

Programski paket za analizu vibracija sustava s više stupnjeva slobode gibanja

Bajić, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:406500>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Ivan Bajić

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.

Dr. sc. Bruno Dogančić, mag. ing.

Student:

Ivan Bajić

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr.sc. Hinku Wolfu i komentoru dr. sc. Bruni Dogančiću na susretljivosti i pomoći prilikom izrade ovog rada.

Ivan Bajić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ivan Bajić**

JMBAG: **0035236295**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Programski paket za analizu vibracija sustava s više stupnjeva slobode gibanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Software package for vibration analysis of multiple degrees of freedom dynamical systems**

Opis zadatka:

U posljednjih nekoliko godina, Jupiter bilježnice (eng. *Jupyter Notebooks*) su se pojavile kao vrijedan besplatni resurs otvorenog kôda koji omogućuje integraciju teksta, grafike, matematičkih izraza, animacija, hiperveza i kôda unutar jedinstvenog dokumenta. Na taj se način može stvoriti interaktivni dokument za provođenje numeričkih eksperimenata putem naprednog matematičkog računa. Izučavanje teorije vibracija putem autonomnog rada s različitim Python alatima, uključujući simboličko (analitičko) izračunavanje, modeliranje eksperimentalnih podataka, statističku analizu i numeričke metode, ima za cilj usmjeravanje pažnje na zakonitosti mehanike, dok se istovremeno koriste dostupni alati otvorenog kôda (eng. *open-source*) za izvođenje potrebnih matematičkih izračuna.

Cilj ovog rada je izraditi programski paket (odnosno *Jupyter Notebook* datoteku, ekstenzije .ipynb) za interaktivnu analizu vibracija proizvoljnih dinamičkih sustava s više stupnjeva slobode gibanja.

U radu je potrebno navesti i objasniti sve izraze iz teorije vibracija za opisivanje dinamičkih jednadžbi gibanja prigušenih vibracijskih sustava s više stupnjeva slobode gibanja. Pri tome je potrebno odabrati pojednostavljene primjere vibracijskih sustava iz stvarne inženjerske prakse koji obuhvaćaju aksijalne sustave, njihajuće sustave i sustave koji se gibaju ravninski (planarno). Potrebno je navesti i ukratko opisati korištene Python biblioteke te korištene programske funkcije iz istih. Korištenjem programskog alata Jupyter, potrebno je izraditi interaktivni programski paket koji će korisniku omogućiti jednostavan odabir i analizu proizvoljnog vibracijskog sustava s više stupnjeva slobode gibanja. Programski paket također treba izraditi dokument sa skicama (grafikom), opisom matematičkih izraza, matematičkim izrazima, programskim kôdom i vizualizacijom rješenja (npr. pomoću prikladnih grafova koji opisuju dinamiku gibanja, animacijom glavnih formi vibriranja i slično) za gore odabrane proizvoljne primjere vibracijskih sustava.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

30. 11. 2024.

1. rok: 20. i 21. 2. 2025.
2. rok: 10. i 11. 7. 2025.
3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025.
2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025.
3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Hinko Wolf

Dr. sc. Bruno Dogančić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

V Soldo

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS OZNAKA	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Općenito o vibracijama	1
1.2. Općenito o Jupiter bilježnicama (eng. <i>Jupyter Notebooks</i>)	2
2. TEORIJSKA PODLOGA.....	3
2.1. Osnovni elementi u vibracijskom sustavu	3
2.1.1. Opužni element.....	3
2.1.2. Prigušni element.....	6
2.1.3. Uzbudna sila.....	7
2.1.4. Inercijski element.....	8
2.2. Slobodne prigušene i neprigušene vibracije za jedan stupanj slobode gibanja.....	11
2.3. Prisilne prigušene i neprigušene vibracije za jedan stupanj slobode gibanja	13
2.4. Dva ili više stupnja slobode gibanja	14
2.5. Vlastite kružne frekvencije	15
2.5.1. Vlastite kružne frekvencije neprigušenih vibracija.....	15
2.5.2. Vlastite kružne frekvencije prigušenih vibracija	19
2.6. Glavne forme vibriranja sustava	20
3. KORIŠTENI RAČUNALNI PAKETI	23
3.1. Jupyter Notebooks.....	23
3.2. Python	24
3.3. IPyWidgets.....	24
3.4. NumPy	25
3.5. SciPy	26
3.6. Matplotlib.....	26
3.7. IPython.display	26
3.8. PIL.....	27
3.9. OS.....	27
4. RAZVOJ PROGRAMSKOG PAKETA	28
4.1. Programski kod	28
4.1.1. Uvođenje biblioteka i globalnih varijabli.....	28
4.1.2. Definiranje vibracijskog sustava.....	29
4.1.3. Definiranje grafičkih prikaza i prikaza rezultata sustava.....	30
4.1.4. Definiranje prikaza skice vibracijskog sustava.....	33
4.1.5. Definiranje izračuna ekvivalentnih vrijednosti krutosti i prigušenja	34
4.1.6. Definiranje klizača za vrijednosti konstanti krutosti i prigušenja te vanjske pobude.....	34
4.1.7. Definiranje funkcije za podešavanje parametara sustava	35

4.1.8. Definiranje funkcije ažuriranje sustava prema broju tijela	36
4.2. Primjeri vibracijskih sustava u programskom paketu	37
4.2.1. Primjer 1	37
4.2.2. Primjer 2	40
5. ZAKLJUČAK	43
LITERATURA	44
PRILOZI	46

POPIS SLIKA

Slika 1. Logo <i>Project-a Jupyter</i> [18].....	2
Slika 2. Tipovi vibracijskih sustava s jednim stupnjem slobode gibanja [2]	3
Slika 3. Postupak linearizacije u slučaju malih pomaka [1].....	4
Slika 4. Dvije opruge u seriji.....	4
Slika 5. Dvije opruge u paraleli.....	5
Slika 6. Paralelni spoj opruga [2]	5
Slika 7. Dva prigušivača u seriji.....	6
Slika 8. Dva prigušivača u paraleli.....	7
Slika 9. Sinusna i kosinusna funkcija [7]	8
Slika 10. Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja; sile koje djeluju na inercijski element [1].....	9
Slika 11. Homogeni kružni valjak vezan oprugom kotrlja se po podlozi [1].....	10
Slika 12. Inercijski element kombiniran od jednog aksijalnog i dva planarna elementa	11
Slika 13. Grafički prikaz osciliranja slobodnog neprigušenog vibracijskog sustava [3]	12
Slika 14. Grafički prikaz svih tipova prigušenja i neprigušenja [3].....	13
Slika 15. Vibracijski sustav za dva ili više stupnjeva slobode gibanja [3].....	14
Slika 16. Ovisnost faktora magnifikacije neprigušenih vibracija o omjeru frekvencija [3]	17
Slika 17. Oscilacije neprigušenog vibracijskog sustava za slučaj $0 < \Omega/\omega_n < 1$ [3]	17
Slika 18. Oscilacije neprigušenog vibracijskog sustava za slučaj $\Omega/\omega_n > 1$ [3].....	18
Slika 19. Oscilacije neprigušenog vibracijskog sustava za slučaj $\Omega/\omega_n = 1$ [3].....	18
Slika 20. Ovisnost faktora magnifikacije o omjeru uzbude i vlastite kružne frekvencije [1] ..	19
Slika 21. Slobodne vibracije neprigušenog sustava s dva stupnja slobode gibanja [1]	20
Slika 22. Prikaz sučelja <i>Jupyter Notebook-a</i>	23
Slika 23. Uvođenje programskih funkcija iz biblioteke <i>IPyWidgets</i> u u <i>Python</i> kod	24
Slika 24. Uvođenje biblioteke <i>numpy</i>	25
Slika 25. Uvođenje biblioteke <i>SciPy</i>	26
Slika 26. Uvođene biblioteke <i>Matplotlib</i>	26
Slika 27. Uvođenje biblioteke <i>IPython</i>	26
Slika 28. Uvođenje biblioteke <i>PIL</i>	27
Slika 29. Uvođenje biblioteke <i>OS</i>	27
Slika 30. Uvođenje biblioteka	28
Slika 31. Naredba za prikaz grafova	28
Slika 32. Definiranje globalnih varijabli	28
Slika 33. Funkcija za simulaciju dinamičkog sustava	29
Slika 34. Nul matrice elemenata sustava.....	29
Slika 35. Popunjavanje matrice inercijskih elemenata.....	29
Slika 36. Popunjavanje matrica krutosti i prigušivanja.....	30
Slika 37. Poziv za prikaz matrice diferencijalne jednadžbe	30
Slika 38. Izračun vlastitih kružnih frekvencija.....	31
Slika 39. Definiranje izračuna glavnih formi vibriranja	31
Slika 40. Definiranje grafa za glavne forme vibriranja.....	31
Slika 41. Definiranje funkcije gibanja i ulaznih parametara	32
Slika 42. Definiranje parametara simulacije	32
Slika 43. Poziv za numeričko rješavanje diferencijalne jednadžbe	32
Slika 44. Definiranje grafa za odziv tijela i uzbudne sile.....	33
Slika 45. Definiranje funkcije za stvaranje skice vibracijskog sustava.....	33
Slika 46. Definiranje ekvivalentnih vrijednosti krutosti i prigušivanja	34
Slika 47. Funkcija i globalni rječnik za klizanje	34

Slika 48. Generiranje klizača za krutosti opruga.....	35
Slika 49. Definiranje fukcije za parametre sustava	35
Slika 50. Dohvaćanje argumenata pomoću sintakse <i>**kwargs</i>	36
Slika 51. Definiranje gumba "Osvježi"	36
Slika 52. Definiranje pokretanja sustava.....	36
Slika 53. Dio teksta u <i>markdown</i> ćeliji	37
Slika 54. Parametri primjera 1.....	37
Slika 55. Skica sustava iz primjera 1.....	38
Slika 56. Dodatni parametri i izlazni podatci primjera 1	38
Slika 57. Prikaz glavnih formi vibriranja za primjer 1	39
Slika 58. Dinamički odzivi tijela iz primjera 1	39
Slika 59. Vibracijski sustav u primjeru 2	40
Slika 60. Prikaz izlaznih rezultata primjera 2	41
Slika 61. Glavne forme vibriranja primjera 2	41
Slika 62. Dinamički odzivi u primjeru 2	42

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
c	Ns/m	Koeficijent viskoznog prigušenja
$[c]$	Ns/m	Matrica krutosti
c_c	Ns/m	Kritično prigušenje
c_{ekv}	Ns/m	Ekvivalentni koeficijent viskoznog prigušenja
e	-	Eulerov broj
k	N/m	Konstanta krutosti opruge
$[k]$	N/m	Matrica krutosti
k_{ekv}	N/m	Ekvivalentna konstanta krutosti opruge
m	kg	Masa
$[m]$	kg	Matrica mase
m_{ekv}	kg	Ekvivalentna masa
r	-	Omjer uzbudne i vlastite kruže frekvencije neprigušenih vibracija
s	-	Varijabla
t	s	Vrijeme ili trenutak
v_{rel}	m/s	Relativna brzina između klipa i cilindra prigušivača
x	m	Pomak
\dot{x}	m/s	Jednostruka derivacija pomaka x ; brzina
\ddot{x}	m/s ²	Dvostruka derivacija pomaka x ; ubrzanje
\vec{x}	m	Vektor pomaka
$\vec{\dot{x}}$	m/s	Vektor brzina
$\vec{\ddot{x}}$	m/s ²	Vektor ubrzanja
\hat{x}	m	Amplituda vibracija
$x_p(t)$	-	Partikularna diferencijalna jednačba
C	-	Konstanta integracije
E_k	J	Kinetička energija
E_p	J	Potencijalna energija
\vec{F}	N	Vektor sila
\hat{F}	N	Amplituda sile
F_{in}	N	Sila inercije
F_{opr}	N	Sila u opruzi
F_{prig}	N	Prigušna sila
$F(t)$	-	Funkcija uzbudne sile
J_s	kgm ²	Moment tromosti homogenog valjka
M	-	Faktor magnifikacije
X	m	Amplituda pomaka
α	rad	Kut koji zatvara tangenta sa x-osi
δ_{st}	m	Statička amplituda pomaka
ζ	-	Bezdimenzijski parametar
$\dot{\varphi}$	rad/s	Kutna brzina

ω_c	rad/s	Vlastita kružna frekvencija prigušenih vibracija
ω_n	rad/s	Vlastita kružna frekvencija neprigušenih vibracija
Ω	rad/s	Kružna frekvencija uzbudne sile

SAŽETAK

U radu se koristi računalni alat *Jupyter Notebook* za izradu programskog paketa u svrhu analize osnovnih vibracijskih sustava s jedan ili više stupnjeva slobode, odnosno s maksimalno pet stupnjeva slobode gibanja. Priložena je teorijska analiza vibracija koja je potrebna za razumijevanje sustava koji se pojavljuju u programskom paketu te su također opisani alati koji su korišteni u *Python* kodu za maksimalnu funkcionalnost i interaktivnost koda. Opisani su temeljni dijelovi programskog koda te su na kraju dani primjeri dvaju različitih vibracijskih sustava u svrhu prikaza funkcionalnosti samog programskog paketa.

Ključne riječi: vibracijski sustav, *Jupyter Notebook*, programski paket, *Python*

SUMMARY

The paper uses the computer tool Jupyter Notebook to create a software package for the purpose of analyzing basic vibration systems with one or more degrees of freedom, or with a maximum of five degrees of freedom of movement. A theoretical analysis of vibrations is provided, which is necessary for understanding the systems that appear in the software package, and the tools used in the Python code for maximum functionality and interactivity of the code are also described. The basic parts of the software code are described, and at the end, examples of two different vibration systems are given to demonstrate the functionality of the software package itself.

Keywords: vibration system, Jupyter Notebook, software package, Python

1. UVOD

1.1. Općenito o vibracijama

Vibracije se definiraju kao uzastopno (periodično ili neperiodično) gibanje tijela ili sustava oko ravnotežnog položaja. Gibanje može biti linearno ili kutno, a može biti uzrokovano vanjskom silom ili vlastitim dinamičkim karakteristikama sustava. Na primjer, njihanje matematičkog ili fizikalnog njihala tipičan je primjer vibracija odnosno oscilacija.

Područje koje se bavi proučavanjem vibracija, teorija vibracija, bavi se proučavanjem vibracijskog gibanja tijela kao i sila koje su povezane s takvim gibanjem. Svaki vibracijski sustav sastoji se od sljedećih članova:

- opruga, elastični element – član u kojem se može akumulirati potencijalna energija,
- masa – član u kojem se može akumulirati kinetička energija,
- prigušni element – član koji omogućuje postupno rasipanje energije.

Pri vibracijskom se gibanju kinetička energija uzastopno pretvara u potencijalnu i obrnuto, a ako je sustav prigušen, dio energije se rasipa tijekom svakog perioda vibracija.

U tehničkoj praksi, proučavanje vibracija pomaže inženjerima u dizajniranju sustava u kojima ili žele minimalizirati neželjene vibracije ili žele iskoristiti korisne vibracije za poboljšanje performansi sustava. Kad se govori o neželjenim vibracijama, pri tome se misli na one koje mogu uzrokovati oštećenje ili kolaps konstrukcije (mostovi, rotacijski strojevi), brže trošenje strojnih dijelova (ležajevi, zupčanici), a također mogu onemogućiti normalnu funkciju strojeva. Korisne vibracije, s druge strane, mogu se iskoristiti u industriji (vibracijska sita, završna obrada), kao i za robu široke potrošnje (električne četkice za zube, brijaći aparati).

Ovaj rad bit će ograničen na razmatranje samo linearnih vibracijskih sustava. Oni se sastoje od inercijskog elementa, linearne opruge i linearnog prigušnog elementa, a njihovo se gibanje opisuje linearnim diferencijalnim jednadžbama. Realni vibracijski sustavi, koji su u pravilu nelinearni, vrlo su složen sustav za razmatranje, stoga se često aproksimiraju s odgovarajućim linearnim sustavima. [1], [3]

1.2. Općenito o Jupiter bilježnicama (eng. *Jupyter Notebooks*)

S obzirom da je glavni dio ovog rada programski kod, odnosno programski paket, napravljen u Jupyter Notebook-u, web-baziranom interaktivnom okruženju, bitno je definirati i opisati njegove mogućnosti te objasniti zašto je baš to okruženje odabrano. Detaljnije će riječ o Jupyter bilježnicama biti u poglavlju 3.1.

Kad je riječ konkretno o teoriji vibracija, mogućnosti Jupyter bilježnica su razne. Korištenjem različitih Python alata, zajedno sa interaktivnim *Jupyter Notebook* sučeljem, izučavanje teorije vibracija može doseći neku novu eksperimentalnu ili pak edukativnu razinu, čime se ovo područje mehanike može prikazati na zanimljiv i vizualno privlačan način. To je posebno bitno u današnje vrijeme u kojem je razvoj modernih tehnologija na visokoj razini, a edukacija današnjih generacija sve više postiže digitalni oblik, stoga je to i glavna motivacija za izradu ovakve vrste rada. [4]

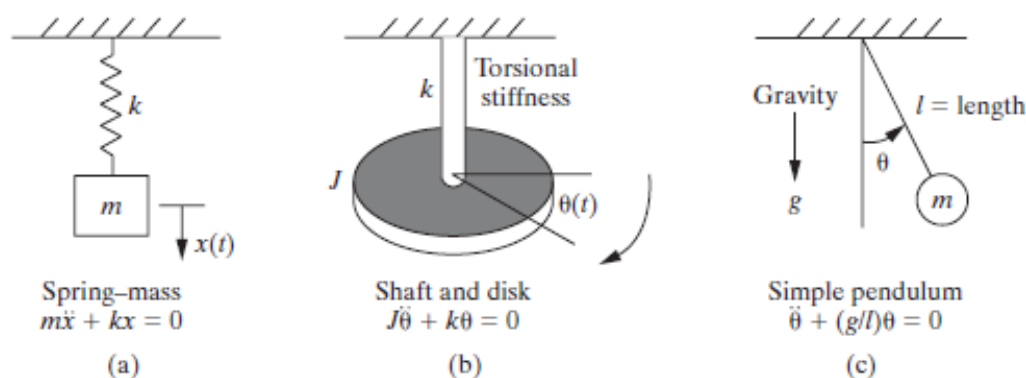


Slika 1. Logo *Project-a Jupyter* [18]

2. TEORIJSKA PODLOGA

2.1. Osnovni elementi u vibracijskom sustavu

Kad je riječ o tipovima vibracijskih sustava u teoriji vibracija, mogućnosti su razne.



Slika 2. Tipovi vibracijskih sustava s jednim stupnjem slobode gibanja [2]

Kao što je vidljivo na slici 2., neki od primjera vibracijskih sustava su: vibracijski sustav masa opruga (a) koji se sastoji od opruge krutosti k , tijela mase m čiji je vibracijski sustav definiran linearnim pomakom x . Nadalje je tu sustav osovine i diska (b) čiji je sustav definiran kutnim pomakom θ te i primjer matematičkog njihala (c) u kojem je masa obješena na užetu duljine l . S obzirom da će pri izradi programskog paketa naglasak biti na analizi vibracijskih sustava tipa (a) sa slike 2. i njegovih varijacija, u ovom poglavlju će biti objašnjeni svi elementi sustava potrebni za razumijevanje konkretno takvih vibracijskih sustava.

2.1.1. Opružni element

Matematički izrazi u ovom poglavlju su preuzeti iz izvora [1] i [2].

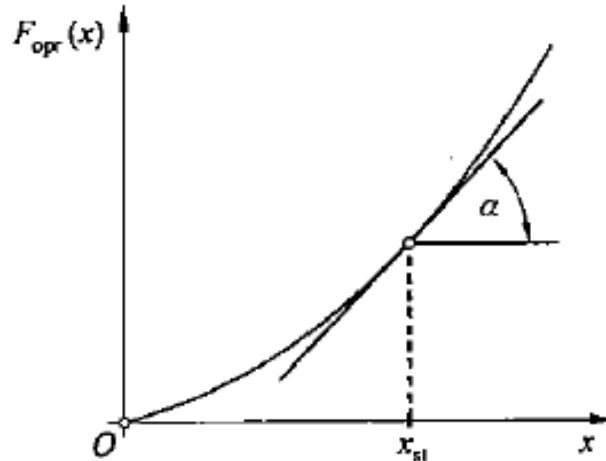
Linearna opruga je tip mehaničke veze za koju se pretpostavlja da ima zanemarivo malu masu i prigušenje. Sila u opruzi ili elastična sila proporcionalna je produljenju ili skraćenju opruge:

$$F_{opr} = kx \quad (2.1)$$

pri čemu je F_{opr} u N sila u opruzi x u m je produljenje ili skraćenje opruge, a k u $\frac{N}{m}$ je konstanta krutosti opruge. Stvarne su opruge nelinearne i slijede izraz 2.1 samo do određenog iznosa produljenja. U većini praktičnih problema pretpostavlja se da su pomaci mali i da je karakteristika krutosti linearna, a postupak linearizacije svodi se na određivanje konstante

krutosti linearizirane opruge, odnosno na određivanje tangente na karakteristiku krutosti u položaju statičke ravnoteže:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dF_{\text{opr}}(x)}{dx} \quad (2.2)$$

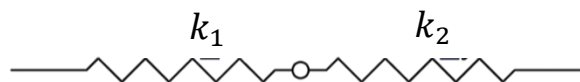


Slika 3. Postupak linearizacije u slučaju malih pomaka [1]

Na slici 3. i u jednadžbi 2.2 prikazan je prethodno opisani postupak linearizacije.[1]

Ono što je još važno napomenuti za rješavanje problema su tipovi spojeva tijela s oprugom. Uz to što je u vibracijskom sustavu moguće da je tijelo spojeno na jednu oprugu ekvivalentne krutosti $k_{\text{ekv}} = k$, u obzir mogu doći i serijski ili paralelni spojene dvije ili više opruga u kojima se sve opruge svode na ekvivalentnu krutost k_{ekv} .

Ako je riječ o serijskom spoju dviju opruga kao što se može vidjeti na slici 4.:



Slika 4. Dvije opruge u seriji

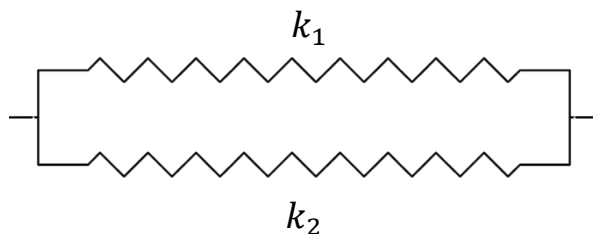
ekvivalentna krutost je jednaka:

$$\frac{1}{k_{\text{ekv}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (2.3)$$

i analogno tome za veći broj opruga u seriji:

$$\frac{1}{k_{ekv}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_N}. \quad (2.4)$$

Za opruge u paralelnom spoju kao na slici 5.:



Slika 5. Dvije opruge u paraleli

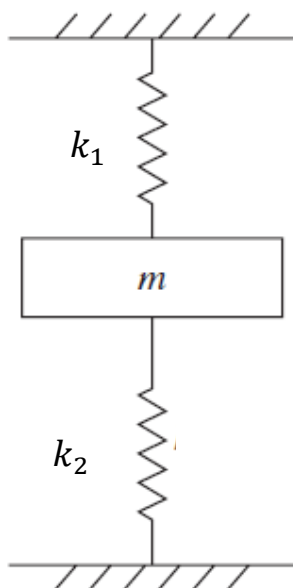
ekvivalentna krutost je jednaka:

$$k_{ekv} = k_1 + k_2 \quad (2.5)$$

i analogno tome za veći broj opruga u paraleli:

$$k_{ekv} = k_1 + k_2 + \dots + k_N. \quad (2.6)$$

Za bolje razumijevanje, bitno je naglasiti kako se i ovakav spoj kao na slici 6.:



Slika 6. Paralelni spoj opruga [2]

također analizira kao paralelni spoj opruga. [1], [2]

2.1.2. Prigušni element

Matematički izrazi u ovom poglavlju su preuzeti iz izvora [1].

U stvarnim vibracijskim sustavima vibracijska se energija djelovanjem raznih mehanizama prigušenja postupno pretvara u toplinu ili zvuk (trenje između suhih površina, trenje između podmazanih površina). U slučaju dodira suhih površina, iznos sila trenja ovisi o vrsti materijala koji su u dodiru, hrapavosti njihovih površina te njihovoj relativnoj brzini klizanja. U slučaju trenja između podmazanih površina, sila trenja ne ovisi o vrsti materijala tijela u dodiru, već je proporcionalna s viskoznošću maziva i relativnom brzinom klizanja između površina. Kad se tijelo kreće kroz viskozni fluid malom brzinom, ili kada gibanje tijela uzrokuje gibanje fluida kroz uske otvore (amortizeri), sila otpora je također približno proporcionalna brzini. Ta se sila naziva silom viskoznog prigušenja, a koeficijent c u $\frac{Ns}{m}$ je koeficijent viskoznog prigušenja.

Kako je određivanje linearnih vibracijskih sustava relativno jednostavno, često se ostali mehanizmi prigušenja aproksimiraju ekvivalentnim viskoznim (linearnim) prigušenjem. Koeficijent ekvivalentnog viskoznog prigušenog elementa određuje se iz uvjeta da je izgubljena energija tijekom jednog perioda vibracija mora biti jednaka izgubljenoj energiji u stvarnom sustavu. Pretpostavlja se da linearni prigušni element nema niti masu niti elastičnost, a prigušna sila proporcionalna je relativnoj brzini između klipa i cilindra prigušivača:

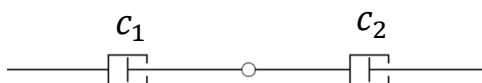
$$F_{prig} = c v_{rel} \quad (2.7)$$

iz čega se analogno izvlači izraz koji će biti korišten u analizi vibracijskih sustava:

$$F_{prig} = c \dot{x}. \quad (2.8)$$

Analogno na paralelne i serijske spojeve kod opruga, za prigušne elemente će pri ovoj analizi i u programskom paketu dolaziti u obzir također spoj tijela sa samostalnim prigušivačem kojemu je ekvivalentni koeficijent viskoznog prigušenja $c_{ekv} = c$, spoj tijela s dva ili više prigušivača u seriji te spoj tijela s dva ili više prigušivača u paraleli.

Ako je riječ o serijskom dvaju prigušivača kao što se može vidjeti na slici 7.:



Slika 7. Dva prigušivača u seriji

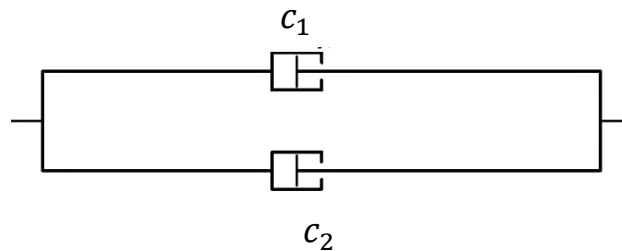
ekvivalentna krutost je jednaka:

$$\frac{1}{c_{ekv}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad (2.9)$$

i analogno tome za veći broj prigušivača u seriji:

$$\frac{1}{c_{ekv}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_N} \quad (2.10)$$

Za prigušivače u paralelnom spoju kao na slici 8.:



Slika 8. Dva prigušivača u paraleli

ekvivalentno prigušenje je jednako:

$$c_{ekv} = c_1 + c_2 \quad (2.11)$$

i analogno tome za veći broj prigušivača u paraleli:

$$c_{ekv} = c_1 + c_2 + \dots + c_N. \quad [1] \quad (2.12)$$

2.1.3. Uzbudna sila

Kaže se da mehanički ili konstrukcijski sustav podliježe prisilnim vibracijama kad god se vanjska energija dovodi u sustav tijekom vibracija. Vanjska energija može se dovoditi bilo primijenjenom silom ili nametnutom pobudom pomaka. Uzbuda može biti harmonijska, neharmonijska, ali i periodična, neperiodična ili slučajna u prirodi. Odziv sustava na harmonijsku uzbudu također je harmonijski. Ako se frekvencija uzbuđenja poklapa s prirodnom frekvencijom sustava, odziv će biti vrlo velik. Ovo stanje, poznato kao rezonancija, treba izbjegavati kako bi se spriječio kvar sustava. [3]

Matematički izrazi ovog poglavlja preuzeti su iz izvora [1].

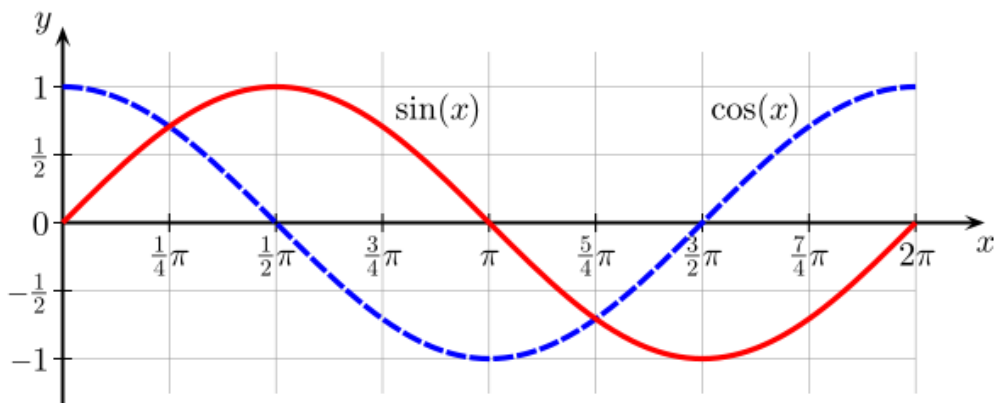
U ovom radu i programskom paketu bit će postavljeno ograničenje da uzbuda ima harmonijski karakter $F(t)$, odnosno da se mijenja po zakonu:

$$F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t) \quad (2.13)$$

ili ako je sinusna funkcija u pitanju:

$$F(t) = \hat{F} \sin(\Omega t) \quad (2.14)$$

Pri čemu \hat{F} označuje amplitudu uzbudne sile, a Ω kružnu frekvenciju uzbuđenja (rad/s) i t označava trenutak. [1]



Slika 9. Sinusna i kosinusna funkcija [7]

Slika 9. prikazuje grafički izgled dviju navedenih uzbudnih sila.

2.1.4. Inercijski element

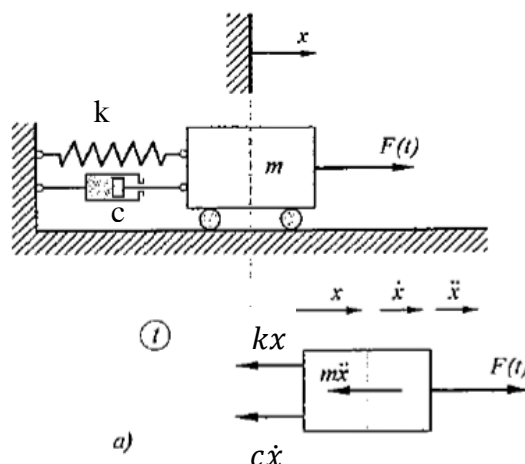
Za element mase ili inercije u vibracijskom sustavu se pretpostavlja da je kruto tijelo odnosno da može primiti ili izgubiti kinetičku energiju kad god se promjeni brzina tijela. Za potpunu analizu vibracijskog sustava potrebno je još definirati silu inercije koja u skladu s *D'Alembertovim principom*, djeluje u suprotnom smislu ubrzanja \ddot{x} te je određena izrazom:

$$F_{in} = m\ddot{x} \quad (2.15)$$

koji je također analogan s *Newtonovim drugim zakonom gibanja* po kojemu je umnožak mase i njezine akceleracije jednak sili koja djeluje na masu. [1], [3]

Sada su definirani svi općeniti elementi vibracijskog sustava te ako se za primjer sa slike 10.

postavi uvjet ravnoteže $\sum F_x = 0$:



Slika 10. Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja; sile koje djeluju na inercijski element [1]

Može se dobiti linearna nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (2.16)$$

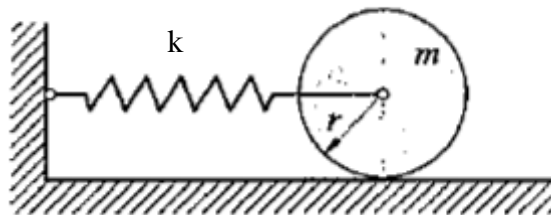
Bez obzira na fizikalni smisao oscilacijskih pojava, one se uvijek opisuju diferencijalnim jednadžbama drugog reda. [1]

O diferencijalnim jednadžbama će više biti riječ u narednim poglavljima, a ovo opće definiranje jednadžbe je bilo potrebno radi daljnjeg objašnjenja i definiranja varijacija inercijskih elemenata koji će se konkretno pojavljivati u programskom paketu vezanim uz ovaj rad. Dakle u programskom paketu će biti definirana tri tipa inercijskih elemenata.

Prvi je translacijski tip, odnosno to su kolica mase m čiji su kotači zanemarive mase, koji se giba pravocrtno po idealno glatkoj horizontalnoj podlozi. Takav tip može se vidjeti na slici 9., pri čemu je prema jednadžbi (2.16) definirana ekvivalentna masa takvog tijela koja je jednaka:

$$m_{ekv} = m. \quad (2.17)$$

Drugi tip inercijskog elementa je planarni tip, odnosno to je homogeni valjak koji se čisto kotrlja po podlozi, to jest planarno se giba. Takav primjer tijela prikazan je na slici 11.



Slika 11. Homogeni kružni valjak vezan oprugom kotrlja se po podlozi [1]

Definiranje ekvivalentne mase ovakvog tipa tijela malo je kompleksnije nego kod prethodnog tipa. Isprva je potrebno definirati kinetičku energiju valjka izrazom:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\varphi}^2, \quad (2.18)$$

Gdje je \dot{x} brzina težišta valjka, $\dot{\varphi}$ kutna brzina valjka, a $J_s = \frac{mr^2}{2}$ je središnji dinamički moment tromosti homogenog valjka. Uvrštavanje kinematičke veze za slučaj čistog kotrljanja $\dot{x} = r\dot{\varphi}$ u (2.18) dobije se:

$$E_k = \frac{3}{4}m\dot{x}^2. \quad (2.19)$$

Potencijalna energija opruge iznosi:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.20)$$

Uvrštavanjem (2.19) i (2.20) u *Lagrangeovu jednadžbu*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0, \quad (2.21)$$

dobije se diferencijalna jednadžba gibanja:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.22)$$

iz koje se analogno može izolirati izraz za ekvivalentnu masu planarnog tipa tijela:

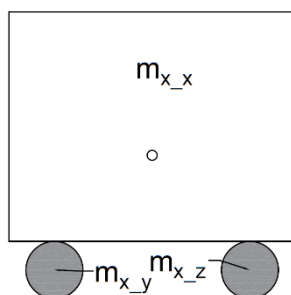
$$m_{ekv} = \frac{3}{2}m. \quad (2.23)$$

Matematički izrazi preuzeti su iz izvora [1].

Treći i posljednji tip inercijskog elementa koji je potrebno definirati za svrhe programskog paketa će biti nazvan kombinirani. Naziv je takav jer će se taj tip tijela sastojati kombinacije jednog translacijskog elementa i dvaju planarnih elemenata, odnosno radi lakšeg razumijevanja, njega će se prikazivati kao kolica čiji je trup translacijsko tijelo mase $m_{x,x}$ čija se dva kotača čisto kotrljaju po podlozi i posjeduju mase $m_{x,y}$ i $m_{x,z}$. Primjer takvog elementa vidljiv je na slici 12. U svrhu objašnjenja skice sa slike 12., bitno je naglasiti kako su planarni elementi ovog tipa, odnosno središta kotača kolica, zgloбно vezana za trup kolica.

Analogno izrazima za ekvivalentne mase translacijskog tipa (2.17) i planarnog tipa elementa (2.23), definiran je izraz za kombinirani tip inercijskog elementa:

$$m_{ekv} = m_{x,x} + \frac{3}{2}m_{x,y} + \frac{3}{2}m_{x,z}. \quad (2.24)$$

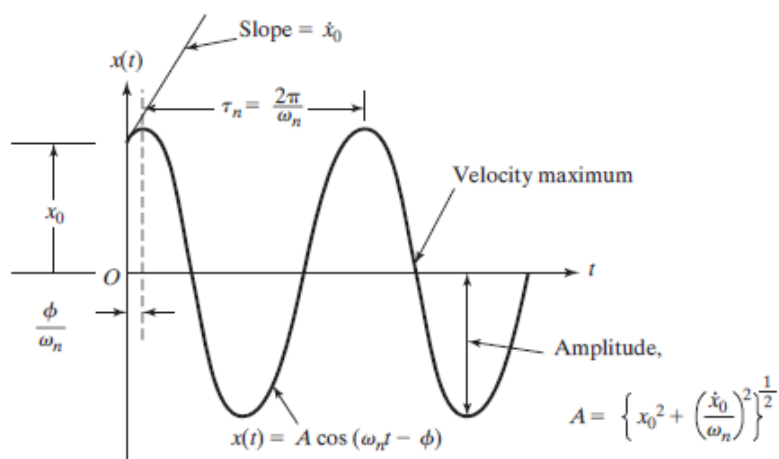


Slika 12. Inercijski element kombiniran od jednog aksijalnog i dva planarna elementa

2.2. Slobodne prigušene i neprigušene vibracije za jedan stupanj slobode gibanja

Ako se iz vibracijskog sustava prema slici 10. ukloni viskozni prigušivač i uzbudna sila, dobiva se sustav koji čine inercijski i opružni element. Takav sustav može slobodno vibrirati ako se, za primjer, inercijskom elementu u početnom položaju odredi da će krenuti s nekim početnim pomakom x_0 u m ili \dot{x}_0 u m/s [1]. Zadavanje početnog pomaka će biti omogućeno i u programskom paketu. Također ako se prema prethodno navedenom uklanjanju viskoznog prigušivača i uzbudne sile, u jednadžbi (2.16) uzme da je $F(t) = 0$ i $c = 0$, dobije se diferencijalna jednadžba gibanja slobodnih neprigušenih vibracija za jedan stupanj slobode gibanja:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.25)$$



Slika 13. Grafički prikaz osciliranja slobodnog neprigušenog vibracijskog sustava [3]

Grafički prikaz osciliranja takvog sustava prikazan je na slici 13.

Ako se pak ne ukloni viskozni prigušivač sa slike 10., odnosno ako je $c \neq 0$, dobije se diferencijalna jednadžba gibanja slobodnih prigušenih vibracija za jedan stupanj slobode gibanja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (2.26)$$

Jednadžba je homogena. Opće rješenje te diferencijalne jednadžbe pretpostavlja se u obliku:

$$x(t) = Ce^{st}. \quad (2.27)$$

Kad se pronađu prva i druga derivacija te funkcije po vremenu t i uvrste u diferencijalnu jednadžbu (2.27), moraju je identično zadovoljiti. Uvrštavanjem i sređivanjem se dobije:

$$Ce^{st}(ms^2 + cs + k) = 0. \quad (2.28)$$

Kako Ce^{st} mora biti različito od nule, izraz u zagradi mora biti jednak nuli:

$$ms^2 + cs + k = 0. \quad (2.29)$$

Korijeni jednadžbe (2.29) su:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.30)$$

A karakter rješenja će ovisiti o izrazu pod korijenom, odnosno pomoću tog izraza se može definirati izraz za kritično prigušenje c_c :

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0, \quad (2.31)$$

odnosno:

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}. \quad (2.32)$$

Za bilo koji prigušeni sustav, može se definirati bezdimenzijski parametar ζ koji označava omjer ekvivalentnog viskoznog prigušenja i kritičnog viskoznog prigušenja:

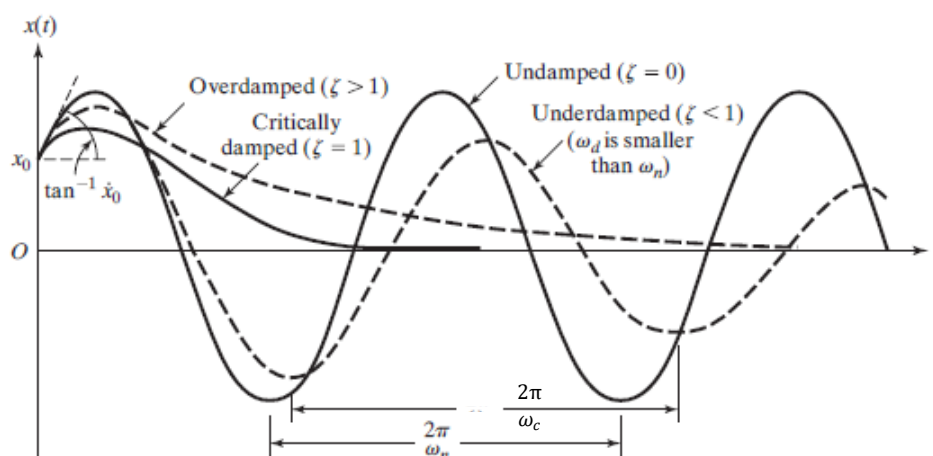
$$\zeta = \frac{c_{ekv}}{c_c}. \quad (2.33)$$

Moguća su tri slučaja kad je prigušenje prisutno u sustavu.

Prvi slučaj je slučaj potkritično prigušenog sustava, odnosno kad je $\zeta < 1$.

Drugi slučaj je kritično prigušeni sustav, odnosno kad je $\zeta = 1$.

Treći slučaj je slučaj natkritičnog prigušenja, odnosno kad je $\zeta > 1$.



Slika 14. Grafički prikaz svih tipova prigušenja i neprigušenja [3]

Na slici 14. prikazani su izgledi oscilacija neprigušenih i svih tipova prigušenih sustava.

Matematički izrazi ovog poglavlja preuzeti su iz izvora [3].

2.3. Prisilne prigušene i neprigušene vibracije za jedan stupanj slobode gibanja

Ako se iz vibracijskog sustava prema slici 10. ukloni viskozni prigušivač, ali ne i uzbudna sila, dobiva se sustav koji čine inercijski i opružni element te uzbudna sila. Takav sustav prisilno vibrira pod utjecajem uzbudne sile. Također ako se prema prethodno navedenom uklanjanju viskoznog prigušivača, u jednadžbi (2.17) uzme da je $c = 0$, dobije se diferencijalna jednadžba gibanja prisilnih neprigušenih vibracija za jedan stupanj slobode gibanja:

$$m\ddot{x} + kx = F(t). \quad (2.34)$$

Ako se pak ne ukloni viskozni prigušivač sa slike 10., odnosno ako je $c \neq 0$, dobije se diferencijalna jednažba gibanja prisilnih prigušenih vibracija za jedan stupanj slobode gibanja:

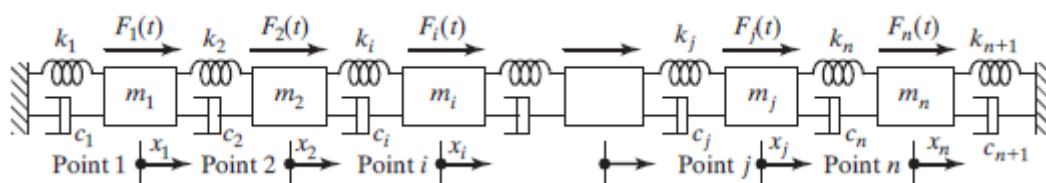
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (2.35)$$

Matematički izrazi ovog poglavlja preuzeti su iz izvora [3].

Ova dva tipa sustava imaju različite varijacije mogućih izgleda oscilacija, no detaljnija objašnjenja bit će prikazana u poglavlju 2.5.

2.4. Dva ili više stupnja slobode gibanja

Kad je riječ o definiranju diferencijalnih jednažbi gibanja za dva ili više stupnjeva slobode gibanja, što će biti omogućeno u programskom paketu, za primjer se može uzeti slučaj sa slike 15. Ono što je također bitno za naglasiti je da će se pri izvodu diferencijalnih jednažbi gibanja d'Alembertovim principom, uvijek uzimati da je $x_n < x_{n+1}$.



Slika 15. Vibracijski sustav za dva ili više stupnjeva slobode gibanja [3]

Broj diferencijalnih jednažbi u ovakvim sustavima će biti jednak broju inercijskih elemenata u sustavu, odnosno broju stupnjeva slobode gibanja. Diferencijalna jednažba za ovakav sustav zapisuje se u matričnom obliku:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}, \quad (2.36)$$

gdje su $[m]$, $[c]$ i $[k]$ nazvane matrica mase, matrica prigušenja i matrica krutosti i definirane na način:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix},$$

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & (c_n + c_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \ddots & -k_n \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdots & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix},$$

a $\vec{\ddot{x}}$, $\vec{\dot{x}}$, \vec{x} i \vec{F} su nazvani vektor ubrzanja, vektor brzine, vektor pomaka i vektor sile i definirani su na način:

$$\vec{\ddot{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \vec{\dot{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{Bmatrix}, \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n(t) \end{Bmatrix}.$$

Ovisno o tome kako je postavljen sustav, odnosno ako je nepostojeće prigušenje ili pak uzbudna sila u sustavu, matrice i vektori se brišu ili dodaju u diferencijalnu jednadžbu (2.36).

Matematički izrazi ovog poglavlja preuzeti su iz izvora [3].

2.5. Vlastite kružne frekvencije

2.5.1. Vlastite kružne frekvencije neprigušenih vibracija

Vlastita kružna frekvencija je nešto svojstveno mehaničkom sustavu i izravno je povezana s periodom vibracija. Vlastita kružna frekvencija ovisi o masi i krutosti sustava.

U slučaju slobodnih neprigušenih vibracija, ako se izraz (2.25) zapiše u obliku:

$$\ddot{x} + \frac{k_{ekv}}{m_{ekv}} x = 0 \quad (2.39)$$

ili:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0, \quad (2.40)$$

onda je vlastita kružna frekvencija slobodnih neprigušenih vibracija jednaka:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{ekv}}{m_{ekv}}}. \quad (2.41)$$

Ako se u sustav neprigušenih vibracija priključi i harmonijska uzbudna sila $F(t)$, na primjer kosinusna, onda će diferencijalna jednačba izgledati ovako:

$$m\ddot{x} + kx = \hat{F} \cos(\Omega t). \quad (2.42)$$

Kada se dođe do partikularnog integrala diferencijalne jednačbe:

$$x_p(t) = X \cos \Omega t, \quad (2.43)$$

naglašava se izraz za amplitudu X jednačbe $x_p(t)$, koja je jednaka izrazu:

$$X = \frac{\hat{F}}{k - m\Omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (2.44)$$

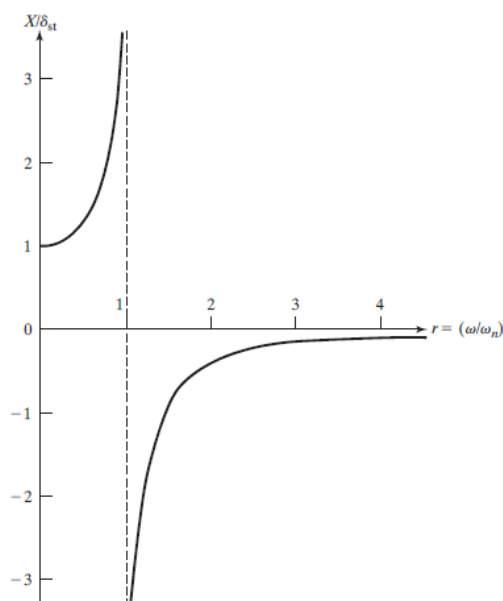
a sređivanjem izraza (2.44) dolazi se do izraza za faktor magnifikacije M neprigušenih vibracija:

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}. \quad (2.45)$$

Izraz kojim će se definirati različite varijacije vibracijskih sustava je omjer frekvencija r :

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}. \quad (2.46)$$

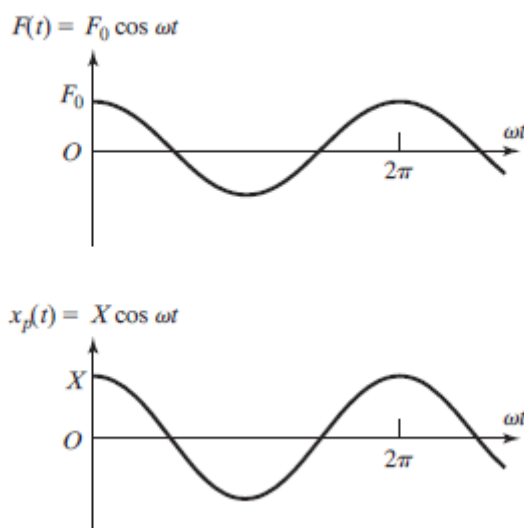
Na slici 16. prikazan je graf ovisnosti faktora magnifikacije neprigušenih vibracija o omjerima frekvencija što će sad dodatno biti objašnjeno.



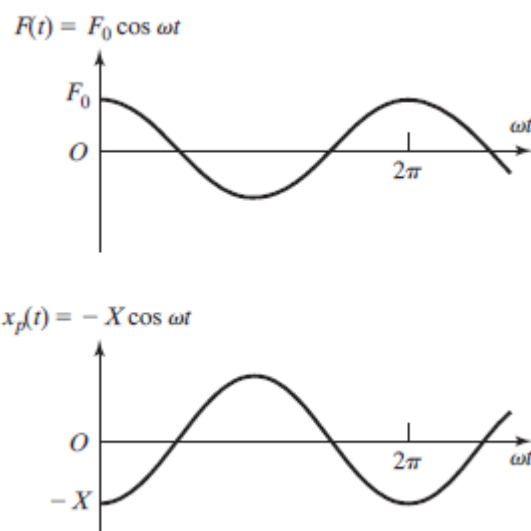
Slika 16. Ovisnost faktora magnifikacije neprigušenih vibracija o omjeru frekvencija [3]

Moguća su tri slučaja izgleda oscilacija vibracijskog sustava za različite ovisnosti frekvencija r .

Prvi slučaj je kad je $0 < \frac{\Omega}{\omega_n} < 1$, nazivnik u izrazu (2.45) je pozitivan, a odziv sustava je vidljiv na slici 17.



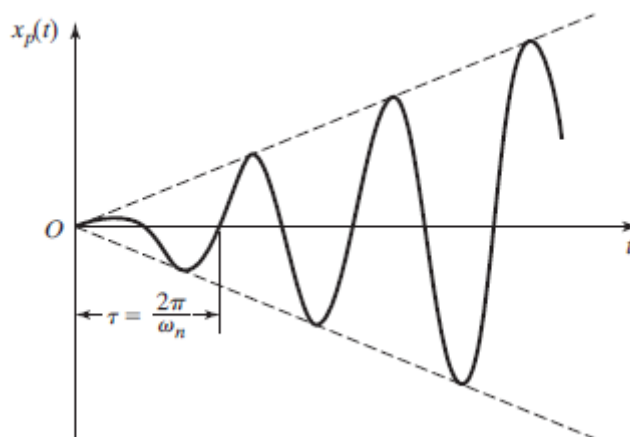
Slika 17. Oscilacije neprigušenog vibracijskog sustava za slučaj $0 < \Omega/\omega_n < 1$ [3]



Slika 18. Oscilacije neprigušenog vibracijskog sustava za slučaj $\Omega/\omega_n > 1$ [3]

Drugi slučaj je kad je $\frac{\Omega}{\omega_n} > 1$, nazivnik u izrazu (2.45) je negativan, a odziv sustava je vidljiv na slici 18.

Treći slučaj je kad je $\frac{\Omega}{\omega_n} = 1$, amplituda X u izrazu (2.44) ide u beskonačno, a odziv sustava je vidljiv na slici 19.



Slika 19. Oscilacije neprigušenog vibracijskog sustava za slučaj $\Omega/\omega_n = 1$ [3]

Matematički izrazi ovog poglavlja preuzeti su iz izvora [3].

2.5.2. Vlastite kružne frekvencije prigušenih vibracija

Vlastita kružna frekvencija prigušenih vibracija definira se izrazom:

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (2.47)$$

pri čemu je uzeto u obzir da je ω_n definiran prema izrazu (2.41), a ζ izrazom (2.31).

Ako se u sustav prigušenih vibracija priključi i harmonijska uzbudna sila $F(t)$, na primjer kosinusna, onda će diferencijalna jednačba izgledati ovako:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{F} \cos(\Omega t). \quad (2.48)$$

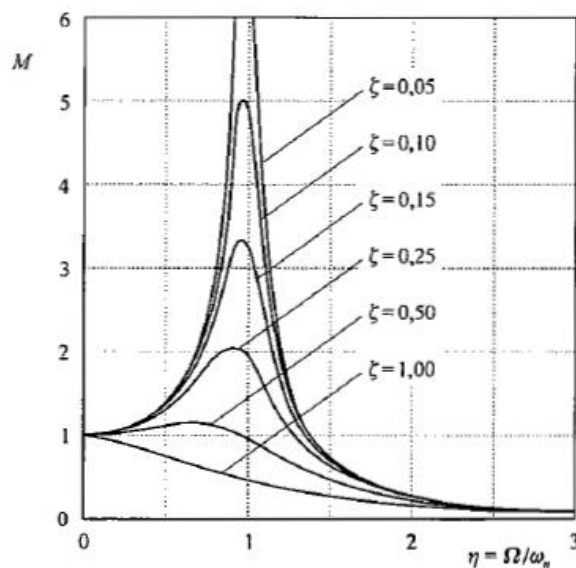
Preko partikularnog integrala diferencijalne jednačbe, dolazi se do izraza za amplitudu X jednačbe $x_p(t)$, koja je u ovom slučaju jednaka izrazu:

$$X = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}, \quad (2.49)$$

a sređivanjem izraza (2.49) dolazi se do izraza za faktor magnifikacije M prigušenih vibracija:

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.50)$$

Ovisnost faktora magnifikacije M o omjeru uzbudne i vlastite kružne frekvencije neprigušenih vibracija za različite iznose stupnja prigušenja ζ prikazan je na slici 20. Izrazi su iz [1] i [3].



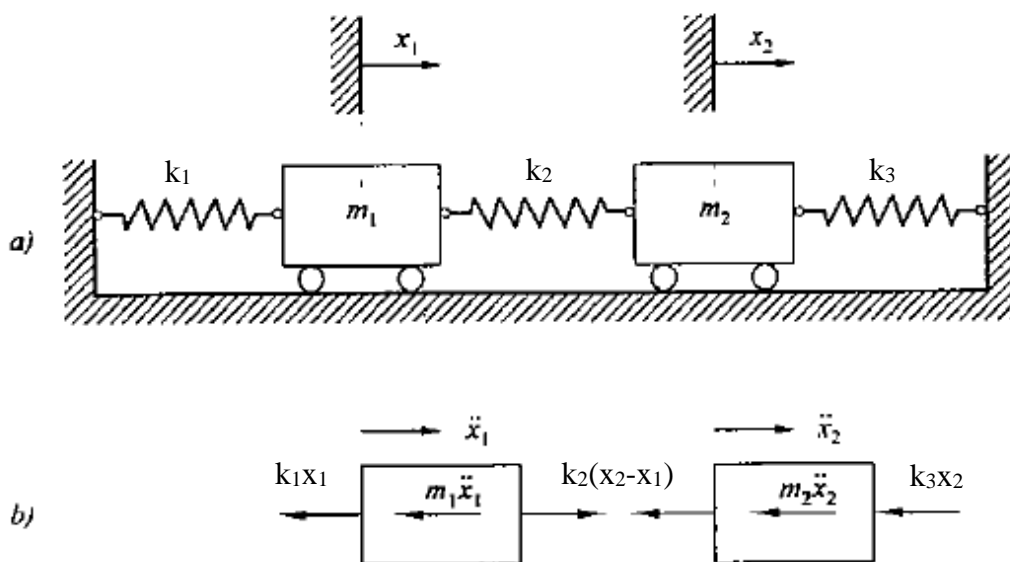
Slika 20. Ovisnost faktora magnifikacije o omjeru uzbuđe i vlastite kružne frekvencije [1]

2.6. Glavne forme vibriranja sustava

Ono što je još potrebno definirati, a čiji će prikaz programski paket nuditi, su forme vibriranja. Forma vibriranja je vektor koji opisuje relativno gibanje između dvaju ili više inercijskih elemenata. Ovaj fenomen višestrukih vlastitih kružnih frekvencija i formi vibriranja, blisko je povezan s matematičkim konceptima svojstvenih vrijednosti (eng. *eigenvalues*) i svojstvenih vektora (eng. *eigenvectors*) u računskoj teoriji matrica. Time se inicira da se problem vibracijskih sustava interpretira u smislu vektora i matrica [2].

Za dobivanje formi vibriranja u ovom objašnjenju, a i u programskom paketu, prigušivanje se neće uzimati u obzir, odnosno forme vibriranja će se računati za neprigušene vibracije, što znači, ako se u zadatku i pojavi vibracijski sustav s prigušenjem, forme vibriranja će se dobivati za slučaj kad je prigušenje nepostojeće.

U svrhu boljeg razumijevanja, dobivanje formi vibriranja provest će se na primjeru vibracijskog sustava s dva stupnja slobode gibanja sa slike 21.



Slika 21. Slobodne vibracije neprigušenog sustava s dva stupnja slobode gibanja [1]

Iz sustava sa slike 21. dobivaju se diferencijalne jednačbe:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

To je spregnuti sustav linearnih, homogenih, diferencijalnih jednačbi drugog reda. Rješenja za pomake se mogu pretpostaviti u harmonijskom obliku, na primjer:

$$x_1 = \hat{x}_1 \cos \omega_n t \text{ i } x_2 = \hat{x}_2 \cos \omega_n t, \quad (2.52)$$

Gdje \hat{x}_1 i \hat{x}_2 označuju amplitude pomaka, a ω_n je vlastita kružna frekvencija slobodnih neprigušenih vibracija. Druge derivacije pomaka po vremenu iznose:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_n^2 \hat{x}_1 \cos \omega_n t = -\omega_n^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_n^2 \hat{x}_2 \cos \omega_n t = -\omega_n^2 x_2\end{aligned}\quad (2.53)$$

Kad se izrazi (2.52) i (2.53) uvrste u (2.51), dobije se:

$$\begin{aligned}[(k_1 + k_2 - m_1 \omega_n^2) \hat{x}_1 - k_2 \hat{x}_2] \cos \omega_n t &= 0 \\ [-k_2 \hat{x}_1 + (k_2 + k_3 - m_2 \omega_n^2) \hat{x}_2] \cos \omega_n t &= 0\end{aligned}\quad (2.54)$$

Iz uvjeta da je $\cos \omega_n t = 0$, dobiva se da determinanta sustava mora biti jednaka nuli:

$$\Delta(\omega_n^2) = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega_n^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - m_2 \omega_n^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.55)$$

Razvojem determinante dobije se:

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega_n^2)(k_2 + k_3 - m_2 \omega_n^2) - (-k_2)(-k_2) = 0, \quad (2.56)$$

a sređivanjem se dobije:

$$\omega_n^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) \omega_n^2 + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_1 m_2} = 0 \quad (2.57)$$

i naziva se frekvencijskom ili karakterističnom jednadžbom.

Korijeni jednadžbe (2.57) su jednaki:

$$(\omega_n^2)_{1,2} = \left(\frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2 + k_3}{2m_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2 + k_3}{2m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_1 m_2}}. \quad (2.58)$$

Korijeni bikvadratne jednadžbe (2.58) su zapravo kvadrati dviju vlastitih kružnih frekvencija slobodnih neprigušenih vibracija. Sustav ima onoliko vlastitih kružnih frekvencija koliko ima stupnjeva slobode gibanja. Vlastite kružne frekvencije su uvijek pozitivne i uvijek vrijedi $\omega_{n1} < \omega_{n2}$. Sustav može vibrirati s prvom vlastitom kružnom frekvencijom ω_{n1} , s drugom vlastitom kružnom frekvencijom ω_{n2} ili bilo kojom linearnom kombinacijom vlastitih kružnih frekvencija.

Omjer amplituda vibracija \hat{x}_1 i \hat{x}_2 može se izračunati iz sustava jednadžbi (2.54) i za ovaj slučaj vibracijskog sustava iznosi:

$$\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \omega_n^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 + k_3 - m_2 \omega_n^2}. \quad (2.59)$$

Koliki će biti taj omjer ovisi o tome koju vlastitu kružnu frekvenciju se uvrsti u gornji izraz.

Kako su u ovom slučaju postojeće dvije različite vlastite kružne frekvencije, postojana su dva različita omjera $\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}$ koji su nazvani osnovnim ili glavnim formama vibriranja sustava.

Još je bitno napomenuti da će se u programskom paketu za iznos amplitude \hat{x}_1 uvijek uzimati jedinični iznos $\hat{x}_1 = 1$, radi jednostavnijeg grafičkog prikaza.

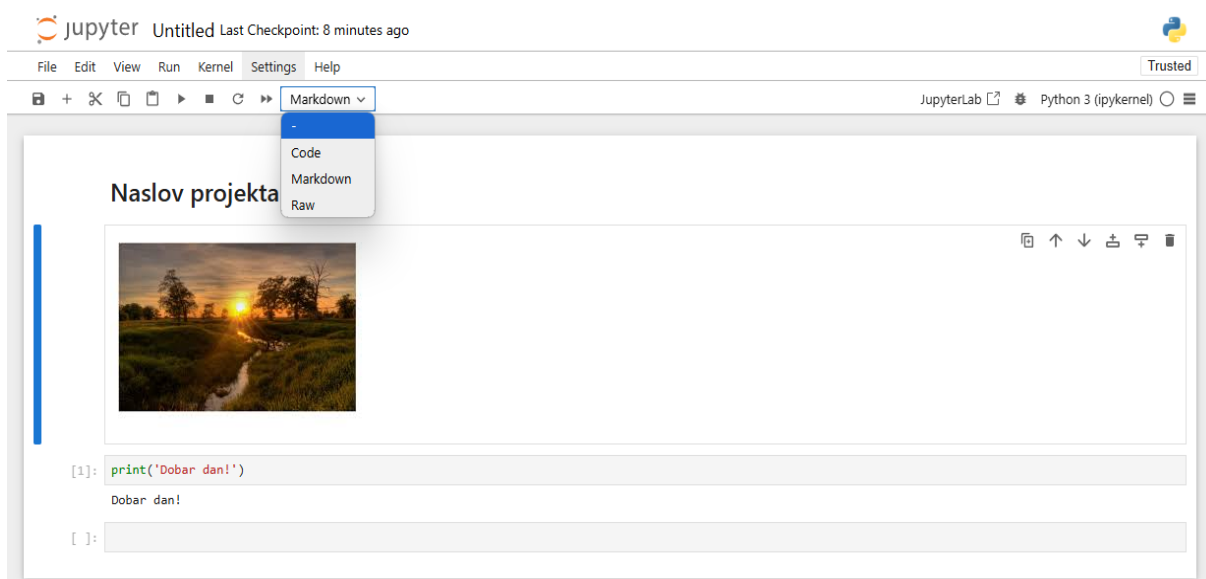
Matematički izrazi ovog poglavlja preuzeti su iz izvora [1].

3. KORIŠTENI RAČUNALNI PAKETI

3.1. Jupyter Notebooks

U posljednjih nekoliko godina *Jupyter Notebook* se pojavio kao besplatan izvor interaktivnog okruženja koje omogućuje kombiniranje koda, teksta, slika, videozapisa, animacija, matematičkih jednadžbi, grafikona i *widgeta* u jednom dokumentu. Na taj način se može stvoriti interaktivni dokument za provođenje numeričkih analiza putem matematičkog računa koje mogu biti vizualno prikazane na razne načine koje nudi Jupyter Notebook. Iz tog razloga ovo okruženje u svom nazivu i sadrži riječ „bilježnica“, jer nas sve gore navedeno asocira na to što čovjek može ručno zapisati u svoju bilježnicu od papira, ali i mnogo više od toga, što uključuje gore već navedene animacije, grafikone ili videozapise [4].

Jupyter Notebook je najviše korišten u kombinaciji s programskim jezikom Python, što je konkretno slučaj i u ovom radu.



Slika 22. Prikaz sučelja *Jupyter Notebook*-a

Na slici 20. su vidljive neke od osnovnih mogućnosti korištenja *Jupyter Notebook*-a.

Kad je riječ o *Code ćeliji*, sadržaji u njoj tretiraju se kao izjave u programskom jeziku trenutne jezgre. Zadana jezgra je *Python*. Dakle, može se pisati *Python* izjave u ćeliji koda. Kada se takva ćelija pokrene, njen rezultat se prikazuje u izlaznoj ćeliji. Izlaz može biti tekst, slika, *matplotlib* crteži ili *HTML* tablice. Takve ćelije imaju mogućnost obogaćenog teksta.

Markdown ćelije sadrže tekst oblikovan korištenjem markdown jezika. Dostupne su sve vrste značajki oblikovanja kao što je podebljavanje teksta i kurziv, prikazivanje uređenog ili neuređenog popisa, prikazivanje tabličnog sadržaja, fotografija, itd. *Markdown ćelije* su posebno korisne za pružanje dokumentacije za računalni proces bilježnice.

Sadržaj u *Raw ćelijama* ne procjenjuje kernel prijenosnog računala. Kada prođe kroz *nbconvert*, ćelija će se prikazati prema želji. Ako upišete *LatEx* u neobrađenu ćeliju, renderiranje će se dogoditi nakon što se primijeni *nbconvert* [6].

3.2. Python

Python je interpretirani, objektno orijentirani programski jezik visoke razine s dinamičkom semantikom. Njegove visoke razine ugrađenih podatkovnih struktura, u kombinaciji s dinamičkim tipkanjem i dinamičkim vezanjem, čine ga vrlo atraktivnim za brzi razvoj aplikacija, kao i za korištenje kao skriptni ili tzv. *ljepljivi* jezik za povezivanje postojećih komponenti. *Pythonova* jednostavna sintaksa koju je lako naučiti naglašava čitljivost i stoga smanjuje troškove održavanja programa. *Python* podržava module i pakete, što potiče modularnost programa i ponovnu upotrebu koda. *Python* tumač i opsežna standardna biblioteka dostupni su u izvornom ili binarnom obliku bez naknade za sve glavne platforme i mogu se besplatno distribuirati [8]. U programskom paketu vezanom za ovaj rad korištena je verzija *Python* 3.13 u *Microsoft Windows* okruženju [19].

3.3. IPyWidgets

IpyWidgets, također poznato pod nazivom *Jupyter Widgets*, *Python* je biblioteka koja omogućuje dodavanje interaktivnih HTML *widgeta* u Jupyter bilježnice. Ovi widgeti omogućuju korisnicima unos i manipulaciju podacima na intuitivan način, čineći bilježnice dinamičnijima i interaktivnijima. Primjeri *widgeta* uključuju klizače, potvrdne okvire, tekstualna polja i gumbе. Korištenjem *IpyWidgets*, korisnici mogu lako vizualizirati kako promjene ulaznih podataka utječu na rezultate modela. Također, omogućuje dijeljenje interaktivnih rezultata s korisnikom bez potrebe za prikazivanjem koda [9].

U programskom paketu će biti iskorištene naredne programske funkcije te će sad biti ukratko objašnjene: *interact*, *IntSlider*, *FloatSlider*, *Dropdown*, *VBox*, *HBox*, *Label*, *Button*, *Output*, *ToggleButtons*.

```
from ipywidgets import interact, IntSlider, FloatSlider, Dropdown, VBox, HBox, Label, Button, Output, ToggleButtons
```

Slika 23. Uvođenje programskih funkcija iz biblioteke *IPyWidgets* u u *Python* kod

Funkcija *interact* automatski generira sučelje s *widgetima* za zadanu funkciju, dakle kada korisnik promijeni vrijednost *widgeta*, funkcija *interact* ponovno poziva funkciju s novim vrijednostima, omogućujući trenutnu povratnu informaciju.

Funkcija *IntSlider* omogućuje odabir cjelobrojne vrijednosti unutar zadanog raspona pomoću klizača, dok *FloatSlider* omogućuje odabir decimalnih vrijednosti unutar zadanog raspona na klizaču.

Dropdown je *widget* koji prikazuje padajući izbornik s unaprijed definiranim opcijama.

Vbox omogućuje vertikalno, a *Hbox* horizontalno grupiranje *widgeta*. Ove funkcije olakšavaju organizaciju i raspoređivanje *widgeta* u izlazu koda, omogućujući stvaranje složenijih korisničkih sučelja.

Label je funkcija koja prikazuje statični tekst. Koristi se za dodavanje naslova ili opisa drugim *widgetima*. Ova funkcija također može prikazivati i *LaTeX* sintaksu za matematičke izraze.

Button je *widget* koji predstavlja gumb te se klikom na njega pokreće određena akcija. Pomoću metode *on_click*, moguće je definirati funkciju koja će se izvršiti kada korisnik klikne na gumb.

Output je funkcija koja omogućuje organizirano prikazivanje rezultata u izlazu koda.

ToggleButtons je funkcija koja omogućuje prikaz grupe povezanih gumba, omogućujući korisniku odabir jedne opcije među njima [10].

3.4. NumPy

NumPy je otvorena biblioteka za programski jezik *Python* koja se koristi u znanosti i inženjerstvu. Omogućuje rad u višedimenzionalnim nizovima i matricama, pružajući funkcionalnosti za učinkovite matematičke i logičke operacije nad strukturama podataka.

```
import numpy as np
```

Slika 24. Uvođenje biblioteke *numpy*

U programskom paketu su korištene sljedeće funkcije [11]:

- *np.zeros*: vraća novi niz zadane forme ispunjen nulama,
- *np.linalg.eig*: računa svojstvene vrijednosti i vektore,
- *np.linalg.inv*: Vraća inverz kvadratne matrice,
- *np.sort*: Sortira elemente niza ulaznim redoslijedom,
- *np.real*: Izvlači realni dio iz kompleksnog broja,
- *np.sqrt*: vraća pozitivni kvadratni korijen svakog elementa u nizu,
- *np.linspace*: generira niz jednako razmaknutih vrijednosti,
- *np.concatenate*: spaja nizove duže specificirane osi.

3.5. SciPy

U ovom programskom paketu je korišten podmodul biblioteke *SciPy*, *scipy.integrate*.

```
from scipy.integrate import solve_ivp
```

Slika 25. Uvođenje biblioteke *SciPy*

Modul *scipy.integrate* omogućuje razne metode integracije, uključujući kvadratnu, rješavanje višestrukih integrala te integraciju sustava diferencijalnih jednačbi. Široko je korišten u znanstvenim i inženjerskim simulacijama, uključujući modeliranje fizikalnih sustava i analizu dinamičkih procesa.

U ovom slučaju je korištena funkcija *solve_ivp* iz modula *scipy.integrate* za rješavanje početnih vrijednosti problema za sustave diferencijalnih jednačbi [12].

3.6. Matplotlib

U programskom kodu je korišten podmodul biblioteke iz naslova poglavlja, pod nazivom *matplotlib.pyplot*. Taj podmodul omogućuje crtanje 2D grafova u *Python*-u. Pruža skup funkcija za stvaranje i upravljanje grafovima, uključujući funkcije za definiranje područja crtanja, iscrtavanje linija te dodavanje oznaka i naslova [13], [14]. Funkcije koje su korištene u tu svrhu u programskom paketu su: *plt.figure*, *plt.plot*, *plt.axhline*, *plt.xticks*, *plt.xlabel*, *plt.ylabel*, *plt.title*, *plt.legend*, *plt.grid*, *plt.show* i *plt.subplots*.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Slika 26. Uvođenje biblioteke *Matplotlib*

3.7. IPython.display

Modul *IPython.display* omogućuje bogato prikazivanje objekata unutar *IPython* okruženja, uključujući Jupyter bilježnice. Funkcija *display* koristi se za prikaz različitih *Python* objekata, omogućujući da se rezultati izraza ili objekti prikažu na vizualno privlačan način. Klasa *Math* omogućuje prikaz matematičkih izraza formatiranih u *LaTeX*-u, koji se renderiraju u pregledniku, pružajući jasno prikazivanje matematičkih formula. Kombinacija *display* i *Math* funkcija omogućuje integraciju složenih matematičkih izraza direktno u bilježnice, poboljšavajući interaktivnost i razumijevanje sadržaja [15].

```
from IPython.display import display, Math
```

Slika 27. Uvođenje biblioteke *IPython*

3.8. PIL

Python Imaging Library je biblioteka za obradu slika u *Python*-u. Omogućuje otvaranje, manipulaciju i spremanje različitih formata slika. Modul *Image* unutar *PIL*-a pruža klasu *Image* koja predstavlja samu sliku te niz tvorničkih funkcija za učitavanje slika iz datoteka i stvaranje novih slika. Ove funkcionalnosti čine *PIL* moćnim alatom za razvoj aplikacija koje zahtijevaju obradu slika [16].

```
from PIL import Image
```

**Slika 28. Uvođenje
biblioteke *PIL***

3.9. OS

Biblioteka *OS* u *Python*-u omogućava funkcije za interakciju s operativnim sustavom, omogućujući upravljanje datotekama, direktorijima i procesima na platformno neovisan način. Pruža funkcije poput brisanja i dodavanja datoteka ili pak navigiranja do zadanog direktorija [17].

```
import os
```

**Slika 29.
Uvođenje
biblioteke *OS***

4. RAZVOJ PROGRAMSKOG PAKETA

Prvo je potrebno instalirati programski jezik *Python* i alat *Jupyter Notebook* te također potrebne biblioteke za rad: *IpyWidgets*, *NumPy*, *SciPy*, *Matplotlib*, *IPython.display* i *PIL*.

4.1. Programski kod

4.1.1. Uvođenje biblioteka i globalnih varijabli

Nakon otvaranja novog *Python* projekta u *Jupyter* bilježnici, potrebno je uvesti potrebne biblioteke na sljedeći način vidljiv na slici 30.

```
from ipywidgets import interact, IntSlider, FloatSlider, Dropdown, VBox, HBox, Label, Button, Output, ToggleButtons
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math
from PIL import Image
import os
```

Slika 30. Uvođenje biblioteka

Također je u početku potrebno definirati naredbu koja osigurava da se grafovi crtani pomoću biblioteke *Matplotlib* prikazuju u *Jupyter Notebook*-u, a ta naredba je definirana na slici 31.

```
%matplotlib inline
```

Slika 31. Naredba za prikaz grafova

Dodatno su još definirane globalne varijable. Varijabla *slider_refs* koja služi za pohranu referenci na klizače kako bi se vrijednosti mogle mijenjati dinamički bez gubitka podataka. Varijabla *output* se koristi za dinamički prikaz izlaza, odnosno osigurava da se rezultati u izlazu prikazuju bez ponovnog iscrtavanja sučelja.

```
# Globalna varijabla za slidere
slider_refs = None

# Globalni izlazni objekt za prikaz
output = Output()
```

Slika 32. Definiranje globalnih varijabli

4.1.2. Definiranje vibracijskog sustava

Nadalje je potrebno definirati osnovne elemente vibracijskog sustava. Prvotno se postavi funkcija za simulaciju dinamičkog sustava:

```
# Funkcija za simulaciju sustava
def simulate_system(num_bodies, body_types, masses, springs, dampers, initial_displacements, connection_types, force_type,
                  force_values, omega_values):
    with output:
        output.clear_output()
```

Slika 33. Funkcija za simulaciju dinamičkog sustava

Iduće naredbe koje budu definirane će se nalaziti unutar bloka *with output*, odnosno unutar funkcije *simulate_system*, sve dok ne bude naznačeno drugačije.

Zatim je potrebno definirati nul matrice osnovnih elemenata vibracijskog sustava: inercijskog elementa, opružnog (elastičnog) i prigušnog. To je vidljivo na slici 34.

```
# Matrice sustava
M = np.zeros((num_bodies, num_bodies)) # Matrica mase/inercije
C = np.zeros((num_bodies, num_bodies)) # Matrica prigušenja
K = np.zeros((num_bodies, num_bodies)) # Matrica krutosti
```

Slika 34. Nul matrice elemenata sustava

Nakon toga se definiraju naredbe prema kojima će matrice biti popunjavane. Prvo je definirano popunjavanje matrice inercijskih elemenata na idući način:

```
for i in range(num_bodies):
    if body_types[i] == 'Translacijsko':
        M[i, i] = masses[i][0] # Uzimamo samo prvu masu
    elif body_types[i] == 'Planarno':
        M[i, i] = (3/2) * masses[i][0] # Translacija i rotacija se zbrajaju; uzimamo samo prvu masu
    elif body_types[i] == 'Kombinirano':
        m_translational = masses[i][0] # Masa trupa kolica (translational)
        m_planar_1 = (3/2) * masses[i][1] # Masa prvog kotača (planar)
        m_planar_2 = (3/2) * masses[i][2] # Masa drugog kotača (planar)

    M[i, i] = m_translational + m_planar_1 + m_planar_2
```

Slika 35, Popunjavanje matrice inercijskih elemenata

Dakle, kao što je prethodno objašnjeno u poglavlju 2.1.4., u obzir za pojavljivanje u sustavu dolaze tri tipa inercijskih elemenata: translacijski, planarni i kombinirani.

Zatim je definiran način popunjavanja matrica krutosti i prigušenja, a ono što je bitno naglasiti za ove sustave je to da će prvi inercijski element u sustavu uvijek s lijeve bočne strane biti vezan za zid, odnosno za nepomični objekt, a posljednji inercijski element u sustavu će svojim desnim

bokom biti vezan za zid. To znači da će broj spojeva u takvom sustavu uvijek biti za jedan veći od broja inercijskih elemenata. Definiranje u kodu izgleda ovako:

```
# Popuniti matricu prigušenja i krutosti prema pravilima sustava
for i in range(num_bodies):
    if i == 0:
        if i < len(dampers):
            C[i, i] += dampers[i]
        if i < len(springs):
            K[i, i] += springs[i]
    else:
        if i < len(dampers):
            C[i, i] += dampers[i]
            C[i, i - 1] -= dampers[i]
        if i < len(springs):
            K[i, i] += springs[i]
            K[i, i - 1] -= springs[i]

    if i < num_bodies - 1:
        if i + 1 < len(dampers):
            C[i, i] += dampers[i + 1]
            C[i, i + 1] -= dampers[i + 1]
        if i + 1 < len(springs):
            K[i, i] += springs[i + 1]
            K[i, i + 1] -= springs[i + 1]
    elif i == num_bodies - 1:
        if i + 1 < len(dampers):
            C[i, i] += dampers[i + 1]
        if i + 1 < len(springs):
            K[i, i] += springs[i + 1]
```

Slika 36. Popunjavanje matrica krutosti i prigušivanja

4.1.3. Definiranje grafičkih prikaza i prikaza rezultata sustava

Izgled svih rezultata izlaza ovog koda bit će na kraju prikazani na temelju dva primjera vibracijskih sustava. Za sada će biti samo objašnjeno što se odvija u kojem dijelu koda. Bitno je naglasiti da su svi matematički i neki tekstualni oblici u izlazu koda zapisani u *LaTeX* formatu zapisa.

Za početak je definiran prikaz diferencijalnih jednadžbi gibanja sustava u matričnom obliku u *LaTeX* formatu zapisa. Također se i prikazuje vektor sila u slučaju da su za sustav odabrane prisilne vibracije.

```
mat_eq = f"{M_str} \\ddot{{{X}}} + {C_str} \\dot{{{X}}} + {K_str} X = {F_str}"
display(Math(mat_eq))
```

Slika 37. Poziv za prikaz matrične diferencijalne jednadžbe

Također je omogućen izračun vlastitih kružnih frekvencija neprigušenih i prigušenih vibracija temeljeno na izračunu svojstvenih vrijednosti i vektora.

```
# Izračun vlastitih kružnih frekvencija neprigušenih vibracija
eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(np.linalg.inv(M) @ K)
omega_n = np.sort(np.sqrt(np.real(eigvals))) # Neprigušene frekvencije

# Izračun vlastitih kružnih frekvencija prigušenih vibracija
damping_ratios = np.diag(C) / (2 * np.sqrt(np.diag(K) * np.diag(M)))
omega_c = omega_n * np.sqrt(1 - damping_ratios ** 2) # Prigušene frekvencije
```

Slika 38. Izračun vlastitih kružnih frekvencija

Zatim je definiran izračun i prikaz glavnih formi vibriranja za neprigušene vibracijske sustave, odnosno ako je prigušivanje prisutno u sustavu, za forme vibriranja se neće uzimati u obzir. Pri tome je još bitno naglasiti kako su glavne forme vibriranja dodatno normalizirane na način da je amplituda prvog tijela uvijek jednaka jedan.

```
# Prilagodba formi vibriranja s fiksnim točkama na oba kraja za graf
num_modes = eigvecs.shape[1]
adjusted_mode_shapes = np.zeros((num_bodies + 2, num_modes)) # Dodajemo dvije fiksne točke (zidove) za graf
adjusted_mode_shapes[1:-1, :] = eigvecs # Postavljamo unutarnje pomake za graf

# Skaliranje formi vibriranja tako da amplituda tijela 1 bude 1
for i in range(num_modes):
    adjusted_mode_shapes[1:-1, i] /= eigvecs[0, i]
```

Slika 39. Definiranje izračuna glavnih formi vibriranja

Grafički prikaz glavnih formi vibriranja definiran je na sljedeći način:

```
# Grafički prikaz formi vibriranja
plt.figure(figsize=(10, 6))
positions = ["Zid"] + [f"Tijelo {i+1}" for i in range(num_bodies)] + ["Zid"]
# Lista različitih markera
markers = ['o', 's', '^', 'D', 'v', 'p', '*', 'x', '+']
for i in range(num_modes):
    marker = markers[i % len(markers)]
    plt.plot(range(len(positions)), adjusted_mode_shapes[:, i], marker=marker, label=f'Glavna forma vibriranja {i+1}')
plt.axhline(0, color='black', lw=1, ls='--')
plt.xticks(range(len(positions)), positions)
plt.xlabel('Položaj (tijelo)')
plt.ylabel('Amplituda')
plt.title('Prikaz formi vibriranja sustava')
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle=':')
plt.show()
```

Slika 40. Definiranje grafa za glavne forme vibriranja

Daljnji korak je dio koda koji numerički riješava sustav diferencijalnih jednažbi za sustav s jedan ili više stupnjeva slobode gibanja.

```
# Funkcija za izračunavanje derivacija stanja
def eq_of_motion(t, w):
    X = w[:num_bodies] # Pozicije
    X_dot = w[num_bodies:] # Brzine
    force_vector = np.zeros(num_bodies)

    if force_type != 'Slobodne vibracije':
        for i in range(num_bodies):
            if force_type == 'Fsin(ωt)':
                force_vector[i] = force_values[i] * np.sin(omega_values[i] * t)
            elif force_type == 'Fcos(ωt)':
                force_vector[i] = force_values[i] * np.cos(omega_values[i] * t)

    X_ddot = np.linalg.inv(M) @ (-C @ X_dot - K @ X + force_vector)
    return np.concatenate([X_dot, X_ddot])
```

Slika 41. Definiranje funkcije gibanja i ulaznih parametara

Može se primjetiti da će se vektor sila izračunavati samo u slučaju odabira prisilnih vibracija, odnosno ako nisu odabrane slobodne vibracije.

Na kraju je potrebno definirati parametre simulacije: trajanje simulacije, broj točaka vremenske diskretizacije, vektor vremenskih koraka i početni pomak, to se može vidjeti na slici 42.

```
stoptime = 20
numpoints = 5001
t_eval = np.linspace(0, stoptime, numpoints)
x0 = np.zeros(2 * num_bodies)
x0[:num_bodies] = initial_displacements
```

Slika 42. Definiranje parametara simulacije

Za numeričko rješavanje sustava diferencijalnih jednažbi koristi se *solve_ivp* koja je temeljena na metodi *Runge-Kutta-Fehlberg (RK45)*. Metoda je numerička te koristi adaptivni korak integracije kombinirajući formule četvrtog i petog reda za automatsku kontrolu pogreške. Prednost korištenja ove metode leži u njejoj sposobnosti da prilagodi veličinu koraka tijekom integracije, osiguravajući željenu točnost uz efikasno korištenje računalnih resursa [20].

```
solution = solve_ivp(eq_of_motion, [0, stoptime], x0, t_eval=t_eval)
```

Slika 43. Poziv za numeričko rješavanje diferencijalne jednažbe

Kao još jedan dio rezultata vibracijskog sustava biti će grafički prikaz dinamičkog odziva i uzbudne sile. Za svako tijelo prikazat će se zasebni graf te će se na njima uz odziv prikazivati

i uzbudne sile ako su postojeće, odnosno ako su im amplitude veće od nula. Definiranje tog grafičkog prikaza definirano je na slici 44.

```
# Prikaz odziva svakog tijela uz sve uzbudne sile, koristeći sekundarnu os za sile
colors = ['r', 'g', 'm', 'c', 'y'] # Boje za sile

for i in range(num_bodies):
    fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(9, 6))

    # Prva y-os (odziv tijela)
    ax1.set_xlabel('Vrijeme (s)')
    ax1.set_ylabel('Pomak (m)', color='b')
    ax1.plot(solution.t, solution.y[i], label=rf'$x_{i+1}$ (m)', linewidth=2, color='b')
    ax1.tick_params(axis='y', labelcolor='b')

    # Druga y-os (uzbudne sile)
    ax2 = ax1.twinx()
    ax2.set_ylabel('Sila (N)', color='r')
```

Slika 44. Definiranje grafa za odziv tijela i uzbudne sile

Ovim dijelom koda završava definiranje naredbi unutar bloka *with output*, odnosno unutar funkcije *simulate_system*.

4.1.4. Definiranje prikaza skice vibracijskog sustava

Funkcijom *generate_sketch_with_images* u izlazu koda se generira skica vibracijskog sustava koristeći slike iz vanjske mape. Skica se automatski generira prema postavljenim parametrima vibracijskog sustava.

```
# Funkcija za generiranje skice sustava prema korisničkim parametrima koristeći slike iz vanjskog izvora
def generate_sketch_with_images(num_bodies, body_types, connection_types, image_folder, force_type):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(15, 7.5))
    ax.set_xlim(-1.5, num_bodies * 3 + 2)
    ax.set_ylim(-2, 2)
```

Slika 45. Definiranje funkcije za stvaranje skice vibracijskog sustava

Dakle stvaranje skice funkcionira tako što se koriste fotografije iz vanjske mape. Prva fotografija u nizu je uvijek prikaz lijevog krajnjeg zida, posljednja fotografija je uvijek prikaz desnog krajnjeg zida. Nakon fotografije lijevog krajnjeg zida, dolazi veza odnosno spoj zida sa inercijskim tijelom (opruga, prigušivač, itd.), nakon veze dolazi fotografija inercijskog elementa ovisno o tome koji tip je odabran. Tim redom se u nizu slažu fotografije ovisno o tome kako su parametri sustava u početku postavljeni. Primjer prikaza generirane skice bit će prikazan u poglavlju 4.2. u prikazu oprinjerivanja vibracijskih sustava.

4.1.5. Definiranje izračuna ekvivalentnih vrijednosti krutosti i prigušenja

U ovom dijelu koda definirana je funkcija `calculate_equivalent` koja računa ekvivalentne vrijednosti krutosti k_{eq} i prigušenja c_{eq} za različite tipove mehaničkih spojeva. U obzir za tipove spojeva dolaze: dvije opruge u seriji, dvije opruge u paraleli, dva prigušivača u paraleli, dva prigušivača u seriji, opruga i prigušivač u paraleli, samostalna opruga i samostalni prigušivač. Sve to je jasno vidljivo u kodu na slici 46.

```
# Funkcija za izračunavanje ekvivalentnih vrijednosti
def calculate_equivalent(k1, k2, c1, c2, connection_type):
    k_eq = 0
    c_eq = 0

    if connection_type == '2 Opruge serijski':
        k_eq = 1 / (1/k1 + 1/k2)
    elif connection_type == '2 Opruge paralelno':
        k_eq = k1 + k2
    elif connection_type == '2 Prigušivača paralelno':
        c_eq = c1 + c2
    elif connection_type == 'Opruga i Prigušivač paralelno':
        k_eq = k1
        c_eq = c1
    elif connection_type == 'Samo Opruga':
        k_eq = k1
        c_eq = 0
    elif connection_type == 'Samo Prigušivač':
        k_eq = 0
        c_eq = c1
    elif connection_type == '2 Prigušivača serijski':
        c_eq = 1 / (1/c1 + 1/c2)

    return k_eq, c_eq
```

Slika 46. Definiranje ekvivalentnih vrijednosti krutosti i prigušivanja

4.1.6. Definiranje klizača za vrijednosti konstanti krutosti i prigušenja te vanjske pobude

Funkcija `generate_spring_damper_force_sliders` dinamički generira klizače za krutosti opruga i prigušivača te amplitude vanjske pobude i uzbudnih frekvencija.

```
# Funkcija za generiranje slidera za opruge, prigušivače i sile
def generate_spring_damper_force_sliders(connection_types, force_type):
    global slider_refs
    if slider_refs is None:
        slider_refs = {}
    sliders_box = []
```

Slika 47. Funkcija i globalni rječnik za klizače

Kao što je vidljivo na slici 47., prvotno se definira globalni rječnik *slider_refs* koji čuva reference na klizače kako bi se vrijednosti sačuvale između ažuriranja. Time se tipovi klizača automatski generiraju prema odabranoj vrsti spoja u varijabli *connection_types*.

Za primjer će biti uzet dio koda za generiranje klizača krutosti opruga što se može vidjeti na slici 48.

```
for i, conn in enumerate(connection_types):
    if "Oprug" in conn:
        num_springs = 2 if "2" in conn else 1
        for j in range(num_springs):
            key = f'k{i+1}_{j+1}'
            slider = slider_refs.get(key, FloatSlider(value=100.0, min=0.0, max=2000.0, step=50.0, description=f'Opruga {i+1}_{j+1} (N/m)'))
            sliders_box.append(slider)
            slider_refs[key] = slider
```

Slika 48. Generiranje klizača za krutosti opruga

Provjerava se je li u vezi sadržana opruga i pri tome mogu biti dvije opruge u slučaju serijskog ili paralelnog spoja i može biti jedna opruga za svaku grupu veze. Na taj način se generiraju klizači za odabir iznosa krutosti opruga.

Na sličan princip funkcionira i pojavljivanje klizača za viskozno prigušivanje i uzbudnu silu s pripadajućom frekvencijom.

4.1.7. Definiranje funkcije za podešavanje parametara sustava

Funkcija *interactive_system* omogućava interaktivno podešavanje parametara sustava pomoću klizača, padajućih izbornika, gumba i slično. Korisnik pomoću ove funkcije ima mogućnost podešavanja narednih parametara: broj tijela, vrste tijela, mase tijela, pri čemu se za svako postojeće tijelo u sustavu pojavljuju tri klizača za odabira iznosa mase zbog kombiniranog tipa tijela, a ako su odabrani tipovi tijela translacijsko ili planarno, u funkciji će biti samo prvi klizači od svakoga tijela. Zatim je još moguće podešavati vrstu veza između tijela, iznose početnih pomaka za svako tijelo, tip vibracija (slobodne ili prisilne) te iznose uzbudnih sila i njihovih pripadajućih frekvencija za svako tijelo u slučaju da su za tip vibracija odabrane prisilne.

```
# Funkcija za ažuriranje sustava prema odabiru korisnika
def interactive_system(num_bodies):
    num_bodies_slider = IntSlider(value=num_bodies, min=1, max=5, step=1, description="Broj tijela")
```

Slika 49. Definiranje funkcije za parametre sustava

Funkcija *update_system* pomoću sintakse ***kwargs* može primiti neograničen broj ključnih riječi u obliku dinamičkog rječnika, čime se sustav interaktivno podešava u stvarnom vremenu. Argumenti u *kwargs* rječniku odgovaraju imenima interaktivnih *widgeta*, odnosno klizača ili izbornika. Vrijednosti u toj sintaksi su vrijednosti tih *widgeta*. Primjer dohvaćanja argumenata pomoću sintakse *kwargs* može se vidjeti na slici 50.


```
def update_system(**kwargs):
    global slider_refs
    global output

    num_bodies = kwargs['num_bodies']
    body_types = [kwargs[f'Tip {i+1}'] for i in range(num_bodies)]
    masses = []
    for i in range(num_bodies):
        sliders = [kwargs[f'Masa {i+1}_{j+1}'] for j in range(3)]
        masses.append(sliders)
```

Slika 50. Dohvaćanje argumenata pomoću sintakse ****kwargs**

Također je omogućen i gumb „Osvježi“ na čiji se pritisak ažurira cijeli sustav i pokreće simulacija u svrhu osiguranja za slučaj da se neki od parametara nije automatski ažurirao u stvarnom vremenu.

```
refresh_button = Button(description="Osvježi", button_style='success')
refresh_button.on_click(lambda _: update_system(**{key: control.value for key, control in controls.items()}))
```

Slika 51. Definiranje gumba "Osvježi"

4.1.8. Definiranje funkcije ažuriranja sustava prema broju tijela

Završni dio koda definira pokretanje interaktivnog sustava pri čemu je definirano da se parametri u sustavu ažuriraju prema odabranom broju tijela na klizaču. To znači da ako je odabran određen broj tijela, broj padajućih izbornika za tipove tijela ili pak padajućih izbornika za tipove veza u sustavu će se automatski prilagoditi prema odabranom broju tijela.

```
# Pokretanje sustava
def dynamic_interactive_system():
    num_bodies_slider = IntSlider(value=3, min=1, max=5, step=1, description="Broj tijela")

    def update_num_bodies(num_bodies):
        interactive_system(num_bodies)

    interact(update_num_bodies, num_bodies=num_bodies_slider)

dynamic_interactive_system()
```

Slika 52. Definiranje pokretanja sustava

Bitno je još naglasiti kako je maksimalan mogući broj tijela u sustavu jednak pet.

4.2. Primjeri vibracijskih sustava u programskom paketu

U ovom poglavlju će biti vidljiv izlazi dvaju primjera proizvoljno odabranih vibracijskih sustava. Također, ulaskom u Jupyter bilježnicu ovog programskog paketa prvo je vidljiv vizualni tekst u *markdown ćeliji* u kojem je sadržano objašnjenje funkcija koda i upute za korištenje.

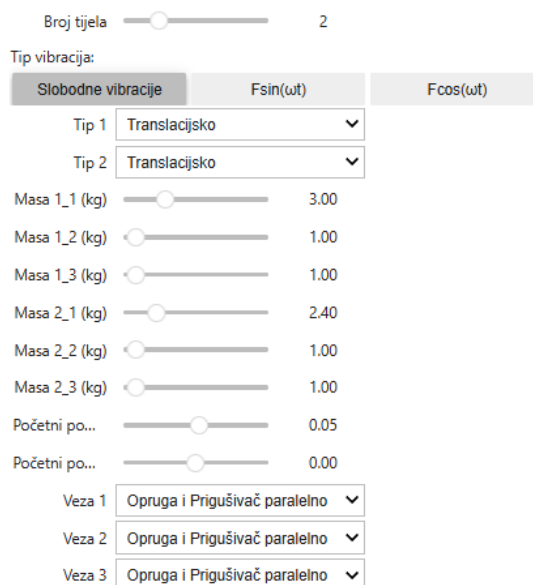
11. Upute za korištenje

1. **Odaberite broj tijela u sustavu** pomoću klizača.
2. **Postavite parametre tijela** (masa, tip tijela, itd.).
3. **Definirajte tip veze** između tijela (opruga, prigušivači).
4. **Odaberite tip vibracija** (slobodne ili prisilne).
5. **Pokrenite simulaciju** klikom na gumb "Osvježi".
6. **Pregledajte rezultate:**
 - Vlastite frekvencije sustava
 - Mode shapes (forme vibriranja)
 - Odziv sustava u vremenu
 - Grafove uzbudnih sila

Slika 53. Dio teksta u *markdown ćeliji*

4.2.1. Primjer 1

Za prvi primjer bit će odabran sustav s dva stupnja slobode gibanja dvaju translacijskih tijela koji slobodno vibriraju i koji su spojeni s tri veze koje su tipa: opruga i prigušivač u paraleli. Također će na prvo tijelo biti određen početni pomak.



Broj tijela 2

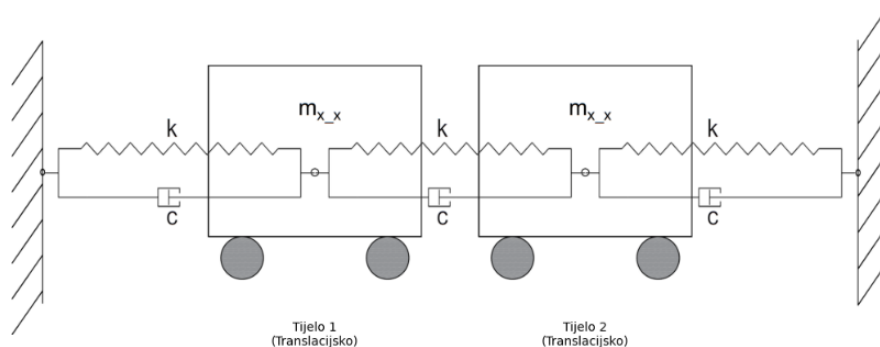
Tip vibracija:

	Slobodne vibracije	Fsin(ωt)	Fcos(ωt)
Tip 1	Translacijsko		
Tip 2	Translacijsko		
Masa 1_1 (kg)	<input type="range" value="3.00"/>	3.00	
Masa 1_2 (kg)	<input type="range" value="1.00"/>	1.00	
Masa 1_3 (kg)	<input type="range" value="1.00"/>	1.00	
Masa 2_1 (kg)	<input type="range" value="2.40"/>	2.40	
Masa 2_2 (kg)	<input type="range" value="1.00"/>	1.00	
Masa 2_3 (kg)	<input type="range" value="1.00"/>	1.00	
Početni po...	<input type="range" value="0.05"/>	0.05	
Početni po...	<input type="range" value="0.00"/>	0.00	
Veza 1	Opruga i Prigušivač paralelno		
Veza 2	Opruga i Prigušivač paralelno		
Veza 3	Opruga i Prigušivač paralelno		

Slika 54. Parametri primjera 1

Na slici 54. su vidljivi početno postavljene uvjeti kako je i opisano. Također su određene i vrijednosti masa svakog od tijela, pri čemu je bitno naglasiti kako se masa indeksa „1_1“ odnosi na masu prvog tijela, a masa indeksa „2_2“ na masu drugog tijela s obzirom na to da su translacijski tipovi tijela u pitanju.

Nadalje je na slici 56. moguće vidjeti skicu koja prikazuje izgled ovog vibracijskog sustava.



Slika 55. Skica sustava iz primjera 1

Iduće što je moguće vidjeti u izlazu koda su klizači za vrijednosti krutosti opruga i viskoznog prigušivanja svakog od prigušivača. Također je vidljiv i gumb za osvježavanje sustava, diferencijalne jednadžbe u općenitom matricnom zapisu, iznosi vlastitih kružnih frekvencija neprigušenih i prigušenih vibracija te diferencijalne jednadžbe sa pripadajućim numeričkim vrijednostima. Sve to prikazuje slika 56.

Opruga 1_1 ...	<input type="text"/>	250.00
Prigušivač 1...	<input type="text"/>	2.00
Opruga 2_1 ...	<input type="text"/>	150.00
Prigušivač 2...	<input type="text"/>	3.00
Opruga 3_1 ...	<input type="text"/>	200.00
Prigušivač 3...	<input type="text"/>	4.00

Osvježi

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{X} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \dot{X} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vlastite kružne frekvencije: } \begin{bmatrix} \omega_{n,1} = 9.12871 \text{ rad/s} & \omega_{n,2} = 13.99405 \text{ rad/s} \\ \omega_{c,1} = 9.10491 \text{ rad/s} & \omega_{c,2} = 13.89163 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

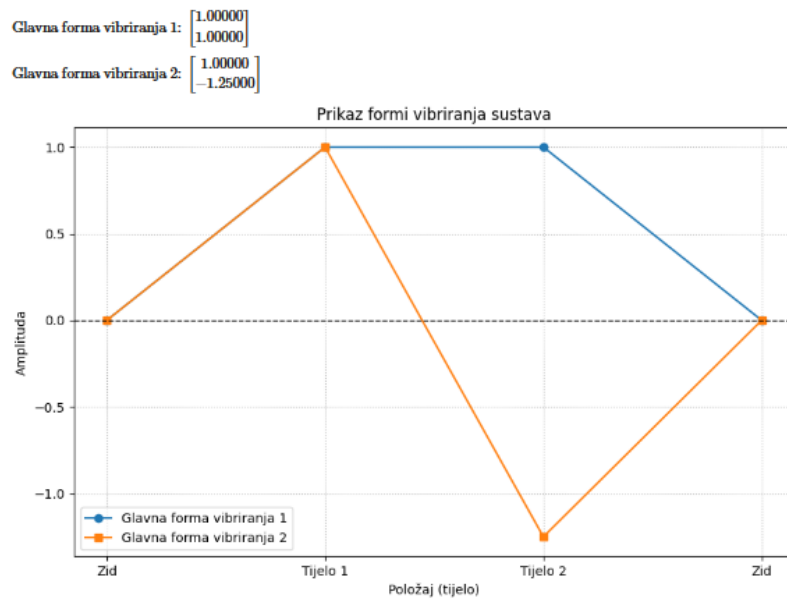
Diferencijalne jednadžbe sustava:

$$3.00\ddot{x}_1 + 2.00\dot{x}_1 + 250.00x_1 + 3.00(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 150.00(x_1 - x_2) = 0$$

$$2.40\ddot{x}_2 + 3.00(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + 150.00(x_2 - x_1) + 4.00\dot{x}_2 + 200.00x_2 = 0$$

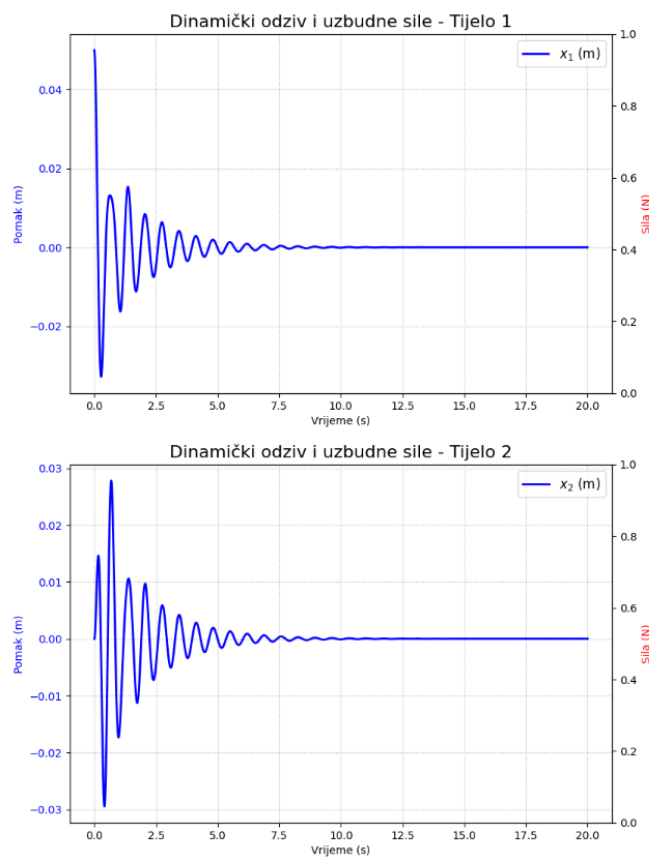
Slika 56. Dodatni parametri i izlazni podatci primjera 1

Kako je i definirano u prethodnim poglavljima, generirane su i glavne forme vibriranja:



Slika 57. Prikaz glavnih formi vibriranja za primjer 1

Također je moguće vidjeti i dinamičke odzive sustava svakog od tijela iz sustava, što se vidi na slici 58.



Slika 58. Dinamički odzivi tijela iz primjera 1

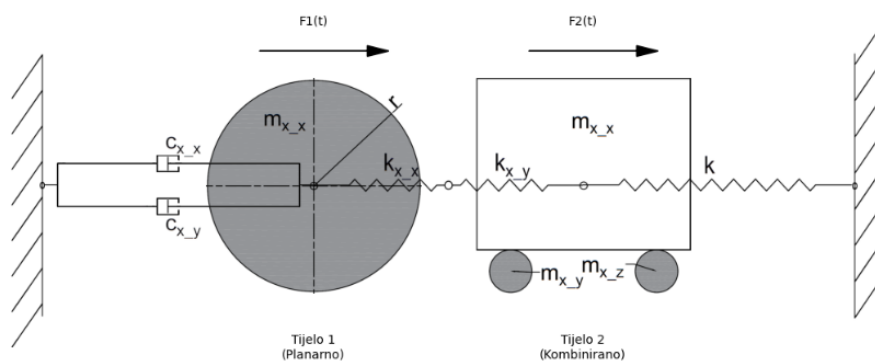
4.2.2. Primjer 2

Za drugi primjer bit će odabran sustav s dva stupnja slobode gibanja planarnog i kombiniranog tijela koji prisilno vibriraju i koji su spojeni s tri veze. Početni pomak za oba tijela bit će jednak nuli, a samo na prvo tijelo će djelovati sinusna uzbudna sila, dok će amplituda druge sile biti jednaka nuli.

Broj tijela

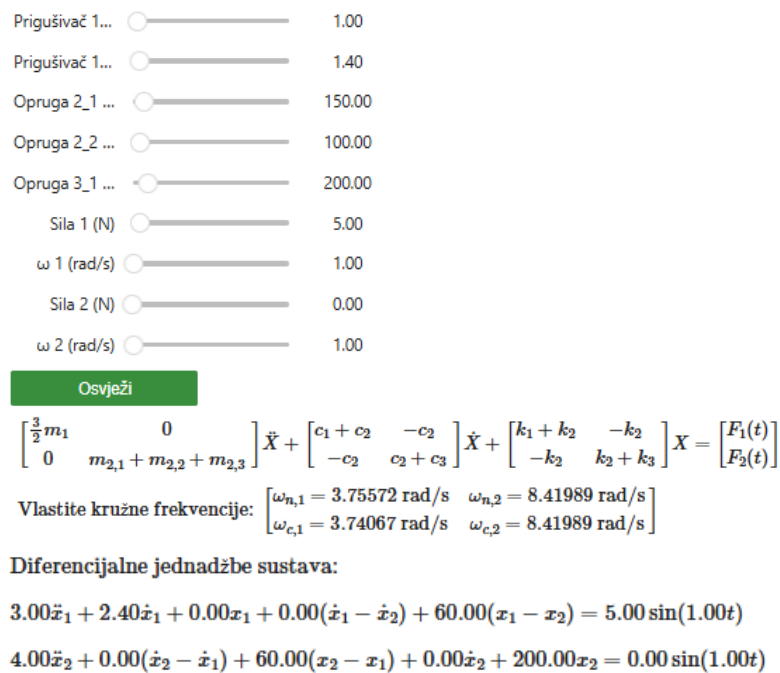
Tip vibracija:

Slobodne vibracije	Fsin(ωt)	Fcos(ωt)
Tip 1	Planarno	
Tip 2	Kombinirano	
Masa 1_1 (kg)	<input type="text" value="2.00"/>	
Masa 1_2 (kg)	<input type="text" value="1.00"/>	
Masa 1_3 (kg)	<input type="text" value="1.00"/>	
Masa 2_1 (kg)	<input type="text" value="1.00"/>	
Masa 2_2 (kg)	<input type="text" value="1.00"/>	
Masa 2_3 (kg)	<input type="text" value="1.00"/>	
Početni po...	<input type="text" value="0.00"/>	
Početni po...	<input type="text" value="0.00"/>	
Veza 1	2 Prigušivača paralelno	
Veza 2	2 Opruge serijski	
Veza 3	Samo Opruga	



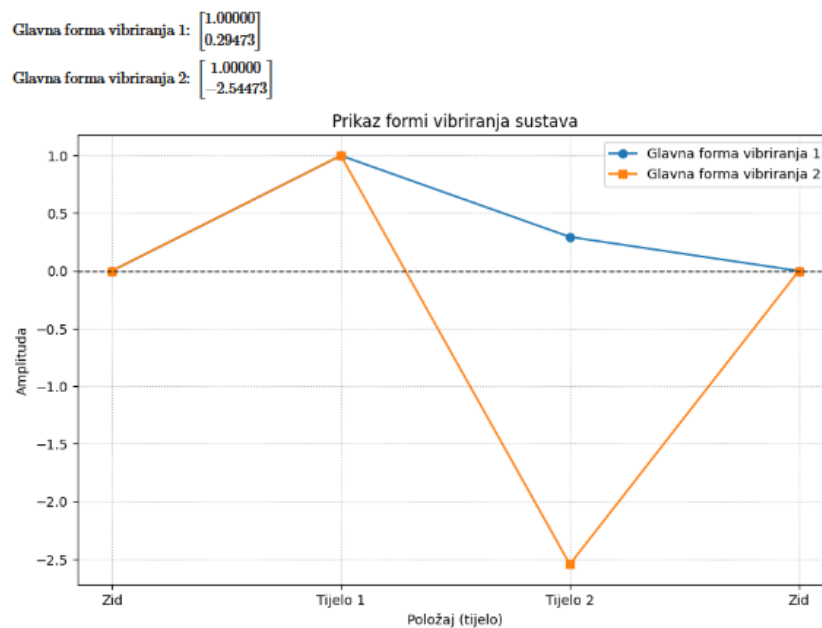
Slika 59. Vibracijski sustav u primjeru 2

Zatim su tu i parametri vrijednosti iznosa krutosti opruge, prigušivanja te amplitude sile i pripadajuće frekvencije uz prikaz izlaznih podataka. Iz slike 60. po numerički generiranim diferencijalnim jednadžbama može se primjetiti kako su iznosi masa tijela prilagođeni vrsti tijela te su generirane ekvivalentne vrijednosti masa.



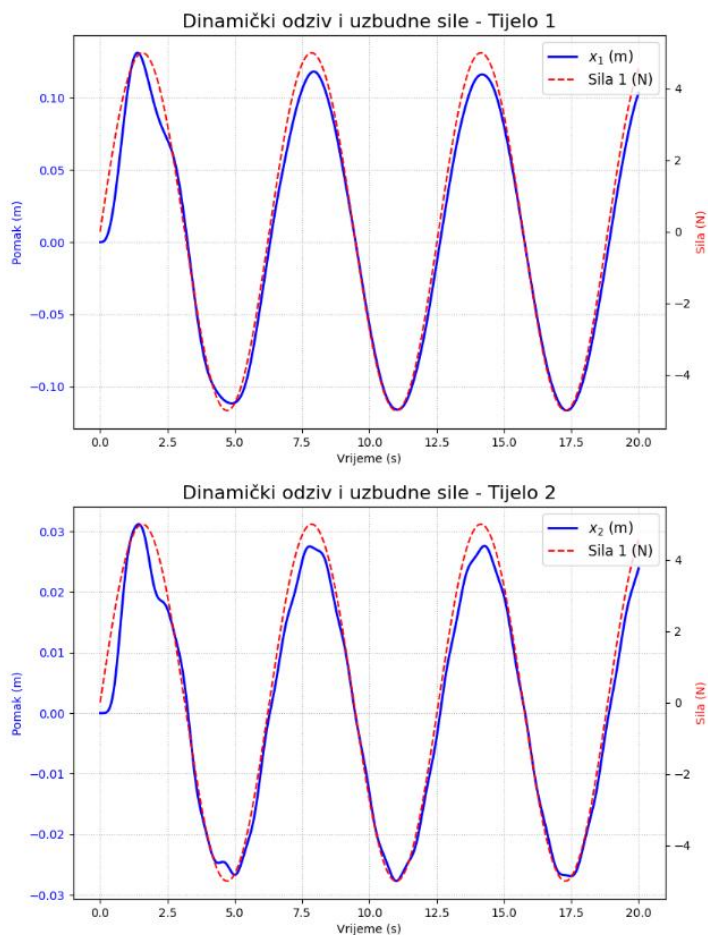
Slika 60. Prikaz izlaznih rezultata primjera 2

Još se mogu vidjeti glavne forme vibriranja:



Slika 61. Glavne forme vibriranja primjera 2

Na kraju je na slici 62. vidljiv prikaz dinamičkog odziva za svako tijelo zasebno te je na istim grafičkim prikazima vidljiva uzbudna sila koja djeluje na tijelo 1 s obzirom da je njena amplituda veća od nula.



Slika 62. Dinamički odzivi u primjeru 2

5. ZAKLJUČAK

Jupyter bilježnice su se pokazale vrlo učinkovitim alatom za analizu u području teorije vibracija, sve to zahvaljujući svojoj sposobnosti interaktivnog programiranja i vizualizacije podataka. U kombinaciji s bibliotekama poput NumPy, SciPy i Matplotlib, omogućena je učinkovita numerička analiza i simulacija vibracijskih sustava. Korisnici mogu definirati razne početne parametre, pri čemu se kao povratnu informaciju dobiju razni podaci i rezultati, kako u numeričkom, tako i u grafičkom smislu. Time se omogućuje brzo eksperimentiranje s parametrima sustava i uočavanje utjecaja različitih faktora na ponašanje mehaničkih sustava.

Jedna od mnogih prednosti Jupyter bilježnica je podrška za prikaz matematičkih izraza u LaTeX sintaksi. Zahvaljujući integraciji s `IPython.display` i `Math` funkcijama, diferencijalne jednadžbe i matrični zapisi mogu se izražajno formatirati i prikazati na način koji olakšava njihovo razumijevanje.

Osim numeričkih rješenja, Jupyter bilježnice omogućuju jednostavan i prilagodljiv prikaz grafičkih rješenja, poput vremenskih odziva sustava i glavnih formi vibriranja sustava. Vizualizacija podataka putem Matplotlib biblioteke pruža intuitivan uvid u dinamiku sustava, čime se olakšava razumijevanje rezultata.

Na kraju, važno je napomenuti kako su Jupyter bilježnice zahvaljujući svojoj interaktivnosti također vrijedan alat u edukativne svrhe. Korisnici mogu mijenjati parametre, pokretati simulacije i u trenutku vidjeti učinke svojih promjena, što omogućuje bolje razumijevanje teorijskih koncepata. Na taj način, Jupyter bilježnice postaju zanimljiv i koristan alat za istraživanje, analizu i edukaciju u području mehaničkih vibracija. Kako bi se program učinio lako dostupan studentima i istraživačima u potpunosti je objavljen na Github-u [21,22].

LITERATURA

- [1] D. Pustaić, H. Wolf, Z. Tonković: Mehanika III., Tehnička knjiga Zagreb, 2005.
- [2] D. J. Inman: Engineering vibrations, University of Michigan, 1994
- [3] S. S. Rao: Mechanical vibrations, University of Miami, 1986
- [4] IgoToCode:<https://igotocode.com/hr/best-python-development-tools-idle-pycharm-jupyter>, pristupljeno 20.01.2025.
- [5] mivali.hr:<https://www.mivali.hr/slika-priode-K010088K12080>, pristupljeno 20.01.2025.
- [6] tutorialspoint:https://www.tutorialspoint.com/jupyter/jupyter_notebook_types_of_cells.htm, pristupljeno 21.01.2025.
- [7] Wikipedia:https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Sine_cosine_one_period.svg, pristupljeno 21.01.2025.
- [8] Python: <https://www.python.org/doc/essays/blurb/>, pristupljeno 21.01.2025.
- [9] Jupyter Widgets: <https://ipywidgets.readthedocs.io/en/latest/>, pristupljeno 21.01.2025.
- [10] CoderzColumn:<https://coderzcolumn.com/tutorials/python/interactive-widgets-in-jupyter-notebook-using-ipywidgets>, pristupljeno 21.01.2025.
- [11] NumPy: <https://numpy.org/doc/stable/index>, pristupljeno 21.01.2025.
- [12] SciPy: <https://scipy.org/>, pristupljeno 21.01.2025.
- [13] Matplotlib: https://matplotlib.org/stable/api/pyplot_summary.html, pristupljeno 21.01.2025.
- [14] W3Schools: https://www.w3schools.com/python/matplotlib_pyplot.asp, pristupljeno 21.01.2025.
- [15] IPython: <https://ipython.readthedocs.io/en/stable/api/generated/IPython.display.html>, pristupljeno 21.01.2025.
- [16] Pillow: <https://pillow.readthedocs.io/en/stable/reference/Image.html>, pristupljeno 21.01.2025.
- [17] Python – OS: <https://docs.python.org/3/library/os.html>, pristupljeno 21.01.2025.
- [18] Stitch Dana: <https://www.stitchdata.com/analysis-tools/jupyter/>, pristupljeno 10.2.2025.
- [19] Python download: <https://www.python.org/downloads/release/python-3130/>, pristupljeno 10.2.2025.
- [20] Runge-Kutta-Fehlberg metoda:
https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta%E2%80%93Fehlberg_method, pristupljeno 10.2.2025.

- [21] Github: <https://github.com/bruno-dogancic/DynamicsLAB-Jupyter> , pristupljeno 19.02.2025.
- [22] Bajić, I., & Dogančić, B. (2025). bruno-dogancic/DynamicsLAB-Jupyter: DynamicsLAB-Jupyter_v0.1. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14891714>

PRILOZI

- I. Programski kod dostupan je na: <https://github.com/bruno-dogancic/DynamicsLAB-Jupyter>