

Primjena kontrolnih karata u industriji i laboratoriju

Barun, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:107389>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-28**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Luka Barun

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentorica:

prof. dr. sc. Biserka Runje

Student:

Luka Barun

Zagreb, 2025.

IZJAVA

Izjavljujem da sam završni rad izradio samostalno, koristeći znanje stečeno na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, i navedenu literaturu.

Ovom prilikom zahvaljujem mentorici prof. dr. sc. Biserki Runje na stručnoj pomoći i savjetima tijekom izrade ovoga rada. Također zahvaljujem dr. sc. Andreju Razumiću na strpljivosti, razumijevanju te svim pruženim savjetima i pomoći prilikom izrade rada.

Luka Barun



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo
materijala i mehatronika i robotika



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Barun Luka**

JMBAG: **0035228132**

Naslov rada na
hrvatskom jeziku:

Primjena kontrolnih karata u industriji i laboratoriju

Naslov rada na
engleskom jeziku:

The application of control charts in industry and in laboratory settings

Opis zadatka:

Kontrolne karte su alati statističke kontrole kvalitete. Imaju značajnu primjenu u industriji za praćenje i kontrolu kvalitete procesa i u laboratorijima za kontrolu i validaciju točnosti i preciznosti mjernih sustava. Kontrolne karte vrlo brzo detektiraju i signaliziraju značajne uzroke varijacija u proizvodnim procesima i mjernim sustavima. Kontrolne karte također imaju ključnu ulogu u sustavima upravljanja kvalitetom kao što su Lean i Six Sigma metodologije koje se koriste za poboljšavanje poslovnih procesa i smanjenje varijacija kako bi se postigla visoka kvaliteta proizvoda i usluga.

U radu je potrebno:

- Provesti sistematizaciju kontrolnih karata na osnovi vrste podataka, vrste procesa, kao i njihovoj namjeni u industriji i laboratorijima.
- Opisati statističke metode za izračun centralnih linija i granica kontrolnih karata.
- Primijeniti kontrolne karte za odabrane proizvodne procese i mjerne sustave.
- Analizirati prednosti te ograničenja i nedostatke kontrolnih karata.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Zadatak zadan:

Prof. dr. sc. *Biserka Runje*

Datum predaje rada:

1. rok: 20. i 21. 2. 2025.

2. rok: 10. i 11. 7. 2025.

3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025.

2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025.

3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. *Damir Godec*

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	II
POPIS TABLICA	III
POPIS OZNAKA	IV
SAŽETAK	V
SUMMARY	VI
1. UVOD	1
2. SISTEMATIZACIJA KONTROLNIH KARATA	2
2.1. Prema vrsti podataka	2
2.2. Prema vrsti procesa	3
2.3. Prema namjeni	4
2.4. ISO 7870-2:2024 – Shewhartove kontrolne karte	4
3. KONTROLNE KARTE	6
3.1. Općenito	6
3.2. Vrste kontrolnih karti	8
3.2.1. Kontrolne karte za kontinuirane podatke (varijable)	8
3.2.2. Kontrolne karte za diskretne podatke (atribute)	17
3.2.3. Specijalne kontrolne karte	20
3.3. Trendovi podataka u kontrolnih karti	25
4. PRIMJENA KONTROLNIH KARATA	27
4.1. \bar{x} - R karta	27
4.2. \bar{x} - s karta	30
4.3. I - MR karta	32
4.4. Z - MR karta	34
4.5. p karta	36
4.6. c karta	38
4.7. u karta	41
4.8. EWMA karta	43
4.9. CUSUM karta	45
4.10. Hotelling T^2 karta	47
5. LABORATORIJSKA PRIMJENA KONTROLNIH KARATA	50
5.1. Analiza mjernog sustava – TIP 1	55
5.2. Primjena kontrolnih karata u analizi mjernog sustava – R&R	56
6. TABLICA KONTROLNIH KARATA	58
7. ZAKLJUČAK	62
LITERATURA	63

POPIS SLIKA

Slika 1a).	Model kontrolne karte [1].....	6
Slika 1b).	Model kontrolne karte s odstupanjima [1].....	6
Slika 2.	Kontrolna karta s granicama upozorenja.....	7
Slika 3.	Vrste trendova podataka u kontrolnim kartama kontrolnih karata.....	25
Slika 4.	Podjela kontrolnih karata [5].....	27
Slika 5.	\bar{x} - R karta – rezultati mjerenja dužine bregastih osovina.....	29
Slika 6.	\bar{x} - s karta – rezultati mjerenja mase pakiranja zrnatog sira.....	31
Slika 7.	I - MR karta – rezultati mjerenja potentnosti lijeka.....	33
Slika 8.	Z - MR karta – rezultati mjerenja veličine žiga.....	35
Slika 9.	p karta – podatci mjerenja obavljenih poziva teleoperatera.....	37
Slika 10.	c karta – broj nepravilnosti u časopisima 1.....	39
Slika 11.	c karta – broj nepravilnosti u časopisima 2.....	40
Slika 12.	u karta – rezultati mjerenja nepravilnosti na površini kućišta.....	42
Slika 13.	EWMA karta – rezultati mjerenja volumnog udjela lužine.....	44
Slika 14.	CUSUM karta – podatci mjerenja potrošnje reagensa.....	46
Slika 15.	Hotelling T^2 karta – rezultati mjerenja prodaje i posjete trgovini.....	48
Slika 16.	Prikaz dnevne karte [12].....	50
Slika 17a).	I - MR karta – dnevna temperatura u siječnju.....	51
Slika 17b).	I - MR karta – dnevna temperatura u veljači.....	51
Slika 17c).	I - MR karta – dnevna temperatura u ožujku.....	52
Slika 18.	Očitavanje temperature inkubatora [12].....	53
Slika 19.	I - MR karta – odstupanje temperature.....	53
Slika 20.	Provjera volumetrijske opreme [12].....	54
Slika 21a).	I - MR karta – Masa dodatne vode.....	54
Slika 21b).	I - MR karta – Volumena vode.....	55
Slika 22.	TIP 1 analiza promjera prstena.....	56
Slika 23.	R i \bar{x} kontrolna karta u analizi ponovljivosti i obnovljivosti rezultata mjerenja.....	57

POPIS TABLICA

Tablica 1.	Rezultati mjerenja dužine bregastih osovina.....	28
Tablica 2.	Prednosti, nedostatci i ograničenja \bar{x} - R kontrolne karte.....	30
Tablica 3.	Rezultati mjerenja mase pakiranja zrnatog sira.....	30
Tablica 4.	Prednosti, nedostatci i ograničenja \bar{x} - s kontrolne karte.....	32
Tablica 5.	Rezultati mjerenja potentnosti lijeka.....	32
Tablica 6.	Prednosti, nedostatci i ograničenja I - MR kontrolne karte.....	34
Tablica 7.	Rezultati mjerenja veličine žiga.....	34
Tablica 8.	Prednosti, nedostatci i ograničenja Z - MR kontrolne karte.....	35
Tablica 9.	Podatci mjerenja obavljenih poziva teleoperatera.....	36
Tablica 10.	Prednosti, nedostatci i ograničenja p kontrolne karte.....	37
Tablica 11.	Rezultati nepravilnosti u časopisima 1.....	38
Tablica 12.	Rezultati nepravilnosti u časopisima 2.....	39
Tablica 13.	Prednosti, nedostatci i ograničenja c kontrolne karte.....	40
Tablica 14.	Rezultati mjerenja nepravilnosti na površini kućišta.....	41
Tablica 15.	Prednosti, nedostatci i ograničenja u kontrolne karte.....	42
Tablica 16.	Rezultati mjerenja volumnog udjela lužine.....	43
Tablica 17.	Prednosti, nedostatci i ograničenja EWMA kontrolne karte.....	44
Tablica 18.	Podatci mjerenja potrošnje reagensa.....	45
Tablica 19.	Prednosti, nedostatci i ograničenja CUSUM kontrolne karte.....	47
Tablica 20.	Rezultati mjerenja prodaje i posjete trgovini.....	47
Tablica 21.	Prednosti, nedostatci i ograničenja Hotelling T^2 kontrolne karte.....	49
Tablica 22.	Promjer prstena.....	55
Tablica 23.	Tablica kontrolnih karata s formulama.....	59

POPIS OZNAKA

Oznaka	Mjerna jedinica	Značenje
CL		Central Line (središnja linija)
UCL		Upper Control Limit (gornja kontrolna granica)
LCL		Lower Control Limit (donja kontrolna granica)
C_i^-	-	Jednostrani donji kumulativni zbroj
C_i^+	-	Jednostrani gornji kumulativni zbroj
\overline{MR}		Prosječni pokretni raspon
\bar{R}		Aritmetička sredina raspona
T^2		Statistički parametar Hotelling T^2 kontrolne karte
\bar{c}		Prosječan broj nesukladnih jedinica
\bar{p}		Prosječni omjer nesukladnih jedinica
\bar{s}		Aritmetička sredina standardnih odstupanja uzoraka
\bar{u}		Prosječan broj grešaka na jedinici proizvoda
\bar{x}		Aritmetička sredina varijable x
$\bar{\bar{x}}$		Aritmetička vrijednost središnje linije $\bar{x} - R$ karte
$\sigma_{\bar{x}}$		Standardno odstupanje aritmetičkih sredina uzoraka
K		Referenca (eng. Slack value)
p		Proporcija nesukladnih jedinica
R		Raspon
s		Standardno odstupanje uzorka
α	%	Alfa rizik
λ	-	EWMA težinski faktor
μ		Očekivanje
σ		Standardno odstupanje populacije ili osnovnog skupa

SAŽETAK

Tema završnog rada je primjena kontrolnih karata u industriji i laboratoriju.

U radu je dan kratki povijesni razvoj kontrolnih karata s osvrtom na normu ISO 7870-2:2024 – Shewhartove kontrolne karte. Provedena je sistematizacija kontrolnih karata na osnovi vrste podataka, vrste procesa, kao i primjene u industriji i laboratorijima. Opisane su statističke metode za izračun centralnih linija i granica kontrolnih karata te su analizirane prednosti i ograničenja kontrolnih karata. U radu je prikazan širok spektar uporabe kontrolnih karata za različite procese u industriji i laboratorijima.

Ključne riječi: kontrolna karta, industrija, laboratorij

SUMMARY

The topic of the final thesis is the application of control charts in industry and laboratories.

The paper provides a brief historical development of control charts with reference to the ISO 7870-2:2024 standard – Shewhart control charts. A systematization of control charts is carried out based on the type of data, type of process, as well as applications in industry and laboratories. Statistical methods for calculating the center lines and limits of control charts are described and the advantages and limitations of control charts are analyzed. The paper presents a wide range of uses of control charts for various processes in industry and laboratories.

Key words: control chart, industry, laboratory

1. UVOD

Kontrolne karte predstavljaju jedan od najbitnijih alata statističke kontrole procesa. Koriste se za praćenje, analizu i poboljšanje samog procesa. Iako su tradicionalno korištene u industriji za nadzor proizvodnih procesa, njihova primjena proširila se i na laboratorijske analize i istraživanja, gdje osiguravaju preciznost i pouzdanost mjerenja.

Kroz povijest su se koristile različite metode za postizanje najbolje kvalitete proizvoda, ali cjelovita metodologija razvijena je tek kada je Walter Shewhart postavio temelje standardiziranog nadzora i kontrole. Otkrio je vezu između trenutnog praćenja karakteristika procesa i predviđanja budućih performansi proizvodnog procesa, čime se omogućuje povećanje učinkovitosti, smanjenje troškova i cjelokupno poboljšavanje poslovanja. Tijekom vremena ove su se metode kontinuirano usavršavale te su stručnjaci poput Deminga, Jurana i Ishikawe razvijali i usavršavali statističku kontrolu kvalitete. Od Shewharta pa do danas, kontrolne karte zauzimaju ključno mjesto u literaturi o kvaliteti. U posljednjih dvadeset godina njihova je primjena znatno porasla, posebno zahvaljujući mogućnosti integracije SPC (engl. *Statistical Process Control*) softvera u proizvodne procese te široj upotrebi u procjenjivanju i dokazivanju sposobnosti procesa. Kontrolne karte su također važan alat u metodologiji „6 Sigma“, statističkim tolerancijama i drugim modernim pristupima kontroli i poboljšavanju kvalitete. Može se reći da su danas kontrolne karte nezamjenjiv alat u svakom naprednom pristupu za upravljanje i unapređenje kvalitete. Najbolji primjer toga nam je ISO standard ISO 7870-2 koji se fokusira na statističke metode za kontrolne karte i posebne karte. U njemu se nalaze smjernice za izradu i primjenu Shewhartovih kontrolnih karata u industriji i laboratorijima gdje je cilj poboljšati stabilnost procesa, održati visoke standarde kvalitete i smanjiti varijabilnosti.

2. SISTEMATIZACIJA KONTROLNIH KARATA

Sistematizacija kontrolnih karata se može podijeliti u tri grupe s obzirom na ključne kriterije:

- vrsta podataka
- vrsta procesa
- namjena.

Ovakvom raspodjelom imamo jasno razumijevanje kada i gdje primijeniti određenu kontrolnu kartu.

2.1. Prema vrsti podataka

S obzirom na vrstu podataka možemo imati različitu osnovnu podjelu kontrolnih karata [1, 2]:

1. Za varijable (kontinuirane podatke):

Koristimo ih kada mjerimo podatke poput mase, volumena, težine, itd.

Koriste se:

- \bar{x} - R karta za praćenje srednje vrijednosti i raspona uzorka
- \bar{x} - s karta za praćenje srednje vrijednosti i standardne devijacije unutar uzorka
- I - MR (individualne kontrolne karte) kada je veličina uzorka 1.
- Z - MR karta za praćenje standardizirane pojedinačne vrijednosti i pokretnog raspona.

2. Za attribute (diskretne podatke):

Služe za brojanje ponavljanih određenih stanja (npr. neispravni proizvodi).

Ovdje se primjenjuju:

- p karte za praćenje udjela loših jedinica u uzorku

- *np* karta za broj neispravnih proizvoda u uzorku konstantne veličine
- *u* karta za prikaz prosječnog broja grešaka pronađenih u jednoj isporuci i to na jedinici proizvoda
- *c* karta za praćenje grešaka na jednom proizvodu ili uzorku koji su svi konstantne veličine.

3. Specijalne kontrolne karte

Ove karte su razvijene kako bi zadovoljile potrebe specifičnih procesa ili industrija, posebno u kontekstu tehnološkog napretka i složenijih proizvodnih sustava.

Neke su:

- EWMA karta za kontinuirane praćenje i velike količine podataka.
- CUSUM karta za praćenje ukupne sume odstupanja od ciljane vrijednosti.
- MA karta za procese podložnim cikličkim varijacijama.
- Hotelling T^2 kontrolna karta za praćenje i kontrolu procesa u kojima su međusobno povezane više varijabli.

2.2. Prema vrsti procesa

Prema vrsti procesa kontrolne karte se dijele na:

1. Karte za praćenje novog (nepoznatog) procesa gdje se kontrolne granice postavljaju na osnovi podataka iz procesa u cilju utvrđivanja njegovih prirodnih mogućnosti (centriranost i rasipanje).
2. Karte kod kojih su kontrolne granice postavljene na osnovi poznatih prošlih podataka o procesu.
3. Karte kod kojih su kontrolne granice postavljene na osnovi unaprijed zadanih tolerancija (zbog pretpostavki danas nije upotrebljivo).

2.3. Prema namjeni

Kontrolne karte su namijenjene za dovođenje procesa pod kontrolu, za držanje procesa u kontroli i za poboljšavanje procesa. Namijenjene su za utvrđivanje centriranosti i rasipanje procesa. Namijenjene su za utvrđivanje značajnih odstupanja u procesu koja nisu posljedica slučajnih djelovanja. Također su namijenjene za identifikaciju malih promjena u procesu, detektiranje malih, ali značajnih promjena i detektiranje teško uočljivih promjena te brzo uočavanje promjene kvalitete sustava koji se prati.

2.4. ISO 7870-2:2024 – Shewhartove kontrolne karte

ISO 7870-2:2024 je međunarodni standard koji definira primjenu Shewhartovih kontrolnih karata u statističkoj kontroli procesa (SPC). Ove karte služe kao ključni alat za nadzor i održavanje stabilnosti procesa u industrijskoj proizvodnji te osiguravanje kvalitete proizvoda i usluga.

Kontrolne karte, koje je prvo razvio dr. Walter Shewhart koristile su se za razlikovanje dviju vrsta varijacija u procesu:

- Nasumične varijacije (engl. *common causes*) – prirodna, neizbježna varijacija koja je inherentna procesu.
- Posebne (značajne) varijacije (engl. *assignable causes*) – uzroci koji se mogu identificirati i eliminirati, poput kvara opreme, promjena u materijalima ili ljudskih pogrešaka.

ISO standard ima za cilj definirati metode za izradu i interpretaciju kontrolnih karata kako bi se prepoznale i uklonile značajne varijacije te osigurala stabilnost procesa.

U ISO 7870-2:2024 standardna podjela kontrolnih karata je jednaka kao u točki **2.1. Prema vrsti podataka**. Standard nam opisuje postupak izrade i interpretacije kontrolne karte te nam daje primjere varijacija i njihovu analizu.

Uzorci varijacija i njihovi primjeri su:

- Jedna ili više točaka izvan kontrolnih granica – signalizira ozbiljan problem u procesu.
- Sedam ili više uzastopnih točaka s iste strane središnje linije – ukazuje na sustavnu promjenu u procesu.
- Sedam uzastopnih točaka u rastućem ili opadajućem trendu – sugerira postupnu promjenu uvjeta u procesu.
- Ponavljajući obrasci ili ciklusi – mogu ukazivati na vanjske čimbenike poput smjena radnika, promjena materijala ili sezonskih efekata.

U slučaju otkrivanja nepravilnosti, važno je identificirati i ukloniti značajne uzroke varijacija.

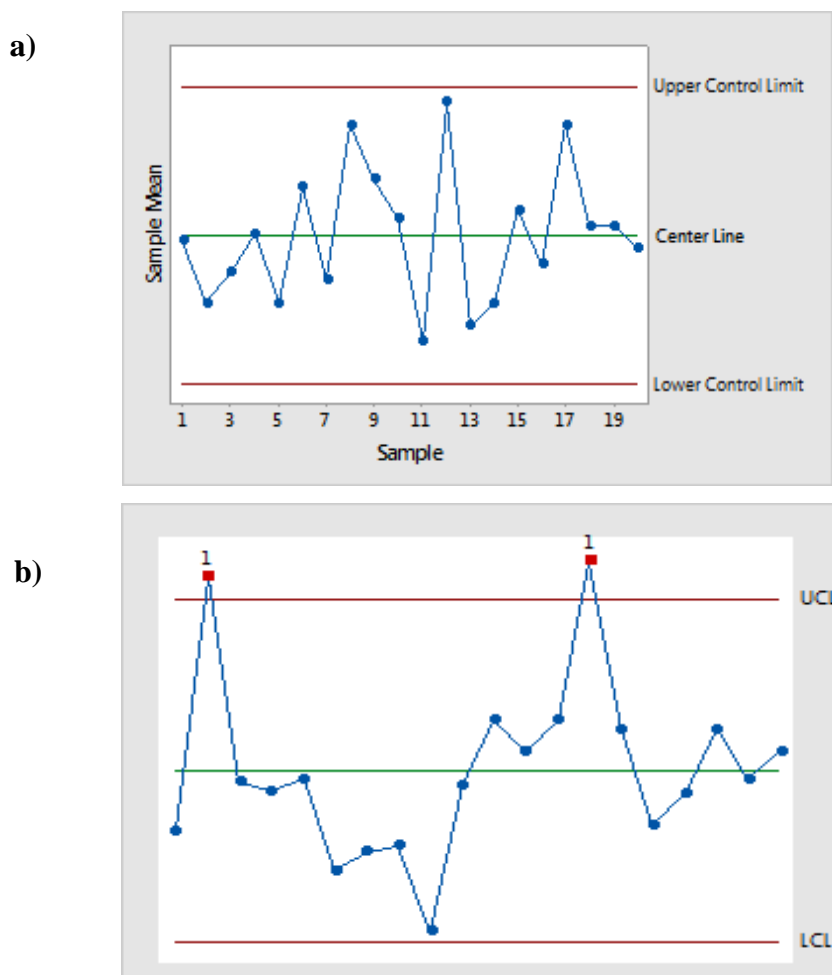
Osim podjele kontrolnih karata, postupaka izrade, interpretacije i analize, standard nam opisuje postupak procjene sposobnosti procesa i primjenu kontrolnih karti te njihovo kontinuirano poboljšanje.

ISO 7870-2:2024 pruža detaljne smjernice za primjenu Shewhartovih kontrolnih karata u statističkoj kontroli procesa. Njihova upotreba omogućuje identifikaciju i eliminaciju značajnih uzroka varijacija, čime se osigurava stabilnost i predvidljivost procesa. Implementacija ovog standarda pomaže u smanjenju troškova, poboljšanju kvalitete i povećanju učinkovitosti proizvodnih i uslužnih procesa.

3. KONTROLNE KARTE

3.1. Općenito

Kontrolne karte su grafički prikazi procesnih podataka kroz vrijeme, pri čemu sve kontrolne karate imaju središnju liniju (engl. *center line*), gornju kontrolnu granicu (engl. *upper control limit*) i donju kontrolnu granicu (engl. *lower control limit*). Središnja linija označava srednju vrijednost procesa, dok kontrolne granice predstavljaju dopuštenu varijaciju unutar procesa (Slika 1a i 1b.). Standardno, kontrolne granice su postavljene na razdaljinu od 3σ iznad i ispod središnje linije [1].



Slika 1 [1]

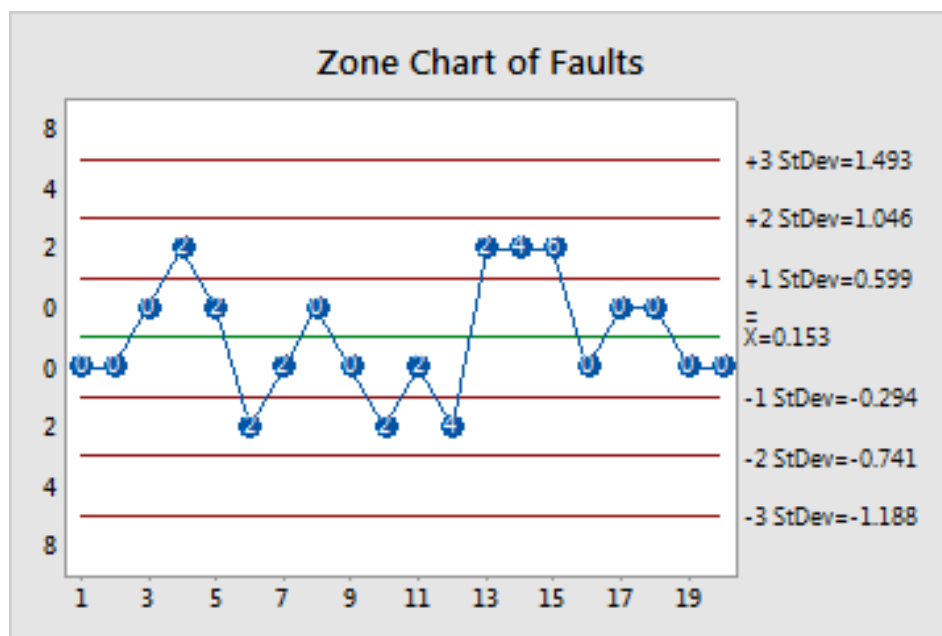
a) Model kontrolne karte – slučajne varijacije

b) Model kontrolne karte – slučajne i značajne varijacije

Točke koje nasumično padaju unutar kontrolnih granica ukazuju na to da je proces pod kontrolom te da prikazuje samo slučajne varijacije. S druge strane, točke koje se nalaze izvan kontrolnih granica ili pokazuju obrasce koji nisu nasumični signaliziraju da je proces izvan kontrole, što upućuje na prisutnost značajnih uzroka varijacije [1].

Važno je ne zamijeniti kontrolne granice s granicama specifikacija. Kontrolne granice određuju se na temelju varijacija u procesu, dok su granice specifikacija definirane prema zahtjevima kupaca. Proces može biti stabilan odnosno pod kontrolom, ali svejedno ne ispunjavati postavljene specifikacije [1].

Također je važno ne miješati središnju liniju s ciljanom vrijednošću procesa. Središnja linija predstavlja stvarni prosjek procesa, dok je cilj idealni ili željeni ishod. Proces može biti pod kontrolom odnosno stabilan, ali se njegov stvarni prosjek može razlikovati od ciljanog prosjeka [1]. Osim kontrolnih granica, mogu se koristiti i tzv. granice upozorenja, postavljene na $\pm 2\sigma$ ili $\pm 1\sigma$ (slika 2.), kako bi se identificirale rane indikacije problema [2].



Slika 2. Kontrolna karta s granicama upozorenja

3.2. Vrste kontrolnih karti

3.2.1. Kontrolne karte za kontinuirane podatke (varijable)

U tu skupinu spadaju \bar{x} - R karta, \bar{x} - s karta, I - MR karta i Z - MR karta.

\bar{x} - R karta:

\bar{x} - R karta je osnovni alat u statističkoj kontroli procesa za praćenje centriranosti i varijacije procesa s obzirom na dane podatke iz uzorka. Ona nam omogućuje praćenje dva pokazatelja koji karakteriziraju proces:

- kretanje aritmetičkih sredina uzorka \bar{x}_i koji nam daje uvid u centriranost procesa
- kretanje raspona uzorka R_i koji govori o njegovom rasipanju.

Koristi se za serijsku i velikoserijsku komadnu proizvodnju gdje su uzorci maleni ($n=2\dots 10$ komada) zbog čega smanjuje same troškove kontrole [2].

\bar{x} - R karta koristi se u raznim industrijama, od uslužne industrije gdje se koristi za kontrolu i praćenje uslužne djelatnosti, kemijske industrije gdje se koristi za kontrolu temperature, tlaka i koncentracije kiselina ili lužina pa sve do proizvodne industrije gdje se koristi za kontrolu mase, dimenzija ili nekih drugih mjernih vrijednosti kako bi osigurali točnost proizvoda. U laboratorijima se koriste za praćenje raznih analitičkih metoda, kalibraciju instrumenata ili kontrolu uzoraka.

Njena izrada se temelji na određivanju statističkih granica za srednje vrijednosti \bar{x} i raspona R uzoraka, koji se dobivaju eksperimentalnim mjerenjima.

Neka je μ očekivana vrijednost normalno distribuiranog skupa podataka sa standardnim odstupanjem σ . Ako su x_1, x_2, \dots, x_n, x vrijednosti uzorka veličine n , tada je aritmetička sredina definirana sljedećim izrazom [3]:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

gdje:

- \bar{x} predstavlja srednju vrijednost uzorka,
- n je veličina uzorka,
- x su pojedinačne vrijednosti u uzorku.

Aritmetička sredina svih uzoraka također su normalno distribuirane oko očekivanih vrijednosti μ , ali sa smanjenim standardnim odstupanjem (centralni granični teorem). Standardno odstupanje tog novog skupa aritmetičkih sredina uzoraka računa se prema sljedećem izrazu:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

gdje:

- $\sigma_{\bar{x}}$ predstavlja standardno odstupanje aritmetičkih sredina uzoraka,
- σ sigma je standardno odstupanje pojedinačnih mjerenja,
- n je broj mjerenja unutar jednog uzorka (grupe).

Izraz (2) pokazuje da se standardno odstupanje aritmetičkih sredina uzoraka smanjuje kako veličina uzorka n raste, što povećava preciznost procjene procesa i omogućuje bolje praćenje odstupanja u procesu korištenjem kontrolnih karata.

Također, vjerojatnost je $1 - \alpha$ da će se bilo koja sredina uzorka naći između

$$\begin{aligned} \mu + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} &= \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\text{i} \\ \mu - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} &= \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3)$$

gdje α predstavlja rizik.

U praksi, očekivanje i standardno odstupanje procesa se procjenjuju na temelju podataka iz prethodnih uzoraka, pod pretpostavkom da je proces u to vrijeme bio pod kontrolom ili na temelju podataka iz procesa koji se prati. Te procjene koriste se za izradu kontrolnih karata, a broj i veličina uzoraka određuju se kako bi se optimizirali troškovi i učinkovitost analize. Broj podataka u uzorku najčešće ne prelazi 8, a broj uzoraka je između 20 i 25.

Središnja linija \bar{x} - R karte (poznata kao engl. *Grand average*) računa se kao prosjek svih aritmetičkih sredina uzoraka $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$, i izražena je jednadžbom (4):

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (4)$$

gdje:

- $\bar{\bar{x}}$ predstavlja središnju liniju \bar{x} - R karte,
- \bar{x}_i je aritmetička sredina i -tog uzorka,
- m je broj uzoraka.

Raspon uzorka R definiran je kao razlika između najveće i najmanje vrijednosti unutar uzorka:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (5)$$

Ako su R_1, R_2, \dots, R_m rasponi od m uzorka za aritmetičku sredinu raspona vrijedi izraz (6):

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (6)$$

Kontrolne granice za \bar{x} kartu računaju kao (7) i (8):

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} \quad (7)$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \quad (8)$$

Uvrštavanjem tog izraza u gorenje jednadžbe dobivamo:

$$UCL = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} \quad (9)$$

$$CL = \bar{\bar{x}}$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

Za granice kontrolne karte R koriste se slične jednadžbe:

$$UCL = D_4\bar{R} \quad (10)$$

$$CL = \bar{R}$$

$$LCL = D_3\bar{R}$$

Koeficijenti D_3 i D_4 su tablične vrijednosti koje se koriste za definiranje donje i gornje granice R kontrolne karte, biraju se ovisno o veličini uzorka n [3].

Razvoj jednadžbi za izračunavanje kontrolnih granica na kontrolnim kartama ovisi o svojstvima relativnog raspona W koji se računa kao $W = R/s$. Njemu je očekivanje koeficijent d_2 koji ovisi o veličini uzorka, a sami parametri razdiobe su funkcija veličine uzorka n .

Prema tome jednadžba glasi:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (11)$$

Tijekom izrade R karte, kontrolne granice su utemeljeni na procijeni standardnog odstupanja raspona uzoraka σ_R koji se računa kao:

$$\widehat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (12)$$

Iz čega proizlazi da kontrolne granice R sa 3σ kontrolnim granicama računaju se kao:

$$UCL = \bar{R} + 3\widehat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (13)$$

$$CL = \bar{R}$$

$$LCL = \bar{R} - 3\widehat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Uz to da su $D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$ i $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$.

\bar{x} -s karta:

\bar{x} -s karta je jedna od najvažnijih i najzastupljenijih karata u proizvodnji radi svoje jednostavnosti i jednostavnog koncepta raspona. Iako je bila korištena imala je svoja ograničenja koja su došla do izražaja prilikom povećanja veličine. \bar{x} -s karte se koriste za broj većih uzoraka gdje su učinkovite kada se uzorkovanje provodi konzistentno, u jednakim vremenskim intervalima te omogućuje analizu uzoraka različitih veličina jer standardno odstupanje uzima u obzir sve vrijednosti u uzorku.

Preko nje pratimo dva pokazatelja [2]:

- centriranost preko kretanja aritmetičkih sredina uzorka
- rasipanje preko kretanja standardnih odstupanja.

Budući da standardno odstupanje preciznije mjeri varijaciju procesa u odnosu na raspon, \bar{x} -s karta je osjetljiva na male promjene u srednjim vrijednostima uzoraka za razliku od \bar{x} -R karte. Izrada samih kontrolnih granica je zahtjevnija radi same velike količine ulaznih podataka naspram drugih karata [5].

Njena zastupljenost je u proizvodnoj industriji gdje se koristi za praćenje raznih mjerljivih vrijednosti poput mase, prehrambenoj gdje se prati konstantnost u procesu same proizvodnje, praćenje jačine lijeka u farmaceutskoj industriji i slično, dok se u laboratorijima koristi za procjenu stabilnosti i uređaja.

Izrada kontrolnih granica za kretanje aritmetičkih sredina uzoraka sastoji se od gornje (UCL) i donje (LCL) kontrolne granice te središnje linije (CL) koje su izražene formulama (14):

$$UCL = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{c_2\sqrt{n}} \bar{s} \quad (14)$$

$$CL = \bar{\bar{x}}$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{c_2\sqrt{n}} \bar{s}$$

gdje c_2 je tablična vrijednost.

Pri čemu je \bar{s} aritmetička sredina standardnih odstupanja svih uzoraka [2]:

$$\bar{s} = \frac{\sum s_i}{k} \quad (15)$$

gdje k je broj uzoraka.

Kontrolne granice za kretanje standardnih odstupanja uzoraka se izražavaju preko formule:

$${}^U_L CL_s = \bar{s} \pm 3\sigma_\sigma = \bar{s} \pm 3a_2\sigma_0 \quad (16)$$

S obzirom da $\bar{s} = c_2\sigma_0$ i da $1 + \frac{3a_2}{c_2} = B_4$, odnosno $1 - \frac{3a_2}{c_2} = B_3$ dobivamo formule:

$$UCL = B_4\bar{s} \quad (17)$$

$$LCL = B_3\bar{s}$$

I-MR karta:

I-MR karte ili Shewhartove karte za individualna mjerenja koriste se u situacijama kada je mogućnost prikupljanja podataka ograničena ili je moguće uzeti samo jedan podatak u uzorku radi tehnološke prirode samog procesa kao male količine proizvoda, velika kompleksnost i cijena izrade ili dugotrajnost procesa. Kao što sam naziv kaže koristi se za praćenje jednog uzorka preko pokazatelja gdje [6]:

- *I* karta prati pojedinačne podatke tijekom vremena i otkriva pomake u srednjoj vrijednosti procesa.
- *MR* karta prati varijabilnost između uzastopnih mjerenja i identificira iznenadne promjene u varijabilnosti procesa.

Koristi se u proizvodnoj industriji za praćenje trošenja alata i kritičnih pojedinačnih vrijednosti proizvoda, medicinskoj industriji za praćenje podataka kao tlak pacijenta, u prehrambenoj i

kemijskoj za praćenje temperature, tlaka i sličnih vrijednosti u određenim intervalima. Radi svoje visoke preciznosti i prepoznavanja iznenadnih promjena u laboratorijima se koriste za kalibraciju uređaja, praćenje individualnih vrijednosti promjene okoline kao zagađenost zraka, provjeru ponovljivosti i točnost pretraga.

Formule za središnju liniju (CL), gornju (UCL) i donju (LCL) kontrolnu granicu I karte glase [6]:

$$UCL = \bar{x} + E_2 \overline{MR} \quad (18)$$

$$CL = \bar{x}$$

$$LCL = \bar{x} - E_2 \overline{MR}$$

Gdje je $E_2 = A_2 \sqrt{n}$.

Formule za središnju liniju (CL), gornju (UCL) i donju (LCL) kontrolnu granicu MR karte glase [6]:

$$UCL = D_4 \overline{MR} \quad (19)$$

$$CL = \overline{MR}$$

$$LCL = D_3 \overline{MR}$$

A vrijednosti D_3, D_4 i E_2 su konstante kontrolne karte.

Same vrijednosti podataka I karte i MR karte se računaju po formulama:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \quad (20)$$

$$\overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - x_{i-1}|}{k - 1} \quad (21)$$

Z-MR karta:

Z-MR kontrolne karte koriste se za praćenje srednje vrijednosti i varijacija različitih dijelova kada se napravi relativno malo jedinica različitih dijelova, kao u kratkotrajnim procesima. Kratkotrajni procesi često nemaju dovoljno podataka u svakom ciklusu da bi proizveli dobre procjene parametara procesa. Može se koristiti jedan stroj ili proces za proizvodnju više različitih dijelova ili proizvoda. *Z-MR* kontrolna karta prikazuje standardizirana pojedinačna opažanja (z) i pokretne raspone tako da se mogu procijeniti podatci iz različitih procesa na jednoj kontrolnoj karti [1].

Njihova primjena u laboratorijima je za praćenje preciznosti i ponovljivosti eksperimenata, praćenju točnosti rezultata ispitivanja ili praćenju udjela koncentracije substance u uzorku. U industriji se koriste za usporedbu dijelova različitih dobavljača, u elektronskoj industriji za praćenje napona na uređajima ili u prehrambenoj za praćenje standardiziranih mjera mase proizvoda.

Njihove kontrolne granice se računaju po istom principu kao i kod *I-MR* kontrolnih karti samo umjesto *I* karata imamo *Z* karte koje prate standardizirana pojedinačna opažanja.

Formule za središnju liniju (*CL*), gornju (*UCL*) i donju (*LCL*) kontrolnu granicu *Z* karte glase:

$$UCL = \bar{x} + E_2 \overline{ZR} \quad (22)$$

$$CL = \bar{x}$$

$$LCL = \bar{x} - E_2 \overline{ZR}$$

Gdje je $E_2 = A_2 \sqrt{n}$.

3.2.2. Kontrolne karte za diskretne podatke (atribute)

U tu skupinu spadaju p karta, np karta, u karta i c karta.

p karta:

p karta, poznata kao kontrolna karta proporcija, koristi se za prikaz nesukladnih jedinica u uzorcima u procesu. Matematička osnova joj je binomna razdioba koja prati trendove pada ili rasta tijekom vremena. Radi nesimetrije karta vrlo dobro odgovara tek ako je broj loših komada u uzorku barem 4 [2]. Njegova uporaba u laboratoriju zastupljena je u procesima kao što su identificiranje uređaja koji daje neuobičajene rezultate, kontrola postotka testova koji nisu zadovoljili kriterije ili pak postotak uzoraka koji nisu unutar danih granica regulacije. U industriji se koristi u raznim granam kao farmaceutskoj gdje se koristi za osiguravanje kontrole pri proizvodnji lijekova, prehrambenoj gdje se gleda postotak defektnih proizvoda i proizvodnoj za osiguravanje točnosti proizvoda.

Formule za proračun srednje vrijednosti (\bar{p}), gornje (UCL) i donje (LCL) kontrolne granice p karte su dane izrazima (23) i (24):

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (23)$$

$${}^U_L CL_p = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{\bar{n}}} \quad (24)$$

Gdje k predstavlja broj uzimanja uzoraka.

np karta:

np karta, poznata kao kontrolna karta broja nesukladnih jedinica, koristi se za praćenje apsolutnog broja neispravnih komada u uzorcima u procesu. Matematička osnova joj je binomna razdioba, a primjenjuje se u slučajevima kada je veličina uzorka konstantna. Za razliku od *p* karte, koja prikazuje proporciju neispravnih jedinica, *np* karta se fokusira na njihov stvarni broj, što može biti korisnije u industrijskim aplikacijama gdje su uzorci uvijek iste veličine.

Uporaba *np* karte prisutna je u laboratorijskim procesima, primjerice za praćenje broja testova koji nisu zadovoljili kriterije ili broja uzoraka izvan dopuštenih granica. U industriji se koristi u sektorima poput farmaceutske industrije, gdje pomaže u kontroli broja neispravnih proizvoda u serijama lijekova, prehrambene industrije za praćenje broja defektnih artikala, te proizvodne industrije radi osiguravanja kvalitete finalnih proizvoda.

Formule za proračun srednje vrijednosti ($n\bar{p}$), gornje (*UCL*) i donje (*LCL*) kontrolne granice su:

$$n\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{k} \quad (25)$$

$${}^U_L CL_{np} = n\bar{p} \pm 3\sqrt{n\bar{p}(1 - \bar{p})} \quad (26)$$

Gdje je *n* veličina uzorka, a \bar{p} prosječni broj nesukladnosti.

c karta:

c kontrolna karta poznata je još kao kontrolna karta nedostataka. Ona prati broj grešaka na jednom proizvodu ili uzorku s time da uzorci moraju biti iste veličine dok greške mogu biti različite [9]. Ona se temelji na Poissonovoj razdiobi. *c* karta uzima sveukupni broj nesukladnih jedinica dok *p* karta je uzimala samo udijejele neispravnih jedinica.

U industriji koriste se za praćenje broja defektnih proizvoda i pomažu pri identificiranju stabilnosti procesa i varijacija zbog kojih dolazi do pogrešaka. U automobilske industrije koriste se za praćenje broja ogrebotina na vratima automobila prije njihovog ugrađivanja, u medicinske za praćenje broja grešaka u dijagnozi, tiskarama za broj krivo tiskanih novina. U laboratorijima se koriste za praćenje grešaka u ponavljajućim procesima, mjerenjima ili čak inspekciji. Najkorištenije su za praćenje grešaka u ponavljajućim mjerenjima, brojanju kvarova opreme te praćenju odstupanja u standardiziranim procedurama.

Formule za proračun prosječnog broja grešaka po uzorku (\bar{c}), gornje (UCL) i donje (LCL) kontrolne granice c karte su dane izrazima (27) i (28):

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k} \quad (27)$$

$${}^U_L CL_c = \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}} \quad (28)$$

Gdje k predstavlja broj uzimanja uzoraka.

u karta:

u kontrolna karta koristi se za praćenje prosječnog broja grešaka pronađenih u jedinici proizvoda i pretpostavlja Poissonovu razdiobu. Prati jednu vrstu greške i veličine samih uzoraka mogu biti različite [9].

Kao što je već navedeno, u industriji se koristi u karta za praćenje prosječnog broja nesukladnih proizvoda po jedinici. Na primjer u metaloprerađivačkoj industriji se koristi za brojanje ogrebotina po površini metalnih ploča, u građevini za pregled pukotina u betonskim zidovima ili u tiskarama za broj nepravilno tiskanih stranica po određenoj količini. U laboratorijima se koristi za praćenje nepravilnosti u procesima gdje broj jedinica može varirati. Koristi se za praćenje grešaka u

dijagnostici, broj grešaka kalibracije uređaja za različite uzorke i praćenje postotka kontaminacije vode ili zraka u prostoriji ili uređajima.

Formule za proračun prosječnog broja grešaka na jedinicu proizvoda (\bar{u}), gornje (UCL) i donje (LCL) kontrolne granice u karte su dane izrazima (29) i (30):

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (29)$$

$${}^u_L CL_u = \bar{u} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \quad (30)$$

Gdje n predstavlja veličinu uzoraka.

3.2.3. Specijalne kontrolne karte

U tu skupinu spadaju EWMA karta, CUSUM karta, MA karta i Hotelling T^2 .

EWMA karta:

Kontrolna karta eksponencijalno ponderiranog pomičnog prosjeka ili poznatija kao EWMA karta koristi se umjesto Shewhartovih karti kada nam je potrebno preciznije očitavanje malih promjena. Ona se razlikuje od ostalih karata zbog toga što ne tretira svaku točku zasebno nego sve kao skup. Svakom podatku se daje nekakva težina, najnoviji podatci imaju najveću težinu dok oni stariji nisu toliko bitni više naspram novih [11]. Karta je izrađena tako da prikazuje podatke geometrijski što pomaže kontrolnoj karti da ne bude znatno opterećena ako ulazni podatci su mali ili veliki. EWMA karta je odlična za otkrivanje malih promjena od 0,5 sigma do 2 sigma, ali zato je sporija s pronalaženjem većih promjena u srednjoj vrijednosti procesa [10]. Koristi se za promatranje grupa uzoraka ili za pojedinačno promatranje jedinica.

Izračun samog eksponencijalno ponderiranog pokretnog prosjeka dobije se preko formule (31):

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad (31)$$

Gdje je λ konstanta, a početna vrijednost EWMA je ujedno i ciljane srednja vrijednost procesa.

Kontrolne granice se računaju preko formula [3]:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \quad (32)$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

Gdje L predstavlja širinu kontrolnih granica.

CUSUM karta:

CUSUM karta ili karta kumulativnog zbroja je karta koja otkriva odstupanja prosječne vrijednosti uzoraka ili pojedinačnih podataka od ciljane vrijednosti [11]. CUSUM karta je osjetljiva na male pomake srednjih vrijednosti u usporedbi sa Shewhartovim kontrolnim kartama. Kao i EWMA karta, CUSUM karta prati srednju vrijednost procesa te razmatra prethodne vrijednosti u svakoj točki procesa. Njihova svrha je pratiti te male promjene u određenom vremenskom intervalu koje će onda predstavljati podgrupe koje s prethodnim podacima činit će kontrolnu kartu [11]. CUSUM karta je najučinkovitija kada je samo jedan uzorak.

CUSUM može se prikazati na dva načina, algoritamski CUSUM i V-mask CUSUM [1]. U nastavku su dani izrazi za izračun potrebnih parametara algoritamskog CUSUM-a.

Gornji CUSUM otkriva pomake prema gore u razini procesa, a donji CUSUM otkriva pomake prema dolje [1]. One se računaju preko formula (33) i (34):

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (33)$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (34)$$

Gdje početne vrijednosti C_i^+ i C_i^- su 0, a K predstavljen kao dopuštena vrijednost odnosno referenca (eng. Slack value) čija se vrijednost bira tako da bude između ciljane srednje vrijednosti μ_0 i srednje vrijednosti van kontrole μ_1 . Ona se računa kao (35):

$$K = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \quad (35)$$

S time da bilo koja od vrijednosti C_i^+ ili C_i^- dosegnu granice intervala odluke H (eng. Decision interval), za proces se smatra da je van kontrole [3].

Hotelling T^2 karta:

Hotelling T^2 kontrolne karte spadaju pod grupu multivarijabilnih karata. One se koriste za istovremeno kontroliranje jesu li pozicije i varijabilnosti dvaju ili više međusobno povezanih procesa u kontroli [1]. Hotelling T^2 karta je najpoznatija multivarijabilna karta, koristi se za praćenje vektora srednje vrijednosti i može se primijeniti za individualne jedinice ili grupe uzoraka.

Njen proračun podataka se razlikuje s obzirom radi li se o podacima u podgrupama ili individualnim zapažanjima. Za podatke u podgrupama vrijedi (36):

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}}) \quad (36)$$

gdje $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk}$, a $\bar{\bar{x}}$ je srednji vektor od \bar{x}_j koji se računa kao $\bar{\bar{x}}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk}$.

S predstavlja uzorak kovarijancijske matrice i onda se računa kao [1]:

$$S = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \cdots & \bar{S}_{1P} \\ \cdots & \bar{S}_2^2 & \bar{S}_{23} & \cdots & \bar{S}_{2P} \\ \cdots & \cdots & \bar{S}_3^2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \bar{S}_P^2 \end{bmatrix}$$

gdje $\bar{S}_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2$.

S_{jk}^2 je varijanca uzorka za j -tu karakteristiku u k -tom uzorku i računa se preko formule [1]:

$$S_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad (37)$$

Formula za $S_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk}$, a S_{jhk} kovarijanca glasi [1]:

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad (38)$$

Izrazi za kontrolne granice glase bez specificiranih parametara su [1]:

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (39)$$

$$LCL=0$$

A za kontrolne granice sa specificiranim parametrima su [1]:

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (40)$$

$$LCL=0$$

A za individualne podatke vrijedi [1]:

$$T^2 = n(x - \bar{x})'S^{-1}(x - \bar{x}) \quad (41)$$

gdje $S = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} v_i v_i$, a izraz za v_i glasi $v_i = x_{i-1} - x_i$.

Izrazi za kontrolne granice glase bez specificiranih parametara su [1]:

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} B_{\alpha,p+2,\frac{Q-p-1}{2}} \quad (42)$$

$$LCL=0$$

gdje $Q = \frac{2(m-1)^2}{(3m-4)}$.

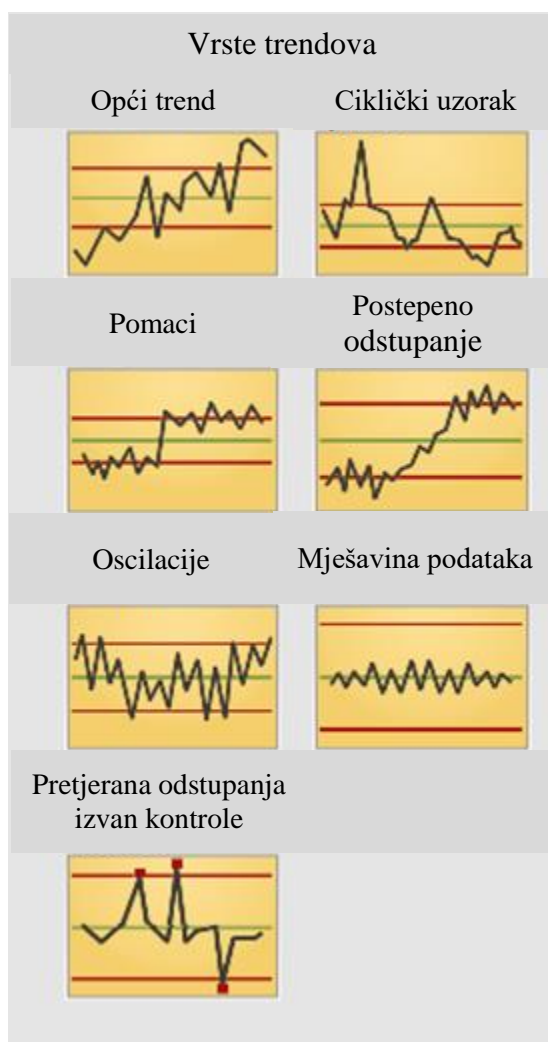
A za kontrolne granice sa specificiranim parametrima su [1]:

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (43)$$

$$LCL=0$$

3.3. Trendovi podataka u kontrolnim karti

Na slici 3. su prikazani različiti uzorci (trendovi) u statističkim kontrolnim dijagramima, koji omogućuju analizu stabilnosti i predvidivosti procesa. Ovi trendovi mogu ukazivati na različite tipove odstupanja, poput postepenog porasta ili pada vrijednosti, cikličkih varijacija, naglih skokova ili neobičnih uzoraka koji sugeriraju mogući problem u sustavu. Prepoznavanjem ovih trendova moguće je pravovremeno reagirati i poduzeti korektivne mjere kako bi se spriječila nekontrolirana odstupanja od željenih specifikacija. Kontrolni dijagrami time postaju ključni alat u osiguranju kvalitete i optimizaciji proizvodnih procesa.



Slika 3. Vrste trendova podataka u kontrolnim kartama [1]

Opisi svakog trenda s naglaskom na ključne karakteristike i posebnosti:

1. Opći trend (engl. *Global Trend*)

- Pokazuje dugoročni rast ili pad podataka kroz vrijeme.
- Može biti znak promjene u procesu, poput habanja alata, promjene sirovina ili povećanja/smanjenja učinkovitosti sustava.

2. Ciklički uzorak (engl. *Cyclical*)

- Vrijednosti podataka osciliraju u pravilnim intervalima.
- Može ukazivati na sezonske ili periodične varijacije u procesu (npr. promjene temperature, smjene radnika, mjesečne fluktuacije u proizvodnji).

3. Pomaci (engl. *Shifts*)

- Nagla promjena u srednjoj vrijednosti podataka.
- Može biti rezultat promjene u sirovinama, prilagodbe strojeva ili promjene u radnoj snazi.

4. Postepeno odstupanje (engl. *Drifts*)

- Postupno povećanje ili smanjenje vrijednosti tijekom vremena.
- Može ukazivati na postepeno trošenje alata, promjene u procesnim uvjetima ili akumulaciju grešaka.

5. Osilacije (engl. *Oscillation*)

- Vrijednosti osciliraju gore-dolje, ali u nepravilnim intervalima.
- Može ukazivati na preveliku prilagodbu procesa ili vanjske smetnje (npr. nestabilan rad strojeva).

6. Mješavina podataka (engl. *Mixture*)

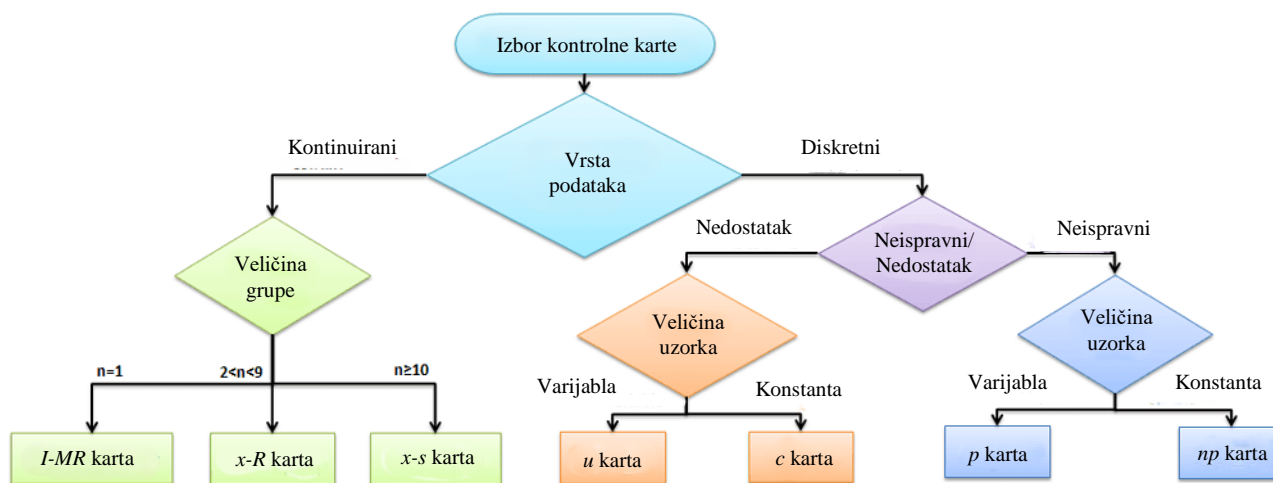
- Nema jasne pravilnosti, podaci su ravnomjerno raspoređeni bez značajnih skokova.
- Može ukazivati na kombinaciju više različitih uzroka koji utječu na proces.

7. Pretjerana odstupanja izvan kontrole (engl. *Excessive Out of Control*)

- Podaci često izlaze izvan kontrolnih granica, što ukazuje na ozbiljne probleme u procesu.
- Može biti rezultat kvara stroja, pogrešnog podešavanja parametara ili ljudske pogreške.

4. PRIMJENA KONTROLNIH KARATA

U ovom poglavlju su dani primjeri nekih kontrolnih karata te njihove prednosti i nedostaci, s ciljem boljeg razumijevanja njihove primjene u nadzoru kvalitete. Kontrolne karte koriste se za praćenje varijacija u procesima te omogućuju pravovremenu identifikaciju odstupanja koja mogu ukazivati na probleme u proizvodnji. Svaka vrsta kontrolne karte ima svoje specifične prednosti – neke su korisne za detekciju malih promjena u procesu, dok su druge učinkovitije u otkrivanju naglih odstupanja. Međutim, nedostaci mogu uključivati osjetljivost na lažne alarme, potrebu za velikim brojem podataka te složenost u tumačenju rezultata. Ovim pregledom omogućuje se bolja selekcija odgovarajuće metode kontrole kvalitete ovisno o specifičnim zahtjevima procesa. Na slici 3. je prikazana shema podjele kontrolnih karata i kada se koje koriste.



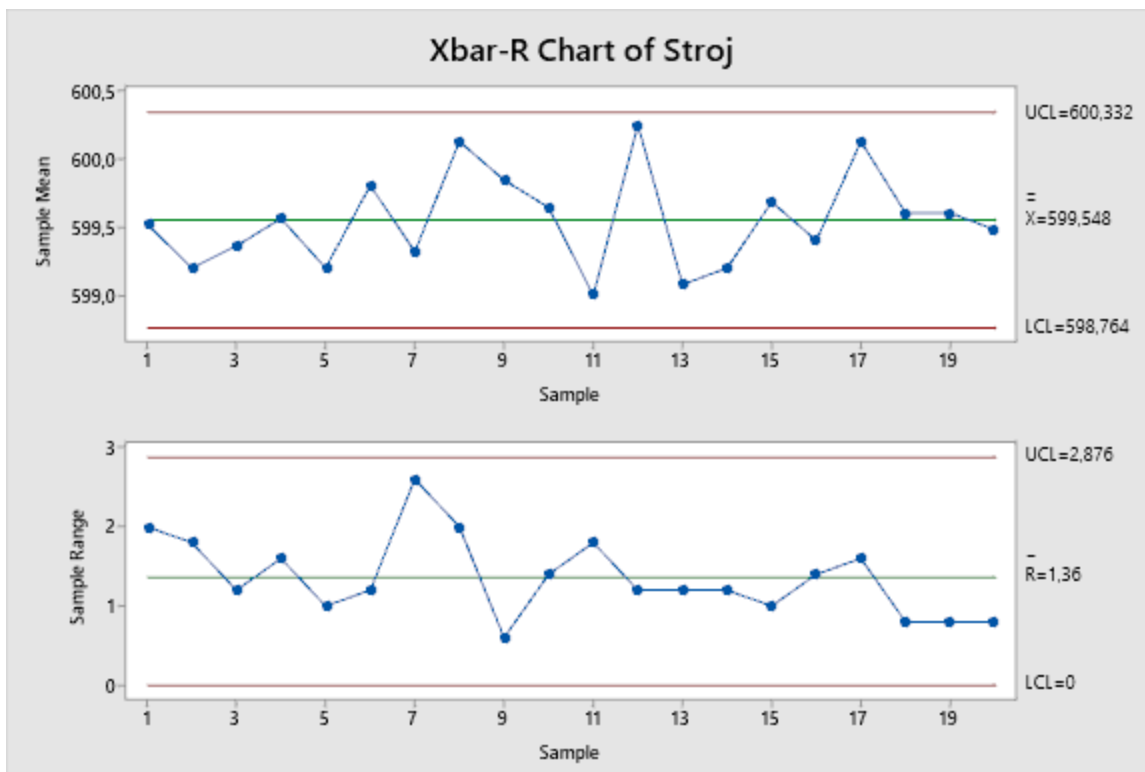
Slika 4. Podjela kontrolnih karata [5]

4.1. \bar{x} -R karta

Praćen je proces izrade bregastih osovina. Kontrola je provedena na osnovi mjerenja dužine bregaste osovine. Osovine su se proizvodile na istom stroju u tri smjene. Kontrola je provedena na 20 uzoraka veličine $n = 5$ bregastih osovina. Rezultati mjerenja dani su u Tablici 1., a grafički su prikazani na slici 4.

Tablica 1. Rezultati mjerenja dužine bregastih osovina

Uzorak broj	Dužina bregaste osovine / mm	Uzorak broj	Dužina bregaste osovine / mm
1	598,0	11	599,0
	599,8		599,6
	600,0		599,4
	599,8		599,2
	600,0		597,8
2	600,0	12	600,4
	598,8		599,6
	598,2		600,0
	599,4		600,8
	599,6		600,4
3	599,4	13	599,4
	599,4		599,0
	600,0		598,4
	598,8		599,0
	599,2		599,6
4	599,4	14	598,8
	599,6		599,2
	599,0		599,6
	599,2		598,6
	600,6		599,8
5	598,8	15	599,6
	598,8		599,2
	599,8		599,6
	599,2		600,2
	599,4		599,8
6	600,0	16	599,6
	600,2		600,0
	600,2		599,6
	599,6		599,2
	599,0		598,6
7	599,0	17	599,6
	599,8		601,2
	600,8		599,6
	598,8		600,2
	598,2		600,0
8	600,0	18	600,0
	599,2		599,4
	599,8		599,8
	601,2		599,2
	600,4		599,6
9	600,2	19	599,4
	599,6		600,0
	599,6		600,0
	599,6		599,2
	600,2		599,4
10	599,2	20	599,6
	599,0		599,8
	599,6		599,0
	600,4		599,6
	600,0		599,4



Slika 5. \bar{x} -R karta – rezultati mjerenja dužine bregastih osovina

Za vrijeme određivanja prvih uzoraka prethodno izračunate granice smatraju se probnim. Nakon izrade kontrolne karte s prethodno danim podatcima iz Tablice 1., provodi se procjena kontrole podataka, odnosno jesu li vrijednosti unutar kontrolnih granica. S obzirom na to da nema točaka izvan granica, može se zaključiti da je sustav stabilan. Proces je bio pod kontrolom prilikom prikupljanja uzoraka i da se granice mogu koristiti za daljnje praćenje. Ako su neke točke izvan granica, potrebno je pretpostaviti da proces nije bio pod kontrolom te analizirati i identificirati uzroke odstupanja.

Važno je napomenuti da prevelikim odbacivanjem podataka može se smanjiti osjetljivost kontrolne karte čime se povećava rizik propuštanja stvarnih problema u procesu.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja \bar{x} -R karte dan je u Tablici 2.

Tablica 2. Prednosti, nedostaci i ograničenja \bar{x} -R kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> • Koriste se mali uzorci. • Jednostavan za razumijevanje. • Identifikacija centriranosti i varijabilnosti. • Fleksibilnost. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pretpostavlja normalnu raspodjelu podataka. • Nije pogodna za pojedinačna mjerenja. • Loša osjetljivost na male promjene. • Ograničen broj varijabli. 	<ul style="list-style-type: none"> • Veličina uzoraka $n = 2 \dots 10$. • Pretpostavka stabilnosti procesa u početnoj fazi izrade kontrolne karte. • Ograničenost pri otkrivanju brzih promjena u procesu.

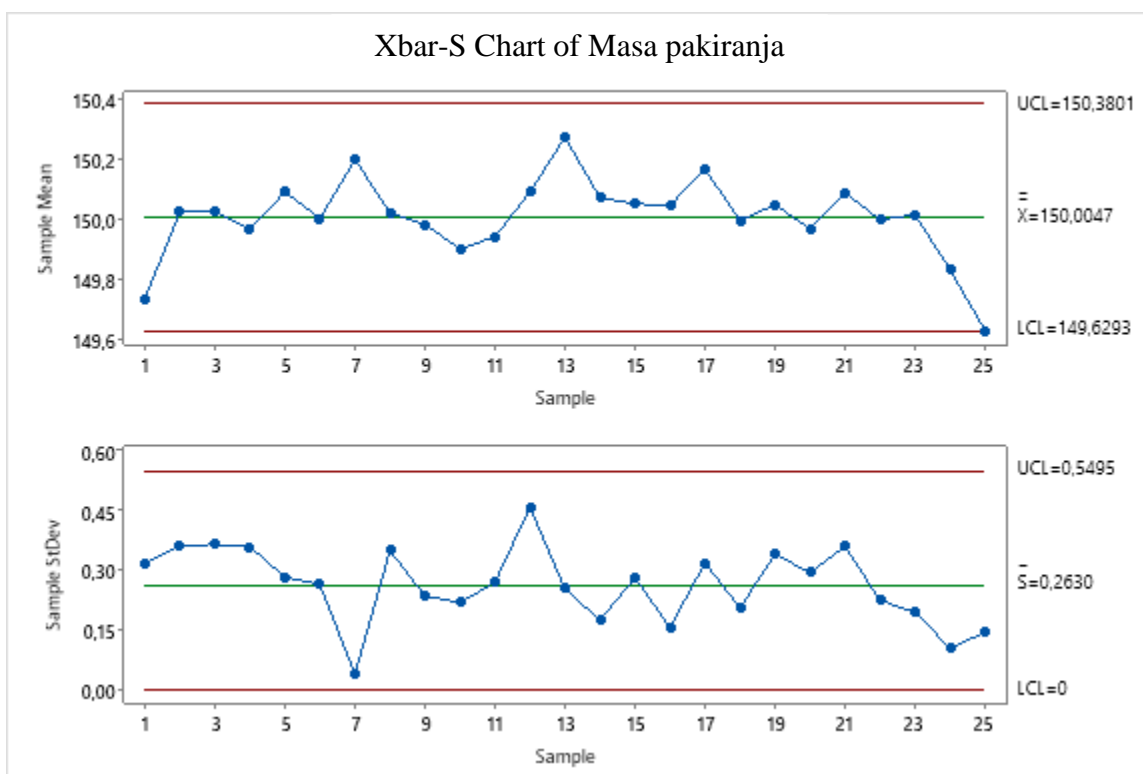
4.2. \bar{x} -s karta

U primjeru je uzeto 25 uzoraka veličine $n = 5$, gdje se kontrolirala masa pakiranja zrnatog sira ciljane mase 150 grama. Mjerenja su provedena kako bi se osiguralo da proces pakiranja zadovoljava standarde kvalitete i da odstupanja od zadane mase budu minimalna. Analizom dobivenih podataka moguće je procijeniti stabilnost proizvodnog procesa te utvrditi postoji li potreba za korekcijama u sustavu doziranja. Osim toga, provjerava se pridržavanje zakonskih propisa vezanih uz deklariranu masu proizvoda, čime se osigurava dosljednost i zadovoljstvo potrošača.

Tablica 3. Rezultati mjerenja mase pakiranja zrnatog sira / g

Broj uzorka	Nasumično odabrani pakiranja				
	1	2	3	4	5
1	149,3	149,8	150,2	149,6	149,7
2	149,8	150,2	150,5	150,1	149,6
3	150,4	149,4	150,0	150,2	150,0
4	150,3	149,9	150,2	149,4	150,1
5	149,9	150,2	150,0	150,5	149,8
6	150,0	149,7	150,2	150,3	149,8
7	150,2	150,2	150,1	150,2	150,2
8	149,6	150,4	150,1	149,7	150,2
9	150,2	150,0	150,2	149,8	149,7
10	150,0	150,1	149,8	150,1	149,6
11	150,1	150,2	149,9	149,9	149,5
12	150,7	150,0	149,4	150,1	150,2
13	150,2	150,6	150,3	150,3	149,9
14	150,2	150,3	150,1	149,8	150,0

15	150,4	149,7	150,2	150,0	149,8
16	149,9	150,1	150,0	149,9	150,3
17	149,7	150,4	149,9	150,5	150,2
18	149,7	149,9	150,0	150,3	150,0
19	150,3	149,7	149,8	150,5	149,9
20	150,0	149,6	150,0	150,4	149,8
21	149,9	150,2	149,8	149,8	150,7
22	150,2	149,7	150,0	150,0	150,2
23	150,1	150,0	150,0	150,3	149,7
24	149,9	149,9	149,6	149,9	149,8
25	149,6	149,7	149,6	149,8	149,4



Slika 6. \bar{x} -s karta – rezultati mjerenja mase pakiranja zrnatog sira

Nakon izrade kontrolne karte s podacima iz Tablice 3., provodi se procjena kontrole podataka, kod s karte traže se uzorci koji izlaze iz kontrolnih granica ili imaju nepravilnosti koje se ponavljaju. S obzirom na to da su sve točke unutar granica, može se reći da je sustav za doziranje i punjenje posudica zrnatim sirom pod kontrolom, odnosno da je proces stabilan. Kod provjere \bar{x} karte analizira se stabilnost prosječne vrijednosti uzorka gdje se gleda jesu li svi podatci unutar

granica i odstupanja vrijednosti od središnje linije ili skokove kao za uzorak 25 na \bar{x} karti. Budući da su svi podatci unutar kontrolnih granica, znači da je proces stabilan.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja \bar{x} -s karte dan je u Tablici 4.

Tablica 4. Prednosti, nedostaci i ograničenja \bar{x} -s kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> • Precizna mjera za varijabilne podatke jer uzima sve vrijednosti u uzorku u obzir putem standardnog odstupanja. • Osjetljivost na male promjene u srednjim vrijednostima i varijabilnostima procesa. • Pogodna za veće uzorke. 	<ul style="list-style-type: none"> • Zahtjeva više vremena i rada radi same kompleksnosti izračuna. • Potrebna je velika količina ulaznih podataka za izradu same karte i kontrolnih granica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Oslanja se na pretpostavku normalne raspodjele. • Nije ekonomična za male uzorke.

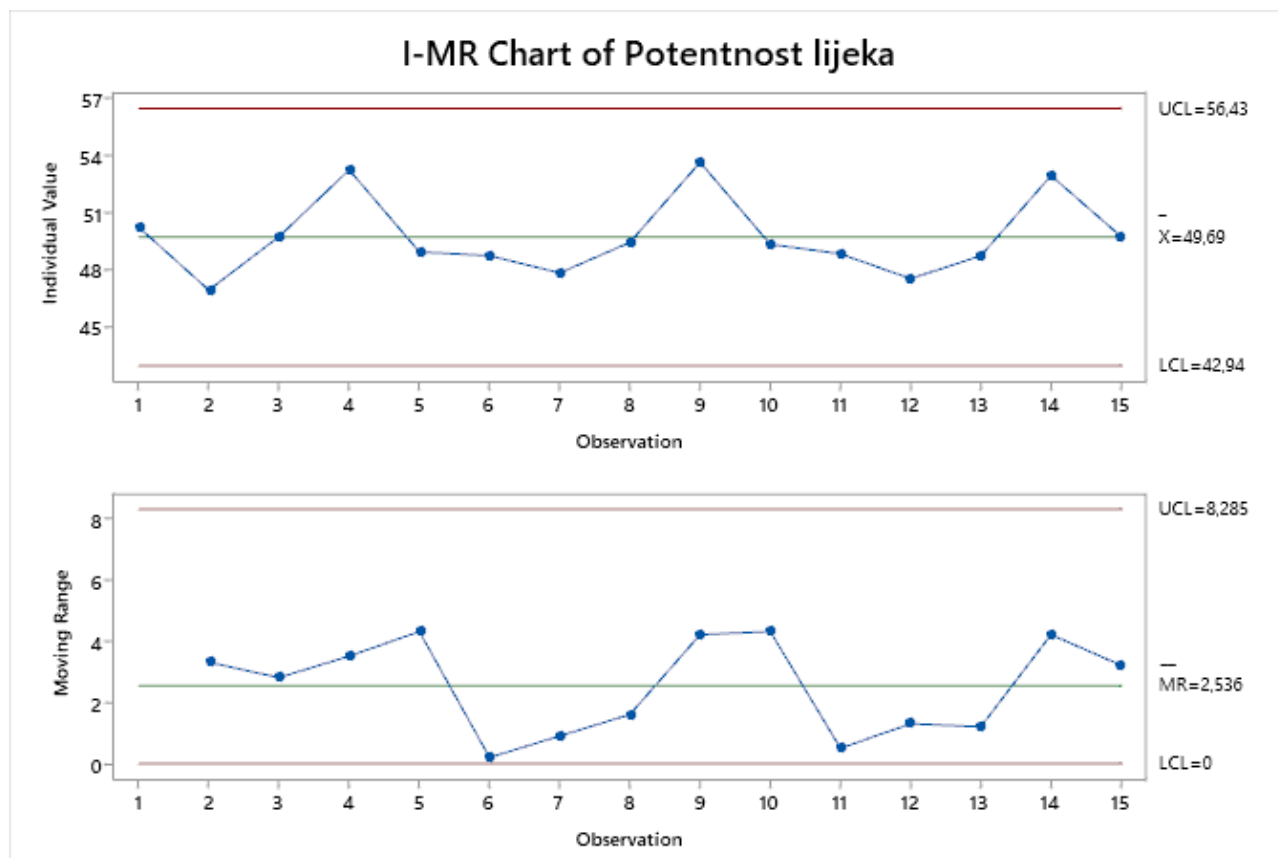
4.3. I-MR karta

U primjeru je uzeto 15 uzoraka lijeka čija potentnost treba iznositi 50 mg. Analiza uzoraka provedena je kako bi se utvrdilo odstupanje od deklarirane vrijednosti i osigurala konzistentnost kvalitete proizvoda. Preciznost doziranja ključna je za učinkovitost terapije i sigurnost pacijenata, stoga je nužno provesti detaljna ispitivanja u skladu s farmaceutskim standardima. Dobiveni rezultati omogućuju procjenu pouzdanosti proizvodnog procesa te identifikaciju eventualnih varijacija koje bi mogle zahtijevati korektivne mjere u proizvodnji.

Tablica 5. Rezultati mjerenja potentnosti lijeka / mg

Broj uzorka	Potentnost lijeka
1	50,2
2	46,9
3	49,7
4	53,2
5	48,9
6	48,7
7	47,8
8	49,4
9	53,6

10	49,3
11	48,8
12	47,5
13	48,7
14	52,9
15	49,7



Slika 7. I-MR karta – rezultati mjerenja potentnosti lijeka

Nakon izrade kontrolne karte s podacima iz Tablice 5., provjerava se stabilnost srednje vrijednosti procesa. Budući da su sve točke unutar granica, proces je stabilan, iako se vidi da ima oscilacija između nekih točaka.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja *I-MR* karte dan je u Tablici 6.

Tablica 6. Prednosti, nedostaci i ograničenja I-MR kontrolne karte

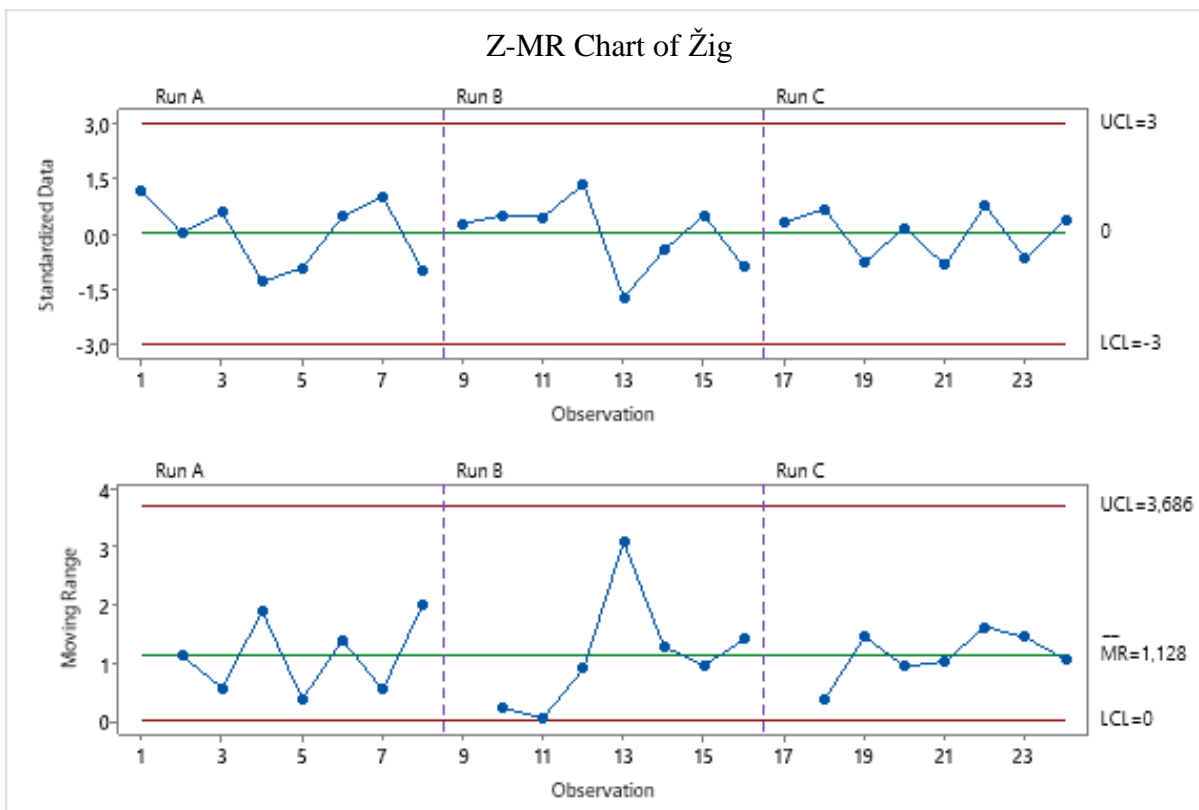
Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> Jednostavna primjena za individualna mjerenja. Brzo otkrivanje odstupanja i jednostavna analiza karte. Široka primjena na razne proizvode malih količina ili velike vrijednosti. 	<ul style="list-style-type: none"> Osjetljivost individualnih mjeri na ekstremne vrijednosti može loše utjecati na interpretaciju rezultata. Manja osjetljivost na male promjene za razliku od karata namijenjenim za veće serije. 	<ul style="list-style-type: none"> Slijedi normalnu raspodjelu. Podatci trebaju biti prikupljeni u istim intervalima za pouzdanost rezultata. Nije pogodna za procese s više uzoraka.

4.4. Z-MR karta

U primjeru je uzeto 24 uzoraka žigova, koji su analizirani kako bi se procijenila njihova preciznost, čitljivost i postojanost otiska. Kvaliteta žigova od ključne je važnosti u osiguravanju jasnoće i trajnosti označavanja dokumenata, proizvoda ili ambalaže. Tijekom analize provjeravala se usklađenost dimenzija, intenzitet boje te otpornost na vanjske utjecaje poput vlage i trošenja. Dobiveni rezultati omogućuju evaluaciju proizvodnog procesa te utvrđivanje eventualnih nedostataka koji bi mogli utjecati na funkcionalnost i trajnost žigova u stvarnoj upotrebi.

Tablica 7. Rezultati mjerenja veličine žiga / mm

Broj uzoraka	Žig	Pokušaj	Broj uzoraka	Žig	Pokušaj
1	302,634	Run A	13	479,511	Run B
2	300,558	Run A	14	495,170	Run B
3	301,604	Run A	15	506,851	Run B
4	298,130	Run A	16	489,671	Run B
5	298,824	Run A	17	400,548	Run C
6	301,384	Run A	18	403,193	Run C
7	302,373	Run A	19	392,790	Run C
8	298,685	Run A	20	399,538	Run C
9	504,188	Run B	21	392,192	Run C
10	506,879	Run B	22	403,812	Run C
11	506,189	Run B	23	393,457	Run C
12	517,210	Run B	24	401,051	Run C



Slika 8. Z-MR karta - rezultati mjerenja veličine žiga

Nakon izrade kontrolne karte s podatcima iz Tablice 7., provjerava se stabilnost. U prvom pokušaju (Run A) i trećem pokušaju (Run C) vidimo da nema osciliranja podataka, što znači da proces funkcionira unutar očekivanih granica bez značajnih varijacija. Međutim, u drugom pokušaju (Run B) uočavamo oscilacije u podacima, što nam ukazuje na mogući problem pri procesu stavljanja žiga. Ove oscilacije mogu biti rezultat nekonzistentnog pritiska pri žigosanju, varijacija u materijalu, neispravnosti stroja ili ljudske pogreške.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja Z-MR karte dan je u Tablici 8.

Tablica 8. Prednosti, nedostaci i ograničenja Z-MR kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> Omogućuje usporedbu različitih procesa koristeći standardne podatke. 	<ul style="list-style-type: none"> Mala osjetljivost na male promjene u procesu. Ovisi o kvaliteti ulaznih podataka. 	<ul style="list-style-type: none"> Potrebni početni podatci za preciznu standardizaciju i izradu karata.

<ul style="list-style-type: none"> • Jednostavna interpretacija. • Prikladna za praćenje pojedinačnih mjerenja i pomičnih raspona. • Mogućnost analize procesa s više varijabli. 	<ul style="list-style-type: none"> • Potrebno prethodno izračunavanje srednje vrijednosti i standardnog odstupanja. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pretpostavlja da su podatci normalno distribuirani. • Ekstremni podatci značajno utječu na standardizirane Z vrijednosti.
---	--	---

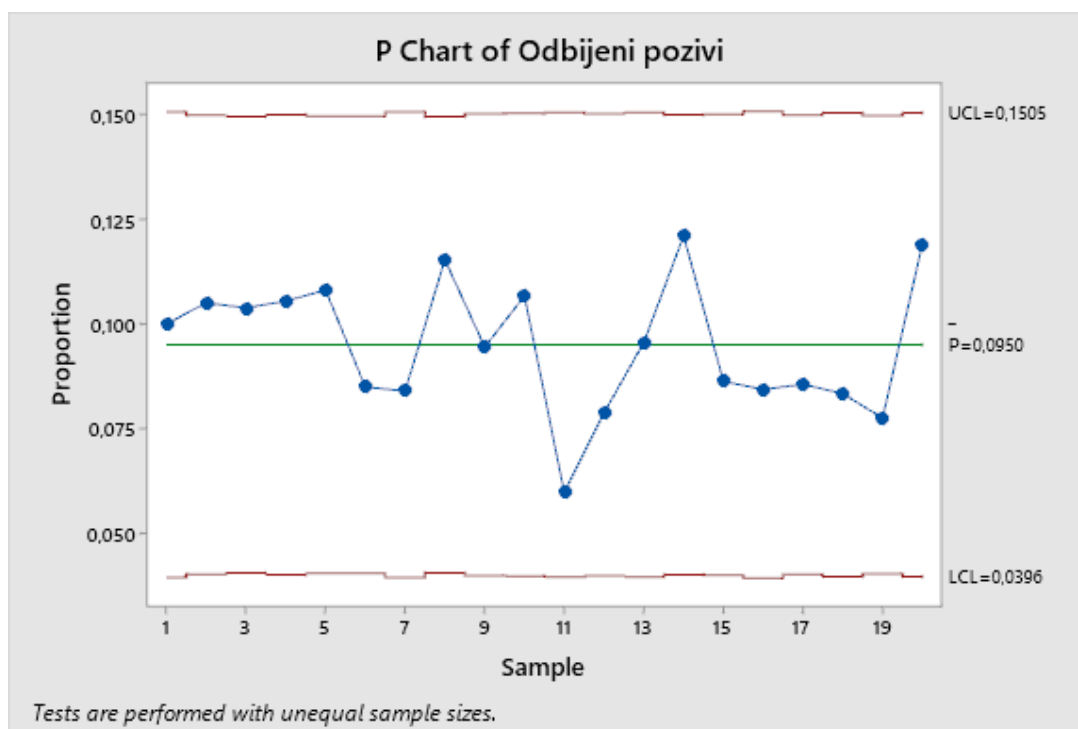
4.5. p karta

U primjeru je uzeto 20 uzoraka koji predstavljaju različite dane kod teleoperatera koji prodaju usluge, pri čemu su zabilježeni ukupni brojevi poziva i broj odbijenih poziva. Analiza ovih podataka omogućuje procjenu učinkovitosti sustava poziva te identificiranje potencijalnih problema u kapacitetu mreže ili raspodjeli resursa. Posebna pažnja posvećena je postotku odbijenih poziva, što može ukazivati na preopterećenje mreže, tehničke poteškoće ili nedovoljnu dostupnost operatera. Dobiveni rezultati mogu poslužiti za optimizaciju mrežnih kapaciteta, poboljšanje korisničkog iskustva i donošenje strateških odluka za povećanje kvalitete usluge.

Tablica 9. Podatci mjerenja obavljenih poziva teleoperatera

Broj uzoraka	Broj poziva	Odbijeni pozivi
1	250	25
2	257	27
3	260	27
4	256	27
5	259	28
6	259	22
7	250	21
8	260	30
9	254	24
10	253	27
11	251	15
12	254	20
13	251	24
14	256	31
15	255	22
16	249	21
17	257	22
18	252	21

19	258	20
20	252	30



Slika 9. p karta – podatci mjerenja obavljenih poziva teleoperatera

Nakon izrade kontrolne karte s podacima iz Tablice 9., može se vidjeti da su svi podatci unutar kontrolnih granica i da nema odstupanja. Proces je stabilan i nema nikakvih odstupanja koja bi navela na posebne promjene.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja p karte dan je u Tablici 10.

Tablica 10. Prednosti, nedostaci i ograničenja p kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> Jednostavna primjena i uporaba u situacijama gdje je potrebno pratiti postotak neispravnih jedinica. Fleksibilnost i efikasnost omogućava analizu različitih veličina uzoraka i omogućuje identifikaciju 	<ul style="list-style-type: none"> Manje veličine uzorka mogu dati netočne rezultate. Nije pogodna za kontinuirane procese. Neosjetljivost na manje promjene u proporciji defektnih uzoraka. 	<ul style="list-style-type: none"> Potrebno je konzistentno uzrokovanje da bi karta bila učinkovita. Pretpostavka binomne funkcije.

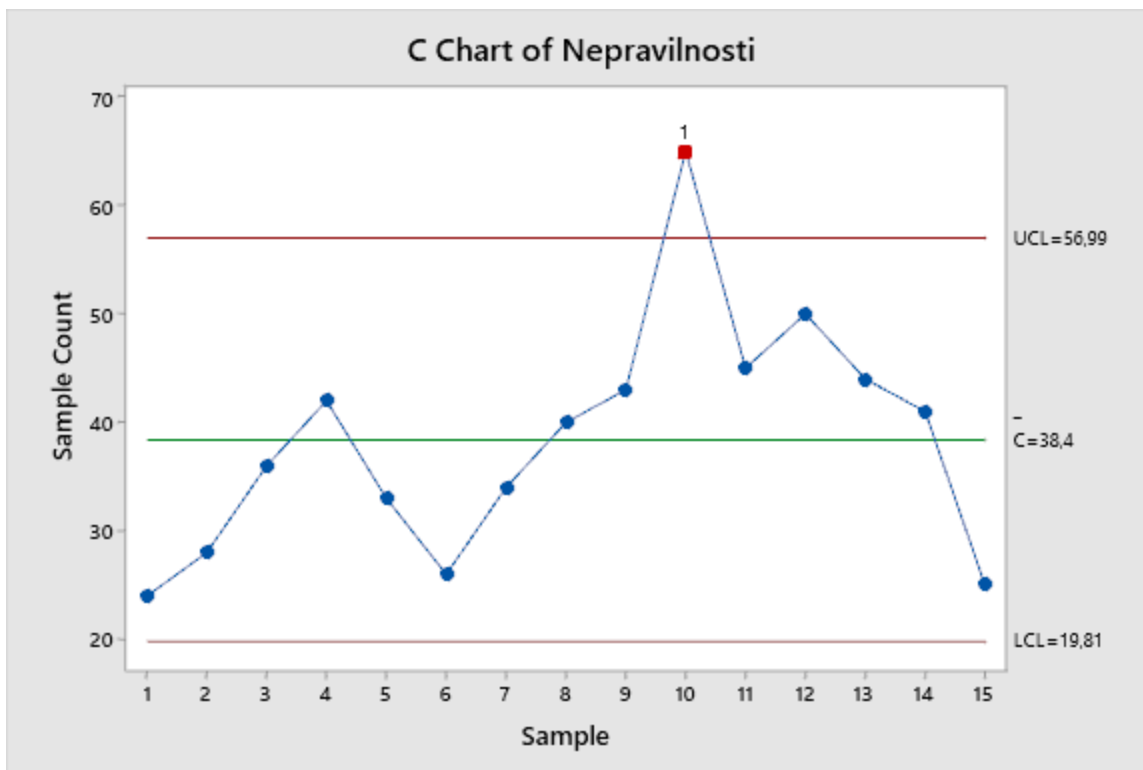
odstupanja od traženih vrijednosti. • Širok spektar uporabe.		
---	--	--

4.6. c karta

U primjeru je uzeto 15 uzoraka od po 100 časopisa, pri čemu se bilježio sveukupni broj grešaka u tisku, poput tipografskih pogrešaka, zamagljenog ispisa, pogrešnih slika ili neispravnog poravnanja teksta. Cilj analize bio je procijeniti kvalitetu tiskarskog procesa i utvrditi učestalost nesukladnosti koje bi mogle utjecati na čitljivost i vizualni dojam časopisa. Dobiveni podatci omogućuju identifikaciju potencijalnih problema u tiskarskoj liniji te donošenje korektivnih mjera kako bi se smanjio broj pogrešaka i osigurala dosljedna kvaliteta publikacije.

Tablica 11. Rezultati mjerenja nepravilnosti u časopisima 1

Broj uzorka	Nepravilni
1	24
2	28
3	36
4	42
5	33
6	26
7	34
8	40
9	43
10	65
11	45
12	50
13	44
14	41
15	25



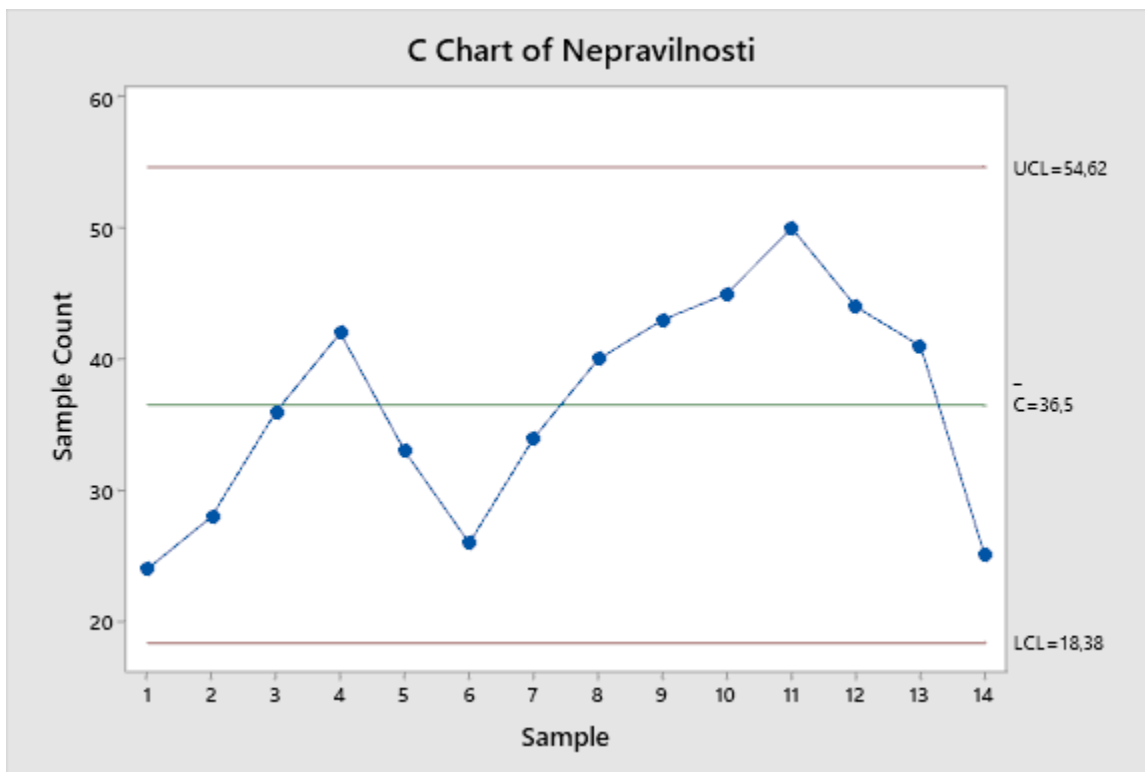
Slika 10. c karta – broj nepravilnosti u časopisima 1

Nakon izrade kontrolne karte s podacima iz Tablice 11., može se vidjeti da nisu svi podatci unutar kontrolnih granica te da u uzorku 10 postoji značajno odstupanje, što čini proces nestabilnim. Ovo odstupanje može biti rezultat nenamjerne pogreške u mjerenju, problema s opremom ili specifične varijacije u procesu koja nije uobičajena. Kako bi se osigurala točnost analize, potrebno je izbaciti taj uzorak iz evaluacije i ponoviti kontrolu.

Tablica 12. Rezultati mjerenja nepravilnosti u časopisima 2

Broj uzorka	Nepravilni
1	24
2	28
3	36
4	42
5	33
6	26
7	34
8	40
9	43
10	45
11	50

12	44
13	41
14	25



Slika 11. c karta – broj nepravilnosti u časopisima 2

Nakon izbacivanja grupe s prevelikim brojem nepravilnosti, ponovo se provodila analiza kako bi se provjerila stabilnost procesa. Rezultati analize prikazani na Slici 11. pokazuju da je sustav sada pod kontrolom, odnosno stabilan. Uklanjanjem vrijednosti koje su uzrokovale nestabilnost omogućeno je preciznije praćenje trenda i stvarnog ponašanja procesa. Podatci se sada nalaze unutar kontrolnih granica. Ovaj postupak potvrđuje da je eliminacija problematične grupe bila opravdana i da sustav radi unutar očekivanih parametara, čime se osigurava dosljedna kvaliteta proizvodnje.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja c karte dan je u Tablici 13.

Tablica 13. Prednosti, nedostaci i ograničenja c kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
-----------	-----------	-------------

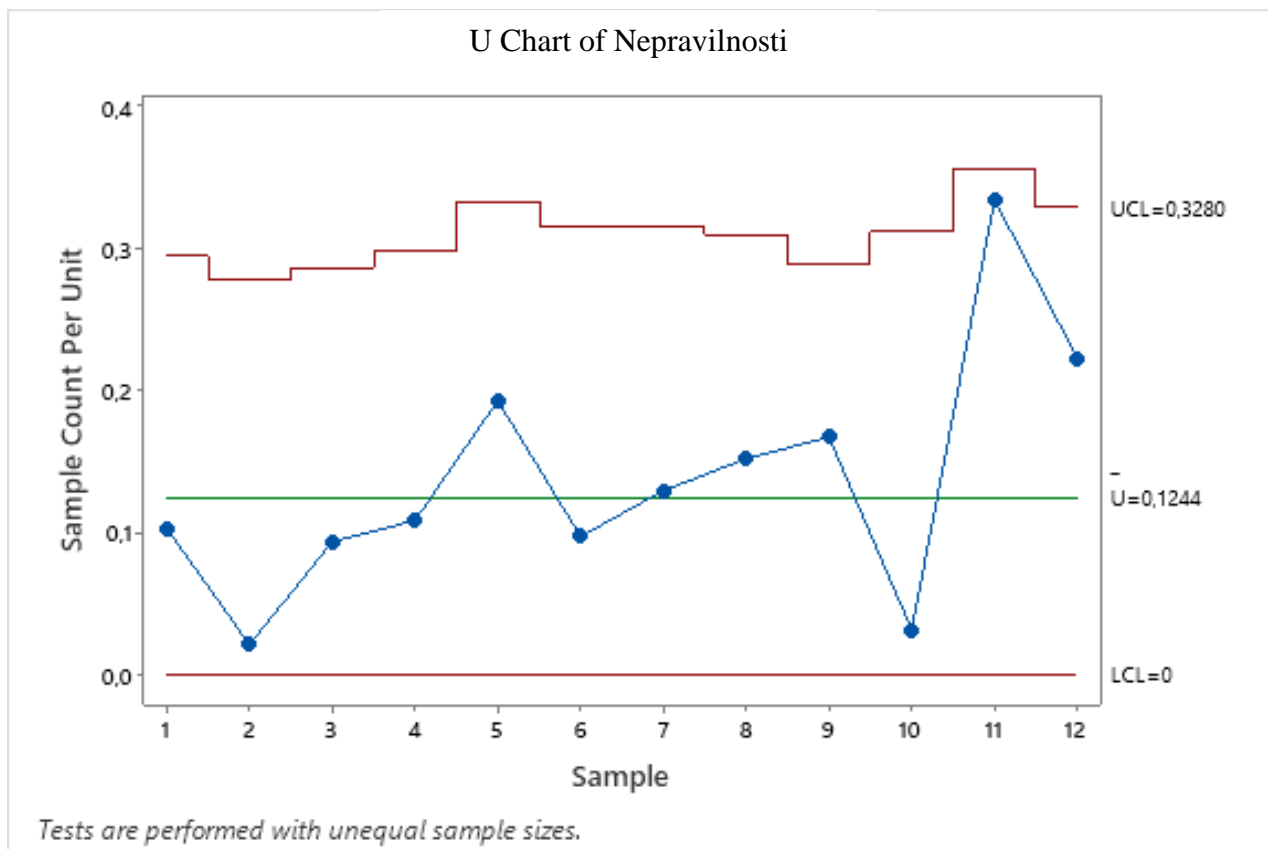
<ul style="list-style-type: none"> • Jednostavna primjena za praćenje grešaka na proizvodima. • Prikazuje točan broj grešaka na uzorcima što olakšava proces procijene. • Mogućnost praćenja procesa s raznim vrstama grešaka. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne može se koristiti za uzorke različitih veličina. • Fokusira se samo na greške, a ne i kako utječu na kvalitetu proizvoda. • Loše detektira male promijene u jako stabilnim procesima. 	<ul style="list-style-type: none"> • Mora koristiti konstantne veličine uzorke. • Pretpostavlja Poissonovu razdiobu.
---	--	--

4.7. u karta

U primjeru je uzeto 12 uzoraka za provjeru nepravilnosti na površinama metalnih kućišta, pri čemu su analizirane ogrebotine, udubljenja, neravnine i drugi defekti koji bi mogli utjecati na estetsku i funkcionalnu ispravnost proizvoda. Cilj ispitivanja bio je utvrditi učestalost i ozbiljnost nepravilnosti kako bi se osigurala dosljedna kvaliteta u proizvodnom procesu. Rezultati analize omogućuju identifikaciju mogućih uzroka nesavršenosti, poput problema u obradi materijala ili završnoj obradi površine, te donošenje odgovarajućih korektivnih mjera za smanjenje broja neispravnih kućišta.

Tablica 14. Rezultati mjerenja nepravilnosti na površini kućišta

Broj uzorka	Nepravilnosti	Veličina uzorka	Postotak nepravilnosti
1	4	39	0,102564
2	1	48	0,020833
3	4	43	0,093023
4	4	37	0,108108
5	5	26	0,192308
6	3	31	0,096774
7	4	31	0,129032
8	5	33	0,151515
9	7	42	0,166667
10	1	32	0,031250
11	7	21	0,333333
12	6	27	0,222222



Slika 12. *u* karta - rezultati mjerenja nepravilnosti na površini kućišta

Kontrolna karta je izrađena s podacima iz Tablice 14. i iz nje se može vidjeti da je proces pod kontrolom.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja *u* karte dan je u Tablici 15.

Tablica 15. Prednosti, nedostaci i ograničenja *u* kontrolne karte

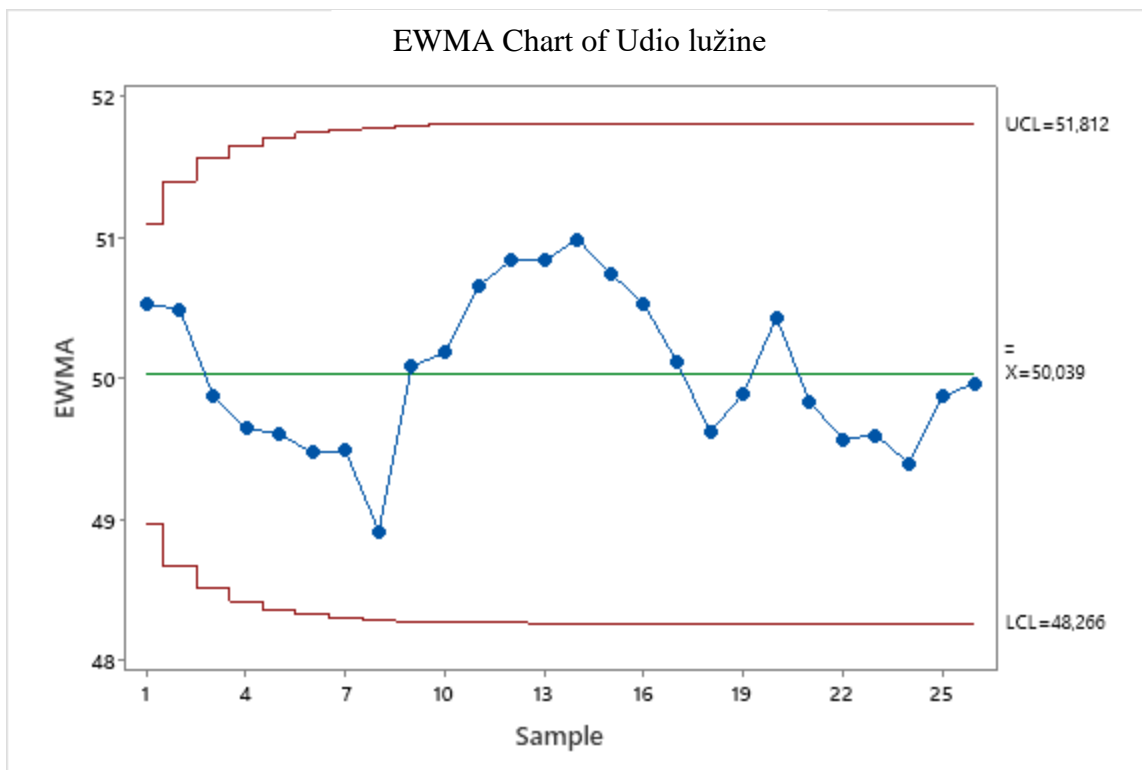
Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> • Naspram <i>c</i> karte može se koristiti za uzorke različitih veličina. • Odlična za praćenje procesa s većim brojem očekivanih nepravilnosti. • Jednostavna primjena. 	<ul style="list-style-type: none"> • Potrebno je dobro poznavanje karte za njenu interpretaciju. • Temelji se na Poissonovoj razdiobi. • Kompliciraniji proračuni kontrolnih granica radi variranja veličina uzorka. 	<ul style="list-style-type: none"> • Prikazuje samo broj grešaka. • Loša osjetljivost na male promjene. • Primjenjiva samo na brojanje grešaka.

4.8. EWMA karta

U primjeru je uzeto 26 uzoraka u kojima se analizira volumni udio lužine u kemijskoj smjesi, s ciljem osiguravanja konzistentnosti i ispravnosti kemijskog sastava. Tijekom analize mjerene su koncentracije lužine kako bi se utvrdilo postoje li odstupanja od propisanih standarda, što bi moglo utjecati na reaktivnost i stabilnost smjese. Precizna kontrola ovog parametra ključna je za optimizaciju kemijskih procesa i sigurnost primjene smjese u industriji. Dobiveni rezultati omogućuju prilagodbu proizvodnih uvjeta i implementaciju korektivnih mjera kako bi se osigurala usklađenost s tehničkim specifikacijama.

Tablica 16. Rezultati mjerenja volumnog udjela lužine / %

Broj uzorka	Vrijednost	Broj uzorka	Vrijednost
1	52,5032	14	51,6031
2	50,3432	15	49,7834
3	47,4456	16	49,6699
4	48,7144	17	48,4619
5	49,4506	18	47,6401
6	48,9482	19	50,9910
7	49,5418	20	52,6045
8	46,6441	21	47,4385
9	54,7815	22	48,5156
10	50,5514	23	49,7136
11	52,5437	24	48,6015
12	51,5899	25	51,7665
13	50,8120	26	50,3540



Slika 13. EWMA karta - rezultati mjerenja volumnog udjela lužine

S danim podacima u Tablici 16. izrađena je kontrolna karta po kojoj vidimo da su svi podatci unutar kontrolnih granica i da je proces stabilan. Njena primjena u industriji i laboratorijima je u područjima gdje je potrebna velika preciznost u radu. U kemijskoj industriji se koristi za praćenje udjela određenih kiselina ili lužina kako ne bi došlo do kemijske reakcije ili neispravnog proizvoda, dok u metaloprerađivačkoj industriji koristi se za praćenje trošenja alata na CNC strojevima kako bi stroj mogao raditi kontinuirano bez smanjenja kvalitete proizvoda. U laboratorijima koristi se za kalibraciju najpreciznijih mjernih instrumenata, kontrolu kvalitete ispitivanja ili praćenja okolnih promjena u prostorima gdje su potrebni biti isti uvjeti.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja EWMA karte dan je u Tablici 17.

Tablica 17. Prednosti, nedostaci i ograničenja EWMA kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> Osjetljivost na male promjene u procesu. Mogućnost prilagodbe parametara za osjetljivost. 	<ul style="list-style-type: none"> Složeniji proračuni od standardnih karata. Spora reakcija na nagle promjene. 	<ul style="list-style-type: none"> Ovisna je o početnim podacima. Potrebna određena količina povijesnih

<ul style="list-style-type: none"> • Jednostavna implementacija i korištenje. • Smanjeno odstupanje radi korištenja trenutačnih i povijesnih podataka. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pogrešno postavljanje parametara može dovesti do krivih zaključaka. 	<p>podataka za preciznu analizu.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uporaba za praćenje kontinuiranih mjera.
--	---	---

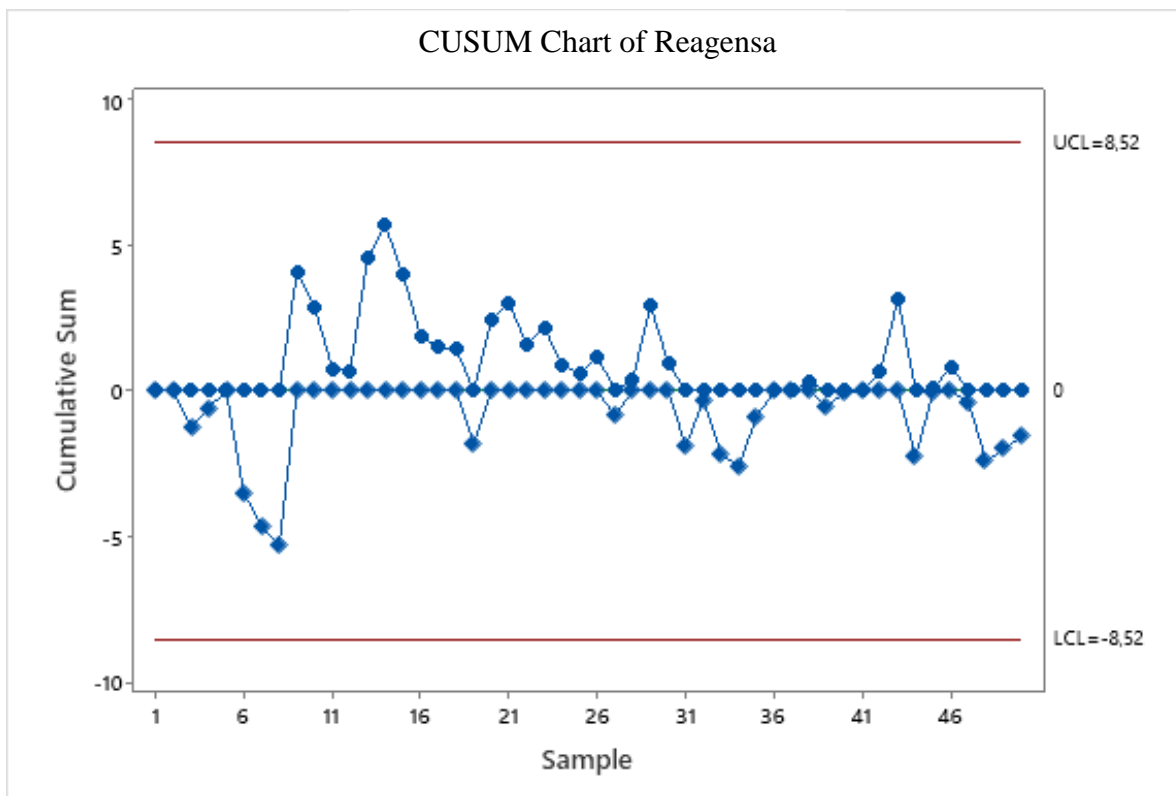
4.9. CUSUM karta

U primjeru je uzeto 50 uzoraka koji su pratili količinu reagensa koja se potrošila u danu tijekom 50 radnih dana, kako bi se analizirala učinkovitost potrošnje i stabilnost procesa. Podatci prikupljeni tijekom ovog razdoblja omogućuju procjenu prosječne dnevne potrošnje te identificiranje bilo kakvih nerazmjernih varijacija koje mogu ukazivati na neefikasnosti u procesu ili nepravilnosti u doziranju. Analizom ovih podataka može se optimizirati korištenje reagensa, smanjiti troškovi i osigurati pravilno upravljanje zalihama. Osim toga, rezultati mogu poslužiti za daljnje unapređenje proizvodnih procedura i minimiziranje otpada.

Tablica 18. Podatci mjerenja potrošnje reagensa / ml

Broj uzorka	Vrijednost	Broj uzorka	Vrijednost
1	50,7	26	51,7
2	51,1	27	48,1
3	47,7	28	51,5
4	49,6	29	53,6
5	50,1	30	49,1
6	45,4	31	47,0
7	47,8	32	50,6
8	48,3	33	47,0
9	55,1	34	48,6
10	49,9	35	50,6
11	49,0	36	51,0
12	50,9	37	49,8
13	55,0	38	51,4
14	52,2	39	48,4
15	49,4	40	49,4
16	49,0	41	50,4
17	50,7	42	51,7
18	51,0	43	53,6
19	47,1	44	46,7
20	53,5	45	51,2

21	51,7	46	51,8
22	49,6	47	48,5
23	51,7	48	46,9
24	49,8	49	49,4
25	50,7	50	49,4



Slika 14. CUSUM karta - podatci mjerenja potrošnje reagensa

Kontrolna karta je izrađena s podacima iz Tablice 18., iz nje se može vidjeti da količina potrošenog reagensa pri ispitivanju je uvijek u kontrolnim granicama što govori da je proces pod kontrolom. Nema kontinuiranog rasta i pada ili naglih promjena što nam govori da nema sustavnih promjena ili specifičnih varijacija. Uporaba CUSUM karata u industriji i laboratorijima je zastupljena radi njene mogućnosti da pomno prati mala odstupanja koja bi na nekim drugim kartama prošla neopaženima. U automobilskoj industriji koristi se za praćenje automatiziranog sustava sklapanja vozila, odnosno jesu li svi dijelovi postavljeni na dobre pozicije i jesu li sjeli u namijenjeno mjesto, u elektronskoj se prati broj defektnih procesora ili u kemijskoj gdje se prati

promjena u radnim uvjetima. Njena uporaba u laboratorijima je za praćenje odstupanja instrumenata od kalibriranih vrijednosti, praćenje uvjeta u laboratoriju ili praćenje stanja reagensa u strojevima.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja CUSUM karte dan je u Tablici 19.

Tablica 19. Prednosti, nedostaci i ograničenja CUSUM kontrolne karte

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> • Brza identifikacija promjena u sustavu. • Velika osjetljivost na male promjene. • Širok spektar uporabe. • Omogućuje jednostavnu vizualizaciju uzlaznih i silaznih trendova. 	<ul style="list-style-type: none"> • Zahtjeva jasno definirani cilj i precizno postavljene parametre. • Osjetljivost na početne uvijete može dati netočne rezultate. • Kompliciranija interpretacija od klasičnih karata. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ovisna je o početnim podacima. • Potrebna određena količina povijesnih podataka za preciznu analizu. • Uporaba za praćenje kontinuiranih mjera.

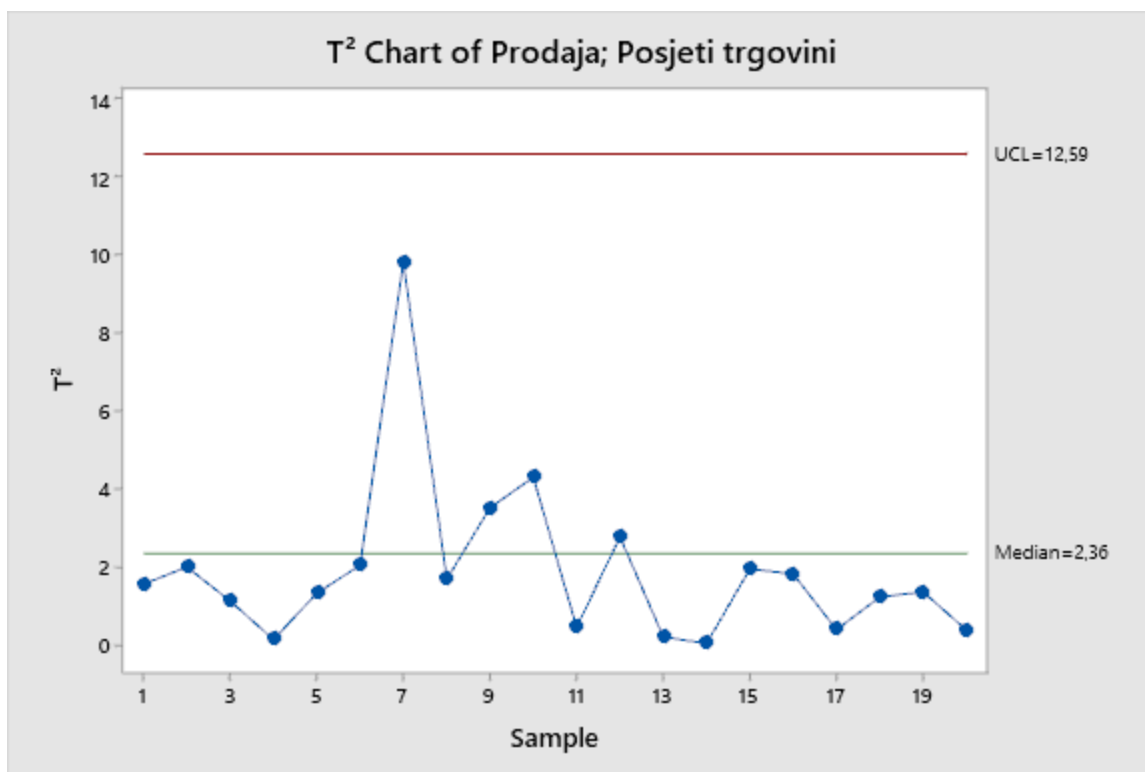
4.10. Hotelling T² karta

U primjeru je prikazana prodaja u trgovini tijekom 20 tjedana i njena korelacija s brojem posjetitelja u trgovinu, s ciljem razumijevanja kako posjećenost utječe na prodajnu uspješnost. Analizom podataka o broju posjetitelja i ostvarenom prometu može se utvrditi postoji li značajna povezanost između tih dvaju faktora, što bi moglo pomoći u optimizaciji marketinških strategija, promocija i prodajnih aktivnosti. Ako se utvrdi pozitivna korelacija, trgovina bi mogla iskoristiti povećanje posjećenosti za povećanje prodaje, dok bi negativna korelacija mogla ukazivati na druge čimbenike koji utječu na kupovne odluke, poput asortimana ili cijena. Ovi podatci omogućuju donošenje bolje informiranih poslovnih odluka i planiranje budućih strategija za poboljšanje prodaje.

Tablica 20. Rezultati mjerenja prodaje i posjeta trgovini

Tjedan	Prodaja	Posjeti trgovini
1	1200350	23
2	900825	21
3	850620	19
4	1140500	20

5	1006200	18
6	1460500	23
7	590000	21
8	800750	18
9	1560750	24
10	1450890	20
11	1230000	22
12	980640	17
13	1000520	20
14	1100600	20
15	1450600	23
16	1320200	20
17	1005060	19
18	980750	18
19	1240320	23
20	970600	20



Slika 15. Hotelling T² karta - rezultati mjerenja prodaje i posjeta trgovini

Kontrolna karta je izrađena s podacima iz Tablice 20. Na kontrolnoj se karti vidi da je proces pod kontrolom jer su svi podatci ispod gornje kontrolne granice. Točka 7 jedino značajnije odstupa od

ostalnih točaka jer omjer prodaje za taj tjedan i posjeta trgovini je neočekivan naspram prosjeka. Radi svoje mogućnosti praćenja više varijabli istovremeno koristi se za razne kompleksnije procese u laboratorijima i industriji. Koristi se za praćenje kalibracije uređaja jer može istovremeno pratiti njihovu osjetljivost i preciznost, praćenje svih okolišnih vrijednosti u prostorijama s propisanim standardnim vrijednostima ili u kemijskim laboratorijima ili industriji gdje se koristi za praćenje viskoznosti, kiseline i udjela koncentrata određenih sastojaka smjese. U farmaceutskoj industriji se koristi za praćenje mase i oblika tableta, u automobilskoj za praćenje radne temperature, tlaka i okretnog momenta uređaja na proizvodnoj liniji, dok u elektronskoj industriji prati vrijednosti kao napon, struju i otpor komponenti.

Pregled ključnih prednosti, nedostataka i ograničenja CUSUM karte dan je u Tablici 21.

Tablica 21. Prednosti, nedostaci i ograničenja Hotelling T^2 kontrolne karta

Prednosti	Nedostaci	Ograničenja
<ul style="list-style-type: none"> • Istovremeno praćenje više varijabli. • Obuhvaća stabilnost cijelog procesa sa svim varijablama. • Brzo otkriva promjene u sustavu. 	<ul style="list-style-type: none"> • Potrebno je dobro razumijevanje statistike za očitavanje podataka i samu implementaciju karata. • Komplicirani proračuni. • Osjetljivost na početne uvijete može dati netočne rezultate. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pretpostavlja normalnu razdiobu podataka. • Nema fleksibilnost za procese s nelinearnim podatcima. • Veliki troškovi implementacije i održavanja.

5. LABORATORIJSKA PRIMJENA KONTROLNIH KARATA

Kontrola kvalitete u laboratorijima se dijeli na unutarnju i vanjsku [12]. Pod unutarnju spadaju paralelna određivanja, uporaba kontrolnih uzoraka, uporaba certificiranih referentnih materijala i bilježenje rezultata na kontrolnim kartama, dok pod vanjsku spadaju ispitivanja sposobnosti i međulaboratorijska ispitivanja.

U laboratorijima kontrolne karte se ispunjavaju svaki dan ili po nekom dogovorenom terminu. Svakodnevnom kontrolom se utvrđuje preciznost radnih uređaja i stanje okoliša u radnom prostoru. One se najčešće provode na početku radnog vremena i nije ih potrebno sve zapisivati.

Euroinspekt-Croatiakontrola
PC Laboratorij

INUBATOR

TEMPERATURNE LISTE HLADNJAK – 2014 god. / oznaka opreme: 120

Svakodnevno očitavanje temperature putem termometra br: _____

SIJEČANJ

datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
temperatura	-	20,8	21,0	-	-	-	20,5	21,5	21,6	21,0	-	-	20,5	20,5	20,8	20,0	20,5	-	-	21,2	21,2	21,0	20,5	20,5	-	-	21,0	21,1	21,1	21,0	21,0
korektivna mjera	-																														
potpis	-	AV	AV	-	-	-	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV

VELJAČA

datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28			
temperatura	-	-	20,5	20,8	20,8	21,0	21,0	-	-	21,0	21,2	21,0	20,5	20,5	-	-	20,5	21,0	21,0	21,1	21,1	-	-	21,1	21,0	20,8	20,9	20,9			
korektivna mjera	-	-																													
potpis	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV			

OŽUJAK

datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
temperatura	-	-	21,0	21,0	21,0	21,0	21,1	-	-	21,0	20,8	20,8	20,9	21,0	-	-	21,0	21,0	20,5	20,9	20,5	-	-	21,0	21,1	21,1	21,0	21,0	-	-	21,1
korektivna mjera	-	-																													
potpis	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV

TRAVANJ

datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
temperatura	20,8	21,0	21,2	21,2	-	-	20,3	21,3	21,4	21,4	21,0	-	-	21,0	21,0	21,0	20,8	20,8	-	-	-	-	21,2	21,1	21,0	21,1	-	-	20,3	20,5	20,8
korektivna mjera																															
potpis	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	-	-	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV

SVIBANJ

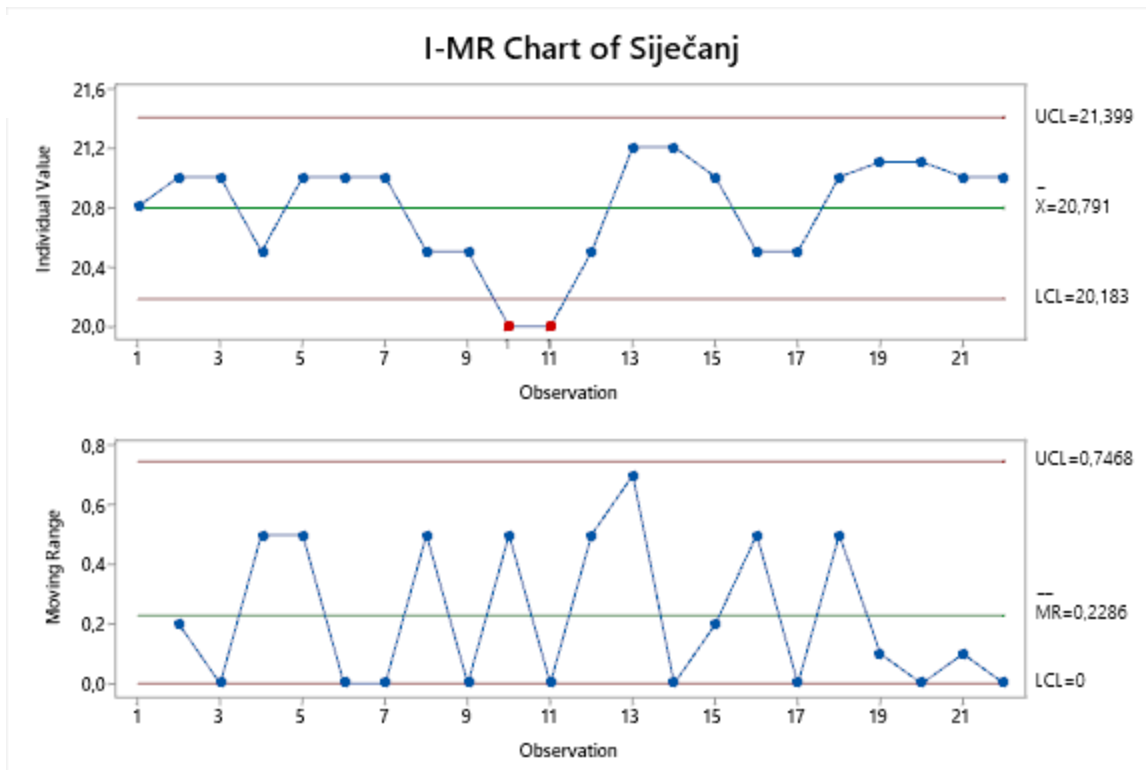
datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
temperatura	-	21,3	-	-	21,3	21,3	21,3	21,1	21,4	-	-	21,4	21,4	21,5	21,5	21,1	-	-	21,0	21,1	21,0	21,1	21,3	-	-	21,3	21,3	21,2	21,4	21,4	
korektivna mjera	-																														
potpis	-	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	-	-	AV	AV	AV	AV	AV	AV

OB RU 120 -1 / izdanje 2 / 3.6.2013

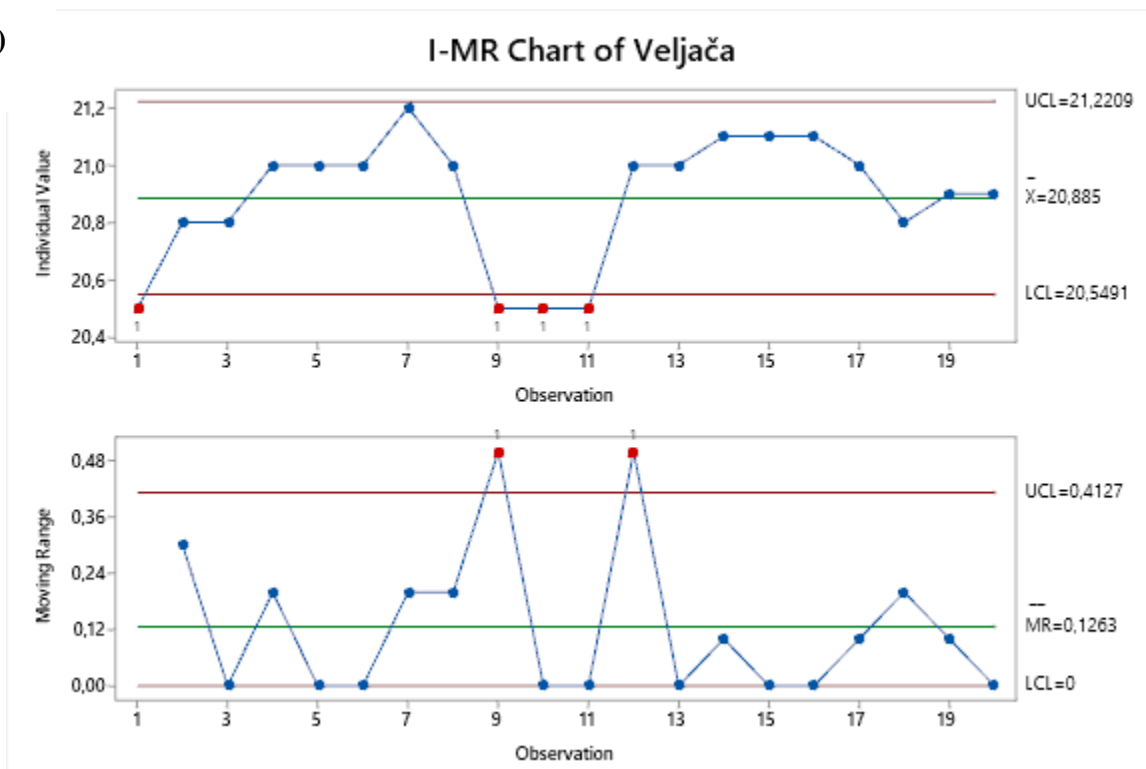
Stranica 1 od 3

Slika 16. Prikaz dnevne karte [12]

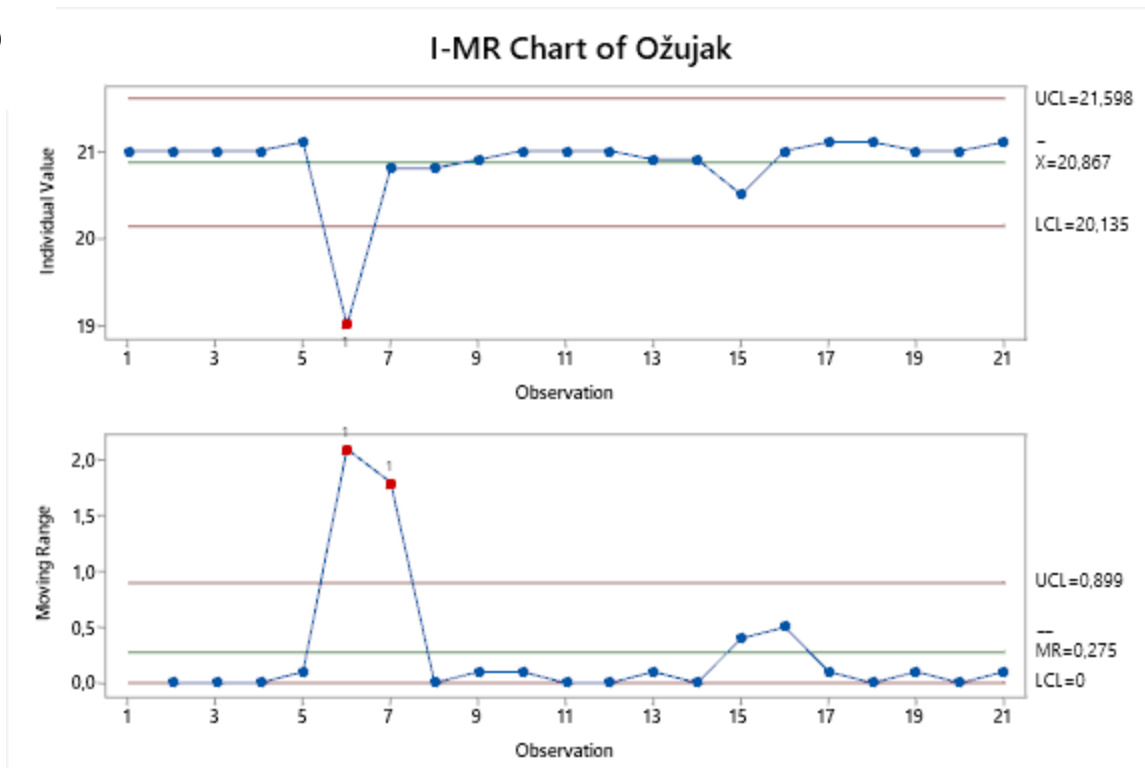
a)



b)



c)



Slika 17

- a) *I-MR* karta – dnevna temperatura u siječnju
- b) *I-MR* karta – dnevna temperatura u veljači
- c) *I-MR* karta – dnevna temperatura u ožujku

Na slici 17. a), b), i c) može se vidjeti da vrijednosti nisu unutar kontrolnih granica odnosno sustav nije pod kontrolom.

Osim dnevnih i periodičnih kontrolnih karat koriste se još za očitavanje temperature inkubatora (Slika 18. [12]), provjeru volumetrijske opreme (Slika 20. [12]) i provjeru različitih materijala.

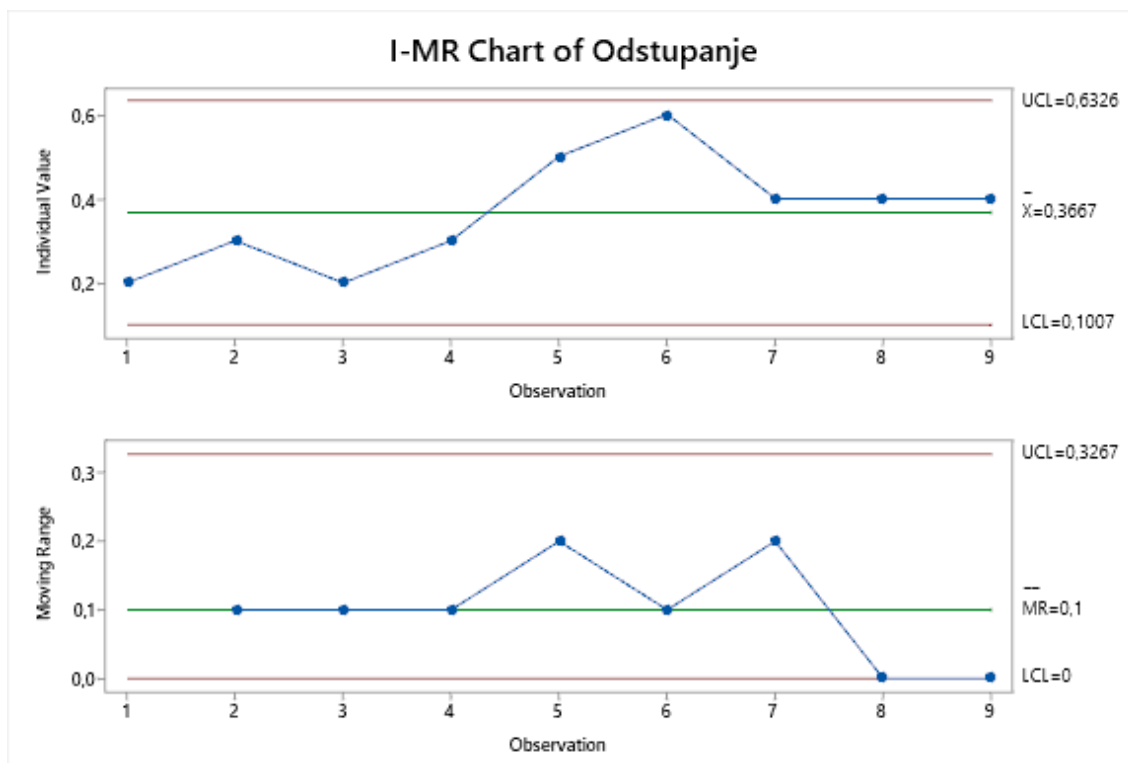
Croatiakontrola	PROVJERA TOČNOSTI TEMPERATURE INKUBATORA WTW 606/3-I	OB.RU.121-02
		Strana
		Izdanje 2
Oznaka inkubatora	WTW – 606/3-I, br.120	
Oznaka termometra	Fluke, 54-II, br.34	
Oznaka termohigrometra	Testo 608 HI	
Kriterij prihvatljivosti	20±1°C	

Relativna vlažnost prostorije: 19,8 %
 Temperatura prostorije: 22,2 °C

Lokacija	Temperatura izmjerena termometrom, br.34(°C)	Temperatura na displeju (°C)	Odstupanje temperature (°C)
1	21,3	21,1	+0,2
2	21,4	- " -	+0,3
3	21,3	- " -	+0,2
4	21,4	- " -	+0,3
5	21,6	- " -	+0,4
6	21,7	- " -	+0,6
7	21,5	- " -	+0,4
8	21,5	- " -	+0,4
9	21,5	- " -	+0,4
Srednje odstupanje			0,37 °C

Lokacije na kojima se provjerava temperatura (1-9) prikazane su u RU120

Slika 18. Očitavanje temperature inkubatora [12]



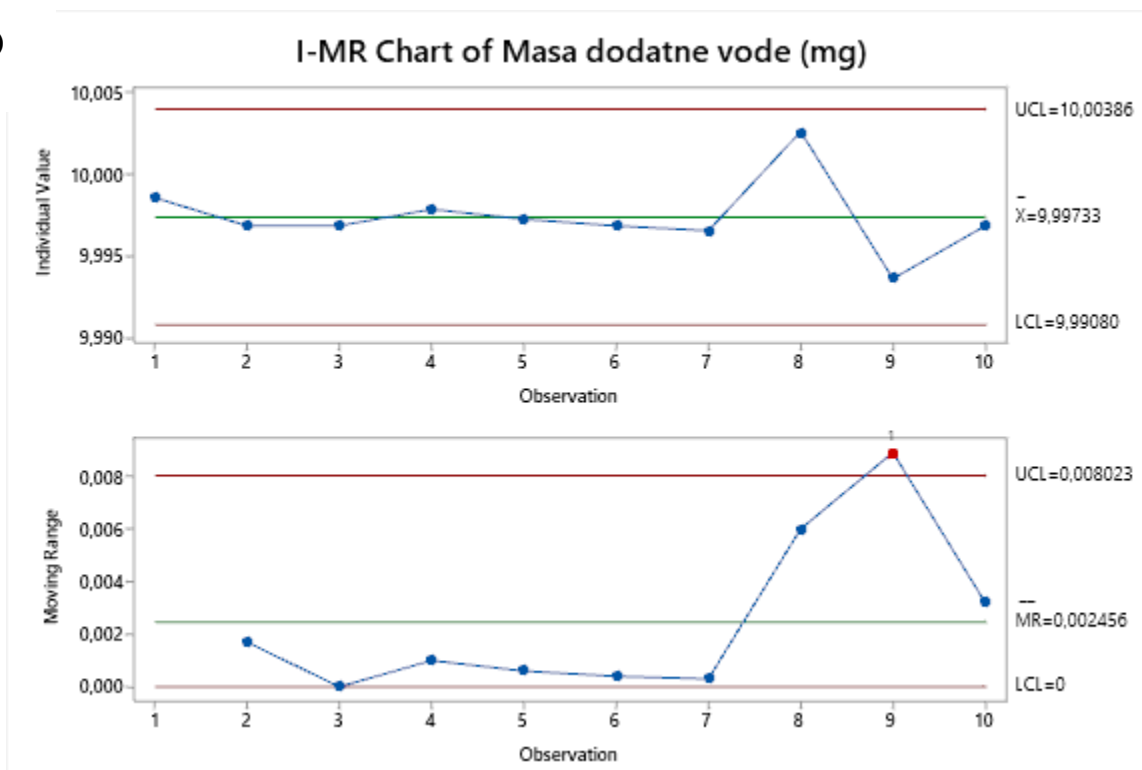
Slika 19. I-MR karta – odstupanje temperature

Slika 19. opisuje odstupanje mjerene temperature inkubatora od prikazane temperature na displeju i bez obzira na odstupanja vidimo da je sustav stabilan odnosno da su odstupanja u unutar kontrolnih granica.

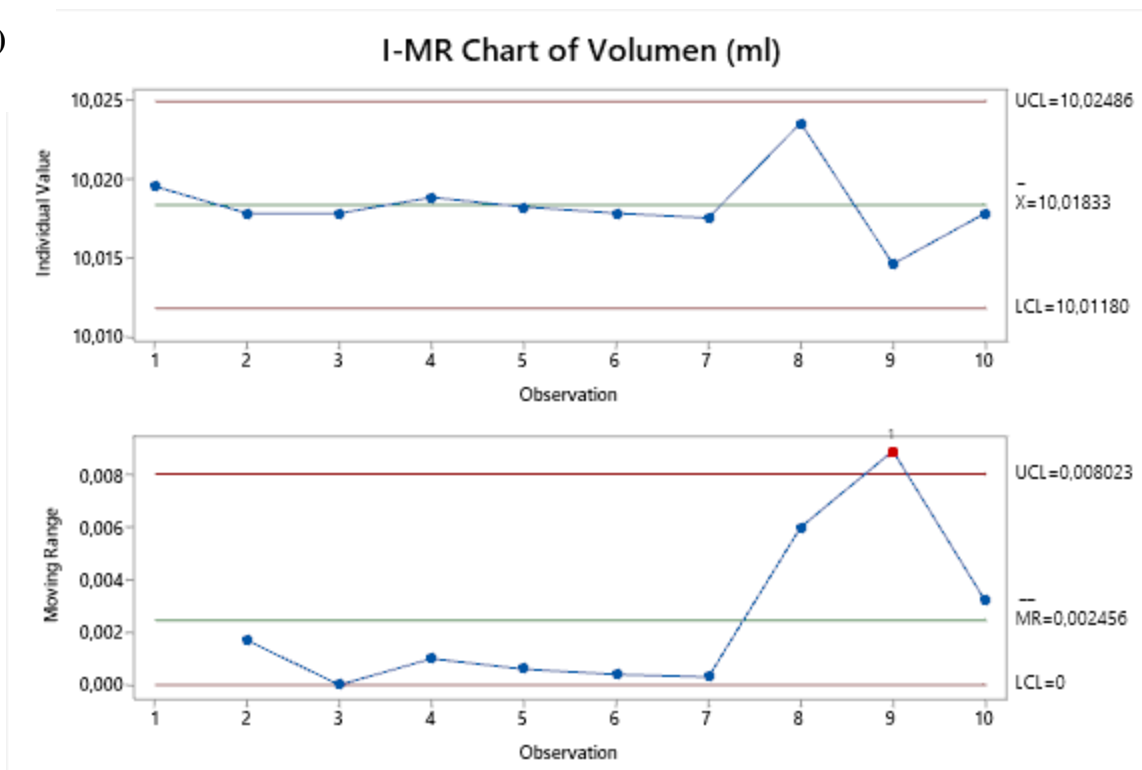
PROVJERA VOLUMETRIJSKE OPREME						
Naziv opreme: klipna pipeta, br. 168						
Kriterij prihvatljivosti (točnost) = $\pm 0,6\%$,						
Kriterij prihvatljivosti (ponovljivost) = $\pm 0,3\%$, (0,03ml)						
Broj mjerenja	Volumen očitani s pipete (ml)	Masa dodane vode (mg)	Temp. vode (°C)	Gustoća vode pri 24,5°C (g/cm ³)	Volumen (ml)	Odstupanje (ml)
1	10	9,9985	22,4	0,9979	10,0195	0,0195
2	10	9,9968	22,4	0,9979	10,0178	0,0178
3	10	9,9968	22,4	0,9979	10,0178	0,0178
4	10	9,9978	22,4	0,9979	10,0188	0,0188
5	10	9,9972	22,4	0,9979	10,0182	0,0182
6	10	9,9968	22,4	0,9979	10,0178	0,0178
7	10	9,9965	22,4	0,9979	10,0175	0,0175
8	10	10,0025	22,4	0,9979	10,0235	0,0235
9	10	9,9936	22,4	0,9979	10,0146	0,0146
10	10	9,9968	22,4	0,9979	10,0178	0,0178
Srednje odstupanje (ml) =						0,0184
st.dev. Srednjeg odstupanja (%) =						0,0221
Srednja vrijednost dodanog volumena (ml) =						10,0184
točnost klipne pipete (%) =						-0,18
Klipna pipeta zadovoljava postavljene kriterij prihvatljivosti za točnost i ponovljivost.						
Kriterij prihvatljivosti preuzeti su iz: Qualification of Equipment Annex 6: Qualification of piston pipettes PA/PH/OMCL (09) 64 2R (2010), OMCL Network/EDQM of the Council of Europe						
Provjeru napravio: Mario Anđić						
Datum: 15.05.2017.						

Slika 20. Provjera volumetrijske opreme [12]

a)



b)



Slika 21

a) *I-MR* karta – Masa dodatne vodeb) *I-MR* karta – Volumena vode

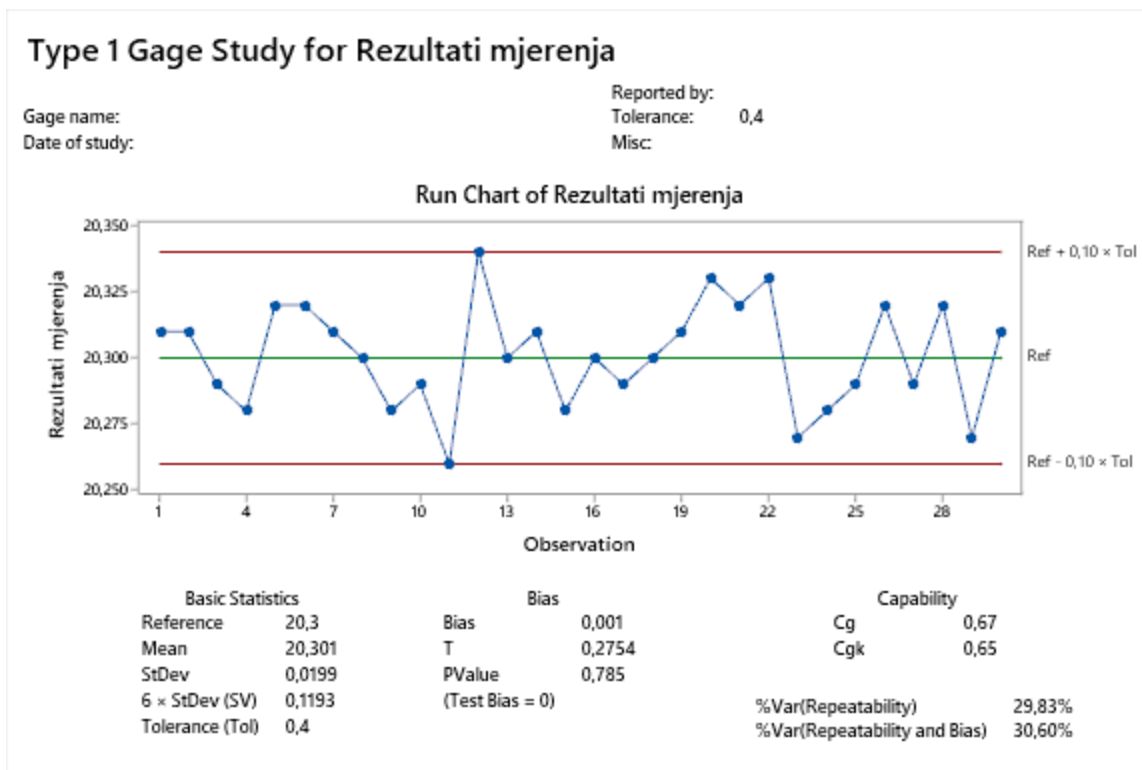
Slika 21. a) i b) prikazuje *I-MR* kontrolne karte koje imaju odstupanje na istom mjerenju i prikazuje nam da sustav nije stabilan.

5.1. Analiza mjernog sustava – TIP 1

Provedeno je mjerenje promjera prstena $D = 20,30 \text{ mm} \pm 0,40 \text{ mm}$. Mjerenja su provedena od strane jednog mjeritelja uz $n = 30$ ponavljanja. Rezultati mjerenja prikazani su u Tablici 22. Na osnovi indeksa sposobnosti procijeniti sposobnost mjernog sustava ako referentna vrijednost iznosi 20,300 mm.

Tablica 22. Promjer prstena

Rezultati mjerenja, mm					
20,31	20,31	20,31	20,31	20,31	20,31
20,31	20,31	20,31	20,31	20,31	20,31
20,29	20,29	20,29	20,29	20,29	20,29
20,28	20,28	20,28	20,28	20,28	20,28
20,32	20,32	20,32	20,32	20,32	20,32



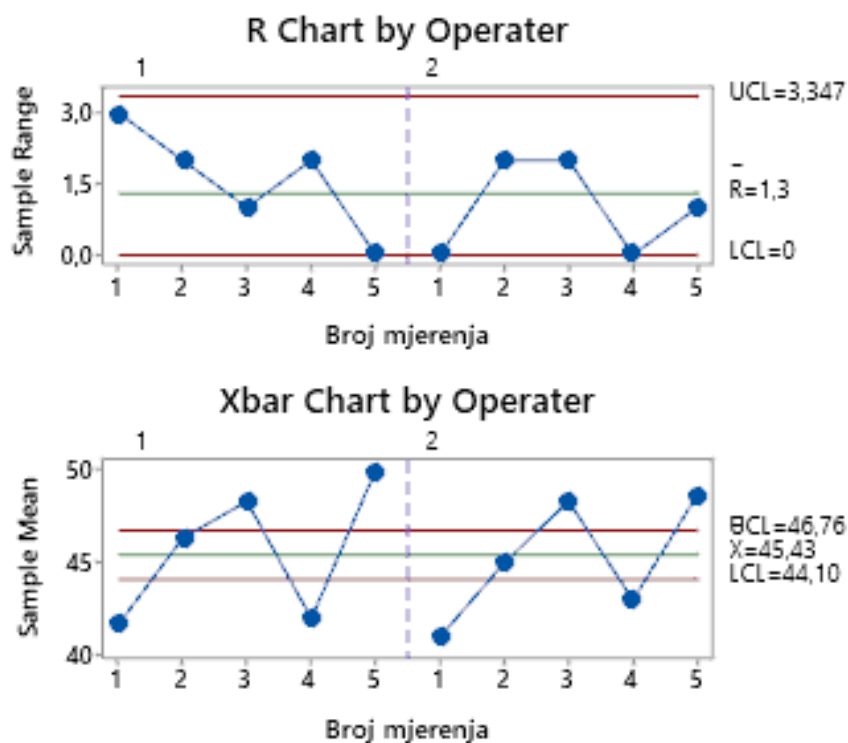
Slika 22. TIP 1 analiza promjera prstena

Prikazan je graf rezultata mjerenja ovisno o broju mjerenja (Slika 22.) te su ispisane sve osnovne statističke vrijednosti i indeksi sposobnosti procesa. Također prema grafu vidimo da je sustav pod kontrolom.

5.2. Primjena kontrolnih karata u analizi mjernog sustava – R&R

Kontrolne karte se primjenjuju i u analizi ponovljivosti i obnovljivosti mjernog sustava (R&R). Prije procjene sposobnosti mjernog sustava potrebno je utvrditi je li sustav dovoljno osjetljiv da raspozna dijelove i postoji li statistički značajna razlika između mjeritelja.

\bar{x} – kontrolnom kartom ispituje se osjetljivost mjernog sustava za prepoznavanje razlike između predmeta mjerenja, a R – kontrolnom kartom se analizira postoji li statistički značajna razlika između rezultata mjeritelja. Na slici 23. prikazane su \bar{x} kontrolna karta i R kontrolna karta u procesu mjerenja pet dijelova od strane dva mjeritelja.



Slika 23. R i \bar{x} kontrolna karta u analizi ponovljivosti i obnovljivosti rezultata mjerenja

Kako bi se utvrdilo postoji li statistički značajna razlika između mjeritelja, korištena je R karta. S obzirom na to da su sve vrijednosti unutar kontrolnih granica, može se zaključiti da ne postoji statistički značajna razlika između mjeritelja. Kod \bar{x} karte više od pedeset posto vrijednosti nalazi se izvan kontrolnih granica, što znači da je sustav dovoljno osjetljiv da prepoznaje dijelove.

6. TABLICA KONTROLNIH KARATA

U ovom poglavlju je dana tablica svih obrađenih kontrolnih karata u radu s njihovim formulama i naputkom kada se koriste na jednom mjestu kao brzinski podsjetnik najvažnijih stvari.

Tablica 23. Tablica kontrolnih karata s formulama

KONTROLNA KARTA	FORMULE	UPORABA
\bar{x} -R	$UCL = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$ $CL = \bar{\bar{x}}$ $LCL = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$ $d_2 = konst.$ $R = x_{\max} - x_{\min}$ $UCL = D_4\bar{R}$ $CL = \bar{R}$ $LCL = D_3\bar{R}$	<p>Za kontinuirane podatke, kada su veličine uzorka male (2-10)</p>
\bar{x} -s	$UCL = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{c_2\sqrt{n}}\bar{s}$ $CL = \bar{\bar{x}}$ $LCL = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{c_2\sqrt{n}}\bar{s}$ $\bar{s} = \frac{\sum s_i}{k}$	<p>Kada su veličine uzorka veće od 10</p>
I-MR	$UCL = \bar{\bar{x}} + E_2\overline{MR}$ $CL = \bar{\bar{x}}$	<p>Kada se mjerenja provode pojedinačno</p>

	$LCL = \bar{x} - E_2 \overline{MR}$ $UCL = D_4 \overline{MR}$ $CL = \overline{MR}$ $LCL = D_3 \overline{MR}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$ $\overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i - x_{i-1} }{k - 1}$ $E_2 = konst.$	
Z-MR	$UCL = \bar{x} + E_2 \overline{ZR} = 3$ $CL = \bar{x} = 0$ $LCL = \bar{x} - E_2 \overline{ZR} = 3$ $UCL = D_4 \overline{MR}$ $CL = \overline{MR}$ $LCL = D_3 \overline{MR}$	Kada su podatci iz različitih procesa ili imaju različite mjerene jedinice
p	$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$ ${}^U_L CL_p = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{\bar{n}}}$	Kada veličina uzorka varira
c	$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}$ ${}^U_L CL_c = \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}}$ $k = konst.$	Kada je veličina uzorka fiksna

$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$ ${}^U_L CL_u = \bar{u} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$	<p>Kada se kontrolira varijabilna količina proizvoda</p>
<p>EWMA</p>	$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$ $CL = \mu_0$ $LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$ <p>Kada želimo otkriti male promjene u procesu na temelju prošlih podataka</p>
<p>CUSUM</p>	$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$ $C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$ $K = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{ \mu_1 - \mu_0 }{2}$ <p>Kada želimo brzo detektirati male, postupne promjene u procesu</p>
<p>Hotelling T²</p>	<p>Podgrupe:</p> $T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}})$ $UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1}$ $LCL=0$ $UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1}$ $LCL=0$ <p>Individualni podatci:</p> $T^2 = n(x - \bar{x})' S^{-1} (x - \bar{x})$ $UCL = \frac{(m-1)^2}{m} B_{\alpha, p+2, \frac{Q-p-1}{2}}$ <p>Kada se prati više povezanih karakteristika proizvoda ili procesa</p>

	$LCL=0$ $UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1}$ $LCL=0$	
--	--	--

7. ZAKLJUČAK

Kontrolne karte ključan su alat u statističkoj kontroli procesa jer omogućuju praćenje stabilnosti i predvidljivosti procesa kroz vrijeme. Primjena kontrolnih karata ovisi o vrsti podataka koji se analiziraju i ciljevima analize. Kontrolne karte omogućuju rano otkrivanje sustavnih pomaka te brzu reakciju u sprječavanju pojave značajnih odstupanja. Njihova široka primjena je u poboljšavanju kvalitete procesa na osnovi smanjenja varijacija procesa i otklanjanja značajnih odstupanja u procesu. Primjenjuju se za utvrđivanje centriranosti i rasipanja procesa, a ovisno o vrsti kontrolne karte omogućuju praćenje kvalitete procesa na osnovi kontinuiranih ili atributivnih podataka. Klasične Shewhartove karte idealne su za brze vizualne kontrole procesa, dok su suvremene karte (CUSUM, EWMA, Hotelling T^2) korisne za brzo otkrivanje malih promjena i praćenje više povezanih varijabli.

Značajna primjena kontrolnih karata je u gotovo svim procesima od industrijskih, ekonomskih, financijskih, zdravstvenih do laboratorijskih ispitivanja. U laboratoriju se koriste u cilju utvrđivanja preciznosti (ponovljivosti i obnovljivosti) i točnosti rezultata mjerenja te validacije i verifikacije primijenjenih metoda. Kontrolne karte osiguravaju konzistentnost rezultata u laboratorijima i medicinskim analizama.

Integracija kontrolnih karata u sustav upravljanja kvalitetom omogućuje kontinuirano poboljšavanje i optimizaciju procesa.

LITERATURA

- [1] Minitab support <https://support.minitab.com/en-us/minitab/help-and-how-to/quality-and-process-improvement/control-charts/supporting-topics/basics/understanding-control-charts/> (pristupljeno 17. 12. 2024)
- [2] B. Runje: Osnove osiguravanja kvalitete, materijali s predavanja, FSB (pristupljeno 17. 12. 2024)
- [3] D. C. Montgomery, Statistical Quality Control, Phoenix: John Wiley & Sons, Inc., 2012. (pristupljeno 17. 12. 2024)
- [4] D. Horvat, A. Eđed, Đ. Banaj: Statistička kontrola procesa i proizvoda u poljoprivredi, stručni članak (pristupljeno 17. 12. 2024)
- [5] \bar{x} and s chart https://en.wikipedia.org/wiki/X%CC%85_and_s_chart (pristupljeno 30. 12. 2024)
- [6] I-MR chart <https://sixsigmastudyguide.com/i-mr-chart/> (pristupljeno 10. 1. 2025)
- [7] p chart <https://sixsigmastudyguide.com/p-attribute-charts/> (pristupljeno 12. 1. 2025)
- [8] c chart <https://sixsigmastudyguide.com/attribute-chart-c-chart/> (pristupljeno 13. 1. 2025)
- [9] u chart <https://sixsigmastudyguide.com/attribute-chart-u-chart/> (pristupljeno 14. 1. 2025)
- [10] EWMA chart <https://sixsigmastudyguide.com/ewma-exponentially-weighted-moving-average-chart/> (pristupljeno 17. 1. 2025)
- [11] CUSUM chart <https://sixsigmastudyguide.com/cumulative-sum-chart-cusum/> (pristupljeno 19. 1. 2025)
- [12] CROLAB Kontrolne karte 2021-05-24 III-blok Mario Ančić