

# Proračun čvrstoće vertikalnog nadzemnog spremnika s fiksnim krovom

---

**Ban, Petar**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2025**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:357718>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Petar Ban**

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Petar Ban

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Skozritu na svim savjetima, usmjeravanju i pruženoj pomoći tokom pisanja ovog rada.

Posebno se zahvaljujem svojoj obitelji koja mi je omogućila studiranje i pružila potporu tokom studija.

Petar Ban



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomске ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomске ispite studija strojarstva za smjerove:  
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Petar Ban** JMBAG: **0035236713**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun čvrstoće vertikalnog nadzemnog spremnika s fiksnim krovom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Strength calculation of a vertical above-ground tank with a fixed roof**

Opis zadatka:

Vertikalni nadzemni spremnici imaju ključnu ulogu u naftnoj industriji jer omogućuju sigurno skladištenje sirove nafte, rafiniranih proizvoda te se koriste za razne korozivne i nekorozivne medije. Spremnici su uglavnom izrađeni od čelika, cilindričnog oblika kojim osiguravaju maksimalni volumen skladištenja na minimalnoj površini tla. Mogu biti opremljeni fiksnim ili plutajućim krovovima čija je funkcija osiguravanje kvaliteta proizvoda i kontrolira isparavanje.

Koristeći zadane podatke o konstrukciji, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima vertikalnog spremnika potrebno je provjeriti da li spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće, tj. izvršiti kontrolni proračun spremnika. Proračun je potrebno provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom proračunskog paketa koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristite dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

*Skozrit Ivica*

Datum predaje rada:

1. rok: 20. i 21. 2. 2025.  
2. rok: 10. i 11. 7. 2025.  
3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025.  
2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025.  
3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

*V Soldo*

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	VI
POPIS OZNAKA .....	VII
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. UVOD.....	1
1.1. Opis spremnika i analiza dimenzija .....	2
2. Analitički proračun .....	5
2.1. Uvod u teoriju ljsaka [6] .....	5
2.2. Uvod u savijanje tankih kružnih ploča.....	6
2.3. Proračun .....	6
2.3.1. Provjera uvjeta duge ljske za presjek I-I ( $0 < x < h_N$ ).....	7
2.3.2. Rubni uvjeti, poopćene sile i pomaci za presjek I-I.....	8
2.3.3. Cilindrična ljska .....	9
2.3.4. Tanka kružna ploča .....	10
2.4. Izrazi i raspodjela veličina po konturi posude .....	11
2.4.1. Cilindrična ljska presjek I-I .....	11
2.4.2. Tanka kružna ploča .....	14
2.5. Ekvivalentna naprezanja .....	15
3. Verifikacija konačnih elemenata .....	19
3.1. Uvodno o metodi konačnih elemenata i Abaqusu® .....	19
3.2. Pregled tipova konačnih elemenata [7].....	19
3.3. Konačni elementi za verifikaciju .....	20
3.3.1. Osnosimetrični elementi .....	20
3.3.2. Ljuskasti elementi .....	21
3.4. Verifikacija konačnih elemenata.....	22
3.4.1. Numerička analiza osnosimetričnim konačnim elementima .....	22
3.4.1.1. Numerička analiza pomoću CAX4 .....	24
3.4.1.2. Numerička analiza pomoću CAX8 .....	33

---

3.4.2. Numerička analiza pomoću ljuskastog elementa .....	37
3.4.2.1. Numerička analiza pomoću S4 .....	37
4. Numerički proračun realnog spremnika .....	45
4.1. Opterećenja realnog modela.....	45
4.2. Proračun realnog spremnika.....	48
4.3. Prikaz deformacija spremnika.....	58
4.4. Provjera čvrstoće.....	60
5. Zaključak .....	61
LITERATURA.....	63

---

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Spremnici s plutajućim krovom [1].....	1
Slika 2.	Spremnik s konusnim dnom [2] .....	1
Slika 3.	Primjer vertikalnog spremnika za proračun [3].....	2
Slika 4.	Skica vertikalnog spremnika za numerički proračun .....	3
Slika 5.	Skica umanjenog modela za analitički proračun .....	4
Slika 6.	Ljuskasti kontinuum [6] .....	5
Slika 7.	Raspodjela naprezanja po debljini ljuske [6] .....	5
Slika 8.	Podjela naprezanja tanke ljuske [6].....	6
Slika 9.	Ucertani presjeci za analitički proračun .....	7
Slika 10.	Prikaz poopćenih pomaka .....	8
Slika 11.	Smjerovi poopćenih sila .....	8
Slika 12.	Presjek I-I i opterećenje ljuske .....	9
Slika 13.	Opterećena tanka kružna ploča [8].....	10
Slika 14.	Radijalni pomak duž meridijana cilindrične ljuske .....	12
Slika 15.	Kut zakreta duž meridijana cilindrične ljuske .....	12
Slika 16.	Ukupna cirkularna sila duž meridijana cilindrične ljuske .....	13
Slika 17.	Meridijalni moment savijanja duž meridijana cilindrične ljuske .....	13
Slika 18.	Radijalni pomak duž radijalne osi ploče .....	14
Slika 19.	Kut zakreta duž radijalne osi ploče .....	14
Slika 20.	Radijalni i cirkularni moment po polumjeru tanke kružne ploče .....	17
Slika 21.	Konačni elementi prvog reda (lijevo) i konačni elementi drugog reda (desno) [9] .....	20
Slika 22.	CAX4 četverokutni konačni element [10].....	21
Slika 23.	CAX8 četverokutni konačni element [10].....	21
Slika 24.	S4 četverokutni ljuskasti konačni element [10] .....	22
Slika 25.	Opterećenja i rubni uvjeti modela .....	23
Slika 26.	Mreža sa 73 CAX4 konačnih elemenata u 2D prikazu s uvećanim detaljem A ...	24
Slika 27.	Mreža sa 73 CAX4 konačnih elemenata .....	25
Slika 28.	Naprezanja na modelu s 73 CAX4 elementa u Pa.....	26
Slika 29.	Uvećani detalj A naprezanja prema Misses-u u Pa .....	26
Slika 30.	Radijalni pomak na detalju A prikazan mrežom s 73 CAX4 elementa u m .....	27



Slika 31.	Mreža sa 132 CAX4 konačnih elemenata i detalj A u 2D .....	28
Slika 32.	Ekvivalentno naprezanja na mreži s 132 CAX4 elementa, detalj A u Pa .....	29
Slika 33.	Radijalni pomak na mreži s 132 CAX4 elementa, detalj A u m .....	29
Slika 34.	Ekvivalentno naprezanja na mreži s 465 CAX4 elementa, detalj A u Pa .....	30
Slika 35.	Radijalni pomak na mreži s 465 CAX4 elementa, detalj A u m .....	30
Slika 36.	Konvergenција ekvivalentnog naprezanja prema broju CAX4 konačnih elemenata .....	31
Slika 37.	Konvergenција pomaka prema broju CAX4 konačnih elemenata .....	32
Slika 38.	Konvergenција pomaka prema broju CAX4 konačnih elemenata bez početne mreže .....	32
Slika 39.	Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 68 CAX8 elemenata u Pa .....	33
Slika 40.	Radijalni pomak na mreži sa 68 CAX8 elementa u m .....	33
Slika 41.	Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 124 CAX8 elemenata u Pa .....	34
Slika 42.	Radijalni pomak na mreži sa 124 CAX8 elementa u m .....	34
Slika 43.	Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 462 CAX8 elemenata u Pa .....	35
Slika 44.	Radijalni pomak na mreži sa 462 CAX8 elementa u m .....	35
Slika 45.	Konvergenција ekvivalentnog naprezanja prema broju elemenata .....	36
Slika 46.	Konvergenција radijalnog pomaka prema broju CAX8 konačnih elemenata .....	36
Slika 47.	Rubni uvjeti ljuskastog modela .....	37
Slika 48.	Mreža sa 66 S4 konačnih elemenata .....	38
Slika 49.	Uvećani detalj grube aproksimacije .....	38
Slika 50.	Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 66 S4 elemenata u Pa .....	39
Slika 51.	Radijalni pomak na mreži sa 66 S4 elemenata u m .....	39
Slika 52.	Zakret na mreži sa 66 S4 elemenata u rad .....	39
Slika 53.	Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 157 S4 elemenata u Pa .....	40
Slika 54.	Radijalni pomak na mreži sa 157 S4 elemenata u m .....	40
Slika 55.	Zakret na mreži sa 157 S4 elemenata u rad .....	41
Slika 56.	Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 496 S4 elemenata u Pa .....	41
Slika 57.	Radijalni pomak na mreži sa 496 S4 elemenata u m .....	42
Slika 58.	Zakret na mreži sa 496 S4 elemenata u rad .....	42
Slika 59.	Konvergenција ekvivalentnog naprezanja prema broju elemenata .....	43
Slika 60.	Konvergenција radijalnog pomaka prema broju elemenata .....	43
Slika 61.	Konvergenција kuta zakreta prema broju elemenata .....	44

Slika 62.	Opterećenja realnog modela .....	48
Slika 63.	Ekvivalentno naprezanje na mreži s 819 CAX8 elemenata u Pa .....	49
Slika 64.	Radijalni pomak na mreži s 819 CAX8 elemenata u m .....	49
Slika 65.	Uvećani detalj naprezanja krova .....	50
Slika 66.	Uvećani detalj naprezanja tanke kružne ploče .....	50
Slika 67.	Uvećan detalj pomaka krova .....	50
Slika 68.	Uvećan detalj pomaka tanke kružne ploče .....	50
Slika 69.	Ekvivalentno naprezanje na mreži s 1627 CAX8 elemenata u Pa .....	51
Slika 70.	Ekvivalentno naprezanje na mreži s 1627 CAX8 elemenata bez rubova u Pa.....	51
Slika 71.	Uvećani detalj naprezanja krova .....	52
Slika 72.	Uvećani detalj naprezanja tanke kružne ploče .....	52
Slika 73.	Uvećan detalj pomaka krova .....	52
Slika 74.	Uvećan detalj pomaka tanke kružne ploče .....	52
Slika 75.	Uvećani detalj naprezanja krova .....	53
Slika 76.	Uvećani detalj naprezanja tanke kružne ploče .....	53
Slika 77.	Uvećan detalj pomaka krova .....	53
Slika 78.	Uvećan detalj pomaka tanke kružne ploče .....	53
Slika 79.	Uvećani detalj naprezanja krova na mreži s 8122 CAX8 elemenata u Pa .....	55
Slika 80.	Uvećani detalj naprezanja dna na mreži s 8122 CAX8 elemenata u Pa.....	55
Slika 81.	Uvećani detalj radijalnog pomaka krova na mreži s 8122 CAX8 elemenata u m.	55
Slika 82.	Uvećani detalj radijalnog pomaka dna na mreži s 8122 CAX8 elemenata u m....	56
Slika 83.	Konvergencija ekvivalentnog naprezanja prema broju konačnih elemenata .....	57
Slika 84.	Konvergencija maksimalnog radijalnog pomaka prema broju konačnih elemenata .....	57
Slika 85.	Konvergencija radijalnog pomaka tanke kružne ploče prema broju konačnih elemenata.....	57
Slika 86.	Prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja krova i ljske	58
Slika 87.	Uvećani prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja krova i ljske .....	59
Slika 88.	Prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja ploče i krova .	59
Slika 89.	Uvećani prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja krova i ljske .....	60

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Dimenzije i materijali modela [4] [5].....	3
Tablica 2. Vrijednosti potrebne za analitički proračun .....	4
Tablica 3. Najveće odabrane vrijednosti ukupne cirkularne sile u cilindru .....	16
Tablica 4. Najveće odabrane vrijednosti meridijalnog momenta savijanja cilindra .....	16
Tablica 5. Iznosi meridijalnih i cirkularnih naprezanja cilindra .....	16
Tablica 6. Iznosi radijalnog i cirkularnog momenta savijanja u ploči .....	18
Tablica 7. Iznosi radijalnog i cirkularnog naprezanja u ploči .....	18
Tablica 8. Relativna greška mreže sa 73 CAX4 elementa .....	27
Tablica 9. Relativna greška mreže sa 132 CAX4 elementa .....	30
Tablica 10. Relativna greška mreže sa 465 CAX4 elementa .....	31
Tablica 11. Relativna greška mreže sa 68 CAX8 elementa .....	34
Tablica 12. Relativna greška mreže sa 124 CAX8 elementa .....	35
Tablica 13. Relativna greška mreže sa 462 CAX8 elementa .....	36
Tablica 14. Relativna greška mreže sa 66 S4 elementa .....	40
Tablica 15. Relativna greška mreže sa 157 S4 elementa .....	41
Tablica 16. Relativna greška mreže sa 496 S4 elementa .....	42
Tablica 17. Masa krova, cilindrične ljuske i dna.....	45
Tablica 18. Vrijednosti iščitane iz numeričkog proračuna.....	54
Tablica 19. Relativna razlika mreža .....	54
Tablica 20. Vrijednosti očitane iz numeričkog proračuna i relativna razlika .....	56

---

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$A_{\text{ref}}$	$\text{m}^2$	Površina cilindra pod utjecajem vjetra
$C_e$		Faktor topografije
$C_t$		Termalni faktor
$c_r$		Faktor hrapavosti
$c_f$		Faktor sile
$D^C$	Nm	Fleksijska krutost cilindra
$D^P$	Nm	Fleksijska krutost ploče
$d^c$	m	Unutarnji promjer cilindra
$E$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Modul elastičnosti
$F_W$	N	Ukupna sila vjetra
$f_1, f_2, f_3, f_4$		Eksponencijalno-trigonometrijske funkcije
$G$	N	Težina fluida
$g$	$\text{m}/\text{s}^2$	Ubrzanje sile teže
$h_c, h_N, h_k$	m	Visina cilindra, nafte u cilindru, konusa
$I_V$		Intenzitet turbulencije
$k_r$		Faktor terena
$M_0$	Nm	Poopćeni moment savijanja
$M_g$	$\text{Nm}/\text{m}$	Meridijalni moment savijanja
$M_\varphi$	$\text{Nm}/\text{m}$	Cirkularni moment savijanja
$N_g$	$\text{N}/\text{m}$	Meridijalna sila
$N_\varphi$	$\text{N}/\text{m}$	Cirkularna sila
$N_\varphi^C$	$\text{N}/\text{m}$	Ukupna cirkularna sila
$p$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Tlak
$p_h$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Hidrostatski tlak
$Q_0$	$\text{N}/\text{m}$	Poopćena sila
$q_b$	$\text{N}/\text{m}^2$	Osnovni tlak brzine

$q_p$	$N/m^2$	Maksimalni tlak brzine
$R_c$	m	Unutarnji polumjer cilindra
$R_{p0,2}$	$N/mm^2$	Granica tečenja materijala
$r_1$	m	Meridijalni glavni polumjer zakrivljenosti
$r_2$	m	Cirkularni glavni polumjer zakrivljenosti
$s$	$N/m^2$	Efektivna vrijednost opterećenja snijega
$s_k$	$N/m^2$	Karakteristična vrijednost opterećenja snijega
$t_c, t_k, t_d$	m	Debljina presjeka cilindra, konusa, dna/kružne ploče
$u_r^P, u_r^C$	m	Radijalni pomaci ploče, cilindra
$u_r^{mC}$	m	Membranski radijalni pomaka
$V_{max}, V_{isk}$	$m^3$	Volumen maksimalni, iskoristivi
$v_b$	m/s	Osnovna brzina vjetra
$v_m$	m/s	Srednja brzina vjetra
$w_{ef}$	$N/m^2$	Efektivni pritisak vjetra
$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$	$(N/mm^2)^{-1},$ $(N/mm)^{-1}, N^{-1}$	Uplivni koeficijenti
$\alpha^C, \alpha^P$	rad	Kut zakreta cilindra, ploče
$\alpha^{mC}$	rad	Membranski kut zakreta
$\beta^c$	$m^{-1}$	Geometrijsko-materijalna značajka cilindra
$\lambda$		Efektivna vitkost
$\mu_i$		Faktor oblika krova
$\vartheta$	0	Kut konusne stijenske
$\nu$		Poissonov faktor
$\rho_N$	$kg/m^3$	Gustoća nafte
$\sigma_g^{max}$	$N/mm^2$	Maksimalno meridijalno naprezanje
$\sigma_\varphi^{max}$	$N/mm^2$	Maksimalno cirkularno naprezanje
$\sigma_r^{max}$	$N/mm^2$	Maksimalno radijalno naprezanje
$\sigma_{ekv}$	$N/mm^2$	Ekvivalentno naprezanje

---

## SAŽETAK

Tema ovog završnog rada je proračun čvrstoće vertikalnog nadzemnog spremnika koji služi za skladištenje nafte pod utjecajem realnih vanjskih uvjeta. Najprije je dan kratki pregled vertikalnih spremnika i njihove mnogobrojne primjene te uvid u konstrukciju koja je analizirana, njene dimenzije i opterećenja. Radi verifikacije konačnih elemenata analizirala se umanjena konstrukcija zbog kompleksnosti analitičkog proračuna primarne konstrukcije. Analitički proračun proveden je uz primjenu teorije ljusaka, a isti je proračunat numerički koristeći programski paket ABAQUS® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Numerički proračun manjeg modela proveden je s tri različita konačna elementa kako bih se ustanovio optimalni izbor konačnih elemenata za zadana opterećenja. Nakon odabira konačnog elementa koji najbolje opisuje spremnik i njegova opterećenja dan je uvid u realna opterećenja izazvana vanjskim čimbenicima kojima je spremnik podvrgnut. Na posljétku je provedena numerička analiza s više različitih mreža konačnih elemenata različite gustoće kako bih se dokazalo da rješenja numeričkog modela konvergiraju. Konačno, prikazane su deformacije konstrukcije te provjera čvrstoće realnog spremnika.

Ključne riječi: teorija ljusaka, metoda konačnih elemenata, ABAQUS®, osnosimetrični konačni elementi, ljuskasti konačni elementi, vertikalni spremnik

---

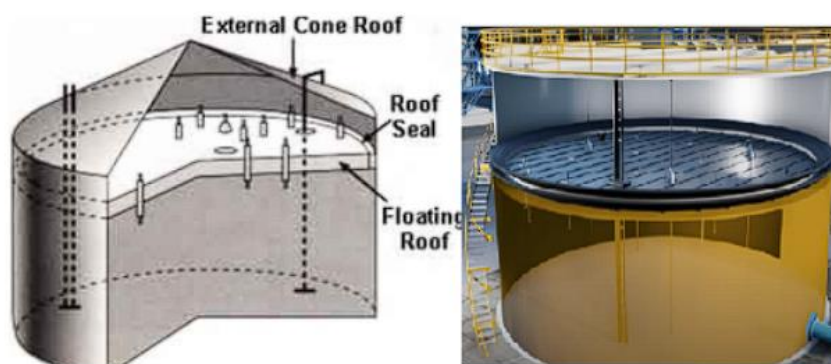
## SUMMARY

The topic of this final paper is the strength calculation of a vertical above-ground tank used for oil storage under real external conditions. First, a brief overview of vertical tanks and their numerous applications is provided, along with an introduction to the analyzed structure, its dimensions and loading conditions. Due to the complexity of the analytical calculation of the primary structure, a scaled-down model was analyzed for the verification of finite elements. The analytical calculation was conducted using shell theory and the same model was numerically calculated using the ABAQUS® software package, which is based on the finite element method. The numerical analysis of the scaled-down model was carried out using three different finite elements to determine the optimal choice for the given loads. After selecting the finite element that best describes the tank and its loads, an overview of the real external loads affecting the tank was provided. Towards the end, a numerical analysis was carried out using multiple finite element meshes of varying densities to demonstrate the convergence of the numerical model's solutions. Finally, the deformations of the structure and the strength verification of the real tank are presented.

**Keywords:** shell theory, finite element method, ABAQUS®, axisymmetric finite elements, shell finite elements, vertical tank

## 1. UVOD

Vertikalni spremnici, kao i horizontalni spremnici, pronalaze primjenu u raznim industrijama zbog mogućnosti oblikovanja i optimizacije svog oblika s obzirom na tvar koju skladište i namjenu. Spremnici su u pravilu cilindričnog oblika te su najčešće izrađeni od čelika ili sličnog materijala koji im omogućuje ne samo pohranu raznih korozivnih i nekorozivnih medija već i otpornost na razne nepovoljne vanjske čimbenike. Radi zadovoljavanja ekoloških i protupožarnih mjera sigurnosti spremnici su opremljeni raznim krovovima. Razlikuju se izvedbe spremnika prema obliku vrha ili krova i obliku dna. Prema obliku krova dijele se na otvorene i zatvorene pri čemu se zatvoreni dodatno dijele na fiksne krovove varirajućih oblika i plutajuće krovove. Prema obliku dna postoje spremnici s ravnim dnom, zaobljenim i konusnim dnom. Kao primjer slika 1. prikazuje spremnik sa zatvorenim plutajućim krovom koji se kreće s visinom tekućine u spremniku, a slika 2. prikazuje spremnik s konusnim dnom koji olakšava potpuno pražnjenje spremnika.



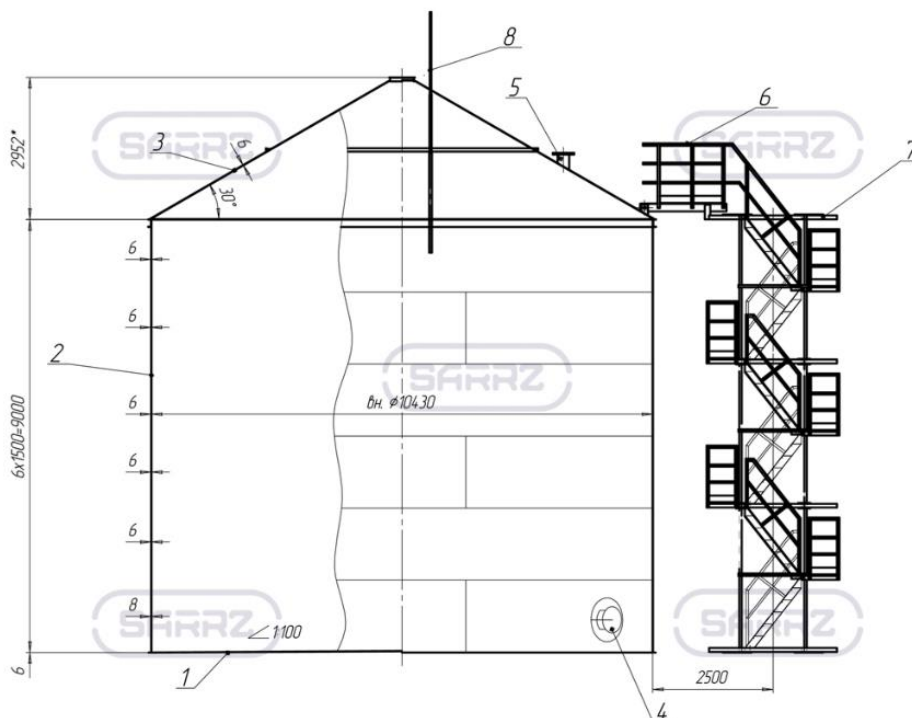
Slika 1. Spremnici s plutajućim krovom [1]



Slika 2. Spremnik s konusnim dnom [2]



U ovom radu proveden je proračun čvrstoće vertikalnog nadzemnog spremnika s fiksnim krovom. Takvi spremnici namijenjeni su za efektivno skladištenje, utovar i istovar primarno tekućih proizvoda, u ovom slučaju nafte i naftnih derivata. Svrha fiksnih krovova je sprječavanje isparivanja zapaljivih štetnih čestica u okoliš regulirajući pritisak u spremniku koristeći ventil. Time postaju osnovni element mnogih industrija kao što su: kemijska, prehrambena, naftna, poljoprivredna i mnoge druge. Slika 3. prikazuje primjer vertikalnog spremnika za skladištenje nafte i naftnih derivata.



Slika 3. Primjer vertikalnog spremnika za proračun [3]

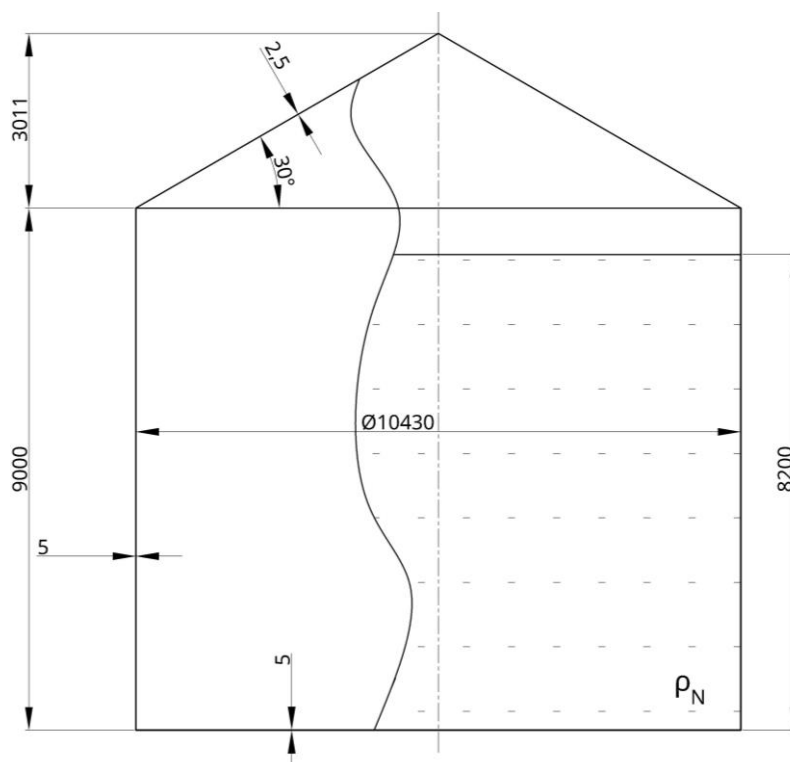
### 1.1. Opis spremnika i analiza dimenzija

Vertikalni spremnici kao sa slike 3. mogu biti zatvoreni okvirnim i bez okvirnim krovovima. Okvirni krovovi koriste se za spremnike sa zapremninom većom od  $5000 \text{ m}^3$  jer mogu podnijeti veće dinamičko opterećenje te se koriste kao mjera opreza od eksplozije pri povećanju tlaka. U ovom radu analiziran je manji spremnik stoga je iskorišten bezokvirni konični krov, svojim oblikom podržava sam sebe, koji se koristi na spremnicima sa zapremninom do  $1000 \text{ m}^3$ . Kut konusa izabire se proizvoljno, između 15 i 30 stupnjeva. Cilindrični dio sastoji se od više cilindara pri čemu je zadnji cilindar ojačan. U svrhu pojednostavljenja debljina svakog cilindra biti će jednaka i iznosi 5 mm, kao i debljina dna, tanke kružne ploče. Materijal korišten u analizi spremnika je čelik S355JR. Izabran je na temelju tvari koja se skladišti, nafta ili naftni derivati, vanjskih čimbenika i propisanih standarda. Zbog istih razloga maksimalni iskorišteni kapacitet

spremnika je 90 % - 95 % ukupnog kapaciteta spremnika. Radi lakšeg pregleda tablica 1. prikazuje dimenzije i osnovne podatke o izabranom materijalu te gustoću nafte za numerički proračun realnog modela, a slika 4. prikazuje pojednostavljeni model spremnika s kotiranim dimenzijama iz tablice 1. Kako je spremnik položen na betonsko postolje omogućeno kretanje tanke kružne ploče na dnu, a tako i spoja sa cilindričnom ljuskom, je radijalni pomak.

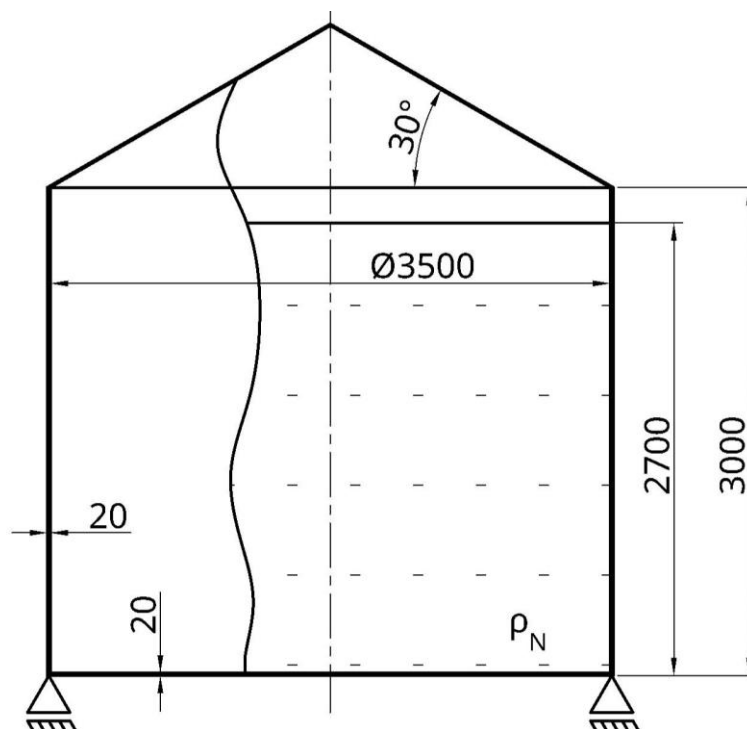
**Tablica 1. Dimenzije i materijali modela [4] [5]**

Visina cilindra, $h_c$ /mm	9000
Visina konusa, $h_k$ /mm	3011
Visina nafte, $h_N$ /mm	8200
Unutarnji promjer cilindra, $d_c$ /mm	10430
Unutarnji polumjer cilindra, $R_c$ /mm	5215
Debljina stijenke cilindra, $t_c$ /mm	5
Debljina stijenke konusa, $t_k$ /mm	2,5
Debljina kružne ploče na dnu, $t_d$ /mm	5
Kut konusne stijenke, $\vartheta$ /°	30
Maksimalni volumen spremnika, $V_{\max}$ /m <sup>3</sup>	768,95
Iskoristivi volumen spremnika, $V_{\text{isk}}$ /m <sup>3</sup>	700
Materijal	S355JR
Modul elastičnosti, $E$ /GPa	210
Poissonov faktor, $\nu$	0,3
Gustoća nafte, $\rho_N$ /kg/m <sup>3</sup>	880



**Slika 4. Skica vertikalnog spremnika za numerički proračun**

Radi kompleksnosti analitičkog proračuna i opisivanja zadanih rubnih uvjeta ranije opisan, realan, primjer vertikalnog spremnika je analiziran samo numerički. Verifikacija konačnih elemenata kojim je isti opisan je provedena za tri puta umanjeni model koji je moguće riješiti analitički. Za umanjeni model korištena je ista tvar, odnosno nafta, te isti materijal. Slika 5. prikazuje umanjeni model s pridruženim rubnim uvjetima pomaka i opterećenja.



Slika 5. Skica umanjenog modela za analitički proračun

Radi lakšeg snalaženja tokom proračuna tablica 2. prikazuje sve potrebne vrijednosti.

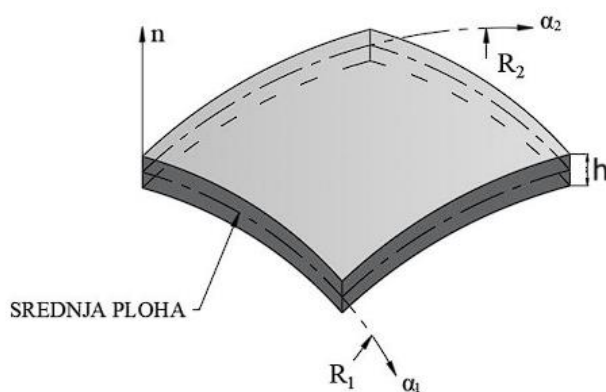
Tablica 2. Vrijednosti potrebne za analitički proračun

Visina cilindra, $h_c$ /mm	3000
Visina nafte, $h_N$ /mm	2700
Unutarnji promjer cilindra, $d_c$ /mm	3500
Unutarnji polumjer cilindra, $R_c$ /mm	1750
Debljina stijenke cilindra, $t_c$ /mm	20
Debljina stijenke konusa, $t_k$ /mm	10
Debljina kružne ploče na dnu, $t_d$ /mm	20
Kut konusne stijenke, $\vartheta$ /°	30
Materijal	S355JR
Modul elastičnosti, $E$ /GPa	210
Poissonov faktor	0,3
Gustoća nafte, $\rho_N$ /kg/m <sup>3</sup>	880

## 2. Analitički proračun

### 2.1. Uvod u teoriju ljusaka [6]

Ljuska je dio kontinuuma koji je omeđen s dvije zakrivljene plohe, a razmak između ploha mali je u odnosu na ostale dimenzije. Razmak između ploha predstavlja debljinu ljuske koja može biti promjenjiva ili konstantna. Srednja ploha je ploha koja raspolavlja debljinu. Geometrija ljuske potpuno je zadana ako je ona određena rubom, debljinom i srednjom plohom. Ljuska koja je analizirana u ovom radu je cilindrična, a ona spada u skupinu ljusaka nulte Gaussove zakrivljenosti stoga vrijedi  $r_1 = \infty$  i  $r_2 = R$ . Slika 6. prikazuje ljuskasti kontinuum.

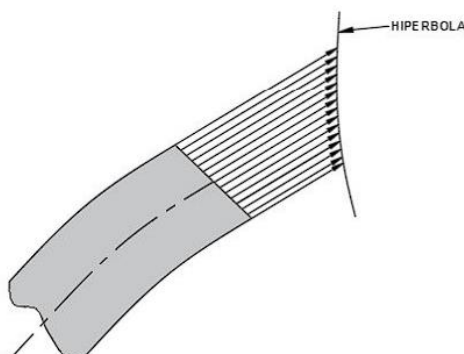


Slika 6. Ljuskasti kontinuum [6]

Za cilindričnu tanku ljusku vrijede sljedeće pretpostavke:

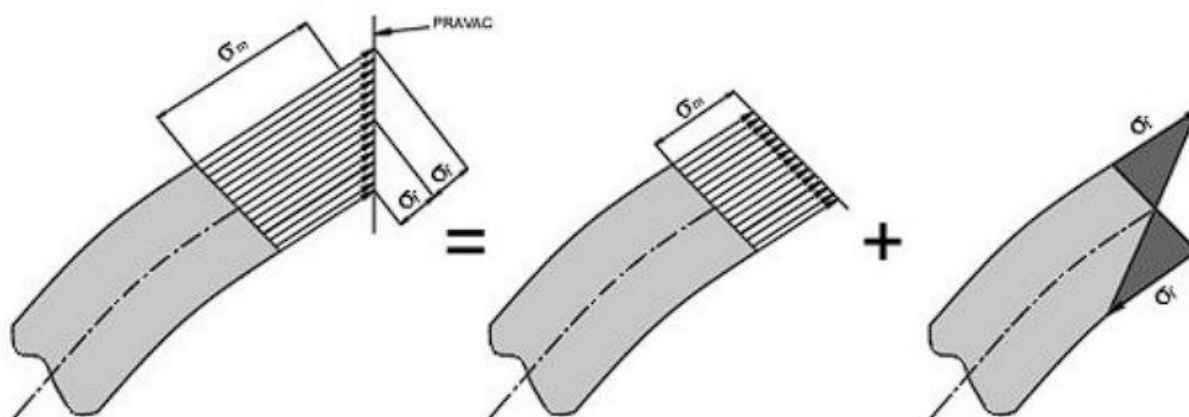
- Ljuska je tanka  $h / r_2 \leq \frac{1}{20}$ ;
- debljina stijenke je konstantna ili se neznatno mijenja;
- pretpostavljeni su mali pomaci i male deformacije.

U slučaju ljuske naprezanja su raspodijeljena približno po hiperboličkom zakonu, slika 7.



Slika 7. Raspodjela naprezanja po debljini ljuske [6]

Ako je ispunjen ranije naveden uvjet da je ljuska tanka, hiperbola neznatno odstupa od pravca pa se može zamijeniti pravcem, slika 8. Slika 8. također prikazuje da se naprezanje u tankoj ljusci može podijeliti na membransko naprezanje ( $\sigma_m$ ) koje je jednoliko raspodijeljeno po debljini i naprezanje savijanja ( $\sigma_f$ ) koje se mijenja po linearnom zakonu tako da je u srednjoj plohi jednako nula.



Slika 8. Podjela naprezanja tanke ljuske [6]

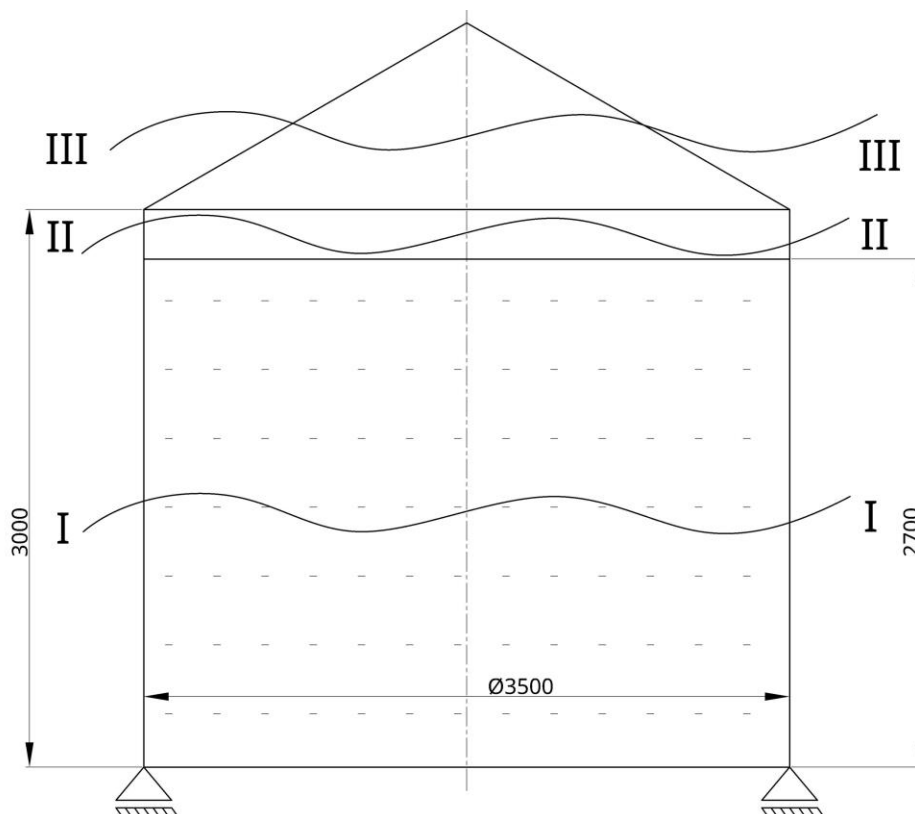
## 2.2. Uvod u savijanje tankih kružnih ploča

Ploča je plosnato tijelo koje je ograničeno dvjema ploham a čija je međusobna udaljenost mala u usporedbi s ostalim dimenzijama. Srednja ploha je ploha koja je jednako udaljena od vanjskih površina i ona je kod ploča uvijek ravna pa se naziva srednja ravnina. Za tanku kružnu ploču vrijede slijedeća ograničenja:

- Ploča je tanka, najveća debljina ploče izražena je izrazom  $h / R \leq \frac{1}{10}$  ;
- Progibi ploče su mali.

## 2.3. Proračun

Proračun je temeljen na proizvoljno odabranim rubnim uvjetima. Budući da nije definiran način osiguranja spremnika odabrani rubni uvjeti su pomični oslonci koji omogućuju rotaciju te radijalni pomak kružne ploče odnosno cilindrične ljuske. Slijedi postupak proračuna koji je izveden prateći i koristeći ranije navedene izraze. Proračunska skica podijeljena je na tri presjeka, no presjeci II-II i III-III nemaju vanjskih opterećenja stoga je za ovu analizu važan samo prvi presjek, presjek I-I, a ostali nisu obrađeni. Skica je prikazana na slici 9.



Slika 9. Ucrtani presjeci za analitički proračun

**2.3.1. Provjera uvjeta duge ljuske za presjek I-I ( $0 < x < h_N$ )**

Za početak provjeren je uvjet duge ljuske. Za dugu ljusku vrijedi:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta(s) ds > 3. \tag{1}$$

Cilindrična ljuska ima promjer  $r_2 = R_c$  i debljinu stijenke  $t_c$ , uneseno u metrima:

$$\beta_C = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{(r_2 \cdot t_c)^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1 - 0,3^2)}{(1,75 \cdot 0,02)^2}} = 6,8708 \text{ m}^{-1}. \tag{2}$$

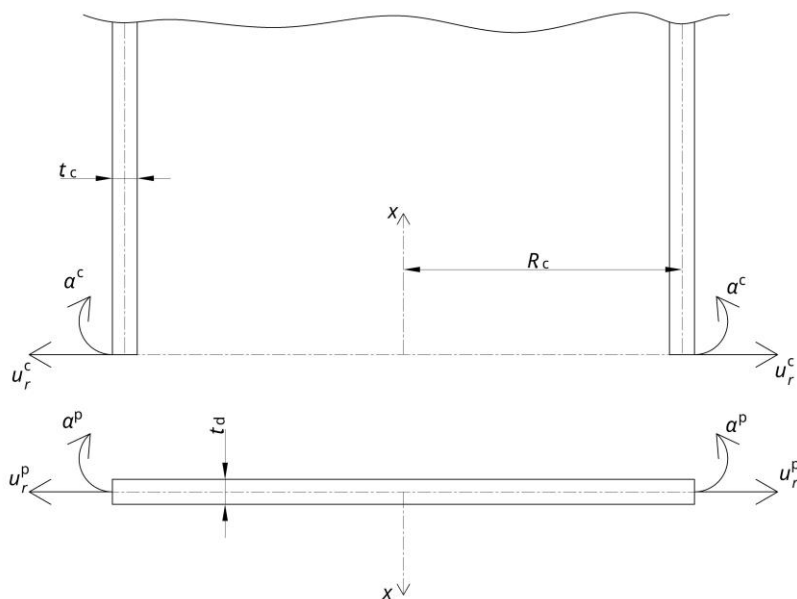
Pri čemu je  $\beta_C$  geometrijsko-materijalna značajka cilindra. Nadalje vrijedi:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta_C(s) ds = \int_0^{h_N} \beta_C dx = \beta_C \cdot (h_N - 0) = 6,8708 \cdot 2,7 = 18,5512. \tag{3}$$

Prema (1) zaključeno je da cilindrična ljuska zadovoljava uvjet duge ljuske.

**2.3.2. Rubni uvjeti, poopćene sile i pomaci za presjek I-I**

Na mjestu spoja ploče i cilindra radijalni pomak ploče jednak je radijalnom pomaku cilindra, a analogno je kut zakreta ploče jednak kutu zakreta cilindra, prikazano slikom 10.



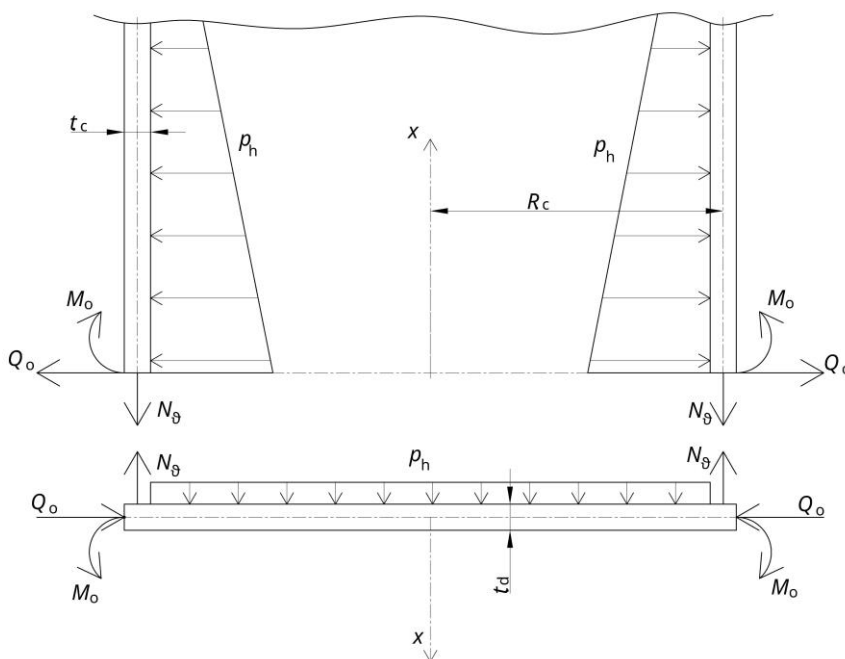
**Slika 10. Prikaz poopćenih pomaka**

Isto je moguće zapisati pomoću jednadžbi:

$$u_r^C = u_r^P, \tag{4}$$

$$\alpha^C = \alpha^P. \tag{5}$$

Na slici 11. su prikazani smjerovi poopćenih sila.



**Slika 11. Smjerovi poopćenih sila**

### 2.3.3. Cilindrična ljuska

Iz slike 11. vidljivo je da se pojavljuju dvije nepoznanice ( $Q_0$  i  $M_0$ ), a one su izračunate pomoću izraza (4), (5) i slijedećih jednažbi:

$$u_r^C = u_r^{fC} + u_r^{mC} = \alpha_{11}^C Q_0 + \alpha_{12}^C M_0 + u_r^{mC}, \quad (6)$$

$$\alpha^C = \alpha^{fC} + \alpha^{mC} = \alpha_{12}^C Q_0 + \alpha_{22}^C M_0 + \alpha^{mC}. \quad (7)$$

Uplivni koeficijenti  $\alpha_{11}^C$ ,  $\alpha_{12}^C$ ,  $\alpha_{22}^C$  računaju se na slijedeći način, no za njih je potrebna  $D^C$ , fleksijska krutost cilindra, dok je  $\beta_C$  ranije izračunat:

$$D^C = \frac{E \cdot t_c^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 0,02^3}{12(1 - 0,3^2)} = 153846,15 \text{ Nm}, \quad (8)$$

$$\alpha_{11}^C = \frac{1}{2D^C \beta_C^3}, \quad \alpha_{12}^C = \frac{1}{2D^C \beta_C^2}, \quad \alpha_{22}^C = \frac{1}{D^C \beta_C}, \quad (9)$$

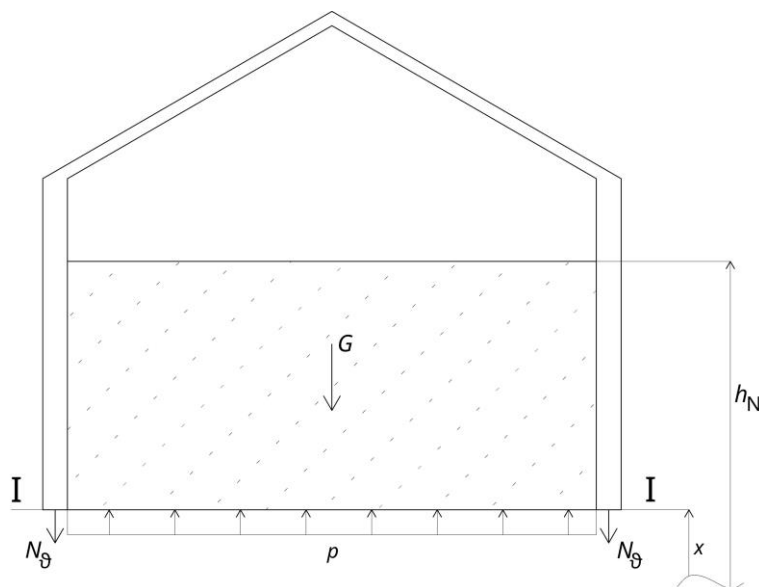
$$\alpha_{11}^C = 1,002 \cdot 10^{-8}, \quad \alpha_{12}^C = 6,8845 \cdot 10^{-8}, \quad \alpha_{22}^C = 9,4603 \cdot 10^{-7}. \quad (10)$$

Također, potrebno je poznavati i vrijednosti membranskog dijela radijalnog pomaka i kuta zakreta cilindrične ljuske:

$$u_r^{mC} = \frac{r}{E \cdot t_c} (N_\varphi^{mC} - \nu N_\theta^C), \quad (11)$$

$$\alpha^{mC} = -\frac{du_r^{mC}}{dx}. \quad (12)$$

Dio cilindrične ljuske, presjek I-I, s ucrtanim opterećenjima prikazan je na slici 12.



Slika 12. Presjek I-I i opterećenje ljuske



Iz uvjeta ravnoteže po koordinatnoj osi  $x$  cilindrične ljuske slijedi da je meridijalna membranska sila  $N_{\theta}^{\text{mC}}$ :

$$2\pi \cdot R_c \cdot N_{\theta}^{\text{mC}} = p(x) \cdot (R_c)^2 \pi + G(x), \quad (13)$$

$$2\pi \cdot R_c \cdot N_{\theta}^{\text{mC}} = \rho_N \cdot g(h_N - x) \cdot (R_c)^2 \pi - \rho_N \cdot g(h_N - x) \cdot (R_c)^2 \pi, \quad (14)$$

$$N_{\theta}^{\text{mC}} = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (15)$$

Poznajući izraz između sila u cilindru uz  $r_1 = \infty$  i  $r_2 = R_c$ , za  $N_{\varphi}^{\text{mC}}$  vrijedi:

$$\frac{N_{\theta}^{\text{mC}}}{r_1} + \frac{N_{\varphi}^{\text{mC}}}{r_2} = p_h, \quad (16)$$

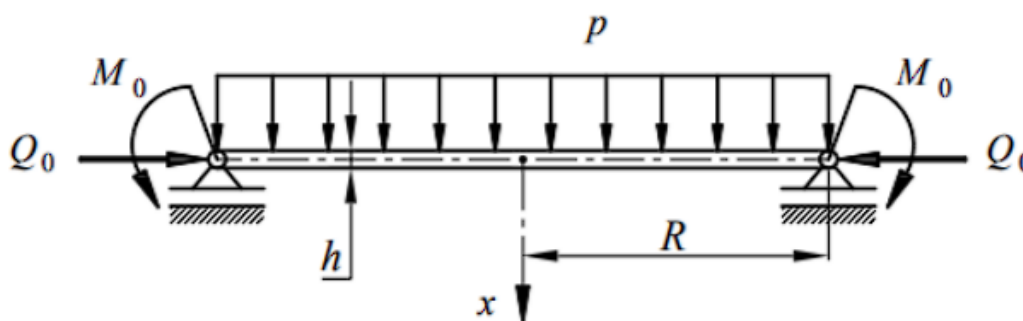
$$N_{\varphi}^{\text{mC}} = \rho_N g(h_N - x) \cdot R_c. \quad (17)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti meridijalne i cirkularne sile u izraze za membranski dio radijalnog pomaka i kuta zakreta cilindrične ljuske (11) i (12) dobije se sljedeće:

$$u_r^{\text{mC}} = \frac{R_c^2}{E \cdot t_c} (\rho_N \cdot g(h_N - x)), \quad \alpha^{\text{mC}} = \frac{R_c^2}{E \cdot t_c} \cdot \rho_N \cdot g. \quad (18)$$

#### 2.3.4. Tanka kružna ploča

Tanka kružna ploča koja je povezana sa cilindričnom ljuskom, opterećena hidrostatskim tlakom, uzdužnom silom i momentom savijanja predstavlja slobodno oslonjenu ploču prema slici 11. ili uvećano na slici 13., gdje  $p = p_h$ , a  $R = R_c$ :



Slika 13. Opterećena tanka kružna ploča [8]

Fleksijska krutost tanke kružne ploče jednaka je fleksijskoj krutosti cilindra,  $D^C = D^P$ .

Radijalni pomak i ukupni kut zakreta proračunat je pomoću slijedećih formula [8]:

$$u_r^P = \frac{Q_0 \cdot r}{E \cdot h} (1 - \nu) = \frac{-Q_0 \cdot R_c}{E \cdot t_d} (1 - \nu), \quad (19)$$

$$\alpha^P = \alpha_{M_0}^P + \alpha_p^P = \frac{r}{D^P(1 + \nu)} \left( -M_0 + \frac{pR^2}{8} \right), \quad (20)$$

$$\alpha^P(r = R_c) = 8,75 \cdot 10^{-6} (8922,98 - M_0). \quad (21)$$

Konačno se mogu iskoristiti ranije navedeni rubni uvjeti (4) i (5) zajedno s (18), (19) te (21) i izračunati poopćene sile koje nakon računanja dvije jednačbe s dvije nepoznanice glase:

$$Q_0 = -58076,57 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (22)$$

$$M_0 = 8456,27 \frac{\text{Nm}}{\text{m}}. \quad (23)$$

Iz izraza (22) je vidljivo da je pretpostavka smjera djelovanja sile  $Q_0$  neispravna.

## 2.4. Izrazi i raspodjela veličina po konturi posude

Nakon određivanja nepoznatih veličina iste se mogu prikazati slijedećim dijagramima uz pomoć eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija.

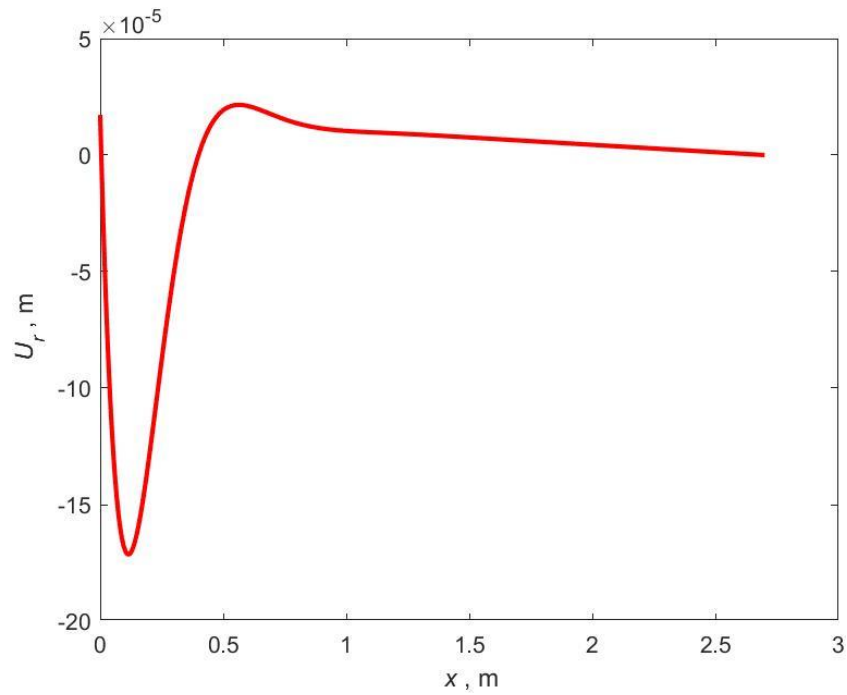
### 2.4.1. Cilindrična ljuska presjek I-I

Funkcija radijalnog pomaka cilindrične ljuske računa se uz pomoć:

$$u_r^C = \alpha_{11}^C Q_0 f_4 + \alpha_{12}^C M_0 f_3 + u_r^{mC}, \quad (24)$$

$$f_3 = e^{-\beta x} (\cos(\beta x) - \sin(\beta x)), \quad f_4 = e^{-\beta x} \cos(\beta x). \quad (25)$$

I u ovom (ali i u ostalim slučajevima) sila  $Q_0$  se unosi negativna, dok je  $\beta = \beta_C$ . Funkcija je prikaza slikom 14. Svi slijedeći grafovi funkcija na cilindričnoj ljusci završavaju na 2,7 metara, odnosno na visini nafte.

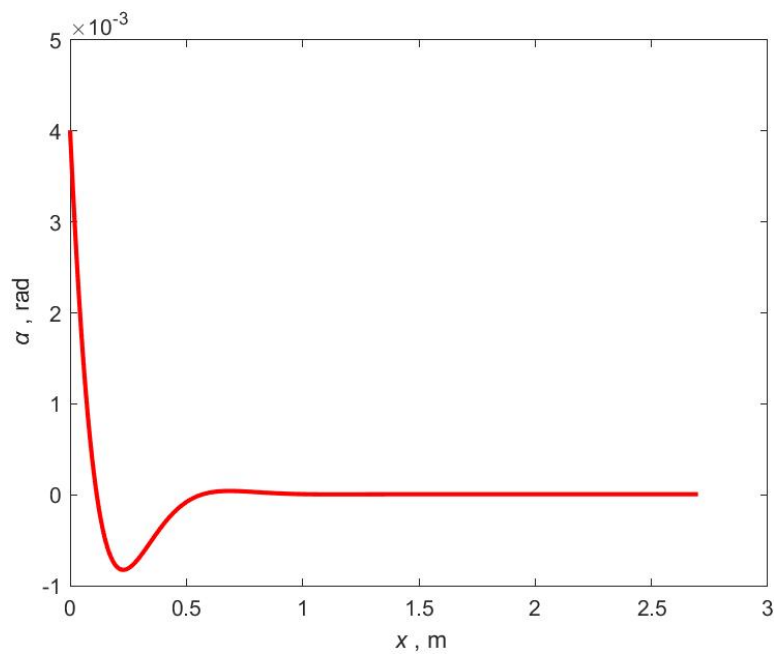


**Slika 14. Radijalni pomak duž meridijana cilindrične ljske**

Funkcija kuta zakreta cilindrične ljske dana je izrazom (24), a prikazana je slikom 15.

$$\alpha^C = \alpha_{12}^C Q_0 f_1 + \alpha_{22}^C M_0 f_4 + \alpha^{mC}, \tag{26}$$

$$f_1 = e^{-\beta x} (\sin(\beta x) + \cos(\beta x)). \tag{27}$$

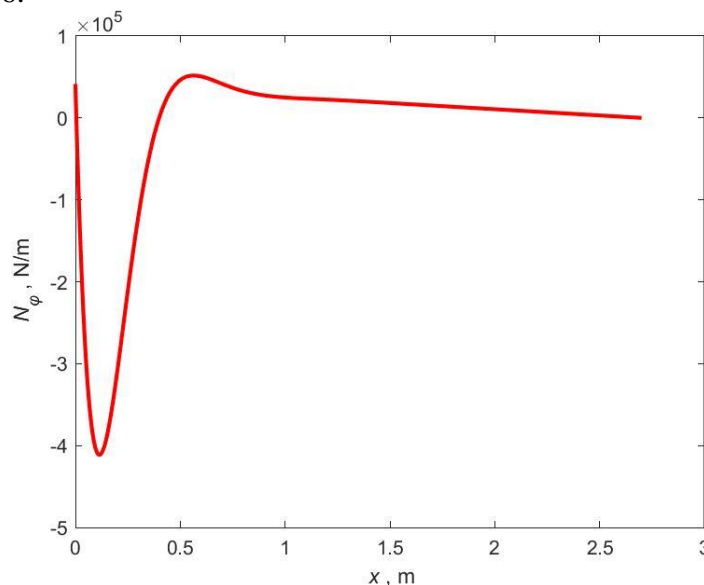


**Slika 15. Kut zakreta duž meridijana cilindrične ljske**

Funkcija ukupne cirkularne sile za cilindričnu ljusku računa se kao:

$$N_{\varphi}^C = Et_c \frac{u_r^C}{R_c} + \nu N_{\theta}. \tag{28}$$

Jednadžba za  $u_r^C$  uvrštena je prema jednadžbi (6), a funkcija ukupne cirkularne sile je prikazana slikom 16.

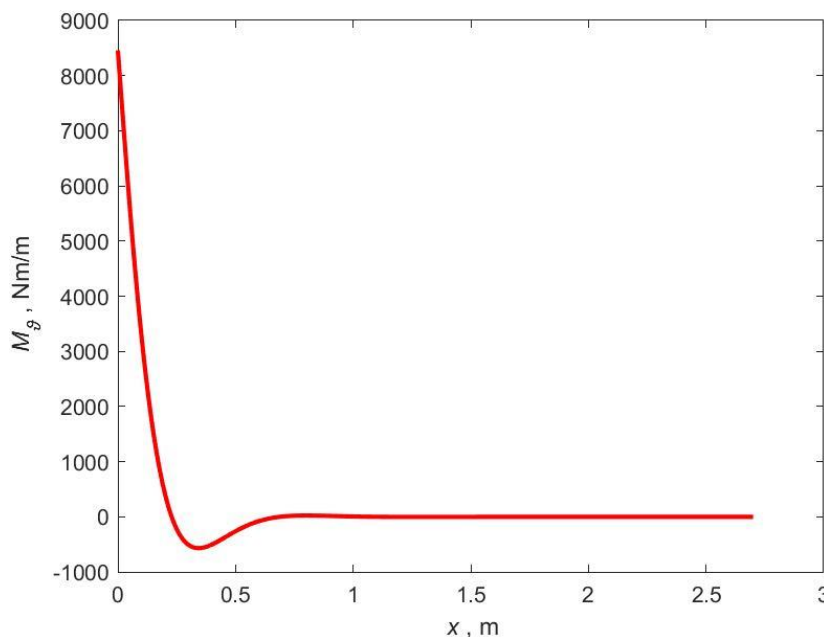


Slika 16. Ukupna cirkularna sila duž meridijana cilindrične ljuske

Funkcija meridijalnog momenta savijanja dana je izrazom (27), a prikazana je slikom 17:

$$M_{\theta} = \frac{Q_0}{\beta} f_2 + M_0 f_1, \tag{29}$$

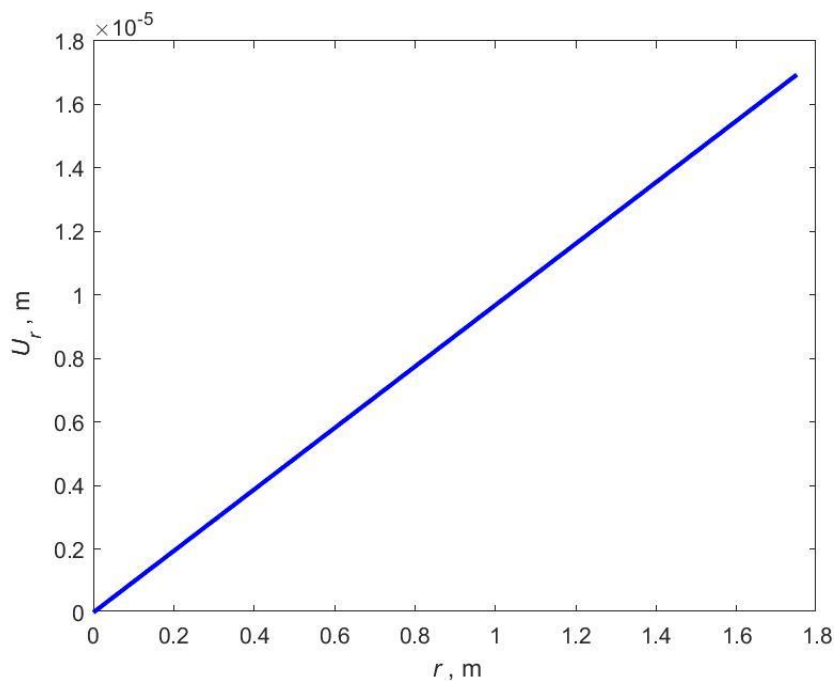
$$f_2 = e^{-\beta x} \sin(\beta x). \tag{30}$$



Slika 17. Meridijalni moment savijanja duž meridijana cilindrične ljuske

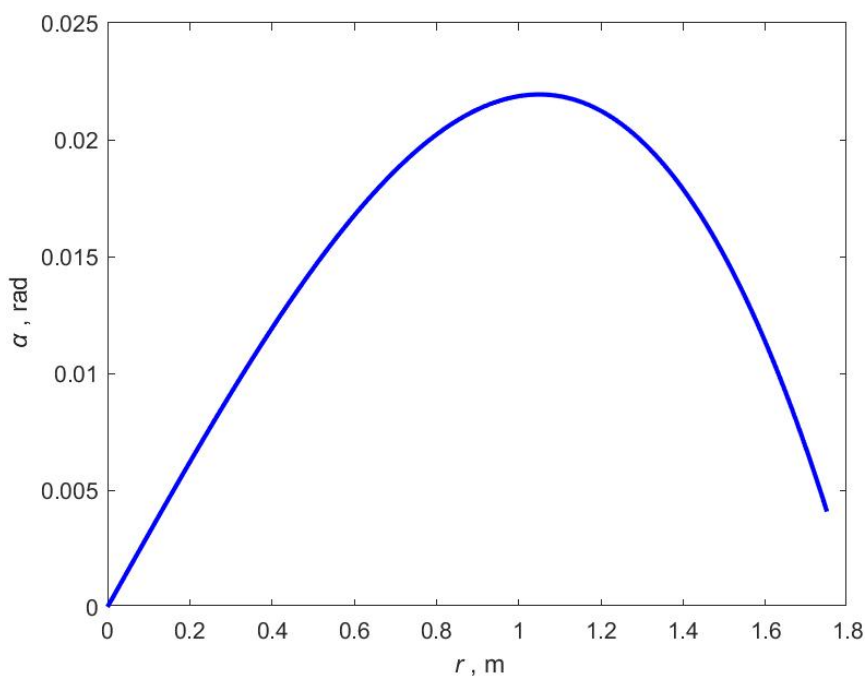
### 2.4.2. Tanka kružna ploča

Funkcija radijalnog pomaka ploče definirana je pomoću izraza (19) te ju prikazuje slika 18.



Slika 18. Radijalni pomak duž radijalne osi ploče

Funkcija kuta zakreta ploče računa se pomoću izraza (20), a prikazuje je slika 19.



Slika 19. Kut zakreta duž radijalne osi ploče

## 2.5. Ekvivalentna naprezanja

Ekvivalentna naprezanja izračunata su prema teoriji najveće distorzijske energije, također zvana von Missesov kriterij, koja nalaže da materijal ostaje elastičan dok energija deformacije smicanja ne dosegne kritičnu vrijednost. Naprezanja se računaju kako bi se pronašla maksimalna naprezanja unutar ljusaka. Pretpostavka kritičnih točaka su spojevi ljusaka. Proračun je odvojeno proveden za cilindričnu ljusku i za ploču, prvo za cilindar. Za proračun maksimalnog ekvivalentnog naprezanja korišteno je maksimalno normalno naprezanje koje se kod cilindrične ljuske javlja na vanjskoj odnosno unutarnjoj površini ljuske, a prema [6] glasi:

$$\sigma_{\vartheta}^{\max} = \frac{N_{\vartheta}}{t_c} \pm \frac{6M_{\vartheta}}{t_c^2}, \quad (31)$$

odnosno:

$$\sigma_{\varphi}^{\max} = \frac{N_{\varphi}}{t_c} \pm \frac{6M_{\varphi}}{t_c^2}. \quad (32)$$

Za ploču, analogno, normalna naprezanja javljaju se na gornjoj odnosno donjoj površini, a prema [6] glase:

$$\sigma_r^{\max} = \pm \frac{6M_r}{t_d^2}, \quad (33)$$

odnosno:

$$\sigma_{\varphi}^{\max} = \pm \frac{6M_{\varphi}}{t_d^2}, \quad (34)$$

Ekvivalentno naprezanje proračunato je radi kombinacije naprezanje koja se javlja u ljusci, a izraz prema von Missesovom kriteriji glasi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (35)$$

Odabrano je meridijalno naprezanje kao  $\sigma_1$ , a cirkularno kao  $\sigma_2$ , odnosno radijalno kao  $\sigma_3$  time se dobije sljedeći izraz:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_{\vartheta}^2 + \sigma_{\varphi}^2 - \sigma_{\vartheta}\sigma_{\varphi}}. \quad (36)$$

Ekvivalentno naprezanje provjereno je za par točaka. Točke su odabrane pomoću ranije navedenih grafova za ukupnu cirkularnu silu i meridijalni moment savijanja duž meridijana cilindrične ljuske. Točke su radi lakoće preglednosti prikazane tablicama 3. i 4. Iznosi su odabrani prema maksimalnim vrijednostima navedenih grafova te su u tablice poredani prema ovisnosti o  $x$  osi.

**Tablica 3. Najveće odabrane vrijednosti ukupne cirkularne sile u cilindru**

$x$ /m	$N_{\varphi}^{\max}$ /N/m
0	41383,5
0,115	-411204
0,342	-59819
0,564	51671,7

**Tablica 4. Najveće odabrane vrijednosti meridijalnog momenta savijanja cilindra**

$x$ /m	$M_{\vartheta}^{\max}$ /Nm/m
0	8456,27
0,115	2711,2
0,342	-566,5
0,564	-129,76

Sada su pomoću ranije navedenih izraza, (31) i (32), prikazana maksimalna meridijalna i cirkularna naprezanja. Ponovno radi jednostavnijeg i preglednijeg prikaza vrijednosti su prema varijabli  $x$  poredane u tablicu 5.

**Tablica 5. Iznosi meridijalnih i cirkularnih naprezanja cilindra**

$x$ /m	$\sigma_{\vartheta}^{\max}$ /N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{\varphi}^{\max}$ /N/mm <sup>2</sup>
0	126,84	40,12
0,115	40,67	-32,76
0,342	-8,5	-5,54
0,564	-1,95	3,17

Kao što je i pretpostavljeno najveća naprezanja javljaju se na spoju cilindrične ljuske i kružne ploče. Konačno, ekvivalentno naprezanje prema ranije navedenom izrazu (36) jednako je:

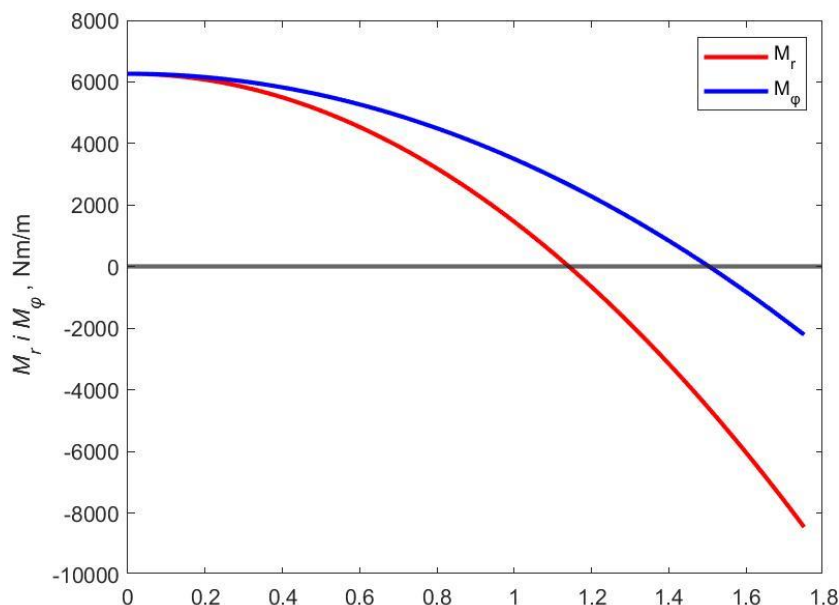
$$\sigma_{\text{ekv}} = 112,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (37)$$

Nadalje, radi usporedbe potrebno je provjeriti naprezanja u tankoj kružnoj ploči. Ploča je proračunata pomoću slike 13., a ovdje su prikazani samo izrazi kojima su dobiveni radijalni i cirkularni momenti savijanja:

$$M_r = D^P \left[ 1,3C_1 - \frac{3pr^2}{16D} - \frac{0,3pr^2}{16D} \right], \quad (38)$$

$$M_\varphi = D^P \left[ 1,3C_1 - 0,3 \frac{3pr^2}{16D} - \frac{pr^2}{16D} \right]. \quad (39)$$

Gdje je  $C_1 = 0,03133$ , a  $p = 23308,56$  Pa. Koristeći izraze (38) i (39) moguće je prikazati momente u ovisnosti o polumjeru ploče, slika 20., iz kojih će biti izračunata naprezanja koristeći izraze (33) i (34).



Slika 20. Radijalni i cirkularni moment po polumjeru tanke kružne ploče

Kao što je vidljivo sa slike 20. dva moguća mjesta maksimalnog ekvivalentnog naprezanja su u središtu ploče i na mjestu spoja stoga je potrebno provjeriti iznos obje točke. Iznosi radijalnog odnosno cirkularnog momenta u obje točke prikazani su tablicom 6.



**Tablica 6. Iznosi radijalnog i cirkularnog momenta savijanja u ploči**

$x / \text{m}$	$M_r / \text{Nm}$	$M_\varphi / \text{Nm}$
<b>0</b>	6266	6266
<b>1,75</b>	-8238	-2110

Potrebno je proračunati naprezanja u istim točkama koristeći izraze (33) i (34), a rezultati toga su zajedno s ekvivalentnim naprežanjem prikazani tablicom 7.

**Tablica 7. Iznosi radijalnog i cirkularnog naprežanja u ploči**

$x / \text{m}$	$\sigma_r / \text{N/mm}^2$	$\sigma_\varphi / \text{N/mm}^2$	$\sigma_{\text{ekv}} / \text{N/mm}^2$
<b>0</b>	93,99	93,99	93,99
<b>1,75</b>	-123,57	-31,65	111,19

Nakon usporedbe maksimalnih ekvivalentnih naprežanja moguće je zaključiti da je najveće naprežanje na spoju cilindrične ljuske i tanke kružne ploče i iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = 112,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (40)$$

Za proračun čvrstoće nužno je usporediti maksimalno ekvivalentno naprežanje s dopuštenom granicom tečenja. Cijeli spremnik napravljen je od istog materijala, čelika S355JR, čija je granica tečenja,  $R_{p0,2} = 355 \text{ MPa}$ . Time je faktor sigurnosti spremnika jednak:

$$S = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{\text{ekv}}} = \frac{355}{112,3} = 3,16. \quad (41)$$

Dobiveni iznos svakako zadovoljava kriterij sigurnosti, odnosno kriterij čvrstoće. Isto će biti prikazano i provjereno numerički u trećem poglavlju. Kasnije je ponuđeno i rješenje realnih rubnih uvjeta koji će također zadovoljiti uvjet čvrstoće, a isto je provjereno samo numerički zbog kompleksnosti analitičkog proračuna u tom slučaju.

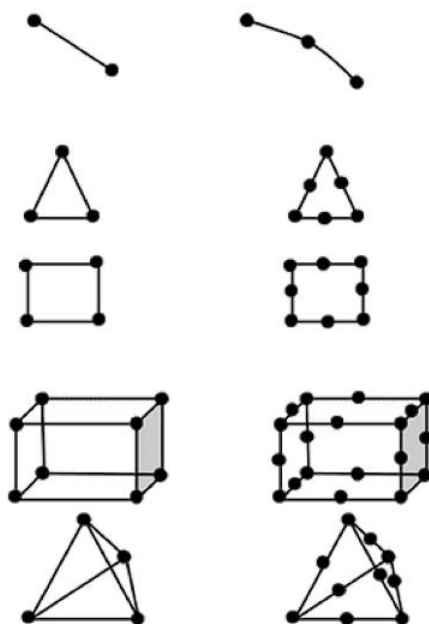
### 3. Verifikacija konačnih elemenata

#### 3.1. Uvodno o metodi konačnih elemenata i Abaqusu®

Radi usporedbe i provjere točnosti konačnih elemenata koji će biti korišteni za numerički proračun realnog spremnika umanjeni model spremnika riješen je i primjenom metode konačnih elemenata koristeći računalo i programski paket Abaqus®. Metoda konačnih elemenata koristi se za numeričko rješavanje problema, a temeljena je na principu minimuma potencijalne energije i varijacijskoj formulaciji. Metoda se svodi na diskretizaciju konstrukcije ili dijela konstrukcije na potpodručja, konačne elemente, za koje treba definirati karakteristike, opterećenja i rubne uvjete. Kao što je ranije navedeno metoda dijeli konstrukciju na mala područja te se u njima rješavaju jednadžbe, funkcije oblika, koje interpoliraju veličine unutar konačnog elementa na temelju poznatih vrijednosti u čvorovima elementa. Tim funkcijama se pretpostavlja raspodjela traženih vrijednosti na tom određenom području. Tako metoda daje približna rješenja, a aproksimacija se poboljšava s povećanjem broja elemenata. Ovu tvrdnju je cilj prikazati kroz ovo poglavlje rada. Metoda se primjenjuje na konstrukcije kompleksnije geometrije. Numerička analiza vertikalnog spremnika provedena je koristeći programski paket Abaqus®. Abaqus® je numerički software, dio *SIMULIA* paketa tvrtke Dassault Systèmes, za analizu konstrukcija metodom konačnih elemenata i sastoji se od više modula koji se koriste za unos podataka i definiranje specifičnih aspekata proračuna.

#### 3.2. Pregled tipova konačnih elemenata [7]

Ovisno o vrsti proračuna, obliku konstrukcije, nepoznatim parametrima u čvorovima i obliku interpolacijske funkcije u području elementa razlikujemo različite tipove konačnih elemenata. Osnovni oblici konačnih elemenata podijeljeni su na jednodimenzijske, dvodimenzijske, trodimenzijske, osnosimetrične te konačne elemente za analizu ljuskastih konstrukcija i analizu savijanja ploča. Od najjednostavnijih i najčešće korištenih vrijedi izdvojiti štapne i gredne elemente. Svaki od prikazanih elemenata moguće je proširiti radi bolje aproksimacije što se može postići dodavanjem čvorova duž bridova ili po površini elementa. Isto je prikazano slikom 21. gdje su lijevo prikazani jednodimenzijski, dvodimenzijski i trodimenzijski konačni elementi prvog reda, a desno su prikazani isti elementi prošireni dodatnim čvorovima, tzv. konačni elementi drugog reda.



Slika 21. Konačni elementi prvog reda (lijevo) i konačni elementi drugog reda (desno) [9]

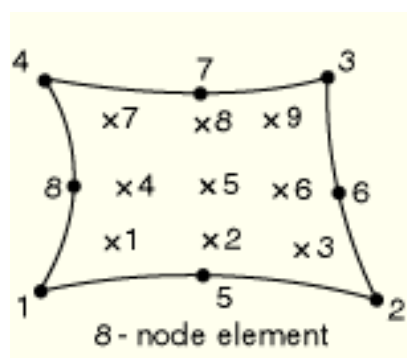
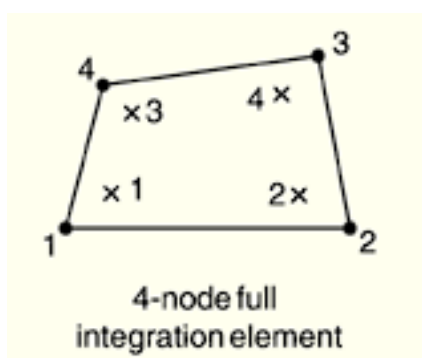
### 3.3. Konačni elementi za verifikaciju

Od ranije navedenih tipova i oblika bilo je potrebno odabrati par različitih konačnih elemenata koji su iskorišteni radi usporedbe i verifikacije točnosti modela. Verifikaciju je nužno provesti radi uvida u točnost kojom konačni element opisuje zadanu konstrukciju. Kasnije, usporedbom svih odabranih konačnih elemenata i analitičkog rješenja je pokazan konačni element koji najtočnije opisuje zadani problem i njegova opterećenja. Slijedećim potpoglavljima opisani su odabrani konačni elementi.

#### 3.3.1. Osnosimetrični elementi

Osnosimetrični konačni elementi ili prstenasti konačni elementi primjenjuju se kada je trodimenzijska konstrukcija osnosimetrična kako bi se pojednostavio problem, primjenom cilindričnog koordinatnog sustava. Uz osnosimetričnost opterećenja takve konstrukcije problem postaje dvodimenzijski što nadalje pojednostavljuje problem. Za verifikaciju odabrana su dva osnosimetrična elementa, CAX4 – osnosimetrični (eng. *Continuum Axisymmetric*) četverokutni konačni element prvog reda s četiri čvora u vrhovima četverokuta i CAX8 – osnosimetrični četverokutni konačni element drugog reda s ukupno osam čvorova, četiri u vrhovima četverokuta i četiri na rubovima stranica. Kao što je vidljivo iz imena i opisa elementa konačni element CAX4 ima manji broj čvorova, tj. čvornih kružnica, što omogućava brži

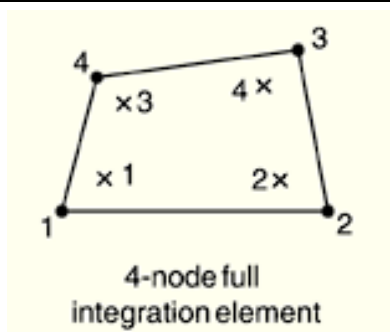
proračun i manju uporabu memorije, no brzina proračuna naravno ograničava točnost te je potrebna gušća mreža konačnih elemenata za preciznu raspodjelu i zadovoljavajuće rezultate. Stoga se CAX4 najčešće koristi za jednostavnije slučajeve. Suprotno tome CAX8 ima složeniju funkciju oblika koja više nije linearna. Zahvaljujući tome omogućena mu je veća točnost s manjim brojem elemenata naspram CAX4. Međutim kao i kod CAX4 postoje prednosti i nedostaci svakog elementa. Nedostaci CAX8 su vezani uz kompleksnost funkcije oblike koja daje mnogo preciznija rješenja, no za čije rješavanje je potrebna dosta veća računalna snaga. Shodno tome upotreba CAX8 je prikladnija pri proračunu konstrukcija složenije geometrije ili kada je potrebna visoka točnost. Slike 22. i 23. prikazuju konačne elemente CAX4 i CAX8.



Slika 22. CAX4 četverokutni konačni element [10]      Slika 23. CAX8 četverokutni konačni element [10]

### 3.3.2. Ljuskasti elementi

Ljuskasti konačni elementi koriste se primarno kod opisivanja tankostijenih konstrukcija, konstrukcije čija je debljina mnogo manja od ostalih dimenzija. Budući da je konstrukcija proračunata koristeći teoriju ljusaka prikladno je primijeniti i konačne elemente koje se baziraju na istim temeljima. Ljuskasti element koji je odabran za daljnju analizu je S4 – ljuskasti (*Shell*) četverokutni konačni element s četiri čvora na vrhovima četverokuta. Formulacija elementa sastoji se od pravokutnog dvodimenzijskog elementa sa dva stupnja slobode u svakom čvoru i elementa za analizu savijanja ploča sa tri stupnja slobode u svakom čvoru te dodavanje rotacije oko normale na srednju ravninu. Ukupno svaki čvor ima šest stupnjeva slobode. Naravno stupnjevi slobode omogućuju primjenu u velikom rasponu problema s velikom točnošću i pouzdanošću i pri kompleksnoj geometriji. Kao i ranije ima nedostataka, potrebno je postaviti gušću mrežu radi manjeg broja čvorova za zadovoljavajuću preciznost. Slika 24. prikazuje opisani ljuskasti element S4.



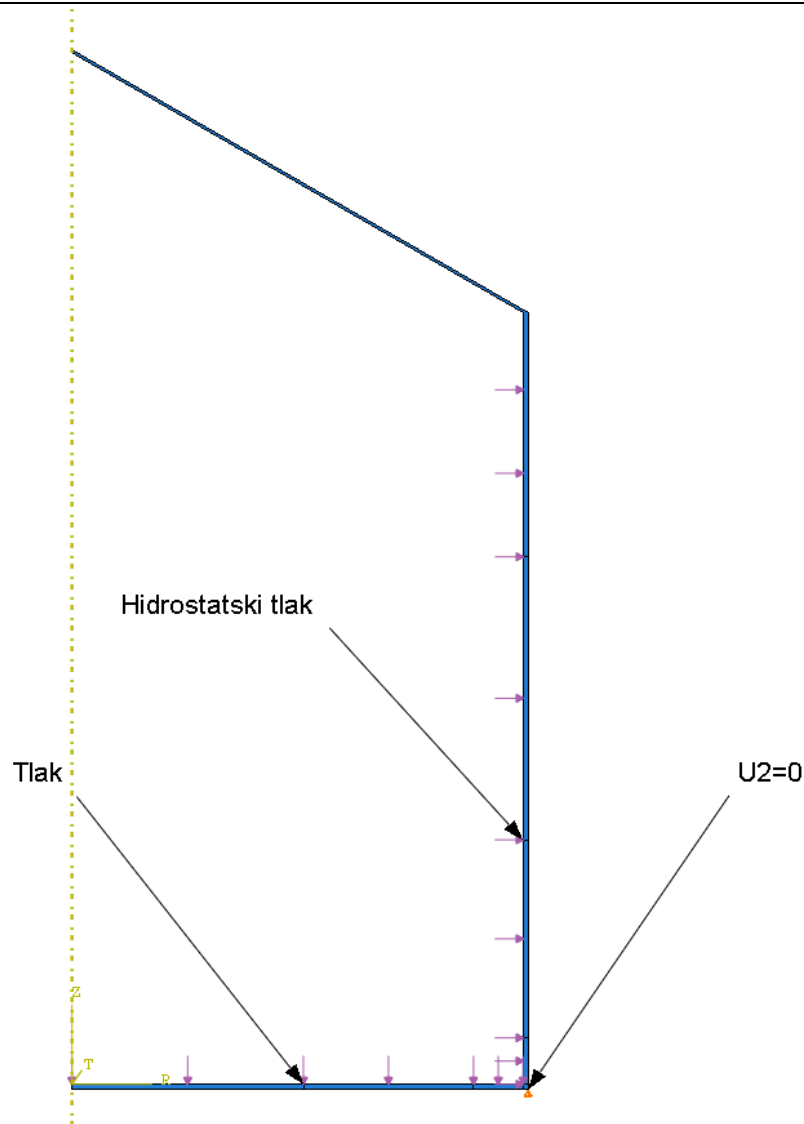
Slika 24. S4 četverokutni ljuskasti konačni element [10]

### 3.4. Verifikacija konačnih elemenata

Verifikacija je provedena u pogledu usporedbe preciznosti i količine konačnih elemenata koji su potrebni za potpuno opisivanje problema. Za potpunu verifikaciju potrebno je numerički proračun provesti na modelu s više mreža konačnih elemenata različitih gustoća kako bi se osigurala konvergencija rezultata. Verifikacija je provedena prema vrijednostima za maksimalno ekvivalentno naprezanje, koje je ranije definirano na mjestu spoja kružne ploče i cilindrične ljuske, i radijalnog pomaka na istom mjestu. Analiza je prvo provedena za osnosimetrične konačne elemente, a kasnije za ljuskasti konačni element.

#### 3.4.1. Numerička analiza osnosimetričnim konačnim elementima

Za numerički proračun koristeći osnosimetrične konačne elemente CAX4 i CAX8 potreban je isto definiran model na kojem će biti primijenjena mreža konačnih elemenata CAX4 odnosno CAX8. Model je kreiran u *Part* modulu gdje je izabran opcija osnosimetrična ljuska (eng. *Axysymmetric Shell*) te je skiciran i dodijeljene su mu dimenzije, a u *Property* modulu dodijeljena su mu svojstva materijala ranije definirana. Nadalje, u modulu *Assembly* model je podijeljen na par manjih područja na kojima će postavljena mreža biti finija kako bih se ta područja bolje i detaljnije opisala. U ovom slučaju to je spoj tanke kružne ploče i cilindrične ljuske. U *Step* modulu kreiran je korak simulacije u kojem će se pomoću modula *Load* definirati rubni uvjeti i opterećenja. Prije postavljanja opterećenja definirani su rubovi (eng. *Sets*) i površine (eng. *Surfaces*) na koje će se postaviti zadana opterećenja i rubni uvjeti. Opterećenje je zadano kao hidrostatski pritisak (eng. *Pressure*) na cilindričnu ljusku i tlak na kružnu ploču. Rubni uvjet pomičnog oslonca definiran je kao ograničenje pomaka desnog kraja konstrukcije u smjeru  $z$  osi, tj.  $U_2 = 0$ . Rubni uvjet simetrije dodan je automatski pri odabiru osnosimetrične ljuske u ranijem modulu. Opterećenja i rubni uvjeti prikazani su slikom 25.

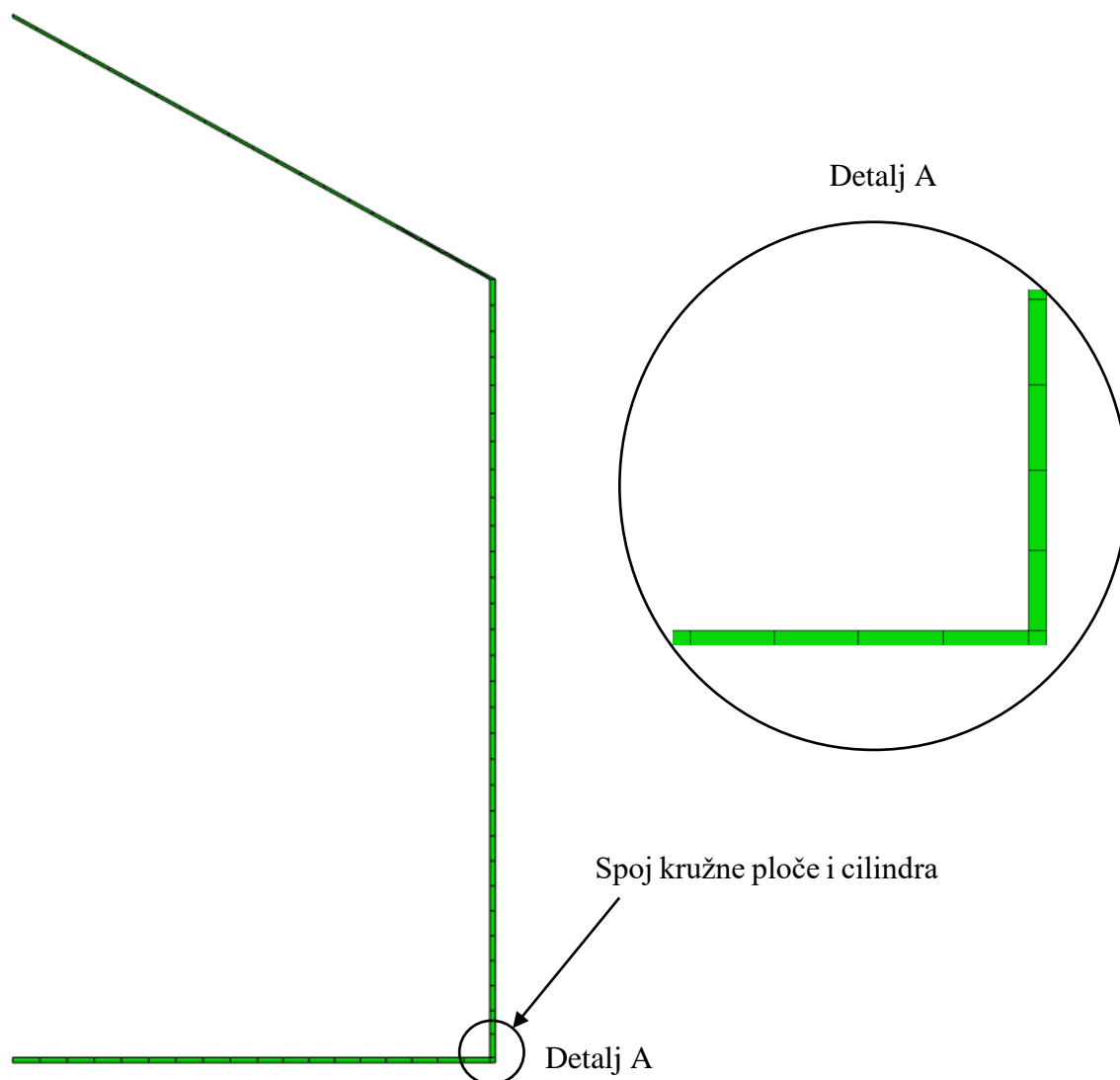


Slika 25. Opterećenja i rubni uvjeti modela

Nakon *Load* modula na redu je *Mesh* modul u kojem će biti dodijeljene mreže konačnih elemenata. U istom modulu definiran je vrsta konačnog elementa. Zbog dimenzija konstrukcije, male debljine i velikih ostalih dimenzija teško je prikazati cijelu mrežu u modulu pa će nadalje biti prikazani samo rezultati u *Visualisation* modulu. Prije toga potrebno je kreirati *Job* u kojem se definira način analize. Napokon moguće je provesti prvu analizu modela. Ponajprije će biti postavljena mreža koristeći CAX4 konačne elemente.

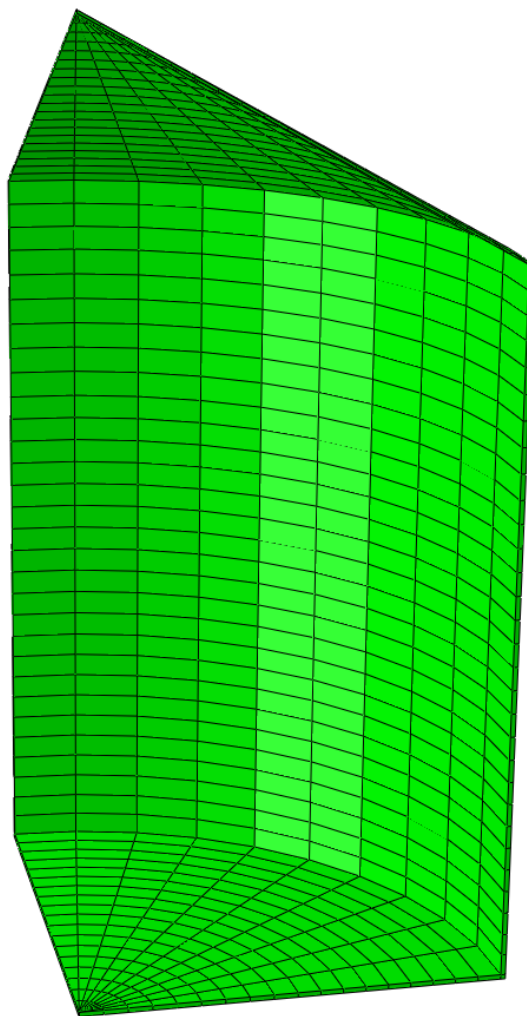
### 3.4.1.1. Numerička analiza pomoću CAX4

Od odabranih konačnih elemenata CAX4 je najjednostavniji u smislu ukupnog broja stupnjeva slobode gibanja. Sastoji se od dva stupnja slobode u svakom od četiri čvora, sveukupno osam. Kako je ranije navedeno radi osnosimetričnosti konstrukcije i opterećenja 3D problem moguće je pojednostaviti u 2D problem stoga se tako i postavlja mreža konačnih elemenata. Slika 26. prikazuje mrežu CAX4 konačnih elemenata u 2D i uvećani detalj A.



**Slika 26. Mreža sa 73 CAX4 konačnih elemenata u 2D prikazu s uvećanim detaljem A**

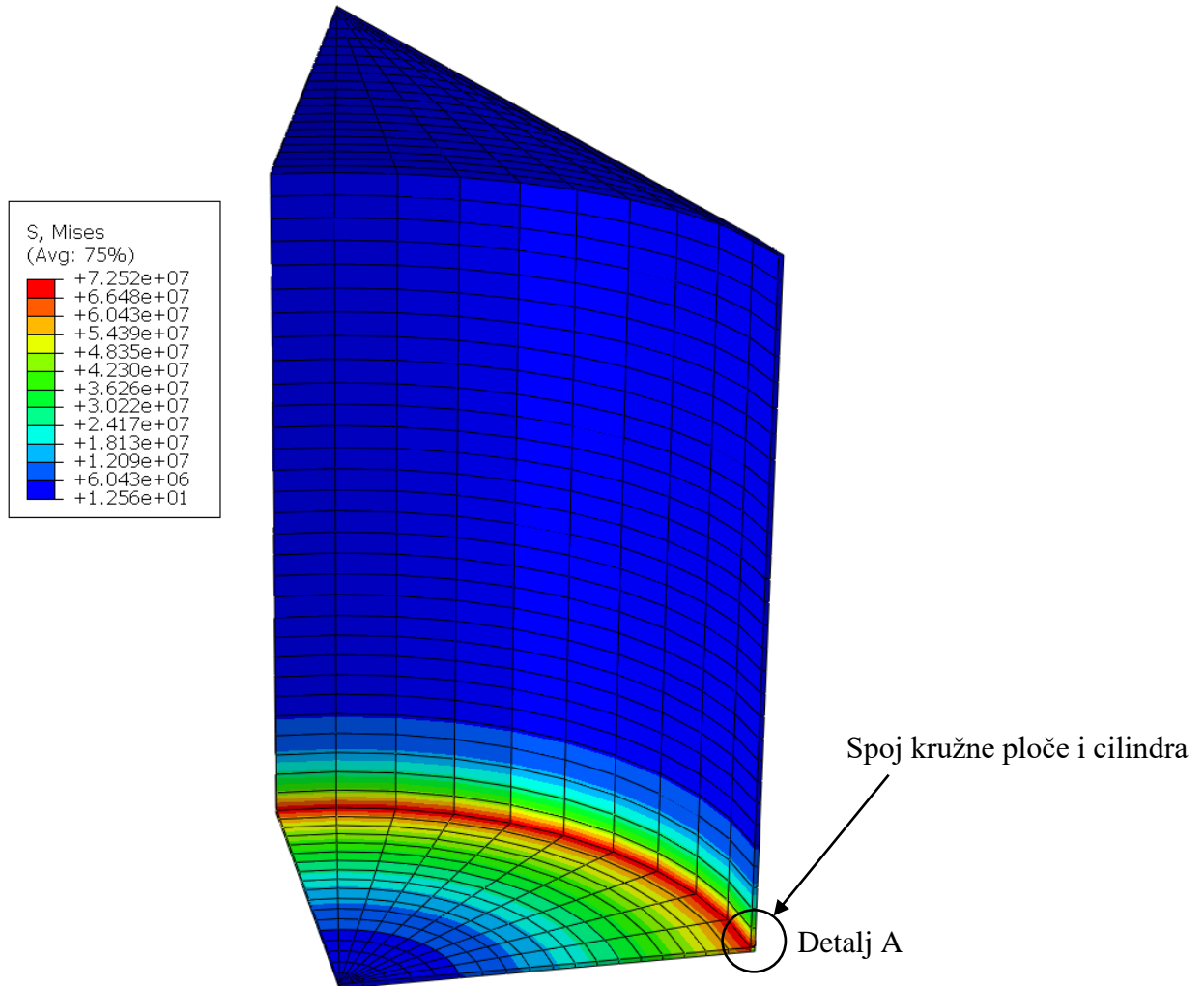
Radi loše preglednosti, što je vidljivo sa slike 26., moguće je prikazati mrežu kao četvrtinu modela. Slika 27. prikazuje istu mrežu konačnih elemenata, no mreža je prikazana kao četvrtina cijele konstrukcije koristeći *ODB Sweep* opciju koja rotira mrežu za  $90^\circ$ , radi poboljšane vizualizacije. Isti princip primijenjen je i na nadolazećim rezultatima simulacije.



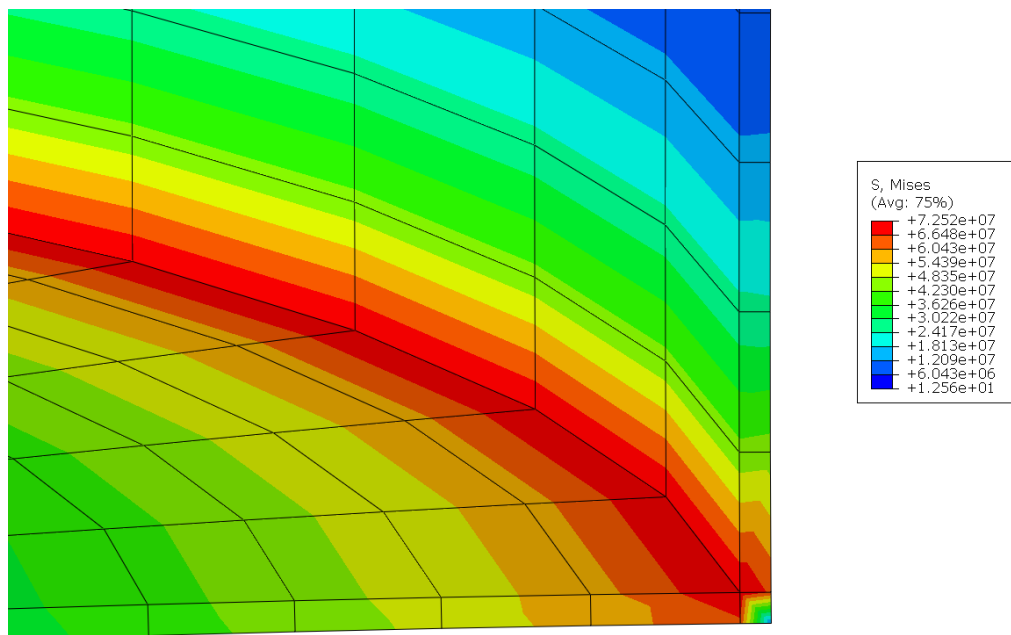
**Slika 27. Mreža sa 73 CAX4 konačnih elemenata**

Prikazana mreža ima mali broj konačnih elemenata stoga se ne mogu očekivati precizna rješenja, no kreiranje same mreže kao i proračun provedeni su znatno brži i vrijede se izvoditi kao preliminarni proračuni. Kao što je ranije navedeno analizirani će biti radijalni pomaci i ekvivalentna naprezanja na spoju cilindrične ljuske i kružne ploče. Slika 28., 29. i 30. redom prikazuje rezultate simulacije, prikazane kao ekvivalentno naprezanje prema kriteriju von Misses i ukupni radijalni pomak. Radi velikih dimenzije konstrukcije uvećan je detalj A, odnosno spoj zbog lakšeg očitavanja potrebnih podataka. U nastavku rada odmah će biti uvećan detalj A jer je taj dio konstrukcije najvažniji za analizu. Mjerna jedinica naprezanja je Paskal, a radijalnog pomaka je metar.

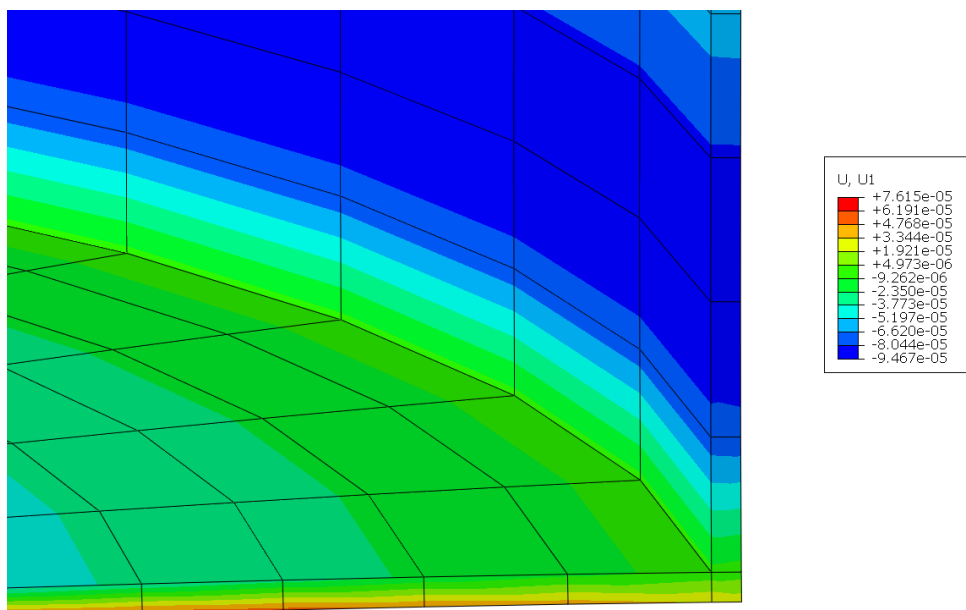




Slika 28. Napreznja na modelu s 73 CAX4 elementa u Pa



Slika 29. Uvećani detalj A napreznja prema Misses-u u Pa



Slika 30. Radijalni pomak na detalju A prikazan mrežom s 73 CAX4 elementa u m

Kao što je i očekivano vrijednosti očitane pomoću *Probe Values* funkcije ukazuju na nepreciznost zbog manjka elemenata. Tablicom 8. prikazane su relativne greške ranije analitički uspostavljenih vrijednosti i numerički dobivenih vrijednosti Abaqusom. Relativna greška proračunata je formulom:

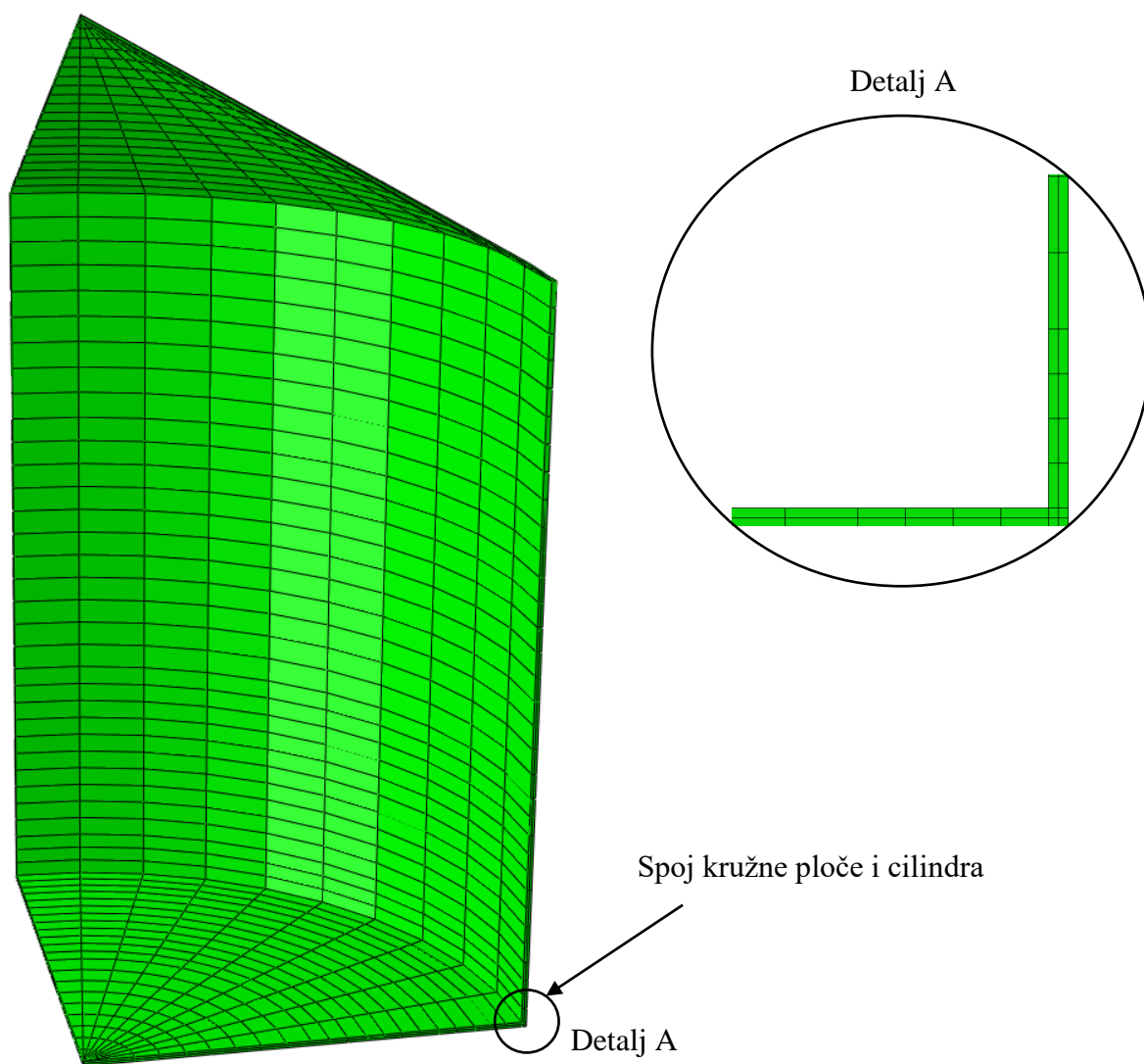
$$\text{Greška} = \frac{|\text{Analitičko rješenje} - \text{Numeričko rješenje}|}{\text{Numeričko rješenje}} \cdot 100\% \quad (42)$$

Tablica 8. Relativna greška mreže sa 73 CAX4 elementa

Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{\text{ekv}} / \text{Pa}$	$112,3 \cdot 10^6$	$72,52 \cdot 10^6$	54,854 %
$u_r / \text{m}$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$2,837 \cdot 10^{-5}$	40,293 %

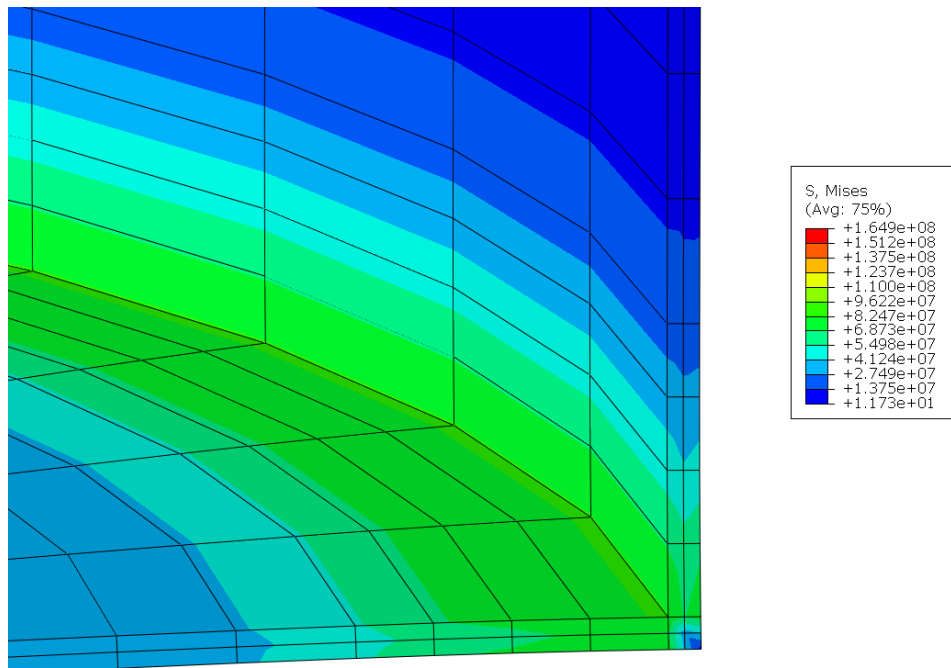
Relativna greška ekvivalentnog naprezanja kao i greška radijalnog pomaka je prevelika. Unatoč tome iz jedne mreže nikako nije moguće zaključiti točnost samih podataka te je potrebno napraviti još par mreža i dokazati da rezultati uistinu konvergiraju. Slijedeća mreža koristit će 132 konačna elemenata, no ovaj put mreža je gušća, odnosno finija, uz spoj kružne

ploče i cilindrične ljuske i rjeđa na ostatku modela kako on nije toliko važan za analizu. Slika 31., prikazuje raspodjelu gustoće mreže na numeričkom modelu. Takvom raspodjelom se povećava preciznost područja koje je potrebno analizirati, spoj, a isto tako se umanjuje broj sveukupnih konačnih elemenata što za uzvrat smanjuje potrebnu računalnu snagu te se simulacija brže provodi. Na modelu s ovako malo konačnih elemenata brzina provođenja simulacije se ne primjećuje toliko, no s povećanjem sveukupnog broja elemenata te pri analizi velikih složenih konstrukcija uvelike olakšava proračun. Na slici 31. je također prikazan i uvećani detalj A radi boljeg prikaza profinjenosti mreže.

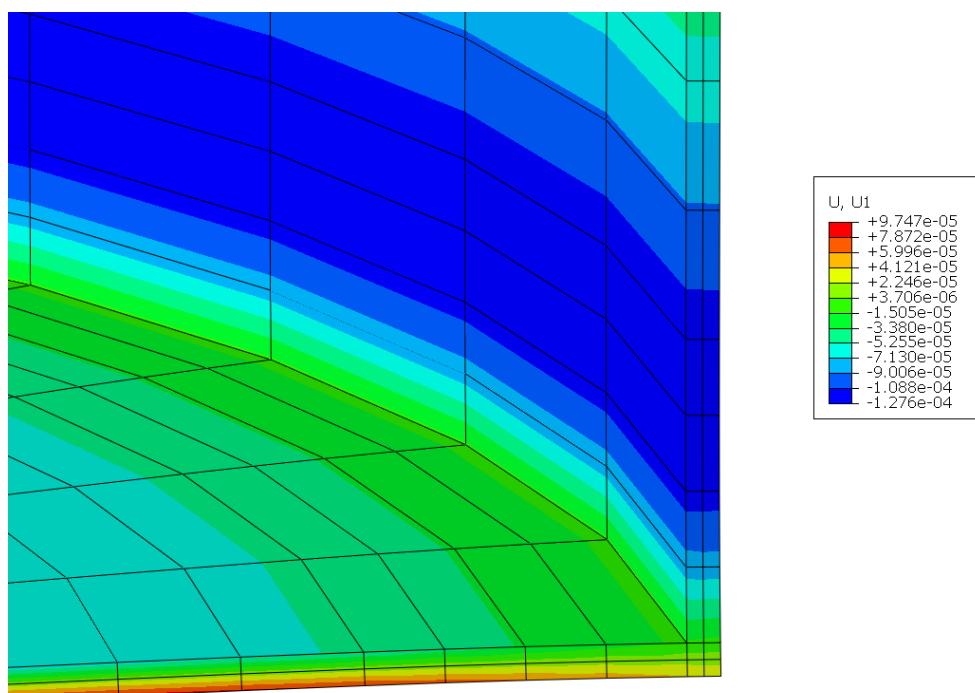


**Slika 31. Mreža sa 132 CAX4 konačnih elemenata i detalj A u 2D**

Analogno ranijoj grubljoj mreži slike 32. i 33. prikazuju ekvivalentna naprezanja i radijalni pomak.



Slika 32. Ekvivalentno naprezanja na mreži s 132 CAX4 elementa, detalj A u Pa



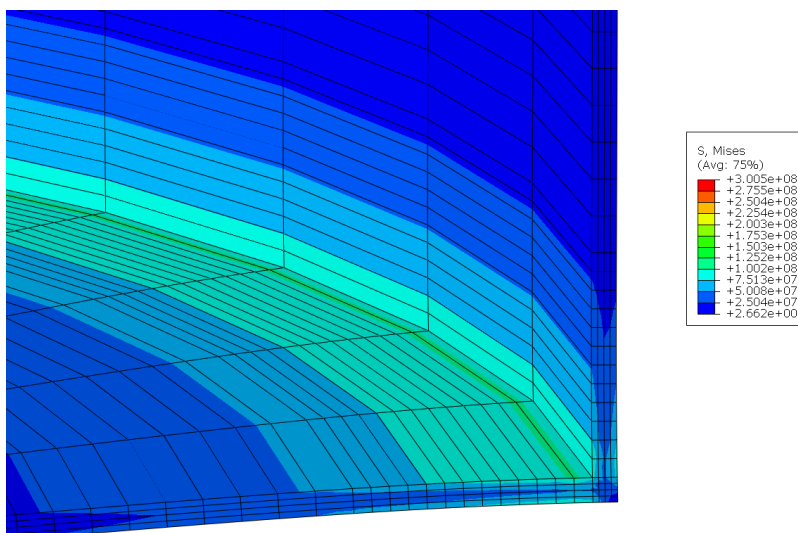
Slika 33. Radijalni pomak na mreži s 132 CAX4 elementa, detalj A u m

Već malo povećanje u broju konačnih elemenata sveukupno točnije opisuje problem, kao što je vidljivo iz tablice 9., relativnih grešaka.

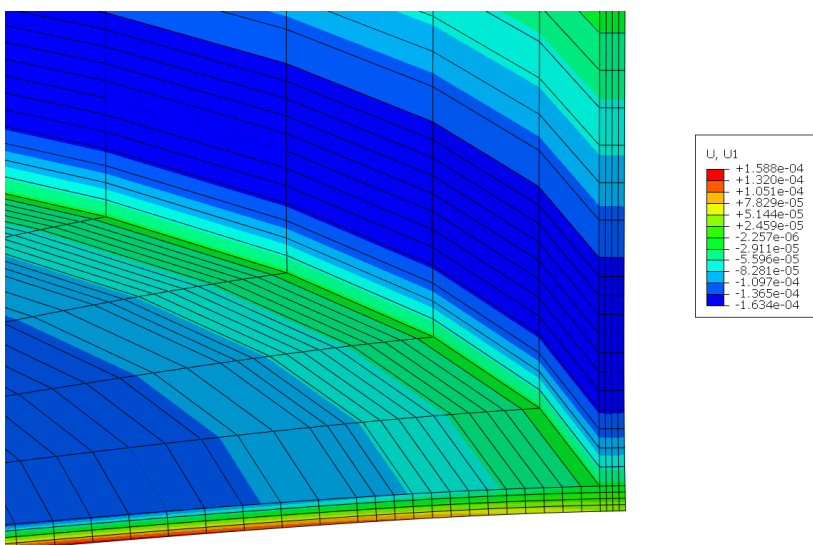
**Tablica 9. Relativna greška mreže sa 132 CAX4 elementa**

Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{ekv} / \text{Pa}$	$112,3 \cdot 10^6$	$83,13 \cdot 10^6$	35,09 %
$u_r / \text{m}$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,42 \cdot 10^{-5}$	19,289 %

Relativne greške su se smanjile što upućuje na konvergenciju mreže, no i dalje je potrebno ponovno progustiti mrežu i provesti numerički proračun. Slijedeća mreža skače u broju elemenata na 465 konačnih elemenata te je vizualno lakše primijetiti područje na kojem se mreža dodatno usitnjava, slika 34. i 35.



**Slika 34. Ekvivalentno naprezanja na mreži s 465 CAX4 elementa, detalj A u Pa**



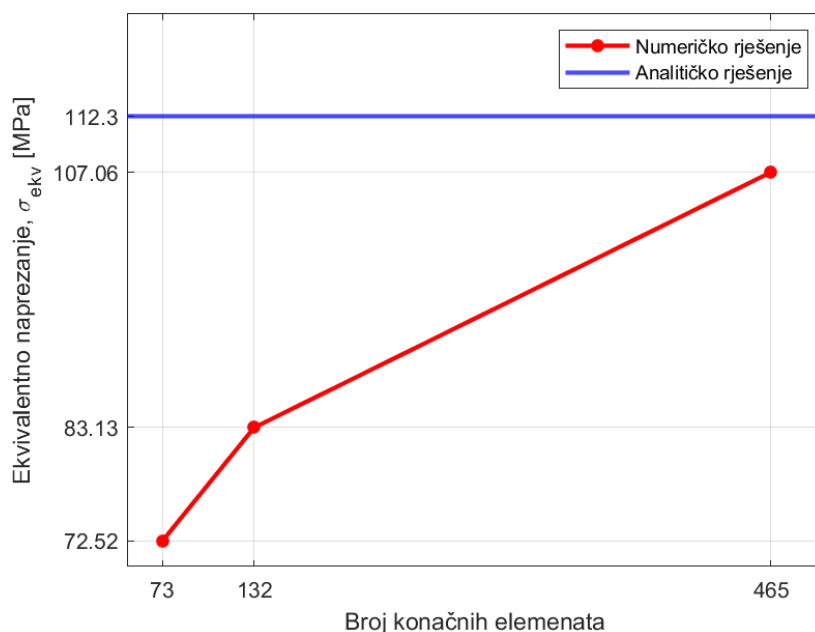
**Slika 35. Radijalni pomak na mreži s 465 CAX4 elementa, detalj A u m**

Analogno manjoj mreži, tablica 10. prikazuje relativne greške dobivene iz ove verzije numeričkog proračuna.

**Tablica 10. Relativna greška mreže sa 465 CAX4 elementa**

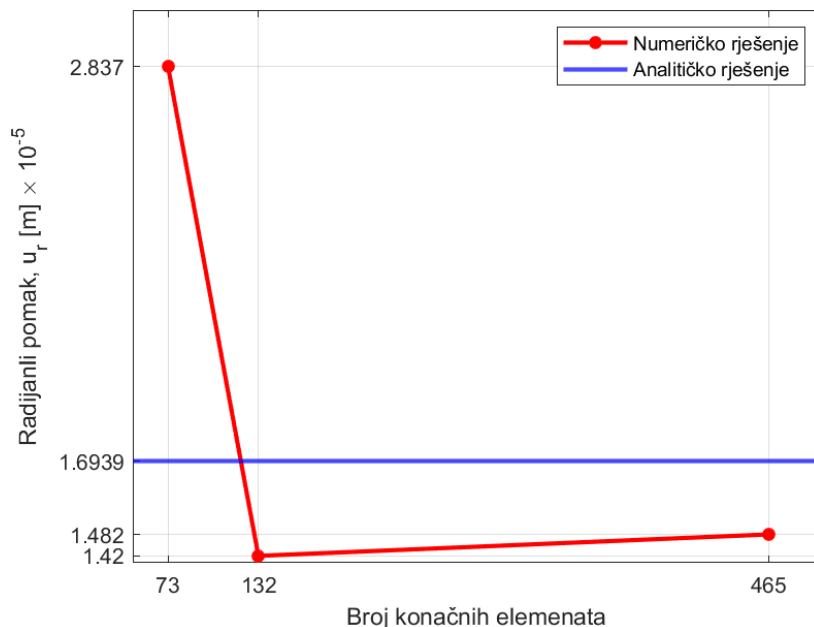
Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{\text{ekv}} / \text{Pa}$	$112,3 \cdot 10^6$	$107,06 \cdot 10^6$	4,894 %
$u_r / \text{m}$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,482 \cdot 10^{-5}$	7,962 %

Nakon ove analize moguće je potvrditi da 465 CAX4 konačna elementa dovoljno dobro opisuju pomake konstrukciju i opterećenja za inicijalne, brze i okvirne proračune. Kada bi htjeli prikazati grešku manju od 5% bilo bi potrebno povećati broj elemenata CAX4 na dosta veći broj što već usporava izradu mreže u *Mesh* modulu te također usporava računalni proračun. Slijedeća dvije slike prikazuju graf konvergencije numeričkih rješenja analitičkima s obzirom na broj konačnih elemenata. Slika 36. prikazuje konvergenciju ekvivalentnog napreznja, gdje je  $\sigma_{\text{ekv}}$  u MPa.

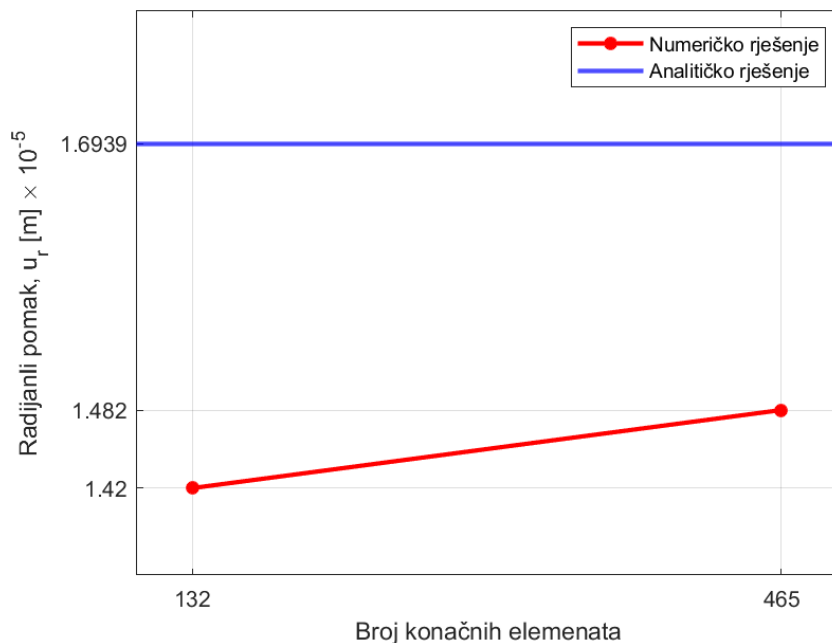


**Slika 36. Konvergencija ekvivalentnog napreznja prema broju CAX4 konačnih elemenata**

Slika 37. prikazuje konvergenciju radijalnog pomaka, gdje je  $u_r$  u metrima. Kako je prije već prikazano greška radijalnog pomaka je daleko veća od ostalih relativnih grešaka stoga narušava izgled grafa. Zbog toga je na slici 38. prikazan graf konvergencije radijalnih pomaka bez početne mreže.



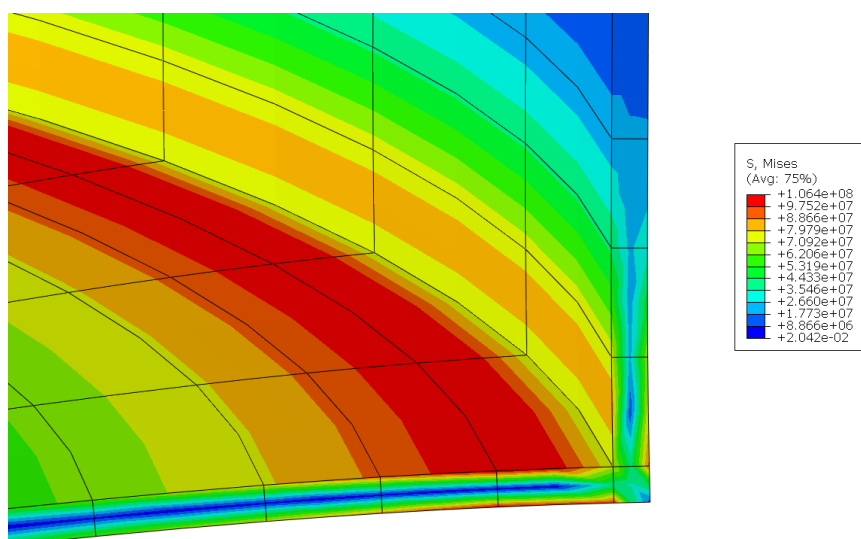
**Slika 37. Konvergencija pomaka prema broju CAX4 konačnih elemenata**



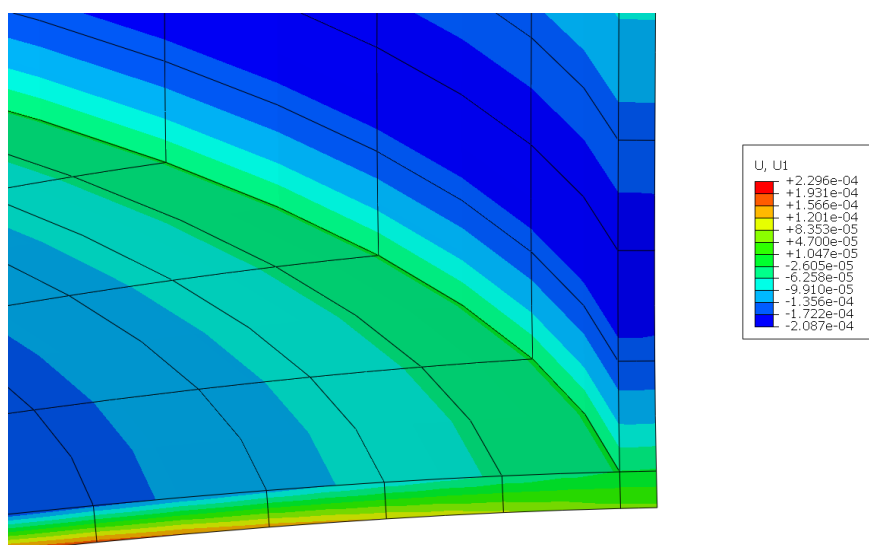
**Slika 38. Konvergencija pomaka prema broju CAX4 konačnih elemenata bez početne mreže**

3.4.1.2. Numerička analiza pomoću CAX8

Ukoliko je potrebna točnija i preciznija numerička analiza osnosimetričnih konstrukcija bolji odabir je konačni elemenat CAX8 koji ima duplo više stupnjeva slobode gibanja od ranije obrađenog CAX4. Samim time konačni elemenat CAX8 koristi se za konstrukcije složenije geometrije jer mu dodatni čvorovi omogućuju detaljniji opis konstrukcije na dijelovima nagle promjene geometrije ili opterećenja. Radi usporedbe prema broju elemenata između elemenata prvog i drugog reda broj elemenata mreže je sličan za 3 vrste raspodjele. Analogno provjeri za CAX4 konačni elemenat, slike 39. i 40. prikazuju ekvivalentna naprezanja i radijalne pomake na mreži sa 68 CAX8 konačnih elemenata, odmah uvećano u području spoja, detalj A.



Slika 39. Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 68 CAX8 elemenata u Pa



Slika 40. Radijalni pomak na mreži sa 68 CAX8 elementa u m

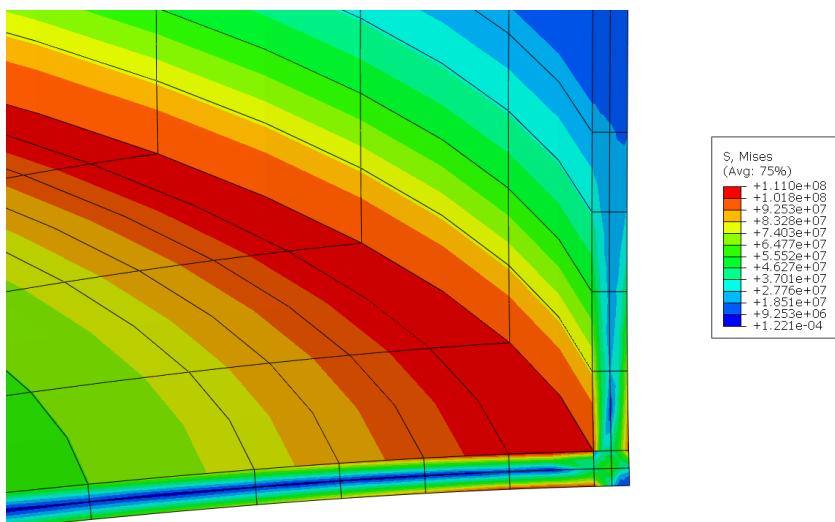


Tablica 11. prikazuje relativne greške dobivene iz ove verzije numeričkog proračuna.

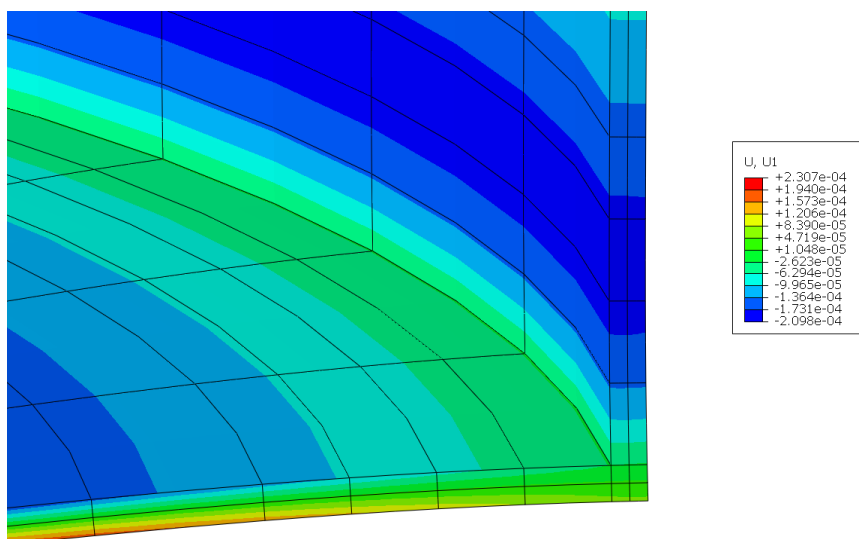
**Tablica 11. Relativna greška mreže sa 68 CAX8 elementa**

Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{ekv} / Pa$	$112,3 \cdot 10^6$	$106,386 \cdot 10^6$	5,559 %
$u_r / m$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,6335 \cdot 10^{-5}$	3,596 %

Iz tablice 11. vidljivo je da već prva iteracija CAX8 konačnim elementom pokazuje zadovoljavajuće rezultate sa sličnim brojem konačnih elemenata naspram CAX4. Zahvaljujući većem broju integracijskih točaka, prema slici 22., CAX8 s malim brojem elemenata lako analizira konstrukciju. Nadalje je prikazana gušća mreža, analogno ranijima, slike 41. i 42.



**Slika 41. Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 124 CAX8 elemenata u Pa**



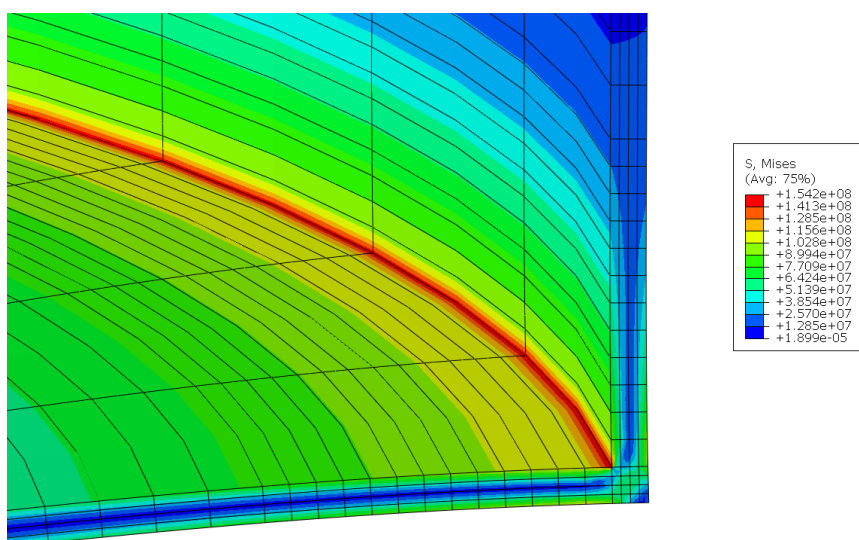
**Slika 42. Radijalni pomak na mreži sa 124 CAX8 elementa u m**

Tablica 12. prikazuje relativnu grešku mreže sa 124 CAX8 konačnih elemenata.

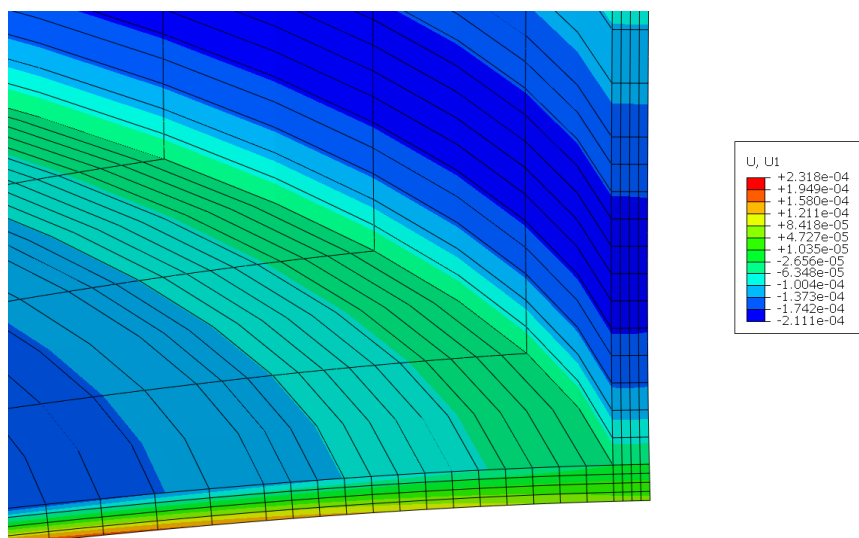
**Tablica 12. Relativna greška mreže sa 124 CAX8 elementa**

Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{\text{ekv}} / \text{Pa}$	$112,3 \cdot 10^6$	$111,042 \cdot 10^6$	1,133 %
$u_r / \text{m}$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,635 \cdot 10^{-5}$	3,698 %

Kao i očekivano iz tablice 12. rješenja numeričkog modela konvergiraju i već pri drugoj iteraciji sa 124 konačna elementa prikazuju vrlo precizna rješenja. Slijedeća mreža sastoji se od 462 konačna elementa, a slike 43. i 44. i tablica 13. prikazuju najprecizniju aproksimaciju traženih rješenja do sada.



**Slika 43. Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 462 CAX8 elemenata u Pa**



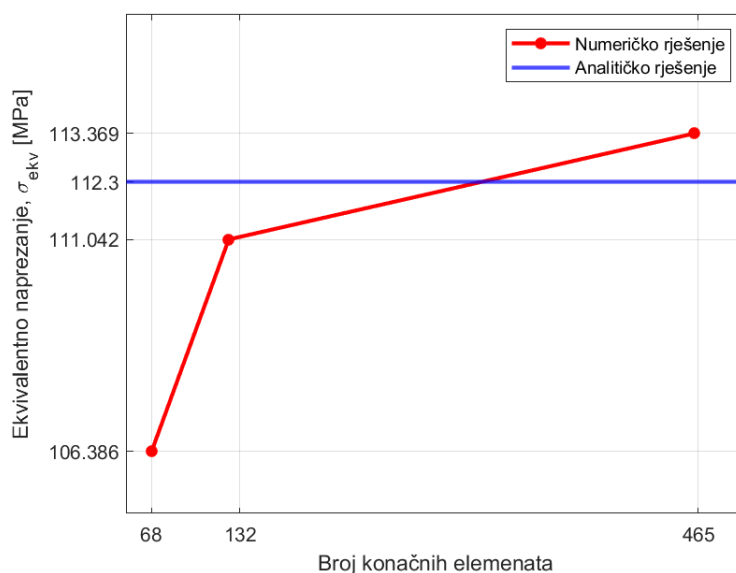
**Slika 44. Radijalni pomak na mreži sa 462 CAX8 elementa u m**

Tablica 13. prikazuje najmanje relativne greške ekvivalentnog naprezanja i radijalnog pomaka do sada. Ukoliko je ovo najmanja greška pri procesu verifikacije, istim elementom je analiziran i realni primjer u slijedećem poglavlju.

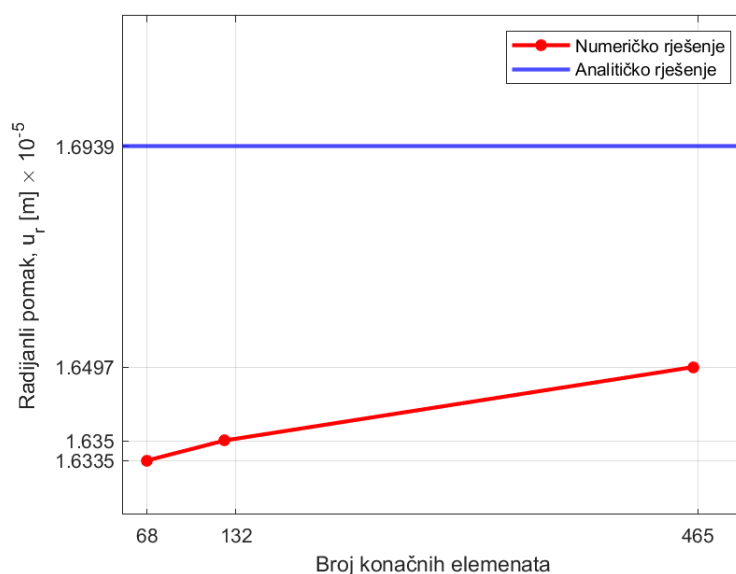
**Tablica 13. Relativna greška mreže sa 462 CAX8 elementa**

Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{ekv} / \text{Pa}$	$112,3 \cdot 10^6$	$113,369 \cdot 10^6$	0,943 %
$u_r / \text{m}$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,6497 \cdot 10^{-5}$	2,679 %

Konvergencija numeričkih rješenja prema analitičkom prikazana je slikama 45. i 46.



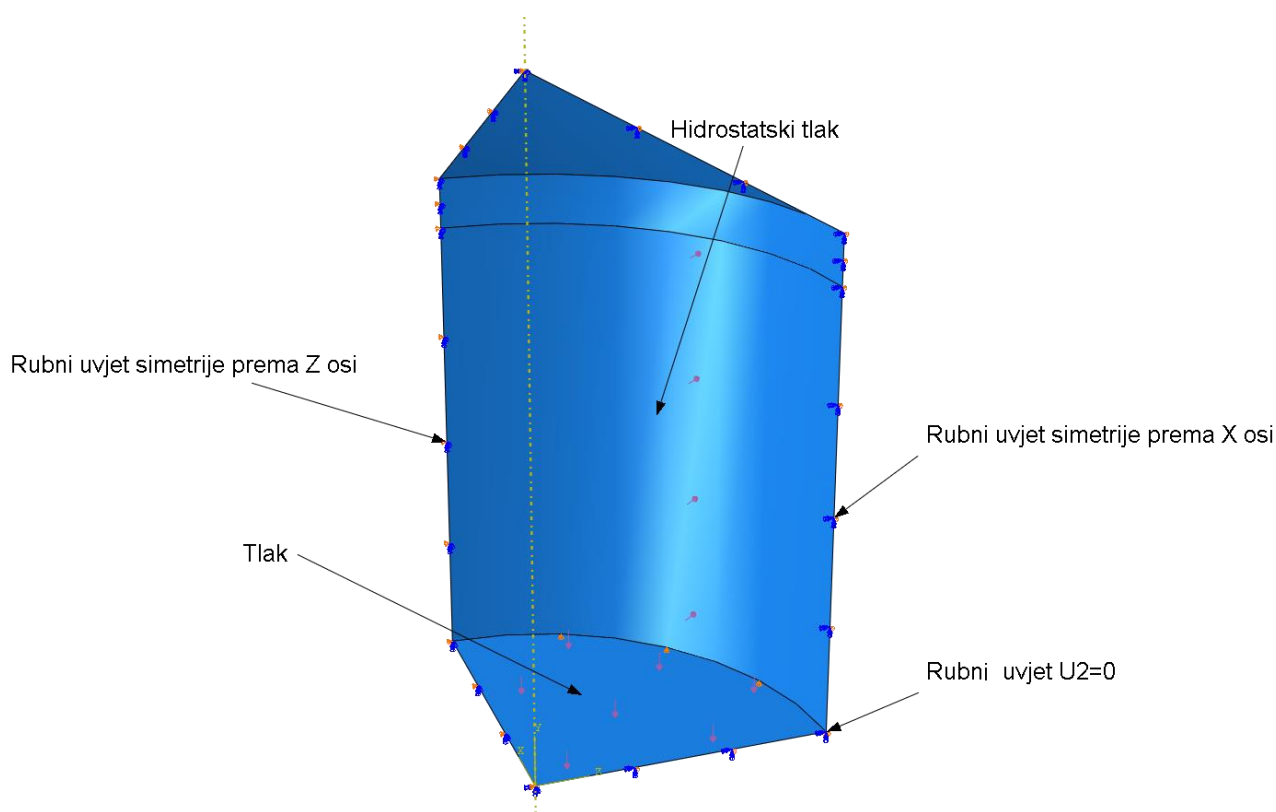
**Slika 45. Konvergencija ekvivalentnog naprezanja prema broju elemenata**



**Slika 46. Konvergencija radijalnog pomaka prema broju CAX8 konačnih elemenata**

### 3.4.2. Numerička analiza pomoću ljuskastog elementa

Za proračun ljutkastim elementom potrebno je drugačije definirati numerički model, kako je postupak većinski isti navedene su samo razlike u kreiranju. Prva i jedina znatna razlika u kreiranju modela je u modulu *Part* pri čemu je odabrana opcija 3D prostorno modeliranje, a potom je odabrana mogućnost kreiranja koristeći ljusku kao bazu (*Shell*), način kreiranja 3D modela je rotacija (*Revolution*). Nadalje je korištenje ostalih modula isto do *Load* modula gdje je potrebno unijeti još dva rubna uvjeta koja su pri kreaciji osnosimetričnog automatski dodani. To je simetrija prema *x* osi, odnosno *z* osi. Slika 47. prikazuje rubne uvjete, opterećenja i četvrtinu konstrukcije.

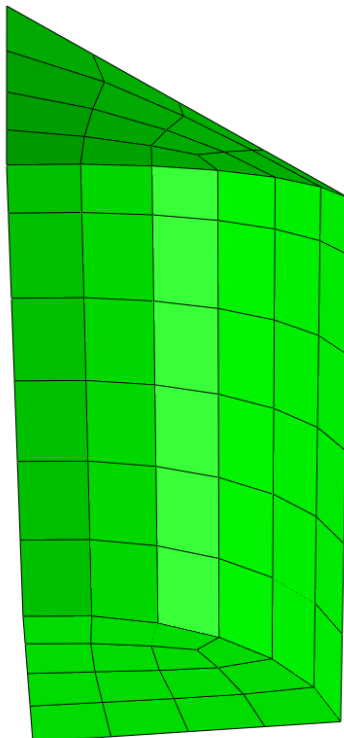


Slika 47. Rubni uvjeti ljuskastog modela

#### 3.4.2.1. Numerička analiza pomoću S4

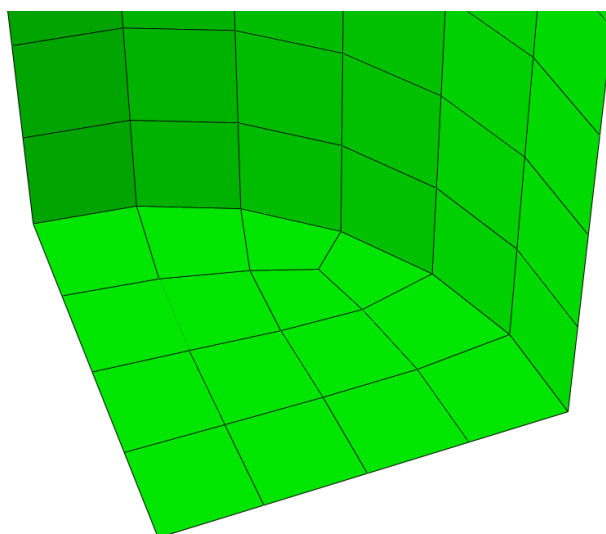
Konačan element S4 sličan je elementu CAX4 u smislu da oba imaju četiri čvora, no značajnu razliku čini broj stupnjeva slobode gibanja kojih S4 ima tri put više. Time se može zaključiti da S4 dalje detaljniju analizu u svakom čvoru. Kako je s konačnim elementom S4 moguće pratiti i zakrete svakog čvora u nadolazećim mrežama analizirati će se i konvergencija kuta zakreta na spoju koja je također izračunata ranije, slika 15.

Slika 48. pokazuje model nakon primjene mreže S4 konačnih elemenata. Budući da model nije podijeljen na područja finije i grublje mreže radi loše raspodjele elemenata iskorištena je mogućnost kontrole oblika mreže (eng. *Assign Mesh Controls*) kako bi mreža bila što ravnopravnije raspoređena.



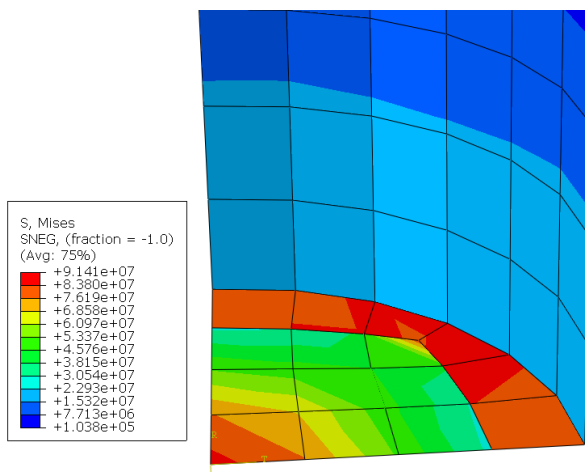
**Slika 48.** Mreža sa 66 S4 konačnih elemenata

Sa slike 48. je vidljivo da mali broj S4 elemenata vrlo grubo aproksimira geometriju konstrukcije, točnije kružnu ploču. Isto je prikazano uvećano slikom 49.

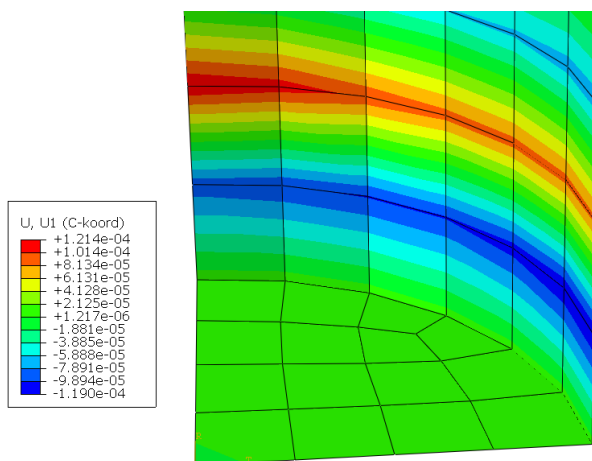


**Slika 49.** Uvećani detalj grube aproksimacije

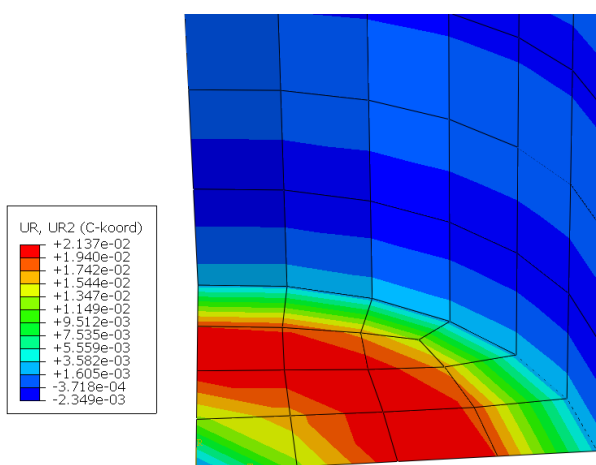
Rješenja ekvivalentnog naprezanja i radijalnog pomaka kao i kuta zakreta prikazana su slikama 50-52. Vrijedi napomenuti da su rješenja prikazana u cilindričnom koordinatnom sustavu koji je primijenjen radi analogije s osnosimetričnim rješenjima.



Slika 50. Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 66 S4 elemenata u Pa



Slika 51. Radijani pomak na mreži sa 66 S4 elemenata u m



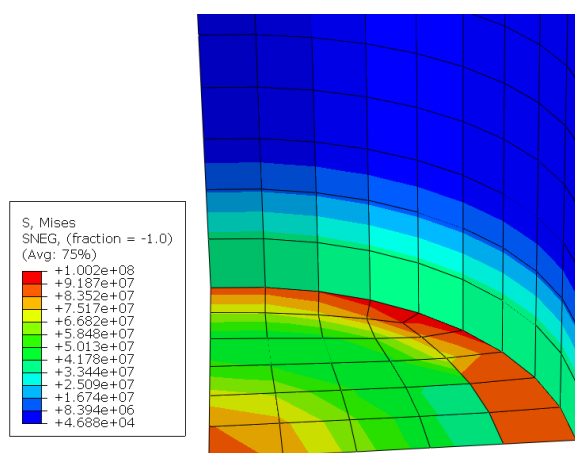
Slika 52. Zakret na mreži sa 66 S4 elemenata u rad

Uvidom u tablicu 14., koja prikazuje relativnu grešku proračunate mreže u usporedbi s analitičkim rješenjem, jasno je da ovako rijetka mreža ne opisuje konstrukciju zadovoljavajuće.

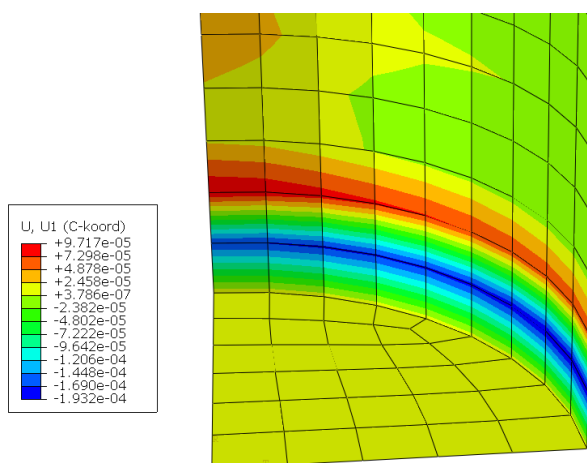
**Tablica 14. Relativna greška mreže sa 66 S4 elementa**

Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{\text{ekv}} / \text{Pa}$	$112,3 \cdot 10^6$	$78,88 \cdot 10^6$	42,368 %
$u_r / \text{m}$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,2183 \cdot 10^{-5}$	39,038 %
$\alpha / \text{rad}$	0,00410764	0,0027605	48,801 %

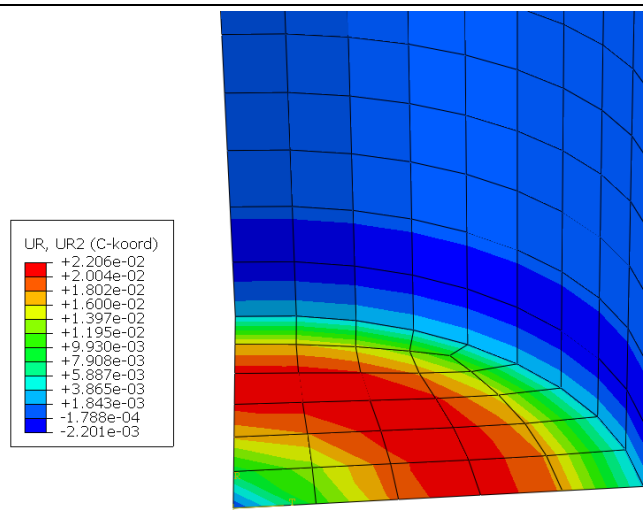
Kao što je ranije objašnjeno prikazani su i rezultati zakreta na spoju ploče i cilindra. Rezultati su, kao i očekivano, znatno drugačiji od analitičkih stoga je potrebno mrežu progustiti i ponovno proračunati. Mreža sa 157 elemenata je prikazana slijedećim slikama, slike 53.-55.



**Slika 53. Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 157 S4 elemenata u Pa**



**Slika 54. Radijani pomak na mreži sa 157 S4 elemenata u m**



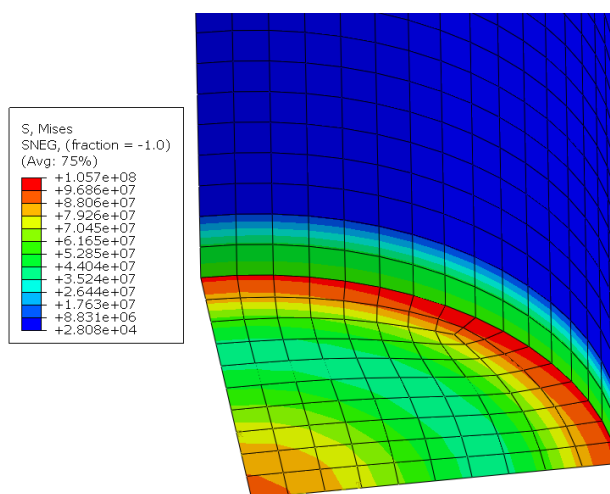
Slika 55. Zakret na mreži sa 157 S4 elemenata u rad

Analogno ranijim proračunima, tablica 15. prikazuje relativne greške.

Tablica 15. Relativna greška mreže sa 157 S4 elementa

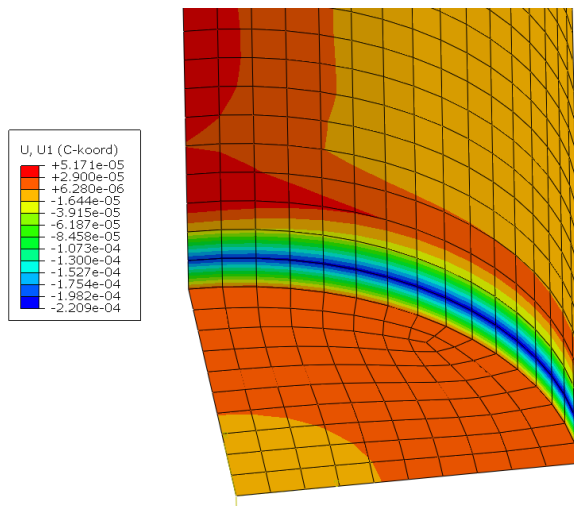
Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{ekv} / Pa$	$112,3 \cdot 10^6$	$86,37 \cdot 10^6$	30 %
$u_r / m$	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,51096 \cdot 10^{-5}$	12,108 %
$\alpha / rad$	0,00410764	0,0035611	15,348 %

Iz tablice 15. je vidljivo da rješenja konvergiraju, no i dalje ne zadovoljavaju. Isto će biti potvrđeno daljnjim povećanjem broja elemenata. Slijedeća mreža sastoji se od 496 konačnih elemenata, slike 56.-58..

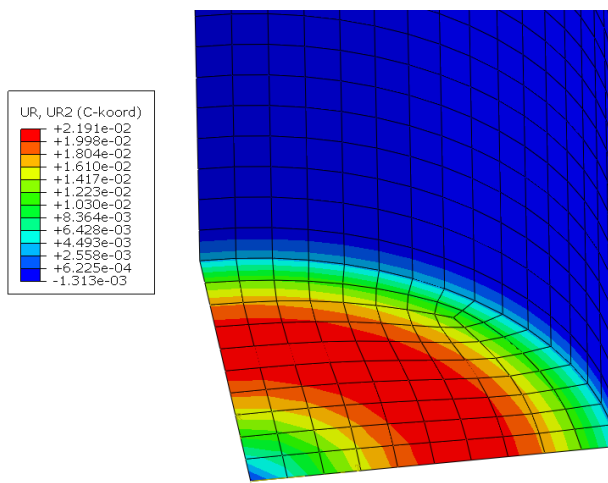


Slika 56. Ekvivalentno naprezanje na mreži sa 496 S4 elemenata u Pa





Slika 57. Radijani pomak na mreži sa 496 S4 elemenata u m



Slika 58. Zakret na mreži sa 496 S4 elemenata u rad

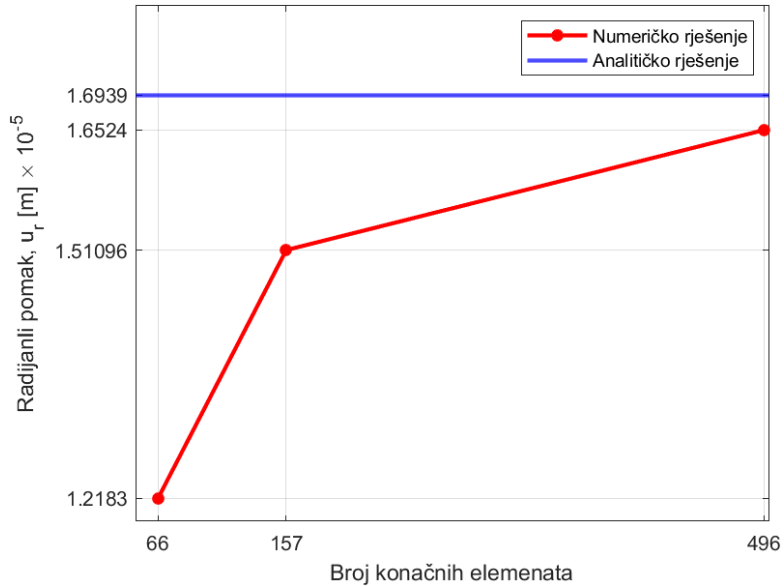
Tablica 16. prikazuje konvergenciju ove numeričke mreže konačnih elemenata.

Tablica 16. Relativna greška mreže sa 496 S4 elementa

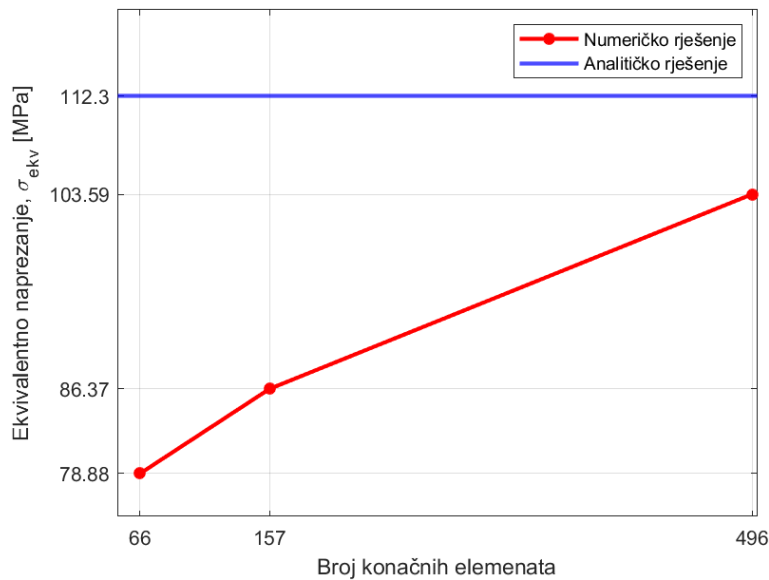
Veličina	Analitička rješenja	Numerička rješenja	Relativna greška
$\sigma_{ekv}$ /Pa	$112,3 \cdot 10^6$	$103,59 \cdot 10^6$	8,408 %
$u_r$ /m	$1,6939 \cdot 10^{-5}$	$1,6524 \cdot 10^{-5}$	2,511 %
$\alpha$ /rad	0,00410764	0,003908	5,108 %

Iz tablice 16. je vidljivo kako ljuskasti konačni elementi S4 približno točno opisuju posebno radijalne pomake, malo manje zakrete, no relativna razlika ekvivalentnih naprezanja je najveća

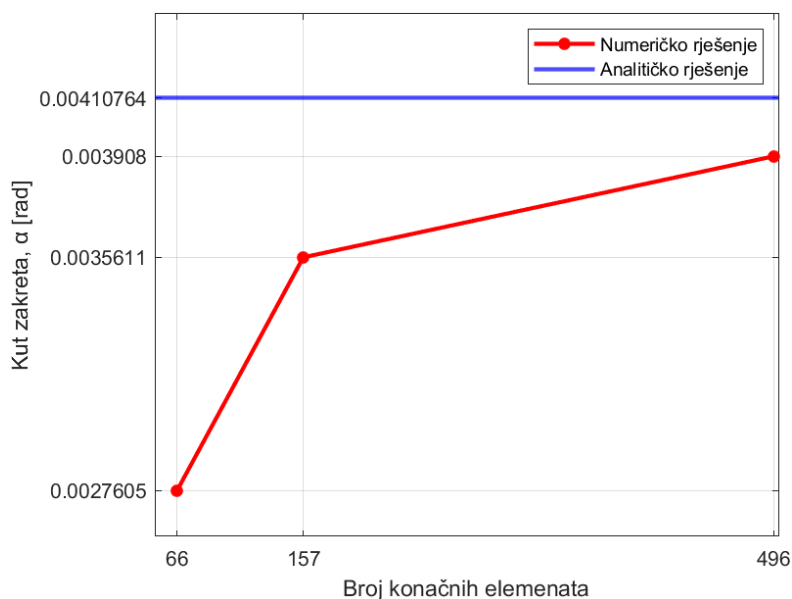
između svih obrađenih konačnih elemenata. Naravno kao i kod ostalih konačnih elemenata potrebno je prikazati konvergenciju rješenja, u ovom slučaju budući da su proračunati iznosi kuta zakreta isti su i prikazani dijagramom, slike 59.-61.



**Slika 59. Konvergencija ekvivalentnog naprezanja prema broju elemenata**



**Slika 60. Konvergencija radijalnog pomak prema broju elemenata**



**Slika 61. Konvergencija kuta zakreta prema broju elemenata**

Uvidom u konačne relativne razlike radijalnih pomaka i ekvivalentnih naprezanja jednostavno se razaznaje konačni element koji najbolje opisuje konstrukciju i njena opterećenja, a to je CAX8 konačni element. Ovaj zaključak mogao je biti donesen i ranije budući da je to jedini element drugog reda od tri analiziran što mu uz veći broj integracijskih točaka omogućava bolji proračun i prikaz traženih veličina. Kako je u realnom numeričkom proračunu tanka kružna ploča položena na betonski temelj nije nužno proračunati kut zakreta u dijelovima konstrukcije stoga konačni element S4 nema prednost nad CAX8 koji nema eksplicitno tu mogućnost. Kako postoji i ljuskasti element drugog reda, konačni element S8, koji nije obrađen u verifikaciji vrijedi naglasiti da je isti mogao biti korišten za analizu realnog vertikalnog spremnika. CAX8 konačni element izabran je umjesto S8 radi osnosimetričnosti geometrije spremnika i primijenjenih opterećenja. Time se uz olakšano modeliranje problema, prijelaz iz 3D problema u 2D problem, postiže i smanjenje potrebne računalne snage za provedbu cijele simulacije. Budući da je realan vertikalni spremnik opisan puno većim brojem konačnih elemenata za razliku od spremnika za verifikaciju ovo pojednostavljenje problema uvelike ubrzava i omogućava efikasniju analizu. Slijedi numerički proračun realnog vertikalnog nadzemnog spremnika koristeći CAX8 konačni element.

## 4. Numerički proračun realnog spremnika

Nakon verifikacije konačnih elemenata te izbora najboljeg za numeričku analizu napokon je moguće analizirati realan spremnik, prema slici 4. odnosno tablici 1. Kako bih se numerička analiza spremnika što više približila realnim uvjetima na spremnik će djelovati vlastita težina krova, cilindrične ljuske i dna, odnosno tanke kružne ploče, te vanjski čimbenici, odnosno vjetar i snijeg.

### 4.1. Opterećenja realnog modela

Ovim poglavljem definirana su opterećenja modela. Prvo su obrađene težine modela koristeći dimenzije iz tablice 1., a nakon toga definirano je opterećenje vjetra pa snijega. Slijedeća tablica prikazuje masu dijelova spremnika uz male preinake radi pojednostavljenja, tablica 17.

**Tablica 17. Masa krova, cilindrične ljuske i dna**

Dio	Masa
Krov	1926 kg
Cilindrična ljuska	11507 kg
Dno	3332 kg

Nadalje, potrebno je modelirati opterećenja vjetra i snijega prema pripadajućim konvencijama. Ponajprije modelirano je opterećenje vjetra koje je razdvojeno na opterećenje cilindra i opterećenje krova, a kasnije je definirano opterećenje snijega. Slijedi proračun opterećenja vjetra prema [11].

Područje cilindra pod utjecajem:

$$A_{\text{ref}} = d_c h_c = 93,87 \text{ m}^2. \quad (43)$$

Iznos osnovne brzine vjetra iščitana je iz [12] i za odabrano područje iznosi:

$$v_b = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (44)$$

Nadalje, potrebno je odrediti faktore  $k_r$ , faktor terena, i  $c_r$ , faktor hrapavosti, koji ovise o kategoriji terena, u ovom slučaju II kategorija:

$$k_r = 0,19, \quad (45)$$

$$c_r = 0,9867. \quad (46)$$

Pomoću njih moguće je odrediti srednju brzinu vjetra, uz faktor orografije  $c_0 = 1$ :

$$v_m = c_r \cdot c_0 \cdot v_b = 24,6675 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (47)$$

Nadalje, potrebno je proračunati intenzitet turbulencije,  $I_V$ :

$$I_V = \frac{1}{c_0 \ln\left(\frac{z_e}{z_0}\right)} = 0,1925, \quad (48)$$

gdje je  $z_e = h_c$ , a  $z_0 = 0,05$  je definirano kategorijom terena II. Time je moguće izračunati osnovni tlak brzine:

$$q_b = \frac{1}{2} \rho v_b^2 = 0,391 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad (49)$$

gdje je  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$  prema [11]. Konačno, moguće je proračunati maksimalni tlak brzine putem jednadžbe:

$$q_p = (1 + 7 \cdot I_V) \cdot q_b = 0,918 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (50)$$

Efektivna vitkost izabrana je prema:

$$\lambda = \min\left(\frac{h_c}{d_c}, 70\right) = 0,8629. \quad (51)$$

Prema slici (Figure 7.36) iz [11] uz  $\varphi = 1$  približni faktor  $\psi_\lambda$  iznosi 0,6. Nadalje, prema slici (Figure 7.28) iz [11] uz  $\frac{k}{b} \leq 10^{-5}$  i  $Re \approx 17,38 \cdot 10^6$  moguće je iščitati faktor  $c_{f,0} = 0,7$ . Faktor sile sada jednak je:

$$c_f = c_{f,0} \cdot \psi_\lambda = 0,455. \quad (52)$$

Napokon, ukupna sila vjetra jednaka je:

$$F_w = c_s c_d \cdot c_f \cdot q_p \cdot A_{\text{ref}} = 39,21 \text{ kN}. \quad (53)$$

Efektivni pritisak vjetra slijedi:

$$w_{\text{efljuska}} = \frac{F_w}{A_{\text{ref}}} = 0,4177 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (54)$$

Kako je krov konični pod kutom od  $30^\circ$  nije precizno definiran normama stoga će biti primijenjena najsličnija norma za kosi krov od  $30^\circ$ , a najgori slučaj u tom smislu je koeficijent za vanjski pritisak u iznosu od 0,7. Time je efektivni pritisak vjetra na krov:

$$w_{\text{efkrov}} = w_{\text{efljuske}} \cdot 0,7 = 0,2924 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (55)$$

Budući da pojednostavljeni model konstrukcije nije proračunat s otvorima i prozorima unutarnji pritisak vjetra neće biti uračunat. Slijedeće na redu je opterećenje izazvano težinom snijega, prema [13]. Za isto područje odabrano na karti preuzeta je, prema [14], karakteristična vrijednost opterećenja snijega u iznosu od:

$$s_k = 1,25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (56)$$

Proračun efektivnog opterećenja snijega dosta je jednostavniji od proračuna za vjetar, a glasi:

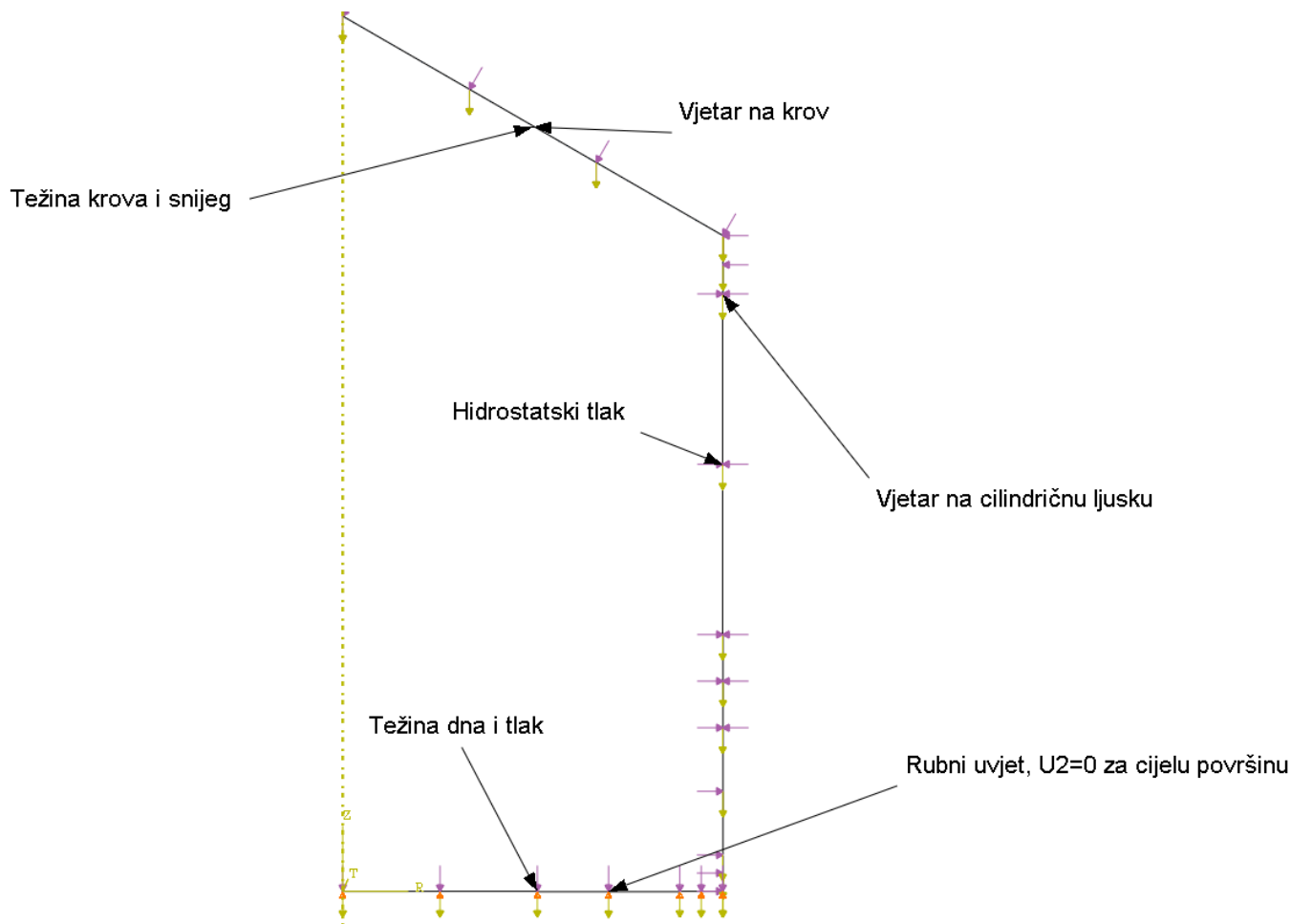
$$s = \mu_i C_e C_t s_k. \quad (57)$$

- Gdje su
- $C_e = 1$ , vrijednost faktora topografije,
  - $C_t = 1$ , termalni faktor,
  - $\mu_i = 0,8$ , faktor oblika krova za krov pod kutom od  $30^\circ$ .

Time je lako proračunati efektivnu vrijednost snijega:

$$s = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \quad (58)$$

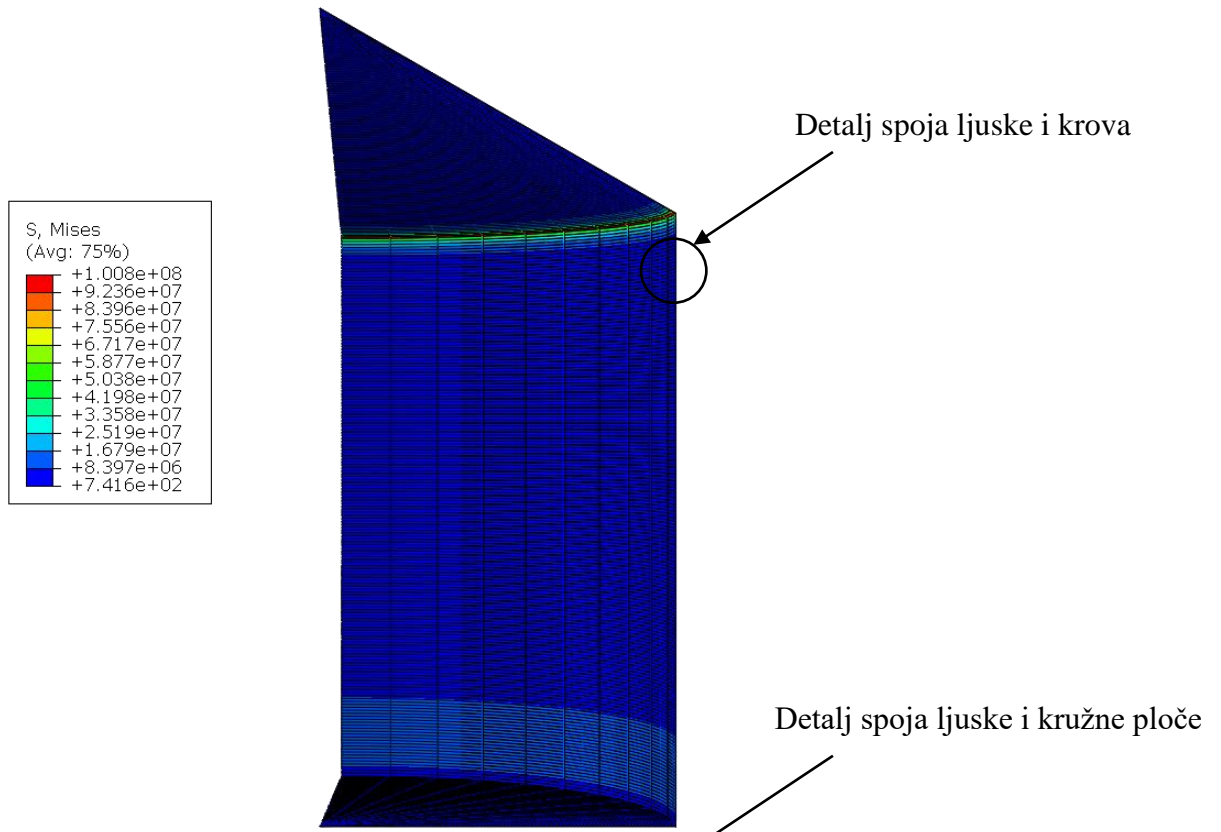
Naravno s novim opterećenjima potrebno je ponovno definirati opterećenja u *Load* modulu, odnosno dodati nova. Težine krova, ljsuke i dna unešeni su koristeći *Body force* način opterećenja dok su vjetar i snijeg primijenjen kao tlak na površinu. Naravno hidrostatski tlak definiran je kao i na ranijim simulacijama. Isto je prikazano slikom 62.



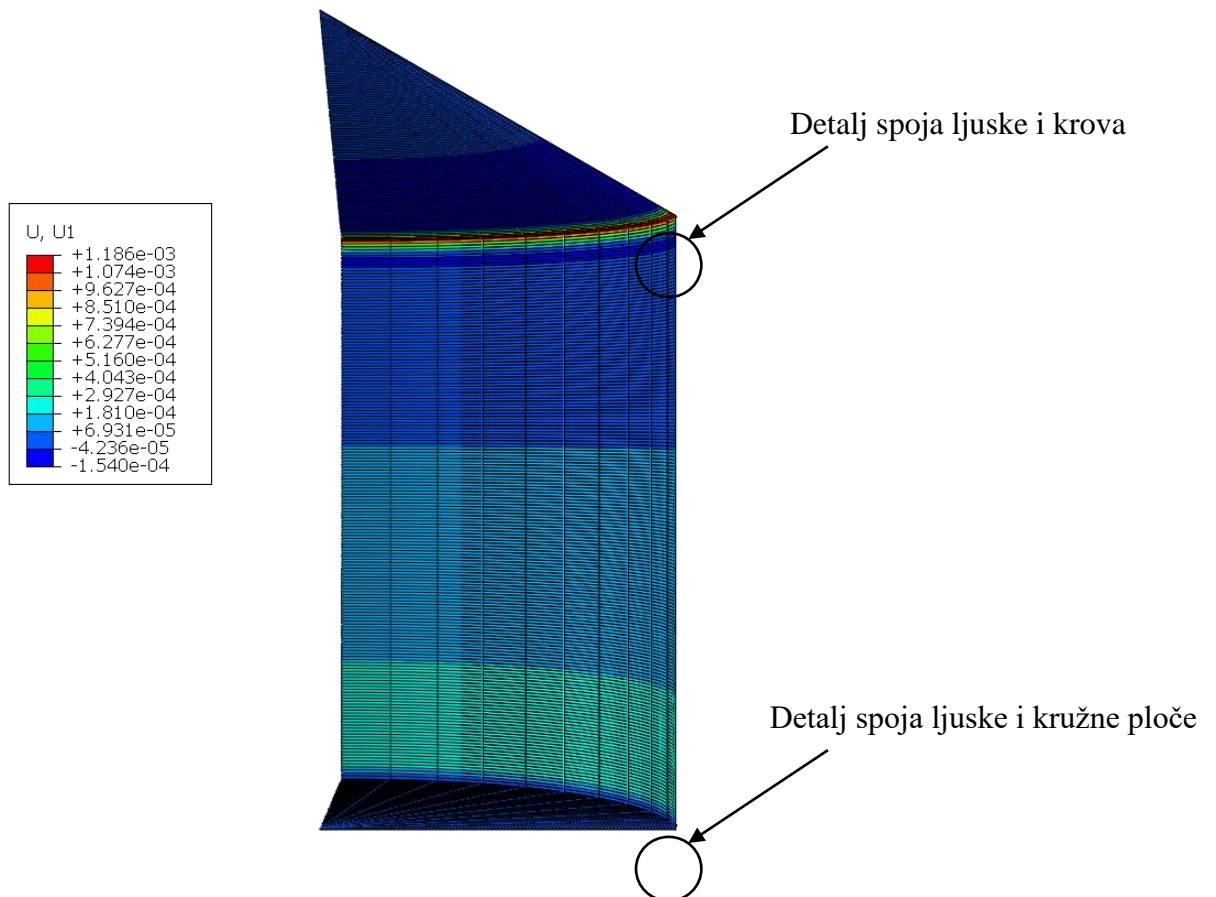
Slika 62. Opterećenja realnog modela

#### 4.2. Proračun realnog spremnika

Kako je ranije prikazano tokom verifikacije da i najmanja mreža CAX8 konačnih elemenata poprilično precizno opisuje konstrukciju, isti princip s tri varirajuće gustoće mreže primijenjen je i na realnom modelu. Radi uvođenja novih opterećenja više nije potpuno jasno gdje će se pojaviti najveća naprezanja stoga mreža na spoju tanke kružne ploče i cilindrične ljuske nije dodatno profinjena odnosno gušća. Analizirani su, kao i tokom verifikacije, maksimalno ekvivalentno naprezanje i radijalni pomak tanke kružne ploče. Kako je model znatno veći za pravilan numerički proračun potrebno je i povećati broj konačnih elemenata što nije moguće koristeći studentsku verziju koja je ograničena na 1000 čvorova već akademsku verziju Abaqusa. Slike 63. i 64. prikazuju ekvivalentna naprezanja i radijalne pomake na prvoj mreži realnog modela, opisan je s 819 CAX8 elemenata. Slike 63. - 82. su prikazane nedeformirane, a pri kraju je dan pregled deformacija konstrukcije.



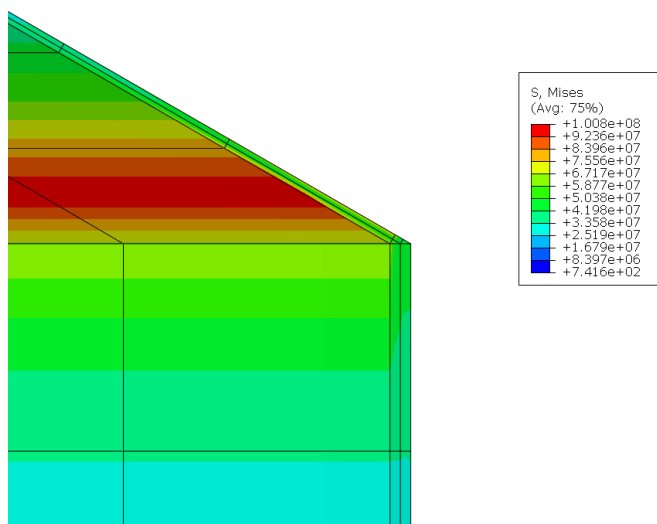
Slika 63. Ekvivalentno naprezanje na mreži s 819 CAX8 elemenata u Pa



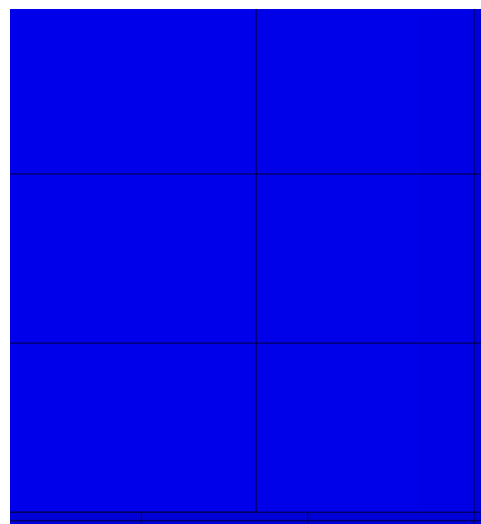
Slika 64. Radijalni pomak na mreži s 819 CAX8 elemenata u m



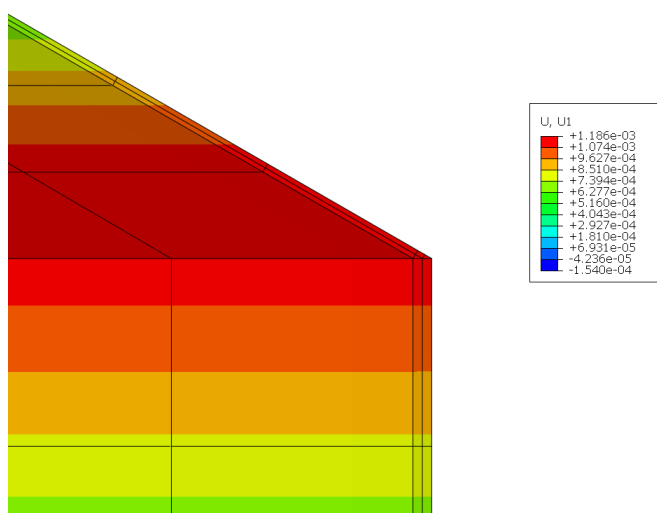
Sa slike 63. je vidljivo da maksimalno naprezanje više nije u spoju kružne ploče i cilindrične ljuske već ljuske i krova, što se može pripisati povećanjem opterećenja na krov, kojih u analitičkom modelu nije bilo. Sa slike 64. je vidljivo da radijalni pomak više nije najveći na spoju kružne ploče i cilindrične ljuske. Budući da je teško razaznati rješenja na prikazu cijelog modela slijedeće slike, 65.-68., prikazuju uvećane detalj spoja ljuske i krova te ljuske i tanke kružne ploče.



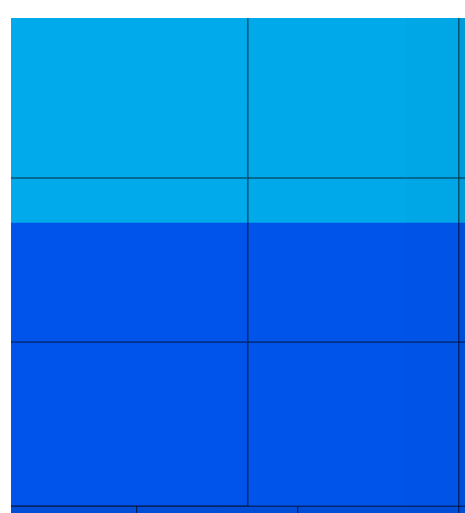
Slika 65. Uvećani detalj naprezanja krova



Slika 66. Uvećani detalj naprezanja tanke kružne ploče



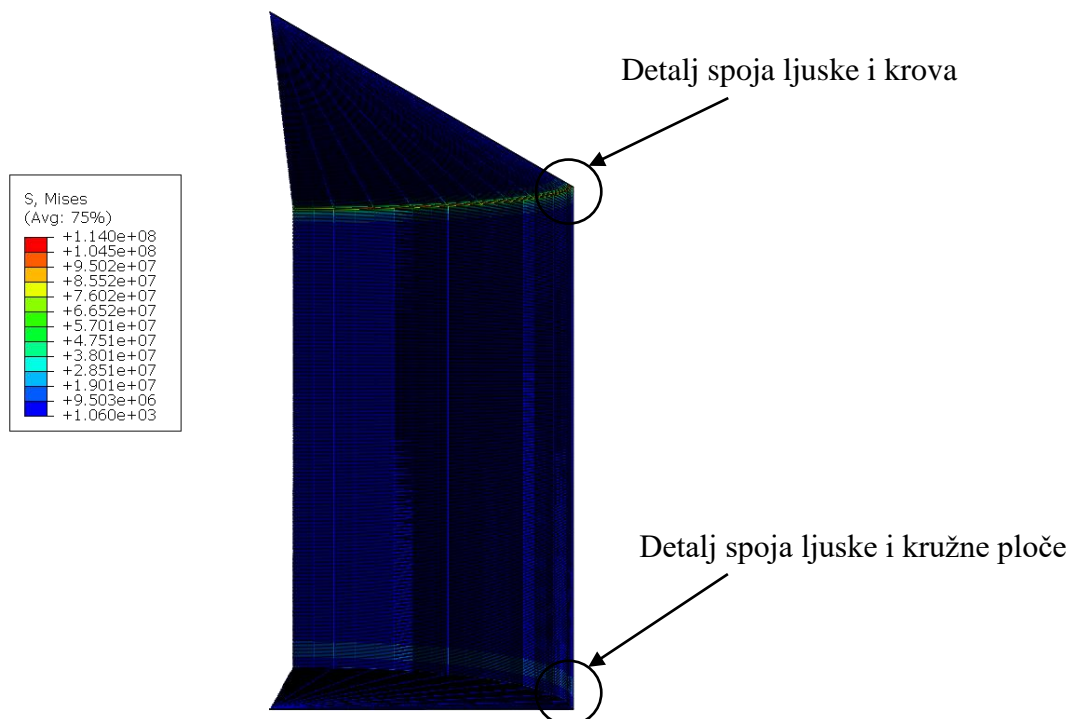
Slika 67. Uvećan detalj pomaka krova



Slika 68. Uvećan detalj pomaka tanke kružne ploče

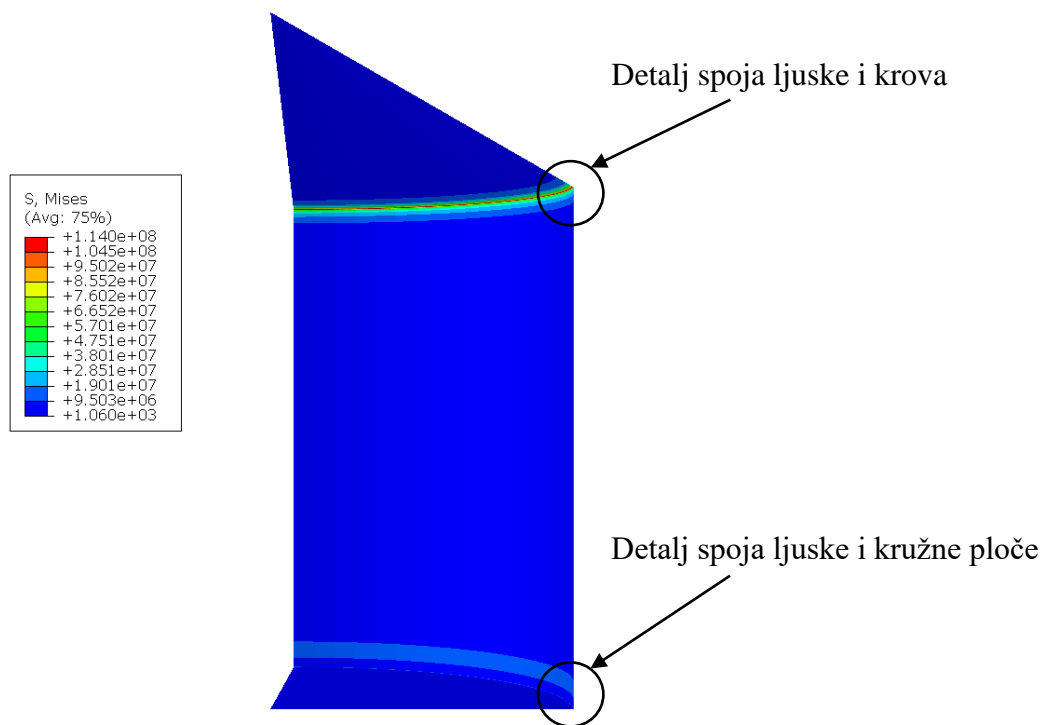
Iz slika 65.-68. je vidljiva raspodjela konačnih elemenata, na spojevima s ljuskom je gušća kako bih se bolje opisala promjena geometrije. Slike dijele legendu stoga je prikazana samo jedna.

Nadalje, prikazano je ekvivalentno naprezanje na finijoj mreži s 1627 konačnih elemenata.



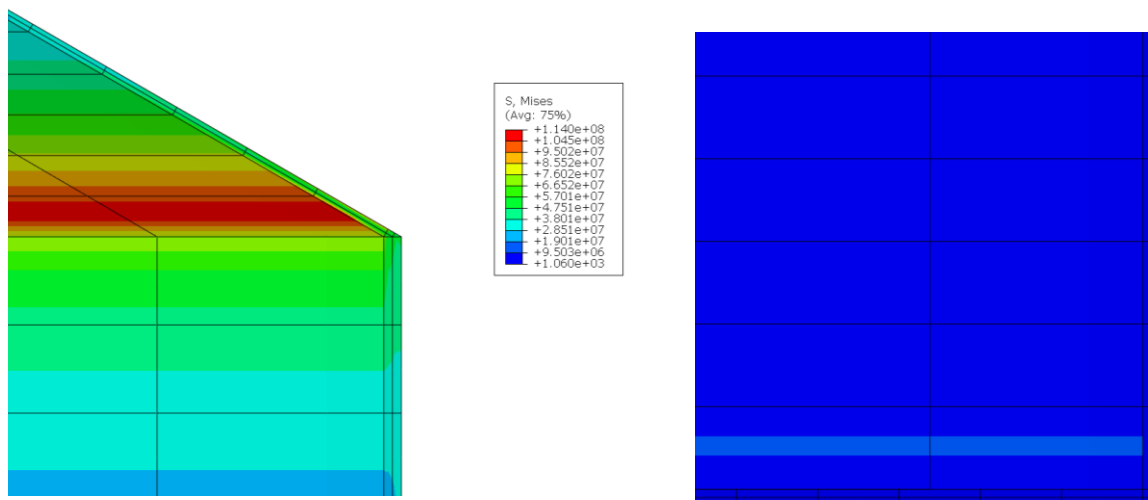
Slika 69. Ekvivalentno naprezanje na mreži s 1627 CAX8 elemenata u Pa

Zbog velikog broja konačnih elemenata sa prikaza mreže na cijelom modelu nije moguće lako uočiti raspodjelu naprezanja. Zbog toga mreže cijelih modela su prikazane bez rubova konačnih elemenata, kao što je prikazano slikom 70.



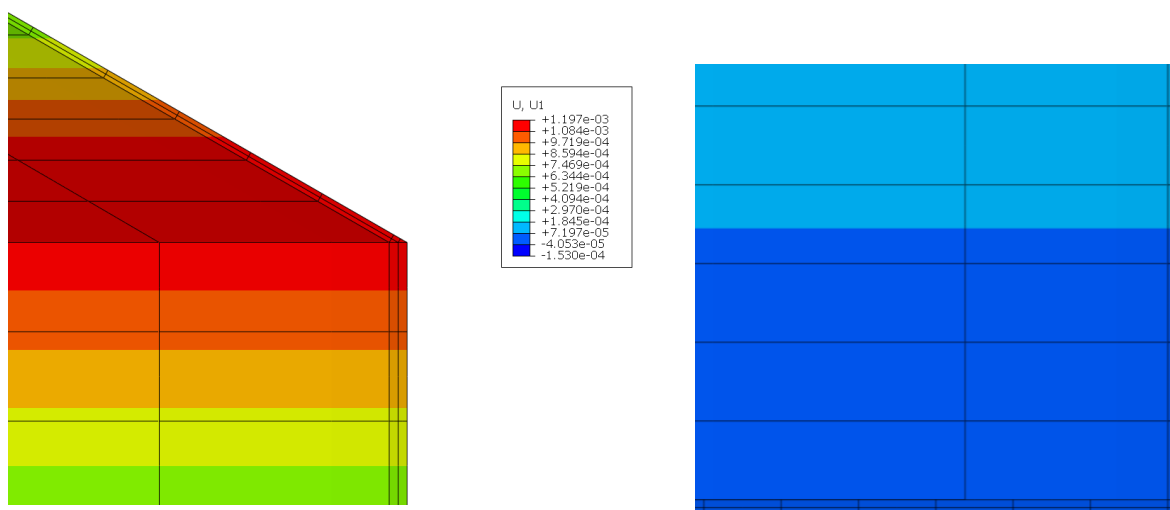
Slika 70. Ekvivalentno naprezanje na mreži s 1627 CAX8 elemenata bez rubova u Pa

Uvećani detalji za mrežu sa 1627 CAX8 konačnih elemenata prikazani su slikama 71.-74.



Slika 71. Uvećani detalj napreznanja krova

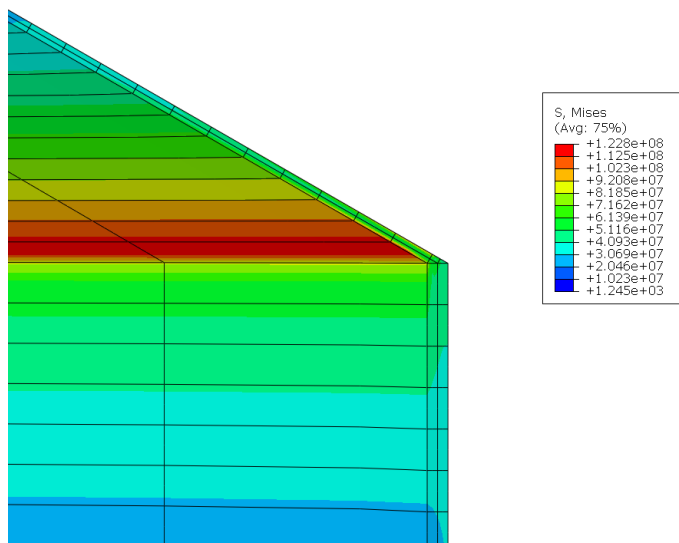
Slika 72. Uvećani detalj napreznanja tanke kružne ploče



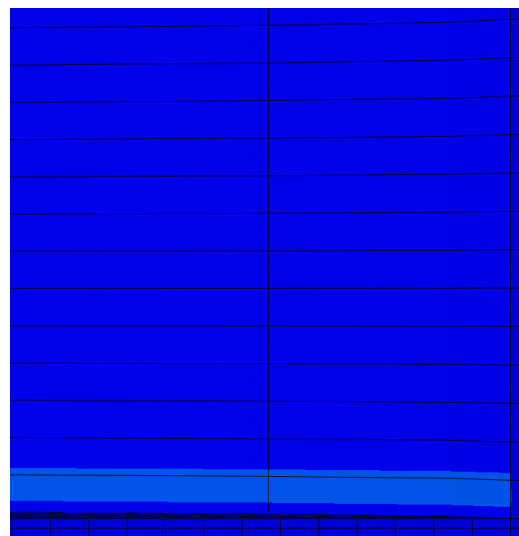
Slika 73. Uvećan detalj pomaka krova

Slika 74. Uvećan detalj pomaka tanke kružne ploče

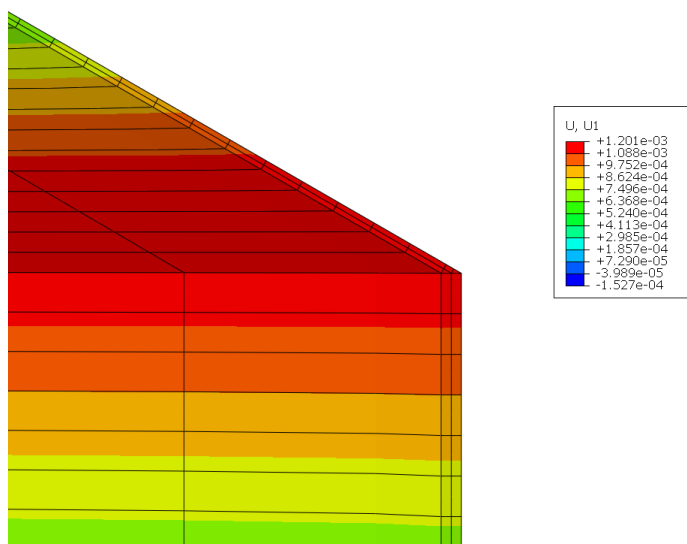
Sa legenda na slici moguće je primijetiti mali skok, u odnosu na prijašnje mreže, maksimalnog napreznanja i radijalnog pomaka što upućuje na točnost modela. Slijedećom mrežom je dokazano da će se taj skok još smanjiti, odnosno da rješenja simulacija konvergiraju. Kako je sa mreža na cijelom realnom modelu teško prepoznati korisne podatke ista neće više biti prikazan već će biti prikazani samo uvećani detalji spojeva. Slijedeća mreža sastoji se od 4055 konačnih elemenata i prikazana je slikama 75.-78.



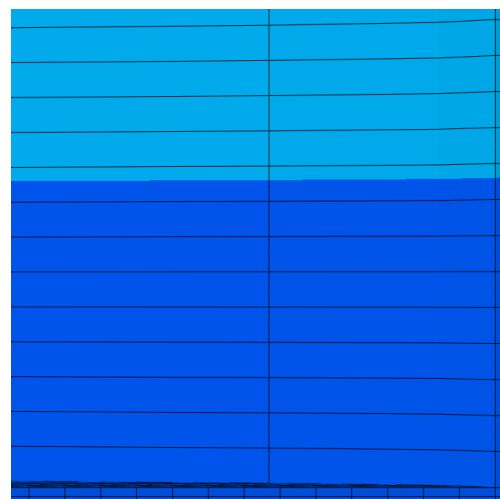
Slika 75. Uvećani detalj naprezanja krova



Slika 76. Uvećani detalj naprezanja tanke kružne ploče



Slika 77. Uvećan detalj pomaka krova



Slika 78. Uvećan detalj pomaka tanke kružne ploče

Kako bi se dokazala konvergencija numeričkog modela tablica 18. prikazuje očitane iznose maksimalnog ekvivalentnog naprezanja, maksimalnog radijalnog pomaka te radijalnog pomaka tanke kružne ploče za sve tri mreže konačnih elemenata. Zatim je proračunata relativna razlika između prve i druge, a potom druge i treće mreže koristeći navedene veličine, što je prikazano tablicom 19.

**Tablica 18. Vrijednosti iščitane iz numeričkog proračuna**

Veličina	Mreža s 819 CAX8	Mreža s 1627 CAX8	Mreža s 4055 CAX8
$\sigma_{\text{ekv}}^{\text{max}} / \text{Pa}$	$100,75 \cdot 10^6$	$114,03 \cdot 10^6$	$122,76 \cdot 10^6$
$u_r^{\text{max}} / \text{m}$	0,00116	0,001194	0,001201
$u_r^{\text{ploče}} / \text{m}$	$4,379 \cdot 10^{-6}$	$4,312 \cdot 10^{-6}$	$4,288 \cdot 10^{-6}$

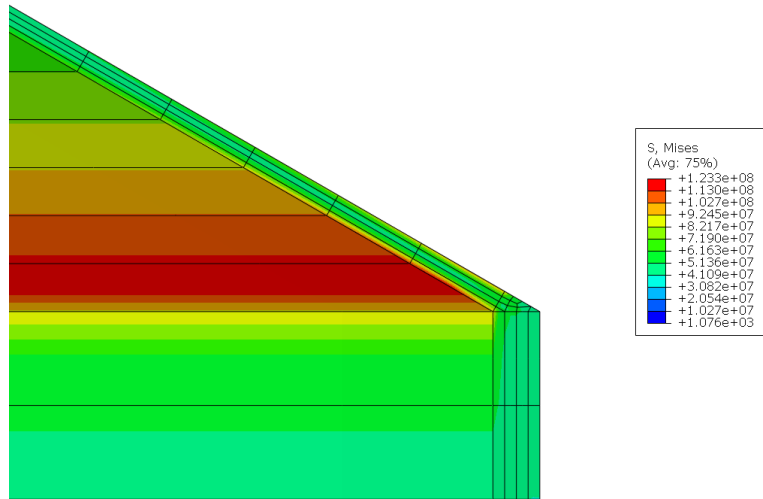
Već iz ovih podataka moguće je potvrditi da rješenja uistinu konvergiraju, no radi dosljednosti tablica 19. prikazuje relativne razlike mreža proračunate koristeći jednadžbu:

$$\text{Relativna razlika} = \frac{|\text{Finija mreža} - \text{Grublja mreža}|}{\text{Grublja mreža}} \cdot 100\%. \quad (59)$$

**Tablica 19. Relativna razlika mreža**

Veličina	Relativna razlika mreže s 819 CAX8 i 1627 CAX8	Relativna razlika mreže s 1627 CAX8 i 4055 CAX8
$\sigma_{\text{ekv}}^{\text{max}} / \text{Pa}$	13,181 %	7,656 %
$u_r^{\text{max}} / \text{m}$	2,931 %	0,586 %
$u_r^{\text{ploče}} / \text{m}$	1,53 %	0,557 %

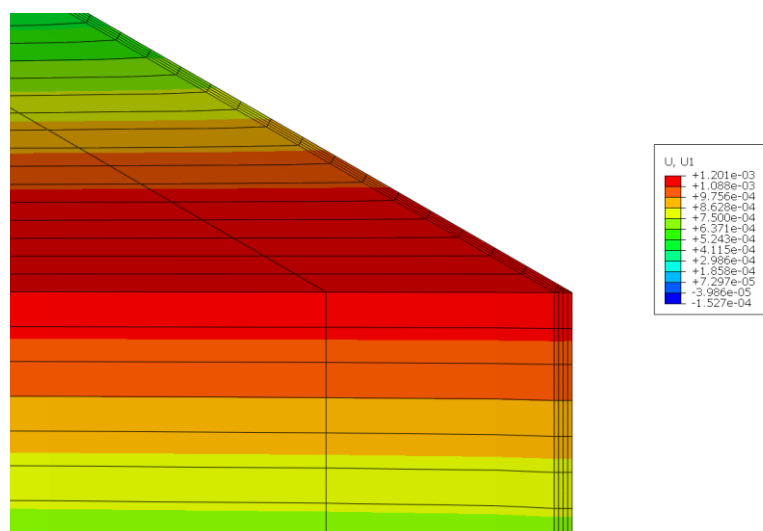
Tablica daje uvid u iznose relativne razlike koji su uglavnom vrlo mali što znači da numerički model dobro opisuje konstrukciju i njena opterećenja. Relativna razlika ekvivalentnog naprezanja manja od 10 % je prihvatljiva, ali ako je potrebno moguće je daljnjim progušćenjem mreže smanjiti tu vrijednost. Rješenja još finije mreže s 8122 CAX8 konačnih elemenata prikazana su slijedećim slikama, slike 79.-82. Naravno prikazani su samo uvećani detalji kao i na mrežama do sada.



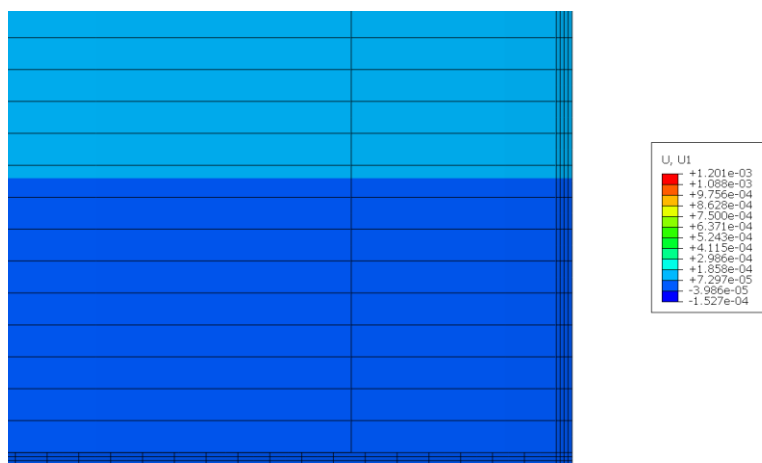
Slika 79. Uvećani detalj naprezanja krova na mreži s 8122 CAX8 elemenata u Pa



Slika 80. Uvećani detalj naprezanja dna na mreži s 8122 CAX8 elemenata u Pa



Slika 81. Uvećani detalj radijalnog pomaka krova na mreži s 8122 CAX8 elemenata u m



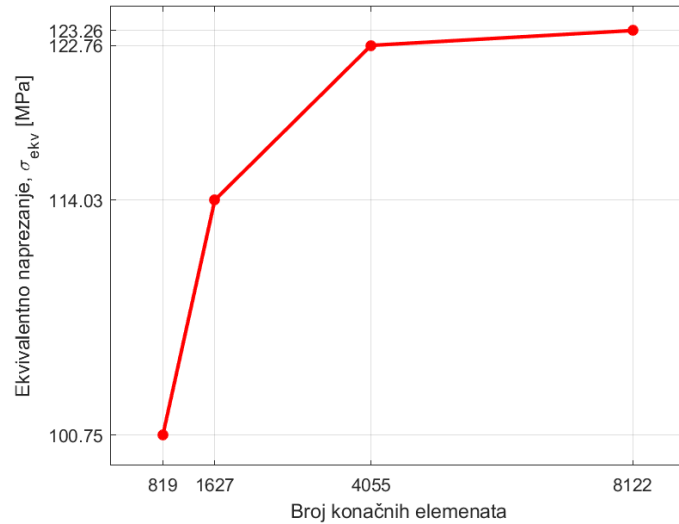
**Slika 82.** Uvećani detalj radijalnog pomaka dna na mreži s 8122 CAX8 elemenata u m

Ova mreža ima puno veći broj konačnih elemenata, odnosno duplo više od prošle mreže, što se i vidi sa slika 79.-82. Sada je moguće prikazati relativne razlike ove mreže u odnosu na treću mrežu, a to je prikazano tablicom 20.

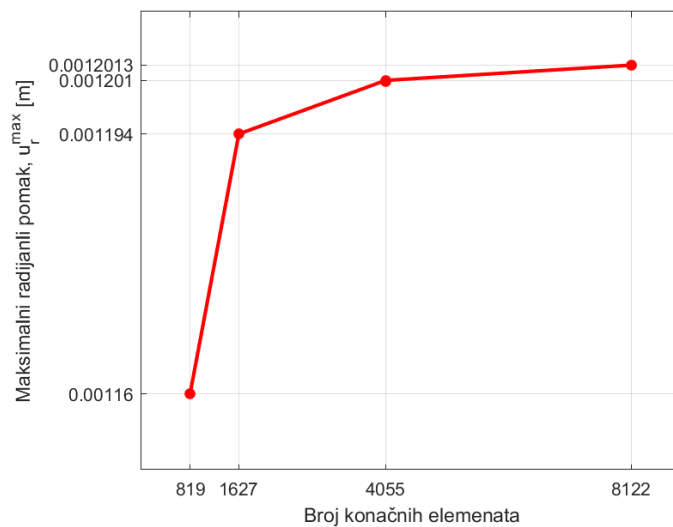
**Tablica 20.** Vrijednosti očitane iz numeričkog proračuna i relativna razlika

Veličina	Vrijednosti iščitane iz mreže s 8122 CAX8 elementa	Relativna razlika mreže s 4055 CAX8 i 8122 CAX8
$\sigma_{ekv}^{max} / Pa$	$123,26 \cdot 10^6$	0,407 %
$u_r^{max} / m$	0,0012013	0,025 %
$u_r^{ploče} / m$	$4,286 \cdot 10^{-6}$	0,047 %

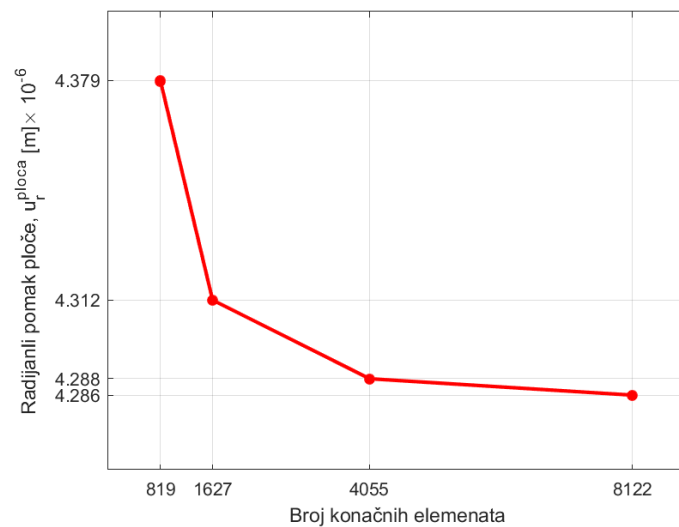
Ovom tablicom dokazano je ubrzanje konvergencije te nije potrebno dalje povećavati broj konačnih elemenata. Konvergenciju odabranih veličina potrebno je prikazati i grafički, stoga slike 83.-85. prikazuju konvergenciju prema broju konačnih elemenata.



**Slika 83. Konvergencija ekvivalentnog naprezanja prema broju konačnih elemenata**



**Slika 84. Konvergencija maksimalnog radijalnog pomaka prema broju konačnih elemenata**

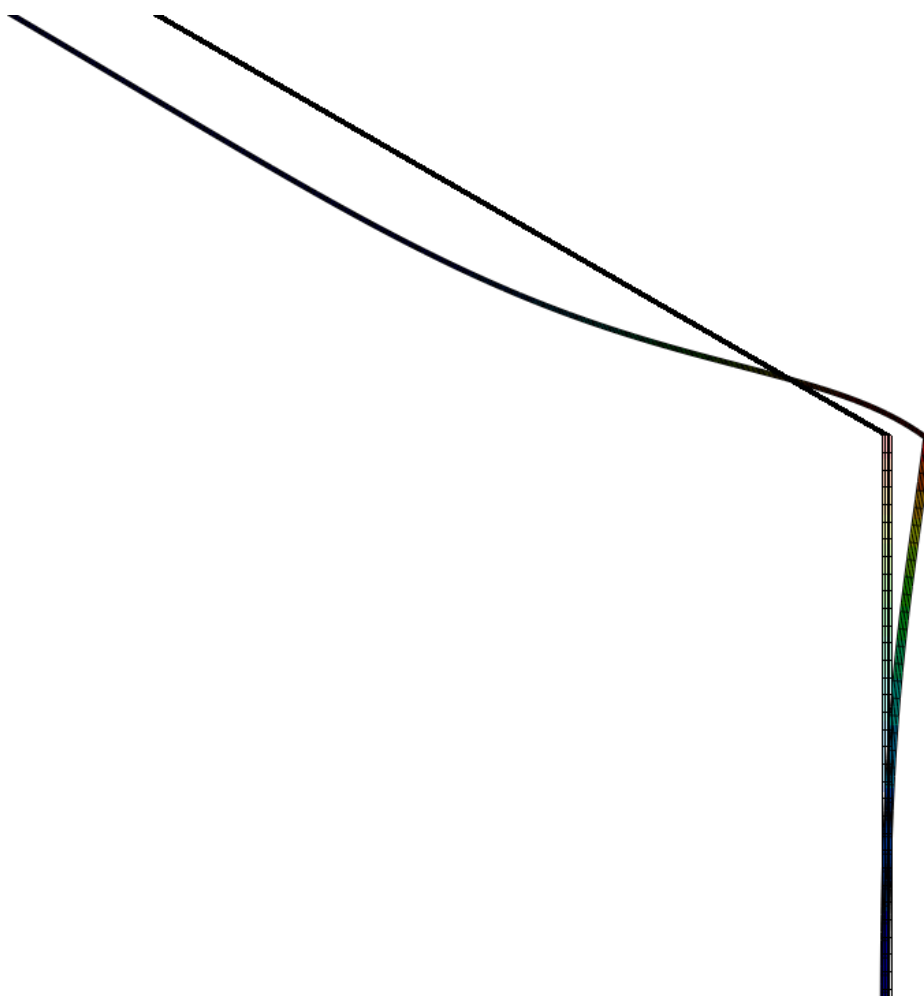


**Slika 85. Konvergencija radijalnog pomaka tanke kružne ploče prema broju konačnih elemenata**



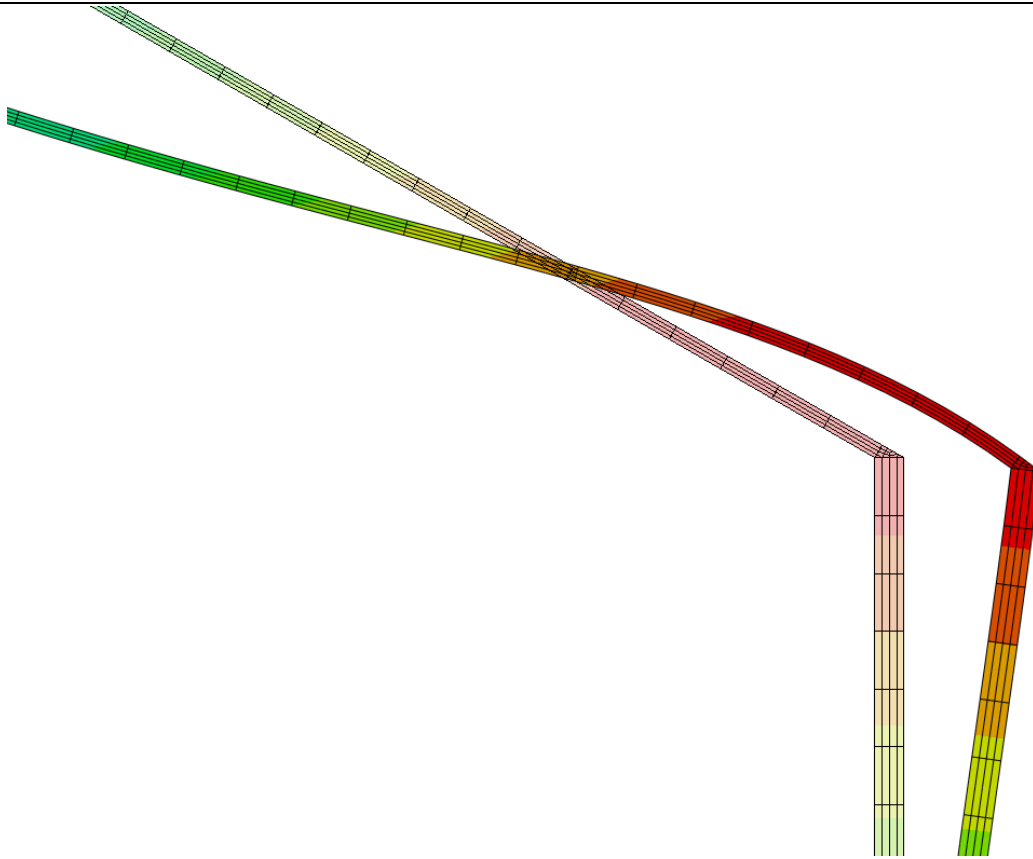
### 4.3. Prikaz deformacija spremnika

Do sada su prikazi rezultati bili isključivo na nedeformiranim konstrukcijama kako bih se što jednostavnije i točnije prikazala podjela konačnih elemenata. U ovom potpoglavlju su prikazane deformacije realnog spremnika na najfinijoj mreži, odnosno mreži s 8122 CAX8 konačnih elemenata. Budući da je konstrukcija velikih dimenzija i male debljine poprečnog presjeka, a područja interesa su veoma udaljena, spojevi ljuske s krovom i pločom, deformacije su prikazane uvećane na željene detalje. Prve prikazane deformacije su deformacije spoja krova i ljuske, iste su prikazane u 2D prikazu radi bolje preglednosti te je na slici vidljiva nedeformirana konstrukcija i deformirana konstrukcija za usporedbu. Naravno deformacije su uvećane *Deformation Scale Factor* funkcijom. Slike 86. i 87. prikazuju deformacije krova.



**Slika 86. Prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja krova i ljuske**

Budući da su na ovakvom prikazu također teško vidljivi konačni elementi isti je prikazan naknadno uvećan, slika 87.



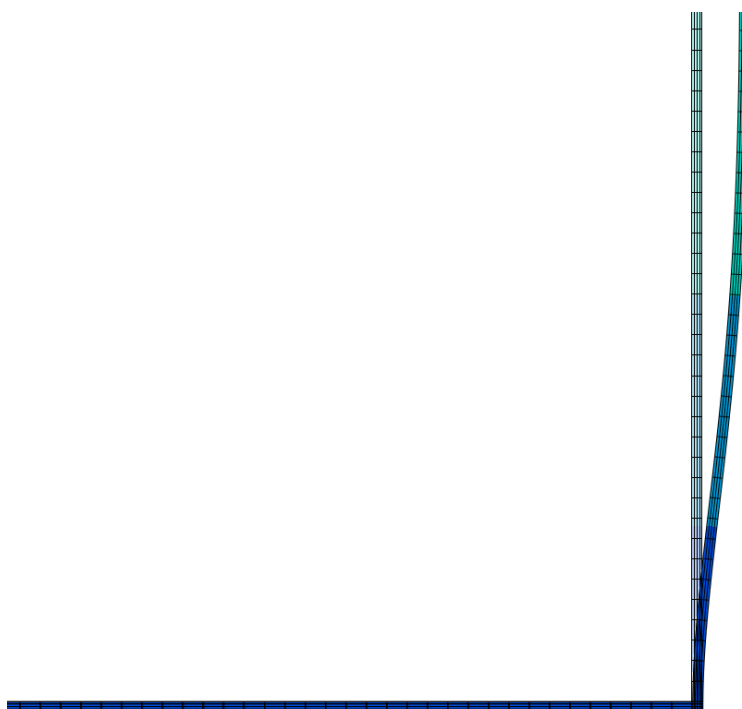
**Slika 87.** Uvećani prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja krova i ljuske

Vidljivo je da vanjska opterećenja značajno utječu na krov spremnika. Slike 88. i 89. prikazuju deformacije dna spremnika, odnosno spoj ljuske i tanke kružne ploče.



**Slika 88.** Prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja ploče i krova

Analogno ranijim deformacijama, prikazan je dodatno uvećan detalj na slici 89.



**Slika 89.** Uvećani prikaz deformirane i nedeformirane konstrukcije na detalju spoja krova i ljuske

Sa slike 89. se može vidjeti učinak uglavnom hidrostatskog tlaka na podnožje spremnika kojem je omogućen pomak u radijalnijom smjeru. U slučaju da je spremnik uklješten naprezanja u tom dijelu bi porasla te bi deformacije rasle oštrije.

#### 4.4. Provjera čvrstoće

Kako je ranije navedeno, ovaj postupak je proveden kako bih se provjerila čvrstoća spremnika pod utjecajem realnih opterećenja. Stoga slijedi kratki proračun koristeći podatke iščitane iz numeričke analize, prema uzoru na izraz (41):

$$S = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{ekv}} = \frac{355}{123,26} = 2,88. \quad (60)$$

Faktor sigurnost u iznosu od 2,88 zasigurno zadovoljava uvjet čvrstoće. Iako je verifikacijom prikazano da osnosimetrični konačni elementi CAX8 vrlo brzo konvergiraju u ovom slučaju s mnogo većim dimenzijama i većim brojem različitih opterećenja konvergencija se postiže tek nakon nekoliko iteracija i to s mnogo većim brojem konačnih elemenata. Stoga je uvijek potrebno detaljno provjeriti konvergenciju pri numeričkom rješavanju problema čija rješenja nije moguće usporediti s analitičkim proračunom.

## 5. Zaključak

U ovom radu provedena je numerička analiza kojom je provjerena čvrstoća realnog vertikalnog nadzemnog spremnika s fiksnim krovom primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Kako bi se pri numeričkoj analizi koristili ispravni konačni elementi napravljena je verifikacija konačnih elemenata. Verifikacija se sastoji od analitičkog proračuna na umanjenom modelu spremnika s analitički rješivim rubnim uvjetima i analognog numeričkog proračuna s tri odabrana konačna elementa od mnogih raznih ponuđenih. Analitički proračun temelji se na teoriji ljsaka koja je ukratko objašnjena, a numerički proračun temelji se na metodi konačnih elemenata, koja je također opisana u radu, koristeći računalni paket Abaqus®. Za proračun ekvivalentnih naprezanja u analitičkom pristupu korišten je von Misesov kriterij jer je isti kriterij kasnije primijenjen u numeričkoj analizi. Pri proračunu je potrebno provjeriti par točaka u konstrukciji kako bih se osiguralo mjesto najvećeg ekvivalentnog naprezanja, a to je učinjeno pomoću dijagrama nacrtanih koristeći pomoćne supstitucijske funkcije. Nadalje je dan prikaz tih točaka i konačno proračunato je ekvivalentno naprezanje koje je iskorišteno za provjeru kriterija čvrstoće konstrukcije od materijala S355 JR. Najveće naprezanje prema analitičkom proračunu umanjenog modela određeno je na spoju tanke kružne ploče i cilindrične ljsuke. Slijedi provjera rezultata numeričkom analizom, tj. verifikacija elemenata, gdje konačni elementi prvog reda CAX4 i S4 ne pružaju zadovoljavajuću aproksimaciju ekvivalentnih naprezanja i pomaka na prve dvije mreže što ukazuje na potrebu za finijom raspodjelom. Oba elementa na trećoj, najgušćoj mreži prikazuju zadovoljavajuće poklapanje numerički dobivenih vrijednosti s analitički proračunatim. Vrijedi naglasiti da konačni element CAX4 točnije aproksimira ekvivalentna naprezanja gdje odstupanje numeričke vrijednosti od analitičke iznosi 4,9 % dok S4 bolje opisuje pomake spremnika gdje relativna greška pri proračunu radijalnog pomaka iznosi samo 2,5 %, a pri proračunu kutnog zakreta 5,1 %. Međutim, konačni element drugog reda CAX8 već pri prvoj iteraciji sa samo 68 konačnih elemenata jednako točno opisuje konstrukciju kao najgušće mreže elemenata prvog reda, pri čemu su maksimalna odstupanja pri aproksimaciji ekvivalentnih naprezanja jednaka 5,6 %, a radijalnog pomaka 3,6 %, u odnosu na analitičke rezultate. Daljnjim povećanjem broja konačnih elemenata relativna greška se smanjuje i najmanja odstupanja iznose 0,9 % za ekvivalentno naprezanje i 2,7 % za radijalni pomak. Stoga je konačni element CAX8 izabran za numeričku analizu realnog vertikalnog spremnika. Realnom numeričkom modelu dodijeljena su, uz težinu konstrukcije, opterećenja

---

vanjskih čimbenika, odnosno vjetar i snijeg s područja Zagreba. Također je uveden rubni uvjet radijalnog pomaka tanke kružne ploče po cijeloj površini ploče kako bih se simuliralo kretanje tanke kružne ploče po betonskom postolju, bez učvršćenja. Zbog dimenzija realnog modela potrebno je primijeniti veći broj konačnih elemenata. Svakim povećanjem broja konačnih elemenata, tj. proguščenjem mreže elemenata, razlike između iznosa analiziranih vrijednosti su postajale sve manje odnosno rješenja su konvergirala. Time se može zaključiti da konačna mreža sa 8122 CAX8 elemenata, koja odstupa od one prije za maksimalno 0,41 % pri proračunu ekvivalentnog naprezanja i manje od 0,05 % za proračunate radijalne pomake, dovoljno precizno aproksimira naprezanja i pomake vertikalnog nadzemnog spremnika. Nakon prikaza konvergencije dan je prikaz deformacija spremnika i konačno tražena provjera čvrstoće spremnika koja zadovoljava čime je analiza zaključena.

---

**LITERATURA**

- [1] <https://thepetrosolutions.com/types-of-storage-tanks/> 16.11.2024.
- [2] <https://gototanks.com/60-gallon-cone-bottom-inductor-tank-full-drain-inf60-24.html>  
16.11.2024.
- [3] [https://sarrz.com/product\\_line/vertical\\_tanks/](https://sarrz.com/product_line/vertical_tanks/) 16.11.2024.
- [4] <https://hypertextbook.com/facts/2007/ArtemGindin.shtml> 16.11.2024.
- [5] <https://metinvestholding.com/en/products/steel-grades/s355jr> 16.11.2024.
- [6] Alfirević I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2018.
- [7] Sorić j.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga. Zagreb, 2021.
- [8] Predavanja i vježbe s e-učenja iz kolegija Čvrstoća konstrukcija 2024.
- [9] <https://www.slideshare.net/prashantkamble79/introduction-to-finite-element-method-240808879#11> 15.12.2024.
- [10] ABAQUS Version 6.6 Documentation,  
<https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt06ch22s01ael05.html> 4.1.2025
- [11] EN 1991-1-4: Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-4: general actions – Wind actions
- [12] HRN EN 1991-1-4\_2012
- [13] EN 1991-1-3: Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-3: general actions – Snow loads
- [14] <https://www.dlubal.com/en/solutions/online-services/snow-load-wind-speed-and-seismic-load-maps> 22.1.2025