

# Upravljanje mehaničkim sustavima s kompenzacijom trenja

---

Mihalić, Tomislav

Master's thesis / Diplomski rad

2011

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:366549>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mihalić Tomislav

Zagreb, 2011.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:  
doc. dr. sc. Josip Kasać

Student:  
Mihalić Tomislav

Zagreb, 2011.

*Izjavljujem da sam samostalno izradio ovaj rad, koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.*

*Zahvaljujem se mentoru, doc. dr. sc. Josipu Kasaću na korisnim savjetima, primjedbama i pomoći prilikom pisanja ovog rada.*

*Zahvaljujem svima koji su na bilo koji način pomogli pri izradi ovoga rada.*

*Naposljetku, najviše zahvaljujem svojoj obitelji na velikoj podršci i njihovom razumijevanju.*

Tomislav Mihalić

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>I</b>
<b>Popis slika</b>	<b>III</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>VI</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>VII</b>
<b>Sažetak rada</b>	<b>IX</b>
<b>1 UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2 DINAMIČKI MODELI MEHANIČKIH SUSTAVA</b>	
<b>S UTJECAJEM TRENJA</b>	<b>3</b>
2.1 Model mehaničkog sustava . . . . .	3
2.2 Modeli trenja . . . . .	4
2.2.1 Sila trenja . . . . .	4
2.2.2 Statički modeli trenja . . . . .	9
2.2.3 Dinamički modeli . . . . .	13
<b>3 SIMULACIJSKI MODELI REGULACIJSKOG SUSTAVA</b>	<b>19</b>
3.1 Simulacijski modeli mehaničkog sustava . . . . .	20
3.2 Simulacijski modeli regulatora . . . . .	23
3.2.1 Simulacijski model PD i PID regulatora . . . . .	23
3.2.2 Simulacijski model regulatora s kliznim režimom . . . . .	25
3.2.3 Simulacijski model PID regulatora s kliznim režimom . . . . .	27
3.3 Simulacijski modeli trenja . . . . .	28
3.3.1 Stribeckov model trenja . . . . .	29
3.3.2 Dahlov model trenja . . . . .	29
3.3.3 Lugre model trenja . . . . .	30
<b>4 UTJECAJ TRENJA NA PERFORMANSE REGULACIJE</b>	<b>31</b>
<b>5 REGULACIJA S KOMPENZACIJOM TRENJA</b>	<b>43</b>
5.1 Regulacija s kompenzacijom trenja bez observera trenja . . . . .	43
5.1.1 PD regulator . . . . .	45
5.1.2 PID regulator . . . . .	49
5.1.3 Regulator s kliznim režimom . . . . .	55
5.1.4 PID regulatorom s kliznim režimom . . . . .	58

---

5.2 Regulacija s kompenzacijom trenja s observerom trenja . . . . .	61
<b>6 ZAKLJUČAK</b>	<b>65</b>
<b>Literatura</b>	<b>67</b>

## Popis slika

Slika 1.1:	"Stick-slip" efekt . . . . .	1
Slika 2.1:	Mikrorazina dodirnih površina tijela . . . . .	5
Slika 2.2:	Statičko trenje . . . . .	5
Slika 2.3:	Modeli asperitnih veza pomoću opruge . . . . .	6
Slika 2.4:	Stanja trenja ovisno o brzini . . . . .	6
Slika 2.5:	Trenje klizanja . . . . .	7
Slika 2.6:	Trenje kotrljanja . . . . .	8
Slika 2.7:	Funkcija sile trenja i pomaka . . . . .	8
Slika 2.8:	Ireverzibilni proces deformiranja asperitnih vlakana . . . . .	8
Slika 2.9:	Ovisnost prekidne sile o vremenu koje tijelo provede u mirovanju i brzini primjene vučne sile . . . . .	9
Slika 2.10:	Ovisnost sile trenja o relativnoj brzini . . . . .	9
Slika 2.11:	Coulombovo trenje . . . . .	10
Slika 2.12:	Coulombovo i viskozno trenje . . . . .	10
Slika 2.13:	Coulombovo, viskozno trenje i statičko trenje . . . . .	11
Slika 2.14:	Stribeckovo i viskozno trenje . . . . .	12
Slika 2.15:	Klasični modeli trenja . . . . .	12
Slika 2.16:	Karnoppov model trenja . . . . .	13
Slika 2.17:	Blok shema Karnoppov modela trenja . . . . .	13
Slika 2.18:	Ovisnost sile trenja o pomaku prema Dahlovu modelu . . . . .	15
Slika 2.19:	Blok shema Dahlova modela za $\alpha = 0$ . . . . .	15
Slika 2.20:	Unutarnja varijabla $z$ Lugre modela trenja . . . . .	16
Slika 2.21:	Statička karakteristika Lugre modela trenja . . . . .	17
Slika 2.22:	Blok shema Lugre modela trenja . . . . .	17
Slika 3.1:	Blok dijagram zatvorene regulacijske petlje . . . . .	19
Slika 3.2:	Blok dijagram zatvorene regulacijske petlje . . . . .	20
Slika 3.3:	Blok dijagram zatvorene regulacijske petlje s observerom trenja . . . . .	20
Slika 3.4:	Simulink model MDS-A sustava . . . . .	21
Slika 3.5:	Simulink model MDS sustava . . . . .	22
Slika 3.6:	Simulink model klasičnog PID regulatora . . . . .	24
Slika 3.7:	Simulink model modificiranog PID i PD regulatora . . . . .	24
Slika 3.8:	Simulink model regulatora s kliznim režimom . . . . .	25
Slika 3.9:	Oblik <i>sign</i> funkcije . . . . .	25
Slika 3.10:	Funkcija <i>tanh</i> - aproksimacija funkcije <i>sign</i> . . . . .	26
Slika 3.11:	Simulink model regulatora s kliznim režimom ( <i>tanh</i> ) . . . . .	26
Slika 3.12:	Simulink model PID regulatora s kliznim režimom . . . . .	27
Slika 3.13:	Simulink model Stribeckovog modela trenja . . . . .	29
Slika 3.14:	Simulink model Dahl - ovog modela trenja . . . . .	29
Slika 3.15:	Simulink model Lugre modela trenja . . . . .	30

Slika 4.1:	Odzivi pozicije mase MDS sustava s PID regulatorom . . . . .	32
Slika 4.2:	Upravljačka varijabla MDS sustava i PID regulatora . . . . .	33
Slika 4.3:	Pogreška regulacije PID regulatora u logaritamskom mjerilu . . . . .	33
Slika 4.4:	Sile trenja s PID regulatorom . . . . .	34
Slika 4.5:	Odzivi pozicije mase MDS sustava s PD regulatorom . . . . .	35
Slika 4.6:	Upravljačka varijabla MDS sustava i PD regulatora) . . . . .	36
Slika 4.7:	Pogreška regulacije PD regulatora u logaritamskom mjerilu . . . . .	36
Slika 4.8:	Sile trenja s PD regulatorom . . . . .	37
Slika 4.9:	Odzivi pozicije mase MDS-A s PID regulatorom . . . . .	38
Slika 4.10:	Upravljačka varijabla MDS-A i PID regulatora . . . . .	39
Slika 4.11:	Pogreška regulacije PID regulatora u logaritamskom mjerilu . . . . .	39
Slika 4.12:	Sile trenja s PID regulatorom . . . . .	40
Slika 4.13:	Odzivi pozicije mase MDS-A s PID-om bez i sa Stribecovim modelom trenja . . . . .	40
Slika 4.14:	Odzivi pozicije mase MDS-A s PD regulatorom . . . . .	41
Slika 4.15:	Upravljačka varijabla MDS-A i PD regulatora . . . . .	41
Slika 4.16:	Pogreška regulacije PD regulatora u logaritamskom mjerilu . . . . .	42
Slika 4.17:	Sile trenja s PD regulatorom . . . . .	42
Slika 5.1:	Odziv pozicije mase MDS-A i PD regulatorom . . . . .	45
Slika 5.2:	Stacionarna pogreška pozicije mase i granični ciklusi . . . . .	46
Slika 5.3:	Upravljačka varijabla MDS-A s PD regulatorom . . . . .	47
Slika 5.4:	Pogreška regulacije PD regulatora u logaritamskom mjerilu . . . . .	47
Slika 5.5:	Sile trenja s PD regulatorom . . . . .	48
Slika 5.6:	Odziv pozicije mase MDS-A s PID regulatorom . . . . .	49
Slika 5.7:	Upravljačka varijabla MDS-A s PID regulatorom bez prefiltera . . . . .	49
Slika 5.8:	Simulink model sustava s prefilterom pozicije . . . . .	50
Slika 5.9:	Odziv pozicije mase MDS-A s PID regulatorom i prefilterom . . . . .	51
Slika 5.10:	Upravljačka varijabla MDS-A s PID regulatorom i prefilterom . . . . .	52
Slika 5.11:	Pogreška regulacije PID regulatora u logaritamskom mjerilu . . . . .	53
Slika 5.12:	Sile trenja s PID regulatorom . . . . .	53
Slika 5.13:	Pojava graničnih ciklusa . . . . .	54
Slika 5.14:	Odziv pozicije mase MDS-A s regulatorom s kliznim režimom . . . . .	56
Slika 5.15:	Upravljačka varijabla MDS-A s regulatorom s kliznim režimom . . . . .	56
Slika 5.16:	Pogreška regulacije s regulatorom s kliznim režimom u logaritamskom mjerilu . . . . .	57
Slika 5.17:	Sile trenja s regulatorom s kliznim režimom . . . . .	57
Slika 5.18:	Odziv pozicije mase MDS-A s PID regulatorom s kliznim režimom . . . . .	59
Slika 5.19:	Odziv pozicije mase MDS sustava s PID regulatorom s kliznim režimom . . . . .	59
Slika 5.20:	Pogreška regulacije s PID regulatorom s kliznim režimom u logaritamskom mjerilu . . . . .	60
Slika 5.21:	Upravljačka varijabla MDS sustava s PID regulatorom s kliznim režimom . . . . .	60
Slika 5.22:	Simulink model observera trenja . . . . .	61
Slika 5.23:	Odziv pozicije mase MDS-A s PD regulatorom i observerom trenja . . . . .	62



---

Slika 5.24:	Upravljačka varijabla MDS-A s PD regulatorom i observerom trenja . . . . .	63
Slika 5.25:	Pogreška regulacije PD regulatora i observera trenja u logaritamskom mjerilu . . . . .	63
Slika 5.26:	Pogreška estimacije sile trenja $k = 0.0001$ . . . . .	64
Slika 5.27:	Pogreška estimacije sile trenja $k = 0$ . . . . .	64

## Popis tablica

Tablica 3.1:	Vrijednosti parametara MDS-A . . . . .	22
Tablica 3.2:	Vrijednosti parametara MDS sustava . . . . .	23
Tablica 3.3:	Vrijednosti parametara modela trenja . . . . .	28
Tablica 4.1:	Vrijednosti parametara PID regulatora . . . . .	31
Tablica 4.2:	Vrijednosti parametara PID regulatora . . . . .	35
Tablica 5.1:	Parametri PD regulatora . . . . .	46
Tablica 5.2:	Parametri PID regulatora . . . . .	51
Tablica 5.3:	Parametri regulatora s kliznim režimom . . . . .	55
Tablica 5.4:	Parametri PID regulatora s kliznim režimom . . . . .	58
Tablica 5.5:	Parametri PD regulatora s observerom . . . . .	61

## Popis oznaka

$F_{tr}$	sila trenja
$\mu_s$	koeficijent statičkog trenja
$F_N$	normalna sila
$F$	vanjska narinuta sila
$\Delta v$	relativna brzina gibanja tijela u dodiru
$\mu$	koeficijent dinamičkog trenja
$F_{pr}$	prekidna sila potrebna za svladavanje statičkog trenja
$m$	masa tereta
$S$	konstanta krutosti mehaničkog sustava
$D$	konstanta prigušenja mehaničkog sustava
$L_A$	induktiviteta armature elektromotora
$K_M$	koeficijent momenta elektromotora
$K_E$	koeficijent induciranog napona elektromotora
$R_A$	otpor armature
$F_C$	Coulombova sila trenja
$F_S$	sila statičkog trenja
$v$	brzina gibanja tijela
$F_v$	koeficijent viskoznog trenja
$\sigma_2$	koeficijent viskoznog trenja
$\delta_v$	empirijski koeficijent čiji iznos ovisi o području primjene modela
$v_s$	Stribeckova brzina
$\delta$	empirijski koeficijent čiji iznos ovisi o području primjene modela
$F(x)$	statička sila trenja (Armstrongov model)
$F_S(\gamma, t_d)$	funkcija koja opisuje ovisnost iznosa statičke sile trenja o vremenu provedenom u stanju mirovanja
$\sigma_0$	koeficijent čvrstoće asperitnih vlakna
$\sigma_1$	koeficijent prigušenja
$t_d$	vrijeme koje je tijelo provelo u mirovanju
$F_{S,a}$	iznos Stribeckovog trenja na kraju prethodnog perioda klizanja
$F_{S\infty}$	iznos Stribeckovog trenja nakon vrlo dugog perioda mirovanja tijela
$\tau_l$	vremenska konstanta trenja
$\gamma$	empirijski parametar modela
$\alpha$	koeficijent koji definira oblik krivulje

---

$z$	unutarnja varijabla modela trenja koja predstavlja prosječno istežanje asperitnih vlakana u dodiru dvaju tijela
$y_r$	referentna vrijednost pozicije
$y$	postignuta vrijednost pozicije
$e$	pogreška regulacije pozicije
$u$	upravljačka varijabla
$F_{tre}$	estimirana sila trenja
$K_p$	proporcionalno pojačanje regulatora
$K_d$	derivacijsko pojačanje regulatora
$K_i$	integracijsko pojačanje regulatora
$PD$	regulator s proporcionalno-derivacijskim djelovanjem
$PID$	regulator s proporcionalno-integracijskim-derivacijskim djelovanjem
$\alpha$	parametar regulatora s kliznim režimom i PID regulatora s kliznim režimom
$\rho$	parametar regulatora s kliznim režimom i PID regulatora s kliznim režimom
$MDS - A$	MDS sustav s dinamikom aktuatora
$MDS$	MDS sustav bez dinamike aktuatora

## SAŽETAK RADA

U ovom radu razmatran je utjecaj različitih modela trenja na performanse regulacije mehaničkih sustava i primijenjene su različite metode kompenzacije trenja. Razmatrani su Stribeckov, Dahlov i Lugre model trenja dok je kao objekt upravljanja razmatran alatni stroj s translacijskim stupnjem slobode gibanja. Razmatrane su dvije verzije objekta upravljanja: a) bez aktuatora; b) sa aktuatorom. Matematički modeli trenja i objekta upravljanja implementirani su u programskom paketu Matlab/Simulink. Provedena je simulacijska analiza utjecaja navedenih modela trenja na performanse regulacije mehaničkog sustava bez aktuatora i s aktuatorom u slučaju primjene: a) proporcionalno-derivacijskog (PD) regulatora; b) proporcionalno-integralnog-derivacijskog (PID) regulatora. Simulacijski rezultati jasno ilustriraju degradaciju upravljačkih performansi zbog tzv. "stick-slip" efekta koji je karakterističan za dinamičke modele trenja kao što su Dahlov i Lugre model. Nadalje su razmatrane različite upravljačke metode kompenzacije utjecaja trenja, poput: a) PD i PID regulatora s velikim vrijednostima pojačanja; b) regulatora s kliznim režimom (engl. sliding-mode); c) PID regulatora s kliznim režimom (engl. sliding PID); d) observera trenja. Na kraju, provedena je komparativna analiza prednosti i nedostataka pojedinih upravljačkih sustava.

### **Ključne riječi:**

dinamički modeli trenja, Lugre model trenja, Dahlov model trenja, mehanički sustavi, regulacija mehaničkih sustava, kompenzacija trenja

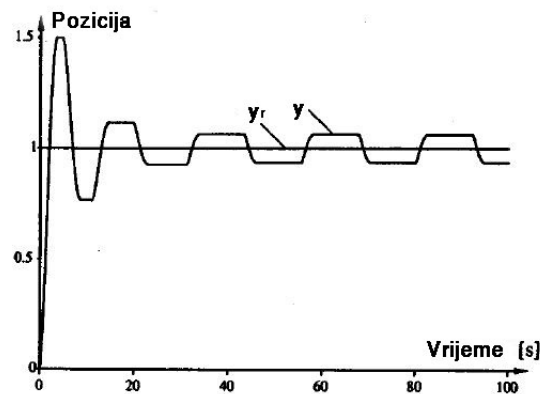
## 1 UVOD

Trenje se pojavljuje između dvaju tijela čije su površine u međusobnom kontaktu. Trenje je važno za regulacijske sustave npr. za projektiranje pogonskih sustava, vrlo precizne servo mehanizme, robote, alatne strojeve, pneumatske i hidrauličke sustave. Trenje je jako nelinearno i može rezultirati stacionarnu pogrešku i slabe performanse sustava [1].

U velikom broju industrijskih primjena postojanje trenja je štetno. Sa stajališta kvalitete upravljanja sustavima posebno su bitna dva negativna utjecaja trenja:

- "stick-slip" efekt
- granični ciklus (engl. "limit cycle")

"Stick-slip" efekt podrazumijeva oscilatorno gibanje oko referentne trajektorije koje nastaje kao posljedica naglog prelaska iz područja statičkog trenja (trenja mirovanja) u područje dinamičkog trenja (trenje klizanja) [3].



Slika 1.1: "Stick-slip" efekt

Iznos sile statičkog trenja je veći nego iznos sile kod dinamičkog trenja i ta promjena događa su vrlo kratkom vremenskom intervalu. Kada vanjska sila premaši iznos prekidne sile  $F_{pr}$  dolazi do kidanja asperitnih veza između dvaju tijela koja su u dodiru.

Pri regulaciji pozicije u alatnim strojevima i sličnim tehničkim sustavima zbog integralnog djelovanja regulatora javlja se nemogućnost postizanja stacionarne točnosti. Djelovanje sile trenja rezultira trajnim oscilacijama položaja mase oko njene referentne vrijednosti. Ovakva se pojava obično u teoriji nelinearnih sustava naziva graničnim ciklusom (engl. *limit cycle*) budući da fazna trajektorija sustava završava u zatvorenoj krivulji [3].

Danas se istražuju i koriste različiti načini regulacije kompenzacije prethodno navedenih utjecaja trenja u mehaničkim sustavima i pokušava se maksimalno smanjiti njihov utjecaj kako bi se

postigle što bolje performanse i veća točnost mehaničkih sustava.

U ovome radu su prikazana dva načina regulacije s kompenzacijom trenja.

U drugom poglavlju prikazani su matematički modeli mehaničkog sustava, koji je u ovom radu predstavljen MDS sustavom s dinamikom aktuatora (MDS-A). Isto tako prikazani su matematički modeli trenja, te radi boljeg razumijevanja, objašnjeno je i fizika sile trenja. Objašnjeni su dinamički i statički modeli trenja i njihove karakteristike.

U trećem poglavlju prikazani su blok dijagrami regulacijskih petlji regulacije s kompenzacijom trenja pomoću regulatora i regulacija s observerom trenja u regulatoru. Isto tako prikazani su simulacijski modeli mehaničkih sustava predstavljen MDS sustavom s dinamikom aktuatora (MDS-A) i MDS sustava bez dinamike aktuatora (MDS). Potom su prikazani simulacijski modeli četiri tipa regulatora: PD, PID, regulatora s kliznim režimom, PID s kliznim režimom.

U četvrtom poglavlju ilustrirani su utjecaji trenja na MDS i MDS-A sustave i njihov upravljački sustav.

U petom poglavlju opisana je i prikazana regulacija s kompenzacijom trenja bez observera trenja i regulacija s kompenzacijom trenja s observerom trenja. Kod regulacije s kompenzacijom trenja bez observera trenja temeljena je samo na regulatoru. Prikazana su četiri tipa regulatora: PD, PID, regulator s kliznim režimom, PID regulator s kliznim režimom. Pri regulaciji s observerom trenja prikazan je observer trenja temeljen na Lugre modelu trenja s PD regulatorom.

Na kraju međusobno su uspoređeni prikazani modeli trenja i dva tipa regulacije s kompenzacijom trenja.

## 2 DINAMIČKI MODELI MEHANIČKIH SUSTAVA S UTJECajem TRENJJA

Da bi se mogli simulirati mehanički sustav s trenjem potrebno je napraviti matematičke modele trenja i mehaničkog sustava (objekta upravljajna). Oni se dobijaju iz diferencijalnih jednadžbi stanja koje jednoznačno opisuju stanje dinamičkog sustava. Matematički modeli s varijablama stanja daju potpunu informaciju o dinamici promatranog sustava [6].

### 2.1 Model mehaničkog sustava

Model mehaničkog sustava predstavljen je MDS sustavom (engl. *mass damping spring*) i modelom elektromotora tako da predstavlja dinamički model objekta upravljanja trećeg reda.

$$\ddot{y} = \frac{K_M}{m} i_A - \frac{S}{m} y - \frac{D}{m} \dot{y} \quad (2.1)$$

$$\dot{i}_A = \frac{1}{L_A} u - \frac{K_E}{L_A} \dot{y} - \frac{R_A}{L_A} i_A \quad (2.2)$$

iz ovih diferencijalnih jednadžbi varijabli stanja može se dobiti prostor stanja

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{S}{m} x_1 - \frac{D}{m} x_2 + \frac{K_M}{m} x_3$$

$$x_3 = i_A$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_A} u - \frac{K_E}{L_A} x_2 - \frac{R_A}{L_A} x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{S}{m} & -\frac{D}{m} & \frac{K_M}{m} \\ 0 & -\frac{K_E}{L_A} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_A} \end{bmatrix} u \quad (2.3)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (2.4)$$



## 2.2 Modeli trenja

Svrha modela trenja je predviđanje realnog trenja i njegova kompenzacija temeljena na prikladnom modelu trenja za određeni sustav. Dobar model trenja treba obuhvatiti stabilnost sustava, predviđanje sile trenja, pronaći pojačanja regulatora i moći simulirati takav sustav. Da se to postigne potrebno je razmotriti fiziku pojave trenja.

### 2.2.1 Sila trenja

Prema standardu DIN 5281, trenje je otpor koji se javlja između površina u dodiru dvaju tijela i suprotstavlja se njihovom gibanju kod klizanja, kotrljanja i valjanja.

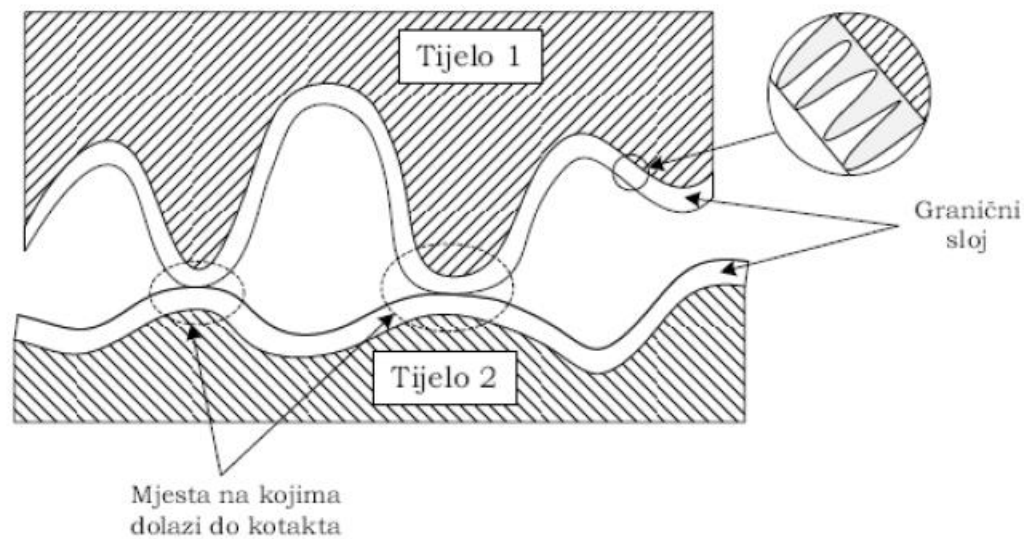
Trenje se pojavljuje kod svih mehaničkih sustava npr. prijenosu snage, hidrauličkim i pneumatskim sustavima, ležajevima, ventilima, kočnicama i drugo. Trenje u većini slučajeva ima negativno djelovanje. Smanjuje korisnost strojeva tako što za svladavanje sile trenja potrebna energija koja se onda pretvara u toplinu i ostaje neiskorištena.

Priroda nastanka trenja potječe iz hrapavosti dodirnih površina na mikroskopskoj razini, geometriji dodirnih površina, maziva koje se nalazi između njih te vrstom relativnog gibanja, karakteristikama materijala tijela i površine [4]. Površina tijela je neravna odnosno hrapava i prekrivena grančnim slojem asperitnih vlakana na mikroskopskoj razini. Kontakt dvaju tijela u dodiru ostvaruje se preko tih asperitnih vlakana koji tvore asperitne veze i okomita su na kontaktnu površinu, a ne cijelom dodirnom površinom tijela (Slika 2.1). Asperitne veze su veze između dva tijela za vrijeme mirovanja. Pucanjem tih veza dolazi do gibanja jednog tijela [2].

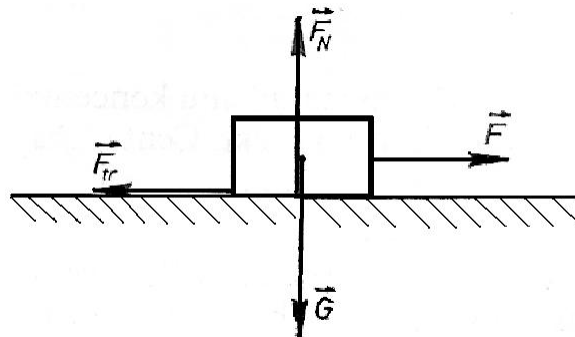
Pod djelovanjem vanjske vučne sile dolazi do smicanja asperitnih veza te rezultira njihovim elastičnim i plastičnim deformacijama odnosno njihovim izduljivanjem i pucanjem veza te prelazak iz stanja mirovanja u stanje gibanja dvaju tijela u dodiru (Slika 2.3). Tako postoje dva osnovna tipa trenja:

- **STATIČKO TRENJE** ili **TRENJE MIROVANJA**
- **DINAMIČKO (KINETIČKO) TRENJE** ili **TRENJE GIBANJA**

**STATIČKO TRENJE** - je sila trenja koja prisiljava tijelo da miruje i po iznosu to je najveća sila trenja. Ono se odnosi za slučajeve stacionarnih uvjeta parametara mehaničkog sustava odnosno kada su tijela u relativnom mirovanju i potrebno je savladati statičku silu trenja da se tijela počine relativno gibati.



Slika 2.1: Mikrorazina dodirnih površina tijela



Slika 2.2: Statičko trenje

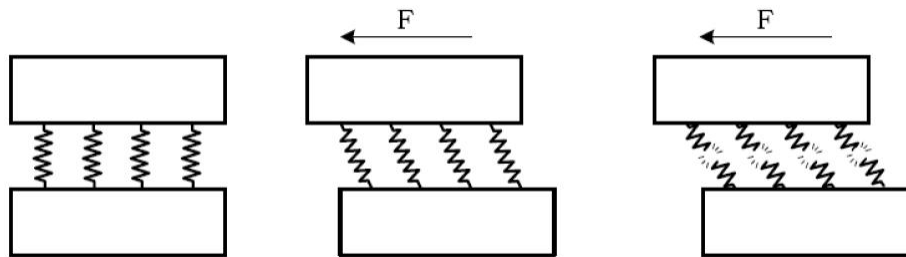
$$F_{tr} = \max.$$

$$F_{tr} = \mu_s \cdot F_N$$

$$F_{tr} > F$$

Kod statičkog trenja postoje čvrste veze između asperitnih veza, te je sila trenja  $F_{tr}$  najveća (Slika 2.2). Sila trenja je proporcionalna normalnoj sili  $F_N$ , a  $\mu_s$  je koeficijent statičkog trenja. Kod mirovanja sila trenja  $F_{tr}$  je veća nego vučna sila  $F$ .

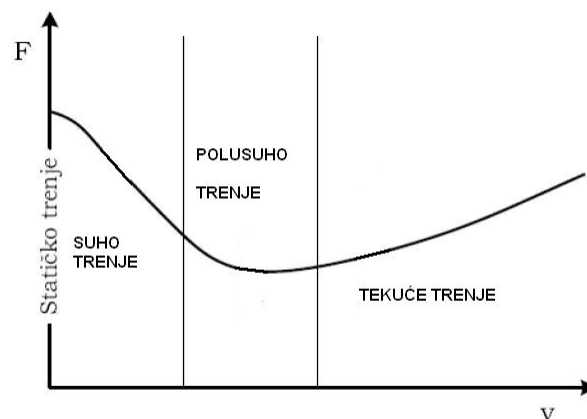
Kod statičkog trenja postoji čvrsta veza između asperitnih vlakana (asperitne veze) te sila trenja je najveća. Sila za svladavanje sile trenja  $F$  raste sve dok ne popuste te veze i tada počinje relativno gibanje dvaju tijela.



Slika 2.3: Modeli asperitnih veza pomoću opruge

Koeficijent statičkog trenja  $\mu_s$  - javlja se kod mirovanja i veći je od koeficijenta dinamičkog trenja. Bezdimenzionalna skalarna veličina koja opisuje odnos sile trenja i sile koja ih spaja i čuva spojene. Ovisi o materijalu i hrapavosti površine, te u slučaju podmazivanja i viskoznosti maziva. Vrijednost koeficijenta trenja kreće od 0 - 1.

**DINAMIČKO TRENJE** - se javlja kad su tijela u dodiru u relativnom gibanju. To je sila trenja koje je potrebno savladavati da bi se održalo stanje relativnog gibanja tijela. Dinamičko trenje je manje od statičkog trenja jer su slabije veze između asperitnih vlakana. Kod relativnog gibanja deformiraju se asperitne veze i njihovo djelovanje ovisi o brzini relativnog gibanja. Tako postoje četiri stanja trenja (Slika 1.4). Statičko trenje je prethodno opisano.



Slika 2.4: Stanja trenja ovisno o brzini

**Suho trenje** se pojavljuje kod male brzine relativnog gibanja. Uloga maziva ne dolazi do izražaja jer je relativna brzina premala i mazivo ne može zapuniti prostor između dodirnih površina. Sila trenja je velika i postoji direktan dodir između površina tijela pa je i veliko trošenje površina i ovo stanje je potrebno svesti na najmanju moguću mjeru.

**Polusuho trenje** se javlja pri većem iznosu relativne brzine gibanja. Veća relativna brzina omo-

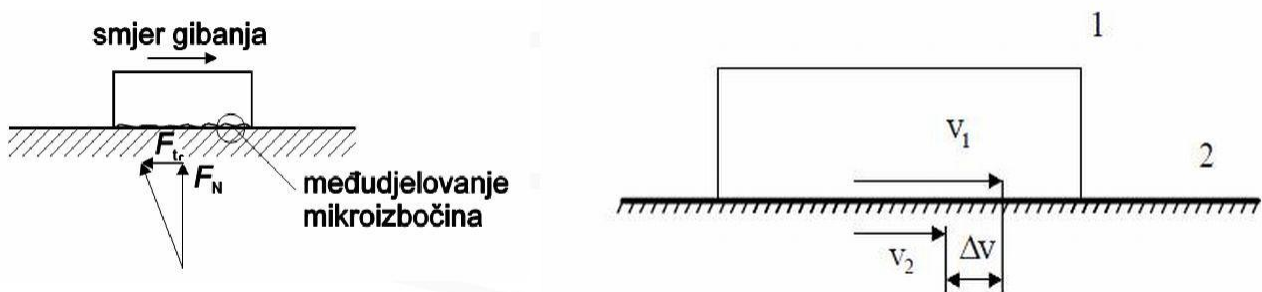
gućuje bolje podmazivanje površina te tako se smanjuje površina direktnog dodira što smanjuje silu trenja. Ovo stanje traje sve dok relativna brzina poveća do iznosa potrebnog za formiranje mazivog filma čija je debljina veća od visine asperitnih vlakna.

**Tekuće trenje** zbog veće relativne brzine tijela stvara se film maziva koji je deblji od visine asperitnih vlakana i ne postoji direktan dodir između tijela. U literaturi se ovo naziva Stribeckov efekt. Sila trenja je mala jer smicanje u mazivu je mnogostruko manje od sila smicanja asperitnih vlakana. Trošenje dodirnih površina tijela je zanemarivo i to stanje potrebno je što dulje održavati u sustavu.

Kod različitog gibanja (klizanja, kotrljanja, valjanje) javljaju se različite vrste dinamičkog trenja:

- TRENJE KLIZANJA
- TRENJE KOTRLJANJA
- TRENJE VALJANJA

**TRENJE KLIZANJA** - je trenje koje se javlja kada jedno tijelo klizi po drugom odnosno kada su translacijske komponente brzina dvaju tijela u dodiru različitog iznosa.



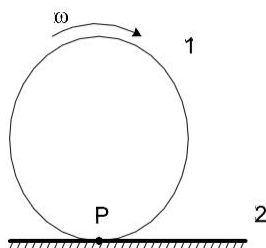
Slika 2.5: Trenje klizanja

$\Delta v$  - relativna brzina gibanja tijela u dodiru. Sila trenja  $F_{tr} = \mu \cdot F_N$ . Dinamički koeficijent trenja  $\mu$  je manji od statičkog trenja  $\mu_s$ .

**TRENJE KOTRLJANJA** - javlja se u slučajevima kada je kontakt ostvaren u jednoj točki odnosno liniji (P) (Slika 2.6).

Nema pojave statičkog trenja jer je mala dodirna površina te je manja sila trenja i to je glavna razlika u odnosu na trenje klizanja.

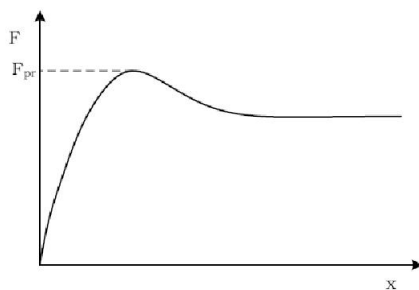
**TRENJE VALJANJA** - je kombinacija trenja klizanja i kotrljanja. Udio kotrljanja i klizanja unaprijed je određen kinematikom gibanja dvaju tijela koja su u kontaktu. Ovakav oblik trenja



Slika 2.6: Trenje kotrljanja

javlja se u valjkastim ležajevima, zupčanicima ...

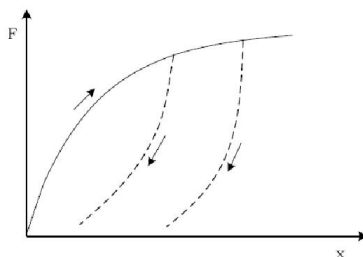
Za opis trenja iz prijelaza iz statičkog u dinamičko trenje koristi se funkcija sile trenja i pomaka (Slika 2.7). Funkcija na početku ima linearnu karakteristiku, dok se ne postigne prekidna sila. Tada dođe do prekida asperitnih veza i tijelo se počinje gibati.



Slika 2.7: Funkcija sile trenja i pomaka

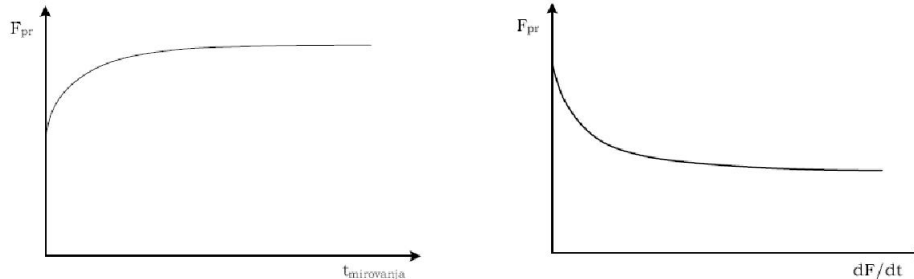
$F_{pr}$  - je prekidna sila (engl. *break - away force*) i to je sila potrebna za svladavanje statičkog trenja.

Kada se tijela počinju relativno gibati dolazi do pucanja asperitnih veza i do plastične deformacije asperitnih vlakana, te i nakon prestanka djelovanja vanjske sile pojavljuje se trajni pomak (engl. *pre-sliding displacement*)(Slika 2.8)



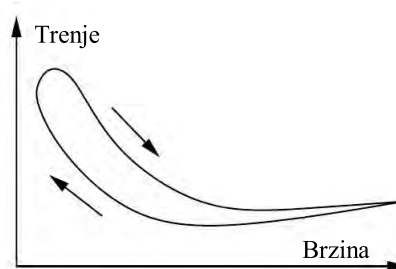
Slika 2.8: Ireverzibilni proces deformiranja asperitnih vlakana

Iznos prekidne sile  $F_{pr}$  se povećava što je dulje vrijeme koje tijelo provede u mirovanju (Slika 2.9) i ovisi o brzini primjene vučne sile na tijelo.



Slika 2.9: Ovisnost prekidne sile o vremenu koje tijelo provede u mirovanju i brzini primjene vučne sile

Sila trenja ovisi o relativnoj brzini klizanja tijela (Slika 2.10). Sila trenja je manja pri smanjenju relativne brzine nego pri povećanju relativne brzine, te pokazuje histereznu pojavu. Širina histereze se povećava s porastom normalne sile, brže promijene relativne brzine i viskoznosti maziva.



Slika 2.10: Ovisnost sile trenja o relativnoj brzini

Za analizu, projektiranje i simulacije sustava potrebno postaviti prikladan matematički model trenja. Postoje dvije vrste modela trenja:

- STATIČKI MODELI TRENJA
- DINAMIČKI MODELI TRENJA

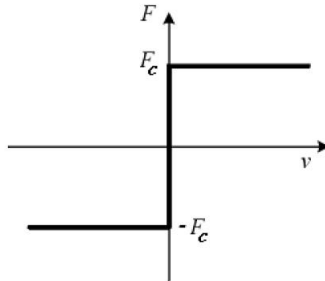
### 2.2.2 Statički modeli trenja

Statički modeli trenja podrazumijevaju modele koje daju funkcijsku ovisnost sile trenja o relativnoj brzini dvaju tijela koja su u dodiru [11].

#### **Coulombovo trenje** (Coulomb, 1785.)

Iznos sile trenja proporcionalan je normalnoj sili i ne ovisi o iznosu dodirne površine tijela  $F_C = \mu \cdot F_N$ , prikazano sljedećim izrazom:

$$F = F_C \cdot \operatorname{sgn}(v) \quad (2.5)$$



Slika 2.11: Coulombovo trenje

Nedostatak ovog modela je neodređenost iznosa sile trenja za  $v = 0$ .

#### Viskozno trenje (Reynolds, 1866.)

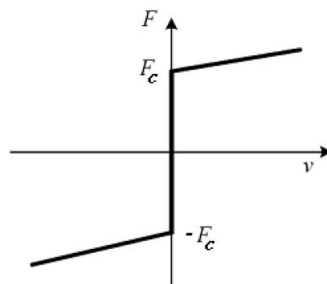
S razvojem hidrodinamike, u 19. stoljeću, i korištenjem maziva za smanjenje trenja pojavljuje se opis sile trenja u mazivu zbog viskoznosti. Ta sila trenja naziva se viskozno trenjem i opisana je sljedećim izrazom:

$$Fv = \sigma_2 \cdot v, \quad v \neq 0$$

gdje je  $\sigma_2$  koeficijent viskoznog trenja. Zbog boljeg podudaranja rezultata s eksperimentalnim mjerenjima za opis viskoznog trenja ponekad se koristi i sljedeća modifikacija modela viskoznog trenja:

$$Fv = \sigma_2 \cdot |v|^{\delta_v} \cdot \operatorname{sgn}(v), \quad v \neq 0 \quad (2.6)$$

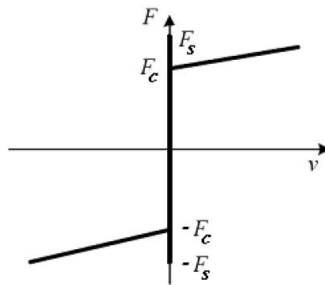
gdje je  $\delta_v$  - empirijski koeficijent čiji iznos ovisi o području primjene modela.



Slika 2.12: Coulombovo i viskozno trenje

### Statičko trenje (Morin, 1833.)

Prema opisu sile trenja kombinacijom Coulombovog i viskoznog trenja pretpostavlja se da je apsolutni iznos sile trenja najmanji u mirovanju što se ne poklapa s eksperimentalnim podacima koji ukazuju da iznos sile trenja je najveći u mirovanju i premašuje iznos Coulombovog trenja  $F_C$ . Ako je tijelo u mirovanju, potrebna je vanjska sila jednaka ili veća od sile statičkog trenja da bi setijelo počelo gibati.



Slika 2.13: Coulombovo, viskozno trenje i statičko trenje

### Stribeckovo trenje (Stribeck, 1902.)

Uvodi kontinuirani prijelaz između statičkog i dinamičkog trenja. U literaturi se ovaj efekt naziva Stribeckovim efektom. Ovaj efekt karakterističan je za viskozno klizanja, ali dobro opisuje suho klizanje. Razlog tomu je što idealno suho klizanje praktični ne postoji u prirodi zbog prisutnosti kontaminacije (oksidni sloj i sl.), koja djeluje poput maziva. Ovaj efekt je važan za opisivanje pojave naizmjeničnog klizanja i zaustavljanja tijekom klizanja tijela po površini (engl. "textitstick-slip" efekt).

Najčešće se opisuje funkcijom:

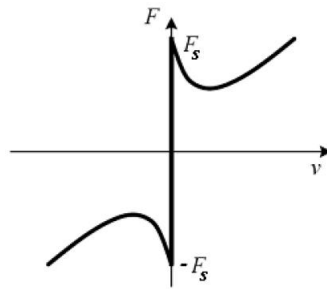
$$F = [F_C + (F_S - F_C)e^{-\left(\frac{|v|}{v_s}\right)^\delta}] \cdot \text{sgn}(v) + F_v \cdot v \quad (2.7)$$

gdje su  $v_s$  - Stribeckova brzina,  $\delta$  - empirijski koeficijent čiji iznos ovisi o području primjene modela,  $F_v$  - koeficijent viskoznog trenja, ponegdje u literaturi označava se  $\sigma_2$ . Funkcija (2.7) sadrži Stribeckov efekt i viskozno trenje i ta jednadžba je korištena u simulacijskom modelu Stribecovog modela trenja (Slika 3.13).

Klasične modele trenja čine (Slika 2.5):

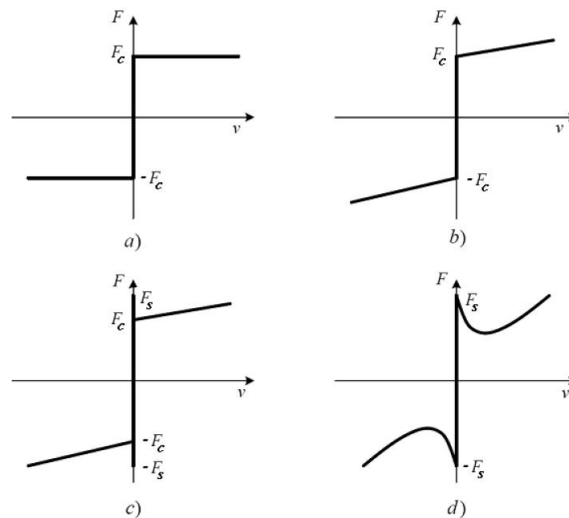
- a) Coulombovo trenje
- b) Coulombovo i viskozno trenje
- c) Coulombovo, viskozno trenje i statičko trenje





Slika 2.14: Stribeckovo i viskozno trenje

## d) Stribeckovo i viskozno trenje



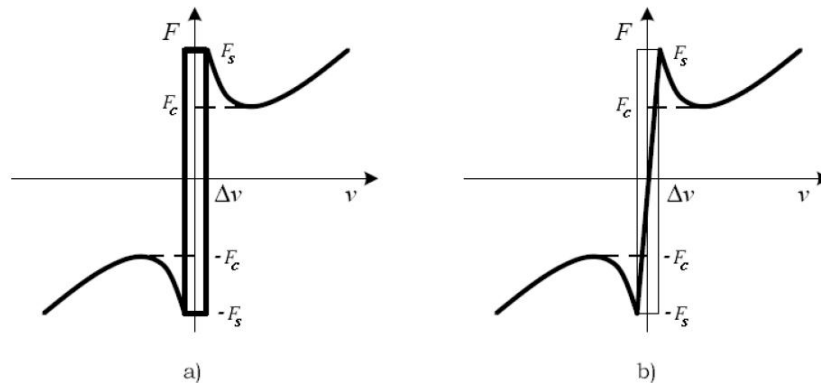
Slika 2.15: Klasični modeli trenja

**Karnoppov model trenja**

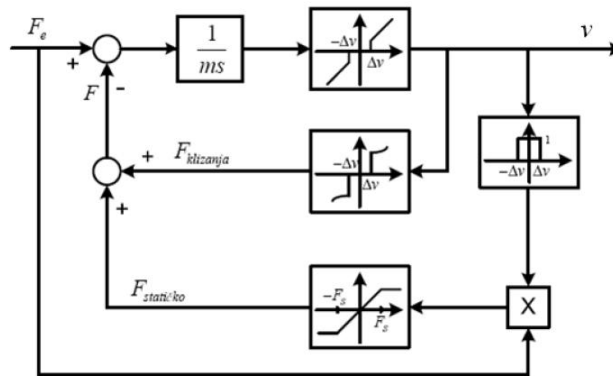
Nedostatak prethodno opisanih modela što ne mogu detektirati silu trenja kada je relativna brzina jednaka nuli ( $v = 0$ ). Karnoppov model rješava taj problem uvođenjem zone neosjetljivosti  $v \in \langle -\Delta v, \Delta v \rangle$  (Slika 2.16 a))

Kako postojanje zone neosjetljivosti nije fizikalno jer unutar nje se smatra da nema relativnog gibanja tijela u kontaktu, zato se često koriste različite modifikacije ovog modela od kojih se najčešće koristi aproksimacija sile trenja vrlo strmim pravcem na intervalu  $[-\Delta v, \Delta v]$  (Slika 2.16 b)).

Ako je  $|v| < \Delta v$  tijela su u mirovanju,  $v = 0$ . Ako je  $|v| > \Delta v$  tada se tijela gibaju. Nedostatak ovog modela je što je vezan za ostatak sustava. Ulaz u model je vanjska sila  $F_e$  koja nije uvijek poznata. Model se mora prilagoditi za svaki sustav na koji se primjenjuje. Model rješava problem



Slika 2.16: Karnoppov model trenja



Slika 2.17: Blok shema Karnoppov modela trenja

određivanja sile trenja kada je brzina jednaka nuli, ali ne slaže se s eksperimentalnim podacima realnog trenja. Karnoppov model uveden je radi ostvarenja što brže i robusnije simulacije trenja i u tom se kontekstu najčešće i primjenjuje.

### 2.2.3 Dinamički modeli

Ovi modeli temelje se novijim istraživanjima trenja koja pokazuju da sila trenja ne ovisi samo o brzini gibanja, nego i o položaju, brzini porasta sile, vremenu provedenom u stanju mirovanja, akceleraciji, te povijesti gibanja (memorija trenja) [4, 11].

#### Amstrongov model trenja

S ciljem da se obuhvate dinamička svojstva pojave trenja, u ovom modelu uvedena je vremenska ovisnost statičkog trenja i Stribeckovog efekta. Ovaj model sastoji se od dva podmodela:

- model za opis statičkog trenja

- model za opis dinamičkog trenja

U području statičkog trenja sila trenja je opisana izrazom:

$$F(x) = \sigma_0 x \quad (2.8)$$

U području dinamičkog trenja sila trenja je opisana izrazom:

$$F(v, t) = \left( F_C + F_S(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + (v(t - \tau_l)/v_s)^2} \right) \text{sign}(v) + F_v \quad (2.9)$$

gdje je funkcija  $F_S(\gamma, t_d)$  opisuje ovisnost iznosa statičke sile trenja o vremenu provedenom u stanju mirovanja (Slika 1.9) i dana je izrazom:

$$F_S(\gamma, t_d) = F_{S,a} + (F_{S,\infty} - F_{S,a}) \frac{t_d}{t_d + \gamma}$$

gdje je  $\sigma_0$  - koeficijent čvrstoće,  $t_d$  - vrijeme koje je tijelo provelo u mirovanju,  $F_{S,a}$  - iznos Stribeckovog trenja na kraju prethodnog perioda klizanja,  $F_{S,\infty}$  - iznos Stribeckovog trenja nakon vrlo dugog perioda mirovanja tijela,  $\tau_l$  - vremenska konstanta trenja,  $\gamma$  - empirijski parametar modela. Armstrongov model trenja ima sedam parametara koji se trebaju odrediti tijekom postupka identifikacije modela trenja.

Nedostatak ovog modela je potreba za mehanizmom prekapčanja između njegovih dva podmodela i ne obuhvaća ireverzibilni proces deformacije vlakana nakon određenog iznosa pomaka (Slika 2.8).

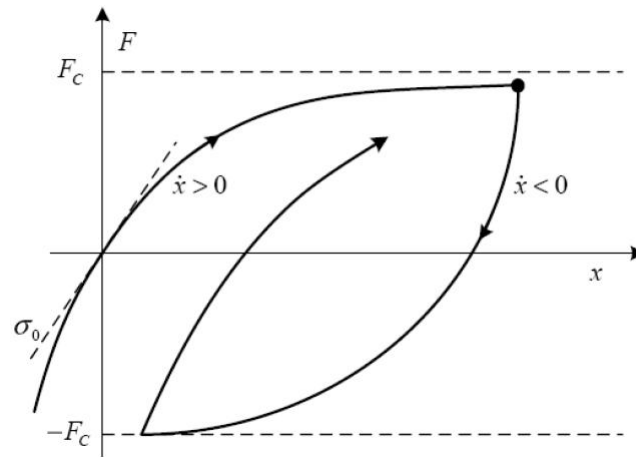
### Dahlov model trenja

Model definira dinamičku ovisnost sile trenja o pomaku  $x$  nelinearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda:

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left( 1 - \frac{F}{F_C} \text{sign}(v) \right)^\alpha \quad (2.10)$$

gdje je  $\sigma$  - koeficijent čvrstoće,  $\alpha$  - koeficijent koji definira oblik krivulje. Najčešće se koristi  $\alpha = 1$  zbog jednostavnosti implementacije i dobrog podudaranja s eksperimentalnim podacima [11]. Dahlovim modelom obuhvaćeno je:

- ireverzibilni proces deformacije vlakana nakon određenog iznosa pomaka
- histerezna karakteristika trenja (Slika 2.18)
- sila trenja ovisna o pomaku  $x$  i predznaku brzine



Slika 2.18: Ovisnost sile trenja o pomaku prema Dahlovu modelu

Za dobivanje modela u vremenskoj domeni, derivira se (2.10) po vremenu

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot v = \sigma \left( 1 - \frac{F}{F_C} \text{sign}(v) \right)^\alpha \cdot v \quad (2.11)$$

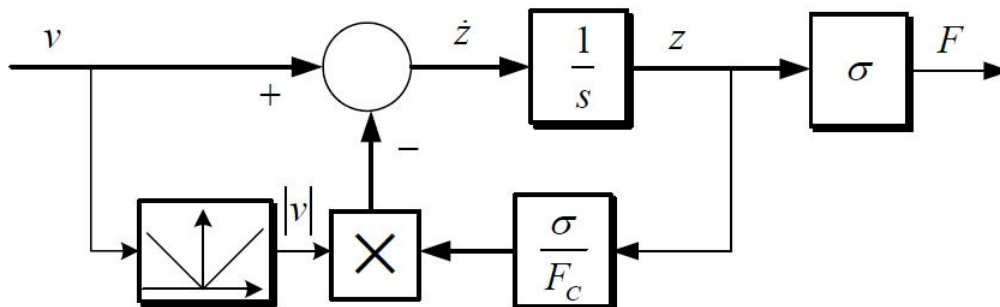
za  $\alpha = 1$  prethodni izraz može se zapisati u obliku:

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_C} |v|, \quad \left( \text{sign}(v) = \frac{|v|}{v} \right) \quad (2.12)$$

supstitucijom  $F = \sigma z$  dobiva se:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_C} z \quad (2.13)$$

$$F = \sigma z \quad (2.14)$$

Slika 2.19: Blok shema Dahlova modela za  $\alpha = 0$

u stacionarnom stanju vremenska derivacija sile trenja jednaka je nuli ( $\frac{dz}{dt} = 0$ ) dobiva se:

$$z = \frac{F_C}{\sigma} \text{sign}(v) \quad (2.15)$$

$$F = \sigma z = F_C \text{sign}(v) \quad (2.16)$$

Usporede li se izrazi (2.15) i (2.16), Dahlov model trenja u stacionarnom stanju identičan je Coulombovom modelu.

Nedostatak Dahlovog modela je što ne obuhvaća:

- Stribeckov efekt
- "Stick - slip" gibanje

### Lugre model trenja

Lugre model trenja se temelji na Dahlovom modelu trenja, ali je proširen da obuhvaća Stribeckov efekt i "stick - slip" gibanje. Lugre model uvodi umjesto Coulombove sile  $F_C$  nelinearnu Stribeckovu funkciju:

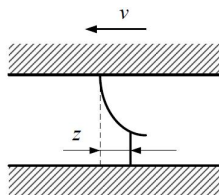
$$g(v) = F_C + (F_S - F_C) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^\delta} \quad (2.17)$$

uvođenjem izraza (2.16) u izraz (2.14) dobiva se Lugre model:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{g(v)} z \quad (2.18)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (2.19)$$

Odabiranjem parametara  $\delta$  i  $v_s$  mogu se dobiti različiti oblici Stribeckove funkcije kako bi se postigli što sličnije karakteristike realnom trenju. Model se temelji na varijabli stanja deformacije vlakna  $z$ , koja predstavlja unutarnju varijablu modela trenja koja predstavlja prosječno istežanje (elastičnu deformaciju) asperitnih vlakana u dodiru dvaju tijela (Slika 2.10)



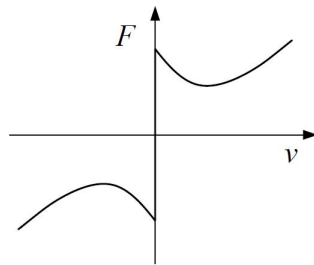
Slika 2.20: Unutarnja varijabla  $z$  Lugre modela trenja

U stacionarnom stanju vremenska derivacija je jednaka nuli ( $\frac{dz}{dt} = 0$ ), pa Lugre model trenja ima oblik:

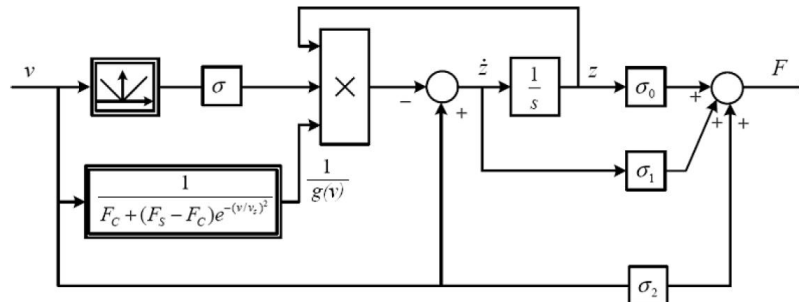
$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma|v|}{g(v)}z = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{g(v)}{\sigma_0} \text{sign}(v) \quad (2.20)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad \rightarrow \quad F = \sigma_0 z + \sigma_2 v = g(v) \text{sign}(v) + \sigma_2 v \quad (2.21)$$

Za stacionarno stanje statička karakteristika je prikazana na slici 2.11



Slika 2.21: Statička karakteristika Lugre modela trenja



Slika 2.22: Blok shema Lugre modela trenja

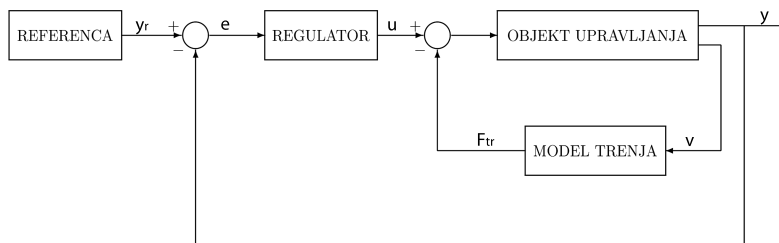
Lugre model opisuje temeljne dinamičke utjecaje trenja:

- statičko trenje
- deformiranje asperitnih vlakana
- viskozno trenje
- stribeckov efekt
- ovisnost sile trenja o relativnoj brzini

Ovaj model često se koristi u području upravljanja i regulacije jer se lako može eksperimentalno identificirati i pogodan je za kompenzaciju utjecaja trenja [11].

### 3 SIMULACIJSKI MODELI REGULACIJSKOG SUSTAVA

Simulacijski modeli temelje se na matematičkim modelima prikazanim u prethodnom poglavlju i napravljeni su programskom paketu MATLAB R2009a pomoću podprograma Simulink. Na sljedećoj slici prikazana je blok shema kompenzacije trenja pomoću regulatora na kojoj se temelji simulacijski model zatvorene regulacijske petlje (Slika 3.1).



Slika 3.1: Blok dijagram zatvorene regulacijske petlje

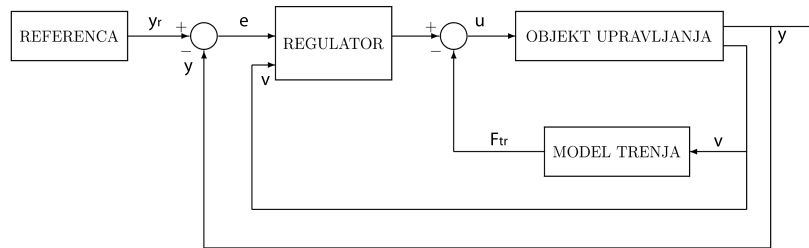
Postoji mnogo načina za kompenzaciju trenja. Jedan od načina je kompenzacija trenja pomoću regulatora bez observera trenja [8, 19, 9, 12]. Na prethodnoj slici objekt upravljanja predstavlja MDS sustav s uključenom dinamikom aktuatora, kraće označen s MDS-A, a model trenja predstavlja realno trenje sustava. Odabiranjem odgovarajućih parametara regulatora može se kompenzirati utjecaj trenja.

Slika 3.1 predstavlja zatvorenu petlju regulacije.  $y_r$  je referentna vrijednost pozicije koja se želi postići, a  $y$  je postignuta pozicija. Pogreška regulacije  $e = y_r - y$  je ulaz u regulator koji na temelju tog ulaza određuje upravljačku varijablu  $u$  kojom djeluje na objekt upravljanja odnosno mehanički sustav. U ovom radu korišten je modificirani PID regulator koji, osim pogreške, koristi i brzinu te daje stabilniji odziv pogotovo kod regulatora s kliznim režimom (engl. *sliding mode controller*) i PID s kliznim režimom (engl. *PID sliding mode*). Zatvorena regulacijska petlja s modifikacijom PID regulatora prikazana je na sljedećoj slici 3.2.

Prema blok dijagramu (Slika 3.1) regulira se jedno stanje MDS-A (pozicija mase). Modifikacijom regulatora prema blok dijagramu (Slika 3.2) regulira se dva stanja MDS-A (pozicija i brzina mase) što je praktičnije jer obje varijable stanja su mjerljive i u praksi su one najčešće ulazne varijable regulatora i što se više stanja regulira veća je kvaliteta regulacije.

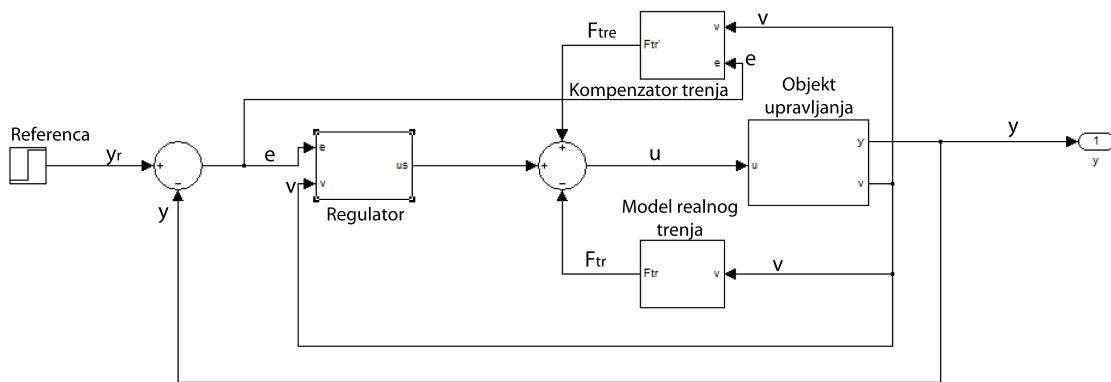
Drugi način kompenziranja utjecaja trenja, koji je razmotren u ovom radu, je s observerom realnog trenja te je baziran na Lugre modelu. Observer trenja kompenzira utjecaj realnog trenja, dok PD i PID regulator stabilizira objekt upravljanja [8, 9, 21]. Na slici 3.3 je prikazana je blok dija-





Slika 3.2: Blok dijagram zatvorene regulacijske petlje

gram takvog načina kompenzacije



Slika 3.3: Blok dijagram zatvorene regulacijske petlje s observerom trenja

Simulacijski modeli sastoje se od tri odnosno četiri podsustava:

- REGULATOR (PD, PID, regulator s kliznim režimom, PID regulator s kliznim režimom)
- OBJEKT UPRAVLJANJA (MDS sustav s uključenom dinamikom aktuatora (MDS-A) i MDS sustav bez dinamike aktuatora (MDS))
- MODELI TRENJA (Stribeck, Dahl, Lugre)
- KOMPENZATOR TRENJA (Lugre)

U sljedećim podpoglavljima se nalazi simulink modeli te diferencijalne jednadžbe varijabli stanja na kojima se temelje simulink modeli.

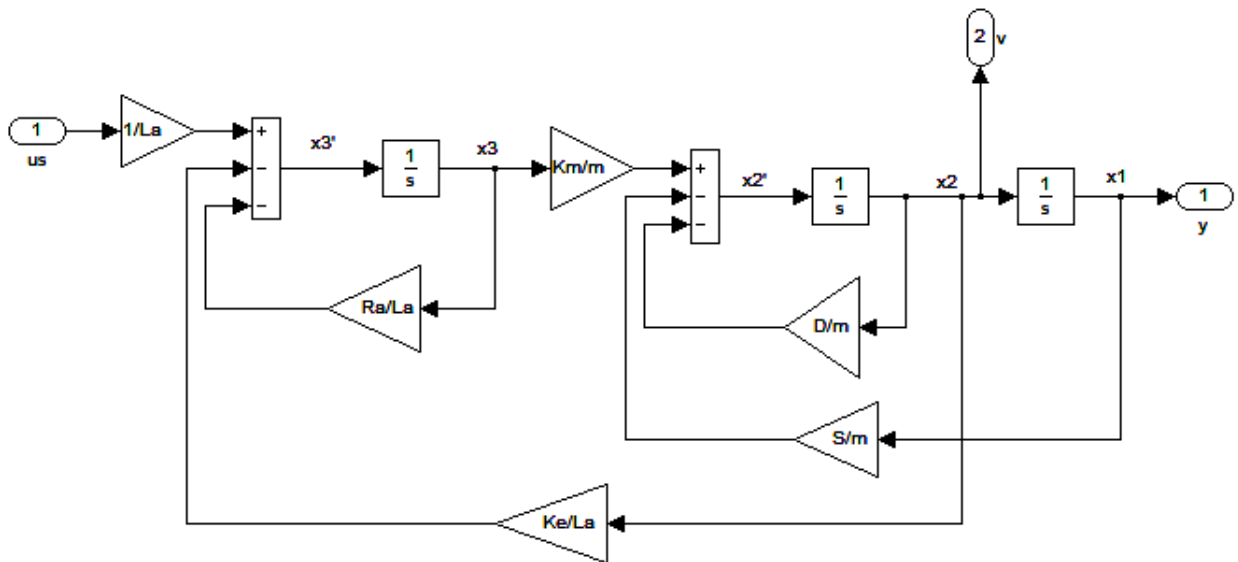
### 3.1 Simulacijski modeli mehaničkog sustava

Simulacijski modeli objekta upravljanja, koji u ovom radu predstavlja mehanički sustav, predstavljani su MDS sustavom s uključenom dinamikom aktuatora, koji u ovom radu predstavlja elektromotor (Slika 3.4), kraće MDS-A, te MDS sustavom bez uključene dinamike aktuatora (Slika 3.5),

kraće samo MDS.

Usporedbom rezultata simulacija se želi utvrditi utjecaj dinamike aktuatora na stanja mehaničkog sustava i utjecaj na upravljački sustav.

Simulink model MDS-A temelji se na diferencijalnim jednadžbama varijabli stanja (2.1) i (2.2). One predstavljaju dinamički model mehaničkog sustava trećeg reda. Prostor stanja prikazan je jednadžbama (2.3) i (2.4). Na temelju tih diferencijalnih jednadžbama varijabli stanja izveden je simulink model sustava prikazan na slici 3.4.



Slika 3.4: Simulink model MDS-A sustava

Sustav je trećeg reda te ima tri integratora. Na ulaz sustava dolazi upravljačka varijabla  $u_s = u - Ftr$ . Izlazi iz sustava čine brzina  $v$  i pozicija  $y$ .

Vrijednosti parametara sustava uzeti su iz literature [5, 7] i iznjeti su u sljedećoj tablici.

Simulink model MDS sustava temelji se na diferencijalnoj jednadžbi varijable stanja (3.1).

$$\ddot{y} = \frac{D}{m}\dot{y} - \frac{S}{m}y - \frac{1}{m}u \quad (3.1)$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{S}{m}x_1 - \frac{D}{m}x_2 + \frac{1}{m}x_3$$

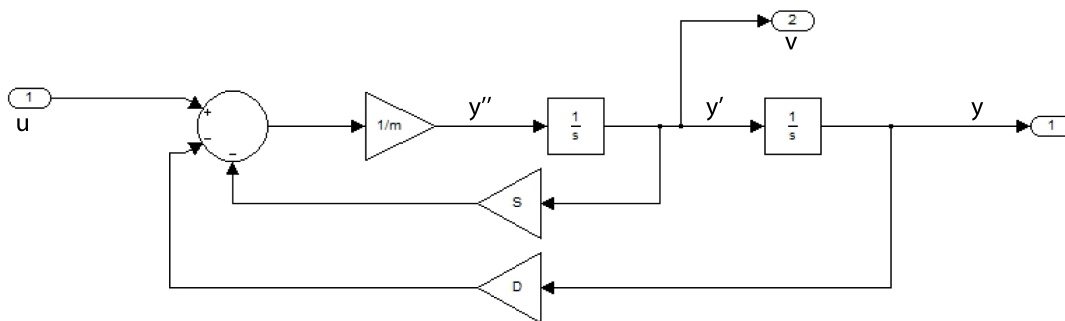
Tablica 3.1: Vrijednosti parametara MDS-A

Parametri	Vrijednosti	Jedinice
$m$	1	$kg$
$D$	0	$Ns/m$
$S$	0	$N/m$
$K_E$	0.47	
$K_M$	0.47	
$R_A$	0.4	$\Omega$
$L_A$	0.024	$H$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{S}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (3.3)$$

Prostor stanja je prikazan jednađbama (3.2) i (3.3). To je dinamički model MDS sustava drugog reda. Na temelju ovih jednađbi izveden je simulink model (Slika 3.5).



Slika 3.5: Simulink model MDS sustava

Izlazi iz MDS sustava čine brzina  $v$  i pozicija  $y$ . Parametri MDS sustava dani su u tablici (Tablica 3.2)

Tablica 3.2: Vrijednosti parametara MDS sustava

Parametri	Vrijednosti	Jedinice
$m$	1	$kg$
$D$	0	$Ns/m$
$S$	0	$N/m$

### 3.2 Simulacijski modeli regulatora

U ovom radu su razmotreni četiri tipa regulatora:

- PD regulator
- PID regulator
- Regulator s kliznim režimom (engl. *Sliding mode controler*)
- PID regulator s kliznim režimom (engl. *PID sliding mode*)

Simulacijski modeli ovih regulatora predstavljeni su simulink modelima na temelju jednadžbi.

#### 3.2.1 Simulacijski model PD i PID regulatora

Klasičnim PD i PID regulatorom reguliramo samo jedno stanje mehaničkog sustava, tj. poziciju. Pogreška regulacije  $e$  je razlika referentne vrijednosti pozicije koja se teži postići  $y_r$  i postignute pozicije  $y$ .

$$e = y_r - y \quad e \rightarrow 0$$

Težnja regulacije je da pogreška regulacije  $e$  teži u nulu.

Simulink model klasičnog PID regulatora temelji se na sljedećoj jednadžbi

$$u = K_p e + K_d \dot{e} + K_i \int e dt \quad (3.4)$$

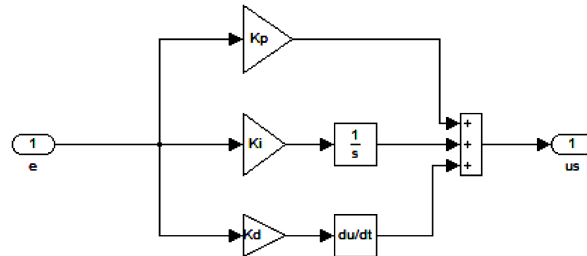
supstitucijom

$$e = \dot{z}$$

dobije se

$$u = K_p e + K_d \dot{e} + K_i z \quad (3.5)$$

Na temelju jednadžbe (3.4) izveden je simulink model regulatora prikazan na slici (Slika 3.6)



Slika 3.6: Simulink model klasičnog PID regulatora

Parametri regulatora su  $K_p$  - proporcionalno pojačanje,  $K_d$  - derivacijsko pojačanje,  $K_i$  - integracijsko pojačanje.

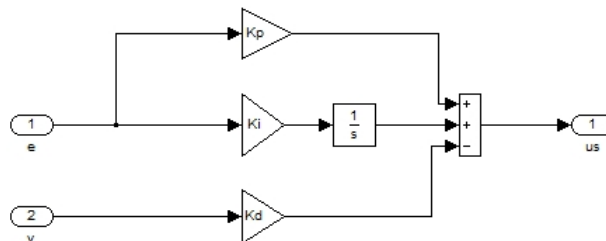
Model PD regulatora temelji se na jednadžbi

$$u = K_p e + K_d \dot{e} \quad (3.6)$$

Kako se u realnim sustavima mjeri pozicija i brzina, a derivator se ne koristi u realnim regulatorima, klasični PD i PID regulator su modificirani tako da se regulira pozicija i brzina, te derivator je uklonjen.

Simulink model PID regulatora (Slika 3.7) temelji se na jednadžbi

$$u = K_p e - K_d v + K_i \int e dt \quad (3.7)$$



Slika 3.7: Simulink model modificiranog PID i PD regulatora

Simulink model za PD regulator korišten je isti model kao i za PID regulator (Slika 3.7), jedino što integracijsko pojačanje  $K_i = 0$ . Jednadžba za PD regulator je

$$u = K_p e - K_d v \quad (3.8)$$

Parametri za PD i PID regulator vrijede prema tablici 3.3 . Brzina  $v$  ulazi na derivacijski član pošto je ona derivacija pozicije  $v = \dot{y}$  nije potreban derivator kao kod klasičnog PID i PD regulatora.

### 3.2.2 Simulacijski model regulatora s kliznim režimom

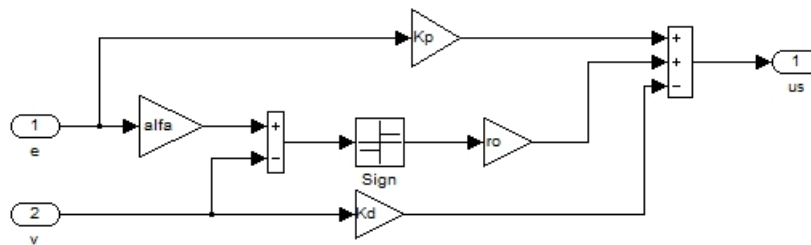
Razvoj regulacije s kliznim režimom potaknuo je razvoj robusnih postupaka nelinearnog upravljanja koji kompenziraju različite poremećaje u sustavu, kao npr. promjene parametara sustava, ograničene vanjske smetnje i šum mjerenja uz jednostavni algoritam računanja [16], [14]. Regulator s kliznim režimom je robusan na nemodeliranu dinamiku sustava. Zbog ovih dobrih karakteristika regulator s kliznim režimom razmotren je u ovom radu.

Simulacijski model temelji se na sljedećoj jednadžbi

$$u = K_p e - K_d v + \rho \text{sign}(s) \quad (3.9)$$

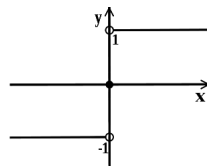
$$s = -v + \alpha e \quad (3.10)$$

Simulink model temeljen na jednadžbama (3.9) i (3.10) izgleda



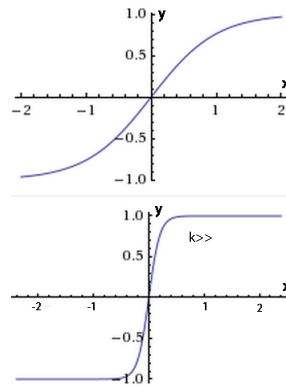
Slika 3.8: Simulink model regulatora s kliznim režimom

Funkcija  $\text{sign}$  prilikom simuliranja se izbjegava zbog svog oblika (Slika 3.9).



Slika 3.9: Oblik  $\text{sign}$  funkcije

Zbog svog velikog diskontinuiteta u nuli ne može se postići visoka točnost regulacije i javlja se "chattering" zato se funkcija  $sign$  aproksimira nekom sličnom funkcijom [17]. U ovom radu primjenjena je aproksimacija funkcijom  $\tanh(kx)$ , gdje je  $k$  pojačanje. Što je  $k$  veći to je nagib funkcije  $\tanh$  veći i bolje aproksimira funkciju  $sign$  (Slika 3.10). Pojačanje  $k$  je velikog iznosa  $k > 100$ .



Slika 3.10: Funkcija  $\tanh$  - aproksimacija funkcije  $sign$

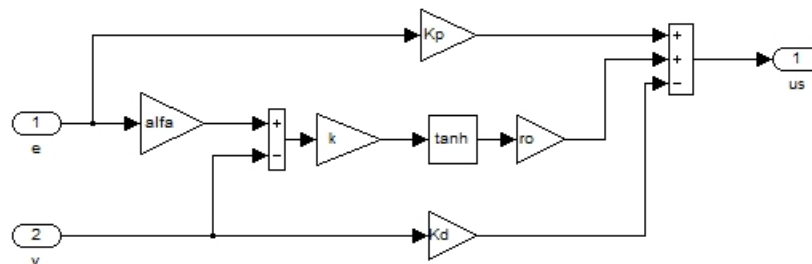
U literaturi se može naći da se aproksimacija vrši umjesto funkcije  $\tanh$  pomoću funkcije zasićenja  $saturation$  [14].

Sada se jednačba (3.9) mijenja i jednačbe na kojima se temelji simulacijski modeli izgledaju

$$u = K_p e - K_d v + \rho \tanh(ks) \quad (3.11)$$

$$s = -v + \alpha e \quad (3.12)$$

Sada simulink model izgleda



Slika 3.11: Simulink model regulatora s kliznim režimom ( $\tanh$ )

gdje  $alfa = \alpha$ , a  $ro = \rho$ .

### 3.2.3 Simulacijski model PID regulatora s kliznim režimom

PID regulator s kliznim režimom je jednostavna modifikacija klasičnog PID regulatora kojim se poboljšava kvaliteta regulacije mehaničkog sustava. Kako se kod regulatora s kliznim režimom javlja problem visokofrekvencijskih oscilacija aktuatora (engl. *chattering*) zbog diskontinuirane funkcije *sign*, uvodi se integracijski član koji ublažava pojavu "*chatteringa*" jer mehanički dijelovi sustava ne mogu raditi u takvim uvjetima i dolazi do brzog trošenja tih dijelova i točnost takvih sustava je niska.

Simulacijski model PID regulatora s kliznim režimom napravljen je s funkcijom *tanh* zbog spomenutog problema koji se javlja korištenjem funkcije *sign*.

Jednadžbe na kojima se temelji simulacijski model PID regulatora s kliznim režimom

$$u = K_p e - K_d v + K_i \int (s + \rho \tanh(ks)) dt \quad (3.13)$$

gdje pojačanje  $k$  velikog iznosa  $k > 100$ , dok je

$$s = -v + \alpha e \quad (3.14)$$

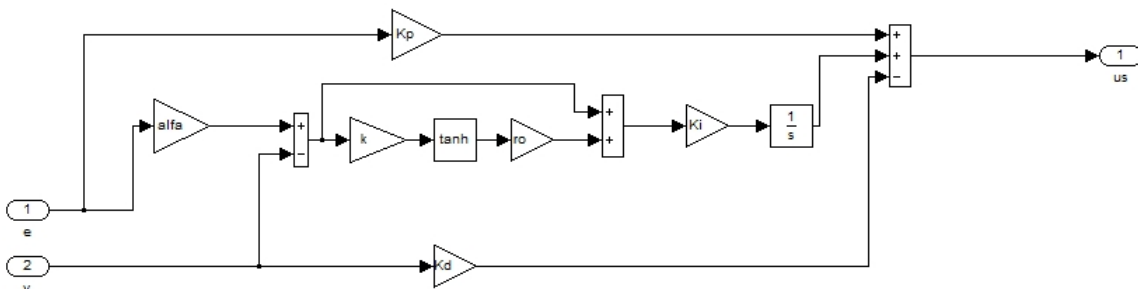
Supstitucijom

$$\dot{x} = s + \rho \tanh(ks)$$

dobije se

$$u = K_p e - K_d v + K_i x \quad (3.15)$$

Na temelju jedndažbe (3.14) napravljen je simulink model prikazan na sljedećoj slici



Slika 3.12: Simulink model PID regulatora s kliznim režimom



### 3.3 Simuacijski modeli trenja

U ovom diplomskom radu simulirani su tri modela trenja:

- Stribeckov model trenja
- Dahlov model trenja
- Lugre model trenja

Tablica 3.3: Vrijednosti parametara modela trenja

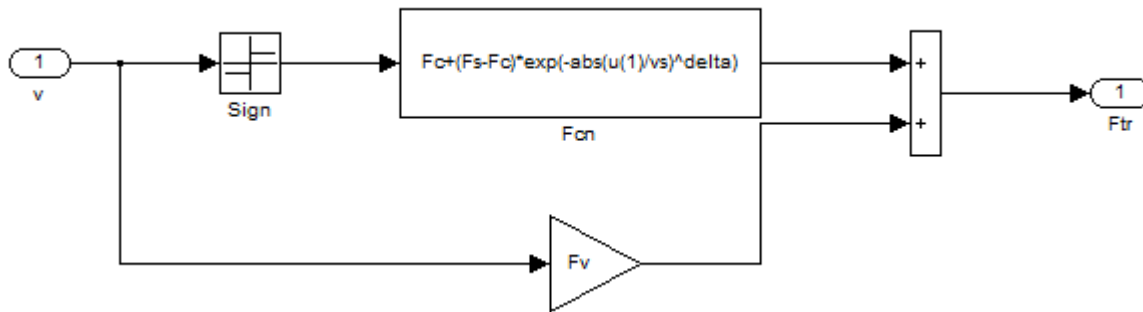
<b>Stribeckov model trenja</b>		
$F_C$	1	$N$
$F_S$	1.5	$N$
$v_S$	0.001	$m/s$
$F_v$	0.4	$N$
$\delta$	0.001	
<b>Dahl - ov model trenja</b>		
<b>Parametri</b>	<b>Vrijednosti</b>	<b>Jedinice</b>
$\sigma$	$10^5$	$N/m$
$F_C$	1	$N$
<b>Lugre model trenja</b>		
$\sigma_0$	$10^5$	$N/m$
$\sigma_1$	$\sqrt{10^5}$	$Ns/m$
$\sigma_2$	0.4	$N$
$F_C$	1	$\Omega$
$F_S$	1.5	$N$
$v_S$	0.001	$m/s$

Stribeckov model trenja je statički model trenja, dok Dahlov i Ludre modeli trenja predstavljaju dinamičke modele trenja. Vrijednosti parametara modela trenja uzete su iz literature [5], te su

iznjete u tablici 3.3.

### 3.3.1 Stribeckov model trenja

Simulacijski model temelji se na diferencijalnoj jednadžbi (2.7).

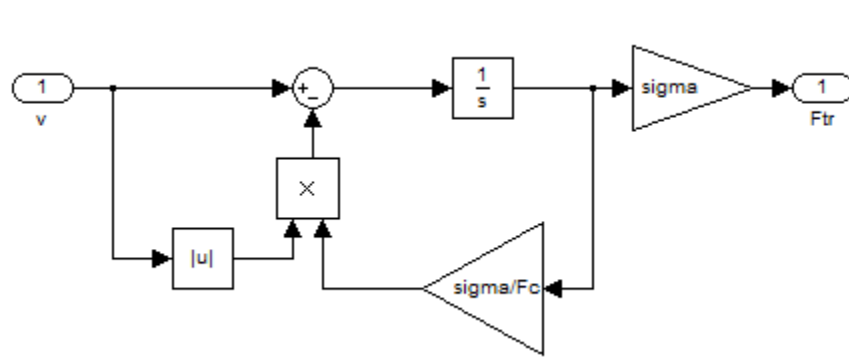


Slika 3.13: Simulink model Stribeckovog modela trenja

U ovom modelu se uvodi kontinuirani prijelaz između statičkog u dinamičko trenje (Stribeckov efekt) te nakon dovoljno velike brzine djeluje samo viskozno trenje (Slika 2.4).

### 3.3.2 Dahlov model trenja

Simulacijski model Dahl - ovog modela trenja temelji se na diferencijalnim jednadžbama (2.13) i (2.14) i blok shemi (Slika 2.9).

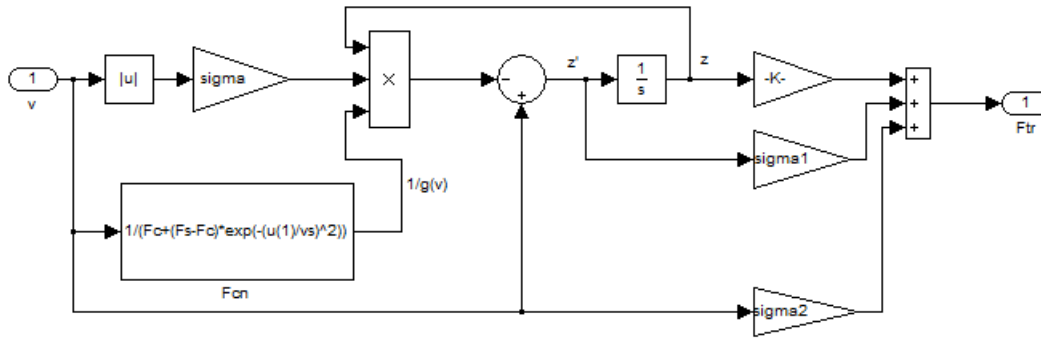


Slika 3.14: Simulink model Dahl - ovog modela trenja

Dahlov model, za razliku od Stribeckovog modela trenja ne sadrži Stribeckov efekt, te u stacionarnom stanju identičan je Coulombovom statičkom modelu trenja. Još jedan nedostatak Dahl - ovog modela što ne obuhvaća "Stick - Slip" efekt trenja.

### 3.3.3 Lugre model trenja

Simulacijski model Lugre modela trenja izveden je prema blok shemi (Slika 2.12) i na temelju jednadžbi (2.18) i (2.19).



Slika 3.15: Simulink model Lugre modela trenja

Lugre model trenja je prošireni Dahlov model s Stribeckovim efektom i "Stick - Slip" efektom trenja.

## 4 UTJECAJ TRENJA NA PERFORMANSE REGULACIJE

U ovom podpoglavljju ilustrirani su utjecaji trenja na mehanički sustav. Rezultati simulacija temelje se na modelu kojeg čine:

- PD i PID regulator
- MDS sustav bez dinamike aktuatora
- tri modela trenja

Vrijednosti parametara simulacija nalaze se u tablicama (3.2, 3.3, 4.1). Oni se tijekom simulacije ne mijenjaju.

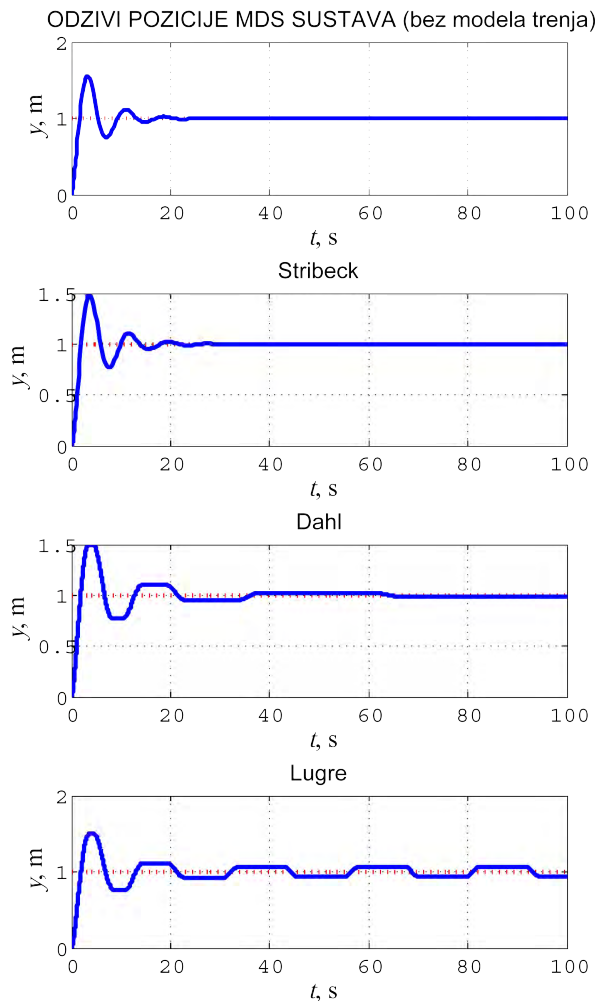
Jedino što se mijenja su modeli trenja. Prvo se snimaju odzivi varijabli stanja sustava bez modela trenja, a zatim s Stribeckovim, Dahlovim i Lugre modelom trenja, te ih se međusobno uspoređuje kako bi se vidio utjecaj trenja na sustav. Rezultati simulacije su poredani jedan ispod drugog radi lakše usporedbe. Vrijednosti parametara regulatora uzeti su iz literature [5]. U sljedećoj tablici prikazani su uzeti parametri regulatora

Tablica 4.1: Vrijednosti parametara PID regulatora

Parametri	Vrijednosti
$K_p$	3
$K_d$	6
$K_i$	4

Kod PD regulatora nema integracijskog člana, te integracijsko pojačanje  $K_i = 0$  dok ostalo vrijedi kao kod PID regulatora. Parametri regulatora su odabrani kako bi se ilustrirao utjecaj trenja na mehanički sustav.

Na slici 4.1 se vidi "*stick-slip*" efekt kao utjecaj trenja na MDS sustav. Posebno je izražen kod Lugre modela trenja jer jedini od ovih modela ima opisano "*stick-slip*" gibanje [15]. Odziv pozicije mase MDS sustava i odziv pozicije mase MDS sustava sa Stribeckovim modelom trenja je veoma sličan odzivu pozicije MDS sustava bez modela trenja zbog toga što Stribeckov model je statički model trenja koji djeluje pri vrlo malim brzinama MDS sustava, te nakon dovoljno velikog iznosa brzine djeluje samo viskozno trenje, koje je u ovom modelu, malog iznosa. Ilustracija utjecaja trenja na MDS sustav prema Stribeckovom modelu dana je na slici 4.13.

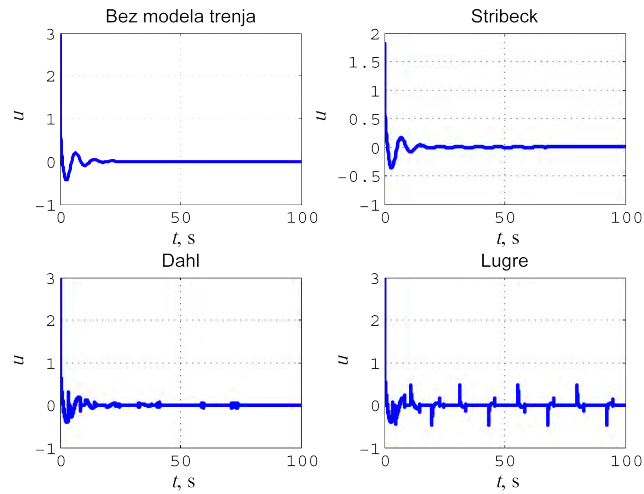


Slika 4.1: Odzivi pozicije mase MDS sustava s PID regulatorom

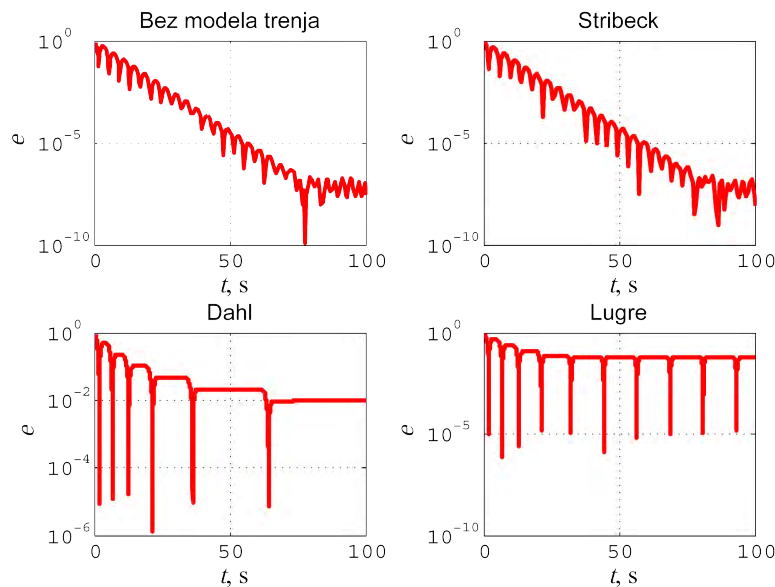
Kod Dahla i Lugre modela trenja je izraženiji je "*stick-slip*" efekt. Oni su dinamički modeli trenja, ovise o mnogo više faktora, te su promjenjiviji u odnosu na statičke modele trenja. Oni bolje opisuju realno trenje te se njihov utjecaj izraženiji nego kod statičkih modela trenja.

Kada se postigne stacionarna točnost upravljačka varijabla PID regulatora padne na nulu. Kod modela s Dahlovim i Lugre modelom trenja javljaju se nadvišenja zbog "*stick-slip*" gibanja, manje kod Dahla jer njegov model ne obuhvaća "*stick-slip*" efekt.

Pogreška regulacije je prikazana u logaritamskom mjerilu zbog točnijeg prikaza (Slika 4.3). Kod simulacijskih modela bez modela trenja i sa Stribeckovim modelom trenja, kod kojih se postiže stacionarna točnost, imaju manju pogrešku regulacije nego kod simulacijskih modela s Dahlovim i Lugre modelima trenja gdje je pogreška regulacije većeg iznosa jer se javlja "*stick-slip*" efekt i ne postiže se stacionarna točnost u promatranom vremenu.



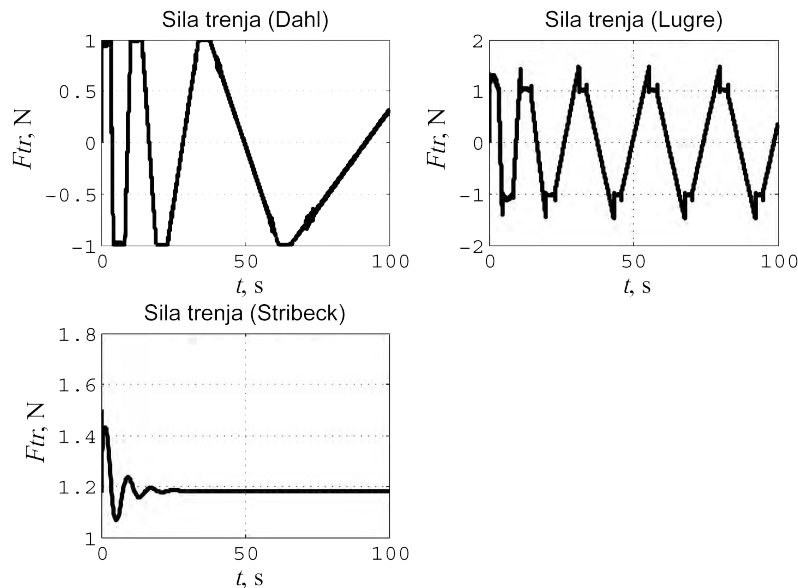
Slika 4.2: Upravljačka varijabla MDS sustava i PID regulatora



Slika 4.3: Pogreška regulacije PID regulatora u logaritamskom mjerilu

Sila trenja prema Dahlovom i Lugre modelu trenja je mnogo promjenjivija nego prema Stribeckovom modelu trenja jer Dahl i Lugre modeli trenja su dinamički modeli trenja koji ovisi o mnogo više faktora nego Stribeckov model koji je statički model trenja (Slika 4.4).

Prethodni odzivi odnosili su se na MDS sustav s tri modela trenja i PID regulator. Sada su prikazani odzivi MDS sustava s tri modela trenja i PD regulatorom. Vrijednosti parametara kod PD regulatora isti su kao kod PID regulatora (Tablica 4.1) osim što PD regulator nema integracijski član pa je integracijsko pojačanje  $K_i = 0$ .



Slika 4.4: Sile trenja s PID regulatorom

Prema slici 4.5 PD regulatorom postiže se stacionarna točnost samo s MDS sustavom bez modela trenja, dok s MDS sustavom s modelima trenja ne postiže stacionarnu točnost.

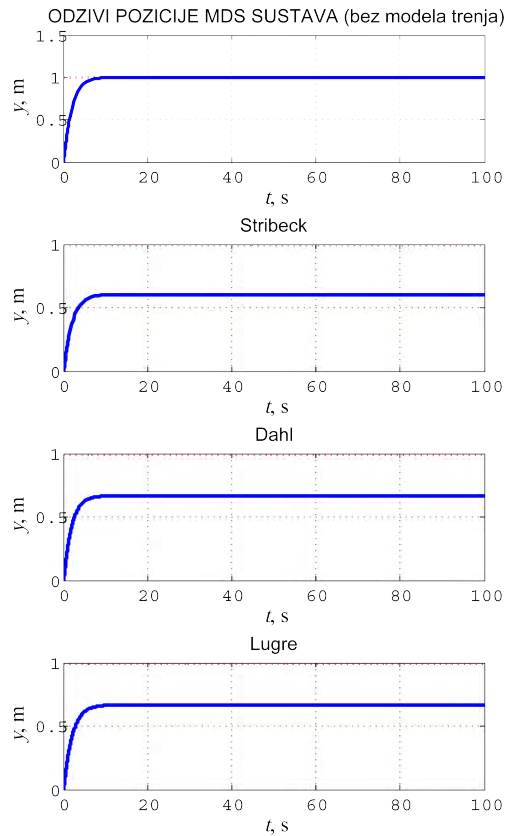
U prethodnim slučajevima model mehaničkog sustava bio je predstavljen MDS sustavom odnosno masom  $m$ , dok elastičnosti  $D$  i  $S$  bile zanemarene jer su one zanemarivog iznosa pri gibanju mase po horizontalnoj ravnini.

Bolji model mehaničkog sustava dobije se ako se uključi dinamika aktuatora (elektromotora) u postojeći MDS sustav, kraće MDS-A. Prvo je razmotren model MDS-A s modelima trenja i PID regulatorom.

Na slikama (4.9, 4.10, 4.11, 4.12) su rezultati simulacije cijelokupnog sustava kojeg čine PID regulator, MDS-A odnosno MDS sustav s dinamikom aktuatora (elektromotora) bez modela trenja i s tri modela trenja (Stribeck, Dahl, Lugre).

Prema slici 4.9 odziv sustava bez trenja i odziv sustava s Stribeckovim modelom trenja je veoma sličan. To je zato jer je Stribeckov model trenja statički model te djeluje samo prilikom pokretanja mase, te već kod malih pojačanja regulatora (Tablica 4.1) se on uspješno kompenzira. Na slici 4.13 prikazan je utjecaj trenja na sustav prema Stribeckovom modelu kada su postavljena jedinična pojačanja regulatora.

Iz slike 4.13 se vidi se da kod odziva sustava s Stribeckovim modelom trenja dolazi do preskoka pozicije u odnosu na odziv sustava bez trenja. Kako je to statički model trenja, sila trenja nakon dvadesetak sekundi ustali i njezin utjecaj nema više utjecaja.



Slika 4.5: Odzivi pozicije mase MDS sustava s PD regulatorom

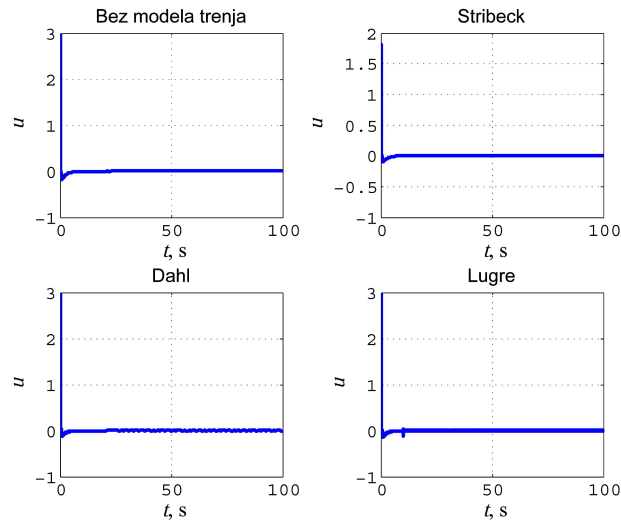
Tablica 4.2: Vrijednosti parametara PID regulatora

Parametri	Vrijednosti
$K_p$	1
$K_d$	1
$K_i$	1

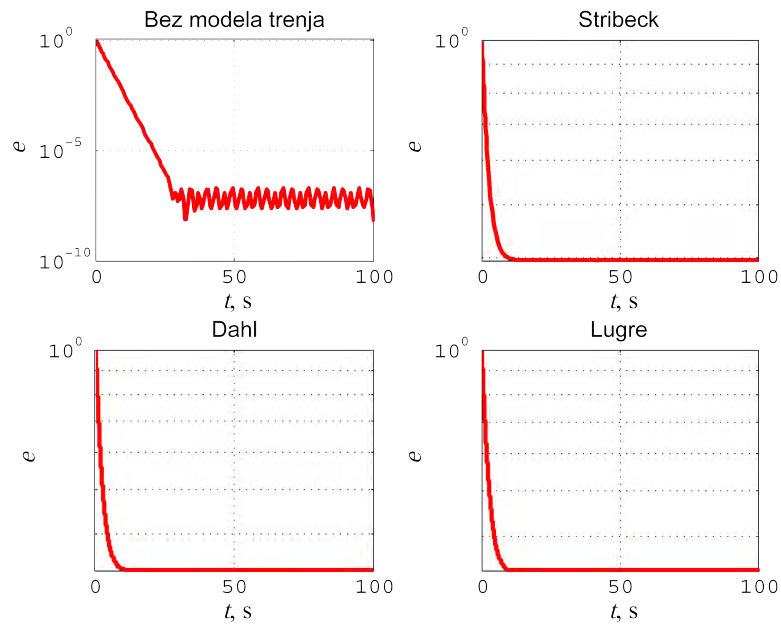
Kod odziva sustava s Dahlovim modelom i Lugre modelom u odnosu na odziv sustava bez trenja javlja se "*limit cycle*" efekt, događaju se oscilacije oko referentne vrijednosti (Slika 4.9). Zbog samih modela trenja sila trenja ima pojavu "*chattering*" jer su oba modela diskontinuirani te se kod upravljačke varijable također javlja "*chattering*" (Slika 4.10).

Pogreška regulacije kod modela mehaničkog sustava s Dahlovim i Lugre modelom trenja je većeg iznosa zbog pojave graničnih ciklusa "*limit cycles*", te se ne postiže stacionarna točnost (Slika





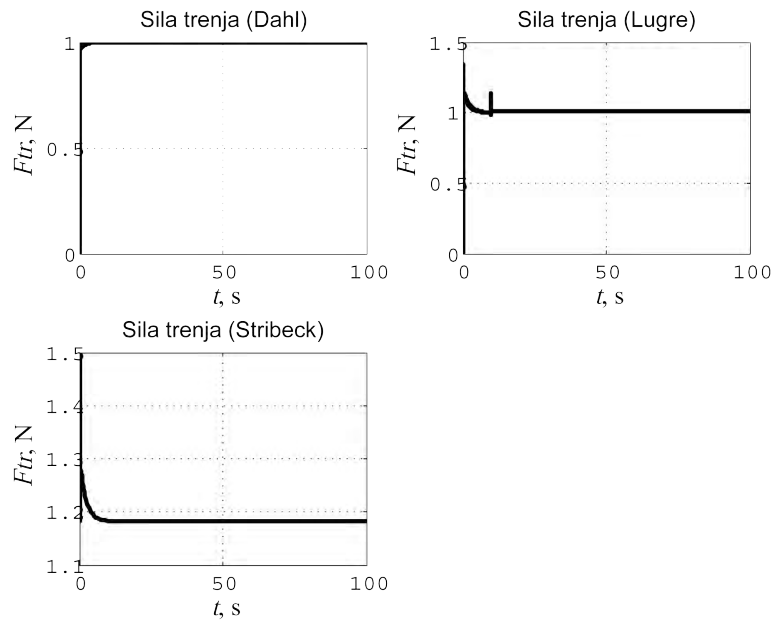
Slika 4.6: Upravljačka varijabla MDS sustava i PD regulatora



Slika 4.7: Pogreška regulacije PD regulatora u logaritamskom mjerilu

4.11).

Prema slici 4.12 se vidi izražena pojava "*chattering*" kod iznosa sile trenja u Dahlovom i Lugre modelu koji su diskontinuirani zbog funkcije *sign*.

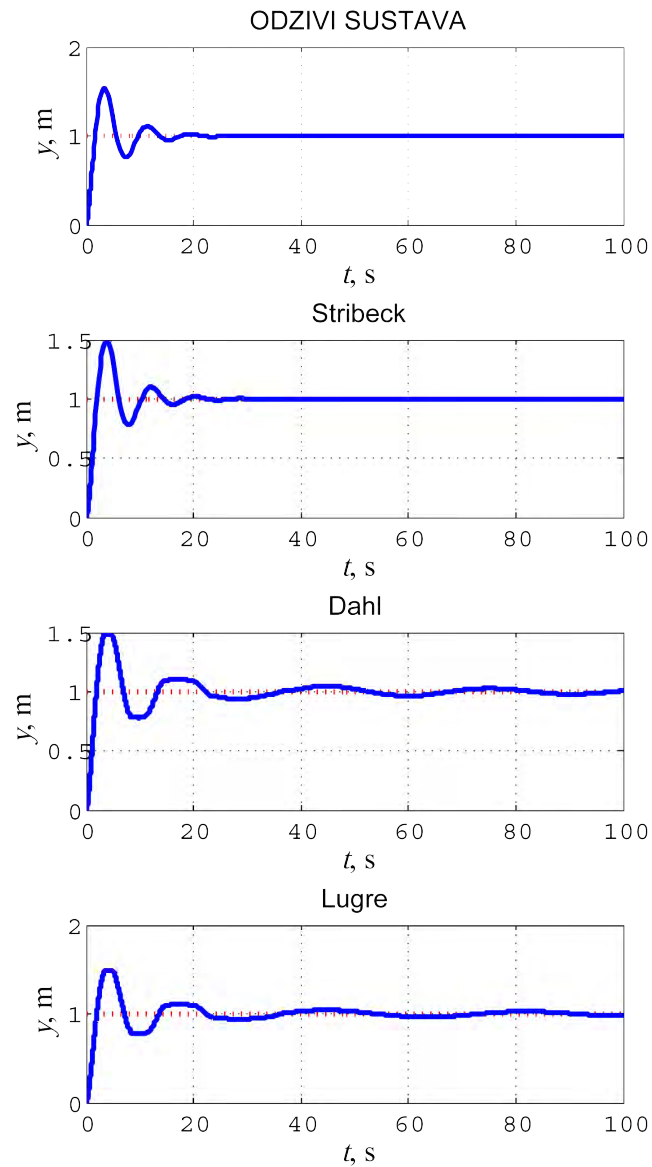


Slika 4.8: Sile trenja s PD regulatorom

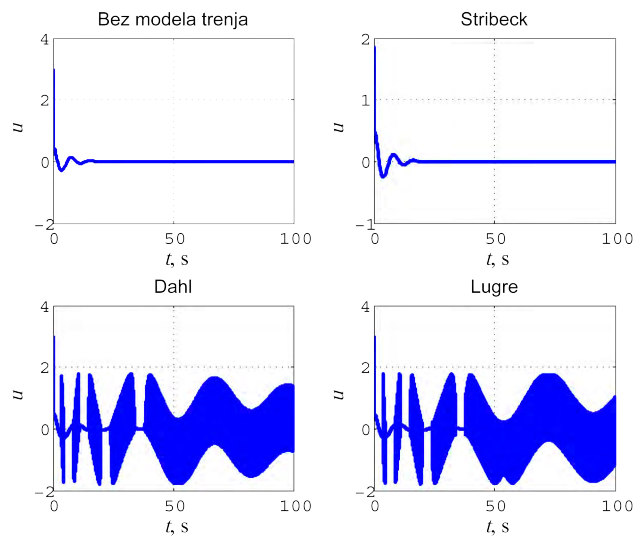
Sada se MDS-A s uključenom modelima trenja umjesto PID regulatora postavlja PD regulator.

Prema slici 4.14 se vidi, kao i kod PD regulatora s MDS sustavom, da se stacionarna točnost postiže samo kod MDS-A bez modela trenja, a da se kod MDS-A s modelima trenja ne postiže stacionarna točnost u promatranom vremenu. Kod MDS-A s Lugre modelom trenja javljaju se granični ciklusi "*limit cycles*".

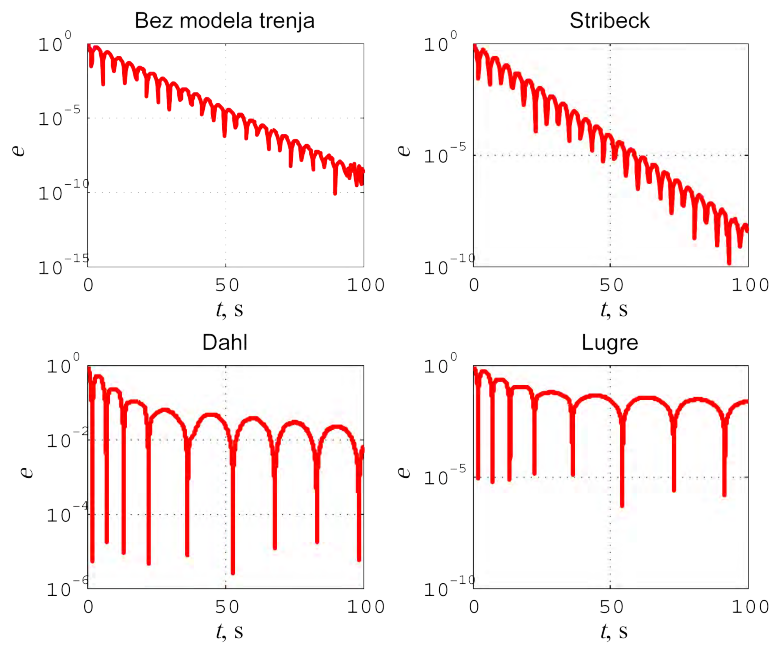
Kod upravljačke varijable mehaničkog sustava javlja se pojava "*chatteringa*" samo kod MDS-A s Lugre modelom trenja (Slika 4.15). To se javlja zbog djelovanja sile prema Lugre modelu i javljanja pojave graničnih ciklusa pri pozicioniranju mase.



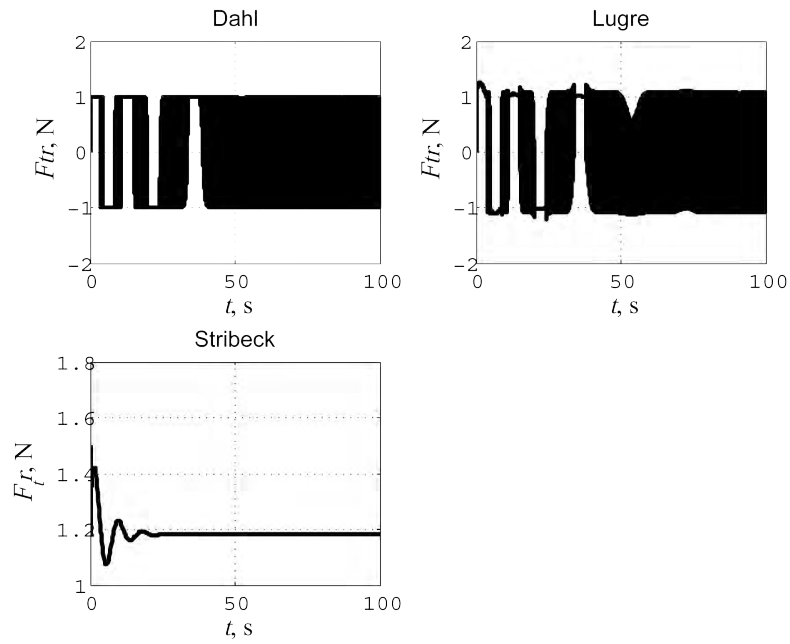
Slika 4.9: Odzivi pizicije mase MDS-A s PID regulatorom



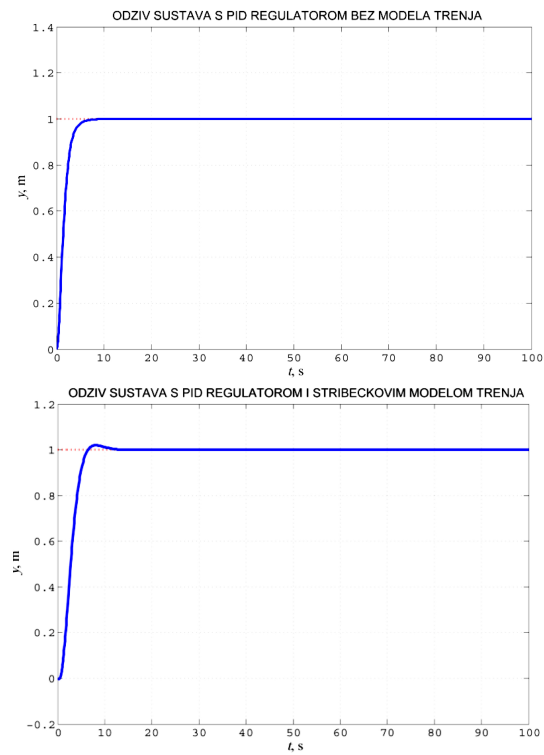
Slika 4.10: Upravljačka varijabla MDS-A i PID regulatora



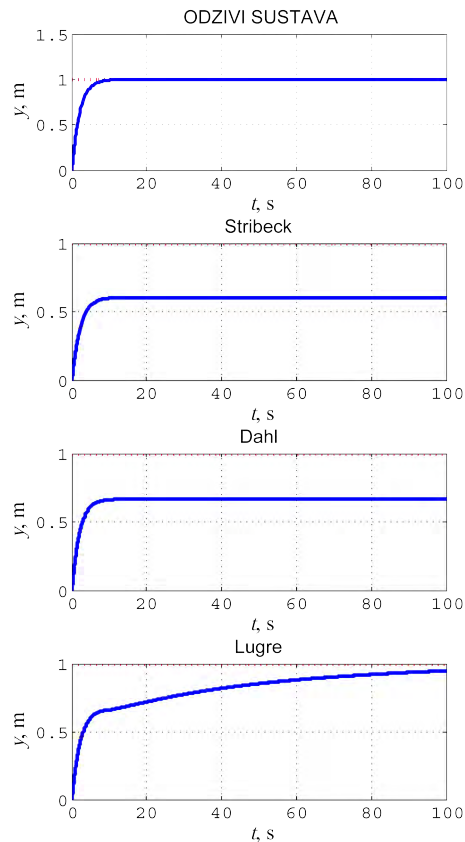
Slika 4.11: Pogreška regulacije PID regulatora u logaritamskom mjerilu



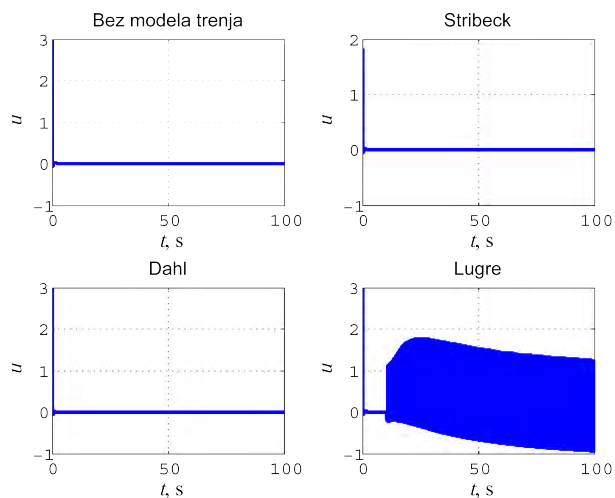
Slika 4.12: Sile trenja s PID regulatorom



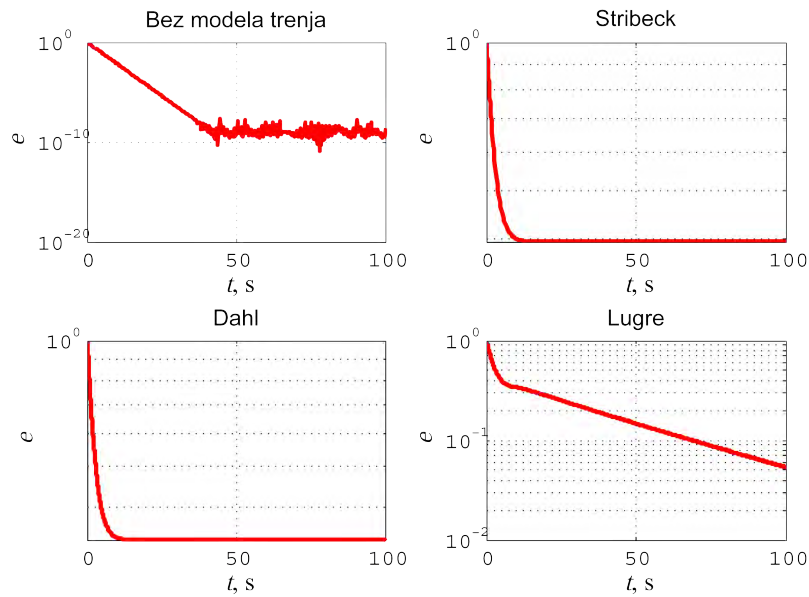
Slika 4.13: Odzivi pozicije mase MDS-A s PID-om bez i sa Stribecovim modelom trenja



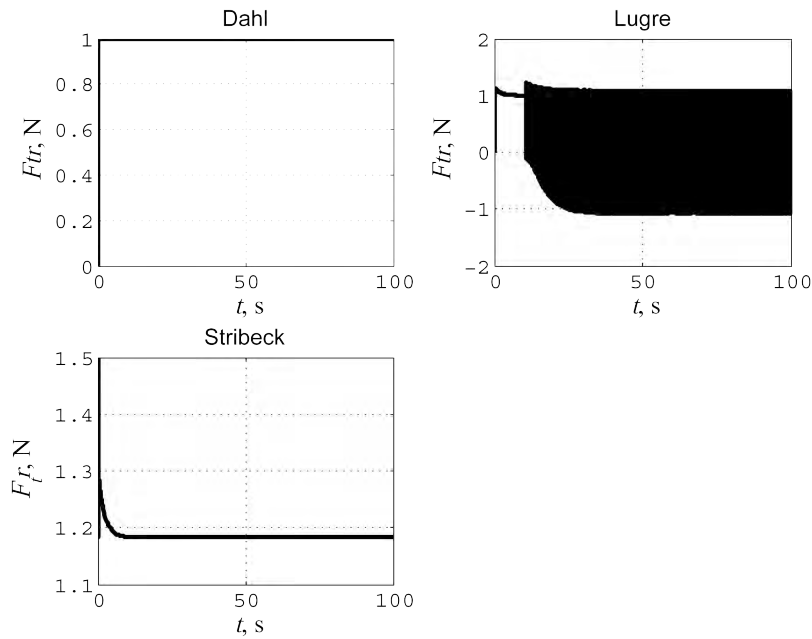
Slika 4.14: Odzivi pozicije mase MDS-A s PD regulatorom



Slika 4.15: Upravljačka varijabla MDS-A i PD regulatora



Slika 4.16: Pogreška regulacije PD regulatora u logaritamskom mjerilu



Slika 4.17: Sile trenja s PD regulatorom

## 5 REGULACIJA S KOMPENZACIJOM TRENJA

U ovom radu su opisana dva načina regulacije s kompenzacijom trenja:

- bez observera trenja
- s observerom (estimatorom) trenja

Objekt upravljanja je MDS sustav s dinamikom aktuatora koji se giba u horizontalnoj ravnini, kraće MDS-A.

Regulacija i kompenzacija trenja samo regulatorom bez observera trenja temelji se na blok dijagramu prema slici 3.2 . Prema tom blok dijagramu regulator osim što upravljanja MDS-A treba i kompenzirati utjecaj trenja. Korištena su i uspoređena četiri regulatora:

- PD regulator
- PID regulator
- Regulator s kliznim režimom
- PID regulator s kliznim režimom

Regulacija s kompenzacijom trenja s observerom trenja temelji se na blok dijagramu prema slici 3.3. Prema tom blok dijagramu observer trenja, koji je u biti estimator trenja temeljen na Lugre modelu trenja, kompenzira utjecaj trenja, a regulator samo upravlja mehaničkim sustavom.

### 5.1 Regulacija s kompenzacijom trenja bez observera trenja

Prilikom upravljanja modelom mehaničkog sustava korištena su četiri regulatora koji su prethodno navedeni.

PD i PID regulatori su korišteni zbog njihove lake implementacije, jednostavne strukture i načina korištenja, velike rasprostranjenosti i zadovoljavajućih performansi upravljanja. Upravljački signal formira se ovisno o trenutnoj vrijednosti pogreške (proporcionalno djelovanje), ovisno o tome kako se pogreška mijenjala u prošlosti (integracijsko djelovanje) i ovisno o tome kakav je trenutni trend porasta pogreške (derivacijsko djelovanje). Kod PID regulatora sva tri djelovanja djeluju istovremeno dok kod PD regulatora djeluju samo proporcionalno i derivacijsko djelovanje istovremeno. Analiza stabilnosti je složenija kod PID regulatora nego kod PD regulatora.

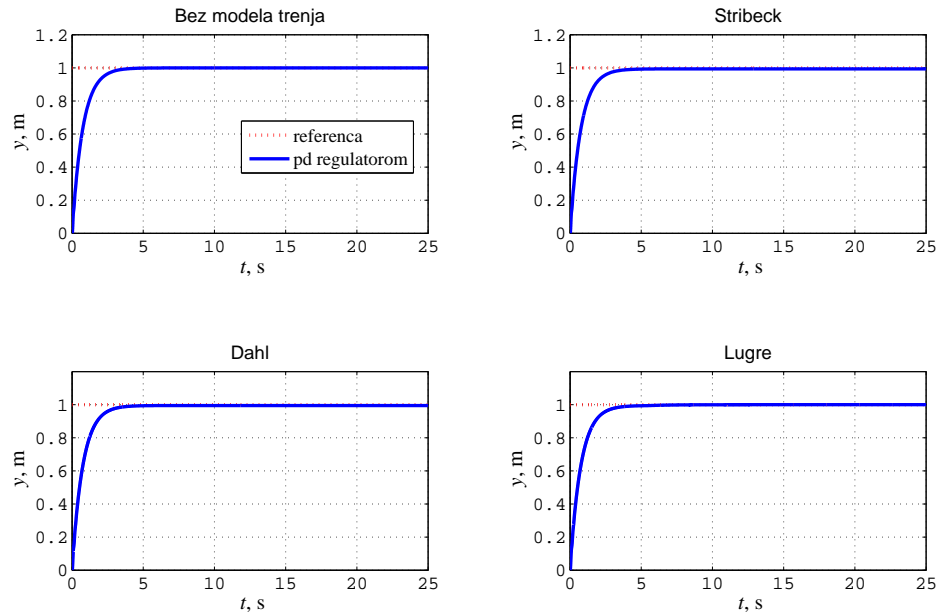
Kako bi se poboljšale performanse sustava korišteni su robusniji postupci nelinearnog upravljanja koji kompenziraju različite vanjske poremećaje, u ovom slučaju utjecaj trenja. Važna karakteristika upravljanja s kliznim režimom je njegova robusnost na promjene parametara sustava,



nemodeliranu dinamiku i jednostavnost algoritma na računanje. Način upravljanja i održavanje ograničenja kod kliznom režimu je trenutna reakcija na bilo koje odstupanje sustava vraćajući ga natrag u ograničenja upotrebom dovoljno energije. Robusnost upravljanja postiže se trenutnom jakom reakcijom na najmanja odstupanja, ali to dovodi do pojave "*chatteringa*". To dovodi do jakog trošenja pokretnih mehaničkih dijelova i velikih gubitaka energije. Pojava "*chatteringa*" se smanjuje da se funkcija *sign* zamijeni nekom sigmoidalnom funkcijom ili funkcijom zasićenja, u ovom slučaju funkcija *sign* zamijenjena je funkcijom *tanh* kako je opisano u poglavlju 3.2.2 [16, 14, 18, 17].

### 5.1.1 PD regulator

Ovdje su prikazani rezultati simulacija regulacije s PD regulatorom, u kojem PD regulator upravlja MDS sustavom s dinamikom aktuatora i kompenzira utjecaj trenja. Na sljedećoj slici prikazani su odzivi pozicije MDS sustava s dinamikom aktuatora.



Slika 5.1: Odziv pozicije mase MDS-A i PD regulatorom

Iz slike 5.1 se vidi da se PD regulatorom postiže stacionarna točnost samo kod MDS-A bez modela trenja. Kod MDS-A sa Stribeckovim i Dahlovim modelom trenja postoji stacionarna pogreška konstantnog iznosa. Slično tomu je i kod MDS-A s Lugre modelom trenja se javlja pojava graničnih ciklusa, te tako se nikada se ne postiže stacionarna točnost.

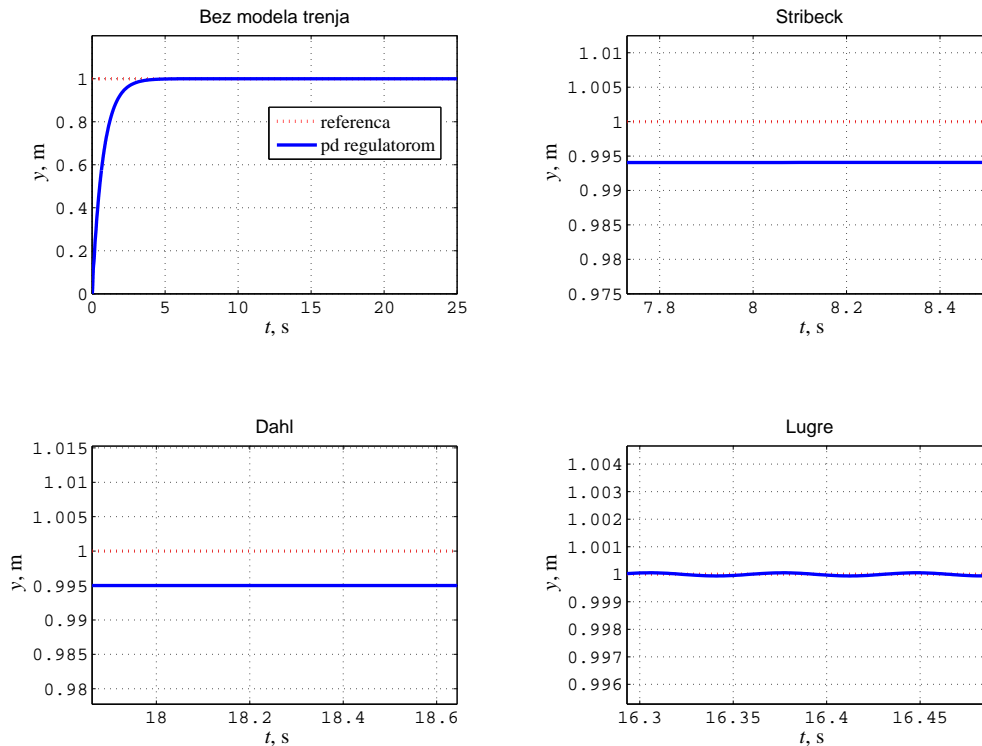
Na slici 5.2 ilustrirana je konstantna stacionarna pogreška MDS-A sa Stribeckovim i Dahlovim modelom trenja, te pojava graničnih ciklusa (engl. *limit cycles*) kod MDS-A s Lugre modelom trenja.

Na slici 5.3 prikazana je upravljačka varijabla MSD-A s PD regulatorom. Iznos upravljačke varijable određuje se parametrima regulatora koji su odabrani po metodi polova i da postignu što bolju dinamiku odziva i da što bolje potisnu utjecaje trenja. Optimalni parametri PD regulatora prikazani su u tablici 5.1. Parametri sustava i modela trenja nalaze se u tablicama 3.1 i 3.3 .

Iznos upravljačke varijable je najveći na početku, te oscilatorno pada prema nuli unutar prve

Tablica 5.1: Parametri PD regulatora

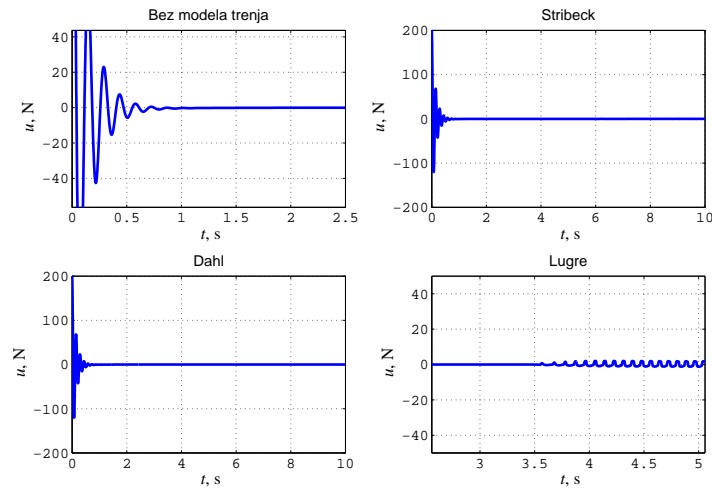
Parametri	Vrijednosti
$K_p$	200
$K_d$	150



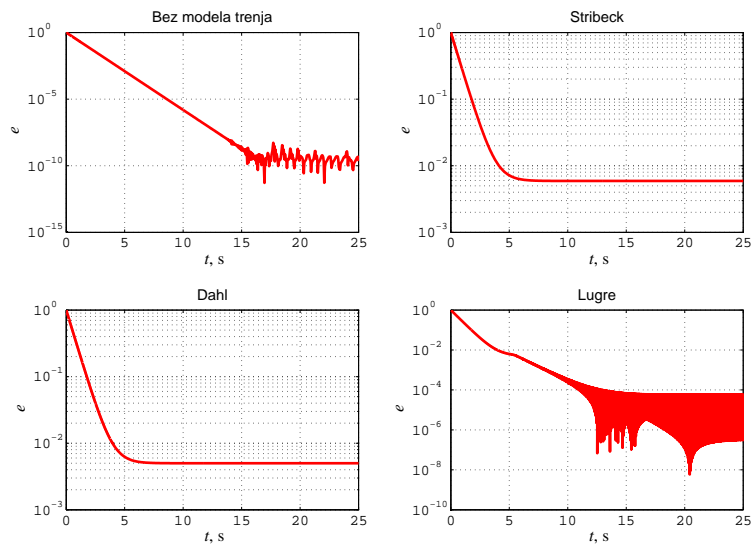
Slika 5.2: Stacionarna pogreška mase pozicije i granični ciklusi

sekunde. To je za očekivati jer pogreška je tada najveća i regulator je želi što brže potisnuti. Kod MDS-A s Lugre modelom trenja javlja se pojava "*chatteringa*" što je posljedica djelovanja trenja odnosno pojave graničnih ciklusa.

Kod MDS-A bez modela trenja nema djelovanja trenja, te nema ni mijenjanje vrijednosti upravljačke varijable i prema iznosu regulacijske pogreške (Slika 5.4) postiže se stacionarno stanje. Kod MDS-A sa Stribeckovim i Dahlovim modelom trenja nema promjene upravljačke varijable jer sila



Slika 5.3: Upravljačka varijabla MDS-A s PD regulatorom

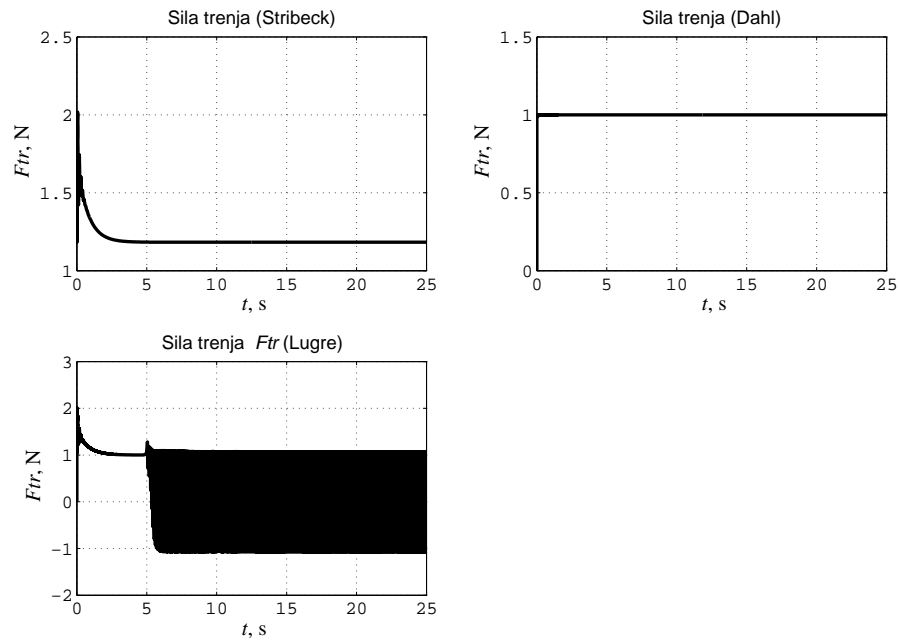


Slika 5.4: Pogreška regulacije PD regulatora u logaritamskom mjerilu

trenja je konstantna, jedino postoji konstantna stacionarna pogreška (Slika 5.4).

Usporedbom slika 4.14 i 5.1 vidi se da povećanjem parametara odnosno pojačanja PD regulatora se smanjila stacionarna pogreška, ali nije potpuno nestala, dok se kod MDS-A s Lugre modelom trenja javlja pojava graničnih ciklusa.

Usporedbom slika 4.15 i 5.3 iznosi upravljačke varijable su većeg iznosa nego od upravljačke varijable u prethodnom poglavlju jer su veći iznosi pojačanja PD regulatora.

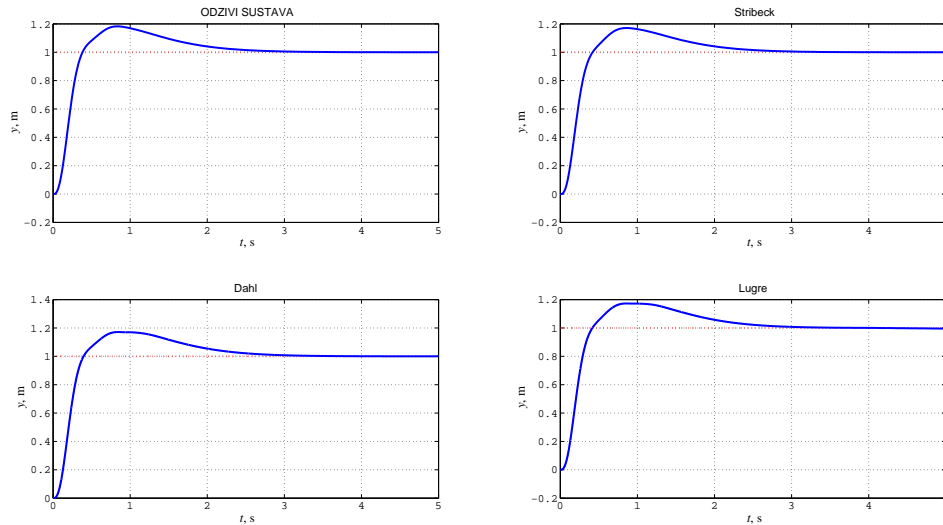


Slika 5.5: Sile trenja s PD regulatorom

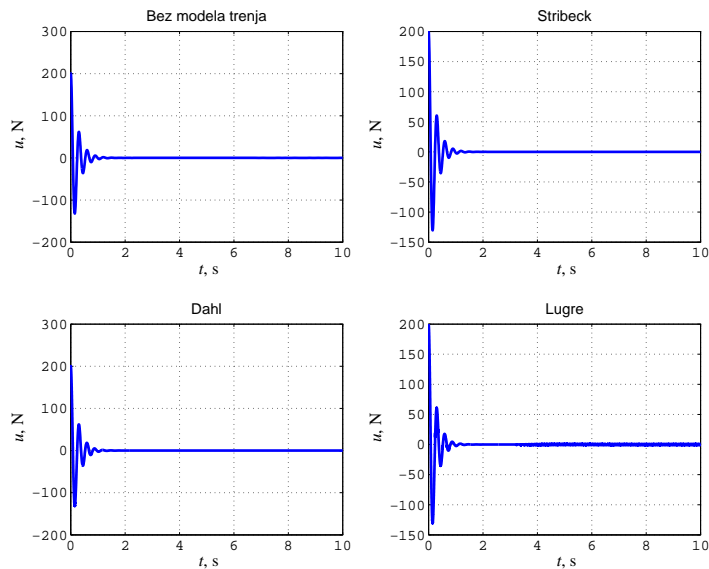
Pogreška regulacije se smanjila jer je i stacionarna pogreška manja (Slika 4.16 i 5.4). Djelovanje sile trenja s PD regulatorom je slično za oba slučaja (Slika 4.17 i 5.5).

### 5.1.2 PID regulator

Kod regulacije MDS-A s utjecajem trenja javlja se stacionarna pogreška pozicije mase i pojava graničnih ciklusa. Da bi se eliminirala stacionarna pogreška uvodi se integralno djelovanje.



Slika 5.6: Odziv pozicije mase MDS-A s PID regulatorom



Slika 5.7: Upravljačka varijabla MDS-A s PID regulatorom bez prefiltera

Usporedbom odziva pozicije mase MDS-A (Slika 4.9 i 5.6), podešavanjem parametara PID

regulatora metodom podešavanja polova eliminira se pojava graničnih ciklusa, ali se javlja nadvišenje u prijelaznoj pojavi.

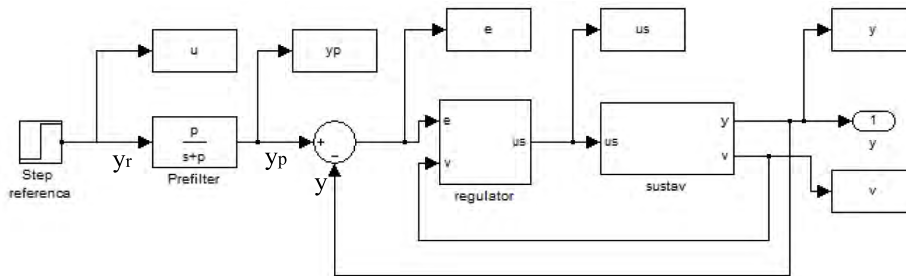
U sustavima s prisutnim utjecajem trenja javlja se osim pojave graničnih ciklusa i stacionarne pogreške, javlja se značajni iznos nadvišenja u prijelaznoj pojavi kod odziva pozicije mase.

Razlog toga je u naglom smanjenju sile trenja pri prijelazu iz područja statičkog u područje dinamičkog trenja. Postoje različiti postupci modifikacije integralnog djelovanja kojima se eliminira utjecaj trenja na kvalitetu regulacije s PID regulatorom.

Ovdje je istražen postupak eliminiranja utjecaja trenja uvođenjem prefiltera pozicije [13]. Njime se eliminira nadvišenje pozicije mase i postiže se aperiodski odziv bez preskoka. Princip djelovanja prefiltera je da umjesto *step* reference uvodi nova referenca i to P1 član koji predstavlja prefilter. Time regulator prati referencu P1 člana  $y_p$  koja sama po sebi ima aperiodski odziv bez nadvišenja. Na slici 5.8 prikazan je simulink model sustava s prefilterom pozicije. Jednadžba reference P1 člana iznosi

$$y_p = \frac{p}{s + p} y_r \quad (5.1)$$

gdje  $p$  - pol sustava kojim se određuje brzina odziva i iznos nadvišenja. Ako je njegov iznos veći tada je odziv pozicije mase brži, a nakon nekog iznosa javlja se i nadvišenje. Što je manji odziv je sporiji.



Slika 5.8: Simulink model sustava s prefilterom pozicije

Na sljedećim slikama prikazani su rezultati simulacija MDS-A s PID regulatorom i prefilterom. Parametri PID regulatora i vrijednost pola prefiltera nalaze se u tablici 5.2. Parametri MDS-A nalaze se u tablici 3.1, a modela trenja u tablici 3.3 .

Na slici 5.9 se vidi da se postiže aperiodski odziv pozicije mase bez nadvišenja. Sada PID regulator prati referencu prefiltera i pogreška regulacije je manja u odnosu na pogrešku regulacije između *step* reference pozicije i postignute pozicije. To se očitava na vrijednostima upravljačke varijable na slici 5.10 koje su mnogo manjeg iznosa nego upravljačka varijabla kod PD regulatora

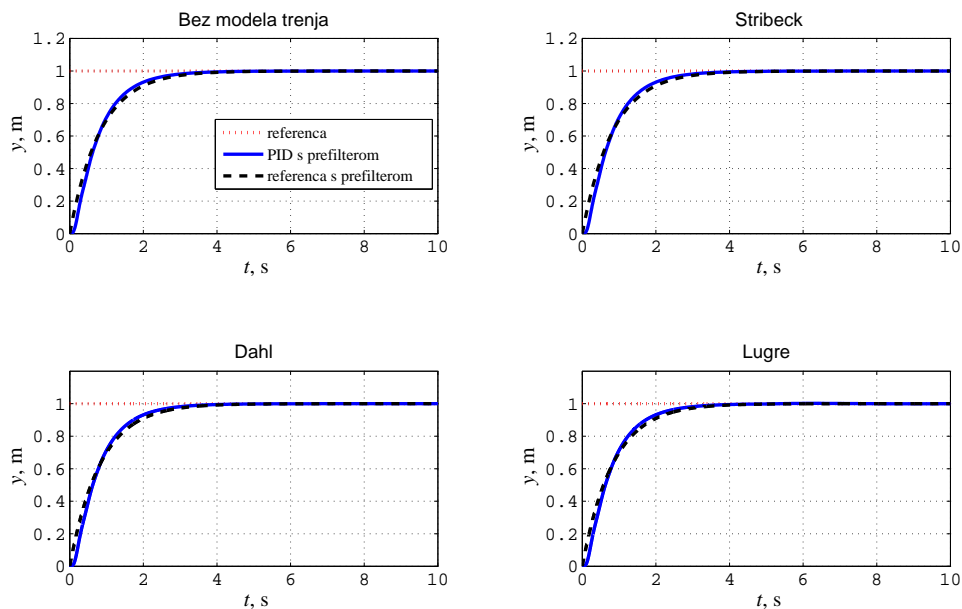
Tablica 5.2: Parametri PID regulatora

Parametri	Vrijednosti
$K_p$	200
$K_d$	300
$K_i$	27
$p$	1, 2

i PID regulatora bez prefiltera (Slika 5.7).

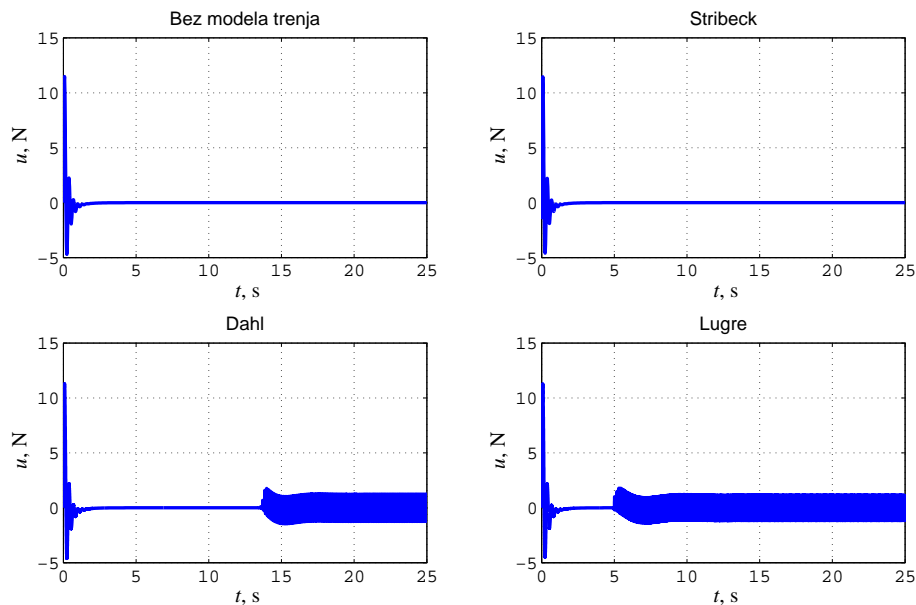
Upravljačka varijabla kod MDS-A s Dahlovim i Lugre modelom ima izraženu pojavu "*chatteringa*" što je posljedica djelovanja trenja (Slika 5.12). Pogreška regulacije između *step* reference pozicije i postignute pozicije (Slika 5.11) su većeg iznosa nego kod MDS-A bez modela trenja i sa Stribeckovim modelom trenja.

To se događa zbog pojave graničnih ciklusa (engl. *limit cycles*) (Slika 5.13) koji su posljedica utjecaja trenja kod Dahlovog i Lugre modela trenja.



Slika 5.9: Odziv pozicije mase MDS-A s PID regulatorom i prefilterom

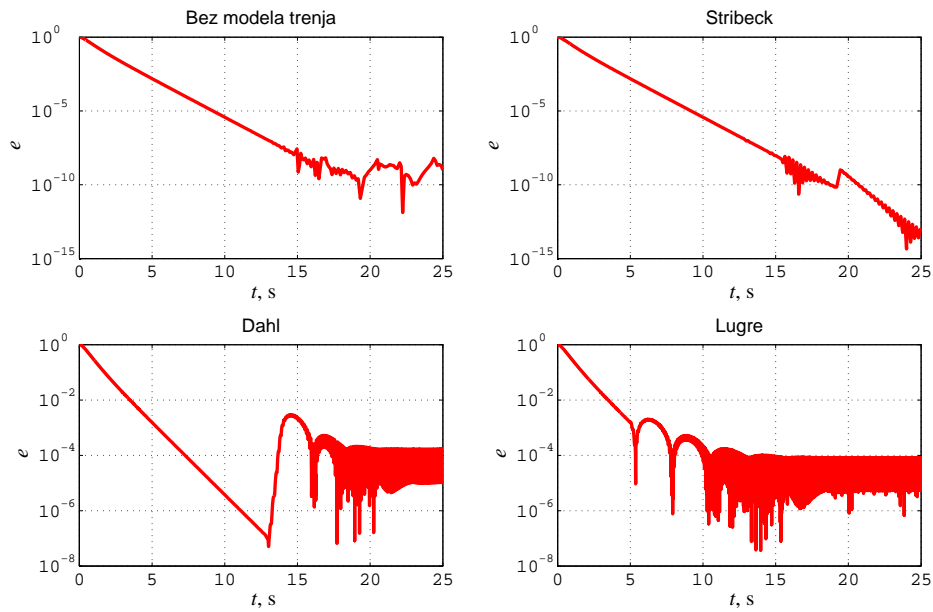




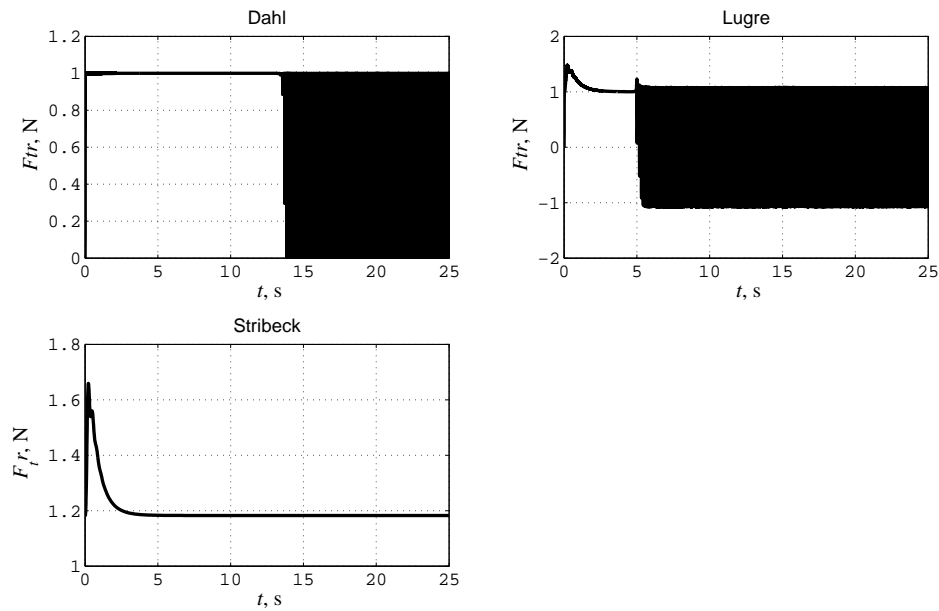
Slika 5.10: Upravljačka varijabla MDS-A s PID regulatorom i prefilterom

Regulacijom s PID regulatorom i prefilterom pozicije pozicije postiže se potpuno eliminiranje nadvišenja u prijelaznoj pojavi, ali se nepostiže potpuno eliminiranje pojava graničnih ciklusa koji su posljedica djelovanja trenja.

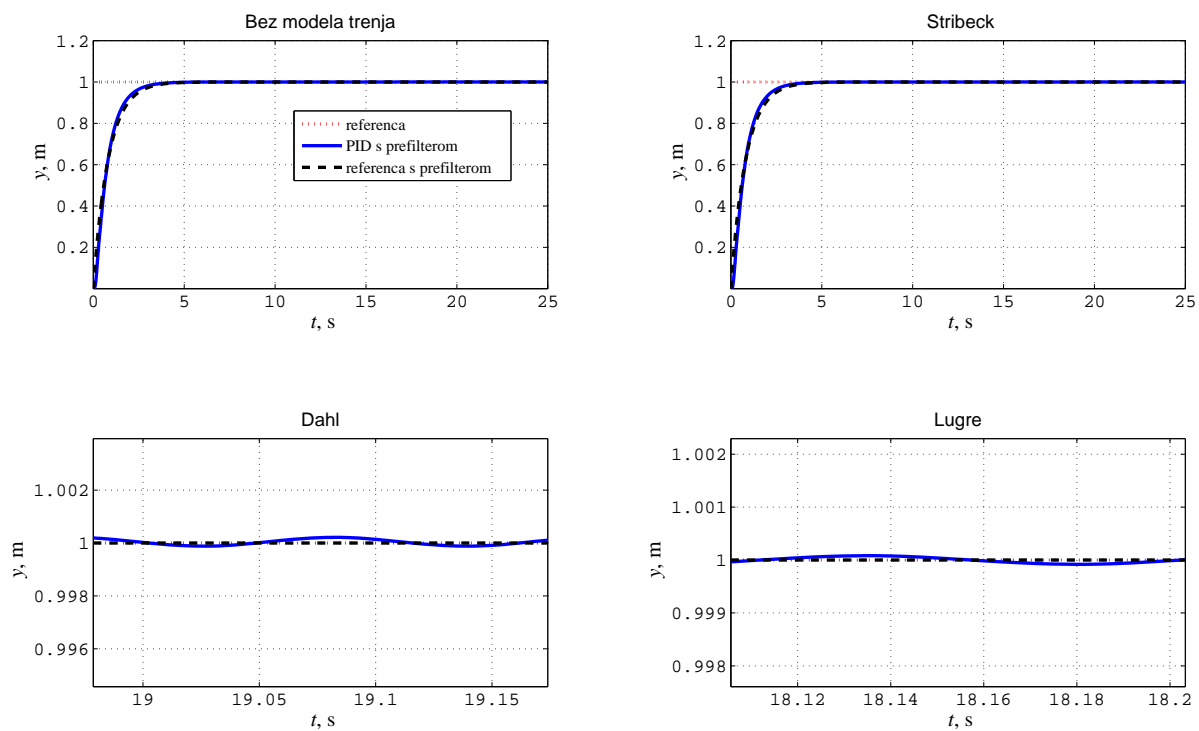
Upravljačka varijabla MDS-A mnogo je manjeg iznosa kada se koristi prefilter pozicije. Uvođenjem prefiltera smanjuje se performansa sustava, ali se poboljšava točnost regulacije odnosno kvaliteta regulacije.



Slika 5.11: Pogreška regulacije PID regulatora u logaritamskom mjerilu



Slika 5.12: Sile trenja s PID regulatorom



Slika 5.13: Pojava graničnih ciklusa

### 5.1.3 Regulator s kliznim režimom

Kako bi se potpuno eliminirao utjecaj trenja i poboljšale performanse sustava istraženi su robusniji postupci nelinearnog upravljanja, a to je regulator s kliznim režimom. Parametri MDS-A nalaze se u tablici 3.1, a modela trenja u tablici 3.3. Parametri regulatora s kliznim režimom odabrani su prema metodi polova i nalaze se u tablici 5.3

Tablica 5.3: Parametri regulatora s kliznim režimom

Parametri	Vrijednosti
$K_p$	40
$K_d$	14
$\rho$	20
$\alpha$	5
$k$	1000

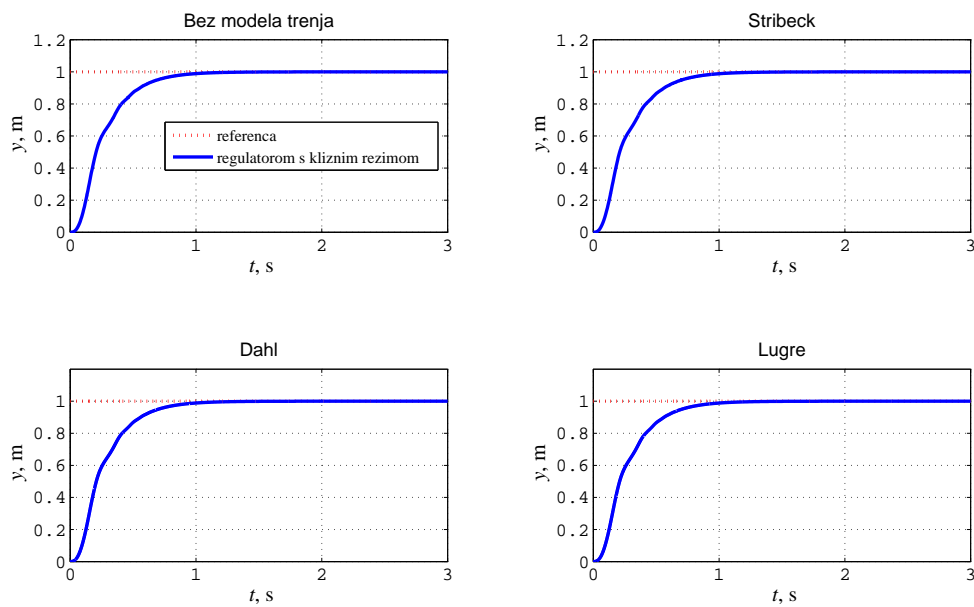
gdje je  $\rho$  - parametar koji određuje jačinu reakciju na poremećaje. Parametar  $\alpha$  - određuje dinamiku odziva što je većeg iznosa odziv sustava je brži. Parametar  $k$  - je pojačanje koji određuje oblik funkcije upravljanja. Taj parametar se odnosi na funkciju  $\tanh(kx)$  koja zamjenjuje funkciju  $\text{sign}$  zbog smanjenja pojave "chateringa" u upravljačkoj varijabli. U poglavlju 5.1 ukratko je opisano djelovanje regulatora s kliznim režimom.

Postiže se izrazito brzi aperiodski odziv bez nadvišenja (Slika 5.14). Iznosi upravljačke varijable nisu velikih iznosa, ali imaju pojavu "chateringa" iako se koristi funkcija  $\tanh kx$ , a ne funkcija  $\text{sign}$  no zbog većeg iznosa parametra  $\rho = 20$  jaka je reakcija na vanjske poremećaje pa tako i na utjecaj trenja (Slika 5.15).

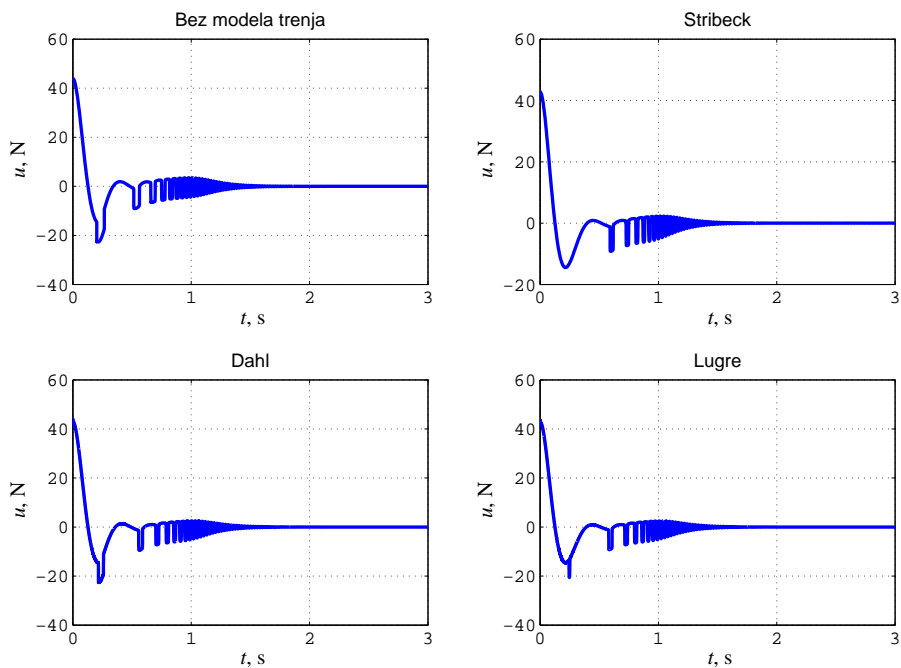
Pogreška regulacije je malog iznosa i potvrđuje da nema pojave graničnih ciklusa ni stacionarne pogreške (Slika 5.16).

Sile trenja nemaju izraženu pojavu "chateringa" kao u prethodnim slučajevima (Slika 5.17).

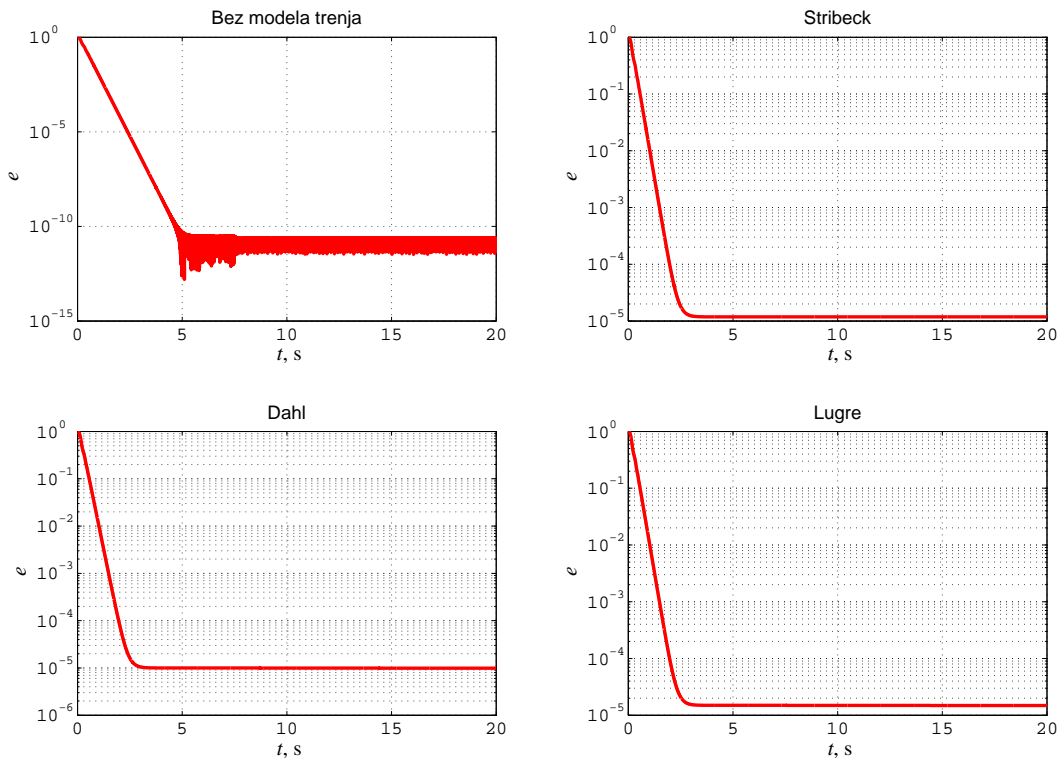
Regulator s kliznim režimom postiže optimalne performanse i kompenzira utjecaje trenja. Njime se postiže visoka kvaliteta regulacije.



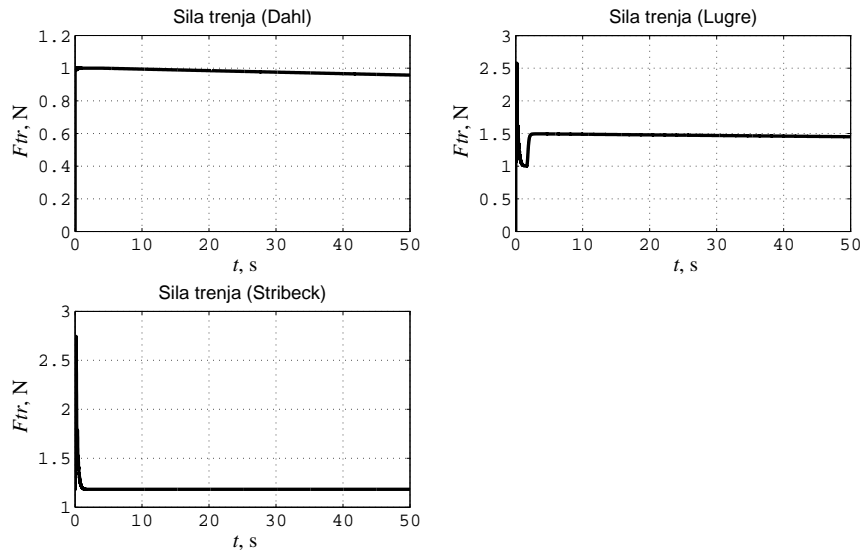
Slika 5.14: Odziv pozicije mase MDS-A s regulatorom s kliznim režimom



Slika 5.15: Upravljačka varijabla MDS-A s regulatorom s kliznim režimom



Slika 5.16: Pogreška regulacije s regulatorom s kliznim režimom u logaritamskom mjerilu



Slika 5.17: Sile trenja s regulatorom s kliznim režimom

#### 5.1.4 PID regulatorom s kliznim režimom

Kako bi se eliminirala pojava "*chatteringa*" u upravljačkoj varijabli kao kod regulatora s kliznim režimom uvodi se dodatni integracijski član na klizni režim i takav regulator naziva se PID regulator s kliznim režimom [18, 20].

Parametri MDS-A i parametri modela trenja dani su u tablicama 3.1 i 3.3 . Parametri PID regulatora s kliznim režimom dani su u tablici 5.4 .

Tablica 5.4: Parametri PID regulatora s kliznim režimom

Parametri	Vrijednosti
$K_p$	71
$K_d$	30
$K_i$	105
$\rho$	20
$\alpha$	5
$k$	1000

Na slici 5.18 prikazan je odziv pozicije mase s PID regulatorom s kliznim režimom.

Javlja se oscilacije pozicije mase oko referentne vrijednosti pozicije. S istim parametrima regulatori snimljeni su odzivi pozicije na MDS sustavu bez dinamike aktuatora (Slika 5.19)

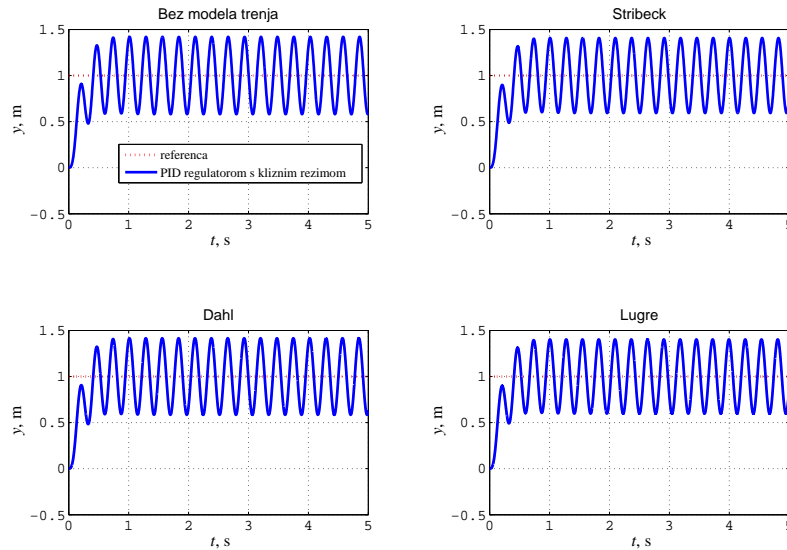
PID regulator s kliznim režimom postiže aperiodski odziv bez oscilacija te stacionarnu točnost za MDS sustav.

Problem kod PID regulatora s kliznim režimom je u stabilnosti kod sustava iznad trećeg reda. MDS sustav bez dinamike aktuatora (MDS) je sustav trećeg reda, a MDS sustav s uključenom dinamikom aktuatora (MDS-A) je sustav četvrtog reda.

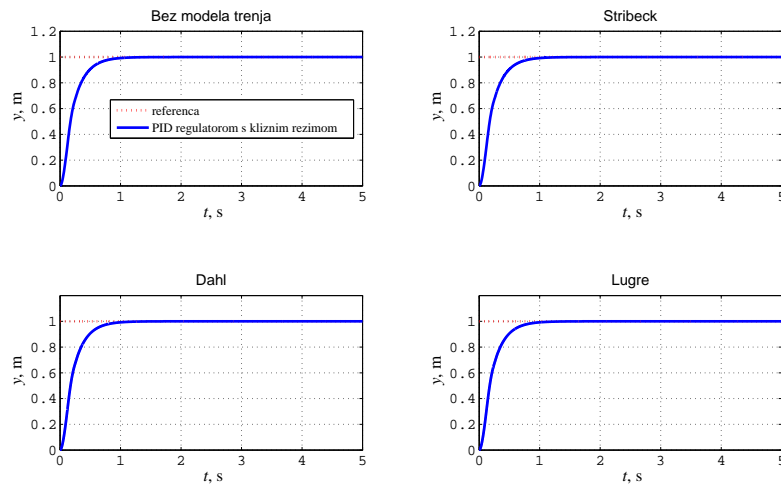
Kod MDS sustava za eliminiranje utjecaja trenja PID regulator s kliznim režimom djeluje na momente sustava. Kod MDS-A djeluje upravljačkom varijablom direktno na napone aktuatora i javljaju se oscilacije napone koje se preko aktuatora pretvaraju u silu i dolazi do osciliranja pozicije mase oko referentne vrijednosti pozicije.

PID regulator s kliznim režimom ne može se primjeniti na MDS-A jer uzrokuje nestabilnost cijelog sustava.

Moguće ga je primjeniti na MDS sustav bez dinamike aktuatora. Postiže visoke performanse



Slika 5.18: Odziv pozicije mase MDS-A s PID regulatorom s kliznim režimom

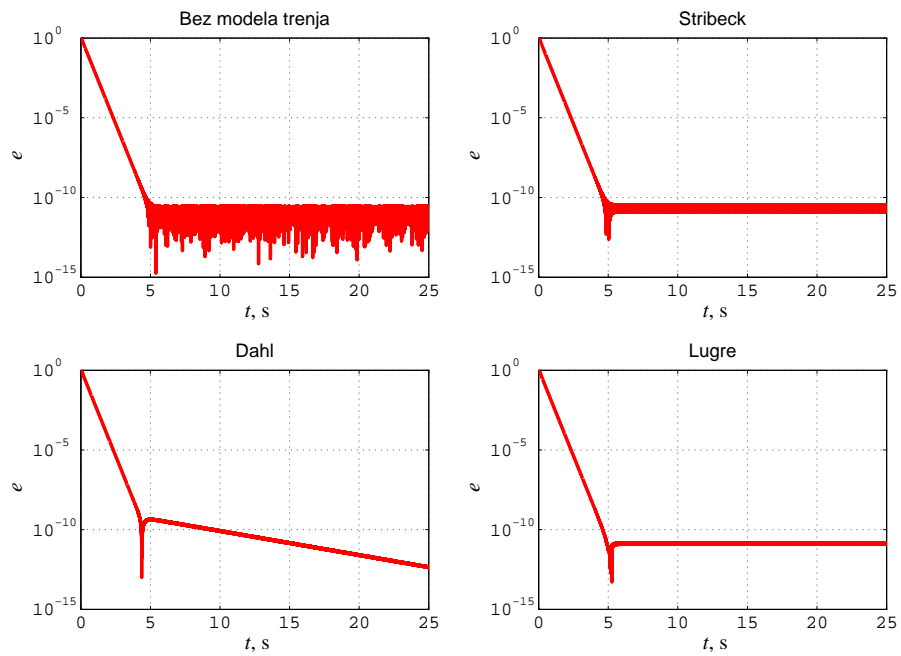


Slika 5.19: Odziv pozicije mase MDS sustava s PID regulatorom s kliznim režimom

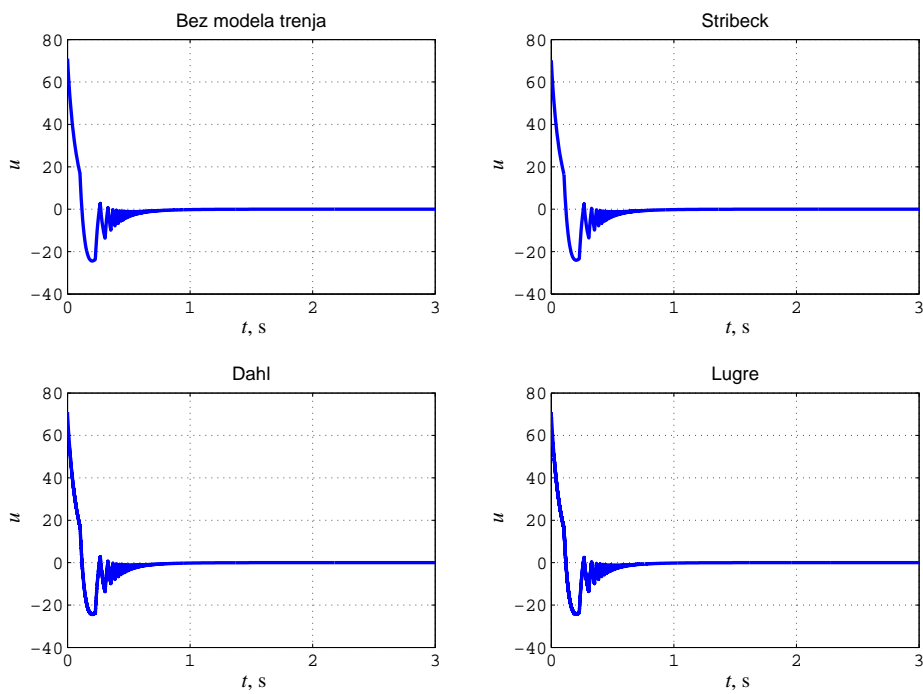
regulacije i vrlo dobro kompenzira utjecaje trenja (Slika 5.19).

Pogreška regulacije je vrlo mala (Slika 5.20), a upravljačka varijabla PID reulatora s kliznim režimom ima manje izraženu pojavu "*chatteringa*" nego kod regulatora s kliznim režimom (Slika 5.15 i 5.21).





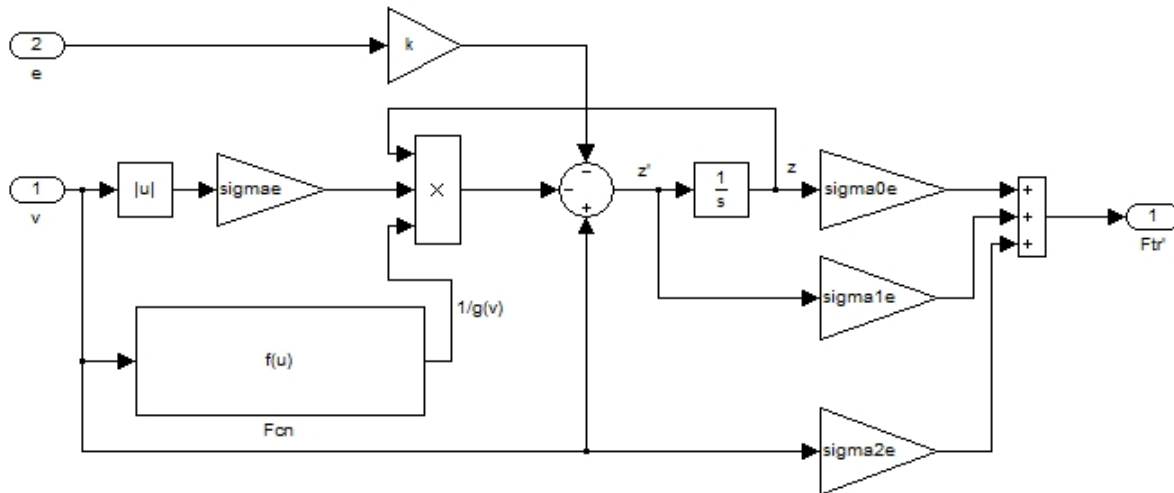
Slika 5.20: Pogreška regulacije s PID regulatorom s kliznim režimom u logaritamskom mjerilu (MDS)



Slika 5.21: Upravljačka varijabla MDS sustava s PID regulatorom s kliznim režimom

## 5.2 Regulacija s kompenzacijom trenja s observerom trenja

Drugi način regulacije s kompenzacijom trenja je s observerom trenja. Observer trenja kompenzira utjecaj trenja, a PD regulator upravlja s MDS sustavom s dinamikom aktuatora. Model observera trenja temelji se na Lugre modelu i dodan je ulaz za pogrešku pozicije pomoću koje se određuje pogreška estimacije. Simulink model prikazan je na slici 5.20 .



Slika 5.22: Simulink model observera trenja

Parametri observera trenja jednaki su parametrima Lugre modela trenja u tablici 3.3 . Jedina razlika je koeficijent estimacije  $k$  koji se mijenja kako je prikazano na slikama. Parametri PD regulatora odabrani su metodom polova i nalaze se u tablici 5.5

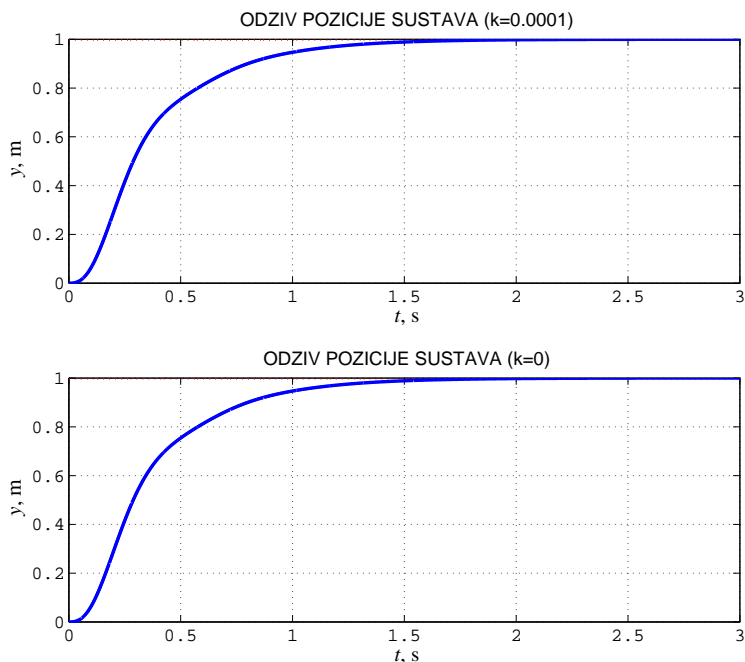
Tablica 5.5: Parametri PD regulatora s observerom

Parametri	Vrijednosti
$K_p$	32
$K_d$	12

Pri regulaciji su korišteni PD regulator i observer trenje. Model realnog trenja temelji se na Lugre modelu.

Ovakvom vrstom regulacije dobije se vrlo brz aperiodski odziv pozicije mase MDS-A bez preskoka ni pojave graničnih ciklusa (Slika 5.21).

Upravljačka varijabla je malih iznosa to je zato što observer izvrsno kompenzira utjecaj realnog trenja te PD regulator upravlja samo s MDS-A, te za to nije potrebno imati velika pojačanja.

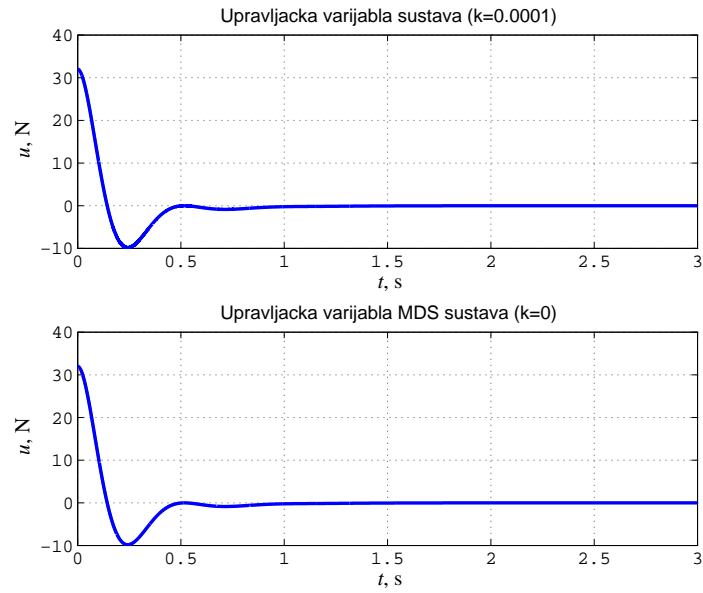


Slika 5.23: Odziv pozicije mase MDS-A s PD regulatorom i observerom trenja

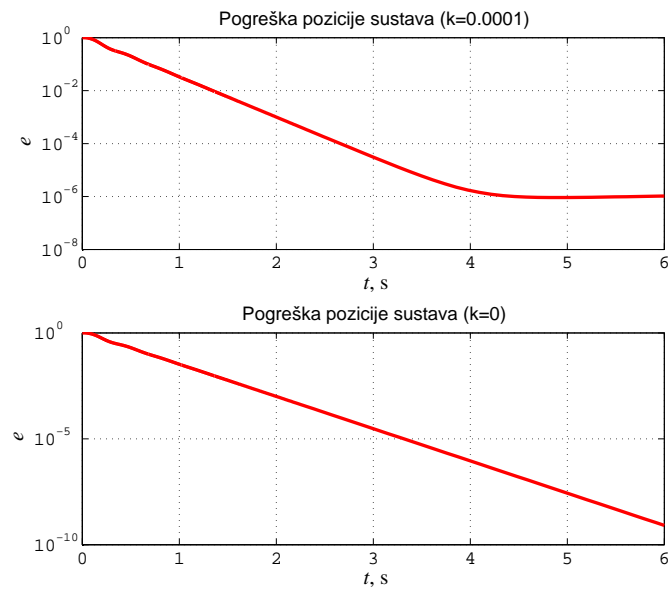
Pogreška je malog iznosa jer se postiže stacionarna točnost.

Koeficijent estimacije  $k$  - određuje kvalitetu estimacije trenja, a time i kvalitetu ukupne regulacije na ovaj način. Što je koeficijent estimacije veći to pogreška estimacije veća, a što je bliže nuli to je pogreška estimacije manja (Slika 5.24 i 5.25).

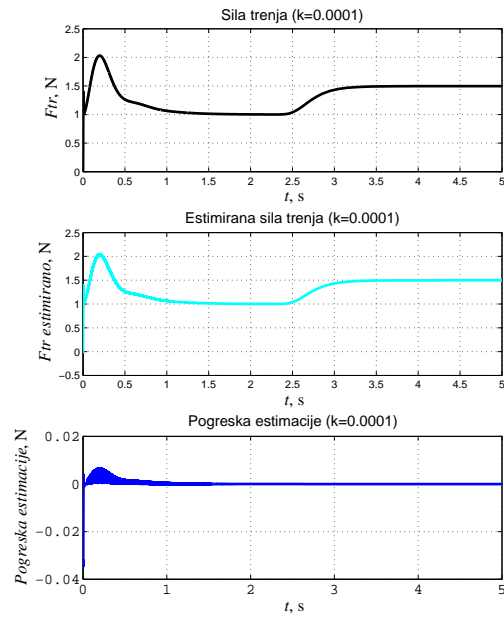
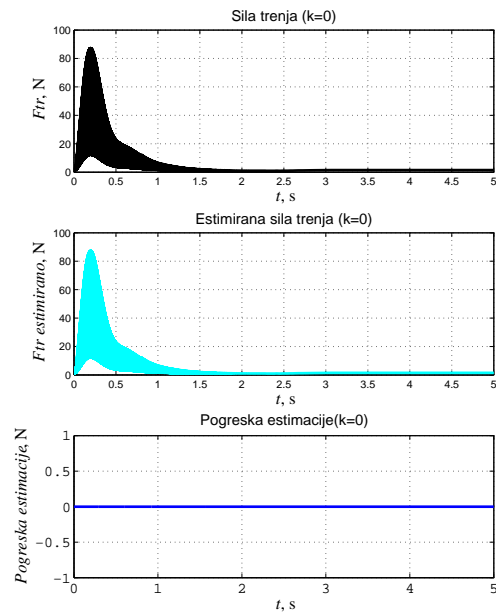
Ako je observer trenja dobro modeliran jako dobro može kompenzirati utjecaj trenja. Kombinacija observera trenja i PD regulatora daje jako slične rezultate regulatoru s kliznim režimom koji je mnogo složeniji za implementaciju.



Slika 5.24: Upravljačka varijabla MDS-A s PD regulatorom i observerom trenja



Slika 5.25: Pogreška regulacije PD regulatora i observera trenja u logaritamskom mjerilu

Slika 5.26: Pogreška estimacije sile trenja  $k = 0.0001$ Slika 5.27: Pogreška estimacije sile trenja  $k = 0$

## 6 ZAKLJUČAK

Trenje se pojavljuje u svakom mehaničkom sustavu.

Modeli realnog trenja temeljili su se na Stribeckovim, Dahlovim i Lugre modelu.

Lugre model najbolje opisuje realno trenje jer obuhvaća najviše temeljnih utjecaja trenja: statičko trenje, deformiranje asperitinih vlakana, viskozno trenje, Stribeckov efek, ovisnost sile trenja o relativnoj brzini i "*stick-slip*" gibanje.

Dahlov model ne obuhvaća Stribeckov efekt ni "*stick-slip*" gibanje. Stribeckov model obuhvaća statičko trenje, Stribeckov efekt i viskozno trenje.

Razvojem preciznih servo mehanizama pojavila se potreba za bolje razumijevanje te pojave. Osim što se stvaraju toplinski gubici, troše mehanički dijelovi javljaju se poteškoće kod preciznog pozicioniranja kao što su "*stick - slip*" gibanje i granični ciklusi (engl. "*limit cycles*"). Te pojave stvaraju velike zahtjeve za upravljački sustav. U ovom radu prikazana su dva načina regulacije: a) regulacija s kompenzacijom trenja bez observera trenja; b) regulacija s kompenzacijom trenja s observerom trenja. Regulacija s kompenzacijom trenja bez observera trenja je temeljena samo na regulatoru. Korištena su četiri regulatora: PD, PID, regulator s kliznim režimom, PID regulator s kliznim režimom.

PD regulator ne postiže stacionarnu točnost kod MDS-A s modelima realnog trenja i kod MDS-A s Lugre modelom trenja javljaju se granični ciklusi. PD regulatorom postiže se stacionarna točnost kod MDS-A bez modela realnog trenja. PD regulator ne kompenzira utjecaje trenja.

Kod PID regulatora javljao se značajni iznos nadvišenja u prijelaznoj pojavi kod odziva pozicije mase. Da bi se eliminiralo nadvišenje korišten je prefilter pozicije. To je smanjilo performanse, ali eliminiralo nadvišenje pozicije mase i uklonilo stacionarnu pogrešku s MDS-A bez modela trenja i sa Stribeckovim modelom trenja. Kod Dahlovog i Lugre modela trenja javljaju se granični ciklusi. PID regulatorom s prefilterom pozicije ne eliminiraju se potpuno granični ciklusi.

Kvalitetnija regulacija postignuta je regulatorom s kliznim režimom. Taj regulator vrlo dobro potiskuje utjecaje trenja uz visoke performanse sustava. Postiže stacionarnu točnost za modele bez i s modelim trenja. Problem pojave "*chatteringa*" je smanjen zamjenom funkcije *sign* s funkcijom *tanh*.

Korišten je PID regulator s kliznim režimom koji rješava problem "*chatteringa*" može postići visoke performanse i točnosti regulacije MDS sustava, ali se ne može primjeniti na MDS-A zbog toga što trenutno nisu poznati eksplicitni kriteriji stabilnosti za taj slučaj.

Drugi način regulacije je regulacija s kompenzacijom trenja s observerom trenja. Observer trenja je estimator realnog trenja i, ako je dobro modeliran, on kompenzira utjecaj trenja a regulator

upravlja s MDS-A. U ovom radu prikazan je observer trenja, temeljen na Lugre modelu, s PD regulatorom. Postignute su visoke performanse sustava uz visoku točnost.

## Literatura

- [1] H. Olsson, K. J. Astroem, C. Canudas de Wit, M. Gaefvert, P. Lischinsky, "Friction Models and Friction Compensation", *Eur. J. Control*, Vol. 4, No. 3. (1998), pp. 176-195.
- [2] D. Ivčić, *Procedure ispitivanja trenja i regulacija računalom vođenog tribometra*, diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 2009.
- [3] Upravljanje elektromotornim pogonima, preuzeto u rujnu 2011.  
[http://www.fer.unizg.hr/\\_download/repository/UEMP\\_trenje2009.pdf](http://www.fer.unizg.hr/_download/repository/UEMP_trenje2009.pdf)
- [4] N. Perić, J. Deur, I. Petrovic, D. Pavković, *Slijedni sustavi s izraženom elastičnošću, zračnošću i trenjem*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2005.
- [5] H. Olsson, K. J. Astroem, C. Canudas de Wit, P. Lischinsky, "A New Model for Control of Systems with Friction", *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, Vol. 40, No. 3. (1995), pp. 419-425.
- [6] B. Novaković, *Regulacijski sistemi*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1985.
- [7] B. Skalicki, J. Grilec, *Električni strojevi i pogoni*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1985.
- [8] Ronnie H.A. Hensen, *Controlled mechanical systems with friction*, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2002.
- [9] B. Armstrong-Helouvry, *Control of Mashines with Friction*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.
- [10] R. Kelly, V. Santibanez, A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer, London, 2005.
- [11] V. Ivanović, *Modeliranje i regulacija elemenata pogona vozila s izraženim učincima trenja*, doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 2010.
- [12] J. Astroem, C. Canudas de Wit, K. Braun "Adaptive friction compensation in DC motors drives", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3H6I:681–685, 1987.
- [13] P. Petener, *Upravljanje robotom s tri rotacijska stupnja slobode gibanja*, diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 2011.



- [14] V. Krajči, D. Dušević, M. Cević, "Usporedba različitih kriterija optimiranja parametara robotskih regulatora s promjenjivom strukturom", *Eng. Rev.*, No. 27-2. (2007), pp. 47-58.
- [15] D. Karnopp, "Computer simulation of slip-stick friction in mechanical dynamic systems", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107(1):100–103, 1985.
- [16] V. Krajči, N. Stojković, "Poboljšanje slijeđenja trajektorije robota upotrebom postupaka nelinearnog upravljanja", *Eng. Rev.*, No. 26. (2006), pp. 7-17.
- [17] T. Žilić, *Upravljački algoritam za podupravljanje mehaničke sustave s uključenom dinamikom pogona*, doktorski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 2010.
- [18] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, CRC Press, London, 2009.
- [19] R. Kelly, V. Santibanez, A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer, London, 2005.
- [20] V. Parra-Vega, S. Arimoto, L. Yun-Hui, G. Hirzinger, P. Akella "Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments", *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, Vol. 19, No. 6. (2003), pp. 967-976.
- [21] T. K. Kiong, L. T. Heng, H. Sunan, *Precision Motion Control*, Springer, London, 2008.