

# Proračun čvrstoće i stabilnosti sfernog spremnika za ukapljeni plin

---

**Bais, Jana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2025**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:466544>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Jana Bais**

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit, dipl. ing.

Student:

Jana Bais

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Skozritu na savjetima, idejama, vodstvu i pomoći tijekom procesa izrade završnog rada.

Posebno se zahvaljujem svojim roditeljima, bratu, obitelji, prijateljima, cimerima i Ivanu, koji su bili velika podrška tijekom cijelog školovanja, a posebno tijekom preddiplomskog studija.

Jana Bais



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Jana Bais**

JMBAG: **0054050122**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun čvrstoće i stabilnosti sfernog spremnika za ukapljeni plin**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Strength and stability calculation of spherical LPG tank**

Opis zadatka:

Sferni spremnici važna su komponenta skladištenja ukapljenog naftnog plina, široko rasprostranjenog izvora energije. Njihov oblik maksimizira kapacitet skladištenja i smanjuje pritisak na stijenke spremnika, što ih čini idealnim za držanje plinova pod tlakom. Porastom potražnje ukapljenog naftnog plina zbog svestrane primjene, razumijevanje sigurnosti konstrukcije ovih spremnika postaje sve važnije.

Za zadane podatke o konstrukciji, materijalu, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima sfernog spremnika potrebno je provjeriti da li spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće i stabilnosti, tj. potrebno je izvršiti kontrolni proračun spremnika. Proračun je potrebno provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom programskog paketa koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Datum predaje rada:

1. rok: 20. i 21. 2. 2025.  
2. rok: 10. i 11. 7. 2025.  
3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025.  
2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025.  
3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

*Ivica Skozrit*

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

*V Soldo*

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. Uvod .....	1
2. Analitičko rješenje .....	5
2.1. Proračun čvrstoće sferne ljuske.....	5
2.1.1. Ljuske.....	5
2.1.2. Membranske sile sferne ljuske .....	7
2.1.2.1. Presjek 1-1 .....	7
2.1.2.3. Presjek 2-2 .....	9
2.1.3. Raspodjela membranskih naprezanja.....	10
2.1.4. Membranska naprezanja sferne ljuske .....	12
2.1.5. Ekvivalentno naprezanje .....	13
2.1.6. Membranski pomaci sfere.....	15
2.2. Proračun izvijanja stupa .....	17
3. Numeričko rješenje.....	23
3.1. Metoda konačnih elemenata.....	23
3.2. Verifikacija numeričkog modela sferne ljuske .....	24
3.2.1. Aksisimetrični jednodimenzijski element drugog reda, SAX2.....	25
3.2.2. Osnosimetrični četverokutni element drugog reda, CAX8R .....	28
3.2.3. Ljuskasti četverokutni element drugog reda, S8R .....	32
3.2.4. Usporedba rezultata.....	36
3.2.5. Verifikacija numeričkog modela stupa .....	38
3.3. Numerička analiza čvrstoće spremnika.....	41
3.3.1. Kontrola čvrstoće .....	47
3.3.2. Analiza spremnika s dodanim ukrućenjima .....	47
3.4. Numerička analiza izvijanja stupa .....	51
3.4.1. Kontrola izvijanja.....	57
4. ZAKLJUČAK.....	57
LITERATURA.....	59

**POPIS SLIKA**

Slika 1.1 Dijelovi sfernog spremnika (adaptirano iz [1]).....	1
Slika 1.2 Zadani spremnik [4].....	3
Slika 2.1 Rotacijske plohe, translacijska ploha i klizna ploha .....	5
Slika 2.2 Prikaz zadane sferne ljuske s opterećenjima.....	6
Slika 2.3 Presjek 1-1.....	7
Slika 2.4 Presjek 2-2.....	9
Slika 2.5 Vizualna raspodjela meridijanske sile.....	10
Slika 2.6 Kvantitativna raspodjela meridijanske sile za kut $\theta$ .....	11
Slika 2.7 Vizualna raspodjela cirkularne sile .....	11
Slika 2.8 Kvantitativna raspodjela cirkularne sile za kut $\theta$ .....	12
Slika 2.9 Vizualna raspodjela ekvivalentnog naprezanja.....	14
Slika 2.10 Kvantitativna raspodjela ekvivalentnog naprezanja za kut $\theta$ .....	14
Slika 2.11 Definicija membranskih pomaka [6].....	15
Slika 2.12 Vizualna raspodjela radijalnih pomaka sferne ljuske .....	16
Slika 2.13 Kvantitativna raspodjela kuta zakreta za kut $\theta$ .....	16
Slika 2.14 Prikaz geometrije stupova .....	17
Slika 2.15 Oblik izvijanja stupa .....	18
Slika 2.16 Poprečni presjek stupa/štapa .....	19
Slika 2.17 Funkcija ovisnosti kritičnog naprezanja $\sigma_{kr}$ i vitkosti štapa $\lambda$ [7].....	20
Slika 2.18 Odnos kritičnog naprezanja $\sigma_{kr}$ i vitkosti štapa $\lambda$ za zadani stup.....	20
Slika 2.19 Oblik izvijanja stupa za najkritičniji slučaj.....	21
Slika 3.1 Točke uspoređivanja analitičkog i numeričkog rješenja.....	24
Slika 3.2 Općeniti položaj elementa SAX2 na sfernoj ljusci.....	25
Slika 3.3 Element SAX2 i stupnjevi slobode jednog čvora .....	25
Slika 3.4 Rubni uvjeti i opterećenja za element SAX2 .....	26
Slika 3.5 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa i radijalnog pomaka u mm za različiti broj elemenata SAX2.....	27
Slika 3.6 Općeniti položaj elementa SAX2 na sfernoj ljusci .....	28
Slika 3.7 Element CAX8R i stupnjevi slobode jednog čvora .....	29
Slika 3.8 Rubni uvjeti i opterećenja za element CAX8R.....	30
Slika 3.9 Diskretizacija područja CAX8R elementima.....	30
Slika 3.10 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa i radijalnog pomaka u mm za različiti broj elemenata CAX8R.....	31
Slika 3.11 Element S8R s pripadajućim stupnjevima slobode [8] .....	32

Slika 3.12 Stupnjevi slobode $i$ -tog čvora elementa S8R [8] .....	33
Slika 3.13 Rubni uvjeti i opterećenja za element S8R .....	33
Slika 3.14 Diskretizacija sfere S8R elementima .....	34
Slika 3.15 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa i radijalnog pomaka u mm za različiti broj elemenata S8R.....	35
Slika 3.16 Konvergencija rješenja za $\sigma_{ekv} (\theta = 0^\circ)$ za odabrane elemente.....	36
Slika 3.17 Konvergencija rješenja za $\sigma_{ekv} (\theta = 180^\circ)$ za odabrane elemente.....	37
Slika 3.18 Konvergencija rješenja za $u_r (\theta = 0^\circ)$ za odabrane elemente.....	37
Slika 3.19 Ljuska stupa s pripadajućim opterećenjima .....	38
Slika 3.20 Rubni uvjeti i opterećenja za element S8R stupa.....	39
Slika 3.21 Raspodjela uzdužnog naprezanja u MPa stupa za različit broj elemenata S8R.....	39
Slika 3.22 Konvergencija rješenja za $\sigma_z$ za element S8R.....	40
Slika 3.23 Modeli ploha četvrtine sfere i jednog stupa .....	41
Slika 3.24 Cjelokupni model s pomoćnim bridovima i iz tog generirana mreža konačnih elemenata .....	42
Slika 3.25 Rubni uvjeti i opterećenja cijelog modela.....	42
Slika 3.26 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa sferne ljuske .....	43
Slika 3.27 Raspodjela radijalnih pomaka u mm sferne ljuske .....	43
Slika 3.28 Područja detaljnije analize konstrukcije .....	44
Slika 3.29 Grafička usporedba ekvivalentnih naprezanja po plaštu ljuske .....	46
Slika 3.30 Grafička usporedba radijalnih pomaka po plaštu ljuske .....	46
Slika 3.31 Mreža konačnih elemenata na modelu spremnika s ukrućenjem.....	48
Slika 3.32 Rubni uvjeti spremnika s ukrućenjima.....	48
Slika 3.33 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa sferne ljuske s ukrutama .....	49
Slika 3.34 Raspodjela radijalnih pomaka u mm sferne ljuske s ukrutama.....	49
Slika 3.35 Raspodjela uzdužnog naprezanja u MPa stupova bez ukruta .....	50
Slika 3.36 Raspodjela uzdužnog naprezanja u MPa stupova s ukrutama .....	50
Slika 3.37 Usporedba progiba stupa sa i bez ukrućenja.....	51
Slika 3.38 Rubni uvjeti i opterećenje jednodimenzijskog modela stupa.....	52
Slika 3.39 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za stup diskretiziran grednim elementima .....	52
Slika 3.40 Rubni uvjeti i opterećenje modela skupa za najkritičniji slučaj.....	53
Slika 3.41 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za najkritičniji slučaj izvijanja stupa diskretiziranog grednim elementima .....	54
Slika 3.42 Rubni uvjeti i opterećenje trodimenzijskog modela stupa .....	55
Slika 3.43 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za stup diskretiziran ljuskastim elementima .....	55



---

Slika 3.44 Rubni uvjeti i opterećenje trodimenzijskog modela stupa za slučaj najkritičnijeg načina opterećivanja .....	56
Slika 3.45 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za stup diskretiziran ljuskastim elementima za najkritičniji slučaj.....	56

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1.1 Osnovna svojstva materijala spremnika [5] .....	4
Tablica 3.1 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element SAX2 .....	28
Tablica 3.2 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element CAX8R .....	32
Tablica 3.3 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element S8R .....	36
Tablica 3.4 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element S8R stupa.....	40
Tablica 3.5 Usporedba rezultata ekvivalentnog naprezanja sferne ljuske .....	45
Tablica 3.6 Usporedba rezultata radijalnog pomaka sferne ljuske.....	45

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$\text{mm}^2$	površina poprečnog presjeka stupa
$d$	mm	unutarnji promjer sfere
$d_p$	mm	vanjski promjer potporne grede
$d_s$	mm	vanjski promjer stupa
$E$	GPa	modul elastičnosti
$F_{kr}$	N	kritična sila pri izvijanju
$g$	$\text{m/s}^2$	gravitacijska konstanta
$G_p$	N	težina ukapljenog plina
$G_s$	N	težina konstrukcije spremnika
$G_{uk}$	N	ukupna težina spremnika
$h$	mm	debljina ljuske
$h'$	mm	dubina tekućine
$h_0$	mm	visina stupa
$h_p$	mm	visina nenapunjenog spremnika
$i$	mm	radijus tromosti poprečnog presjeka stupa, štapa
$i_{min}$	mm	minimalni radijus tromosti poprečnog presjeka stupa, štapa
$I_y$	$\text{mm}^4$	aksijalni moment tromosti presjeka stupa s obzirom na os $y$
$I_z$	$\text{mm}^4$	aksijalni moment tromosti presjeka stupa s obzirom na os $z$
<b>K</b>		matrica krutosti
$l$	m	duljina štapa
$l_0$	m	duljina izvijanja
$l_r$	m	duljina dodira sfere i stupa
$n$	/	broj stupova
$N_\theta$	N/m	meridijanska sila
$N_\varphi$	N/m	cirkularna sila
$p_0$	MPa	pretlak
$p_h$	MPa	hidrostatski tlak
$p_n$	MPa	tlak u smjeru normale na površinu
$R$	m	radijus sfere
<b>R</b>		vektor opterećenja
$r_1$	m	meridijanski polumjer zakrivljenosti
$r_2$	m	cirkularni polumjer zakrivljenosti
$t$	mm	debljina stijenke sfere
$t_p$	mm	debljina stijenke potporne grede
$t_s$	mm	debljina stijenke stupa
$u$	mm	cirkularni pomak
$u_i, v_i, w_i$	mm	komponente pomaka $i$ -tog čvora konačnog elementa

$u_r$	mm	radijalni pomak
$u_{ri}, w_i$	mm	komponente pomaka $i$ -tog čvora konačnog elementa
$V$	$m^3$	volumen ukapljenog plina
$v$	mm	meridijanski pomak
$\mathbf{v}$		vektor lokalnih stupnjeva slobode
$\mathbf{V}$		vektor globalnih stupnjeva slobode
$\mathbf{v}_i$		vektor stupnjeva slobode $i$ -tog čvora
$V_{os}$	$m^3$	volumen odsječka sfere
$V_p$	$m^3$	volumen nenapunjenog spremnika
$V_{uk}$	$m^3$	ukupni volumen unutrašnjosti spremnika
$w$	mm	normalni pomak
$\zeta$	/	bezdimenzijska koordinata
$\eta$	/	bezdimenzijska koordinata
$\lambda$	/	vitkost štapa
$\lambda_p$	/	granična vitkost štapa
$\nu$	/	Poissonov faktor
$\xi$	/	bezdimenzijska koordinata
$\rho$	$kg/m^3$	gustoća ukapljenog plina
$\sigma_{ekv}$	MPa	ekvivalentno naprezanje
$\sigma_{ekv}$	MPa	ekvivalentno naprezanje
$\sigma_{kr}$	MPa	kritično naprezanje pri izvijanju
$\sigma_m$	MPa	vlačna čvrstoća
$\sigma_{max}$	MPa	minimalno naprezanje
$\sigma_{min}$	MPa	maksimalno naprezanje
$\sigma_p$	MPa	granica elastičnosti
$\sigma_r$	MPa	radijalno naprezanje
$\sigma_\theta$	MPa	meridijansko naprezanje
$\sigma_\varphi$	MPa	cirkularno naprezanje
$\varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$	rad	kut zakreta $i$ -tog čvora konačnog elementa

---

**SAŽETAK**

Tema ovog završnog rada je kontrolni proračun čvrstoće i stabilnosti sfernog spremnika za ukapljeni plin. Pojednostavljena konstrukcija spremnika sastoji se od sferne ljuske i stupova koji ju podupiru. U analitičkom dijelu proveden je proračun čvrstoće sferne ljuske pod djelovanjem unutarnjeg pretlaka i hidrostatskog tlaka ukapljenog plina. Izračunate su vrijednosti i raspodjele membranskih sila, naprezanja te radijalnih pomaka središnje plohe ljuske. Također je analizirano izvijanje nosivih stupova prema linearno elastičnoj teoriji izvijanja, pri čemu su određene kritične sile izvijanja. Numerički proračun čvrstoće proveden je u programskom paketu Abaqus®. Započet je ispitivanjem konvergencije rezultata modela diskretiziranih različitim konačnim elemenata u usporedbi s rezultatima analitičkog proračuna. Korišteni su jednodimenzijski element za analizu osnosimetričnih ljuski, osnosimetrični pravokutni element i ljuskasti pravokutni element. Odabran je ljuskasti pravokutni konačni element za kojeg je provedena dodatna verifikacija na stupovima. Za detaljniju analizu čvrstoće analizirana je cijela konstrukcija spremnika, uključujući i stupove te ukrute na stupovima. Kritična naprezanja očitana na modelu u programskom paketu Abaqus® uspoređuju se s dopuštenim naprezanjima za finalni proračun čvrstoće. Na kraju je izvršena numerička analiza izvijanja, najprije na jednostavnijem primjeru koji se slaže s analitičkim proračunom te zatim na točnoj konstrukciji stupa, pri čemu je određena vrijednost kritične sile izvijanja.

Ključne riječi: analitički proračun, numerički proračun, sferni spremnik, Abaqus®, metoda konačnih elemenata, izvijanje

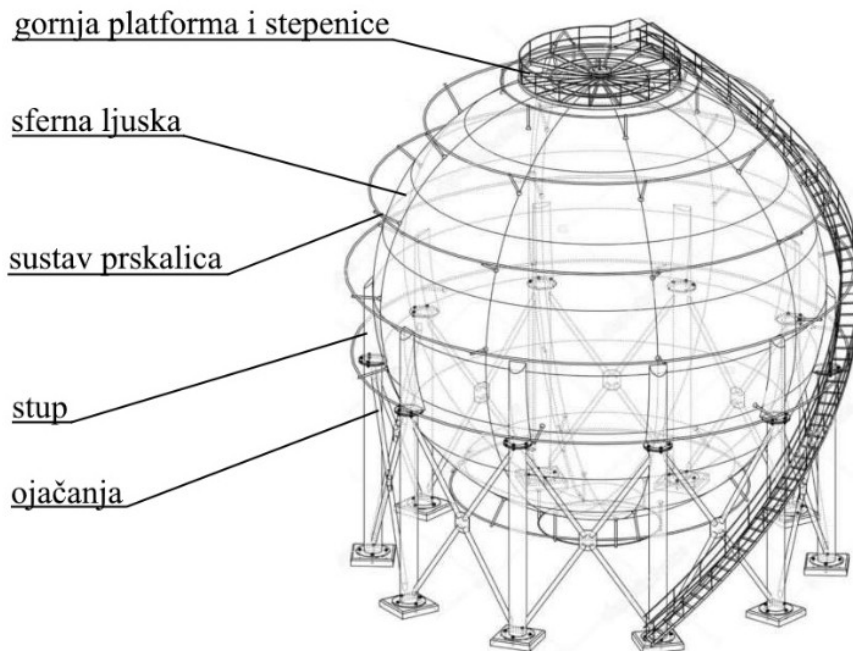
**SUMMARY**

The topic of this final paper is calculation of strength and stability of a spherical tank filled with liquefied petroleum gas. Construction of the tank consists of a spherical shell supported by columns. Analytical procedure contains strength calculation of spherical shell under the action of internal overpressure and hydrostatic pressure of liquefied gas, which resulted in values and distribution of membrane forces, stresses and radial displacements of the central surface of the shell. Analytical procedure also contains buckling analysis of load-bearing columns according to linear buckling analysis, which determined critical buckling forces. Numerical calculation of strength was carried out using Abaqus<sup>®</sup> software package. It started by examining the convergence of numerical calculation results on models discretized with different finite elements in comparison with analytical calculation results. An axisymmetric shell element, an axisymmetric quadrilateral element and a shell quadrilateral element were used. A shell quadrilateral finite element was selected for which additional verification was performed on the columns. For more detailed strength analysis, the entire construction of the tank was analyzed, including the columns and the stiffeners on the columns. The critical stresses read on the model in Abaqus<sup>®</sup> are compared with the allowed stress for the final strength calculation. At the end, a numerical analysis of buckling was performed, first on a simpler example that agrees with the model used in analytical calculation and then on the exact construction of the column, where the value of the critical buckling force was determined.

Key words: analytical calculation, numerical calculation, spherical tank, Abaqus<sup>®</sup>, finite elements method, buckling

## 1. Uvod

Sferni spremnici predstavljaju ključne elemente u naftnoj, plinskoj, petrokemijskoj i kemijskoj industriji. Glavni dio spremnika čini sferna ljuska, unutar koje se pohranjuje skladištena tvar. Težina sfere i njezinog sadržaja prenosi se do tla stupovima jednoliko raspoređenim oko ekvatora sfere. Stupovi sprječavaju vertikalni pomak sferne konstrukcije, no zbog bočnih opterećenja konstrukcija nije potpuno stabilna bez ojačanja. Sustav ojačanja sastoji se od dijagonalno postavljenih greda koje osiguravaju stabilnost i sprječavaju kolaps strukture. U sfernim spremnicima pohranjuju se zapaljive ili eksplozivne tvari, zbog čega je izuzetno važan sustav prskalica. One su postavljene po vanjskoj površini sfere i aktiviraju se u slučaju požara ili za potrebe održavanja optimalne temperature. Dodatne komponente sfernog spremnika uključuju gornju platformu i stepenice, koje služe za održavanje. Omogućuju radnicima pristup ventilima, mjernim uređajima i drugim opremama potrebnima za nesmetano funkcioniranje spremnika. Slika 1.1 prikazuje skicu sfernog spremnika s označenim karakterističnim dijelovima.



Slika 1.1 Dijelovi sfernog spremnika (adaptirano iz [1])

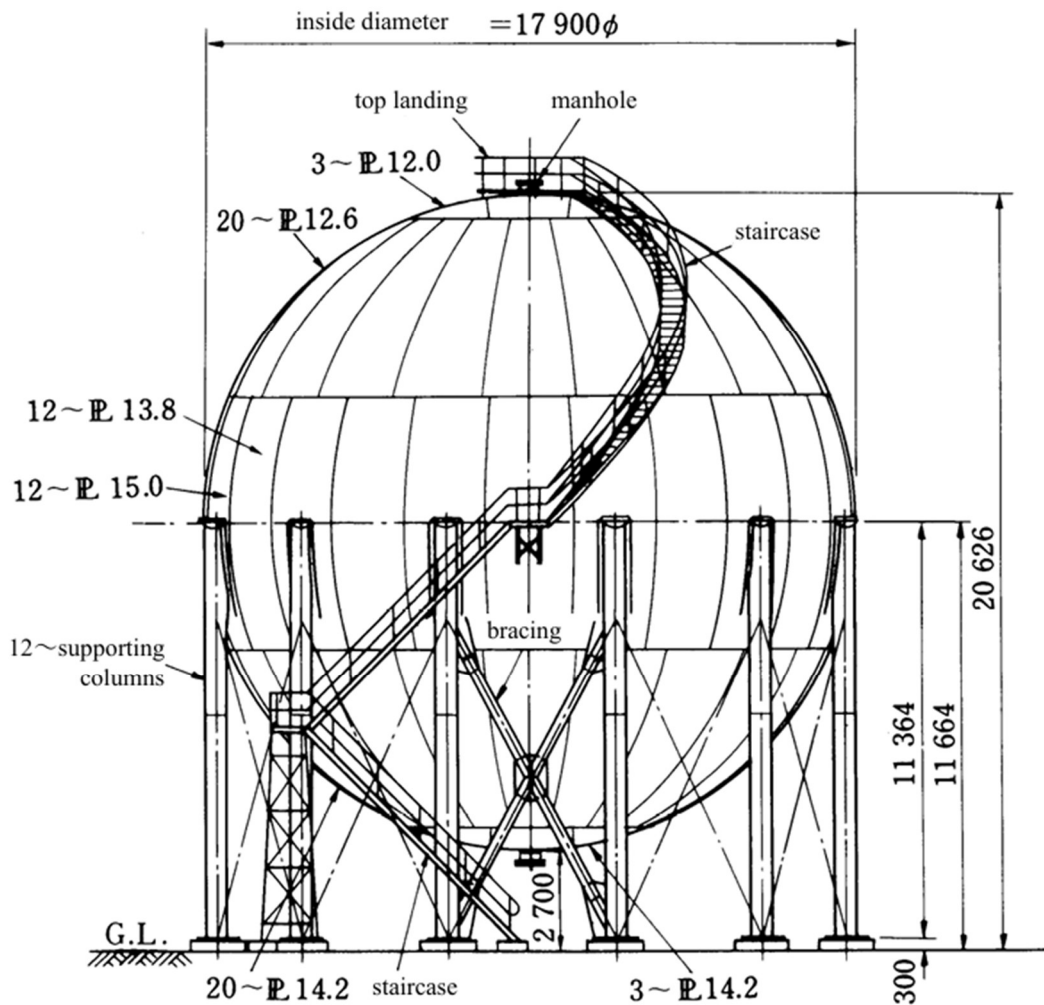
Prilikom odabira sfernog spremnika važno je uzeti u obzir prednosti i nedostatke, kao i specifične potrebe i uvjete u kojima se spremnik koristi, kako bi se osigurala njegova učinkovitost i sigurnost. Glavna prednost sfernih spremnika nad drugim oblicima je

minimiziranje koncentriranih naprezanja, što omogućuje uniformni otpor prema unutarnjem tlaku, a time se smanjuje rizik od propuštanja i poboljšava se ukupna sigurnost. Nadalje, spremnik zbog oblika sfere posjeduje jedinstvenu karakteristiku maksimiziranja volumena uz minimiziranje površine. U odnosu na druge spremnike istog volumena za konstrukciju sfernog spremnika potrebno je najmanje materijala, što u konačnici pridonosi manjim troškovima izgradnje. Konačno, njihovo nisko težište pruža im veću stabilnost, a oblik sfere je pogodan za razne vremenske uvjete: sprječava nakupljanje leda i sedimenta te smanjuje utjecaj vjetra u odnosu na spremnike drugih oblika. S druge strane, iako su prostorno učinkoviti, za smještaj zakrivljene forme potrebno je više vertikalnog prostora, što ograničava postavljanje rezervoara unutar postojećih struktura ili zahtijeva preinake infrastrukture. Također, održavanje i inspekcija ovakvih spremnika je složena i zahtijeva specijaliziranu opremu, što dodatno povećava troškove [2]. Prednosti sfernog spremnika čine ga preferiranim oblikom za skladištenje ukapljenog plina. Naftni plin je zapaljiva tvar koja se sastoji od mješavine plinova ugljikovodika, pri čemu se najčešće radi o propanu i butanu, a u manjem udjelu o drugim tvarima poput etilena ili etana. Pri sobnoj temperaturi i atmosferskom tlaku u plinovitom je stanju, teži od zraka za 1,5 do 2 puta, a kako bi se lakše skladištio i transportirao ukapljuje se. Ukapljeni plin u spremniku čuva se pod tlakom 1,88 MPa [2], koji je jednak tlaku pare plina pri temperaturnom rasponu od -10 do 20°C. Svakim povećanjem temperature, raste tlak pare, a time i tlak u spremniku pa je važno spremnik držati u optimalnom rasponu temperature kako ne bi došlo do eksplozije [3]. Ukapljeni naftni plin (UNP) gustoće je od 535 do 580 kg/m<sup>3</sup> [3]. Zadan je spremnik ukapljenog naftnog plina sa specifikacijama [4]:

- unutarnji promjer sfere:  $d = 17900$  mm,
- debljina stijenke sfere:  $t = 25$  mm,
- materijal sfere i stupova: SPV 490,
- vanjski promjer stupa:  $d_s = 609,6$  mm,
- debljina stijenke stupa:  $t_s = 14$  mm,
- broj stupova:  $n = 12$ ,
- ukupna visina stupa:  $h_0 = 11364$  mm,
- vanjski promjer potporne grede:  $d_p = 267,4$  mm,
- debljina stijenke potporne grede:  $t_p = 7$  mm,
- materijal potporne grede: STK 400.

Spremnik je prikazan slikom 1.2.





Slika 1.2 Zadani spremnik [4]

Ukupni unutarnji volumen sfernog spremnika  $V_{uk}$ :

$$V_{uk} = \frac{d^3 \pi}{6} = 3003,016 \text{ m}^3. \quad (1.1)$$

Sferni spremnici za ukapljeni plin napunjeni su tekućinom do 90% ukupnog unutarnjeg volumena sferne ljuske, ali je za potrebe ovog proračuna pretpostavka da je spremnik u potpunosti napunjen tekućinom. Na spremnik također djeluje pretlak  $p_0$ . Prema izvoru [2], za sferne spremnike kapaciteta  $3000 \text{ m}^3$  on iznosi:

$$p_0 = 1,88 \text{ MPa}. \quad (1.2)$$

Osim konstantnog tlaka na spremnik djeluje i hidrostatski tlak ukapljenog plina, koji je na slobodnoj površini jednak nuli, a s povećanjem dubine  $h'$  linearno raste prema izrazu:

$$p_h = \rho g h', \quad (1.3)$$

gdje je  $\rho$  gustoća ukapljenog naftnog plina koja iznosi:

$$\rho = 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (1.4)$$

Za materijale konstrukcije u tablici 1.1 navedene su vrijednosti konstanti koje će se koristiti u proračunu.

**Tablica 1.1 Osnovna svojstva materijala spremnika [5]**

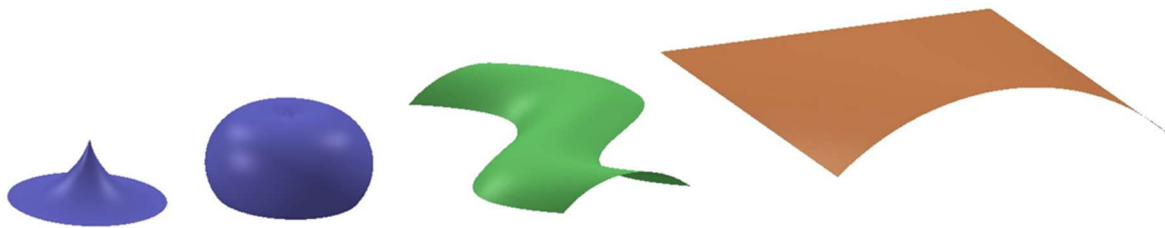
	SPV 490	SPV 400
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7850	7700
$\sigma_p$ (MPa)	450	1034
$\sigma_m$ (MPa)	610	1158

## 2. Analitičko rješenje

### 2.1. Proračun čvrstoće sferne ljuske

#### 2.1.1. Ljuske

Ljuska je dio kontinuuma omeđen s dvije zakrivljene plohe, s malim razmakom među njima. Za razliku od ploče, ljuska je već u nedeformiranom stanju zakrivljena. Geometrija ljuske je potpuno određena ako je poznat oblik srednje plohe i debljina  $h$ . Razmak između ploha predstavlja debljinu  $h$  koja može biti promjenjiva ili konstantna. Srednja ploha raspolavlja debljinu  $h$ . Plohe se mogu klasificirati kao translacijske, rotacijske ili klizne. Translacijska ploha nastaje kada se jedna krivulja translacija po drugoj, rotacijska kada se krivulja rotira oko osi, a klizna kada krajevi jedne dužine klize po dvjema krivuljama [6]. Primjeri ploha prikazani su slikom 2.1.



**Slika 2.1 Rotacijske plohe (ljubičasto), translacijska ploha (zeleno) i klizna ploha (narančasto)**

Ljuske se također mogu klasificirati po Gaussovoj zakrivljenosti. Plohe za koje je Gaussova zakrivljenost jednaka nuli mogu se razviti u ravninu i zato se nazivaju i ravnim plohami. Najpoznatiji primjeri tih ploha su stožac i valjak. Plohe pozitivne ili negativne Gaussove zakrivljenosti ne mogu se razviti u ravninu, a najpoznatiji primjer plohe negativne zakrivljenosti je hiperboloid, dok je pozitivne zakrivljenosti sfera. Za sfernu ljusku vrijedi da su meridijanski i cirkularni polumjeri zakrivljenosti  $r_1$  i  $r_2$  jednaki i imaju vrijednost radijusa sfere  $R$ :

$$r_1 = r_2 = R = \frac{d}{2} = 8,95 \text{ m.} \quad (2.1)$$

Za tanke ljuske vrijede sljedeća ograničenja i pretpostavke [6]:

- Ljuska je tanka, odnosno vrijedi:

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}. \quad (2.2)$$

- Debljina stijenke ljuske je konstantna ili se neznatno mijenja.
- Pri deformiranju normale na srednju plohu ostaju ravne i okomite na nju.

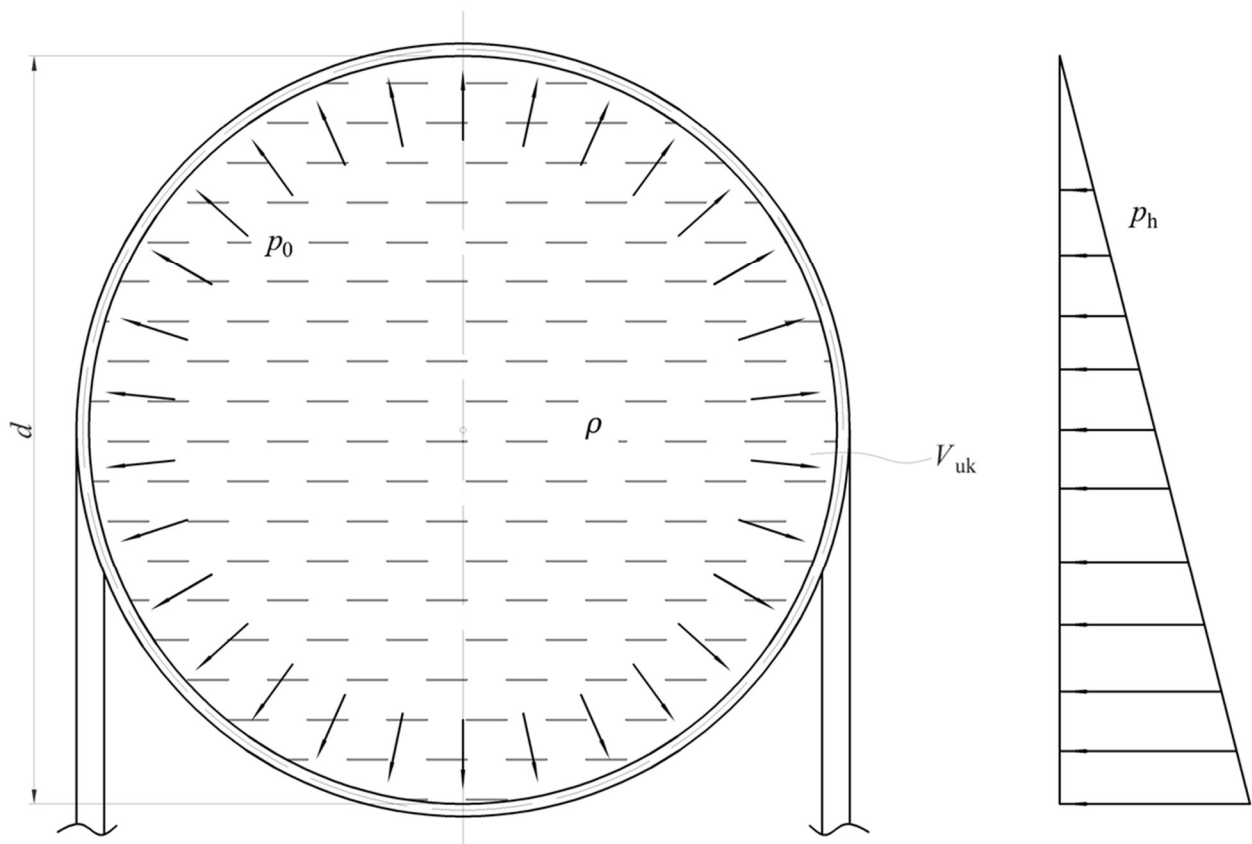
- Naprezanja u smjeru normale se zanemaruju u odnosu na ostala naprezanja.
- Opterećenje je statičko.
- Materijal je homogen, izotopan i linearno elastičan.
- Pomaci i deformacije su mali.

Debljina zadane sferne ljuske je konstantna, omjer debljine i radijusa iznosi 0,003, a opterećenje je statičko: tlak  $p_0$  od 1,88 MPa i hidrostatski tlak ukapljenog plina  $p_h$ . Opterećenje je prikazano slikom 2.2. Dopušteno naprezanje materijala ograničeno je granicom tečenja, pa prema tome materijal jest linearno elastičan, a pomaci i deformacije su male u odnosu na dimenzije konstrukcije. Pošto su sva ograničenja i pretpostavke zadovoljene, jednačba ravnoteže membranskih sila prema [6] glasi:

$$\frac{N_\theta}{r_1} + \frac{N_\varphi}{r_2} = p_n, \quad (2.3)$$

s uvrštavanjem izraza (2.1) jednačba ravnoteže glasi:

$$N_\theta + N_\varphi = p_n R. \quad (2.4)$$

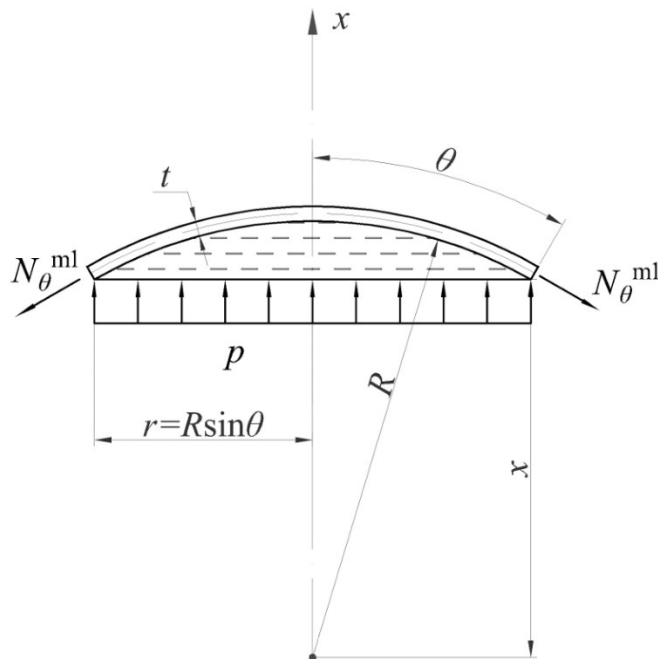


Slika 2.2 Prikaz zadane sferne ljuske s opterećenjima

## 2.1.2. Membranske sile sferne ljuske

### 2.1.1.1. Presjek 1-1

Na sfernom spremniku promatrana su dva presjeka. Prvi presjek nalazi se na području iznad ekvatora sfere, a drugi ispod. Presjek s označenom koordinatom  $x$ , kutom  $\theta$  i opterećenjima presjeka prikazan je slikom 2.3.



Slika 2.3 Presjek 1-1

Presjek 1-1 nalazi se u području  $x \in [0, R]$ , odnosno  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  te je tlak u smjeru normale  $p_n$  u tom području jednak zbroju pretlaka  $p_0$  i hidrostatskog tlaka  $p_h$ .

$$p_n = p_0 + p_h = p_0 + \rho g h', \quad (2.5)$$

Hidrostatski tlak je funkcija visine tekućine, koja se može izraziti pomoću kuta  $\theta$ :

$$h' = R(1 - \cos \theta). \quad (2.6)$$

Nakon postavljanja jednadžbe ravnoteže sila u smjeru lokalne osi  $x$  dobiva se:

$$2r\pi \sin(\theta) N_\theta^{ml} = p(x)r^2\pi - G(x). \quad (2.7)$$

Funkcija tlaka  $p(x)$  u presjeku 2-2 prikazana je izrazom:

$$p(x) = p_0 + \rho g h', \quad (2.8)$$

$$p(x) = p_0 + \rho g R (1 - \cos \theta).$$

Funkcija težine tekućine  $G(x)$  u presjeku 2-2 prikazana je izrazom:

$$G(x) = \rho g V_{os}, \quad (2.9)$$

gdje je  $V_{os}$  volumen odsječka sfere, koji je napunjen tekućinom i računa se kao:

$$V_{os} = \frac{\pi h'}{6} (3r^2 + h'^2). \quad (2.10)$$

Težina tekućine je tada:

$$G(x) = \rho g \frac{\pi h'}{6} (3r^2 + h'^2), \quad (2.11)$$

$$G(x) = \rho g \frac{\pi R^3}{3} (1 - \cos \theta)(1 + \sin^2 \theta - \cos \theta).$$

Nakon uvrštavanja izraza (2.6) i (2.3) u (2.2) dobiva se:

$$N_{\theta}^{m1} = \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} (1 + 2 \cos \theta). \quad (2.12)$$

Izraz (2.11) uvrštava se u (2.4) kako bi se dobila cirkularna sila presjeka 1-1  $N_{\varphi}^{m1}$ :

$$N_{\varphi}^{m1} = \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} (5 + 4 \cos \theta). \quad (2.13)$$

Iz prethodnih izraza vidljivo je da su meridijanska i cirkularna sila funkcije kuta  $\theta$ . Za krajnje vrijednosti presjeka vrijedi:

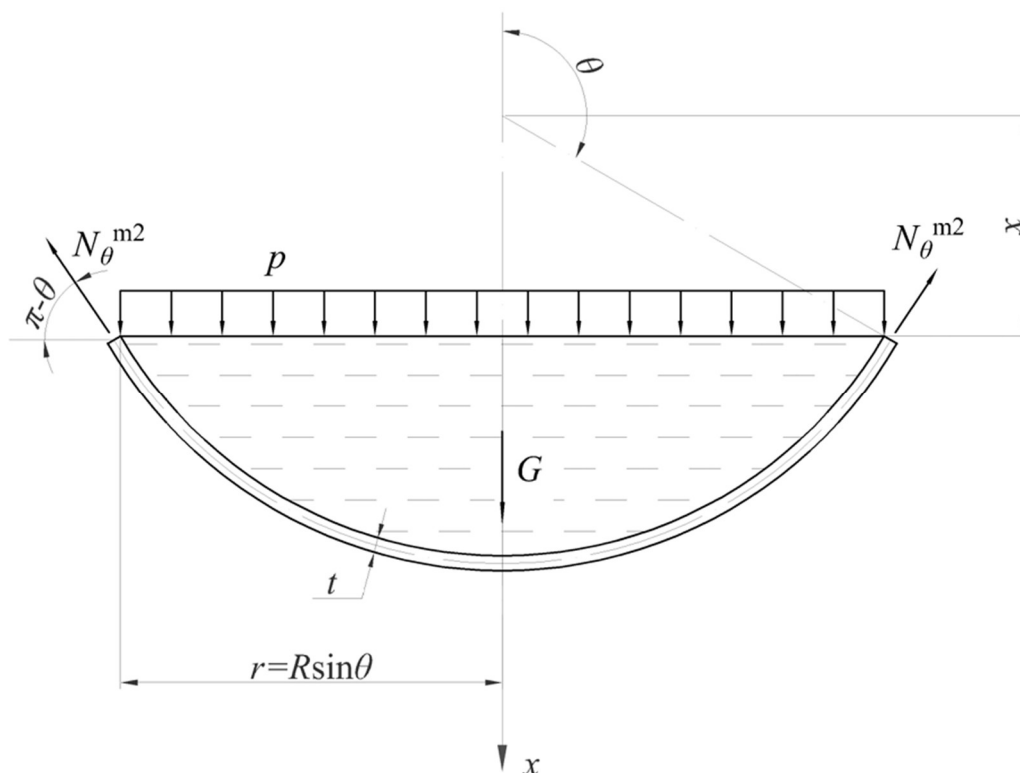
$$\begin{aligned} N_{\theta}^{m1}(\theta = 0^\circ) &= \frac{p_0 R}{2}, \\ N_{\varphi}^{m1}(\theta = 0^\circ) &= \frac{p_0 R}{2}, \\ N_{\theta}^{m1}(\theta = 90^\circ) &= \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6}, \\ N_{\varphi}^{m1}(\theta = 90^\circ) &= \frac{p_0 R}{2} + 5 \frac{\rho g R^2}{6}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

a nakon uvrštenih vrijednosti:

$$\begin{aligned} N_{\theta}^{m1}(\theta = 0^\circ) &= 8413000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ N_{\varphi}^{m1}(\theta = 0^\circ) &= 8413000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ N_{\theta}^{m1}(\theta = 90^\circ) &= 8485032 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ N_{\varphi}^{m1}(\theta = 90^\circ) &= 8773160 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.1.1.2. Presjek 2-2

Presjek s označenom koordinatom  $x$ , kutom  $\theta$  i opterećenjima presjeka prikazan je slikom 2.4.



Slika 2.4 Presjek 2-2

Presjek prikazan slikom nalazi se u području  $x \in [0, R]$ , odnosno  $\theta \in [90^\circ, 180^\circ]$  te je tlak u smjeru normale  $p_n$  u tom području također jednak zbroju pretlaka  $p_0$  i hidrostatskog tlaka  $p_h$ .

$$p_n = p(x) = p_0 + p_h = p_0 + \rho g h'. \quad (2.16)$$

Nakon postavljanja jednadžbe ravnoteže sila u smjeru lokalne osi  $x$  dobiva se:

$$2r\pi \sin(\pi - \theta) N_\theta^{\text{m}2} = p(x)r^2\pi + G(x). \quad (2.17)$$

Funkcija težine tekućine  $G(x)$  u presjeku 2-2 prikazana je izrazom:

$$G(x) = \rho g V_{\text{os}}, \quad (2.18)$$

$$V_{\text{os}} = \frac{\pi R(1 + \cos \theta)}{6} (3r^2 + (1 + \cos \theta)^2).$$

Uvrštavanjem izraza (2.18) i (2.20) u izraz (2.19) i sređivanjem tog izraza dobiva se:

$$N_\theta^{\text{m}2} = \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{5(1 - \cos \theta) + 2 \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (2.19)$$

Izraz (2.18) i (2.21) uvrštavaju se u (2.4) kako bi se dobila cirkularna sila presjeka 2-2  $N_\varphi^{\text{m}2}$ :

$$N_\varphi^{\text{m}2} = \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{1 - 7 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (2.20)$$

Iz izraza prethodnih izraza vidljivo je da meridijanska i cirkularna sila ovise o kutu presjeka  $\theta$ .

Naprezanja u rubnim točkama presjeka tada iznose:

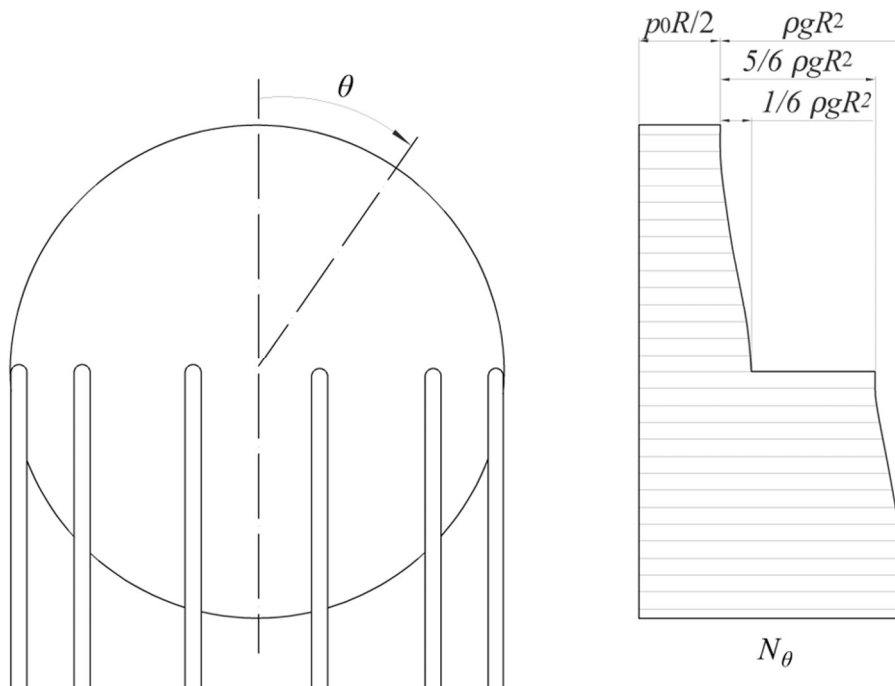
$$\begin{aligned} N_{\theta}^{m2}(\theta = 90^{\circ}) &= \frac{p_0 R}{2} + 5 \frac{\rho g R^2}{6}, \\ N_{\varphi}^{m2}(\theta = 90^{\circ}) &= \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6}, \\ N_{\theta}^{m2}(\theta = 180^{\circ}) &= \frac{p_0 R}{2} + \rho g R^2, \\ N_{\varphi}^{m2}(\theta = 180^{\circ}) &= \frac{p_0 R}{2} + \rho g R^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

a nakon uvrštenih vrijednosti:

$$\begin{aligned} N_{\theta}^{m2}(\theta = 90^{\circ}) &= 8773106 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ N_{\varphi}^{m2}(\theta = 90^{\circ}) &= 8485032 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ N_{\theta}^{m2}(\theta = 180^{\circ}) &= 8485193 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ N_{\varphi}^{m2}(\theta = 180^{\circ}) &= 8465193 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

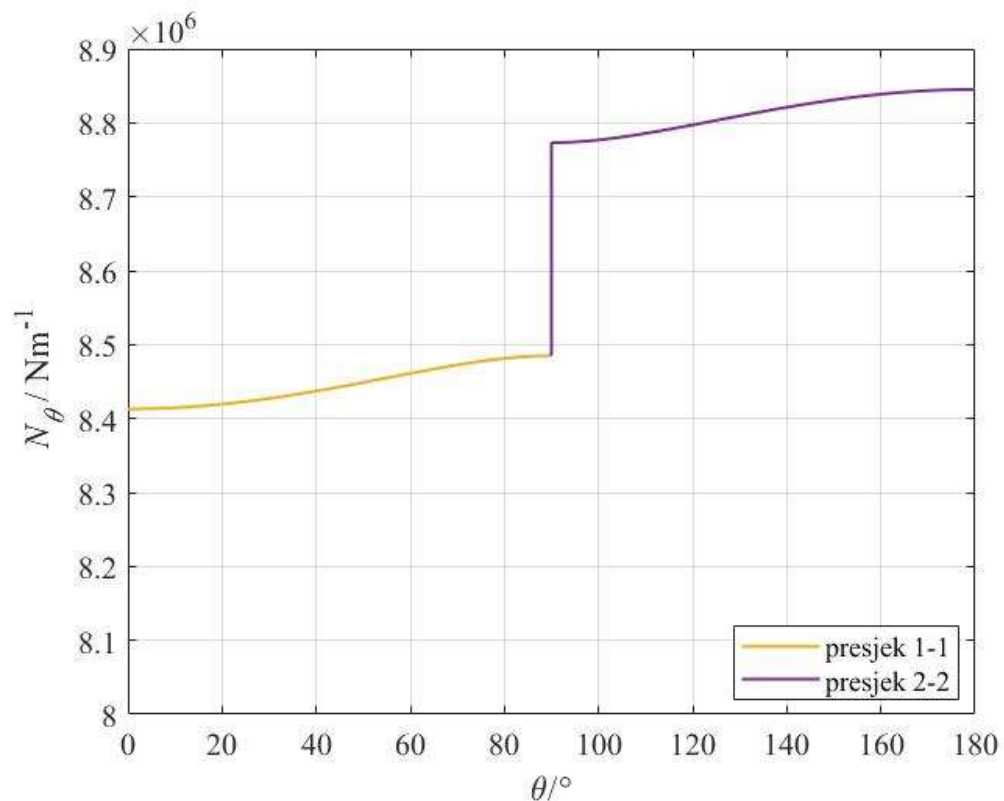
### 2.1.2. Raspodjela membranskih naprezanja

Raspodjela meridijanskih sila prikazana je slikama 2.5 i 2.6.



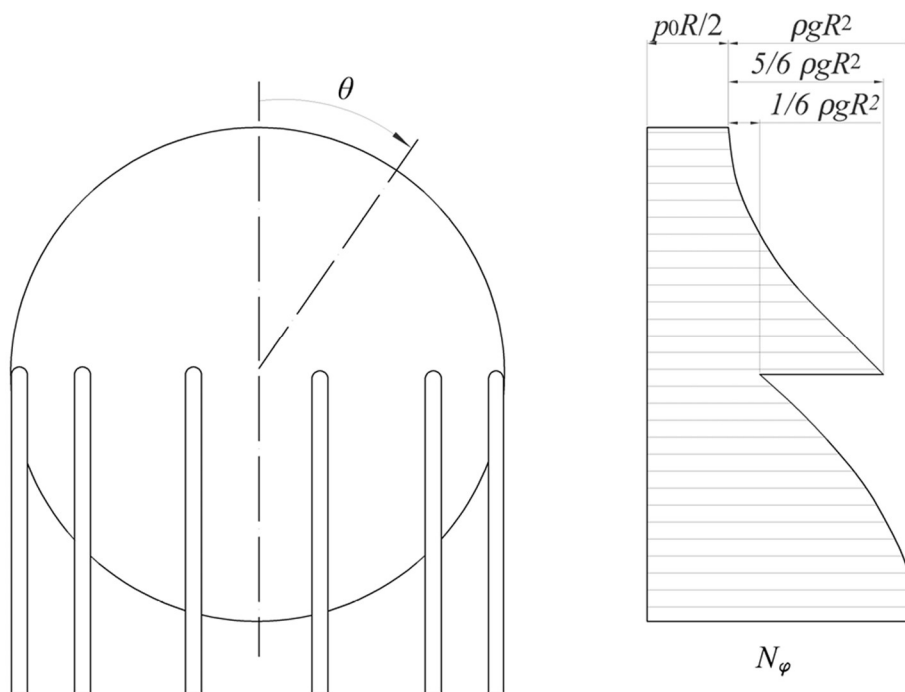
Slika 2.5 Vizualna raspodjela meridijanske sile



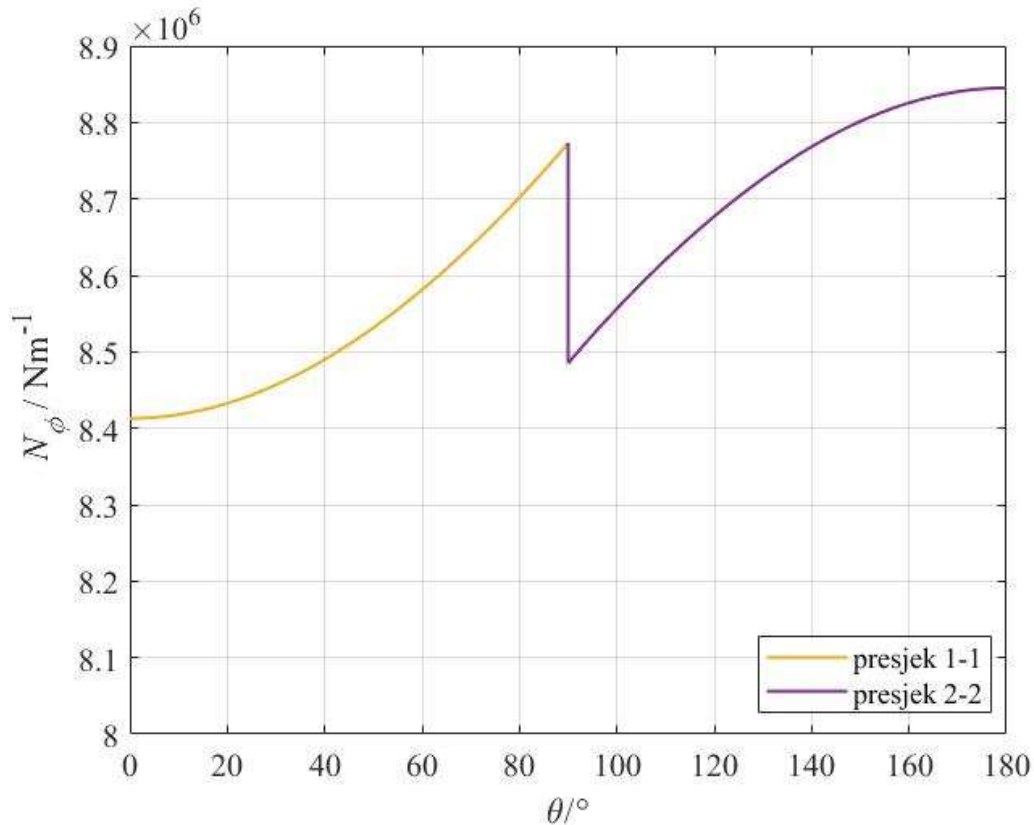


Slika 2.6 Kvantitativna raspodjela meridijanske sile za kut  $\theta$

Raspodjela cirkularnih sila prikazana je slikama 2.7 i 2.8.



Slika 2.7 Vizualna raspodjela cirkularne sile

Slika 2.8 Kvantitativna raspodjela cirkularne sile za kut  $\theta$ 

### 2.1.3. Membranska naprezanja sferne ljuske

Membranska naprezanja ljuske računaju se prema izrazima [6]:

$$\sigma_\theta^m = \frac{N_\theta^m}{h}, \quad \sigma_\varphi^m = \frac{N_\varphi^m}{h}. \quad (2.23)$$

Raspodjela naprezanja u presjecima ovisi o hidrostatskom tlaku tekućine, kao i raspodjela membranskih sila, odnosno funkcija je varijable dubine tekućine  $h'$  ili kuta  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{m1} &= \frac{1}{h} \left( \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} (1 + 2 \cos \theta) \right), \\ \sigma_\varphi^{m1} &= \frac{1}{h} \left( \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} (5 + 4 \cos \theta) \right), \\ \sigma_\theta^{m2} &= \frac{1}{h} \left( \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{5(1 - \cos \theta) + 2 \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right), \\ \sigma_\varphi^{m2} &= \frac{1}{h} \left( \frac{p_0 R}{2} + \frac{\rho g R^2}{6} \frac{1 - 7 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Na vrhu sfere, za  $\theta = 0^\circ$  na presjeku 1-1, naprezanja iznose:

$$\sigma_\theta^{m1}(\theta = 0^\circ) = \sigma_\varphi^{m1}(\theta = 0^\circ) = 336,5 \text{ MPa} .$$

Na ekvatoru sfere, za  $\theta = 90^\circ$  naprezanja iznose:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{m1}(\theta = 90^\circ) &= 339,4 \text{ MPa} , & \sigma_\theta^{m2}(\theta = 90^\circ) &= 350,9 \text{ MPa} \\ \sigma_\varphi^{m1}(\theta = 90^\circ) &= 350,9 \text{ MPa} , & \sigma_\varphi^{m2}(\theta = 90^\circ) &= 339,4 \text{ MPa} . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na najvećoj dubini sfere, za  $\theta = 180^\circ$  na presjeku 2-2, naprezanja iznose:

$$\sigma_\theta^{m2}(\theta = 180^\circ) = \sigma_\varphi^{m2}(\theta = 180^\circ) = 353,8 \text{ MPa} . \quad (2.26)$$

#### 2.1.4. Ekvivalentno naprezanje

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja iznosi [6]:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} - \sigma_{min} . \quad (2.27)$$

Pretpostavljeno je dvoosno stanje naprezanja. Naprezanje u smjeru normale na srednju plohu se zanemaruje. U slučaju sfere, naprezanje u smjeru normale je radijalno naprezanje  $\sigma_r$  pa je zbog toga pri određivanju minimalnog naprezanja potrebno uzeti u obzir i:

$$\sigma_r = 0 \text{ MPa} = \sigma_{min}(\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ) . \quad (2.28)$$

Ekvivalentno naprezanje izračunato je u tri točke. Za  $\theta = 0^\circ$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(\theta = 0^\circ) &= \sigma_\theta^{m1} = \sigma_\varphi^{m1} = 336,520 \text{ MPa} , & (2.29) \\ \sigma_{ekv}(\theta = 0^\circ) &= 336,520 \text{ MPa} . \end{aligned}$$

Za  $\theta = 90^\circ$  (ekvator):

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(\theta = 90^\circ) &= \sigma_\theta^{m2}(\theta = 90^\circ) = 350,808 \text{ MPa} , & (2.30) \\ \sigma_{ekv}(\theta = 90^\circ) &= 350,808 \text{ MPa} . \end{aligned}$$

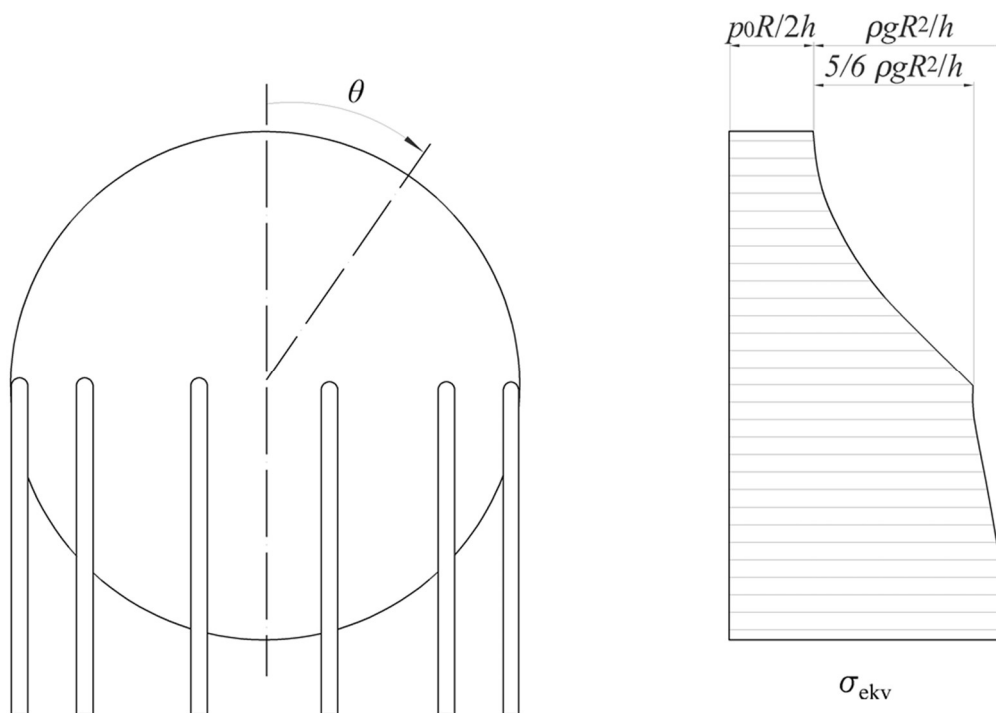
Za  $\theta = 180^\circ$  (dno spremnika):

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(\theta = 180^\circ) &= \sigma_\varphi^{m2}(\theta = 180^\circ) = 353,808 \text{ MPa} , & (2.31) \\ \sigma_{ekv}(\theta = 180^\circ) &= 353,808 \text{ MPa} . \end{aligned}$$

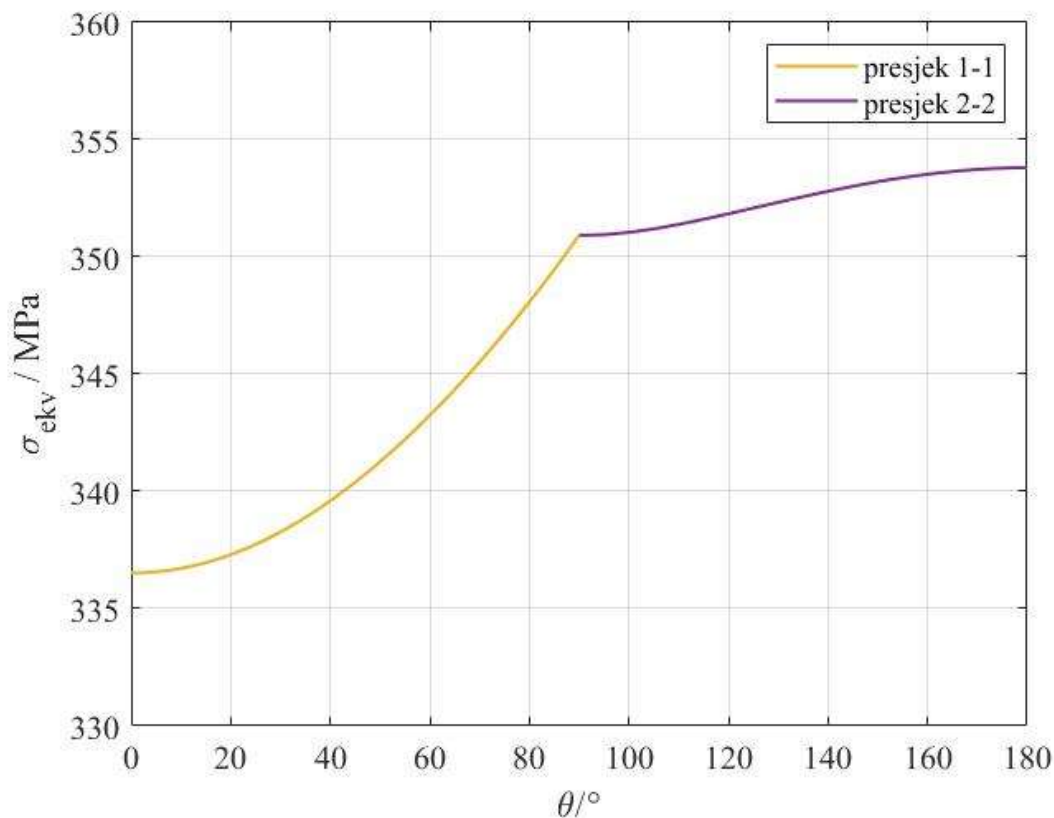
Maksimalno ekvivalentno naprezanje nastaje na dnu spremnika i iznosi 353,808 MPa. U usporedbi s granicom proporcionalnosti materijala sfere od 450 MPa dolazimo do zaključka da deformacije konstrukcije ostaju u elastičnom području uz faktor sigurnosti:

$$S = \frac{\sigma_p}{\sigma_{ekv}(\theta = 0^\circ)} = \frac{450}{353,8} = 1,27 . \quad (2.32)$$

Raspodjela ekvivalentnih napreznja prikazana je slikom 2.9 i 2.10.



Slika 2.9 Vizualna raspodjela ekvivalentnog napreznja



Slika 2.10 Kvantitativna raspodjela ekvivalentnog napreznja za kut  $\theta$

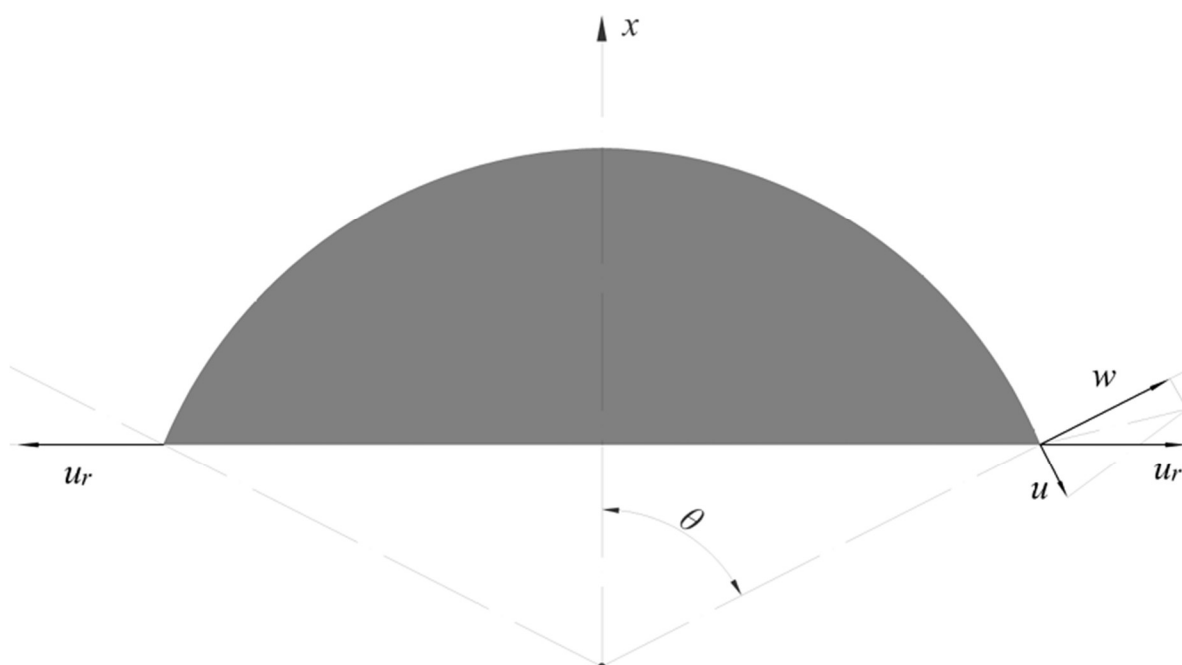
### 2.1.5. Membranski pomaci sfere

Komponente pomaka neke točke srednje plohe u meridijanskom, cirkularnom i normalnom smjeru označavaju se s  $u$ ,  $v$  i  $w$ . Pošto je sfera osnosimetrična, cirkularni pomak  $v$  je jednak nuli, a ostali su pomaci funkcije varijable  $\theta$  [6]. Iz slike 2.11 vidljiva je veza radijalnog pomaka  $u_r$  s meridijanskim  $w$  i normalnim pomakom  $u$ :

$$u_r = u \cos \theta + w \sin \theta . \quad (2.33)$$

Radijalni pomak se također može prikazati izrazom:

$$u_r = \frac{r}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) . \quad (2.34)$$



Slika 2.11 Definicija membranskih pomaka [6]

Za sferu vrijedi:

$$u_r = \frac{R \sin \theta}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) . \quad (2.35)$$

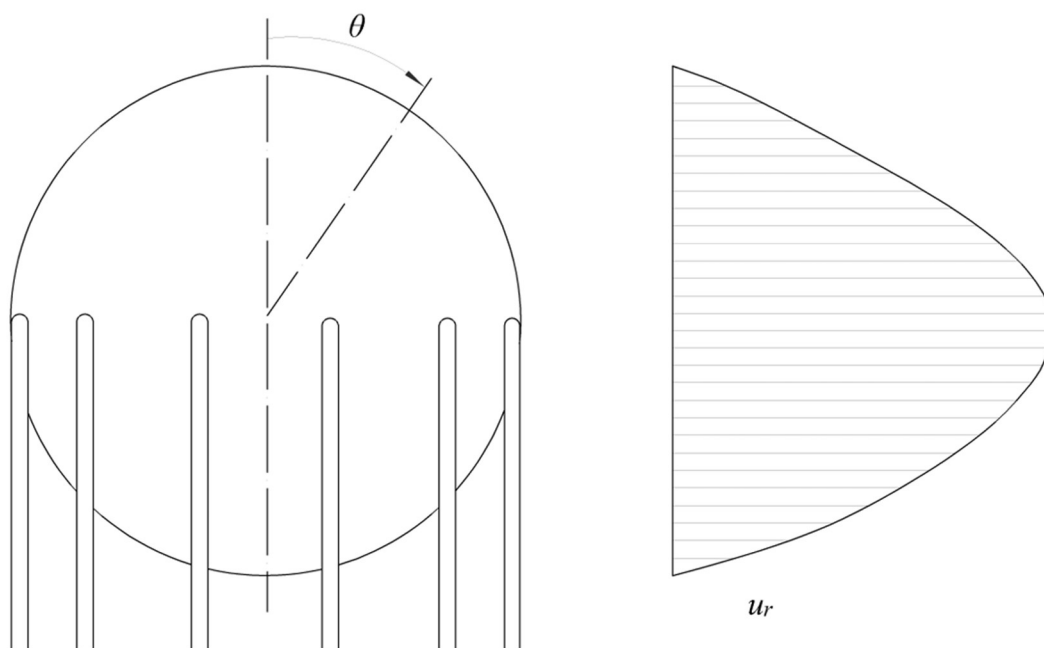
Za točke  $\theta = 0^\circ$  te  $\theta = 180^\circ$  vrijedi:

$$u_r(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = 0 \text{ mm} , \quad (2.36)$$

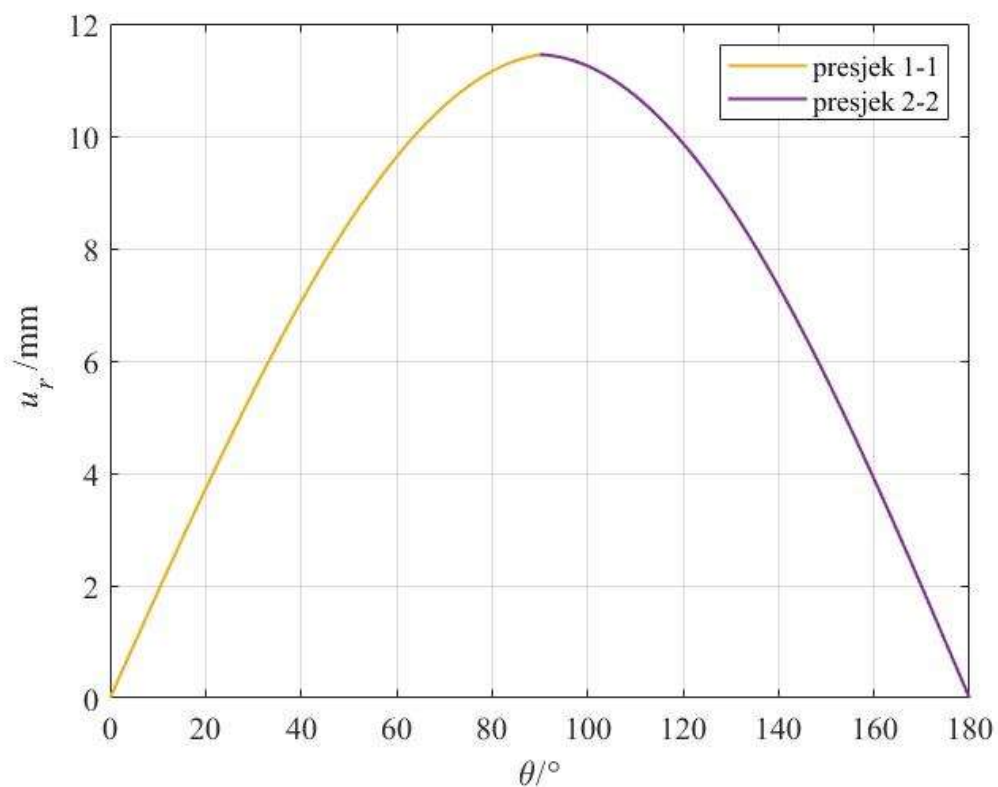
a za točku  $\theta = 90^\circ$  vrijedi:

$$u_r^1(\theta = 90^\circ) = u_r^2(\theta = 90^\circ) = 11,45 \text{ mm} . \quad (2.37)$$

Raspodjela membranskih pomaka prikazana je slikom 2.12 i 2.13.



Slika 2.12 Vizualna raspodjela radijalnih pomaka sferne ljuske



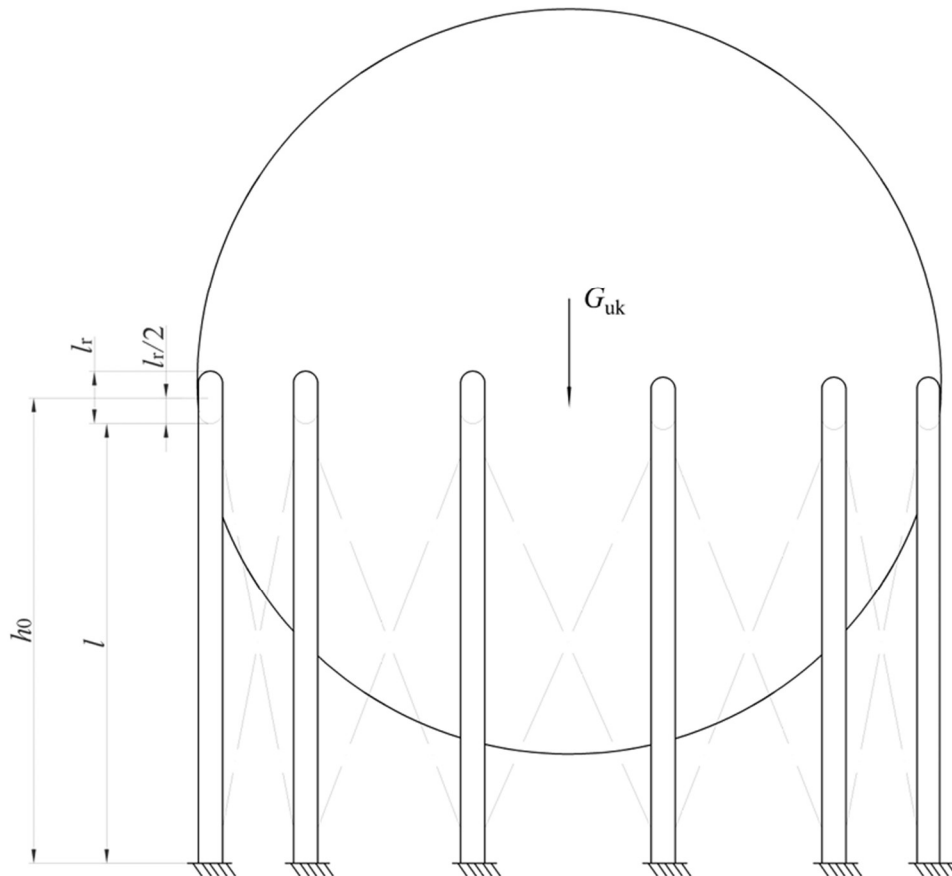
Slika 2.13 Kvantitativna raspodjela kuta zakreta za kut  $\theta$

## 2.2. Proračun izvijanja stupa

Ograničenja i pretpostavke koje vrijede za daljnji proračun izvijanja su [7]:

- Vrijedi linearna veza naprezanja i deformacija.
- Diferencijalna jednačba elastične linije vrijedi za male pomake.
- Izvijanje se vrši oko one osi kojoj je krutost štapa minimalna.

Za zadanu konstrukciju vrijede sva ograničenja i pretpostavke. Linearna veza naprezanja i deformacija vrijedi zato što je dopušteno naprezanje jednako granici elastičnosti materijala, pomaci i deformacije su male, a daljnjem proračunu odredit će se moment tromosti za os oko koje će krutost štapa biti minimalna. Konstrukcija sfere oslonjena je na 12 stupova postavljenih na jednakim razmacima oko njenog ekvatora koji su opterećeni težinom tekućine unutar spremnika te težinom samog spremnika, kao što je prikazano slikom 2.14.



Slika 2.14 Prikaz geometrije stupova

Proračunat je slučaj s najvećim opterećenjem, kada je spremnik u potpunosti ispunjen ukapljenim plinom. Težina je tada:

$$G_{uk} = G_s + G_p^{\max} = \rho_s g V_s + \rho g V_{uk}, \quad (2.38)$$

gdje je  $V_s$  volumen sferne konstrukcije i iznosi:

$$V_s = \frac{(d + 2t)^3 - d^3}{6} \pi = 15,12 \text{ m}^3, \quad (2.39)$$

a  $V_{uk}$  ukupni volumen unutrašnjosti sfere koji iznosi:

$$V_{uk} = \frac{d^3}{6} \pi = 3003,02 \text{ m}^3. \quad (2.40)$$

Ukupno opterećenje je dakle:

$$G_{uk} = 17367 \text{ kN}, \quad (2.41)$$

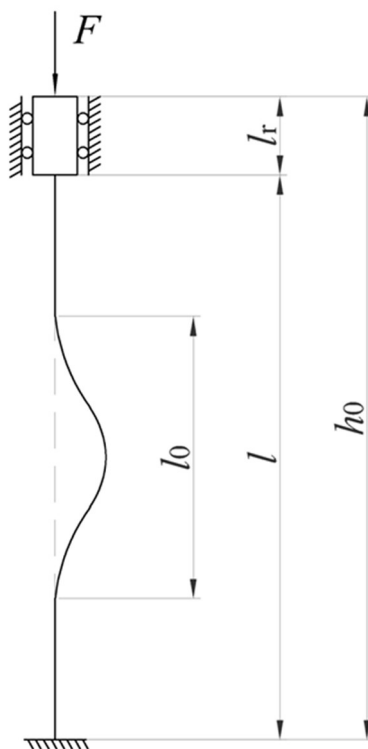
a sila koja opterećuje svaki stup:

$$F = \frac{G_{uk}}{n} = 1447 \text{ kN}. \quad (2.42)$$

Dio stupa opterećen na izvijanje  $l$  dobiva se oduzimanjem duljine dodira sfere i stupa  $l_r$  od visine na kojoj se nalazi ekvator sfere  $h_0$ :

$$l = h_0 - \frac{l_r}{2} = 10196 \text{ mm}. \quad (2.43)$$

Pretpostavljeni oblik izvijanja stupa prikazan je slikom 2.15.



Slika 2.15 Oblik izvijanja stupa

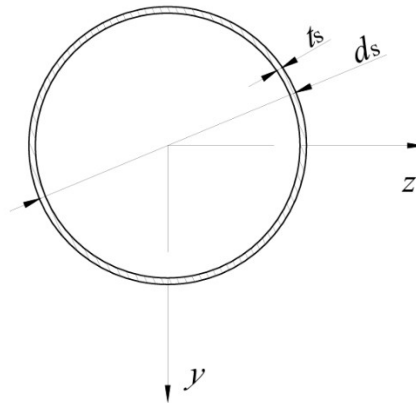


Stup je prema pojednostavljenju s jedne strane ukliješten, a s druge mu je dozvoljen samo vertikalni pomak. Na stvarnoj konstrukciji gornji kraj stupa je pomaknut u horizontalnom smjeru za vrijednost jednaku radijalnom pomaku sfere na ekvatoru  $u_r(\theta = 90^\circ)$ .

Duljina izvijanja  $l_0$  je prema slici 2.15:

$$l_0 = \frac{l}{2} = 5098 \text{ mm.} \quad (2.44)$$

Poprečni presjek štapa je kružni vijenac, kao što je prikazano slikom 2.16.



Slika 2.16 Poprečni presjek stupa/štapa

Karakteristike presjeka štapa, površina i aksijalni momenti tromosti iznose:

$$A = \frac{d_s^2}{4} \pi - \frac{(d_s - 2t_s)^2}{4} \pi = 26196 \text{ mm}^2, \quad (2.45)$$

$$I_y = I_z = \frac{d_s^4}{64} \pi - \frac{(d_s - 2t_s)^4}{64} \pi = 1,15 \cdot 10^9 \text{ mm}^4. \quad (2.46)$$

Izvijanje štapa događa se oko osi s manjim momentom tromosti, a kako je presjek kružnog vijenca osnosimetričan, momenti tromosti oko obje osi su jednaki pa je minimalan moment tromosti  $I_{\min}$ :

$$I_{\min} = 1,15 \cdot 10^9 \text{ mm}^4. \quad (2.47)$$

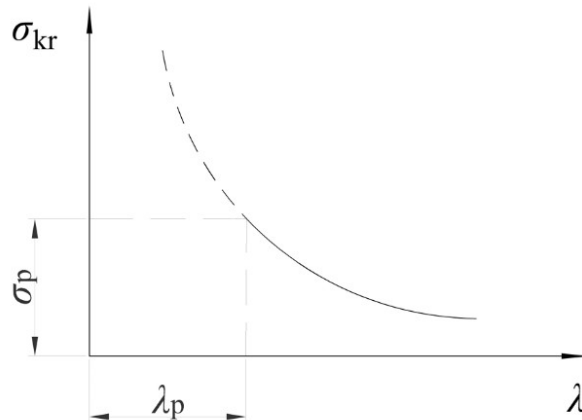
Minimalni radijus tromosti poprečnog presjeka štapa  $i_{\min}$  je tada:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 210 \text{ mm}, \quad (2.48)$$

a vitkost štapa  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = 24,23. \quad (2.49)$$

Kritično naprežanje  $\sigma_{kr}$ , a time i kritična sila  $F_{kr}$  ovise o svojstvima materijala i o vitkosti štapa, a funkcija koja prikazuje ovisnost kritičnog naprežanja  $\sigma_{kr}$  i vitkosti štapa  $\lambda$  naziva se Eulerova hiperbola [7] i prikazana je slikom 2.17.

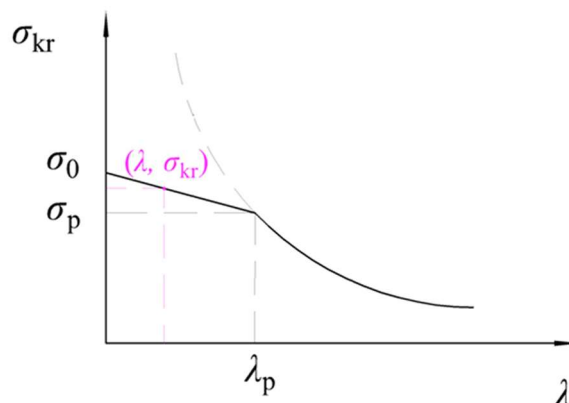


**Slika 2.17** Funkcija ovisnosti kritičnog naprežanja  $\sigma_{kr}$  i vitkosti štapa  $\lambda$  [7]

Prema grafu, pri velikoj vitkosti štapa kritično naprežanje teži u 0, a pri maloj vitkosti štapa kritično naprežanje teži u beskonačnost, što je i intuitivno, zato što se kraći i deblji štapovi teže izvijaju od duljih i tanjih štapova. Granična vitkost  $\lambda_p$  je vrijednost koja određuje izraz za kritičnu silu i kritično naprežanje. Računa se prema:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 66,23. \quad (2.50)$$

Štapovi velike vitkosti, za koje vrijedi  $\lambda > \lambda_p$  izvijaju se u elastičnom području, a oni za koje vrijedi  $\lambda < \lambda_p$  izvijaju se u Tetmayerovom području. Promatrani stup izvija se u Tetmayerovom području, gdje je veza kritičnog naprežanja i vitkosti štapa aproksimirana Tetmayerovim pravcem, kao što je prikazano slikom 2.18.



**Slika 2.18** Odnos kritičnog naprežanja  $\sigma_{kr}$  i vitkosti štapa  $\lambda$  za zadani stup

Sada se kritično naprezanje određuje prema jednadžbi pravca:

$$\sigma_{kr} = (\sigma_0 - \sigma_p) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}\right) + \sigma_p = 481,7 \text{ MPa}, \quad (2.51)$$

$$F_{kr} = \sigma_{kr} A = 12618 \text{ kN}. \quad (2.52)$$

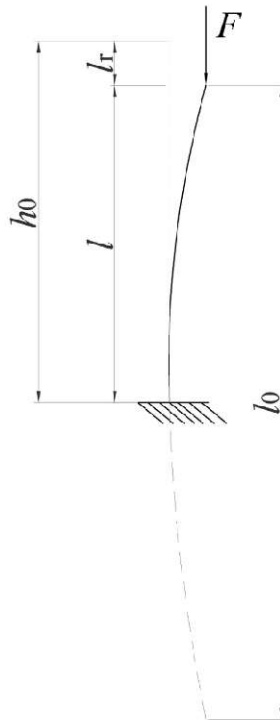
Dobivenu kritičnu silu potrebno je usporediti sa silom koja opterećuje štap prikazanu izrazom (2.42) te je konačni zaključak:

$$F_{kr} > F. \quad (2.53)$$

Sila u štapu je manja od kritične sile izvijanja pa tako ne dolazi do izvijanja štapa. Faktor sigurnosti za izvijanje je tada:

$$S = \frac{F_{kr}}{F} = 8,72. \quad (2.54)$$

Iako je ovaj slučaj izvijanja najbliži realnoj konstrukciji, to nije najkritičniji slučaj. Kritično naprezanje je ono najmanje, a to se postiže kada je štap najvitkiji, odnosno, kada je duljina izvijanja najveća. To se postiže kada je stup na jednoj strani uklješten, a na drugoj slobodan, kao što prikazuje slika 2.19.



**Slika 2.19** Oblik izvijanja stupa za najkritičniji slučaj

Sada je duljina izvijanja  $l_0^{\max}$  je prema slici 2.19:

$$l_0^{\max} = 2l = 20392 \text{ mm}. \quad (2.55)$$

Za maksimalnu duljinu izvijanja i vitkost štapa je maksimalna:

$$\lambda^{\max} = \frac{l_0^{\max}}{i_{\min}} = 96,92. \quad (2.56)$$

Izračunata vitkost veća je od granične pa se štap izvija u elastičnom području. Kritično naprezanje sada se računa prema izrazu:

$$\sigma_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^{\max 2}}. \quad (2.57)$$

S uvrštenom vrijednosti izraza (2.56) dobiva se:

$$\sigma_{\text{kr}} = 209,92 \text{ MPa}, \quad (2.58)$$

Kritična sila je tada:

$$F_{\text{kr}} = \sigma_{\text{kr}} A = 5499 \text{ kN}, \quad (2.59)$$

za koju također vrijedi:

$$F_{\text{kr}} > F. \quad (2.60)$$

Sila u štapu je manja od kritične sile izvijanja pa tako ne dolazi do izvijanja štapa. Faktor sigurnosti za ovaj slučaj je:

$$S = \frac{F_{\text{kr}}}{F} = 3,81. \quad (2.61)$$

Faktor sigurnosti i za najkritičniji slučaj je veći od jedan pa se prema tome može sa sigurnošću reći da neće doći do izvijanja.

### 3. Numeričko rješenje

#### 3.1. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata predstavlja numeričku metodu koja se koristi u inženjerskim analizama i znanstvenim istraživanjima za rješavanje složenih problema, koje je prezahtjevno ili uopće nije moguće izračunati poznatim analitičkim relacijama. Temelj ove metode leži u diskretizaciji kontinuuma na manje i jednostavnije dijelove, konačne elemente. Promatrani kontinuum ima beskonačan broj stupnjeva slobode, dok elementi čine mrežu konačnih elemenata sa konačnim brojem stupnjeva slobode. Zbog svoje preciznosti i fleksibilnosti, metoda konačnih elemenata se najčešće primjenjuje u područjima statičke analize, dinamičke analize, analize stabilnosti i analize prijenosa topline. Rješavanje statičkih problema, kao što je i problem koji je potrebno riješiti u ovom radu pomoću metode konačnih elemenata temelji se na pretpostavci da je opterećenje konstantno u vremenu, što omogućuje pojednostavljenje problema na sustav linearnih algebarskih jednadžbi [8]. Nepoznanice u ovom sustavu predstavljaju stupnjeve slobode proračunskog modela, odnosno pomake. Sustav jednadžbi tada se može izraziti u obliku:

$$\mathbf{KV}=\mathbf{R}, \quad (3.1)$$

gdje je:

$\mathbf{K}$  – globalna matrica krutosti proračunskog modela, koja ovisi o geometriji i svojstvima materijala,

$\mathbf{V}$  – globalni vektor pomaka,

$\mathbf{R}$  – globalni vektor opterećenja.

Nakon izračunatog pomaka  $u$  moguće je vizualizirati deformirani oblik konstrukcije, a i pomoću relacija u teoriji elastičnosti izračunati deformacije  $\varepsilon$  i naprezanja  $\sigma$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.3)$$

gdje je:

$\mathbf{D}_k$  – kinematički diferencijalni operator,

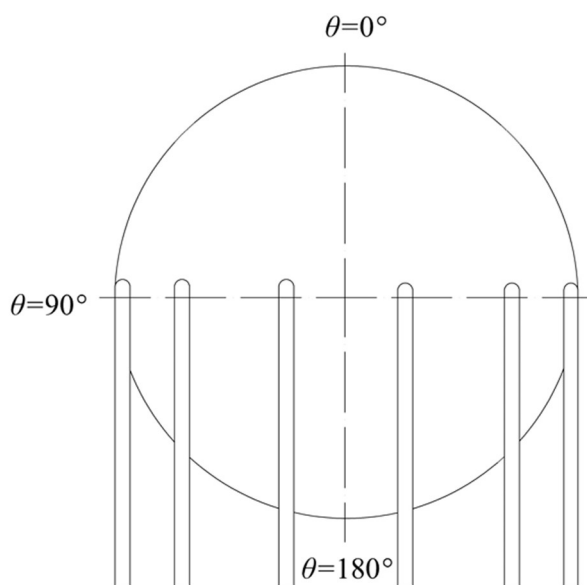
$\mathbf{D}$  – tenzor elastičnosti,

$\mathbf{u}$  – vektor lokalnih pomaka,

$\boldsymbol{\varepsilon}$  – vektor deformacija.

### 3.2. Verifikacija numeričkog modela sferne ljuske

Verifikacija modela predstavlja ključni korak u osiguravanju točnosti i pouzdanosti dobivenih rezultata. Proces uključuje usporedbu rezultata numeričke analize s analitičkim rješenjima, kada su dostupna, ili s referentnim numeričkim rezultatima iz literature. U ovom slučaju rezultati će se uspoređivati s analitičkim rješenjima za ekvivalentno naprezanje  $\sigma_{ekv}$  i progib  $w$ . Ekvivalentno naprezanje bit će očitano u dvije točke: za  $\theta = 0^\circ$  i  $\theta = 180^\circ$ , a progib za točku  $\theta = 90^\circ$ , što je ujedno i radijalni pomak za za  $\theta = 90^\circ$ . Točke uspoređivanja vrijednosti prikazane su slikom 3.1.

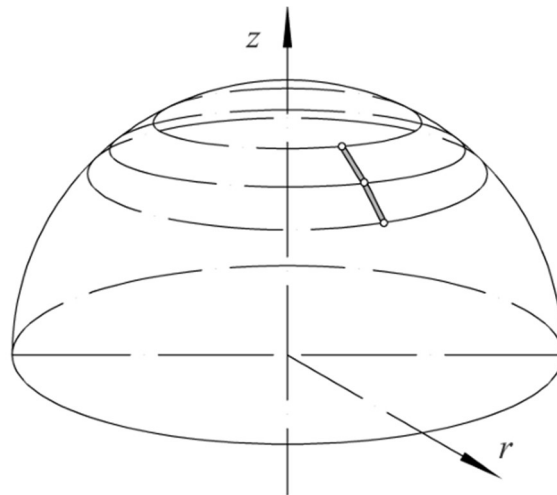


**Slika 3.1 Točke uspoređivanja analitičkog i numeričkog rješenja**

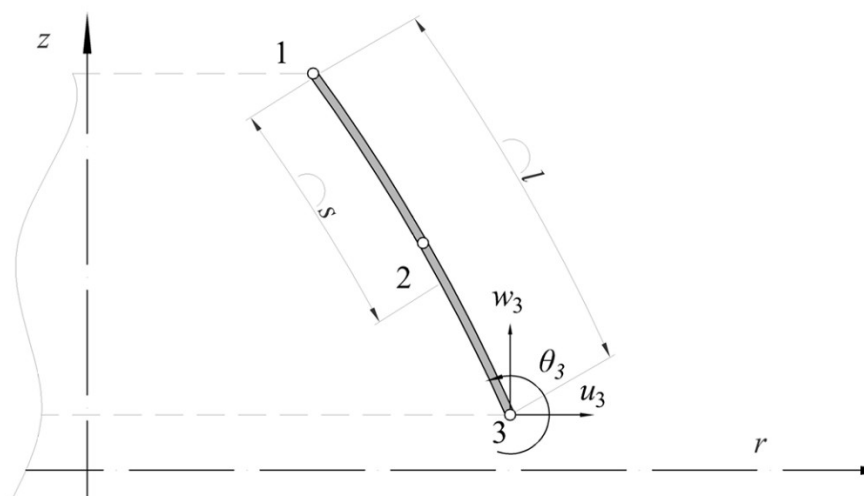
Također, provodi se analiza konvergencije kako bi se utvrdilo smanjuje li se pogreška rješenja proporcionalno s povećanjem broja elemenata. Cilj je verifikacije postići ravnotežu između preciznosti i računalnih resursa. Time se osigurava da model adekvatno opisuje proces bez nepotrebnog povećanja memorije računala. Verifikacija je nužna zbog toga što daje potvrdu da metoda ne uvodi dodatne numeričke pogreške te da je model prikladan za daljnju analizu i interpretaciju rezultata. Za verifikaciju modela zadanog zadatkom koristit će se sferna ljuska, s oslonjenim bridom ekvatora i opterećena unutarnjim pretlakom od 1,88 MPa i hidrostatskim tlakom UNP-a. Neće se razmatrati lokalno savijanje uzrokovano osloncem na ekvatoru sferne ljuske. Analitička rješenja tog problema izračunata su u poglavlju 2. Kako je konstrukcija sfere zakrivljena, pri odabiru elemenata potrebno je izbjegavati linearne elemente, da bi se izbjegla greška diskretizacije. Zakrivljene plohe potrebno je diskretizirati elementima višeg reda. Sljedeća poglavlja opisuju svaku vrstu korištenih konačnih elemenata te postupak postavljanja problema u programskom paketu Abaqus®.

### 3.2.1. Aksisimetrični jednodimenzijски element drugog reda, SAX2

SAX2 je aksisimetrični jednodimenzijски konačni element drugog reda koji se koristi za modeliranje problema s aksisimetričnom geometrijom, materijalnim svojstvima i opterećenjima. Ovaj element smanjuje složenost trodimenzijskog problema, zato što promatra samo jednodimenzijски presjek koji se rotira oko osi simetrije, što rezultira značajnim uštedama u računalnim resursima. [9] Karakteristika je aksisimetričnih elemenata da su čvorovi zapravo čvorne kružnice. Jedan karakterističan presjek točno prikazuje ponašanje cijele konstrukcije. Element je drugog reda te je zbog toga prikladan za opisivanje zakrivljene konstrukcije kao što je sfera. Varijabla  $s$  jest izvodnica elementa te se duž nje pretpostavlja raspodjela pomaka. Položaj elementa na kružnici prikazuje slika 3.2, a raspodjelu čvorova i stupnjeve slobode jednog od čvorova slika 3.3.



Slika 3.2 Općeniti položaj elementa SAX2 na sfernoj ljusci



Slika 3.3 Element SAX2 i stupnjevi slobode jednog čvora

Element ima tri čvora, a svaki čvor tri stupnja slobode – sveukupno devet faktora  $a_n$  polinoma koji opisuju raspodjelu pomaka. Vektor stupnjeva slobode  $i$ -tog čvora ima formulaciju:

$$\mathbf{v}_i^T = [u_i \quad w_i \quad \theta_i], \quad (3.4)$$

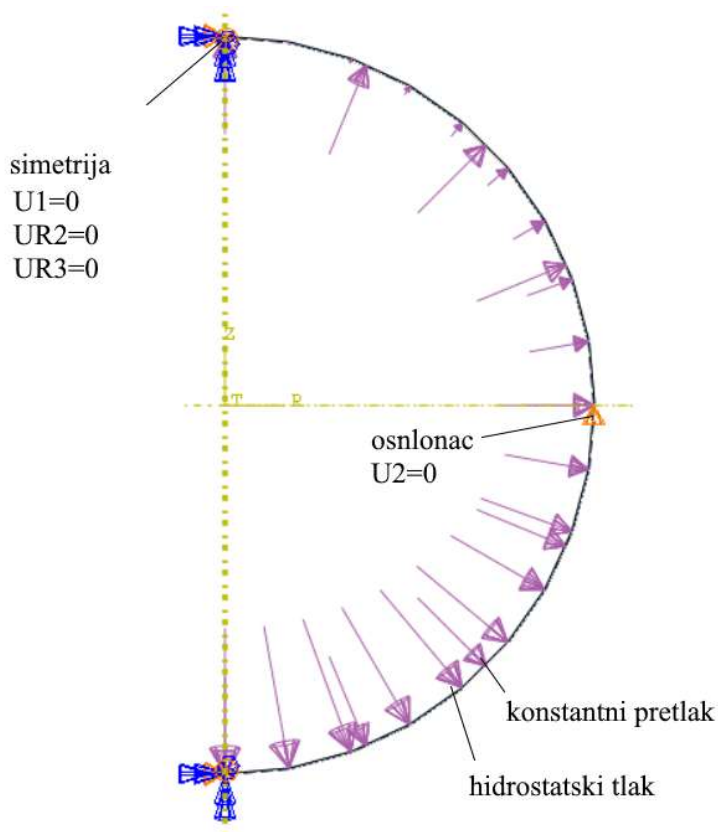
kao što je prikazano na slici 3.2 za čvor 3.

Raspodjela pomaka  $u$  opisana je polinomom drugog stupnja, a pomaka  $w$  polinomom petog stupnja:

$$u = a_1 + a_2s + a_3s^2, \quad (3.5)$$

$$w = a_4 + a_5s + a_6s^2 + a_7s^3 + a_8s^4 + a_9s^5. \quad (3.6)$$

Rubne uvjete i opterećenje za SAX2 elementa prikazuje slika 3.4. Promatrana je samo polovica konstrukcije pa su na osi simetrije postavljeni rubni uvjeti simetrije. Također, oslonac je postavljen na ekvatoru sfere.

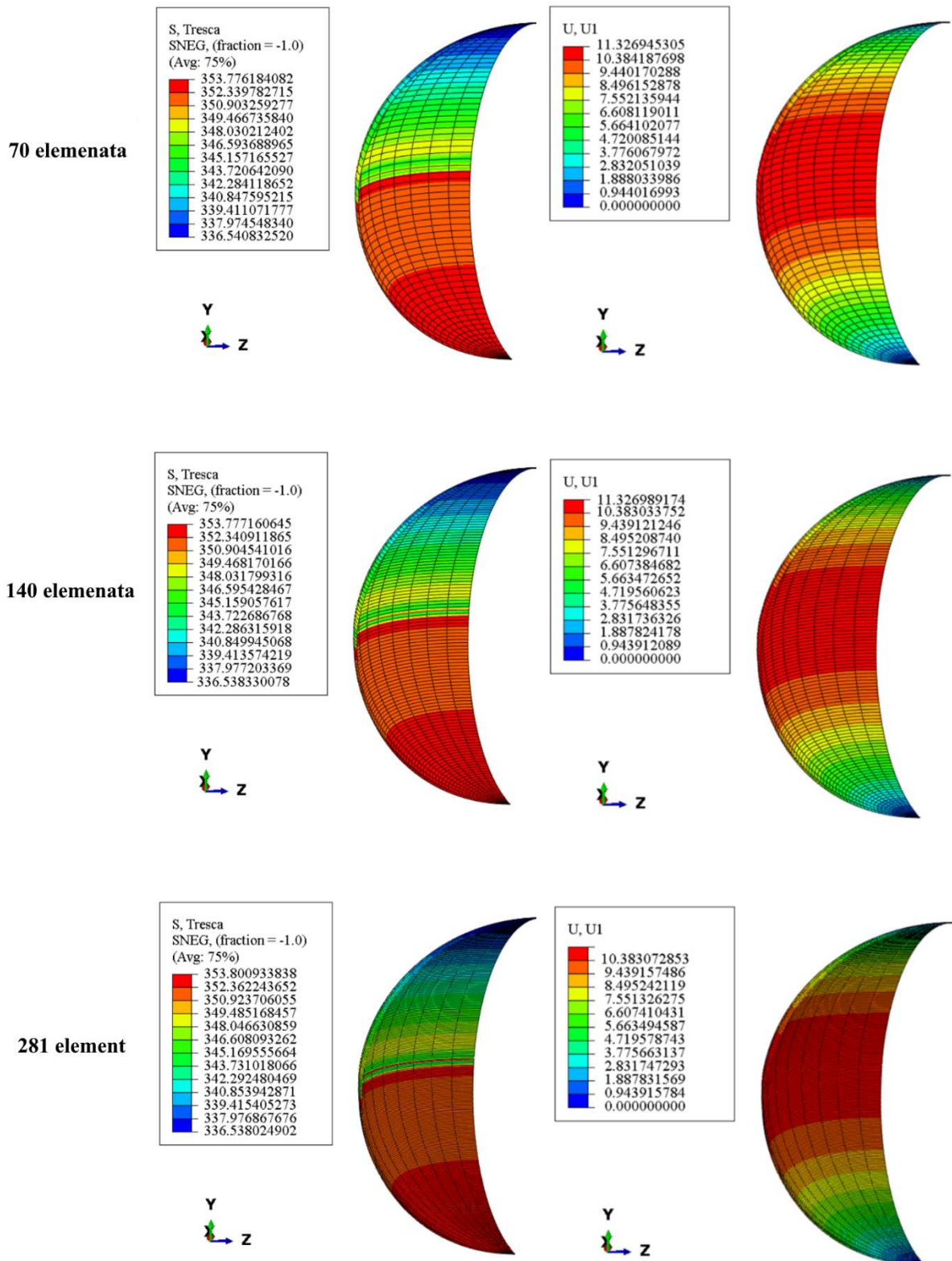


**Slika 3.4 Rubni uvjeti i opterećenja za element SAX2**

Mreža konačnih elemenata na gore prikazanom problemu izrađena je od 70, 140 i 281 elementa. Elementi su jednodimenzionalni pa je teško uočiti gustoću mreže osim ako se presjek ne rotira oko svoje osi. Zbog toga se mreža neće prikazivati u ovom odlomku, već se u pregledu rezultata može razaznati gustoća elemenata. Rezultati su rotirani oko osi simetrije zbog lakše vizualizacije.



Slika 3.5 prikazuje ekvivalentno naprezanje po teoriji najvećih posmičnih naprezanja te radijalni pomak duž sferne ljuske.



Slika 3.5 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa i radijalnog pomaka u mm za različiti broj elemenata SAX2

Rezultati su prikazani u tablici 3.1.

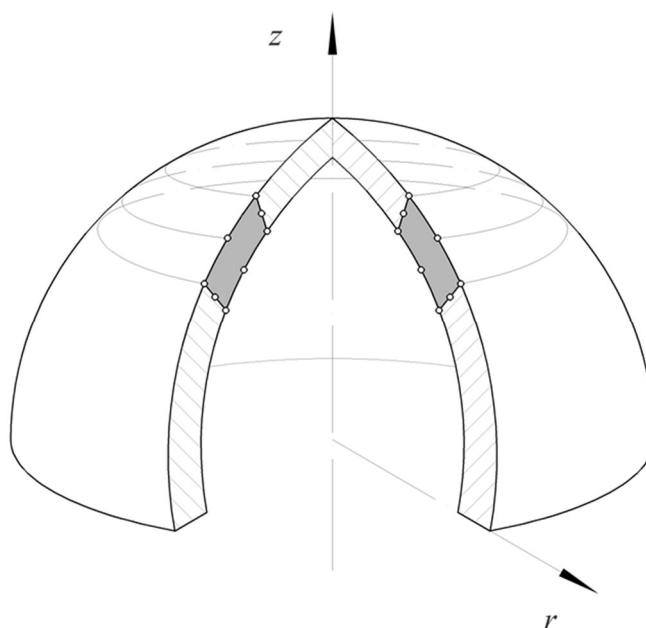
**Tablica 3.1 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element SAX2**

	Analitičko rješenje	70 elemenata	140 elemenata	281 element
$\sigma_{ekv}(\theta = 0^\circ)$ , MPa	336,520	336,541	336,538	336,538
greška		0,06%	0,05%	0,05%
$\sigma_{ekv}(\theta = 180^\circ)$ , MPa	353,808	353,776	353,777	353,801
greška		0,13%	0,19%	0,051%
$u_r(\theta = 90^\circ)$ , mm	11,450	11,327	11,327	11,328
greška		1,12%	1,12%	1,11%

Iz rezultata je vidljivo da rezultati već za 70 elemenata postižu zadovoljavajuću točnost, a s povećanjem elemenata vrijednosti konvergiraju onima izračunatim analitički.

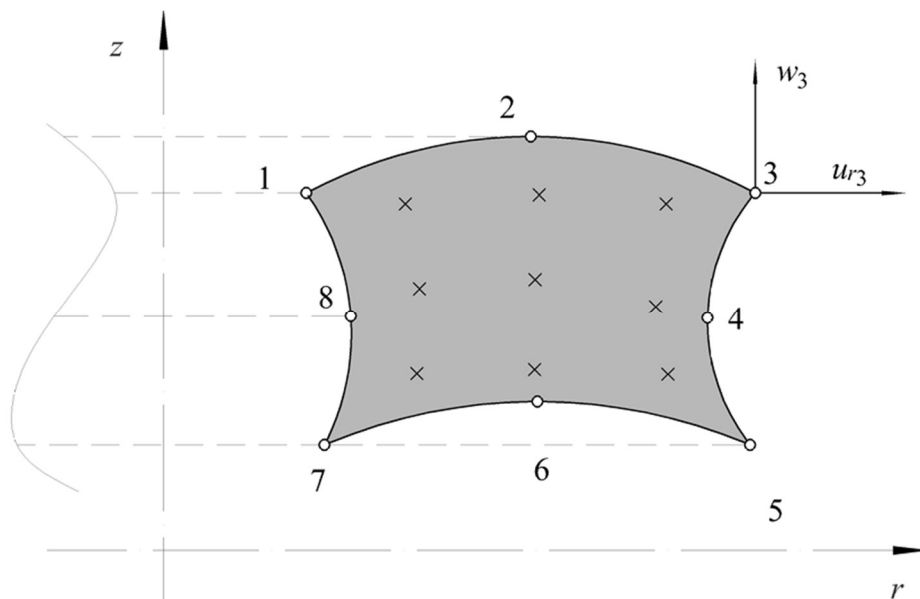
### 3.2.2. Osnosimetrični četverokutni element drugog reda, CAX8R

CAX8R je aksisimetrični dvodimenzijski konačni element drugog reda koji se koristi za modeliranje problema s aksisimetričnom geometrijom, materijalnim svojstvima i opterećenjima. Ovaj element, kao i SAX2 smanjuje složenost trodimenzionalnog problema, zato što promatra samo dvodimenzijski presjek koji se rotira oko osi simetrije, kao što je prikazano slikom 3.6.



**Slika 3.6 Općeniti položaj elementa SAX2 na sfernoj ljusci**

Element je drugog reda, što znači da svaka stranica ovog pravokutnika ima tri čvora. Raspodjelu čvorova i stupnjeve slobode jednog čvora prikazuje slika 3.7.



**Slika 3.7 Element CAX8R i stupnjevi slobode jednog čvora**

Slovo  $R$  u kratici elementa odnosi se na reduciriranu integraciju. Četiri čvora na slici 3.6. prikazani oznakom  $x$  označavaju točke numeričke integracije. Numerička integracija primjenjuje se kada su podintegralne funkcije toliko složene da je teško pronaći analitičko rješenje. Postupak numeričke integracije temelji se na zbrajanju podintegralnih funkcija u točkama integracije, pri čemu se izračunavaju vrijednosti funkcija množe s težinskim faktorima. Točnost integriranja ovisi o položaju točaka integracije i težinskih faktora. [8]

Element ima osam čvorova, a svaki čvor dva stupnja slobode – sveukupno šesnaest faktora  $a_n$  polinoma koji opisuju raspodjelu pomaka. Vektor stupnjeva slobode  $i$ -tog čvora ima formulaciju:

$$\mathbf{v}_i^T = [u_{ri} \quad w_i], \quad (3.7)$$

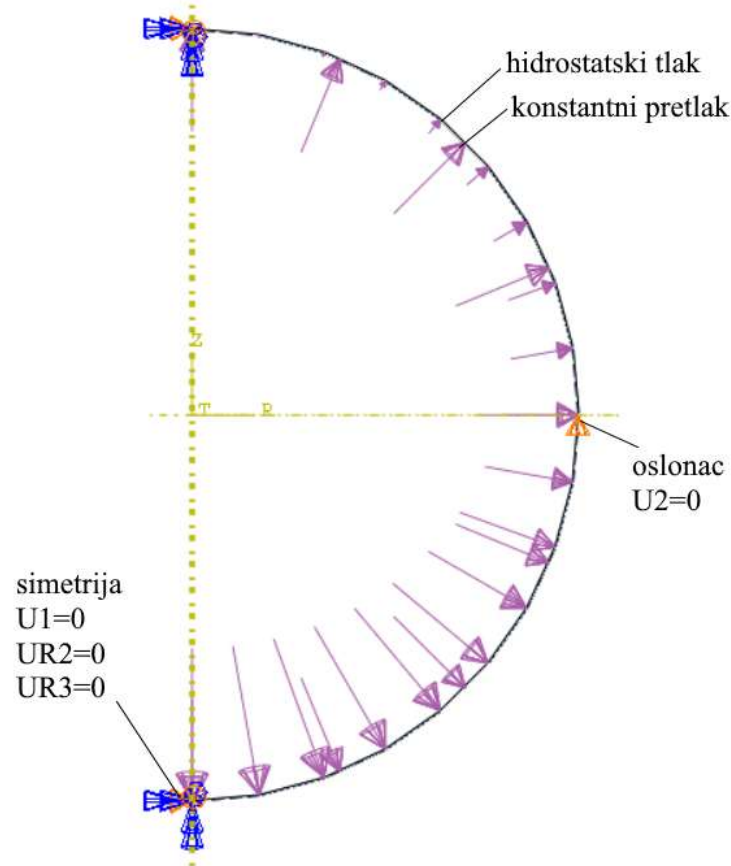
kao što je prikazano na slici 3.6. za čvor 3.

Raspodjela pomaka  $u_r$  i  $w$  opisana je nepotpunim polinomom trećeg stupnja

$$u_r = a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r z + a_5 r^2 + a_6 z^2 + a_7 r^2 z + a_8 r z^2, \quad (3.8)$$

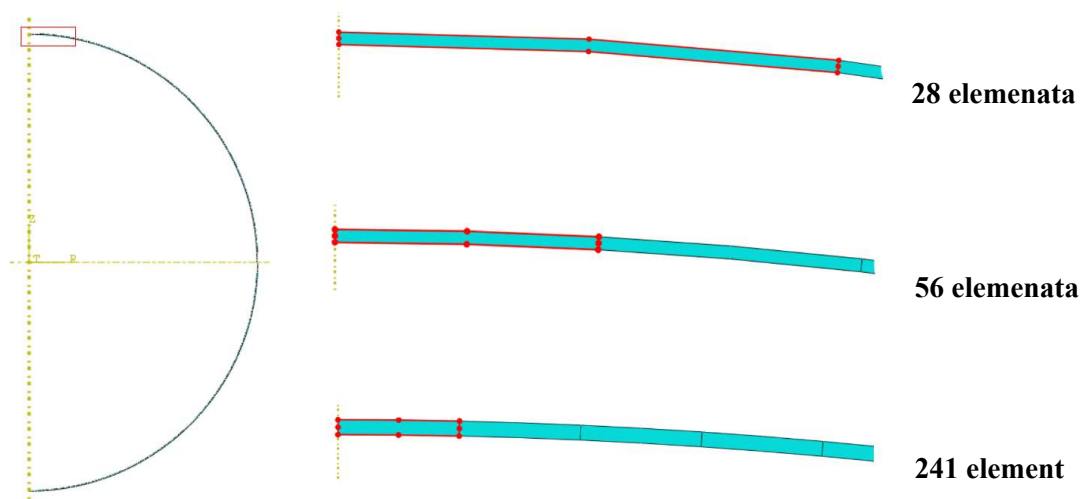
$$w = a_9 + a_{10} r + a_{11} z + a_{12} r z + a_{13} r^2 + a_{14} z^2 + a_{15} r^2 z + a_{16} r z^2. \quad (3.9)$$

Rubne uvjete i opterećenje za CAX8R elemente prikazuje slika 3.8. Promatrana je samo polovica konstrukcije pa su na osi simetrije postavljeni rubni uvjeti simetrije. Također, oslonac je postavljen na ekvatoru sfere.



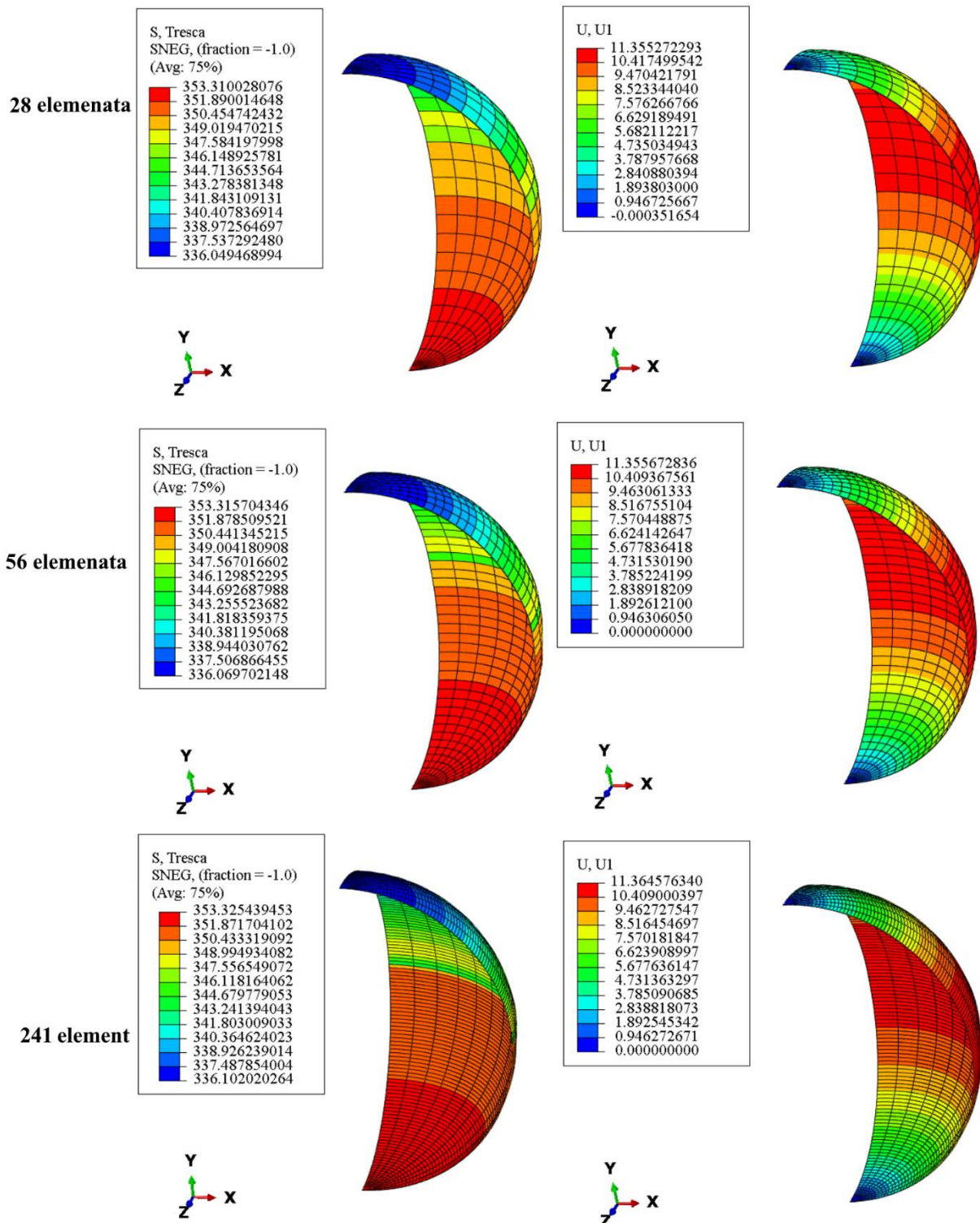
Slika 3.8 Rubni uvjeti i opterećenja za element CAX8R

Diskretizacija polovice sfere prikazana je slikom 3.9. Debljina konstrukcije zanemariva je prema veličini spremnika pa elementi nisu vidljivi. Uvećani gornji rub konstrukcije prikazan je desnim prikazom na slici 3.9. Na njemu je moguće razaznati razlike u veličini elemenata.



Slika 3.9 Diskretizacija područja CAX8R elementima

Slika 3.10 prikazuje ekvivalentno napreznje po teoriji najvećih posmičnih napreznja te radijalni pomak duž sferne ljuske.



Slika 3.10 Raspodjela ekvivalentnog napreznja u MPa i radijalnog pomaka u mm za različiti broj elemenata CAX8R

Rezultati su prikazani u tablici 3.2. Numerička rješenja očitana su u čvoru koji se nalazi na sredini debljine ljuske zato što su u analitičkom proračunu korišteni izrazi za središnju plohu ljuske.

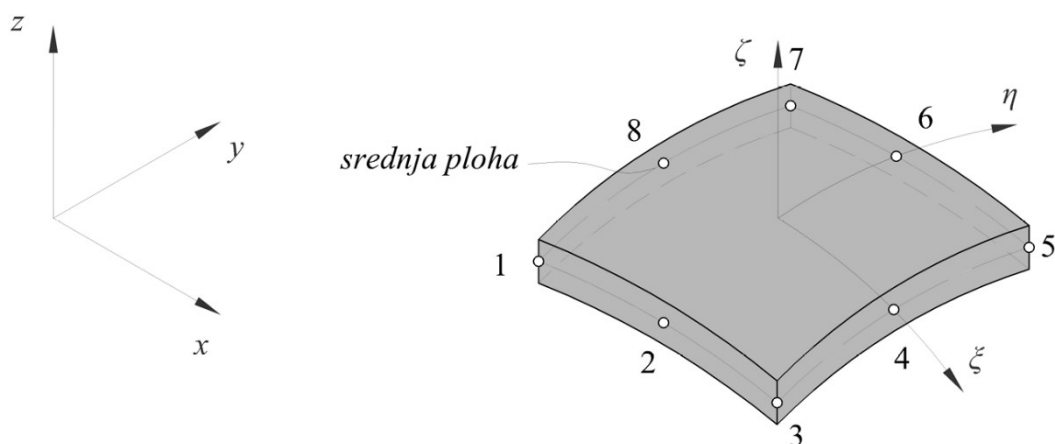
**Tablica 3.2 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element CAX8R**

	Analiitičko rješenje	28 elemenata	56 elemenata	241 element
$\sigma_{ekv}(\theta = 0^\circ)$ , MPa	336,520	336,049	336,069	336,102
greška		0,14%	0,13%	0,12%
$\sigma_{ekv}(\theta = 180^\circ)$ , MPa	353,808	353,310	353,316	353,325
greška		0,14%	0,14%	0,13%
$u_r(\theta = 90^\circ)$ , mm	11,450	11,355	11,356	11,364
greška		0,82%	0,81%	0,75%

Iz rezultata je vidljivo da oni već za 28 elemenata imaju grešku, koja se s povećanjem elemenata neznatno smanjuje, ali rezultati ni za 241 element ne postižu toliku točnost kao jednodimenzijski elementi.

### 3.2.3. Ljuskasti četverokutni element drugog reda, S8R

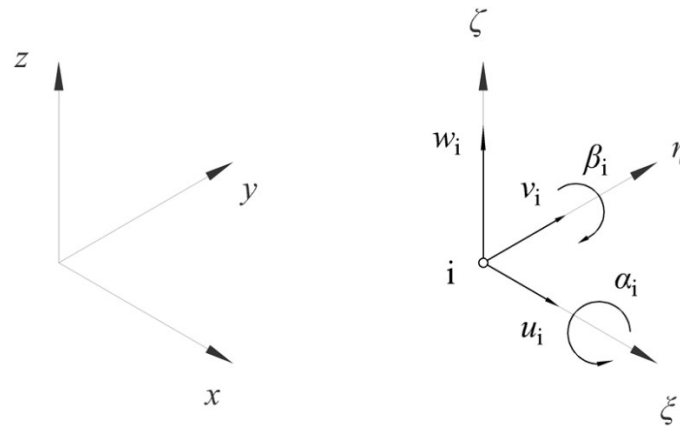
S8R je ljuskasti četverokutni konačni element drugog reda koji se koristi za modeliranje zakrivljene geometrije i sadrži čvorove ne samo na vrhovima već i na sredinama stranica, čime se postiže povećana preciznost u prikazu deformacija i raspodjele napreznja. Čvorovi ovog elementa nalaze se na srednjoj plohi ljuske, kao što je prikazano slikom 3.11., a vrijednosti izvan srednje plohe aproksimiraju se.



**Slika 3.11 Element S8R s pripadajućim stupnjevima slobode [8]**

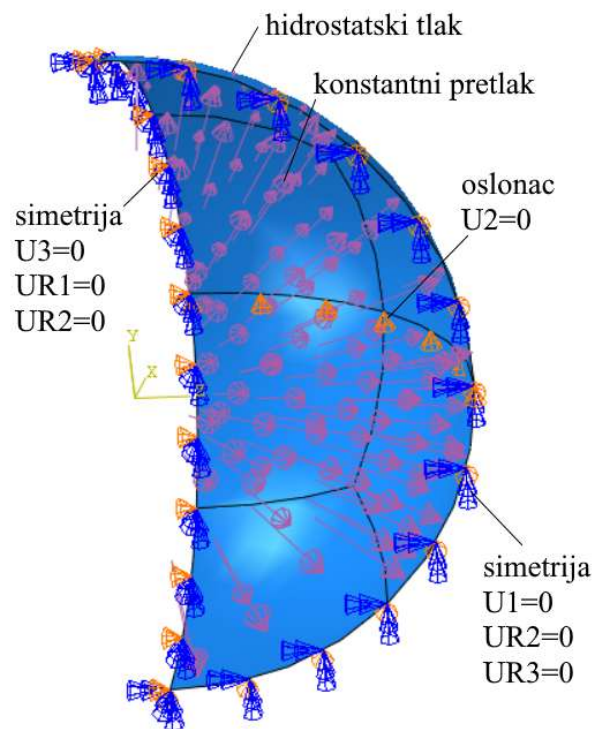
Element ima osam čvorova, a svaki čvor pet stupnjeva slobode. Pomaci su definirani u odnosu na lokalni koordinatni sustav.  $\zeta$  i  $\eta$  su bezdimenzijske prirodne koordinate koje su u općem slučaju zakrivljene, a  $\zeta$  je ravna koordinata duž debljine ljuske [8]. Vektor stupnjeva slobode  $i$ -tog čvora prikazan je slikom 3.12 i ima formulaciju:

$$\mathbf{v}_i^T = [u_{ri} \quad w_i]. \quad (3.10)$$



Slika 3.12 Stupnjevi slobode  $i$ -tog čvora elementa S8R [8]

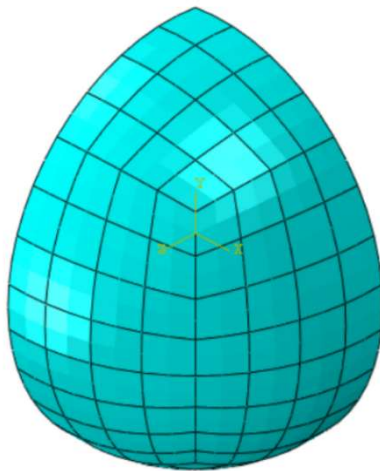
Rubne uvjete i opterećenje za S8R elemente prikazuje slika 3.13. Promatrana je samo četvrtina konstrukcije pa su na plohe simetrije postavljeni rubni uvjeti simetrije. Također, oslonac je postavljen na ekvatoru sfere s vanjske strane konstrukcije.



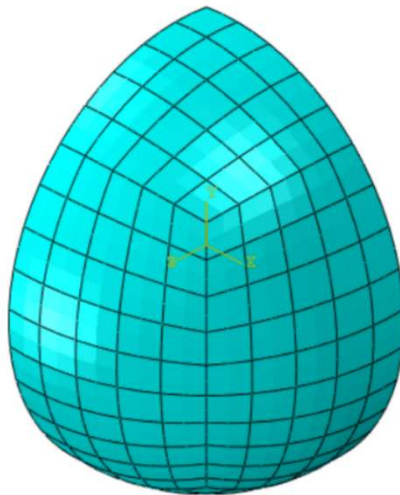
Slika 3.13 Rubni uvjeti i opterećenja za element S8R

Diskretizacija četvrtine sfere prikazana je slikom 3.14.

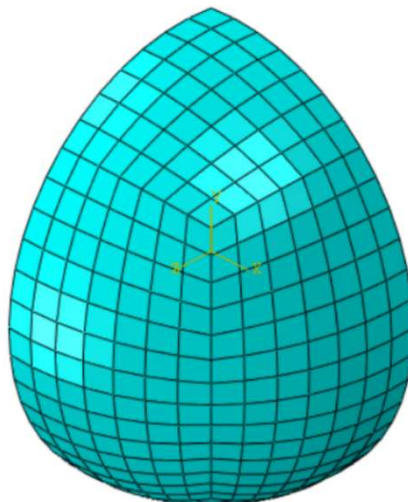
**96 elemenata**



**150 elemenata**



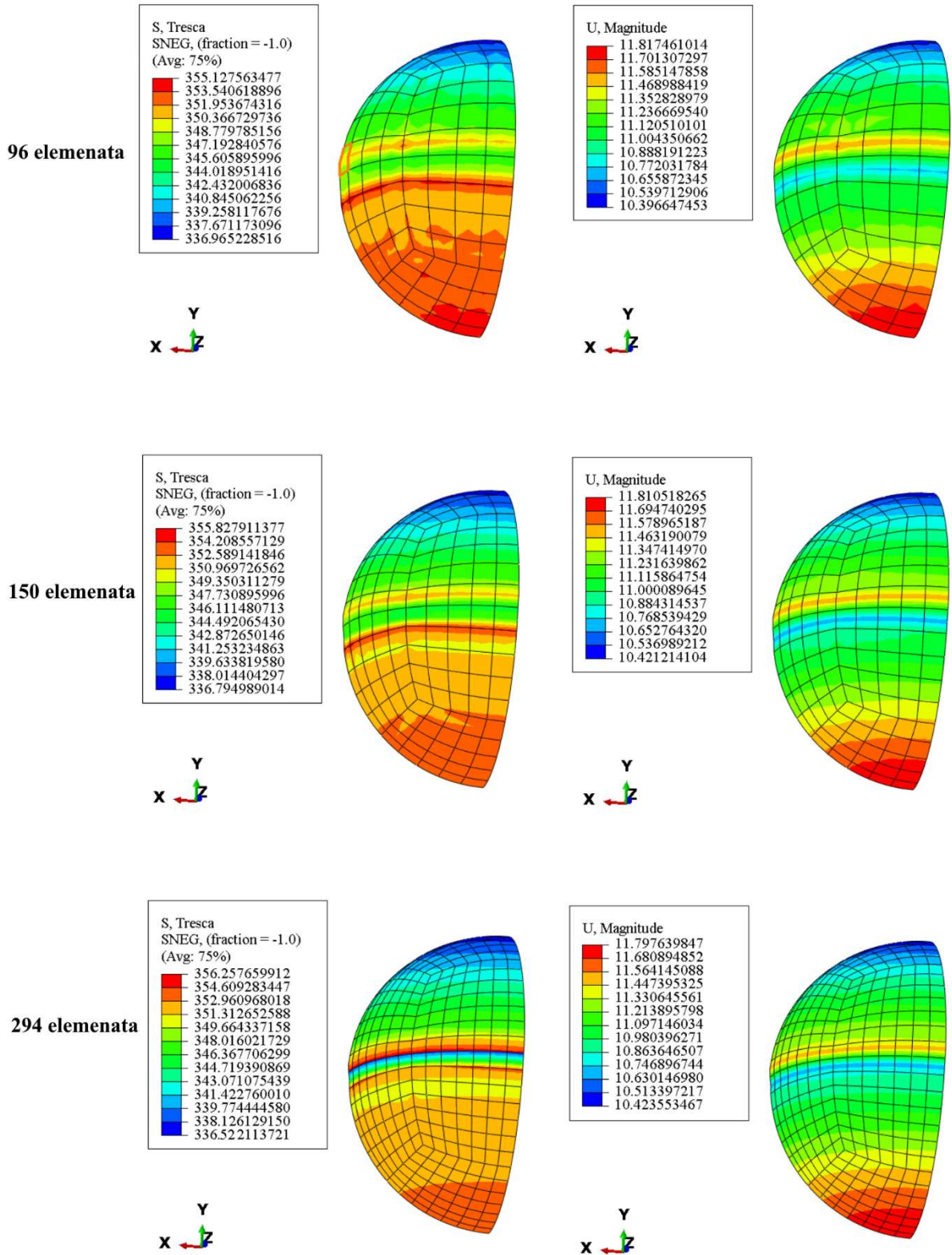
**294 elemenata**



**Slika 3.14 Diskretizacija sfere S8R elementima**



Slika 3.15 prikazuje ekvivalentno napreznanje po teoriji najvećih posmičnih napreznanja te progib duž sferne ljuske.



Slika 3.15 Raspodjela ekvivalentnog napreznanja u MPa i radijalnog pomaka u mm za različiti broj elemenata S8R

Rezultati su prikazani u tablici 3.3. Rješenja su očitana u čvoru koji se nalazi na sredini debljine ljuske zato što su u analitičkom proračunu korišteni izrazi za središnju plohu ljuske.

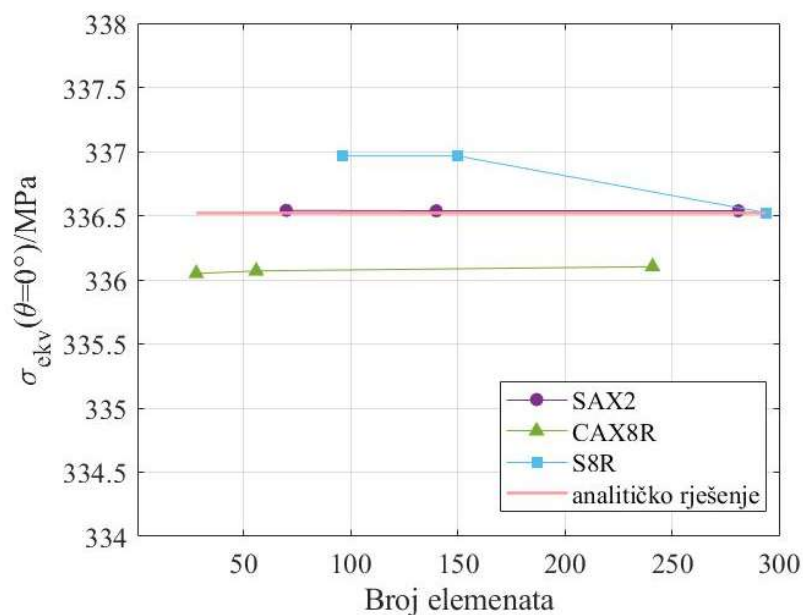
**Tablica 3.3 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenja za element S8R**

	Analitičko rješenje	96 elemenata	150 elemenata	294 elemenata
$\sigma_{\text{ekv}}(\theta = 0^\circ)$ , MPa	336,520	336,965	336,794	336,522
greška		0,13%	0,08%	0,00%
$\sigma_{\text{ekv}}(\theta = 180^\circ)$ , MPa	353,808	353,945	353,895	353,808
greška		0,25%	0,16%	0,00%
$u_r(\theta = 90^\circ)$ , mm	11,450	11,085	11,215	11,374
greška		3,22%	1,94%	0,74%

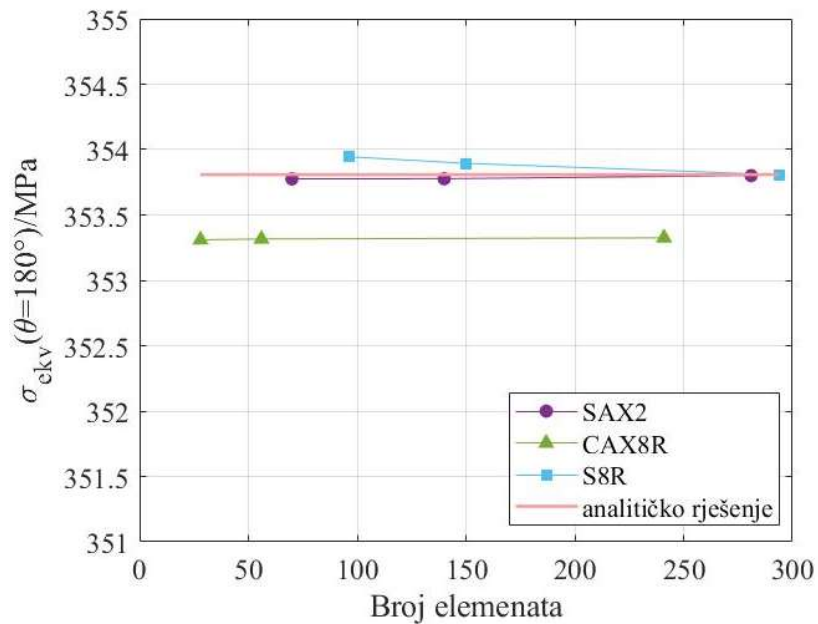
S8R elementi s povećanjem broja elemenata pokazuju približavanje analitičkom rješenju. Za vrijednosti naprezanja postiže se čak i vrijednost analitičkog rješenja.

### 3.2.4. Usporedba rezultata

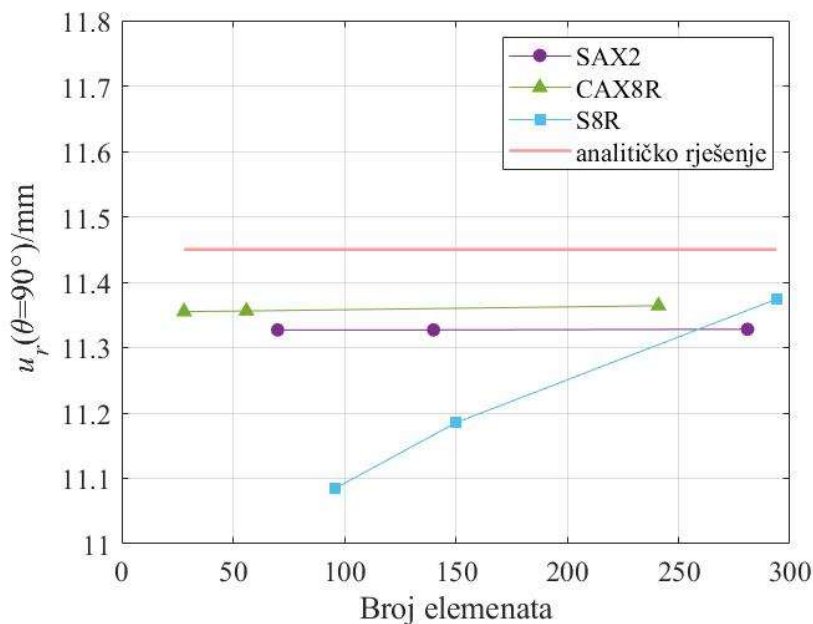
Za međusobnu usporedbu vrsta elemenata za svaku tabličnu veličinu prikazan je graf usporedbe njene vrijednosti u ovisnosti o broju i vrsti konačnih elemenata. Očekivano je da ni jedna vrsta elemenata neće postići analitičku vrijednost radijalnog pomaka zbog rubnih uvjeta zadanih u programu Abaqus<sup>®</sup>, zbog kojih dolazi do pojave lokalnog savijanja u području oko ekvatora.



**Slika 3.16 Konvergencija rješenja za  $\sigma_{\text{ekv}}(\theta = 0^\circ)$  za odabrane elemente**



Slika 3.17 Konvergencija rješenja za  $\sigma_{ekv}(\theta = 180^\circ)$  za odabrane elemente



Slika 3.18 Konvergencija rješenja za  $u_r(\theta = 90^\circ)$  za odabrane elemente

Iz danih prikaza vidljivo je da CAX8R elementi već kod grube mreže od 26 elemenata daju ujednačena rješenja, ali ona ne konvergiraju prema analitičkom rješenju. SAX2 elementi kod grube mreže daju rješenje s izrazito malim odstupanjem koje ostaje konstantno s profinjavanjem mreže. S8R elementi pri grubljoj mreži dosta odstupaju od analitičkog rješenja, ali s profinjavanjem mreže konvergiraju ka konačnom rješenju te za dovoljan broj elemenata naprezanja postižu vrijednost analitičkog rješenja. Zbog tih karakteristika za daljnju analizu odabrani su S8R elementi.

### 3.2.5. Verifikacija numeričkog modela stupa

Nakon što je odabran element S8R, potrebno je provjeriti njegovu izvedbu na stupu konstrukcije. Stup koji je promatran u ovoj analizi je jednakog poprečnog presjeka i duljine izvijanja kao i u analitičkom proračunu, a za potrebe verifikacije promatrat će se kao ljuska. Sva ograničenja i pretpostavke za ljuske iz poglavlja 2. vrijede i za promatrani stup.

$$d_s = 609,6 \text{ mm}, \quad (3.11)$$

$$t_s = 14 \text{ mm}, \quad (3.12)$$

$$l = 10196 \text{ mm}, \quad (3.13)$$

$$A = 26196 \text{ mm}^2. \quad (3.14)$$

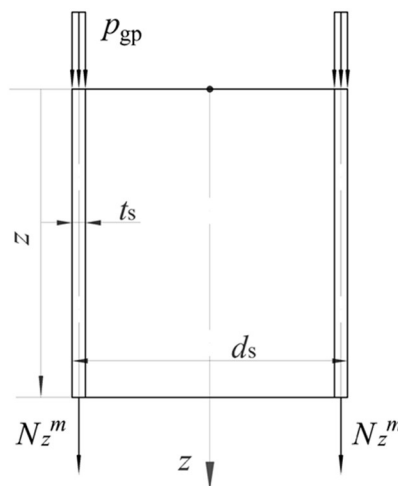
Težina spremnika koja se prenosi na stup iznosi:

$$F = 1447 \text{ kN}. \quad (3.15)$$

Tlak na gornju plohu je tada je tada:

$$p_{gp} = \frac{F}{A} = 55,237 \text{ MPa}. \quad (3.16)$$

Prikaz presjeka stupa s opterećenjima prikazan je slikom 3.19.



Slika 3.19 Ljuska stupa s pripadajućim opterećenjima

Postavljanjem uvjeta ravnoteže dobiva se jednadžba:

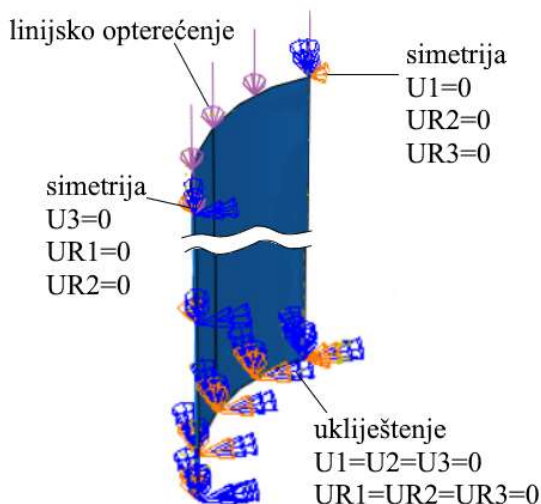
$$(d_s - t_s)\pi N_z^m = -p_{gp}A, \quad (3.17)$$

Iz izraza (3.14) dobiva se sila  $N_z^m$ , odnosno membransko naprezanje  $\sigma_z^m$ :

$$N_z^m = -792,325 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.18)$$

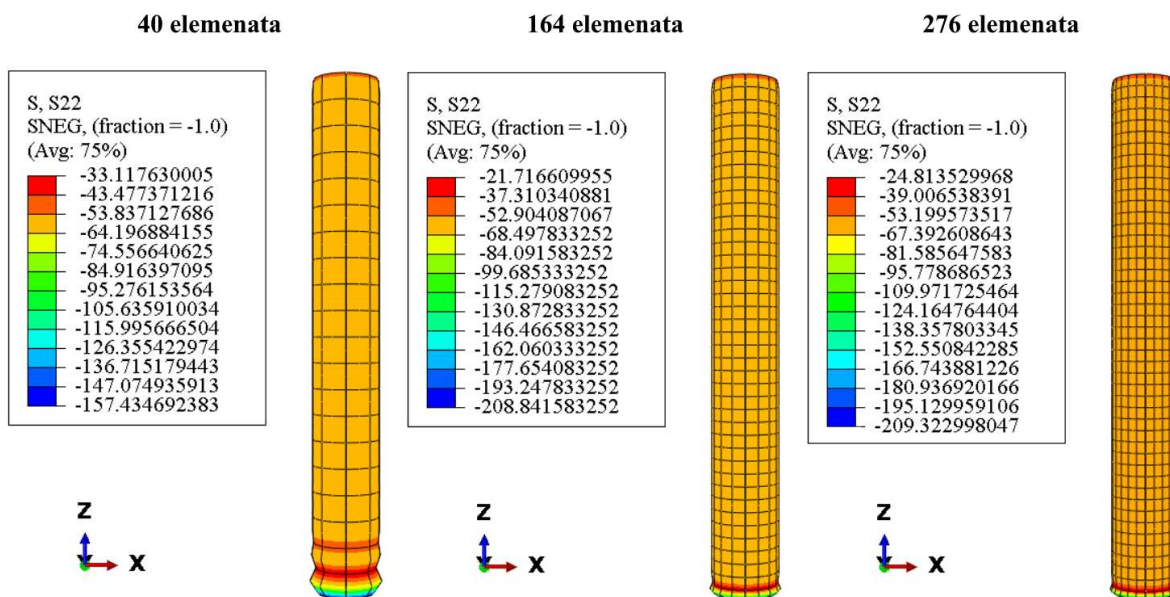
$$\sigma_z^m = \frac{N_z^m}{h} = -56,616 \text{ MPa}. \quad (3.19)$$

Štap zadanih dimenzija opterećen silom  $F$  i ukliješten na donjem rubu modeliran je u programu Abaqus®. Modelirana je samo četvrtina stupa i na nju su postavljeni rubni uvjeti simetrije radi uštede vremena računanja i prostora računala. Sila  $F$  je postavljena kao linijsko opterećenje od 792,325 N/mm po gornjem rubu štapa. Realno opterećenje na gornjoj plohi stupa nije linijsko, već je površinsko, kao što je vidljivo na slici 3.19, ali element S8R korišten u programskom paketu nema debljinu na koju je moguće postaviti površinsko opterećenje. Rubni uvjeti i opterećenje prikazani su slikom 3.20.



Slika 3.20 Rubni uvjeti i opterećenja za element S8R stupa

Na stupu su stvorene mreže od 40, 164 i 276 elemenata i provedena je analiza. Rezultati su prikazani slikom 3.21.



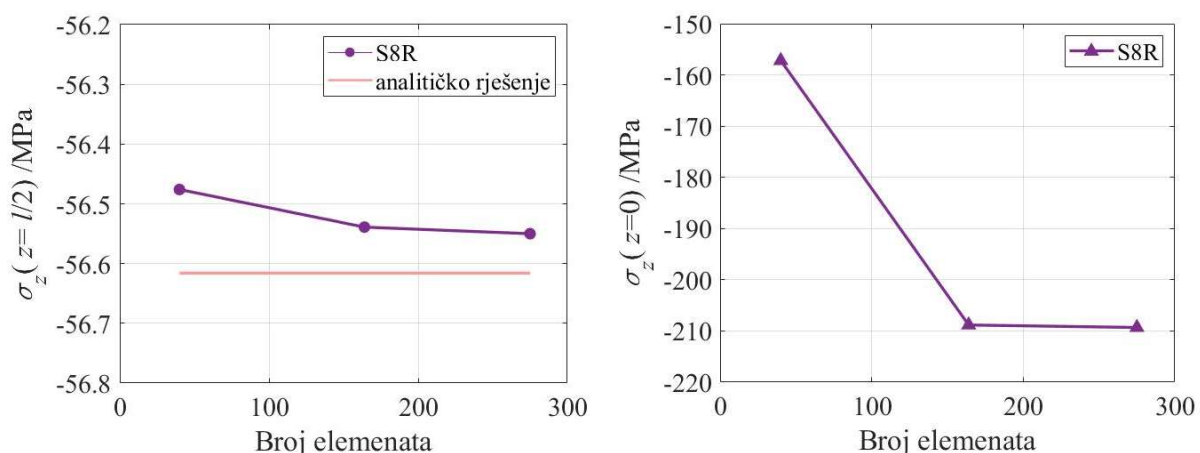
Slika 3.21 Raspodjela uzdužnog naprezanja u MPa stupa za različit broj elemenata S8R

Rezultati su prikazani i tablicom 3.4. Promatrane vrijednosti numeričkog proračuna koje se uspoređuju jesu vrijednost konstantnog naprezanja po stupu i maksimalna vrijednost maksimalnog naprezanja. Vrijednost maksimalnog naprezanja nije računata analitički. Promatrano je samo membransko naprezanje, što naravno nije točno jer postoji lokalno savijanje u području oslonca.

**Tablica 3.4 Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog rješenje za element S8R stupa**

	Analiitičko rješenje	40 elemenata	164 elemenata	276 elemenata
$\sigma_z(z = \frac{l}{2})$ , MPa	-56,616	-56,476	-56,539	-56,550
greška		0,25%	0,14%	0,12%
$\sigma_z(z = 0)$ , MPa	nije izračunato	-157,199	-208,838	-215,15

Iako rješenje u za  $z = 0$  nije izračunato, vidljivo je da s profinjavanjem mreže numeričko rješenje konvergira prema konačnoj vrijednosti. Numeričko rješenje za konstantno naprezanje duž stupa približava se analitičkom rješenju s profinjavanjem mreže, a greška je minimalna. Konvergencija je prikazana i grafički sljedećim prikazima na slici 3.22.



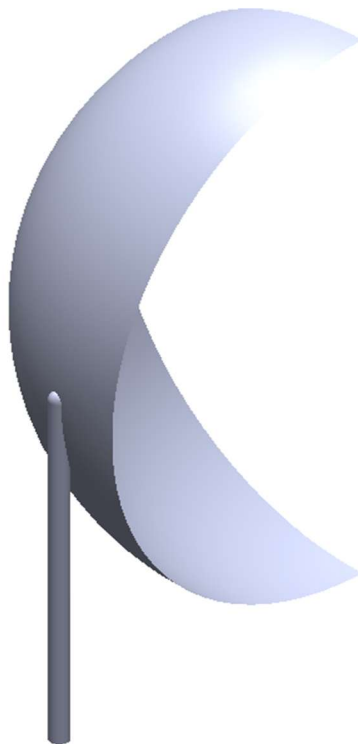
**Slika 3.22 Konvergencija rješenja za  $\sigma_z$  za element S8R**

Iz prethodnog tabličnog prikaza i dva grafa vidljivo je da element S8R konvergira prema konačnom rješenju i za element stupa. Potrebno je uzeti u obzir da neće postići točno analitičko rješenje zbog greške koja se uvela postavljanjem linijskog opterećenja u programu, ali pogreška od 0,12% za 276 elemenata je zadovoljavajuće.

Odstupanja numeričkih vrijednosti od analitičkih za element S8R su u rasponu 0 - 3 %. Prema tome, daljnja numerička analiza spremnika provodit će se s tim elementom.

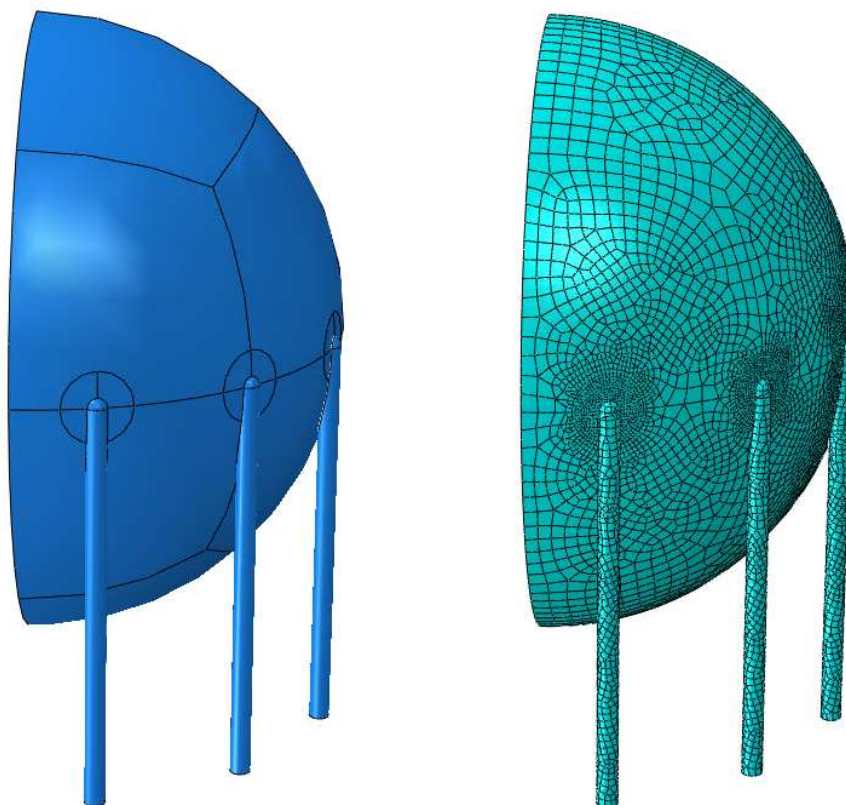
### 3.3. Numerička analiza čvrstoće spremnika

U ovom poglavlju analiziran je cijeli spremnik, zajedno sa stupovima. Elementi ljuske i stupa izrađeni su u programu SolidWorks® kao plohe (bez debljine) vanjskih gabarita zadanih u poglavlju 1, zato što je element S8R kojim se model diskretizira dvodimenzijski. Također će se i u ovoj analizi koristiti rubni uvjeti simetrije pa je potrebno promatrati četvrtinu modela. Modeli elemenata prikazani su slikom 3.23.

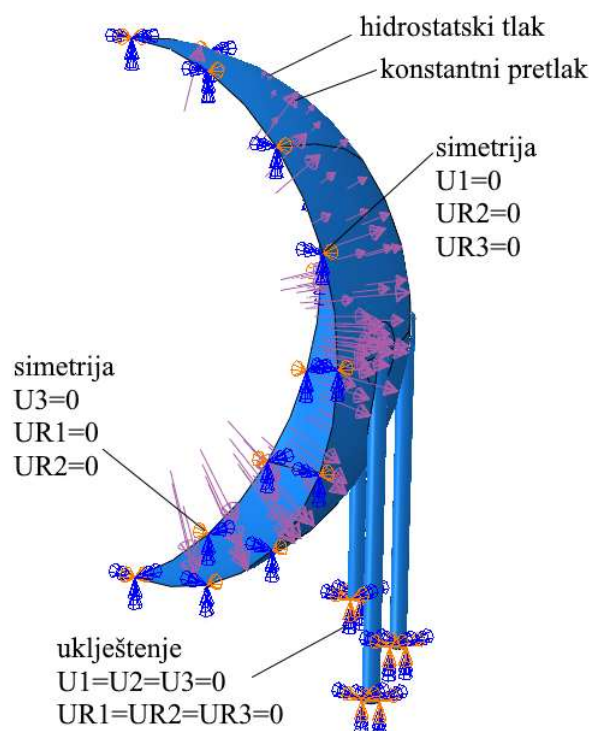


**Slika 3.23 Modeli ploha četvrtine sfere i jednog stupa**

Promatrani model je doraden u programu Abaqus®. Stup i ljuska sfere promatrani su kao dva zasebna dijela, a model stupa je tripliciran i radijalno postavljen na jednake razmake od 30° oko sfere. Između stupova i sferne ljuske postavljen je zavar, kao što je to slučaj i s realnim konstrukcijama sfernih spremnika. Također, na ljusci su izrađeni pomoćni bridovi kako bi se mogla generirati mreža koja je gušća na mjestima gdje se očekuju koncentracije naprezanja, a to je na područjima dodira sa stupovima. Cjelokupni model s pomoćnim bridovima i generiranom mrežom prikazan je slikom 3.24. Rubni uvjeti postavljeni na modelu su rubni uvjeti simetrije te uklještenja na donjim rubovima stupova, kao što je prikazano slikom 3.24. Model je opterećen kao i u analitičkom proračunu, pretlakom od 1,88 MPa i hidrostatskim tlakom ukapljenog naftnog plina, kao što je prikazano slikom 3.25.



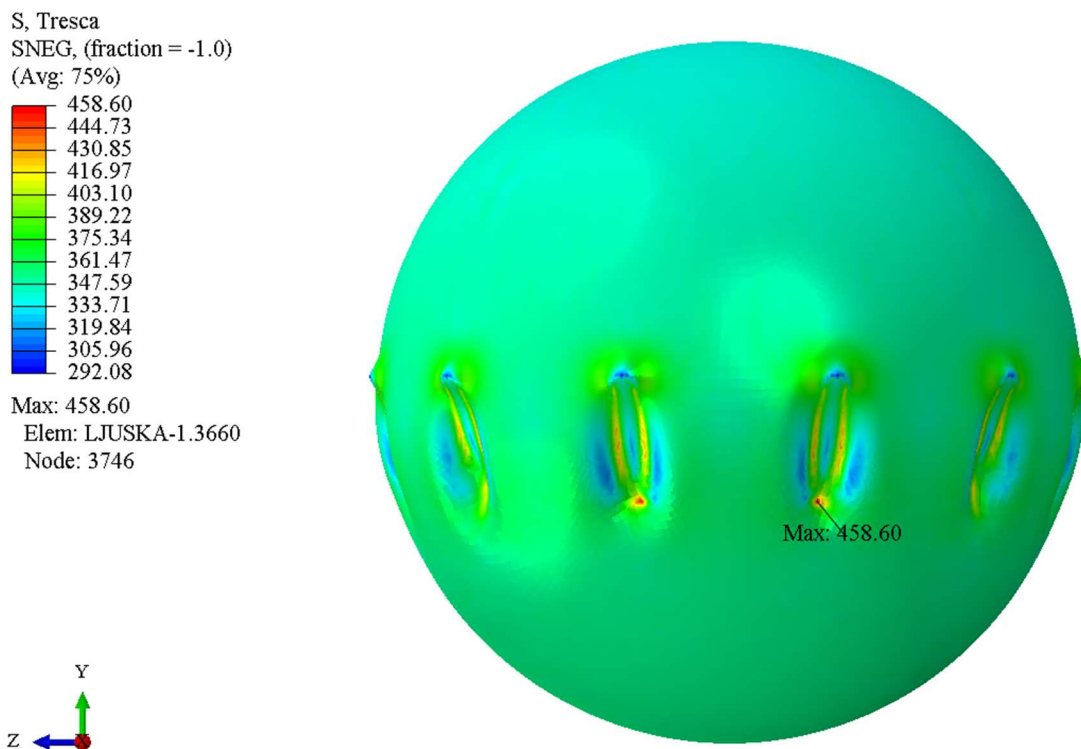
Slika 3.24 Cjelokupni model s pomoćnim bridovima i iz tog generirana mreža konačnih elemenata



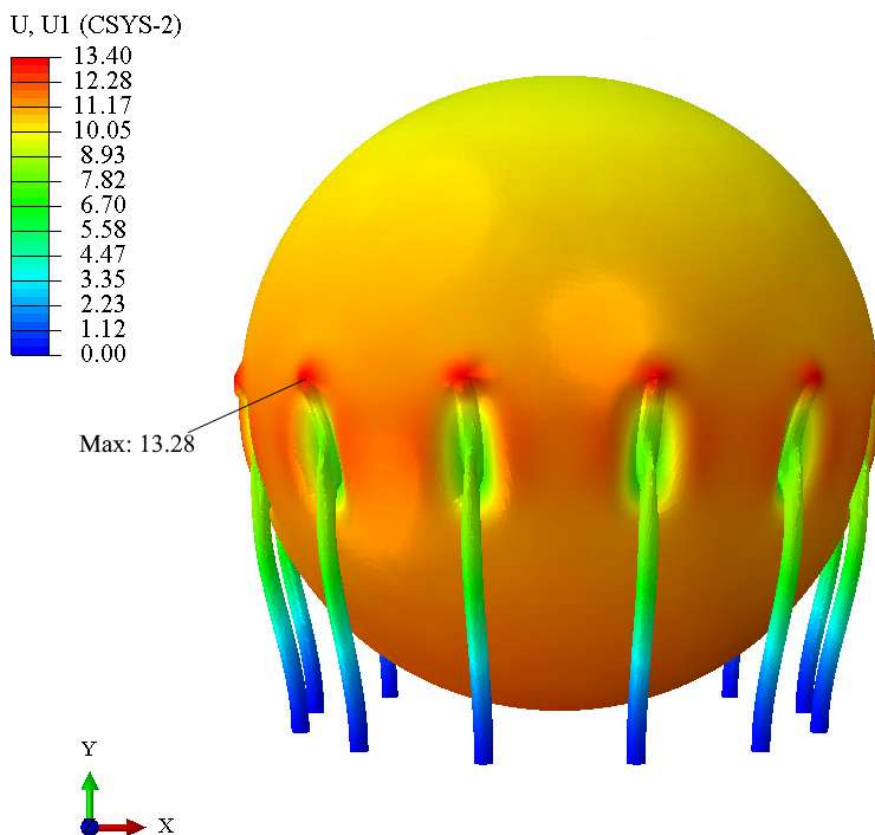
Slika 3.25 Rubni uvjeti i opterećenja cijelog modela

Rješenja dobivena numeričkom analizom cijele konstrukcije prikazana su slikama 3.26 i 3.27.





Slika 3.26 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa sferne ljuske

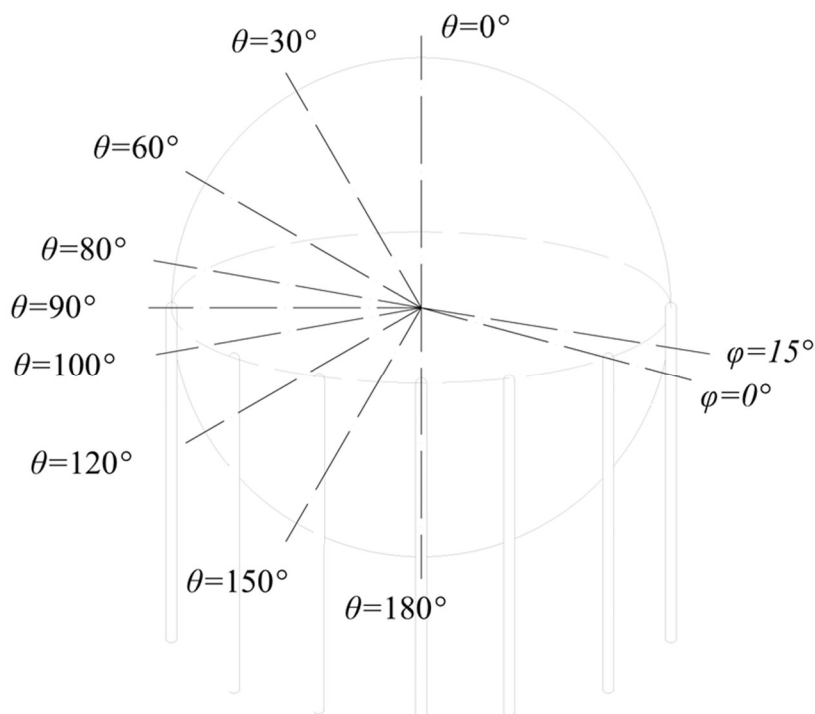


Slika 3.27 Raspodjela radijalnih pomaka u mm sferne ljuske

Skale su na prikazanim rješenjima postavljene tako da prikažu maksimalnu i minimalnu vrijednost računatih veličina. Zbog toga je teže razaznati točnu raspodjelu pa su rezultati prikazani tablično i grafički. Valja napomenuti da vrijednosti sa slike 3.27 nisu radijalni pomaci po definiciji koja je dana u poglavlju 2 slikom 2.11, već pomaci duž radijalne koordinate sfernog koordinatnog sustava, odnosno normalni pomaci prema definiciji pomaka sa slike 2.11. Poveznica između analitičkog i numeričkog radijalnog pomaka je:

$$u_r^{\text{analitičko}} = u_r^{\text{numeričko}} \sin \theta. \quad (3.20)$$

Na danim prikazima se također može uočiti razlika u vrijednostima u područjima koja su oslonjena na stup u odnosu na područja između stupova. Raspodjela je prikazana po spektru  $\theta$  i  $\varphi$  koordinata koje su prikazane slikom 3.28.



**Slika 3.28 Područja detaljnije analize konstrukcije**

Područje za koje je  $\varphi = 0^\circ$  ekvivalentno je području sfere oslonjenom na stup, a ono za koje je  $\varphi = 15^\circ$  je ekvivalentno području sfere između stupova. Za  $\theta$  koordinatu uzete su pravilno raspoređene koordinate po sferi koje su gušće postavljene u području ekvatora kako bi se jasnije prikazao utjecaj reakcija u osloncima. U tablici 3.5 uspoređene su vrijednosti ekvivalentnih naprezanja izračunatih analitički i numerički za  $\varphi = 0^\circ$  i  $\varphi = 15^\circ$  po zadanim  $\theta$  koordinatama, a u tablici 3.6 uspoređene su vrijednosti radijalnih pomaka izračunatih analitički i numerički za  $\varphi = 0^\circ$  i  $\varphi = 15^\circ$  po zadanim  $\theta$  koordinatama.

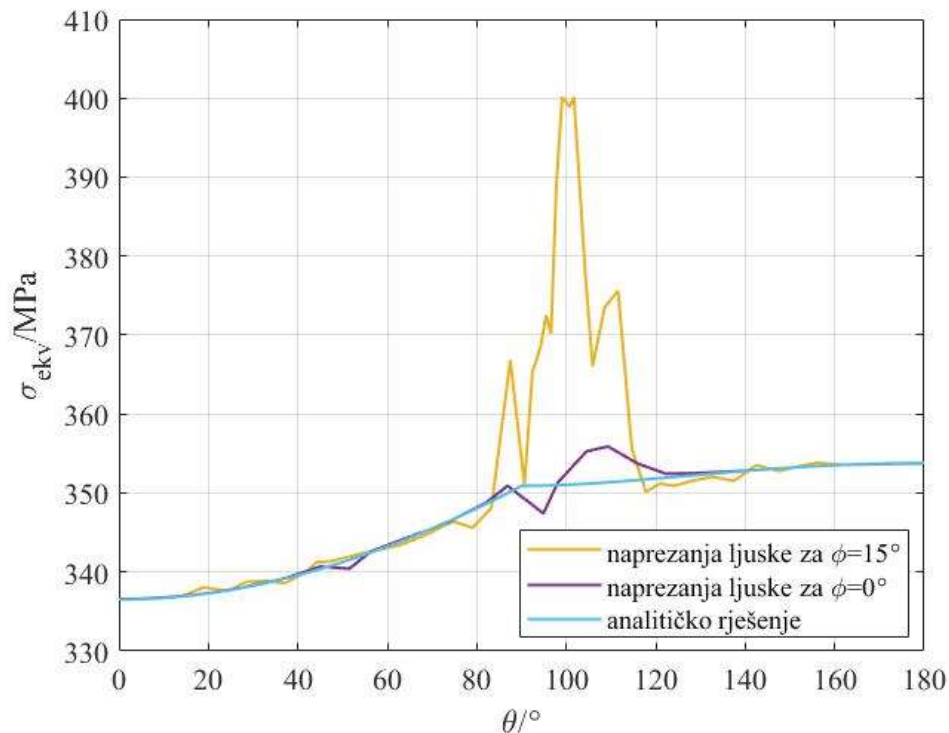
**Tablica 3.5 Usporedba rezultata ekvivalentnog naprezanja sferne ljuske**

	Analitičko rješenje	Numeričko rješenje	
		$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 15^\circ$
$\sigma_e(\theta = 0^\circ)$ , MPa	336,520	336,565	336,565
$\sigma_e(\theta = 30^\circ)$ , MPa	338,271	339,503	339,503
$\sigma_e(\theta = 60^\circ)$ , MPa	343,243	344,382	344,286
$\sigma_e(\theta = 80^\circ)$ , MPa	348,072	367,148	348,708
$\sigma_e(\theta = 90^\circ)$ , MPa	350,926	352,945	350,106
$\sigma_e(\theta = 100^\circ)$ , MPa	351,048	366,445	351,501
$\sigma_e(\theta = 120^\circ)$ , MPa	351,839	351,706	351,705
$\sigma_e(\theta = 150^\circ)$ , MPa	353,206	353,187	353,187
$\sigma_e(\theta = 180^\circ)$ , MPa	353,808	353,775	353,775

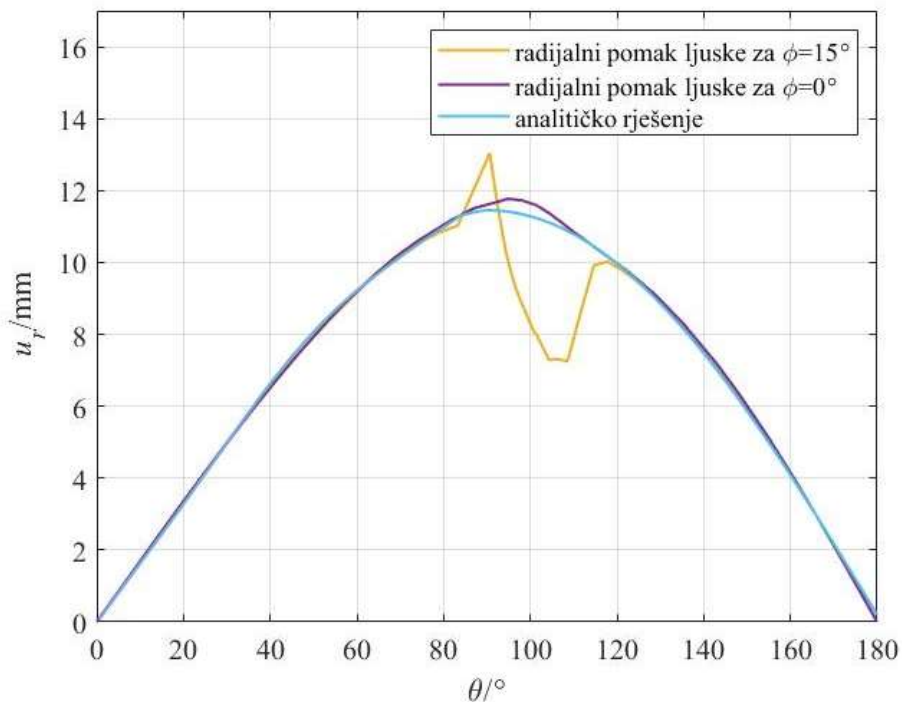
**Tablica 3.6 Usporedba rezultata radijalnog pomaka (po definiciji iz poglavlja 2) sferne ljuske**

	Analitičko rješenje	Numeričko rješenje	
		$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 15^\circ$
$u_r(\theta = 0^\circ)$ , mm	0	0	0
$u_r(\theta = 30^\circ)$ , mm	5,457	5,341	5,445
$u_r(\theta = 60^\circ)$ , mm	9,630	9,497	9,668
$u_r(\theta = 80^\circ)$ , mm	11,153	11,024	11,196
$u_r(\theta = 90^\circ)$ , mm	11,451	13,041	11,768
$u_r(\theta = 100^\circ)$ , mm	11,284	8,094	11,593
$u_r(\theta = 120^\circ)$ , mm	9,969	9,699	9,775
$u_r(\theta = 150^\circ)$ , mm	5,869	5,776	5,802
$u_r(\theta = 180^\circ)$ , mm	0	0	0

Iz rezultata vidljivo je da razlike u analitičkom i numeričkom rješenju gotovo i ne postoje za područje gdje ne postoji oslonac, odnosno za  $\varphi = 15^\circ$ . Maksimalna greška za naprezanja iznosi 13%, a za radijalni pomak 29%. Obje greške su na istoj koordinati  $\theta = 100^\circ$ . Kako bi se veličina greške lakše uočila rezultati su prikazani grafički slikama 3.29 i 3.30.



Slika 3.29 Grafička usporedba ekvivalentnih napreznja po plaštu ljuske



Slika 3.30 Grafička usporedba radijalnih pomaka (po definiciji iz poglavlja 2) po plaštu ljuske

Iz grafičkih prikaza najbolje se vidi dobro poklapanje rezultata analitičkog i numeričkog proračuna u svim točkama osim u točkama gdje je spremnik oslonjen na stup. Time je ilustriran problem lokalnog savijanja, koje nastaje zbog reakcije u stupu. Lokalno savijanje je vrlo malo izraženo u području između stupova, što je vidljivo i iz grafova.

### 3.3.1. Kontrola čvrstoće

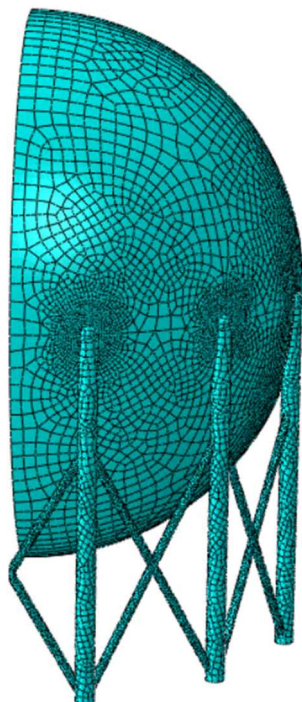
Maksimalno naprezanje u numeričkoj analizi konstrukcije iznosi  $\sigma_{\max} = 458,86$  MPa. U usporedbi s granicom tečenja zadanog materijala koja iznosi  $\sigma_e = 450$  MPa je veća, što bi davalo faktor sigurnosti od:

$$S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\max}} = 0,98. \quad (3.21)$$

Ako se proračun ograniči samo na elastično područje u ovom trenutku pretpostavilo bi se da proračun ne zadovoljava, zato što je sigurnost manja od 1. U analizi konstrukcija, prihvatljivo je da faktor sigurnosti na vrlo malim područjima konstrukcije padne ispod 1, pod uvjetom da se ekvivalentno naprezanje uspoređuje s granicom elastičnosti materijala. Lokalna prekoračenja granice elastičnosti ne moraju nužno dovesti do trenutnog kvara konstrukcije. Na slici 3.24 vidljiva su područja maksimalnih naprezanja ljuske, površinom mala područja oko stupova. Pošto su ta područja mala u odnosu na ukupnu konstrukciju, plastična deformacija može ostati lokalizirana bez značajnog utjecaja na ukupnu nosivost i funkcionalnost strukture. Također, u plastičnim područjima ne vrijedi Hookeov zakon pa tako ni relacije korištenje u analitičkom rješenju i elastičan materijal korišten u numeričkom proračunu pa je bez dodatnog proračuna plastičnog stanja konstrukcije teško odrediti naprezanje koje bi uvjetovalo plastični kolaps konstrukcije. Ključni je korak u ovakvim slučajevima osigurati da se plastifikacija ne širi nekontrolirano te da ne dolazi do zamora materijala ili progresivnog oštećenja koje bi moglo uzrokovati kolaps cijele konstrukcije. U ovom dijelu potrebno se osvrnuti i na početne pretpostavke proračuna, gdje se navodi da je spremnik cijeli napunjen ukapljenim naftnim plinom. U praksi, spremnici se zbog održavanja napune do maksimalno 90% svog volumena, a kako se prazne tako je naprezanje zbog težine tekućine sve manje.

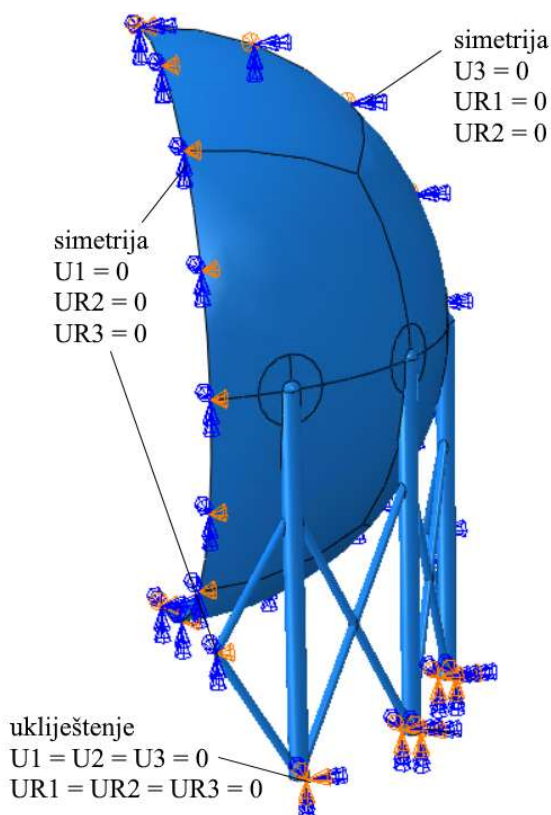
### 3.3.2. Analiza spremnika s dodanim ukrućenjima

Analiziran je još jedan model konstrukcije. Na posljednjem modelu dodana su križna ukrućena između stupova. Ukrućenje je jednostavno i ekonomično rješenje koje značajno povećava sigurnost i čvrstoću čeličnih konstrukcija. Ključna uloga ukrućenja je pružanje otpornosti na bočne sile poput opterećenja vjetrom, potresa ili drugih dinamičkih opterećenja. Ukrućenje također pomaže održati pravilnu geometriju konstrukcije, sprječavajući deformacije i nepravilna pomicanja. Dodavanjem ukrućenja povećava se ukupna krutost konstrukcije, čime se smanjuju progibi stupova. Mreža ovog modela prikazana je slikom 3.31.



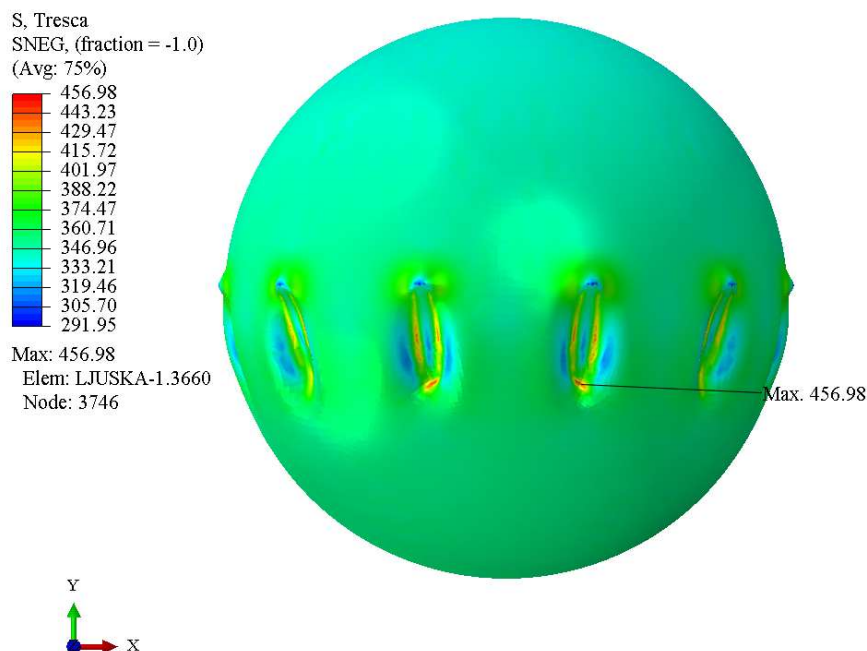
**Slika 3.31 Mreža konačnih elemenata na modelu spremnika s ukrúčenjem**

Ovaj model opterećen je na isti način kao i prethodni, a rubni uvjeti simetrije su primijenjeni i na ukrute, kao što je prikazano slikom 3.32.

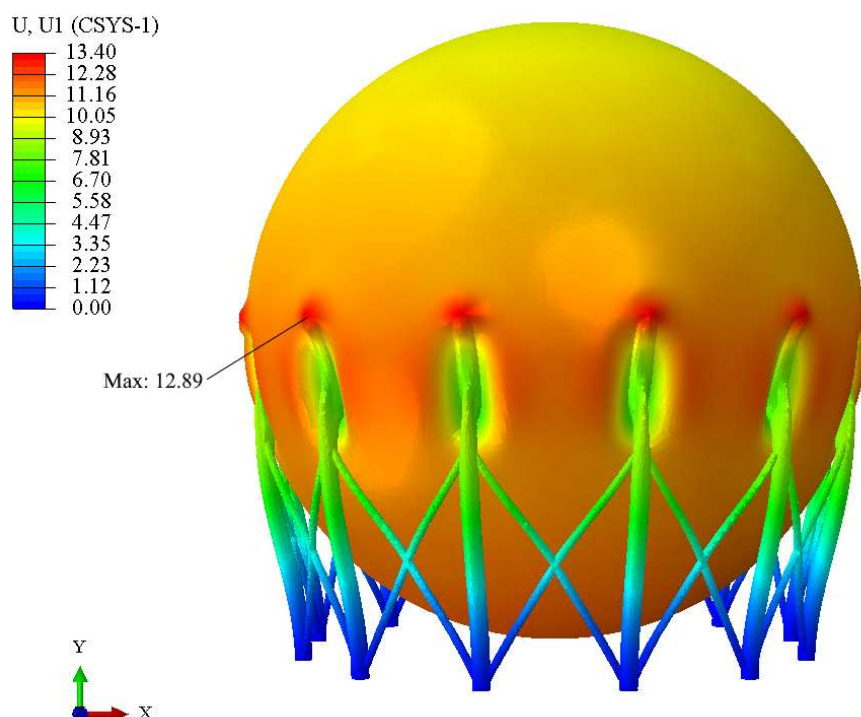


**Slika 3.32 Rubni uvjeti spremnika s ukrúčenjima**

Raspodjela naprezanja ljuske ovako ukrucene konstrukcije prikazana je slikom 3.33, a raspodjela radijalnih pomaka slikom 3.34.



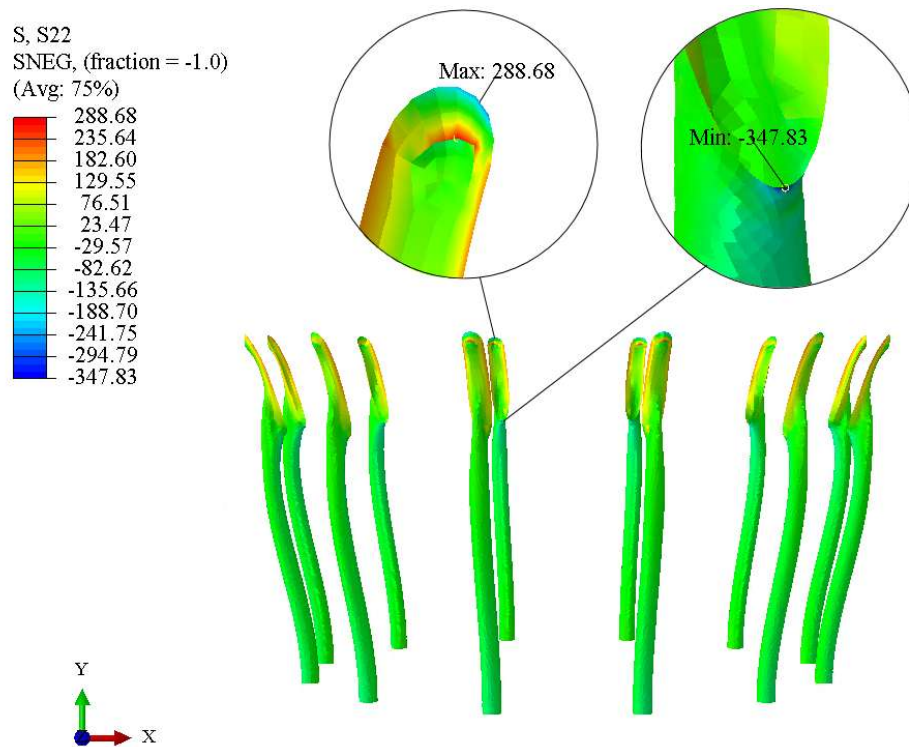
**Slika 3.33** Raspodjela ekvivalentnog naprezanja u MPa sferne ljuske s ukрутama na stupovima



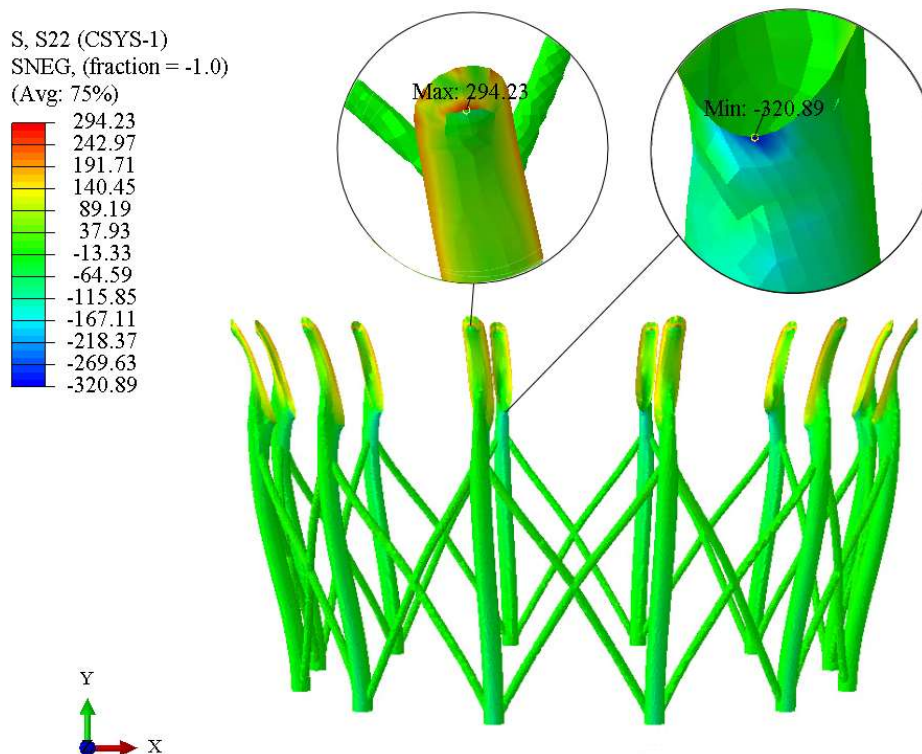
**Slika 3.34** Raspodjela radijalnih pomaka u mm sferne ljuske s ukрутama na stupovima

Naprezanja u ljusci se nisu znatno promijenila, razlika u maksimalnom naprezanju u dva slučaja je minimalna. Radijalni pomaci se također nisu znatno promijenili na cijeloj ljusci, već samo u području spoja ljuske sa stupom.

Uz usporedbu naprezanja radijalnih pomaka i naprezanja sferne ljuske, uspoređena su i naprezanja i pomaci stupova. Raspodjela naprezanja stupova bez ukrute prikazana je slikom 3.35, a stupova s ukrućenjem slikom 3.36.



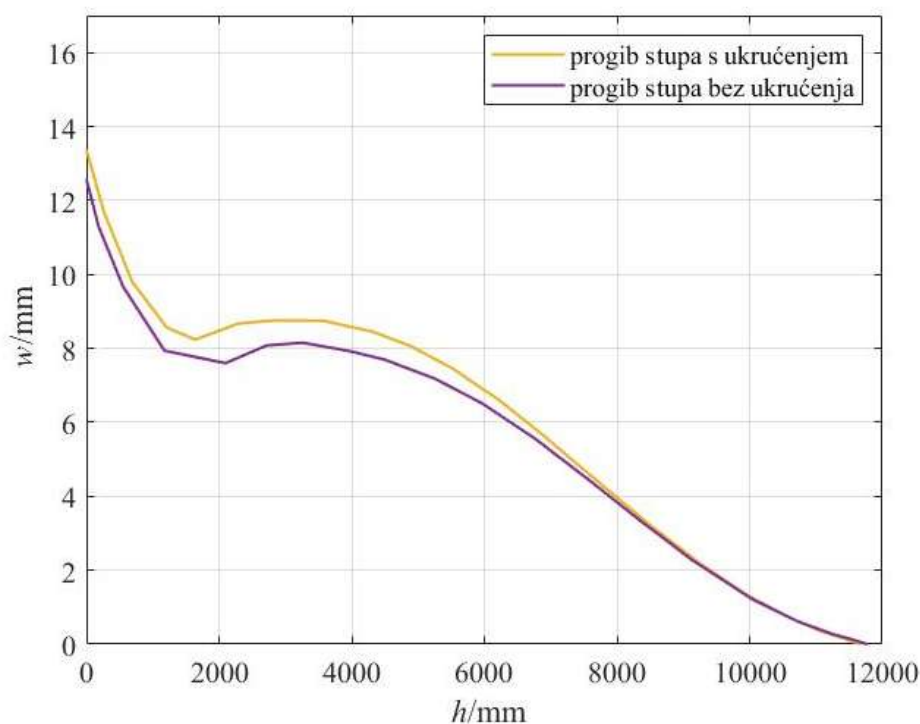
Slika 3.35 Raspodjela uzdužnog naprezanja u MPa stupova bez ukrućenja



Slika 3.36 Raspodjela uzdužnog naprezanja u MPa stupova s ukrutama



Tlačno naprezanje prevladava u cijelom stupu, a najveće je na najnižem spoju sfere i stupa. Vlačno naprezanje u stupu prisutno je u dijelu koji se savija prema ljusci, iznad ekvatora, zbog toga što je zavaren za nju. Slična raspodjela naprezanja u stupovima prisutna je i kada se na stupove postave ukrute. Usporede li zadnja dva prikaza, primjećuju se neznatne razlike u naprezanjima. Razlike se zamjećuju pri usporedbi progiba. Na slici 3.37 prikazana je usporedba progiba stupa sa slike 3.35, koji nije ukrućen i stupa sa slike 3.36.



Slika 3.37 Usporedba progiba stupa sa i bez ukrućenja

Koordinata  $h$  na prikazanom grafu usmjerena je od ekvatora sferne ljuske ( $h = 0$  mm) do tla ( $h = 11364$  mm). Za oba slučaja progib je jednak nuli za  $h = 11364$  mm, zbog rubnog uvjeta uklještenja. Razlike u progibima vidljive su duž cijelog stupa. Progib stupa s uklještenjima konstanto je manji od onog bez. Progibi su manji, a krutost sustava veća, što opravdava korištenje ukrućenja.

### 3.4. Numerička analiza izvijanja stupa

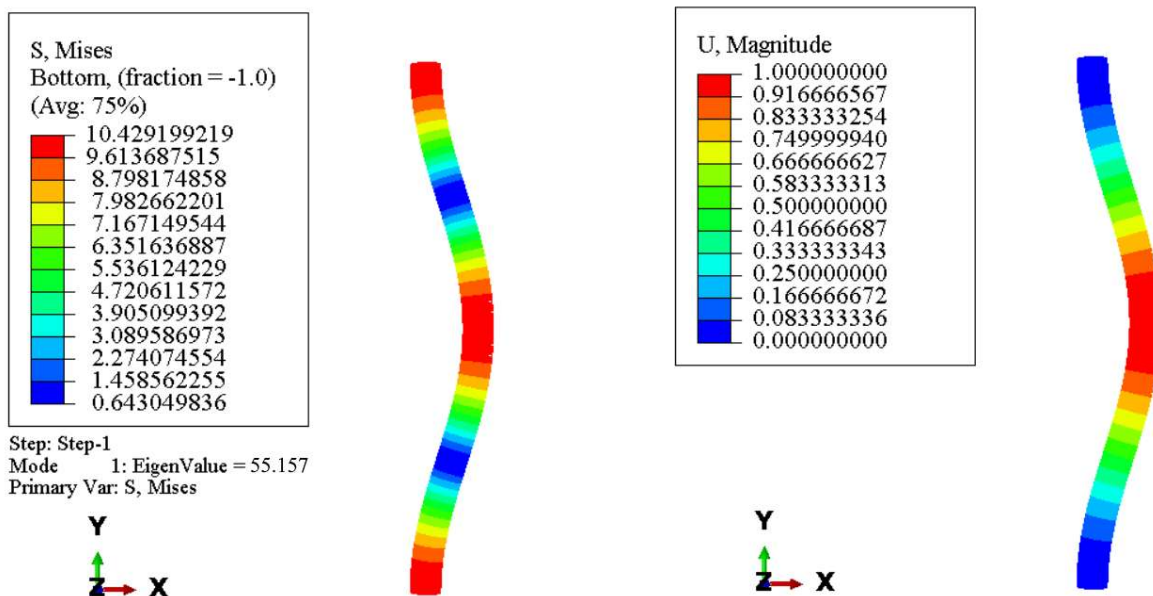
Linearna analiza izvijanja u programu Abaqus® koristi se za određivanje kritičnog opterećenja pri kojem dolazi do gubitka stabilnosti konstrukcije. Metoda se zasniva na *EigenValue* analizi, gdje se traže vlastite vrijednosti i odgovarajući oblici izvijanja konstrukcije pod zadanim opterećenjem. Vrijednosti dobivene ovom analizom predstavljaju faktore množenja zadanog opterećenja. Na primer, ako je faktor izvijanja 3, to znači da će se konstrukcija izviti kada se

primijenjeno opterećenje utrostruči. Za početni proračun izvijanja, stup je u programu definiran kao linija duljine  $l = 10196$  mm, izračunate izrazom (2.43). Stupu je dodijeljen presjek čije su karakteristike jednake zadanom, a on je diskretiziran grednim elementima. Opterećen je silom od 1447 kN, izračunatom u izrazu (2.42) te je na donjem rubu ukliješten, a na gornjem rubu mu je omogućen samo vertikalni pomak. Rubne uvjete i opterećenje prikazuje slika 3.38.



Slika 3.38 Rubni uvjeti i opterećenje jednodimenzijskog modela stupa

Rezultati proračuna prikazani su slikom 3.39.



Slika 3.39 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za stup diskretiziran grednim elementima

Dane vrijednosti na slici 3.39 ne govore ništa o vrijednosti kritičnog naprežanja, ali vrijednost vlastite vrijednosti (55,157) pomnožena s opterećenjem stupa  $F$  daje kritičnu silu:

$$F_{kr} = F \cdot 55,157 = 81408 \text{ kN.} \quad (3.22)$$

U usporedbi s kritičnom silom izračunatom u analitičkom proračunu, koja iznosi 12618 kN, numerički izračunata kritična sila je nekoliko puta veća. Proračun izvijanja u programu Abaqus® ne uzima u obzir Tetmayerovo područje izvijanja, već samo Eulerovo područje. Kada se za vitkost zadanog stupa izračuna vrijednost kritičnog naprežanja uz pomoć Eulerove hiperbole dobije se:

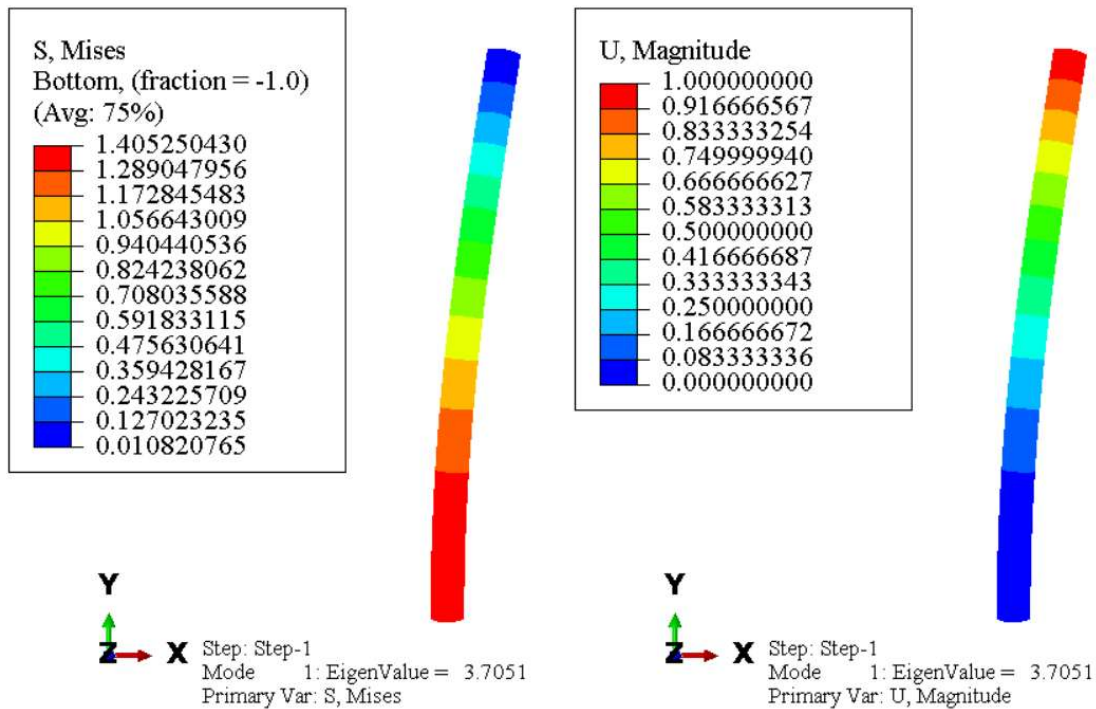
$$\sigma_{kr}^{\text{analitičko}} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = 3358 \text{ MPa,} \quad (3.23)$$

$$F_{kr}^{\text{analitičko}} = 81567 \text{ kN.} \quad (3.24)$$

Kada se izuzme greška zaokruživanja, analitička i numerička vrijednost kritične sile izvijanja je jednaka, što je i očekivano zato što je proučavan pojednostavljeni slučaj u kom je stup promatran kao štap konstantnog poprečnog presjeka, koji je opterećen u jednoj točki. Poklapanje analitičkih i numeričkih vrijednosti kritične sile provjereno i na primjeru najkritičnijeg slučaja, kada je štap ukliješten samo s jedne strane. Rubni uvjeti i opterećenje za taj slučaj prikazani su slikom 3.40.



**Slika 3.40** Rubni uvjeti i opterećenje jednodimenzijskog modela skupa za najkritičniji slučaj  
Rezultati proračuna prikazani su slikom 3.41.



**Slika 3.41** Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za najkritičniji slučaj izvijanja stupa diskretiziranog grednim elementima

Vlastita vrijednost izračunata numerički je 3,7051 pa je prema tome kritična sila za ovaj slučaj opterećenja:

$$F_{kr} = F \cdot 3,7051 = 5461 \text{ kN} . \quad (3.25)$$

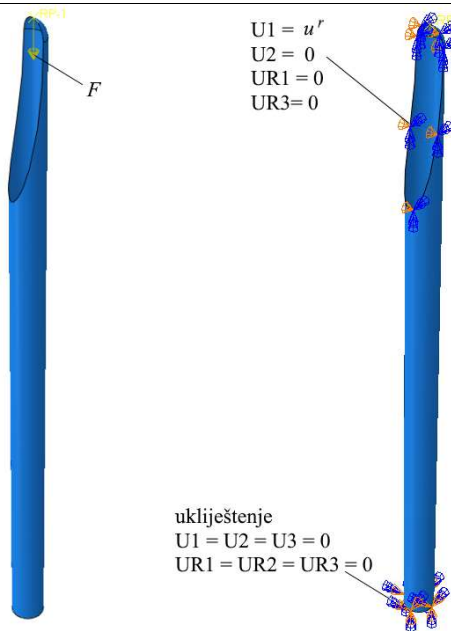
Kada se uspoređi sa silom izračunatom analitički:

$$F_{kr}^{\text{analitičko}} = 5499 \text{ kN} , \quad (3.26)$$

vidljivo je da je kritična sila jednaka izuzme li se u obzir greška zaokruživanja. Vidljivo je da je na taj način izračunata kritična sila znatno manja. Faktor sigurnosti za ovaj način opterećenja jednak je vlastitoj vrijednosti, odnosno:

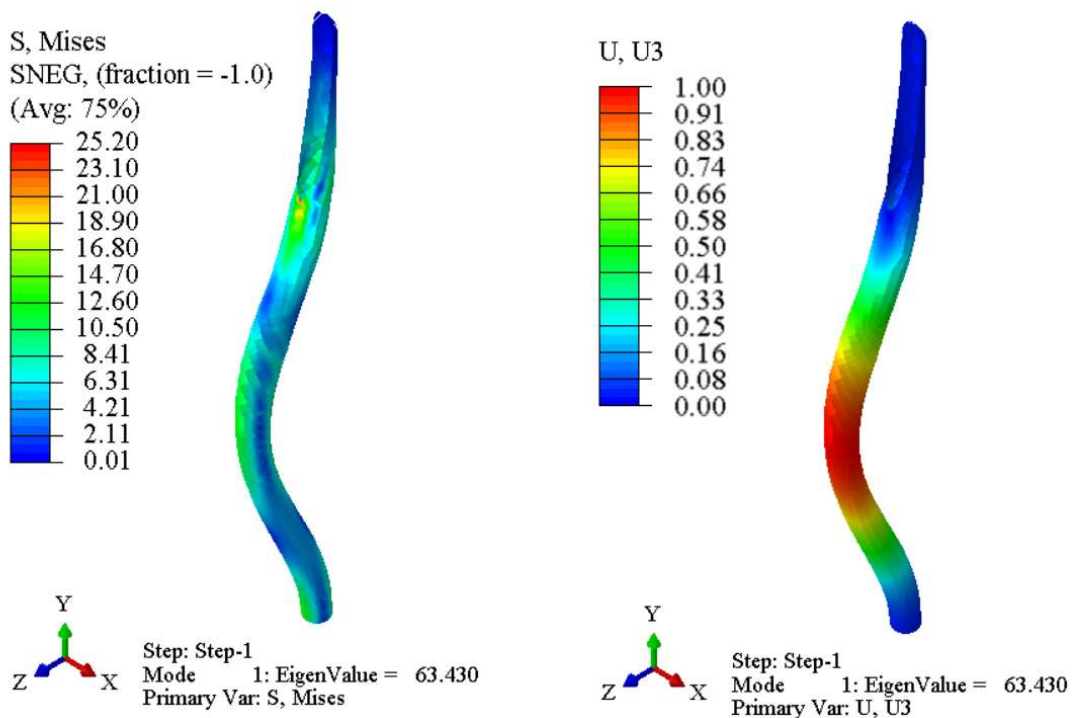
$$S = 3,7051 . \quad (3.27)$$

Stvarno opterećenje stupa je površinsko opterećenje na zakrivljenom dijelu stupa na koji je oslonjena sfera. Zbog toga je korišten trodimenzijski model stupa diskretiziran ljuskastim elementima. U programu Abaqus<sup>®</sup> opterećenje od 1447 kN je postavljano u referentnu točku (*Reference Point*). Referentna točka povezana je s cijelom dodirnom plohom sfere i stupa. Najprije je promatran slučaj kada je štap s jedne strane ukliješten, a s druge strane mu je dozvoljen samo vertikalni pomak, a progib je u najvišoj točki stupa jednak radijalnom pomaku sfere. Opterećenje i rubni uvjeti prikazani su slikom 3.42.



Slika 3.42 Rubni uvjeti i opterećenje trodimenzijskog modela stupa

Rezultati su prikazani slikom 3.43.



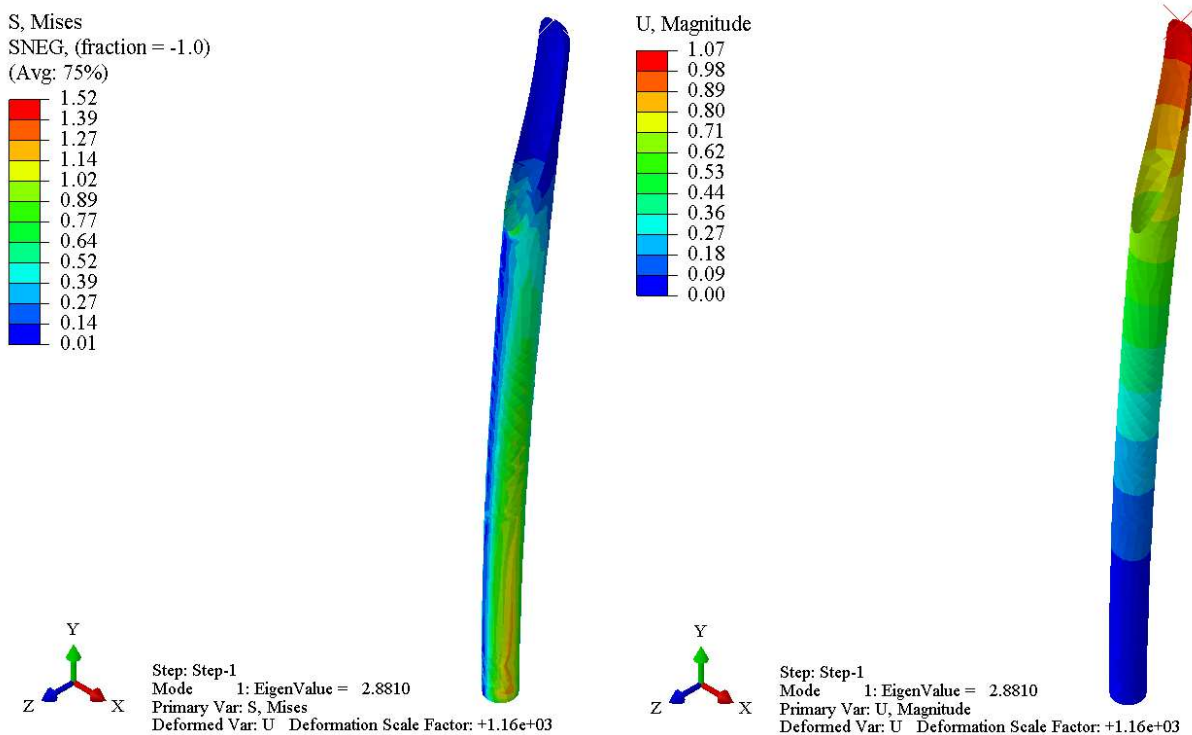
Slika 3.43 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za stup diskretiziran ljuskastim elementima

Vlastita vrijednost (*EigenValue*) iznosi 63,43, što znači da se kritično opterećenje za izvijanje postiže kada je vanjsko opterećenje 63,43 puta veće od početnog opterećenja. Izvijanje trodimenzijskog modela stupa promatrano je i za najkritičniji slučaj, kada je stup s jedne strane ukliješten, a s druge slobodan. Rubni uvjeti i opterećenje prikazani su slikom 3.44.



**Slika 3.44 Rubni uvjeti i opterećenje trodimenzijskog modela stupa za slučaj najkritičnijeg načina opterećivanja**

Rezultati su prikazani slikom 3.45.



**Slika 3.45 Raspodjela faktora naprezanja stupa (lijevo) i faktora deformacija (desno) za stup diskretiziran ljuskastim elementima za najkritičniji slučaj**

Vlastita vrijednost (*EigenValue*) iznosi 2,881, što znači da se kritično opterećenje za izvijanje postiže kada je vanjsko opterećenje 2,881 puta veće od početnog opterećenja.

### 3.4.1. Kontrola izvijanja

U numeričkom proračunu izvijanja, stupovi su opterećeni maksimalnom mogućom silom koja se može naći u stupu, kada nosi ukupnu težinu konstrukcije spremnika i težinu ukapljenog naftnog plina kada je volumen sfere u potpunosti napunjen. Vlastita vrijednost dobivena tim proračunom označuje koliko puta se to opterećenje može povećati da ne bi došlo do izvijanja. Najmanja vlastita vrijednost dobivena je kada je numerički proračun proveden na realnoj konstrukciji stupa s opterećenjem raspoređenim po dodirnoj plohi sfere i stupa. Najmanji faktor sigurnosti, jednak vlastitoj vrijednosti za taj slučaj je:

$$S = 2,881 . \quad (3.28)$$

Prema tome, numerički proračun izvijanja zadovoljava.

## 4. ZAKLJUČAK

Analitički proračun daje točne rezultate za jednostavne geometrije i ravnomjerna opterećenja uz određena ograničenja i pretpostavke. Brz je i jednostavan za izvođenje te ne zahtijeva značajne računalne resurse. S druge strane, numerički proračun u programskom paketu Abaqus<sup>®</sup>, koji se temelji na metodi konačnih elemenata, omogućuje simulaciju i proračun složenih geometrija i opterećenja te vizualizaciju raspodjele naprezanja i deformacija u cijelom modelu, ali to zahtijeva značajne računalne resurse i više vremena naspram analitičkog proračuna. Proračun koji kombinira analitičke i numeričke metode omogućuje brzo dimenzioniranje i projektiranje te osigurava sigurnost kod predviđenih opterećenja. Osnovne dimenzije spremnika mogu se odrediti u početnoj fazi projektiranja, kada je proveden samo analitički proračun. U sljedećoj fazi projektiranja, kada su poznate sve dimenzije, koristi se model diskretiziran konačnim elementima za provedbu detaljnije analize kako bi se identificirala područja s visokim koncentracijama naprezanja. Rezultati provedenog analitičkog proračuna čvrstoće sferne ljuske pokazuju da su naprezanja unutar dopuštenih granica za zadani materijal, što potvrđuje sigurnost konstrukcije u pogledu čvrstoće. Verifikacija numeričkog modela metodom konačnih elemenata pokazala je dobro slaganje s analitičkim proračunom uz minimalna odstupanja uzrokovana pretpostavkama analitičkog modela. Analitički izračunata raspodjela naprezanja u sfernoj ljusci poklapa se s numerički izračunatom raspodjelom na stvarnoj konstrukciji, osim u područjima spoja sfere i stupa, gdje se javlja lokalno savijanje. Ekvivalentno naprezanje na tim mjestima premašuje granicu tečenja. Pošto se takva naprezanja javljaju na malim površinama konstrukcije, plastične deformacije ostaju minimalne i ne dolazi do plastičnog kolapsa konstrukcije. Kod usporedbe analitičkog i numeričkog proračuna izvijanja, vidljivo je izvrsno poklapanje rezultata kada se u proračunima upotrebljava pojednostavljeni model stupa. Numerički proračun omogućio je dodatnu provjeru stabilnosti realne konstrukcije stupa, koja daje najmanju vrijednost kritične sile izvijanja. Minimalna kritična sila izvijanja je skoro tri puta veća od realne sile u stupu, što potvrđuje sigurnost konstrukcije u pogledu stabilnosti. Ni najveća ekvivalentna naprezanja ni najmanja kritična sila izvijanja ne mogu se izračunati analitičkim metodama, već samo numerički, što ukazuje na važnost provođenja numeričkog proračuna u programskom paketu Abaqus<sup>®</sup> temeljenog na metodi konačnih elemenata.



**LITERATURA**

- [1] <https://chemicalengineeringworld.com/spherical-storage-tank-design/>, 19.10.2024.
- [2] <https://www.cimcenric.com/storage-equipment-price/lpg-spherical-tank.html>, 19.10.2024.
- [3] <https://www.nrl.co.in/upload/nrlLPG-Specifications.pdf>, 19.10.2024.
- [4] Archirtektural institute of Japan: Design Recommendation for Storage Tanks and Their Supports with Emphasis on Seismic Design, Aqua Energy Expo, 2010.
- [5] <https://steelss.com/>, 6.11.2024.
- [6] Alfirević, I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2011.
- [7] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb 1995.
- [8] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [9] <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/stm/default.htm?startat=ch03s06ath79.html>, 18.01.2025.