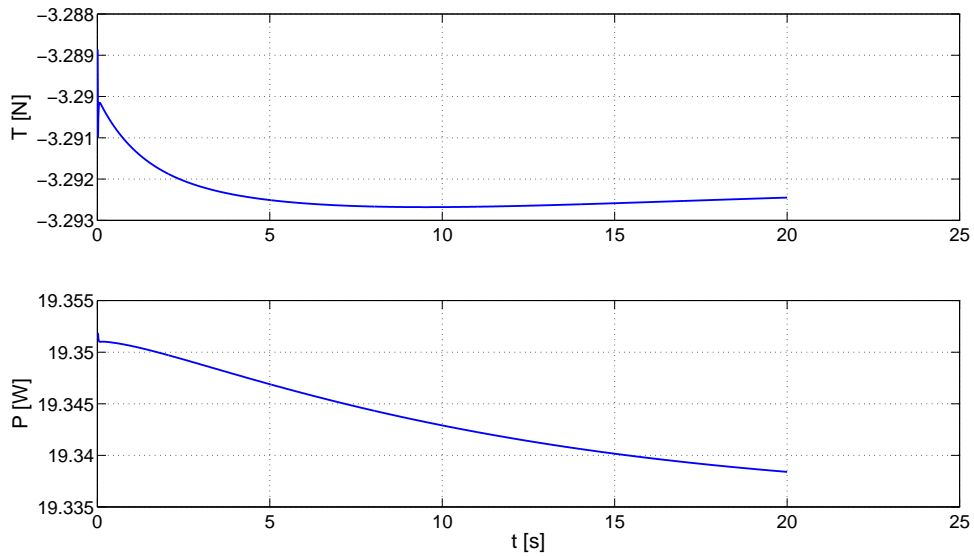
Slika 7.54: Stav - pojednostavljeni horizontalni let



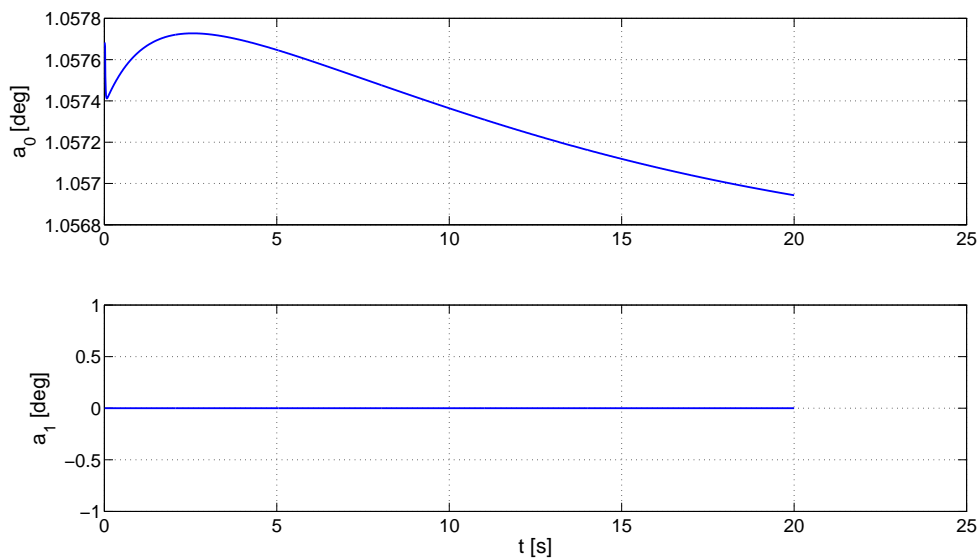
Slika 7.55: Kutne brzine - pojednostavljeni horizontalni let



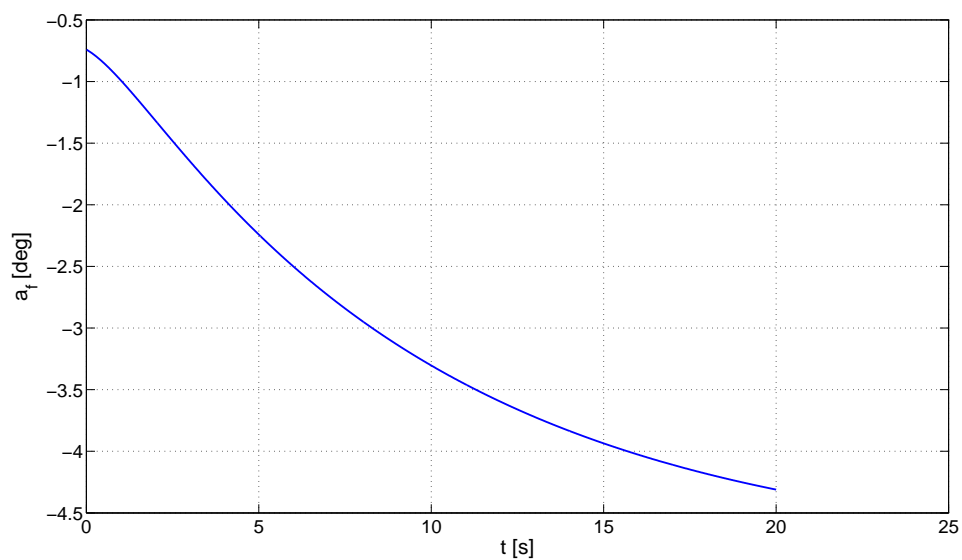
Slika 7.56: Koeficijenti  $C_T$  i  $C_P$  (sva četiri rotora) - pojednostavljeni horizontalni let



Slika 7.57: Pogonska sila i snaga (sva četiri rotora) - pojednostavljeni horizontalni let



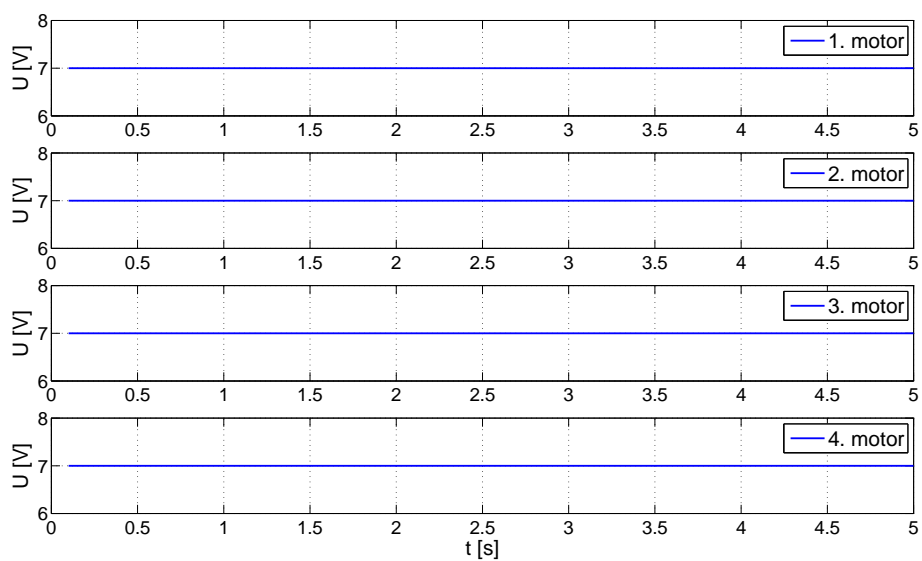
Slika 7.58: Kutovi mahanja (sva četiri rotora) - pojednostavljeni horizontalni let



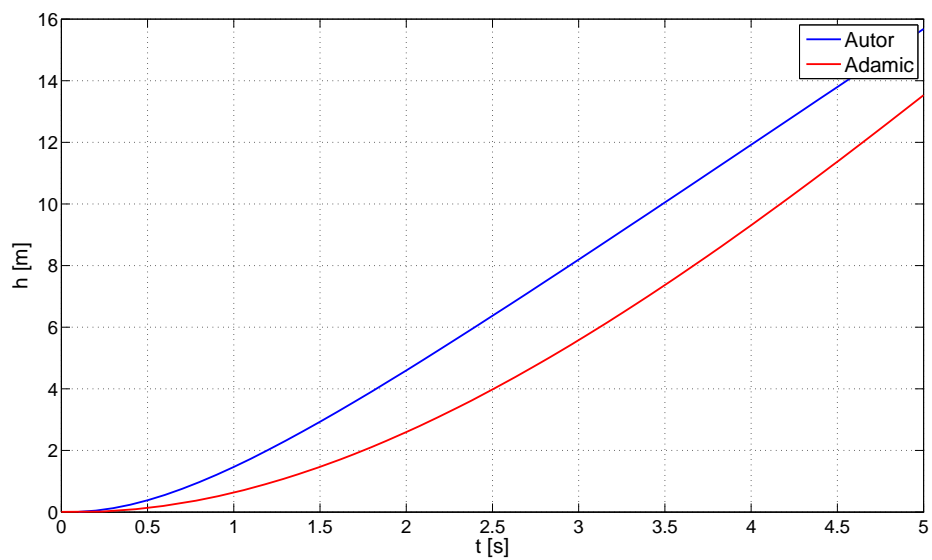
Slika 7.59: Napadni kut trupa letjelice - pojednostavljeni horizontalni let

#### **7.2.4. Usporedba s postojećim modelom**

Uspoređen je 6DOF model napravljen u ovom radu s postojećim modelom iz [1]. Provedene su simulacije za vertikalno penjanje i zanošenje letjelice. Dobiveni rezultati pokazuju brži odziv 6DOF modela. Iako su modeli uspoređenih četverorotornih helikoptera iste konfiguracije i jednakih inercijskih značajki, modelirani su na različite načine i s drugim pretpostavkama (npr. u [1] zanemaren je otpor trupa letjelice). Za pretpostaviti je da je različito modeliranje dinamike motora jedan od razloga razlike u brzini odziva dva modela.

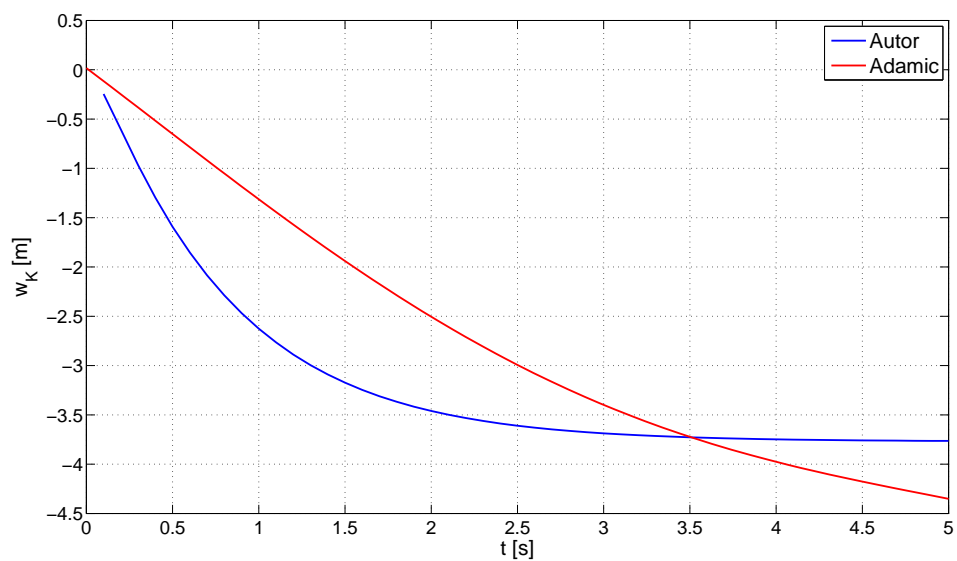


Slika 7.60: Pobuda za usporedbu modela - vertikalno penjanje

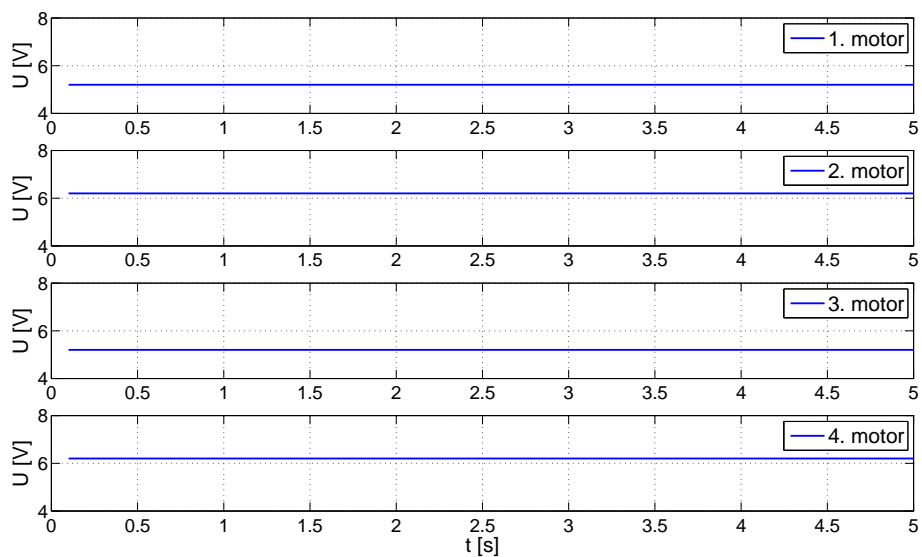


Slika 7.61: Usporedba odziva modela u vertikalnom penjanju - visina

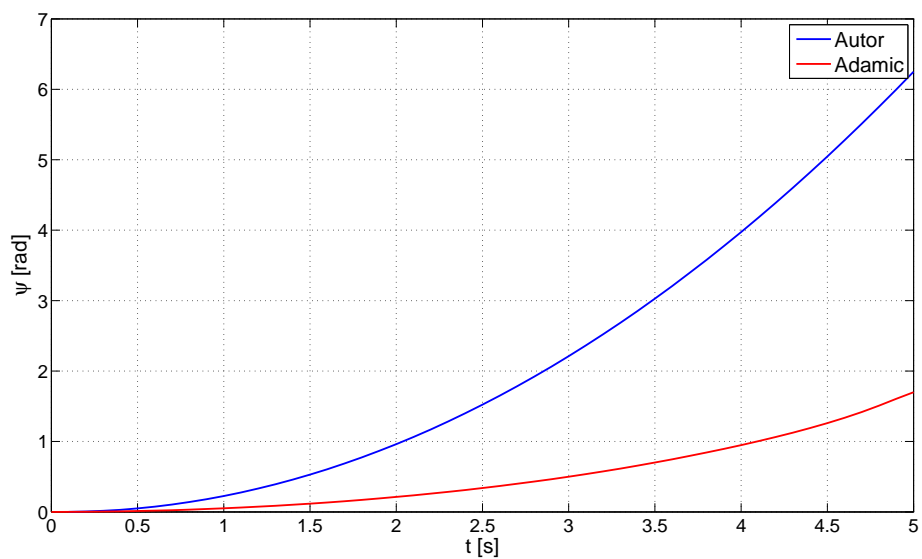




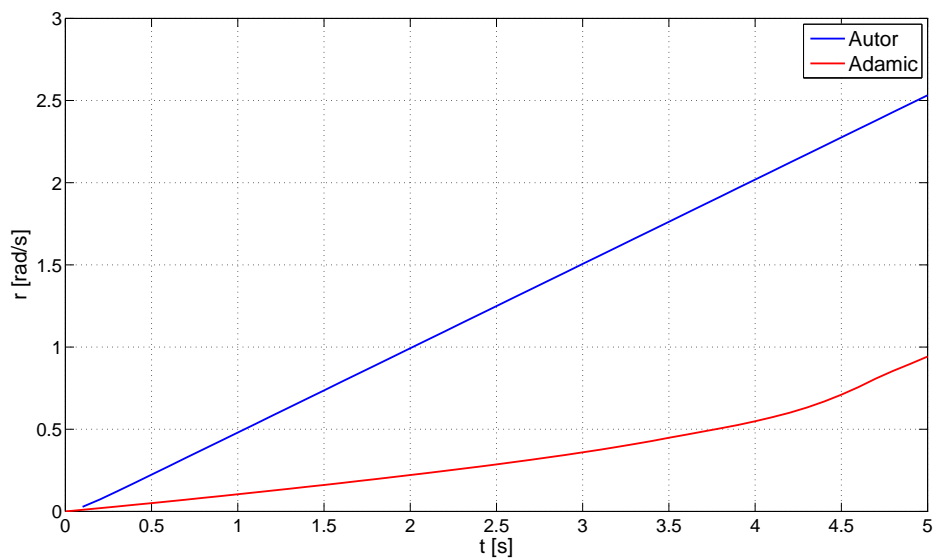
Slika 7.62: Usporedba odziva modela u vertikalnom penjanju - vertikalna brzina



Slika 7.63: Pobuda za usporedbu modela - zanošenje



Slika 7.64: Kut zanosa



Slika 7.65: Kutna brzina zanošenja

## 8 | Zaključak

U diplomskom radu napravljen je model gibanja četverrotornog helikoptera kao krutog tijela (6DOF model). Promatrana konfiguracija četverrotornog helikoptera, pogonski motor i propeler predloženi su u [1]. Dinamika istosmjernog elektromotora četverrotornog helikoptera modelirana je prema [5]. Razvijeni 6DOF model primjenjen je u analizi vertikalnog i horizontalnog leta. Numerička implementacija napravljena je u Matlab-u.

U okviru analize vertikalnog leta napravljeno je sljedeće:

- aerodinamički model rotora modeliran je metodom kombinirane teorije elementarnog kraka i teorije diska (BEMT) [16],
- modelirani su gubici na vrhu kraka prema Prandtlovoj metodi [7],
- napravljena je usporedba numeričkog rješenja BEMT modela za rotor u vertikalnom penjanju s eksperimentalnim rezultatima iz [26],
- uspoređeni su rezultati različitih modela karakteristika aeroprofila (prema modelu A [24] gradijent uzgona po napadnom kutu ovisi o Machovom broju, a koeficijent otpora profila ovisi o Machovom broju i napadnom kutu; prema modelu B [17] gradijent uzgona po napadnom kutu je konstantan, a koeficijent otpora izražen je kao polinom drugog stupnja),
- provedena je simulacija vertikalnog penjanja (step i impulsna pobuda),
- provedena je simulacija zanošenja (rotacija oko vertikalne osi letjelice),

- provedena je simulacija propinjanja (rotacija oko poprečne osi letjelice),
- uspoređeni su rezultati odziva simulacije na step pobudu pri različitim koracima integracije ( $h = 0.1$  i  $h = 0.01$ ),
- uspoređeni su rezultati simulacije vertikalnog penjanja i zanošenja s rezultatim postojećeg modela iz [1].

Pri tome su uvedene određene pretpostavke i ograničenja:

- pretpostavljena je konstantna gustoća zraka,
- zanemaren je utjecaj vjetra,
- zanemaren je utjecaj tla,
- zanemareni su žiroskopski efekti uslijed rotacije rotora,
- zbog ograničenja na teoriju diska u vertikalnom spuštanju pri kretanju iz lebdenja, a samim time i na BEMT, vertikalno spuštanje nije razmatrano.

U okviru analize horizontalnog leta napravljeno je sljedeće:

- aerodinamički model rotora modeliran je analitičkim rješenjem teorije elementarnog kraka (BET) prema [17],
- bezdimenzionalni koeficijent pogonske sile korigiran je koeficijentom gubitaka na vrhu kraka  $B$ ,
- modelirano je mahanje kraka prema [19],
- određena je linearna aproksimacija kuta uvijanja kraka odabranog propelera,
- provedena je simulacija horizontalnog leta bez pobude,
- provedena je simulacija horizontalnog leta s pobudom na jednom motoru s ciljem uravnoteženja letjelice,
- provedena je simulacija sa zanemarenim momentima uzrokovanim mahanjem i silom otpora rotora.

Uz pretpostavke iz modela vertikalnog leta uvedene su i neke nove:

- zanemareno je bočno mahanje kraka,
- zanemareno je uvijanje i zabacivanje kraka,
- zanemaren je utjecaj stlačivosti (pretpostavljen je konstantan gradijent uzgona po napadnom kutu i konstantan koeficijent otpora profila).

Nakon analize vertikalnog i horizontalnog leta primjećeno je sljedeće:

- simulacija vertikalnog penjanja daje očekivane rezultate,
- upotreba modela B karakteristika profila daje iznose snage manje za oko 4%,
- veći korak integracije, očekivano, daje bolje rezultate prijelaznog procesa,
- zbog nelinearne veze između napona, odnosno broja okretaja rotora i pogonske sile, u simulaciji zanošenja letjelice nije postignuta rotacija oko vertikalne osi letjelice na konstantnoj visini (letjelica bi se počela penjati ili padati),
- zbog razloga navedenih u poglavlju 7.1. zaključeno je da razvijeni aerodinamički model rotora za vertikalni let nije korektan za simulaciju propinjanja,
- rezultati simulacije horizontalnog leta bez pobude pokazuju očekivano ponašanje letjelice u horizontalnom letu (propinjanje vrhom letjelice prema gore) i ukazuju na problem upravljanja koji je identificirao [4],
- prema rezultatima simulacije horizontalnog leta s pobudom na jednom motoru za pretpostaviti je da bi se s odgovarajućom povratnom vezom ostvario napredujući let bez propinjanja,
- rezultati simulacije horizontalnog leta sa zanemarenim momentima uzrokovanim mahanjem i silom otpora rotora pokazuju da je mahanje glavni uzrok problema upravljanja u horizontalnom letu.

Ovim radom napravljen je prvi korak u rješavanju problematike četverorotornog helikoptera. Budući radovi na ovu temu trebali bi:

- pozabaviti se problemom kretanja iz lebdenja u vertikalno spuštanje i napredujući let,
- napraviti aerodinamički model koji će uključivati utjecaj tla i utjecaj vjetra,
- provjeriti izračun koeficijenta sile otpora rotora i njen utjecaj na dinamiku letjelice,
- provjeriti utjecaj bočnog mahanja i žiroskopskih efekata na dinamiku letjelice,
- linearizirati 6DOF model i s obzirom na to da provedene simulacije predstavljaju elementarnu analizu sustava u otvorenoj petlji trebali bi uvesti odgovarajuće povratne veze [29, 15],
- usporediti 6DOF model s eksperimentalnim rezultatima stvarnog četverorotornog helikoptera.

# A | Matrice transformacije

## A.1. Temeljne matrice transformacije

$$\mathbf{L}_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{L}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{L}_Z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Matrica transformacije $\mathbf{L}_{LO}$

$$\mathbf{L}_{LO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

**A.3. Matrica transformacije  $\mathbf{L}_{FO}$** 

$$\mathbf{L}_{FO} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

**A.4. Matrica transformacije  $\mathbf{L}_{RTPP}$** 

$$\mathbf{L}_{RTPP} = \begin{bmatrix} \cos a_1 & 0 & \sin a_1 \\ \sin a_1 \sin b_1 & \cos b_1 & -\cos a_1 \sin b_1 \\ -\sin a_1 \cos b_1 & \sin b_1 & \cos a_1 \cos b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$



# B Karakteristike aeroprofila NACA 0012

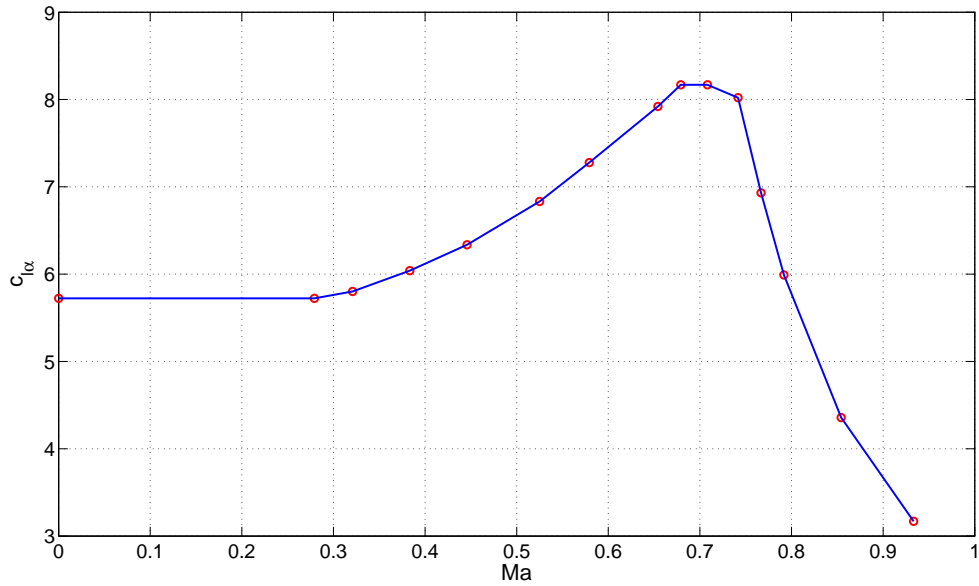
Za manje napadne kutove modelom je predviđen sljedeći način izračuna koeficijenata uzgona i otpora profila NACA 0012 prema [16, 7]. S porastom Machovog broja mijenja se koeficijent nagiba linearne promjene uzgona s napadnim kutom  $c_{l\alpha}$  prema [17], ali i kut pojave sloma uzgona  $\alpha_s$  postaje sve manji. Time se područje linearne promjene uzgona znatno smanjuje. Koeficijent otpora definiran je otporom pri nultom napadnom kutu za dani Machov broj i promjenom po napadnom kutu do pojave divergencije otpora 3.6. Vrijednost kuta  $\alpha_0$  za sve simetrične aeroprofile jednaka je  $0^\circ$ , dok koeficijenti  $A$ ,  $D$  i  $E$  za profil NACA 0012 imaju sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned}A &= 1.1 \\D &= 1.135 \\E &= -1.05\end{aligned}$$

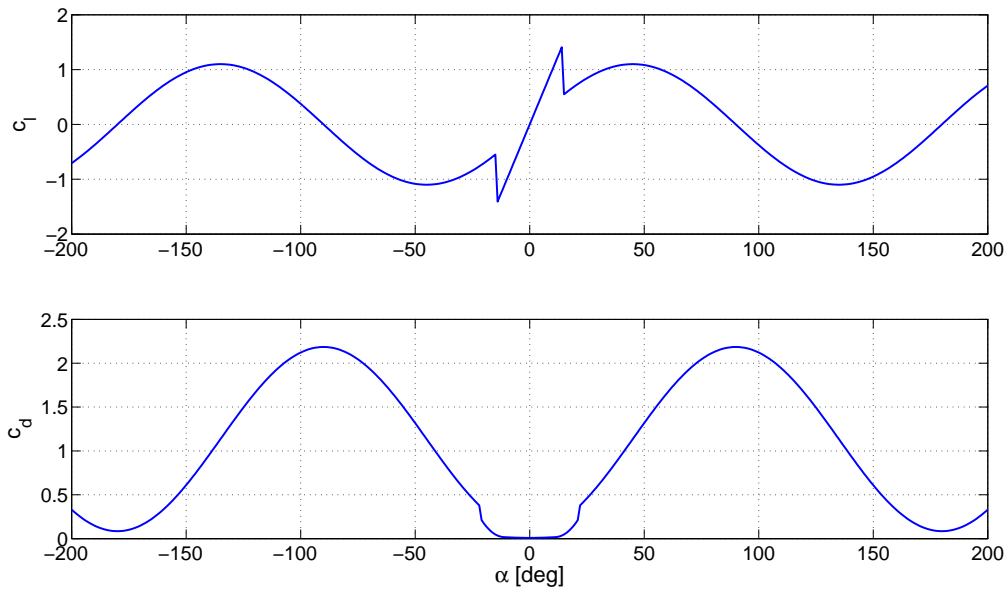
Promjena kuta nagiba linearne ovisnosti uzgona o napadnom kutu s Machovim brojem izvedena je linearnom interpolacijom vrijednosti očitanih s dijagrama prema [17]. U dijagramu na slici B.1 očitane vrijednosti prikazane su kružićima, a interpolacija je dana punom linijom [24].

Tablica B.1: Promjena aerodinamičkih koeficijenata profila NACA 0012 s Machovim brojem

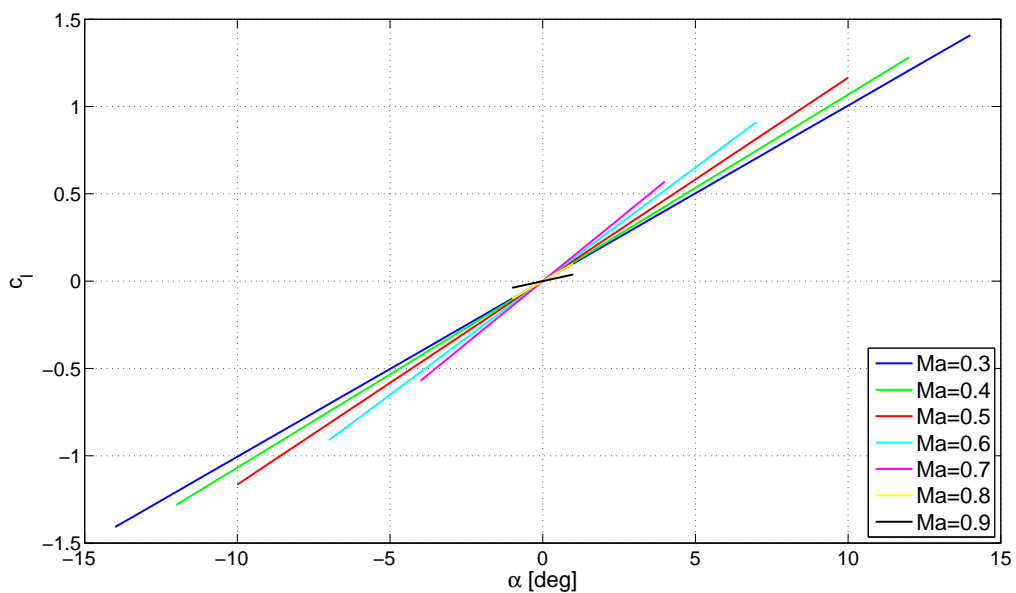
$Ma$	$c_{l\alpha}$	$\alpha_s$ [deg]	$c_{d0}$	$\alpha_D$ [deg]	$K_D$	$K_{DD}$
0.3	5.7621	14.3	0.0088	11.5	0.0001	0.0019
0.35	5.9125	13.5	0.0088	9.75	0.0001	0.0019
0.4	6.1190	12.5	0.0088	8	0	0.0019
0.45	6.3629	11.2	0.0088	6.9	0	0.0019
0.5	6.6754	10	0.0088	5.8	0	0.0019
0.55	7.0372	8.7	0.0088	5.2	0	0.0027
0.6	7.4557	7.5	0.0088	4.7	0	0.0036
0.65	7.8848	5.8	0.0088	3.35	0	0.0036
0.7	8.1683	4.2	0.0088	3.35	0	0.0036
0.75	7.6582	2.8	0.009	3.35	0	0.0040
0.8	5.7731	1.3	0.0125	3.35	0.0063	0
0.85	4.4662	0	0.027	3.35	0.0100	0
0.9	3.6685	0	0.05	3.35	0.0150	0



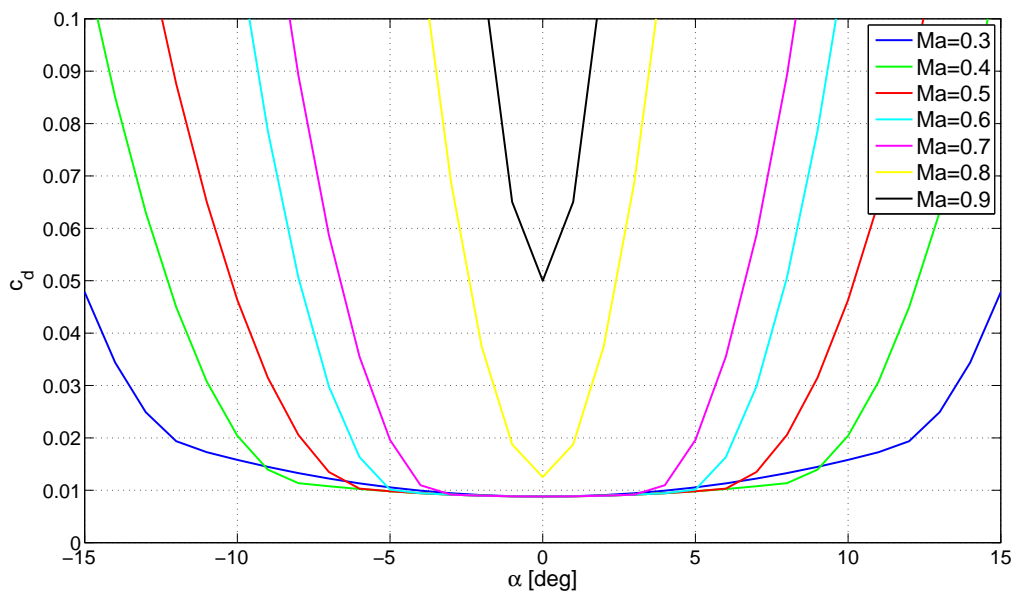
Slika B.1: Promjena kuta nagiba linearne ovisnosti uzgona o napadnom kutu profila NACA 0012 s Machovim brojem



Slika B.2: Promjena koeficijenta uzgona i otpora profila NACA 0012 za napadne kuteve od  $-180^\circ$  do  $-80^\circ$



Slika B.3: Promjena koeficijenta uzgona profila NACA 0012 po napadnom kutu prema podacima iz tablice B.1



Slika B.4: Promjena koeficijenta otpora profila NACA 0012 po napadnom kutu prema podacima iz tablice B.1

# Literatura

- [1] T. Adamić. Analiza dinamike leta četverrotornog helikoptera. Master's thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2011.
- [2] www.verasoul.com, 2012. <http://www.verasoul.com/2009/08/draganflier-x4-uav-un-gadget-para-que-saques-fotos-desde-el-aire.html>.
- [3] multivu.prnewswire.com, 2012. <http://multivu.prnewswire.com/mnr/parrot/44576/>.
- [4] Gabriel M. Hoffmann, Haomiao Huang, Steven L. Wasl, and Er Claire J. Tomlin. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. In *In Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2007.
- [5] M. Cutler, N. Ure, B. Michini, and J. P. How. Comparison of fixed and variable pitch actuators for agile quadrotors. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference (GNC)*, Portland, OR, August 2011.
- [6] D. Langkamp and W.J. Crowther. The role of collective pitch in multi rotor uav aerodynamics. In *European Rotorcraft Forum 2010*, 2010.
- [7] J. Gordon Leishman. *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [8] Vicente Martínez Martínez. Modelling of the flight dynamics of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Cranfield University, 2007.

- [9] S. G. Roche. Investigation of performance improvements for a quadrotor uav. Master's thesis, Cranfield University, 2007.
- [10] P. Pounds, R. Mahony, and P. Corke. Modelling and control of a large quadrotor robot. *Control Engineering Practice*, 18(7):691–699, February 2010.
- [11] Jorge Miguel Brito Domingues. Quadrotor prototype. Master's thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2009.
- [12] Gabe Hoffmann, Dev Gorur Rajnarayan, Steven L. Wasl, Phd C, Claire J. Tomlin, and Assistant Professor. The stanford testbed of autonomous rotorcraft for multi agent control (starmac). In *In Proceedings of the 23rd Digital Avionics Systems Conference*, 2004.
- [13] Syed Ali Raza and Wail Gueaieb. *Motion Control*, chapter Intelligent Flight Control of an Autonomous Quadrotor. InTech, 2010.
- [14] Cornelis Ambrosio Kok. Zam quadrotor vtol uav: Prototype development and control translator dynamic modelling. Master's thesis, Auckland University of Technology, 2010.
- [15] C. Balas. Modelling and linear control of a quadrotor. Master's thesis, Cranfield University, 2007.
- [16] M. Vrdoljak. *Osnove aerodinamike i mehanike leta helikoptera*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2007.
- [17] Raymond W. Prouty. *Helicopter performance, stability and control*. Kreiger Publishing Company Inc., Malabar, Florida, 1986.
- [18] Simon Newman. *The foundations of helicopter flight*. Wiley, 1994.
- [19] Gabriel M. Hoffmann. *AUTONOMY FOR SENSOR-RICH VEHICLES: INTERACTION BETWEEN SENSING AND CONTROL ACTIONS*. PhD thesis, Stanford University, 2008.
- [20] S. Janković. *Mehanika leta zrakoplova*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2001.

- [21] S. Janković, T. Kostić, and M. Vrdoljak. *Stabilnost i upravljivost zrakoplova - dio predavanja*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2010.
- [22] www.aeroshack.co.uk, 2012. <http://www.aeroshack.co.uk/shop/gbu0-prodshow/HKRA2022L.html>.
- [23] Milan Vrdoljak. *Konstrukcija i održavanje propelera*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2006.
- [24] J Župan. Primjena teorije elementarnog kraka za analizu rotora helikoptera u vertikalnom i horizontalnom letu. Master's thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2009.
- [25] Haomiao Huang, Gabriel M. Hoffmann, Steven L. Waslander, and Claire J. Tomlin. Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering. In *Proceedings of the 2009 IEEE international conference on Robotics and Automation, ICRA'09*, pages 2408–2413, Piscataway, NJ, USA, 2009. IEEE Press.
- [26] F.F. Felker and R.M. McKillip. Comparisons of predicted and measured rotor performance in vertical climb and descent. In *American Helicopter Society 50th Annual Forum, Washington, D.C., May 1994.*, 1994.
- [27] A. R. S. Bramwell. *Bramwell's Helicopter dynamics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2nd edition, 2001.
- [28] Mark Drela. First-order dc electric motor model, February 2007. MIT Aero & Astro.
- [29] Samir Bouabdallah and André Noth. R.: Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *In: IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2451–2456, 2004.