

CFD simulacija interakcije rotora male besposadne letjelice za analizu buke

Pipunić, Fran

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:466802>

Rights / Prava: [Attribution-ShareAlike 4.0 International / Imenovanje-Dijeli pod istim uvjetima 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-23**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Fran Pipunić

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentori:

doc. dr. sc. Tessa Uroić, mag. ing.

Student:

Fran Pipunić

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentorici Tessi Uroić na mentorstvu, strpljenju i potpori tijekom izrade ovog rada.

Također, posebne zahvale na pomoći pri izradi simulacija zaslužuju doktorandi Luka Balatinec i Matej Čorak.

Za kraj, zahvaljujem se svojoj obitelji na beskrajnoj potpori tijekom čitavog školovanja.

Fran Pipunić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva/zrakoplovnog
inženjerstva



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 24 - 06 / 1	
Ur.broj: 15 - 24 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Fran Pipunić** JMBAG: 0035225375

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **CFD simulacija interakcije rotora male besposadne letjelice za analizu buke**

Naslov rada na engleskom jeziku: **CFD simulation of rotor-rotor interaction of a small unmanned aircraft for noise analysis**

Opis zadatka:

Onečišćenje bukom relevantno je pitanje u Europi gdje je stanovništvo, osobito u urbaniziranim područjima, dugotrajno izloženo razinama buke koje se smatraju štetnima za zdravlje. Iako se direktivama Europske unije i djelovanjem Europske agencije za okoliš nastoji poduzeti niz mjera za suzbijanje buke, one su usmjerene uglavnom na ublažavanje buke uzrokovane cestovnim vozilima, no dio buke u urbanim sredinama nastaje i zbog sve češćeg korištenja malih četverorotornih besposadnih letjelica u različite svrhe. Stoga će predmet ovoga rada biti numerička analiza generiranja buke zbog interakcije rotora u horizontalnom letu male četverorotorne besposadne letjelice.

Student će u sklopu rada:

1. opisati numeričko modeliranje buke primjenom simulacija računalne dinamike fluida,
2. izraditi CAD model rotora male besposadne letjelice te prirediti domenu i proračunsku mrežu u kojoj će biti smještena dva rotora,
3. provesti stacionarnu simulaciju rotacije rotora, koristeći pristup različitih inercijskih koordinatnih sustava („multiple reference frame“, MRF), u programu OpenFOAM,
4. provesti tranzijentnu simulaciju rotacije rotora, koristeći rezultate stacionarne simulacije za inicijalizaciju,
5. analizirati interakciju rotora na temelju polja brzine i tlaka dobivenih u tranzijentnoj simulaciji.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

26. rujna 2024.

Datum predaje rada:

28. studeni 2024.

Predviđeni datumi obrane:

5., 6. i 9. prosinca 2024.

Zadatak zadala:

Doc.dr.sc. Tessa Uroić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1. Uvod.....	1
1.2. Pregled rada.....	2
1.3. Utjecaj buke na čovjeka	2
2. OSNOVE AKUSTIKE.....	5
2.1. Osnovne karakteristike zvuka	5
2.2. Valna jednađba	11
2.2.1. Osnovne jednađbe mehanike fluida	11
2.2.2. Konstitutivne jednađbe.....	12
2.2.3. Homogena valna jednađba	13
2.2.4. Nehomogena valna jednađba	15
2.3. Elementarna rješenja valne jednađbe	16
2.3.1. Ravninski valovi	16
2.3.2. Sferno simetrični valovi	17
2.4. Izvori zvuka.....	19
2.4.1. Monopol.....	19
2.4.2. Dipol.....	19
2.4.3. Kvadrupoli	20
3. RAČUNALNA AEROAKUSTIKA.....	23
3.1. Uvod.....	23
3.2. Izravne numeričke simulacije	23
3.3. Hibridne metode.....	24
3.3.1. Modeliranje izvora zvuka.....	24

3.3.1.1.	$k - \varepsilon$ model turbulencije	25
3.3.1.2.	$k - \omega$ model turbulencije	26
3.3.1.3.	$k - \omega$ SST model turbulencije	26
3.3.2.	Modeliranje širenja zvuka	27
3.3.2.1.	Lighthillova analogija	28
3.3.2.2.	Curleova analogija	29
3.3.2.3.	Ffowcs-Williamsova i Hawkingsova analogija	29
4.	STACIONARNA SIMULACIJA S VIŠESTRUKIM KOORDINATNIM SUSTAVIMA	
	32	
4.1.	Uvod	32
4.2.	Geometrija propelera	32
4.2.1.	Podatci o geometriji propelera	32
4.2.2.	CAD model propelera	38
4.3.	Proračunska mreža	40
4.4.	Rubni uvjeti	42
4.5.	Simulacije s višestrukim koordinatnim sustavima	44
4.6.	Rezultati simulacije	45
5.	TRANZIJENTNA SIMULACIJA BUKE PARA PROPELERA	50
5.1.	Uvod	50
5.2.	Rezultati prvih 60 koraka simulacije	50
5.3.	Sveukupni rezultati tranzijentne simulacije	56
5.4.	Akustička analiza rezultata tranzijentne simulacije	58
6.	ZAKLJUČAK	64

POPIS SLIKA

Slika 1 Oscilacije tlaka (gore) i gustoće (dolje) kod akustičkih poremećaja	5
Slika 2 Akustički tlak i razina akustičkog tlaka zvuka s više frekvencija.....	7
Slika 3 Pojačanje A-težinske korekcije	9
Slika 4 Usporedba nekorigiranih i A-korigiranih razina akustičkog tlaka.....	10
Slika 5 Polubeskonačna cijev s klipom u ishodištu.....	17
Slika 6 Usmjerenost zvučnog polja: monopola (a) i dipola (b) [19].....	20
Slika 7 Raspored dipola u longitudinalnom (a) i lateralnom (b) kvadrupolu [20].....	21
Slika 8 Usmjerenost zvučnog polja: lateralnog (a) i longitudinalnog (b) kvadrupola [19].....	22
Slika 9 Fotografija propelera [33]	35
Slika 10 Distribucija duljine tetive	36
Slika 11 Distribucija kuta uvijanja	36
Slika 12 Distribucija x – koordinate napadnog ruba propelera	37
Slika 13 Distribucija z – koordinate napadnog ruba propelera	37
Slika 14 Aeroprofil Clark – Y	38
Slika 15 Poprečni presjeci lopatice propelera	39
Slika 16 CAD model propelera: pogled od gore (gore), pogled sa strane (dolje).....	40
Slika 17 CAD model s dva propelera.....	40
Slika 18 Mreža oko propelera	41
Slika 19 Položaj rotirajućih zona unutar vanjske domene	41
Slika 20 Profinjena mreže oko lopatice propelera	42
Slika 21 Komponenta polja brzine u smjeru osi x	46
Slika 22 Polje tlaka oko poprečnog presjeka lopatice propelera.....	47
Slika 23 Raspodjela tlaka na lopaticama propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)	48
Slika 24 Polje brzina u vrtložnom tragu propelera.....	49

Slika 25 Vremenski osrednjeno polje tlaka na stijenkama propelera u finijoj simulaciji: gornjaka (gore) i donjaka (dolje).....	51
Slika 26 Efektivni akustički tlak na stijenkama propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje).	51
Slika 27 Komponenta T_{zz} Lighthillovog tenzora naprezanja oko jednog propelera.....	52
Slika 28 Komponenta T_{zz} Lighthillovog tenzora naprezanja oko para propelera.....	53
Slika 29 Zakrivljenost propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje).....	55
Slika 30 Usmjereni derivacija polja tlaka u smjeru normale na plohu propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje).....	55
Slika 31 Osrednjeno polje tlaka na stijenkama propelera u svim koracima simulacije: gornjaka (gore) i donjaka (dolje).....	57
Slika 32 Oscilacije tlaka tijekom grubih koraka tranzijentne simulacije: gornjaka (gore) i donjaka (dolje).....	57
Slika 33 Položaji mikrofona u odnosu na propelere	58
Slika 34 Akustički tlak u ovisnosti o vremenu na sva tri mikrofona	59
Slika 35 Akustički tlak na mikrofona u ovisnosti o kutu zakreta propelera	60
Slika 36 Razine akustičkog tlaka za mikrofone 1 i 2	61
Slika 37 A-korigirane razine akustičkog tlaka	62

POPIS TABLICA

Tablica 1 Podatci o geometriji propelera [31].....	33
Tablica 2 Dodatni presjeci propelera	34
Tablica 3 Rubni uvjeti	44
Tablica 4 Usporedba potiska i momenta propelera dobivenih stacionarnom simulacijom s podacima proizvođača.....	48
Tablica 5 Položaji mikrofona u odnosu na osi rotacije propelera	58
Tablica 6 Sveukupni efektivni akustički tlakovi i razine akustičkog tlaka	63

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	m^2	Površina
$A(f)$	dB	Pojačanje A-težinske korekcije
a	m	Radijus sfere monopolnog izvora zvuka
\hat{a}	m	Amplituda oscilacija radijusa sfere
a_0	m	Početni radijus sfere
C	1/m	Totalna zakrivljenost
c_0	m/s	Brzina zvuka
c_v	J/kgK	Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu
d	m	Udaljenost monopolnih izvora u dipolu
d_{prop}	m	Promjer propelera
e	J/kg	Specifična ukupna energija
F_1	-	Težinska funkcija $k - \omega$ SST modela turbulencije
f	Hz	Frekvencija
f_i	N/kg	Specifična masena sila
H	-	Heavisideova <i>step</i> -funkcija
h	-	Funkcija koja opisuju kontrolnu plohu
I	W/m ²	Intenzitet zvuka
i	-	Imaginarna jedinica
k	J/kg	Specifična turbulentna kinetička energija
L_i	Pa	Jakost dipolnih izvora zvuka
L_p	dB	Razina akustičkog tlaka
l_{max}	m	Maksimalna veličina kontrolnih volumena
M	-	Machov broj
n	-	Ukupan broj kontrolnih volumena
n_j	-	Jedinični vektor normale
n_{RPM}	-	Broj okretaja u minuti
P	W	Akustička snaga
p	Pa	Tlak

\hat{p}	Pa	Kompleksna amplituda tlaka
p'	Pa	Akustički tlak
p_0	Pa	Srednji referentni tlak
p_{ref}	Pa	Referentni tlak
p_{rms}	Pa	Efektivni akustički tlak
Q_w	W/m ³	Izdašnost toplinskog izvora
q_i	W/m ²	Površinska gustoća toplinskog toka
R	J/kgK	Individualna plinska konstanta
R_1, R_2	m	Glavni radijusi zakrivljenosti
$R_A(f)$	-	Pomoćna funkcija A-težinske korekcije
r	m	Udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava
S	-	Kontrolna ploha
s	J/kgK	Specifična entropija
T	K	Termodinamička temperatura
T_{ij}	Pa	Lighthillov tenzor naprezanja
t	s	Vrijeme
U_n	m/s	Jakost monopolnih izvora zvuka
u	m/s	Brzina gibanja granične površine
u_I	m/s	Brzina strujanja u inercijskom koordinatnom sustavu
u_R	m/s	Brzina strujanja u rotirajućem koordinatnom sustavu
v_i	m/s	Brzina strujanja
v_{tip}	m/s	Brzina na vrhu kraka propelera
x	-	Argument težinske funkcija $k - \omega$ SST modela turbulencije
x, y, z	m	Koordinatne osi
x_i	m	Koordinatne osi
δ	-	Diracova delta-funkcija
δ_{ij}	-	Kroneckerov delta simbol
θ	-	Usmjerenost dipola
κ	-	Izentropski eksponent

λ	m	Valna duljina
λ_{min}	m	Najmanja promatrana valna duljina
λ_t	W/mK	Toplinska provodnost
μ	Pa·s	Dinamička viskoznost
μ_V	Pa·s	Volumenska viskoznost
ν	m ² /s	Kinematička viskoznost
ν_{eff}	m ² /s	Efektivna kinematička viskoznost
ν_t	m ² /s	Turbulentna kinematička viskoznost
ρ	kg/m ³	Gustoća
ρ_0	kg/m ³	Srednja referentna vrijednost gustoće
ρ'	kg/m ³	Oscilacije gustoće
Σ_{ji}	Pa	Tenzor viskoznih naprezanja
σ_{ji}	Pa	Tenzor naprezanja
τ	s	Argument d'Alambertovog rješenja valne jednadžbe
τ_i	Pa	Smično naprezanje na površini propelera
Φ_V	m ³ /s	Volumni protok
ψ	-	Težinski koeficijent $k - \omega$ SST modela turbulencije
ω	1/s	Specifična brzina disipacije turbulentne kinetičke energije

SAŽETAK

Precizno predviđanje buke propelera jedan je od ključnih alata u borbi s bukom koju proizvodi sve veći broj bespilotnih letjelica. Hibridne metode računalne aeroakustike (CAA) su jedan od načina na koji je moguće predvidjeti buku koju stvaraju propeleri takvih zrakoplova. Hibridne metode razdvajaju fenomene stvaranja zvuka i njegovog širenja čime se znatno pojednostavljuje simulacija buke. Pri tome je uobičajeno za modeliranje izvora aerodinamičke buke te buke u bliskom akustičkom polju koristiti simulacije računalne dinamike fluida (CFD). U radu su najprije iznesene teorijske osnove na kojima počivaju hibridne metode računalne aeroakustike, a zatim su prikazani rezultati simulacija kojima se modeliraju aeroakustički izvori povezani sa strujanjem zraka oko para propelera s posebnim naglaskom na interakciju dvaju propelera. Dodatno, za inicijalizaciju polja tlaka i brzine u tranzijentnim simulacijama prethodno je provedena stacionarna simulacija strujanja oko para propelera koristeći pristup s višestrukim koordinatnim sustavima (MRF). Sve simulacije su provedene u programskom okružju otvorenog koda foam-extend, grani programskog okruženja OpenFOAM.

Ključne riječi: računalna aeroakustika, CAA, računalna dinamika fluida, CFD, foam-extend, OpenFOAM, interakcija propelera, buka propelera

SUMMARY

Accurate propeller noise prediction is one of key tools in reducing noise produced by an increasing number of small unmanned aerial vehicles (UAVs). Hybrid methods of computational aeroacoustics (CAA) are one way to achieve that prediction. Hybrid methods are based on decoupling of sound generation and sound transmission phenomena and therefore they significantly simplify overall noise prediction. One of the most common ways to resolve noise generation and the near-field noise is modelling of acoustic sources based on flow simulation results obtained through computational fluid dynamics (CFD) simulations.

Theoretical considerations on which hybrid methods of computational aeroacoustics rest are considered in the first part of this work. These considerations are followed by results of transient CFD simulations that were used to model acoustic sources around a pair of UAV propellers with special considerations on interaction between two propellers. However, before transient simulations' results are shown, additional step was made in order to initialise transient simulations with pressure and velocity field obtained through steady-state CFD simulation using multiple reference frames approach. All of the mentioned simulations were performed in an open-source environment foam-extend, a fork of OpenFOAM environment.

Key words: computational aeroacoustic (CAA), computational fluid dynamics (CFD), foam-extend, OpenFOAM, propeller noise, propeller interaction

1. UVOD

1.1. Uvod

Već od rođenja zvukovi su neizostavni dio našeg života. Govor, koji se razvio prije približno 100 000 godina predstavlja prvi oblik komunikacije kojim su naši preci mogli podijeliti složene i apstraktne ideje [1], postavljajući tako temelje ljudske civilizacije kakvu danas poznajemo. Ipak, nije svaki zvuk koristan ni poželjan. Takve zvukove naziva se bukom ili zvučnim onečišćenjem, a pretjerano izlaganje može imati negativne posljedice na ljudsko zdravlje i kvalitetu života.

U današnjim urbanim sredinama sve je veći broj izvora zvučnog onečišćenja, a neki od glavnih izvora buke su građevinski radovi, industrijska postrojenja te razni oblici prijevoznih sredstava [2]. U kategoriji prijevoznih sredstava u prošlosti se najveća pažnja pridavala buci koju proizvode cestovna i željezničkih vozila te buci mlaznih motora zrakoplova [3], ali sve većom primjenom bespilotnih letjelica, kako u rekreacijske tako i u komercijalne svrhe, npr. snimanja iz zraka, prijevoz robe i slično, raste i njihov zvučni otisak.

Budući da se kod velike većine bespilotnih letjelica za pogon propelera koriste elektromotori koji su relativno tihi, posebice u usporedbi s motorima s unutarnjim izgaranjem kakvi i dalje prevladavaju u cestovnom prometu, a potpuno su dominantni u ostalim tipovima letjelica, glavni izvor buke kod bespilotnih letjelica je aerodinamička buka uslijed rada propelera.

Dodatno, za razliku od većine civilnih, propelerom pogonjenih aviona koji u pravilu imaju ili jedan propeler (najčešće smješten na nosu zrakoplova) ili dva propelera smještena svaki na svome krilu pa je razmak između propelera relativno velik, propeleri na bespilotnim letjelicama su vrlo često smješteni blizu jedan drugoga tako da postoji značajna mogućnost interakcije vrtložnih tragova propelera i stvaranja dodatne buke. U pogledu udaljenosti propelera, slična situacija se događa i kod helikoptera, ali su, u slučaju standardne konfiguracije helikoptera, osi rotacije propelera približno okomite pa je mogućnost interakcije u vrtložnom tragu znatno smanjena. Zapravo, najsličniji slučaj onome koji se javlja kod bespilotnih letjelica u multirotorskoj konfiguraciji je vidljiv kod velikih četveromotornih propelerom pogonjenih zrakoplova koji se danas koriste najčešće u vojne svrhe (Tupoljev Tu-95, Lockheed C-130 Hercules) ili za prijevoz posebno velikih tereta (Antonov An-12).

1.2. Pregled rada

Ovaj rad podijeljen je na šest poglavlja. U uvodnom poglavlju je predstavljen značaj aerodinamičke buke bespilotnih letjelica te općeniti utjecaj buke na zdravlje i život čovjeka. Nakon toga slijede teorijska razmatranja nastanka i širenja zvučnih poremećaja pri čemu je posebna pozornost obraćena na aeroakustičke izvore buke. U poglavlju nakon teorijskih razmatranja buke predstavljene su metode računalne aeroakustike kojima je moguće predvidjeti aerodinamičku buku propelera.

Nakon ovih teorijskih razmatranja slijedi praktični dio u kojem je najprije provedena stacionarna simulacija s višestrukim koordinatnim sustavima (skraćeno MRF od eng. *Multiple Reference Frames*) čiji se rezultati koriste u nastavku rada za inicijalizaciju polja brzine i tlaka tranzijentnih simulacija iz kojih je moguće iščitati oscilacije polja tlaka, tj. buku propelera. Na kraju su izneseni zaključci te prijedlozi za buduća istraživanja.

1.3. Utjecaj buke na čovjeka

Buku možemo definirati kao svaki nepoželjan zvuk. Ovakva definicija ostavlja dosta prostora za subjektivnu interpretaciju budući da zvuk koji je nepoželjan jednoj osobi može biti poželjan drugoj osobi. Ipak, iako je definicija buke subjektivna, njen utjecaj na čovjeka i okoliš je značajan i može se objektivno opisati i kvantificirati.

Negativan utjecaj buke na zdravlje čovjeka primijećen je još tijekom prve polovine 19. stoljeća, prvenstveno kroz gubitak sluha kod industrijskih radnika i vojnika koji su napretkom tehnologije bivali izloženi sve većim razinama buke [5]. Danas, Svjetska zdravstvena organizacija (WHO) prepoznaje sedam glavnih problema koji mogu biti prouzrokovani bukom, a koji negativno utječu na ljudsko zdravlje i kvalitetu života:

- oštećenje sluha
- otežan razgovor
- poremećaji spavanja
- problemi kardiovaskularnog sustava
- problemi s mentalnim zdravljem
- lošije kognitivne sposobnosti
- utjecaj na društvene aktivnosti i raspoloženje [6].

Osim što je prva primijećena negativna posljedica buke na zdravlje čovjeka, oštećenje sluha je ujedno i najčešći zdravstveni problem prouzrokovan bukom [6]. Oštećenja sluha

prouzrokovana bukom mogu biti trajna i privremena, pri čemu razina oštećenja prvenstveno ovisi o razini buke i trajanju izlaganja buci, a manjim dijelom i o frekvenciji buke. Tako razine buke iznad 160 dBA izazivaju trenutačna oštećenja sluha, dok buka razine 85 dBA prouzrokuje oštećenja nakon 8 sati izlaganja [7]. Nažalost, za liječenje oštećenja sluha uzrokovanog bukom ne postoji općeprihvaćeni medicinski tretman tako da jednom kada dođe do trajnog oštećenja ne postoji mogućnost liječenja premda se radi na razvoju tretmana koji bi u budućnosti mogli pacijentima u potpunosti vratiti sluh [8].

Ometanje razgovora samo po sebi ne predstavlja trajnu posljedicu na kvalitetu života čovjeka jer jednom kada buka prestane razgovor može ponovno teći normalno. Ipak, istraživanja pokazuju da dugotrajno ometanje razgovora bukom može imati značajne posljedice na psihičko zdravlje pojedinca, a ukoliko se radi o dugotrajnom ometanju posebno je opasno za djecu u procesu učenja govora [9]. Većina ljudskog govora se odvija na frekvencijama između 100 i 6000 Hz pa buka u tom frekvencijskom rasponu stvara i najveće poteškoće u razgovoru [6]. Obzirom da se i frekvencije okretaja propelera velikog broja bespilotnih letjelica također nalaze u ovom području, buka koja dolazi od bespilotnih letjelica može prouzrokovati značajne poteškoće u govornoj komunikaciji.

Problemi sa spavanjem uzrokovani bukom najčešće se javljaju kroz poteškoće pojedinca da zaspe, ali se mogu javljati i u obliku učestalih buđenja, smanjenja udjela REM-faze sna, promjena u disanju, povišenja krvnog tlaka i broja otkucaja srca te povećanju broja pokreta tijela tijekom sna [6]. Pri tome, najveći utjecaj imaju komponente zvuka s niskim frekvencijama koje mogu prouzrokovati poteškoće već pri 30 dBA.

Studije [10] i [11], ali i brojne druge, pokazuju da izlaganje buci ima privremene, ali i trajne fiziološke posljedice. Prilikom izlaganja buci dolazi do povišenja krvnog tlaka, ubrzanja srčanog ritma, suženja krvnih žila, promjene viskoznosti i udjela lipida u krvi, promjene u ravnoteži elektrolita i povećane koncentracije adrenalina, noradrenalina i kortizola. U većini slučajeva, nakon prestanka buke ove promjene se povlače, ali nakon dugotrajnog izlaganja buci, postoji povećana opasnost od razvoja hipertenzije i ishemijske bolesti srca.

Veza između mentalnog zdravlja i izloženosti buci je vrlo složena i još uvijek nedovoljno istražena. Pojedine studije ukazuju da postoji izravna veza između izloženosti buci i brojnih mentalnih poteškoća poput anksioznosti, naglih promjena raspoloženja, glavobolje i osjećaja mučnine [6]. Ipak, kako se radi o još uvijek nedovoljno istraženom području, postoji određena sumnja da sama izloženost buci nije glavni uzrok ovih poteškoća nego je glavni faktor u

njihovom razvoju osjetljivost pojedinca na buku koja može imati kako psihološke tako i fiziološke korijene.

Za razliku od utjecaja na mentalno zdravlje, utjecaj buke na kognitivne sposobnosti je vrlo dobro istražen. Tako je pokazano da u pojedinim, manje zahtjevnim zadacima pozadinska buka može pozitivno utjecati na rezultate, ali kod složenijih zadataka (zadataka koji zahtijevaju dugotrajnu koncentraciju i pažnju na detalje), buka gotovo uvijek doprinosi lošijim kognitivnim performansama [6]. Ovaj efekt snažno utječe i na proces učenja zbog čega su djeca posebno osjetljiva. Zanimljiv zaključak studija koje se bave ovim fenomenom je da glavnu ulogu ne igra sami intenzitet zvuka kojemu su izloženi pojedinci koliko je bitan manjak kontrole pojedinca nad izvorom zvuka.

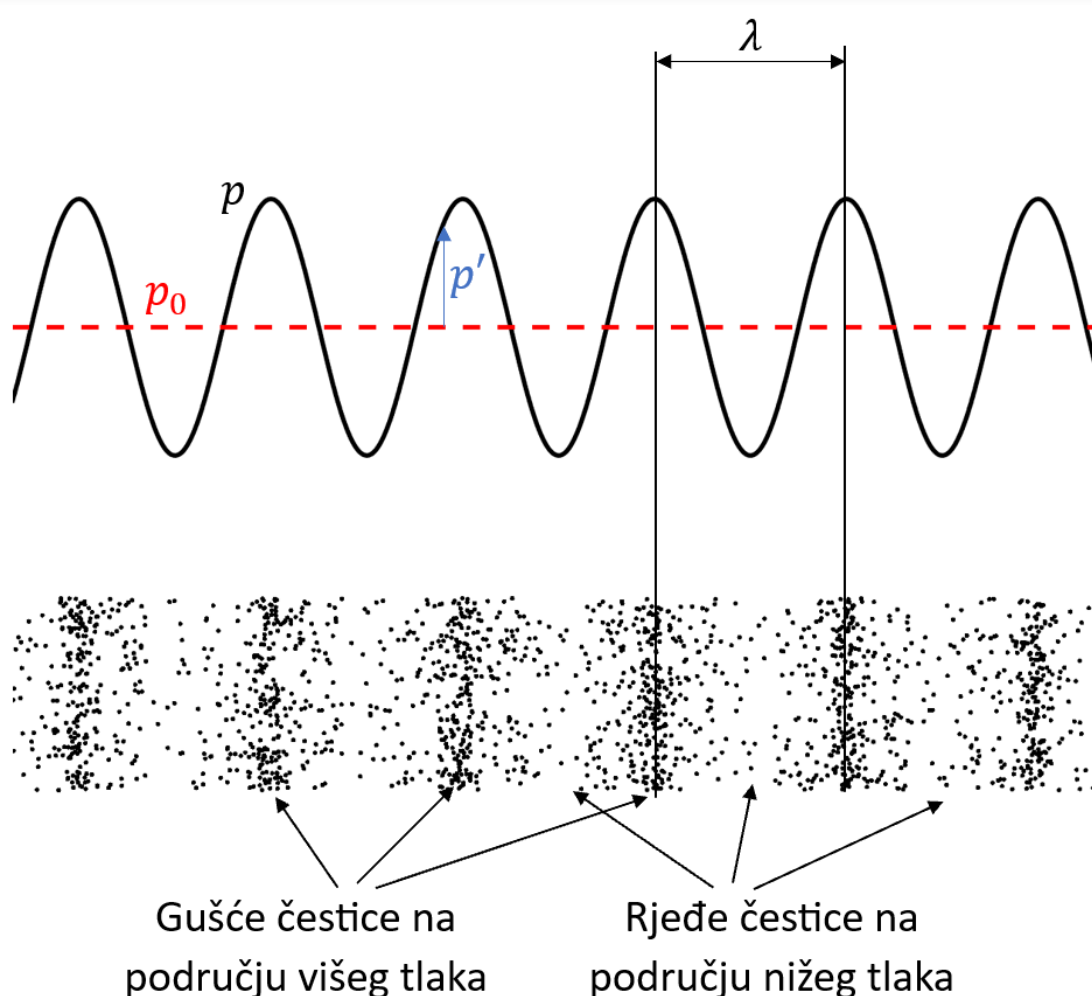
Razdražljivost izazvana bukom je vrlo česta i rasprostranjena pojava. Premda većina istraživanja pokazuje da buka sama po sebi ne dovodi do agresivnosti, u situacijama koje inače dovode do povećane agresivnosti, prisutnost buke dodatno pojačava agresiju pojedinca u odnosu na iste situacije kada nema buke [6]. Dodatno, dugotrajno prisustvo buke smanjuje druželjubivost pojedinaca što negativno utječe na njihov društveni život koji je izuzetno važan za cjelokupnu dobrobit čovjeka.

Iz svega navedenog jasno je da buka ima dalekosežne posljedice kako na pojedinca tako i na društvo u cjelini. Stoga je vrlo važno što je moguće bolje zaštititi ljude od prekomjerne buke kakvu proizvodi većina danas komercijalno dostupnih bespilotnih letjelica. Jedan od načina za to je korištenje zaštitne opreme poput čepića za uši ili slušalica za smanjenje buke, međutim ovakva rješenja automatski uskraćuju i sve pozitivne strane sluha pa su u vrlo nepraktična i u stvarnosti teško primjenjiva. Puno učinkovitije rješenje je smanjenje buke na izvoru, odnosno korištenje propelera koji proizvode manju količinu buke.

2. OSNOVE AKUSTIKE

2.1. Osnovne karakteristike zvuka

Bez obzira na mehanizam nastajanja, zvuk se može promatrati kao oscilacija tlaka u nekom elastičnom mediju. Na razini atoma i molekula te oscilacije tlaka uzrokuju gibanje čestica u smjeru širenja poremećaja, ali i poremećaje gustoće medija koji se mogu zorno prikazati. Slika 1 prikazuje vezu između oscilacija tlaka (gornji dio Slika 1) i gustoće čestica (donji dio Slika 1).



Slika 1 Oscilacije tlaka (gore) i gustoće (dolje) kod akustičkih poremećaja

Ovakav način širenja poremećaja, kod kojeg čestice titraju u smjeru širenja poremećaja, naziva se longitudinalni val. Valja napomenuti da se zvuk širi isključivo longitudinalnim valovima u plinovima i kapljevinama, ali u krutinama se širi longitudinalnim i transverzalnim valovima

[4]. Kako se ovaj rad bavi isključivo nastajanjem zvuka uslijed strujanja zraka i propagacijom zvuka u zraku, zvuk će se promatrati isključivo kao longitudinalni val.

Dodatno, na Slika 1 valja primijetiti da se ukupni tlak p u akustičkom mediju sastoji od konstantnog tlaka p_0 koji se naziva ravnotežnim tlakom i od oscilirajućeg dijela p' koji se naziva akustički tlak. Valja imati na umu da je akustički tlak u pravilu više redova veličine manji od ravnotežnog tlaka.

Kao i svaki val, zvuk ima određenu frekvenciju i valnu duljinu pri čemu vrijedi veza

$$c = \lambda f, \quad (1)$$

gdje je λ valna duljina, f frekvencija, a c brzina zvuka. Zvukovi poput onoga prikazanog na Slika 1, koji sadrže samo jednu frekvenciju nazivaju se tonalni zvukovi i javljaju se isključivo prilikom sviranja glazbenih instrumenata. U tom slučaju, za potpuni opis zvuka, osim frekvencije potrebno je definirati još samo amplitudu zvučnog signala. Ipak, u akustici nije uobičajeno koristiti amplitudu akustičkog tlaka nego efektivni akustički tlak p_{rms} koji se računa kao kvadratna sredina akustičkog tlaka

$$p_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p'^2(t) dt}, \quad (2)$$

gdje je T interval mjerenja koji bi u teoriji trebao težiti u beskonačnost, ali kako je to u praksi neizvedivo dovoljno je da T bude veći od perioda oscilacija koje se promatraju [12]. Druga uobičajena mjera amplitude zvuka je razina buke ili razina zvučnog tlaka koja je i najčešće korištena veličina za opis glasnoće zvuka. Razina buke u sebi sadrži kvadratnu sredinu akustičkog tlaka definiranu jednadžbom (2) i tipično se izražava u decibelima

$$L_p = 20 \log \frac{p_{rms}}{p_{ref}} \text{ dB}, \quad (3)$$

gdje je p_{ref} referentna vrijednost tlaka za koju se uobičajeno uzima $20 \mu\text{Pa}$ što je ujedno i granica čujnosti zdravog ljudskog uha pri frekvenciji od 1 kHz [13].

Kao dodatne veličine koje opisuju glasnoću nekog izvora buke često se koristi i intenzitet zvuka te akustička snaga. Intenzitet zvuka predstavlja protok akustičke energije te je definiran umnoškom akustičkog tlaka i brzine titranja čestica. Kako se tijekom prolaska zvučnog vala taj umnožak stalno mijenja u pravilu se promatra vremenski osrednjeni intenzitet zvuka, slično kvadratnoj sredini akustičkog tlaka

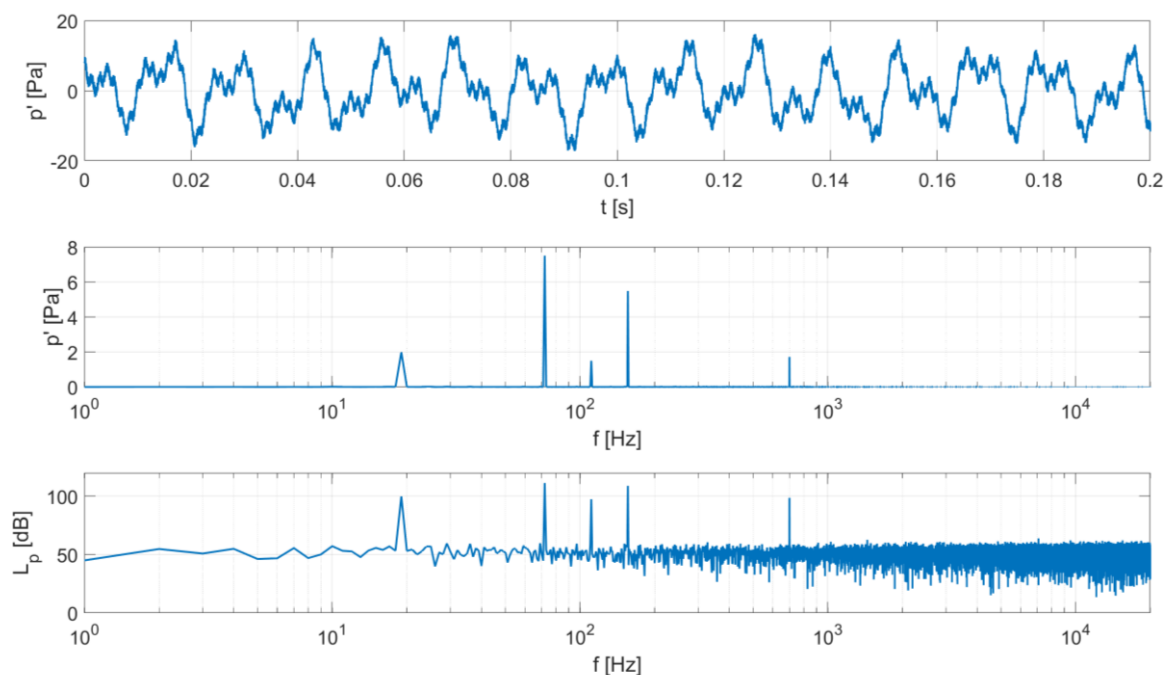
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p'(t)v(t)dt}. \quad (4)$$

Snagu akustičkog izvora moguće je izračunati kao umnožak intenziteta zvuka i površine plohe kroz koju prolazi zvuk

$$P = IA. \quad (5)$$

Slično kao i za akustički tlak, za intenzitet i snagu akustičkog izvora često se koriste i logaritamske skale koje se onda nazivaju razine intenziteta odnosno snage i također se izražavaju u dB.

S druge strane, većina zvukova koje čujemo u svakodnevnom životu se sastoji od velikog broja valova različitih frekvencija između 16 i 20000 Hz [4]. Stoga zapis akustičkog tlaka u vremenu češće izgleda kaotično i neuredno poput zapisa prikazanog na gornjem dijelu slike 2. Veličine koje mjere glasnoću poput razine akustičkog tlaka, intenziteta i snage akustičkog izvora se i dalje mogu računati prema izrazima (1) – (4), ali se tada ne uzima u obzir da ljudsko uho različito percipira glasnoću različitih frekvencija.



Slika 2 Akustički tlak i razina akustičkog tlaka zvuka s više frekvencija

Kako bi se u obzir mogao uzeti i utjecaj frekvencije zvuka na percipiranu glasnoću, najprije se provodi diskretna Fourierova transformacija [14], [15] kako bi se signal iz vremenskog

područja prebacio u frekvencijsko područje u kojem se svakoj frekvenciji pridružuje pripadajuća amplituda akustičkog tlaka. Ovakav zapis je prikazan na srednjem dijelu Slika 2.

Kako je zapis akustičkog tlaka u frekvencijskom području relativno nepregledan, na donjem dijelu Slika 2 je prikazan zapis razina akustičkog tlaka u frekvencijskom području. Osim preglednosti, ovaj zapis je koristan i kako bi se mogla provesti težinska korekcija prema osjetljivosti ljudskog uha na različite frekvencije.

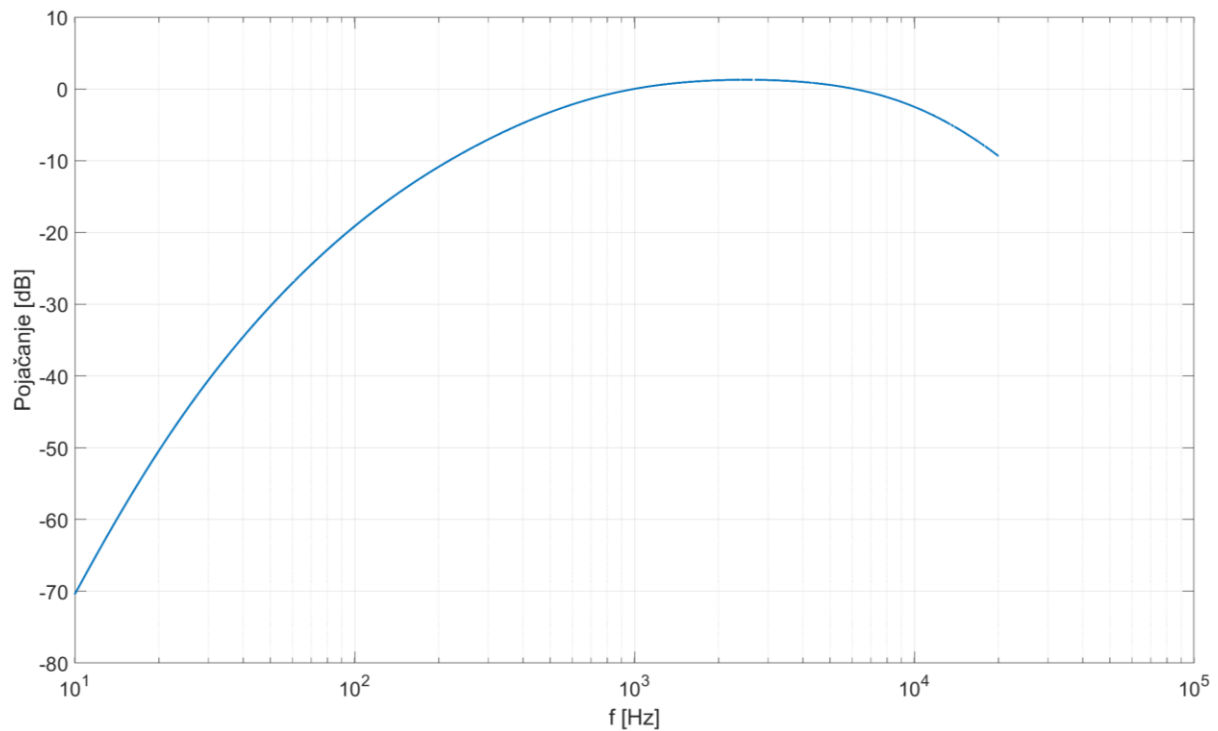
Premda je u prošlosti razvijeno više težinskih korekcija kojima se pokušalo kompenzirati osjetljivost uha na različite frekvencije, danas je općeprihvaćena A-težinska korekcija [12]. Osnovna ideja ove korekcije je dodati pojačanje na razine akustičkog tlaka koje odgovaraju frekvencijama na koje je ljudsko uho najosjetljivije (raspon frekvencija od približno 1 do 6 kHz), dok se na ostale frekvencije dodaje prigušenje. Za izračun pojačanja odnosno prigušenja svake pojedine frekvencije koristi se pomoćna funkcija [16]

$$R_A(f) = \frac{12194^2 f^4}{(f^2 + 20.6^2)(f^2 + 12194^2)\sqrt{(f^2 + 107.7^2)(f^2 + 737.9^2)}}, \quad (6)$$

pa pojačanje iznosi

$$A(f) = 20 \log_{10}(R_A(f)) - 20 \log_{10}(R_A(1000 \text{ Hz})) \text{ dB}. \quad (7)$$

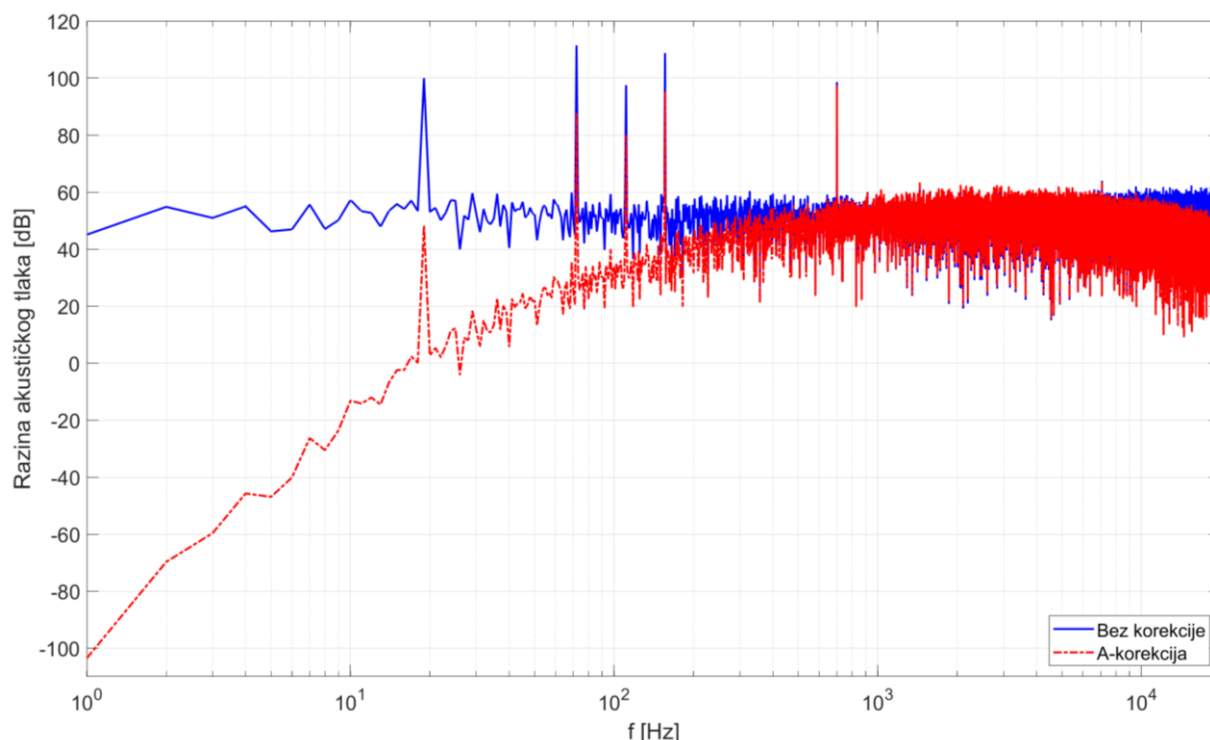
Drugi član desne strane jednadžbe (7) se koristi isključivo zbog normativnih razloga kako bi se osiguralo da pojačanje pri 1000 Hz bude jednako nuli. Iznos pojačanja za cijelo frekvencijsko područje ljudskog sluha je prikazano na Slika 3.



Slika 3 Pojačanje A-težinske korekcije

Na Slika 3 valja primijetiti da je prigušenje vrlo niskih frekvencija zvuka izrazito veliko te nije neuobičajeno da nakon primijene A-težinske korekcije amplitude razina akustičkih tlakova niskih frekvencija postanu negativne. To znači da efektivni akustički tlak tih frekvencija nakon korekcije iznosi manje od $20 \mu\text{Pa}$, odnosno da zvukove tih frekvencija ljudsko uho ne može čuti.

Primjena A-težinske korekcije na primjeru zvučnog signala prikazanog na Slika 3 prikazana je na Slika 4.



Slika 4 Usporedba nekorigiranih i A-korigiranih razina akustičkog tlaka

Premda ovakav prikaz ima puno korisnih strana, iz njega je vrlo teško uspoređivati glasnoću dvaju različitih zvukova. Za potrebe toga se koristi razina akustičkog tlaka, ali je umjesto stvarnog akustičkog tlaka potrebno koristiti korigirani akustički tlak. Amplitude korigiranog akustičkog tlaka u frekvencijskom području se pomoću izraza (3) mogu vrlo lako dobiti iz korigiranih amplituda razine akustičkog tlaka prikazanih na Slika 4. Međutim za računanje efektivnog akustičkog tlaka potrebno je poznavati akustički tlak u vremenskoj domeni. To je moguće dobiti inverznom Fourierovom transformacijom, ali kako bi se izbjegao ovaj relativno složeni korak može se iskoristiti Parsivalov teorem za diskretne signale iz kojeg slijedi

$$\sum_{t=0}^{N-1} |p'(t)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} |p'(f)|^2, \quad (8)$$

gdje je N broj uzoraka u vremenskom području. Ako se pobliže prouči jednačba (2) može se primijetiti da se pod integralom pojavljuje upravo izraz $p'(t)^2$, što uz činjenicu da se kod diskretnih signala integral zamjenjuje sumom i uz pretpostavku uniformnog vremenskog koraka uzorkovanja omogućuje korištenje izraza (8) za računanje efektivnog akustičkog tlaka, a onda i korigirane razine akustičkog tlaka pomoću jednačbe (3).

Za kraj valja napomenuti da je, ukoliko se barata s A-korigiranom razinom akustičkog tlaka, uobičajeno koristiti oznaku dB A ili dB(A) kojom se naznačuje da se radi o A-korigiranoj razini akustičkog tlaka u decibelima [12].

2.2. Valna jednadžba

U prethodnom poglavlju su definirane osnovne veličine kojima opisujemo zvuk, ali nije uspostavljena veza između poremećaja tlaka, brzine i gustoće. Kako bi se došlo do veza između ovih osnovnih akustičkih veličina, u ovom poglavlju su najprije dane osnovne jednadžbe mehanike fluida te konstitutivne jednadžbe koje se onda koriste za izvod valne jednadžbe.

2.2.1. Osnovne jednadžbe mehanike fluida

Osnovne jednadžbe mehanike fluida u diferencijalnom obliku su:

- jednadžba očuvanja masa (jednadžba kontinuiteta)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (9)$$

- jednadžba očuvanja količine gibanja

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}, \quad (10)$$

- jednadžba očuvanja energije

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j e)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (11)$$

gdje je f_i rezultanta masenih sila, σ_{ji} tenzor naprezanja, ukupna specifična energija $e = v^2/2 + u$ je zbroj specifične kinetičke i specifične unutarnje energije, a q_j vektor površinske gustoće toplinskog toka.

Detaljnijim promatranjem jednadžbi (9) – (11) može se uočiti da postoji ukupno pet skalarnih jednadžbi jer je jednadžba očuvanja količine gibanja vektorska jednadžba koja se može rastaviti na tri skalarne jednadžbe. Dodatno, u većini slučajeva jedina masena sila koja djeluje na fluid je gravitacijska sila pa polje masenih sila možemo smatrati poznatim [17] čime preostaje 14 nepoznatih skalarnih polja: polje gustoće, tri komponente polja brzine, šest komponenti tenzora naprezanja (zbog simetrije tenzora naprezanja ima samo šest nepoznatih komponenti umjesto devet), tri komponente vektora površinske gustoće toplinskog toka te polje ukupne energije e . Jednadžbe (9) – (11) vrijede za sve fluide, međutim nisu dovoljne da bi se iz njih mogla dobiti

rješenja. Stoga je potrebno uvesti konstitutivne jednadžbe koje ne vrijede za sve fluide, ali su nužne za daljnja razmatranja.

2.2.2. Konstitutivne jednadžbe

U ovom poglavlju je dan pregled konstitutivnih jednadžbi koje se koriste pri analizi strujanja zraka. Neke od ovih jednadžbi nisu nužne za izvod valne jednadžbe koja opisuje širenje zvuka u zraku, ali je korisno imati čitav skup jednadžbi na jednom mjestu. Konstitutivne jednadžbe za strujanje zraka se:

- Fourierov zakon toplinske provodnosti

$$q_j = -\frac{\lambda_t \partial T}{\partial x_j}, \quad (12)$$

- Newtonov zakon viskoznosti

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji},$$

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji}, \quad (13)$$

- jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \rho RT, \quad (14)$$

- kalorička jednadžba stanja

$$du = c_v dT, \quad (15)$$

gdje je λ_t toplinska provodnost, δ_{ji} jedinični tenzor, Σ_{ji} simetrični tenzor viskoznih naprezanja, μ dinamička viskoznost, μ_v volumenska viskoznost, R specifična plinska konstanta, a c_v specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu. Valja naglasiti da je uvođenjem jednadžbe stanja idealnog plina i kaloričke jednadžbe stanja primjena svih daljnjih razmatranja ograničena na područja tlaka i temperature koja su daleko od krivulja promjene agregatnog stanja u faznom dijagramu, odnosno na područja u kojima se zrak ponaša vrlo slično idealnom plinu. Ipak, ovo ne predstavlja značajno ograničenje za akustička razmatranja pošto pri kombinacijama temperatura i tlakova na kojima se zrak ne može smatrati idealnim plinom čovjek uopće ne bi mogao preživjeti, a kamo li čuti zvuk.

Sada se uz trivijalne manipulacije iz jednadžbi (9) – (15) može dobiti osnovni skup jednadžbi strujanja zraka:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \Sigma_{ji}}{\partial x_j}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j e)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i - \frac{\partial(p v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\Sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (18)$$

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji}, \quad (19)$$

$$e = \frac{v^2}{2} + u, \quad (20)$$

$$p = \rho R T, \quad (21)$$

$$du = c_v dT. \quad (22)$$

Na ovaj način se konačno dolazi do sustava od četrnaest skalarnih jednadžbi s četrnaest nepoznanica čime je strujanje jednoznačno određeno.

2.2.3. Homogena valna jednadžba

Iz jednadžbi (16) – (22) moguće je izvesti homogenu valnu jednadžbu koja opisuje širenje akustičkih poremećaja u mirujućem fluidu. Pri tome se koriste sljedeće pretpostavke:

- poremećaji tlaka, gustoće i brzine su dovoljno mali da se strujanje može smatrati izentropskim (adijabatskim i neviskoznim),
- utjecaj masenih sila se može zanemariti [17].

Uz navedene pretpostavke jednadžbe (16) i (17) se mogu zapisati u obliku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (23)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (24)$$

dok se preostale jednadžbe mogu zamijeniti izrazom za izentropsku promjenu stanja

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = C, \quad (25)$$

gdje je C konstanta. Nadalje, polja tlaka i gustoće je moguće zapisati kao zbroj konstantne vrijednosti tlaka p_0 odnosno gustoće ρ_0 i vremenski i prostorno promjenjivih poremećaja $p'(x_i, t)$ i $\rho'(x_i, t)$

$$p(x_i, t) = p_0 + p'(x_i, t), \quad (26)$$

$$\rho(x_i, t) = \rho_0 + \rho'(x_i, t), \quad (27)$$

dok se brzina (budući da se promatra mirujući fluid) sastoji isključivo od malog poremećaja brzine. Uvrštavanjem jednadžbi (26) i (27) u jednadžbe (23) i (24) te eliminacijom malih veličina drugog reda dobivaju se jednadžbe

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (28)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0. \quad (29)$$

Iz jednadžbe (25) slijedi da se tlak može zapisati kao funkcija gustoće $p = p(\rho)$ pa prema lančanom pravilu deriviranja vrijedi

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \text{ odnosno } \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (30)$$

pa je

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{1}{\frac{dp}{d\rho}} \quad (31)$$

Kako su kod akustičnih poremećaja promjene tlaka i gustoće vrlo male, može se smatrati da je $dp/d\rho = c_0^2 = \text{konst.}$ Sada se uvrštavanjem izraza (31) u jednadžbu (28) dobiva

$$\frac{\partial p'}{\partial t} \frac{1}{c_0^2} + \rho_0 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (32)$$

Ako se jednadžba (32) derivira po vremenu i od nje oduzme jednadžba (29) derivirana po prostornoj koordinati x_i , dobiva se

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \frac{1}{c_0^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \quad (33)$$

odnosno nakon množenja s c^2

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (34)$$

Jednadžba (34) predstavlja poseban oblik jednadžbe koji se naziva valna jednadžba u kojoj konstanta c predstavlja brzinu širenja vala odnosno, u ovom slučaju brzinu zvuka. Kako bi se odredila brzina zvuka jednadžbu potrebno je jednadžbu (25) zapisati u obliku

$$p = C \rho^\kappa \quad (35)$$

te u tom obliku derivirati po gustoći

$$\frac{dp}{d\rho} = C \kappa \rho^{\kappa-1}. \quad (36)$$

Sada se uvrštavanjem izraza za C iz jednadžbe (25) dobiva

$$c_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (37)$$

odnosno, kakoo su poremećaji tlaka i gustoće male veličine vrijedi

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}. \quad (38)$$

Korištenjem jednadžbe stanja idealnog plina (14) dobiva se i izraz

$$c_0 = \sqrt{\kappa R T_0}. \quad (39)$$

2.2.4. Nehomogena valna jednadžba

Homogena valna jednadžba izvedena u prethodnom poglavlju vrijedi za mirujuće fluide u kojima nema kemijskih reakcija niti promjena agregatnih stanja. Ukoliko se želi promatrati fluid u gibanju u nije moguće zanemariti masene sile kao što je to bio slučaj u mirujućem fluidu. Dodatno, ako se razmatra fluid unutar kojeg se događaju kemijske reakcije i/ili promjene agregatnih stanja nužno je u obzir uzeti i utjecaj izvora topline koji se javljaju kao posljedica kemijskih reakcija i promjena agregatnog stanja. Tada se koristi nehomogena valna jednadžba koja glasi [18]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2 T_0} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho=\text{konst.}} - \frac{\partial Q_w}{\partial T} - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (40)$$

U jednadžbi (40) desna strana jednadžbe predstavlja različite izvore zvuka u fluidu. Prvi član desne strane odgovara toplinskom širenju fluida koje je posljedica toplinskih izvora nastalih uslijed kemijskih reakcija i/ili promjena agregatnog stanja. Drugi član desne strane odgovara neuniformnom i nestacionarnom polju masenih sila koje najčešće nastaje kao posljedica gibanja čvrstog tijela unutar fluida. Jasno je da u kasnijim simulacijama kojima se bavi ovaj diplomski rad nema nikakvih kemijskih reakcija niti promjena faza fluida pa niti toplinskih izvora te je prvi član lijeve strane jednadžbe (40) moguće potpuno zanemariti.

2.3. Elementarna rješenja valne jednadžbe

U ovom poglavlju promatrat će se dva elementarna rješenja homogene valne jednadžbe (jednadžba (34)) koja će se poslije koristiti za dobivanje složenijih rješenja:

- ravninski valovi
- sferno simetrični valovi.

2.3.1. Ravninski valovi

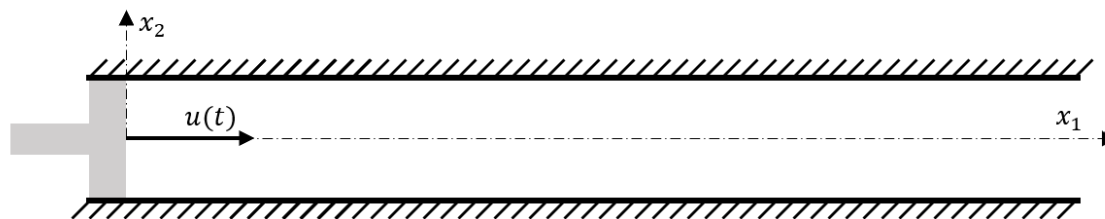
Ravninski valovi su valovi u kojima su vrijednosti svih akustičkih veličina jednake u svakoj ravnini okomitoj na smjer širenja valova. Primjer ovakvog vala je prikazan na slici 1. Neka je smjer širenja poremećaja paralelan s prostornom osi x_1 . Tada jednadžba (34) postaje

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} = 0, \quad (41)$$

koja se još naziva i jednodimenzijaska homogena valna jednadžba. Za ovu jednadžbu postoji opće rješenje koje se naziva i d'Alambertovo rješenje [17]

$$p'(x_1, t) = f(x_1 - c_0 t) + g(x_1 + c_0 t), \quad (42)$$

gdje funkcija f opisuje širenje zvuka u pozitivnom, a g u negativnom smjeru osi x_1 . Oblik funkcija f i g ovisi o rubnim i početnim uvjetima, ali lančanim deriviranjem se vrlo lako može pokazati da kakvog god oblika one bile, zadovoljavaju jednadžbu (41). Za ilustraciju ravninskih valova može se zamisliti savršeno krutu polubeskonačna cijev konstantnog poprečnog presjeka s osi u smjeru osi x_1 ispunjenu mirujućim fluidom. Neka se na jednom kraju cijevi, u ishodištu koordinatnog sustava, nalazi pomični klip, dok se drugi kraj cijevi proteže u beskonačnost kao što je prikazano na Slika 5.



Slika 5 Polubeskonačna cijev s klipom u ishodištu

U nekom trenutku klip se krene gibati u smjeru osi x_1 brzinom $u(t)$. Pošto je cijev polubeskonačna, ne postoji mogućnost refleksije poremećaja s desne na lijevu stranu te stoga ne postoje poremećaji koji se šire u negativnom smjeru osi x_1 . Stoga je po definiciji $g = 0$.

Koristeći jednadžbu (29) može se pokazati da vrijedi [18]:

$$p' = \rho_0 c_0 v_1, \quad (43)$$

gdje se umnožak $\rho_0 c_0$ naziva specifična akustička impedancija.

Brzina čestica na klipu (na koordinati $x_1 = 0$) mora biti jednaka brzini klipa, odnosno

$$v_1(0, t) = u(t), \quad (44)$$

pa se, koristeći jednadžbe (42) – (44), dobiva

$$p' = \rho_0 c_0 u(t - x_1/c_0). \quad (45)$$

Posebno važno rješenje se dobiva ukoliko je gibanje klipa harmonijsko. Tada je i poremećaj tlaka harmonijskog karaktera te se može zapisati u kompleksnom obliku

$$p' = \hat{p} e^{i\omega t - ikx_1}, \quad (46)$$

gdje je \hat{p} kompleksna amplituda tlaka, ω kružna frekvencija gibanja klipa, a $k = \omega/c_0$ valni broj.

2.3.2. Sferno simetrični valovi

Drugo zanimljivo rješenje homogene valne jednadžbe su sferno simetrični valovi. Ako se zamisli sfera konačno malog radijusa a_0 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, koja pulsira u mirujućem fluidu može se dobiti fizikalna interpretacija sferno simetričnih valova. Obzirom da su valovi sferno simetrični, sve akustičke veličine mogu biti samo funkcije vremena i radijusa. Nakon prebacivanja u sferni koordinatni sustav i eliminacije svih parcijalnih derivacija po kutovima φ i θ homogena valna jednadžba poprima oblik [18]

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'r}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'r}{\partial r^2} = 0. \quad (47)$$

Ovakav oblik valne jednadžbe znači da polje $p'r$ mora zadovoljiti standardnu jednodimenzijsku homogenu valnu jednadžbu pa se ponovno može primijeniti d'Alambertovo rješenje u obliku

$$p' = \frac{1}{r} \left[f \left(t - \frac{r}{c_0} \right) + g \left(t + \frac{r}{c_0} \right) \right]. \quad (48)$$

I u ovom slučaju se funkcije f i g određuju iz početnih i rubnih uvjeta, pri čemu funkcija f predstavlja valove koji se šire od središta sfere, a g valove koji se šire prema središtu sfere. Ukoliko ne postoji refleksija, ne postoje niti valovi koji se šire prema središtu sfere pa je g ponovno jednako 0. Ponovno, od posebnog interesa su valovi koje odašilje sfera čije je pulsiranje harmonijsko tako da je radijus sfere a u svakom trenutku definiran izrazom.

$$a = a_0 + \hat{a} e^{i\omega t}, \quad (49)$$

pri čemu je \hat{a} amplituda pulsacija. Može se pokazati da je u tom slučaju polje poremećaja tlaka jednako [18]

$$p' = \frac{A}{r} e^{i\omega t - ikr}, \quad (50)$$

gdje je A u ovom trenutku nepoznata amplituda. Sada se, analizirajući radijalnu komponentu jednadžbe očuvanja gibanja (29), može dobiti

$$v_r = \frac{p'}{\rho_0 c_0} \left(1 - \frac{i}{kr} \right). \quad (51)$$

Iz jednadžbe (51) slijedi da, za velike iznose umnoška $kr \gg 1$, vrijedi ista veza između polja radijalne brzine i polja akustičkog tlaka kod sferno simetričnih valova kao i kod ravninskih valova. Dodatno, s velikim radijusima drastično opada zakrivljenost valne fronte pa u tom slučaju sferno simetrične valove možemo promatrati kao lokalno ravninske valove. Područje prostora u kojem je ovo moguće provesti naziva se daleko polje i obično se kao granica uzima vrijednost radijusa $r = \lambda$. S druge pak strane, za male vrijednosti umnoška $kr \ll 1$ brzina v_r je inverzno proporcionalna kvadratu radijusa, što je ponašanje karakteristično za nestlačiva strujanja [18]. U akustici se ovo područje naziva bliskim poljem.

Obzirom da se brzina pulsiranja površine sfere može vrlo lako dobiti deriviranjem jednadžbe (49) i da radijalna komponenta brzine fluida mora biti jednaka brzini površine sfere uz sferu, korištenjem izraza (50) i (51), može se dobiti izraz

$$p' = -\frac{\rho_0 \omega^2 a_0 \hat{a} a_0}{1 + ika_0 r} e^{i\omega t - ik(r-a_0)}, \quad (52)$$

koji se uz algebarske manipulacije može preoblikovati u izraz

$$p' = \frac{i\omega\rho_0\Phi_V}{4\pi r} e^{i\omega t - ik(r-a_0)}, \quad (53)$$

gdje je Φ_V volumni protok koji uzrokuje pulsiranje sfere. Ovakav izvor zvuka uobičajeno se naziva monopol, a akustičko polje koje proizvodi monopolno zvučno polje. O karakteristikama monopolnog izvora zvuka će biti rečeno više u sljedećem poglavlju.

2.4. Izvori zvuka

U prethodnom poglavlju su izvedene osnovne jednačbe koje opisuju monopolni izvor zvuka. Ovo poglavlje će se najprije baviti njegovim osnovnim karakteristikama i fizikalnim interpretacijama, a nakon toga će se kombiniranjem više monopolnih izvora izvesti jednačbe i za druge važne izvore zvuka: dipole i kvadrupole.

2.4.1. Monopol

U stvarnom svijetu, monopolno zvučno polje može nastati kao posljedica izgaranja ili sličnih kemijskih reakcija i odgovara prvom članu desne strane nehomogene valne jednačbe. Također, monopolni izvor zvuka odgovara točkastom izvoru koji je jedan od osnovnih elemenata u aerodinamičkom modeliranju panelnim metodama [18]. Pri tome valja naglasiti da isključivo izvori promjenjivog intenziteta stvaraju zvuk. Ovo se može vrlo jednostavno objasniti činjenicom da stacionarna strujanja po definiciji ne proizvode zvuk pošto u njima nema vremenskih oscilacija tlaka.

Obzirom da se radi o posebnom slučaju sferno simetričnih valova, monopolni izvor zvuk ispušta jednake glasnoće u svim smjerovima kao što se može vidjeti na Slika 6 a).

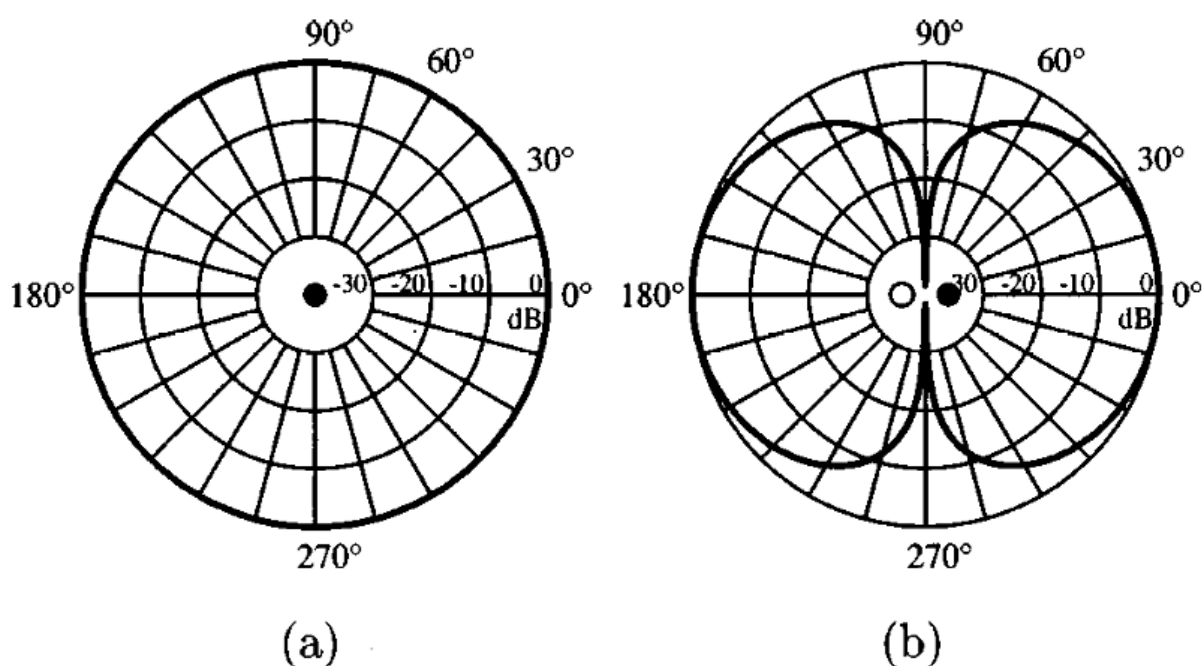
2.4.2. Dipol

Dipolni izvor zvuka se može zamisliti kao dva monopolna izvora zvuka jednake jakosti, ali suprotne faze smještena na maloj udaljenosti jedan od drugoga. U matematičkom smislu dipolno zvučno polje predstavlja prvu prostornu derivaciju monopolnog zvučnog polja pa je polje poremećaja tlaka dipolnog izvora jednako

$$p' = -i \frac{\omega \rho_0 \Phi_V}{4\pi r} kd \cos \theta e^{i(\omega t - k(r - a_0))}, \quad (54)$$

gdje je d udaljenost između dva monopola, a θ usmjerenost dipola. Za razliku od monopola, dipoli niti u jednom trenutku ne proizvode neto maseni protok fluida pošto sav fluid koji jedan monopol ispusti drugi dipol suprotne faze istovremeno usiše [19]. Umjesto toga, dipoli nastaju kao posljedica djelovanja neuniformnog i nestacionarnog polja sila na fluid, odnosno odgovaraju drugom članu desne strane jednadžbe (40). Tipičan primjer pojave koja uzrokuje ovakvo zvučno polje je gibanje čvrstog tijela u fluidu.

Za razliku od monopola koji emitira jednaku razinu zvuka u svim smjerovima, dipolno zvučno polje je usmjereno na način da u smjeru okomitom na spojnicu dvaju monopola od kojih se sastoji dipol nema emitiranog zvuka, dok je najviša razina akustičkog tlaka emitirana u pravcu spojnice, kao što prikazuje Slika 6 b).



Slika 6 Usmjerenost zvučnog polja: monopola (a) i dipola (b) [19]

2.4.3. Kvadrupoli

Slično kao što se kombinacijom dvaju monopola može dobiti dipol, kombinacijom dvaju dipola suprotne faze se dobiva kvadrupol. Ipak, za razliku od monopola koji emitira sferno simetrično zvučno polje, zvučno polje dipola je prostorno usmjereno pa različiti prostorni rasporedi dvaju dipola rezultiraju različitim zvučnim poljima. Pri tome se uobičajeno ističu dvije vrste

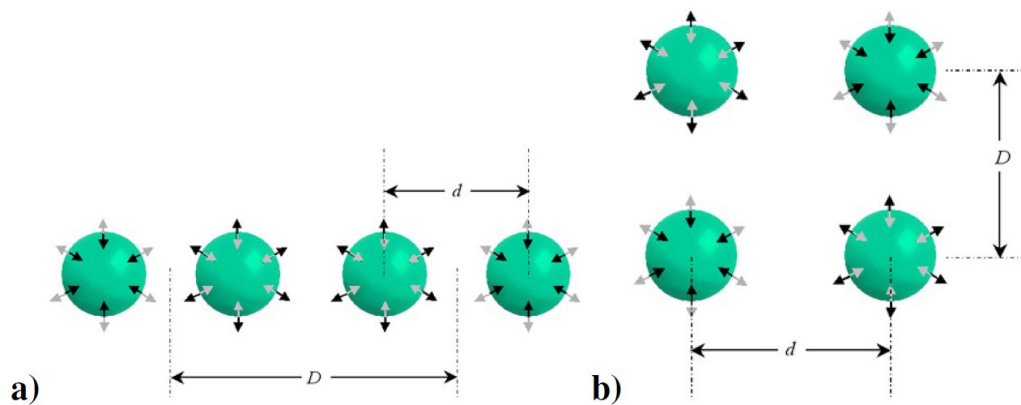
kvadrupola: longitudinalni i lateralni [18], [19]. Raspored dipola u longitudinalnim i lateralnim kvadrupolima je prikazan na Slika 7.

Amplituda akustičkog tlaka lateralnih kvadrupola može se opisati jednačbom [19]

$$|p'| = \frac{\omega\rho_0\Phi_V}{4\pi r} 4k^2 dD \cos\theta \sin\theta, \quad (55)$$

dok za longitudinalne kvadrupole vrijedi

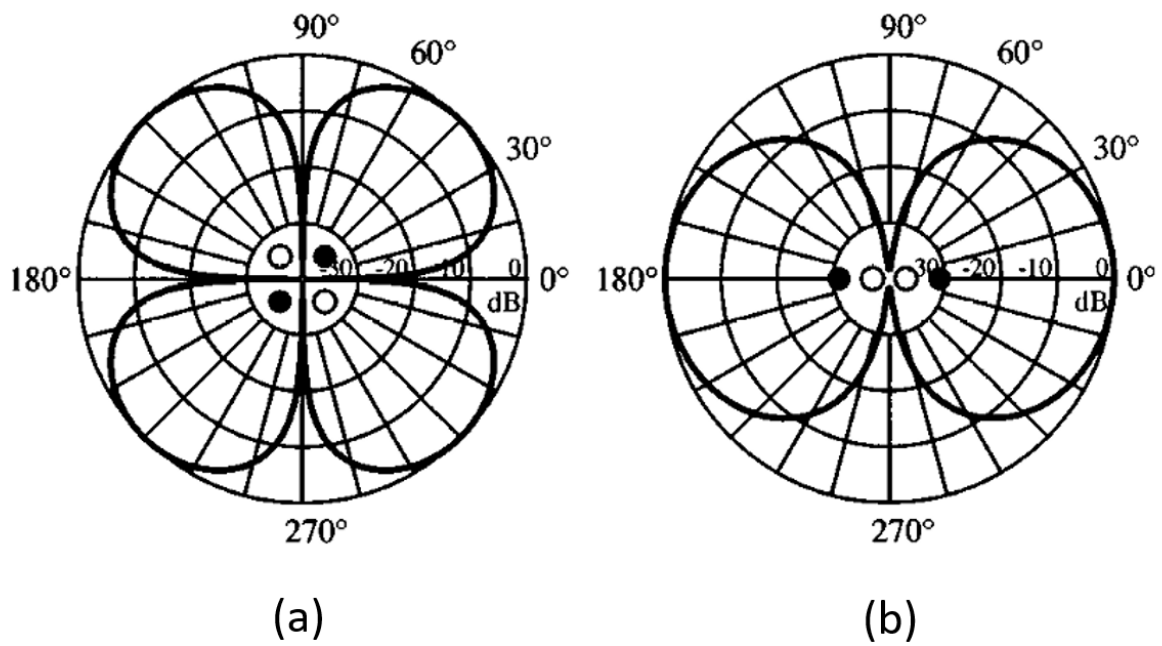
$$|p'| = \frac{\omega\rho_0\Phi_V}{4\pi r} 4k^2 dD \cos^2\theta. \quad (56)$$



Slika 7 Raspored dipola u longitudinalnom (a) i lateralnom (b) kvadrupolu [20]

Usmjerenost zvučnog polja longitudinalnog kvadrupola je vrlo slična dipolu, dok lateralni kvadrupol ima četiri smjera u kojima emitira zvuk kao što se može vidjeti na Slika 8.

U oba slučaja kvadrupolnih izvora zvuka nema neto protoka niti resultantne sile na fluid. Kvadrupolni izvori opisuju zvuk koji nastaje zbog oscilirajućih naprezanja u fluidu koja se standardno vežu za strujanja s velikim turbulencijama kakva se javljaju primjerice u vrtložnom tragu krila i posebice propelera [18].



Slika 8 Usmjerenost zvučnog polja: lateralnog (a) i longitudinalnog (b) kvadrupola [19]

3. RAČUNALNA AEROAKUSTIKA

3.1. Uvod

U prethodnom poglavlju je dan pregled osnovnih veličina kojima se opisuje glasnoća zvuka te pregled jednadžbi koje opisuju nastanak i širenje zvuka u fluidu. Na kraju poglavlja su iznesena i teoretska razmatranja izvora zvuka koja će biti vrlo korisna i pri daljnjem numeričkom modeliranju zvuka.

Računalna aeroakustika (skraćeno CAA, od eng. *Computational AeroAcoustics*) obuhvaća vrlo široku lepezu pristupa i metoda modeliranju aerodinamičke buke od kojih za sada niti jedan nije općeprihvaćen kao najbolji. Neki od značajnijih pristupa su izravne numeričke simulacije (DNS), linearizirane Eulerove jednadžbe, hibridne metode i razne poluempirijske [18]. Pošto je broj različitih metoda vrlo velik i izvan opsega ovog rada, u ovom poglavlju će se više pozornosti posvetiti dvama metodama: izravnim numeričkim simulacijama i hibridnim metodama uparenim s računalnom dinamikom fluida (CFD). DNS metode su značajne za detaljnije razmatranje jer one teoretski daju najtočnija predviđanja aerodinamičke buke, ali istovremeno vrlo dobro ocrtavaju ključne probleme računalne aeroakustike s kojima se susreću i druge metode. S druge strane, praktični dio ovog rada se zasniva na hibridnim metodama spregnutima s CFD-om pa je i najveći dio ovog poglavlja posvećen upravo tim metodama.

3.2. Izravne numeričke simulacije

Izravne numeričke simulacije (skraćeno DNS, od eng. *Direct Numerical Simulations*) se zasnivaju na numeričkom rješavanju stlačivih, potpuno spregnutih Navier-Stokesovih jednadžbi upotpunjen s konstitutivnim jednadžbama (poglavlja 2.2.1 i 2.2.2) zbog čega je ovaj pristup sličan klasičnim CFD simulacijama. Teoretski bi ovaj pristup, pošto ne uvodi nikakve pretpostavke, trebao davati najtočnija rješenja, ali se danas vrlo rijetko koristi.

Glavni razlog za rijetku upotrebu izravnih simulacija je potreba za ogromnim računalnim resursima. Dodatni problem za aeroakustičke izravne simulacije je taj da, premda na prvi pogled ove simulacije izgledaju po prirodi vrlo slične CFD simulacijama, većinu rubnih uvjeta i diskretizacijskih tehnika koje se standardno primjenjuju u CFD-u nije moguće primijeniti u ovakvim simulacijama. Problem s korištenjem rubnih uvjeta iz CFD-a je u tome što većina rubnih uvjeta izaziva umjetnu refleksiju akustičkih valova narušavajući tako dobivene rezultate. Dodatno, diskretizacijske tehnike korištene u CFD-u izazivaju umjetno gušenje akustičkih

valova tako da već nakon nekoliko valnih duljina valovi počinju gubiti svoj intenzitet, zbog čega su daleka akustička polja dobivena ovim putem praktično beskorisna [18].

3.3. Hibridne metode

Osnovna ideja hibridnih metoda računalne aeroakustike je razdvojiti fenomen nastanka zvuka od širenja zvuka. Na ovaj način se mogu pojednostaviti jednadžbe za propagaciju zvuka koje je potrebno rješavati na velikom području dalekog akustičkog polja, dok je složene jednadžbe dinamike fluide nužno rješavati isključivo u bliskom polju gdje zvuk nastaje.

Osnovni preduvjet da bi se jednadžbe mogle ovako raspregnuti je da ne postoji povratni utjecaj širenja akustičkih valova na samo strujanje. Kako kod strujanja pri malim Machovim brojevima akustička energija iznosi približno 1% ukupne energije strujanja [21], jasno je da, ako i postoji utjecaj zvuka na strujanje, on se može zanemariti.

U nastavku slijedi poglavlje o modeliranju izvora zvuka, a zatim i nekoliko metoda kojima se može modelirati propagacija zvuka.

3.3.1. Modeliranje izvora zvuka

Za određivanje jakosti izvora zvuka potrebno je isključivo poznavati standardne veličine koje se koriste u dinamici fluida: tlak, brzinu i gustoću fluida. Zbog toga je za određivanje strujanja u bliskom akustičkom polju najpraktičnije koristiti simulacije računalne dinamike fluida (CFD). Pri tome, ukoliko se promatraju samo zvučni valovi koji čvrsto tijelo uronjeno u fluid, odnosno ako se ne promatra refleksija valova s površine tijela, moguće je koristiti nestlačive modele strujanja [22].

Posebnu pozornost pri modeliranju izvora buke pomoću treba obratiti na modeliranje turbulencije. Za modeliranje buke niže frekvencije, koja u pravilu nosi i najveći dio akustičke energije, uspješno se koriste modeli koji proizlaze iz nestacionarnog Reynoldsovog uprosječivanja Navier-Stokesovih jednadžbi (URANS, od eng. *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*) kao i modeli bazirani na simuliranju velikih vrtloga (LES, od eng. *Large Eddy Simulation*) [22]. Ukoliko se pak promatraju i zvukovi viših frekvencija, korištenje navedenih modela je najčešće neisplativo zbog potrebne prevelike profinjenosti mreže pa je u tom slučaju moguće koristiti stacionarne RANS modele za računanje turbulentne kinetičke energije dopunjene stohastički generiranom bukom (SNGR, od eng. *Stochastic Noise Generation and*

Radiation). Kako su u praktičnom dijelu rada korišteni URANS modeli turbulencije, u nastavku slijedi pregled korištenih modela turbulencije.

Premda postoje i algebarski modeli turbulencije, danas se gotovo isključivo primjenjuju diferencijalni modeli turbulencije s dvije jednačbe (postoje i modeli s jednom jednačbom, primjerice Spalart-Allmaras model turbulencije, ali on se također nešto rjeđe koristi). U većini diferencijalnih modela turbulencije s dvije jednačbe prva jednačba predstavlja transportnu jednačbu turbulentne kinetičke energije k . U nastavku su opisani neki od najčešće korištenih modela turbulencije, a koji su korišteni i u praktičnom dijelu rada.

3.3.1.1. $k - \varepsilon$ model turbulencije

U $k - \varepsilon$ modelu turbulencije druga jednačba, uz transportnu jednačbu turbulentne kinetičke energije, je transportna jednačba disipacije turbulentne kinetičke energije ε . Ovdje se neće ulaziti u izvod jednačbi modela turbulencije nego će se samo dati pregled jednačbi koje se koriste u programskom paketu *OpenFOAM*. Jednačbe su preuzete iz literature [23].

Transportna jednačba turbulentne kinetičke energije glasi

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \quad (57)$$

gdje se kinematička turbulentna viskoznost ν_t , koja je za razliku od molekularne viskoznosti svojstvo strujanja, a ne medija, može računati prema izrazu

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (58)$$

Transportna jednačba disipacije turbulentne kinetičke energije glasi

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (59)$$

U jednačbama (57) i (59) pojavljuju se operatori materijalne derivacije D/Dt , koja se za bilo koje skalarno polje ϕ može zapisati kao zbroj lokalne i konvektivne promjene:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \quad (60)$$

Dodatno, pošto se radi s vremenski osrednjenim brzinama, u jednačbama (57) i (59) se koristi oznaka \bar{v}_j . U jednačbama (57) – (59) se javljaju i pet konstanti čiji su iznosi dobiveni eksperimentalnim putem: $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_1 = 1.44$ i $C_2 = 1.92$.

3.3.1.2. $k - \omega$ model turbulencije

Umjesto disipacije turbulentne kinetičke energije ε , u $k - \omega$ modelu turbulencije se uz turbulentnu kinetičku energiju modelira brzinu disipacije turbulentne kinetičke energije. Slično kao i kod $k - \varepsilon$ modela, ni ovdje se neće ulaziti u izvod jednadžbi nego će biti prikazan pregled jednadžbi modela preuzetih iz [24]. Transportna jednadžba turbulentne kinetičke energije za nestlačiva strujanja u ovom modelu glasi

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega, \quad (61)$$

dok transportna jednadžba brzine disipacije turbulentne kinetičke energije glasi

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \beta \frac{\omega^2}{k} \\ + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (62)$$

U jednadžbama (61) i (62) ponovno se pojavljuje materijalna derivacija pa se jednadžbe mogu još dodatno raspisati koristeći jednadžbu (60). Turbulentna kinetička viskoznost u ovom se slučaju računa prema formuli

$$\nu_t = \frac{k}{\tilde{\omega}}, \quad (63)$$

gdje je $\tilde{\omega}$ efektivna brzina disipacije turbulentne kinetičke energije izračunata prema

$$\tilde{\omega} = \max \left(\omega, C_{lim} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)}{\beta^*}} \right). \quad (64)$$

U jednadžbama (61), (62) i (64) pojavljuju se koeficijenti σ^* , β^* , α , σ , β , σ_d i C_{lim} koji se određuju eksperimentalno, a čije se iznose može pronaći u [24].

3.3.1.3. $k - \omega$ SST model turbulencije

Premda su oba prethodno opisana modela turbulencije vrlo popularna, oba imaju i svoje značajne probleme [25]. Jedan od glavnih nedostataka $k - \varepsilon$ modela je relativno loše predviđanje pojave odvajanja strujanja uslijed nepovoljnih gradijenata tlaka. Dodatan nedostatak modela je povezan s numeričkom krutošću jednadžbi što značajno otežava njihovo rješavanje u pojedinim dijelovima graničnog sloja.

S druge strane, glavni nedostatak $k - \omega$ modela je pretjerana osjetljivost na vrijednosti ω_f zadane rubnim uvjetima na ulasku u domenu.

Kako bi se eliminirali nedostaci ovih modela razvijen je $k - \omega$ SST model turbulencije koji u blizini čvrste stijenke koristi točniji $k - \omega$ model turbulencije, dok podalje od stijenke koristi $k - \varepsilon$ model turbulencije. Ovo se postiže tako da se jednačbe (57) i (59) najprije preurede u oblik u kojem se disipacija turbulentne kinetičke energije zamijeni s brzinom disipacije turbulentne kinetičke energije na način sličan jednačbama (61) i (62), ali s različitim koeficijentima.

Sada se za svaki član uzima koeficijent koji se dobiva linearnom kombinacijom koeficijenata $k - \varepsilon$ i $k - \omega$ modela. Pri tome za svaki koeficijent ψ vrijedi

$$\psi = F_1 \psi_1 + F_2 (\psi_2 - 1), \quad (65)$$

gdje se koeficijenti s indeksom 1 odnose na $k - \varepsilon$ model, a s indeksom 2 na $k - \omega$ model turbulencije. Težinska funkcija F_1 se računa prema izrazu

$$F_1 = \tanh x^4, \quad (66)$$

gdje je argument težinske funkcije x određen izrazom

$$x = \max \left(\min \left(\frac{\sqrt{k}}{\omega y}, 0.45 \frac{\omega}{\Omega} \right), \frac{400\nu}{y^2 \omega} \right). \quad (67)$$

U jednačbi (67) varijabla y predstavlja udaljenost od stijenke, dok je Ω magnituda vektora vrtložnosti. Slično kao i za druge modele turbulencije niti ovdje se nije ulazilo u detalje izvoda jednačbi za što se preporuča literatura [25].

3.3.2. Modeliranje širenja zvuka

U prethodnom poglavlju je opisano modeliranje izvora zvuka u hibridnim metodama računalne aeroakustike koje se najčešće svodi na standardne CFD simulacije. Kao rezultat takvih simulacija dobivaju se polja tlaka i brzine (ukoliko se radi o stlačivim simulacijama i polje gustoće) pri čemu polje tlaka sadrži i oscilatorni dio koji predstavlja zvuk.

Ovakvi rezultati se mogu izravno koristiti za rekonstrukciju zvuka u bliskom akustičnom polju, ali ne i za daleko akustično polje. Za dobivanje zvuka u dalekom akustičnom polju, potrebno je iz dobivenih polja brzine i tlaka rekonstruirati akustičke izvore opisane u poglavlju 2.4. Za dobivanje ovih izvora najčešće se koristi neka od aeroakustičkih analogija opisanih u sljedećim potpoglavljima.

3.3.2.1. Lighthillova analogija

Kako bi predvidio daleko akustičko polje uzrokovano ispuhom mlaznih motora, James Lighthill je 1952. godine razvio poseban pristup kojim je razdvojio širenje zvuka od njegovog nastanka uslijed gibanja fluida i taj pristup nazvao akustička analogija. U izvodu svoje analogije [26] Lighthill kreće od poznatih, osnovnih jednadžbi dinamike fluida: jednadžbe kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (68)$$

i jednadžbe očuvanja količine gibanja, zanemarujući pri tome masene sile

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (69)$$

Ukoliko se jednadžbi (69) doda član $c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$, jednadžba se može zapisati u obliku

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (70)$$

gdje je T_{ij} Lighthillov tenzor naprezanja

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}. \quad (71)$$

Koristeći jednadžbu (13), tenzor naprezanja se može zapisati u obliku

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \Sigma_{ij}, \quad (72)$$

pa izraz za Lighthillov tenzor naprezanja postaje

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \Sigma_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}. \quad (73)$$

Sada se deriviranjem jednadžbe (68) po vremenu i oduzimanjem divergencije jednadžbe (70) može dobiti jednadžba

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (74)$$

koja svojim oblikom predstavlja nehomogenu valnu jednadžbu, a često se naziva i Lighthillova valna jednadžba. Vidljivo je da je Lighthill kao primarnu akustičku varijablu izabrao gustoću, ali je često praktičnije promatrati tlak pa se jednadžba (74) može zapisati i u obliku [20]

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\rho v_i v_j - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p - c_0 \rho - \Sigma_{ij}) \right]. \quad (75)$$

Ukoliko se pretpostavi da su svi članovi Lighthillovog tenzora napreznja poznati i neovisni o lijevoj strani jednadžbe (74), jednadžba se može riješiti analitički pomoću općeg rješenja oblika [22]

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y}_i, \tau)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y}, \quad (76)$$

gdje je \mathbf{x} vektor koordinata u kojoj se računaju oscilacije gustoće, V blisko akustičko polje u kojem se nalaze izvori zvuka, $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ udaljenost između točke u kojoj se računaju oscilacije gustoće i pojedinog izvora zvuka, a $\tau = t - \frac{r}{c_0}$ argument d'Alambertovog rješenja za sferno simetrične valove.

Glavni nedostatak Lighthillove analogije proizlazi iz njene namjene proučavanja buke mlazova. Pošto se kod mlazova radi o jednostavnoj geometriji bez stijenki, za Lighthillov problem nije bilo potrebno razviti metodu kojom bi se uzelo u obzir čvrste stijenske. Ovaj nedostatak je kasnije razriješen drugim aeroakustičkim analogijama.

3.3.2.2. Curleova analogija

Prva aeroakustička analogija koja se uhvatila u koštac s je Curleova analogija koju pojedini autori ni ne nazivaju zasebnom analogijom jer proizlazi iz Lighthillove analogije pa ju nazivaju Curleovom formulacijom ili jednostavno Curleovom jednadžbom.

U svojim razmatranjima Newby Curle je u obzir uzeo čvrste nepomične stijenske zbog čega izvod njegove analogije ima dva dodatna koraka u odnosu na Lighthillovu analogiju [26]. Prvi korak je dodavanje površinskog integrala koji u obzir uzima čvrste stijenske pomoću Kirchoff-Helmholtzove formule, a drugi korak je transformacija iz koordinatnog sustava izvora zvuka u koordinatni sustav promatrača. Na taj način se dobiva konačan izraz

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{1}{r} T_{ij}(\mathbf{y}_i, \tau) d\mathbf{y} - \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{n_j}{r} (p\delta_{ij} - \Sigma_{ij}) d\mathbf{y}, \quad (77)$$

gdje je n_j jedinični vektor normale na površinu krutog tijela usmjeren prema fluidu.

Curleova analogija uvođenjem nepomičnih čvrstih stijenki značajno proširuje mogućnosti Lighthillove analogije na kojoj je utemeljena, ali i dalje nije dovoljna kako bi se analizirala buka tijela u gibanju poput propelera bespilotnih letjelica.

3.3.2.3. Ffowcs-Williamsova i Hawkingsova analogija

Dodatno proširenje Lighthillove analogije koje omogućuje promatranje zvuka proizvoljno gibajućih čvrstih tijela uveli su Ffowcs-Williams i Hawkings. Za izvod njihove analogije [27], najprije je potrebno opisati gibanje proizvoljne površine $S(t)$ funkcijom $h(x_i, t)$ na način da je

$$\begin{cases} h > 0, \text{ ako je } x_i \text{ unutar } S(t) \\ h = 0, \text{ ako je } x_i \text{ na } S(t) \\ h < 0, \text{ ako je } x_i \text{ izvan } S(t). \end{cases} \quad (78)$$

Konačni izraz njihove analogije u diferencijalnom obliku glasi

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_0 U_n \delta(h)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(h)] - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij} H(h)], \quad (79)$$

gdje je $\delta(h)$ Diracova delta-funkcija, a $H(h)$ Heavisideova jedinična *step*-funkcija. U jednadžbi (79) pojavljuje se jakost monoplnih izvora zvuka U_n

$$U_n = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) u_n + \frac{\rho}{\rho_0} v_n, \quad (80)$$

jakost dipolnih izvora zvuka L_i

$$L_i = p n_i + \rho v_i (v_n - u_n), \quad (81)$$

i Lighthillov tenzor naprezanja T_{ij} koji u suštini predstavlja jakost kvadrupolnih izvora zvuka

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \Sigma_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}. \quad (82)$$

U jednadžbama (80) – (82) u_n predstavlja brzinu gibanja površine $S(t)$ u smjeru njene normale, dok je v_n brzina strujanja u smjeru normale na površinu $S(t)$. Prethodno definirana površina $S(t)$ može biti nepromočiva stijenka nekog krutog tijela koje se giba uronjeno u fluid, ali može predstavljati i zamišljenu promočivu plohu. Jedina bitna stvar u tom slučaju je da površina obuhvaća sve izvore zvuka koji se proučavaju.

Postoji više formulacija integralnog oblika jednadžbe (79), a ovdje je prikazana Farassatova 1A [28] formulacija koja se najčešće koristi pri analizi buke propelera

$$\begin{aligned} 4\pi p'(\mathbf{x}, t) = & \int_{h=0} \left[\frac{\rho_0 (\dot{U}_n + U_{\dot{n}})}{r(1-M_r)^2} \right]_{t=\tau} dS + \int_{h=0} \left[\frac{\rho_0 U_n (r\dot{M}_r + c(M_r - M^2))}{r^2(1-M_r)^3} \right]_{t=\tau} dS + \\ & \frac{1}{c_0} \int_{h=0} \left[\frac{L_r}{r(1-M_r)^2} \right]_{t=\tau} dS + \int_{h=0} \left[\frac{L_r - L_M}{r^2(1-M_r)^2} \right]_{t=\tau} dS + \\ & \frac{1}{c_0} \int_{h=0} \left[\frac{L_r (r\dot{M}_r + c(M_r - M^2))}{r^2(1-M_r)^3} \right]_{t=\tau} dS. \end{aligned} \quad (83)$$

U jednadžbi (83) pojavljuju se vremenske derivacije članova \dot{U}_n , \dot{L}_i i Machovog broja \dot{M} , indeks r u članovima L_r i M_r označavaju da se radi o projekciji člana u smjeru vektora r_i koji spaja

točku izvora s promatračem, dok indeks n označava projekciju člana u smjeru normale na površinu $S(t)$.

Kod primjene hibridnih metoda koje koriste FW–H analogiju, uobičajeno je kao površinu $S(t)$ definirati nepomičnu sferu koja obuhvaća blisko akustično polje (područje u kojem se provodi CFD simulacija). Tada se jednačba (83) značajno pojednostavljuje [29]

$$4\pi p'(\mathbf{x}, t) = \int_{h=0} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{r} \right]_{t=\tau} dS + \frac{1}{c_0} \int_{h=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{r} \right]_{t=\tau} dS + \int_{h=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{r^2} \right]_{t=\tau} dS. \quad (84)$$

Valja primijetiti da se Lighthillov tenzor naprezanja i s njime povezani kvadrupolni izvori zvuka ne pojavljuju eksplicitno u jednačbi (83), ali njihov utjecaj se i dalje očituje u oscilacijama tlaka koje utječu na dipolne izvore [29]. Ipak, pošto je interakcija propelera u vrtložnom tragu primarna tema praktičnog dijela ovog rada, a upravo su kvadrupoli dominantni izvori buke u vrtložnom tragu, u analizi strujanja će se zasebno modelirati i Lighthillov tenzor naprezanja prema izrazu (73).

4. STACIONARNA SIMULACIJA S VIŠESTRUKIM KOORDINATNIM SUSTAVIMA

4.1. Uvod

Kao što je ustanovljeno u prethodnim poglavljima, zvuk je nestacionarna pojava i shodno tome prirodno je za simulacije buke koristiti tranzijentne CFD simulacije¹. Stoga rezultati stacionarne simulacije opisane u ovom poglavlju još uvijek ne predstavljaju sliku strujanja iz koje je moguće modelirati jakost izvora buke. Ipak, ova simulacija je nužno pošto se polja brzine i tlaka dobivena njom mogu se iskoristiti kao početni uvjeti u tranzijentnoj simulaciji što značajno ubrzava konvergenciju tranzijentne simulacije čime se smanjuju potrebni računalni resursi.

U ovom poglavlju će najprije biti opisana geometrija propelera i izrada CAD modela. Nakon toga će se opisati izrada mreže sa svim posebnostima simulacije s višestrukim koordinatnim sustavima te korišteni rubni uvjeti. Poslije rubnih uvjeta, opisat će se i posebnosti CFD simulacija s rotirajućim koordinatnim sustavom, a na kraju će biti prikazani rezultati simulacije te njihova usporedba s eksperimentalno dobivenim aerodinamičkim karakteristikama propelera pri 5000 okretaja u minuti.

4.2. Geometrija propelera

4.2.1. Podatci o geometriji propelera

Za analizu je odabran propeler APC 11x8 proizvođača Advanced Precision Composites s dva kraka. Prvi broj u oznaci propelera označava da promjer propelera iznosi 11 inča, odnosno 279.4 mm, dok drugi broj predstavlja korak propelera koji u ovom slučaju iznosi 8 inča, odnosno 203.2 mm [30].

Proizvođač propelera daje geometrijske podatke o propeleru na način da su na određenom radijusu propelera zadani podatci o duljini tetive, kutu uvijanja te koordinate napadnog ruba u smjeru osi rotacije (z – koordinata) i u smjeru okomitom i na os rotacije i na radijus poprečnog presjeka (x – koordinata). Podatci o geometriji propelera su prikazani u Tablica 1.

Također, prema podacima proizvođača [32], promjer glavčine propelera iznosi 1 inč (25.4 mm) što znači da podatci u Tablica 1 nisu sami po sebi dovoljni da bi se definirala potpuna geometrija

¹ Nije nužno koristiti tranzijentne simulacije, uz korištenje poluempirijskih metoda poput SNGR-a opisanog u poglavlju 3.3.1. u pojedinim slučajevima je moguće i stacionarnim simulacijama dobiti kvalitetnu simulaciju buke, ali većina autora u ovom području preferira tranzijentne CFD simulacije za modeliranje izvora buke.

kraka propelera, odnosno potrebno je dodati karakteristike propelera na radijusima između 12.7 i 35.814 mm. Kako podatci proizvođača za te presjeka nisu dostupni u trenutku pisanja ovog rada, dodano je pet presjeka čime se postiže da konačni izgled propelera bude što sličniji dostupnim fotografijama propelera. Podatci o dodanim presjecima su prikazani u Tablica 2.

Tablica 1 Podatci o geometriji propelera [31]

Radijus (mm)	Tetiva (mm)	Uvijanje (°)	x – koordinata (mm)	z – koordinata (mm)
35.814	23.35022	39.0857	13.3096	10.24128
37.592	23.23592	38.338	13.56106	10.1219
39.37	23.14448	37.6061	13.80744	9.99998
41.148	23.07082	36.8877	14.0462	9.87806
42.926	23.01494	36.1808	14.26464	9.75106
44.704	22.97938	35.4836	14.46276	9.62406
47.00524	22.95144	34.5934	14.62786	9.45642
50.52568	22.95398	33.2521	14.7574	9.19226
54.06644	22.9997	31.9226	14.84376	8.92048
57.6072	23.07336	30.6064	14.88186	8.64108
61.14796	23.1648	29.2992	14.86154	8.35406
64.68872	23.26132	28.004	14.78026	8.05688
68.22948	23.35022	26.7938	14.62786	7.75208
71.77024	23.42134	25.6819	14.4018	7.4422
75.311	23.46198	24.6584	14.09446	7.12216
78.85176	23.45944	23.7132	13.69568	6.7945
82.39252	23.39848	22.8353	13.20546	6.45668
85.93328	23.27148	22.0175	12.6111	6.11378
89.47404	23.0632	21.2537	11.90752	5.76072
93.0148	22.76094	20.5385	11.09218	5.40004
96.55556	22.35454	19.8672	10.15492	5.03428
100.09632	21.82876	19.2354	9.08812	4.65836
103.63708	21.17598	18.6392	7.88924	4.27228

107.17784	20.37842	18.0752	6.55066	3.88112
110.7186	19.42592	17.54	5.06222	3.4798
114.25936	18.30832	17.0304	3.44678	3.07086
117.80012	17.00784	16.5432	0.54864	2.6543
121.34088	15.51686	16.0766	-2.84226	2.23012
124.88164	13.82776	15.7122	13.3096	1.8034
128.4224	11.93038	15.5279	13.56106	1.3843
131.96316	9.80694	15.5553	13.80744	0.97282
135.45566	7.47268	15.7817	14.0462	0.56388
138.76782	3.75158	16.0628	14.26464	-0.2413
139.7	0.00254	13.0376	14.46276	-1.3081

Tablica 2 Dodatni presjeci propelera

Radijus (mm)	Tetiva (mm)	Uvijanje (°)	x – koordinata (mm)	z – koordinata (mm)
13.97	20.32	39.0857	11.684	6.096
19.05	20.955	39.0857	11.938	7.493
25.4	21.59	39.0857	12.1412	9.144
31.75	22.225	39.0857	12.319	10.033
34.29	22.86	39.0857	12.446	10.2108

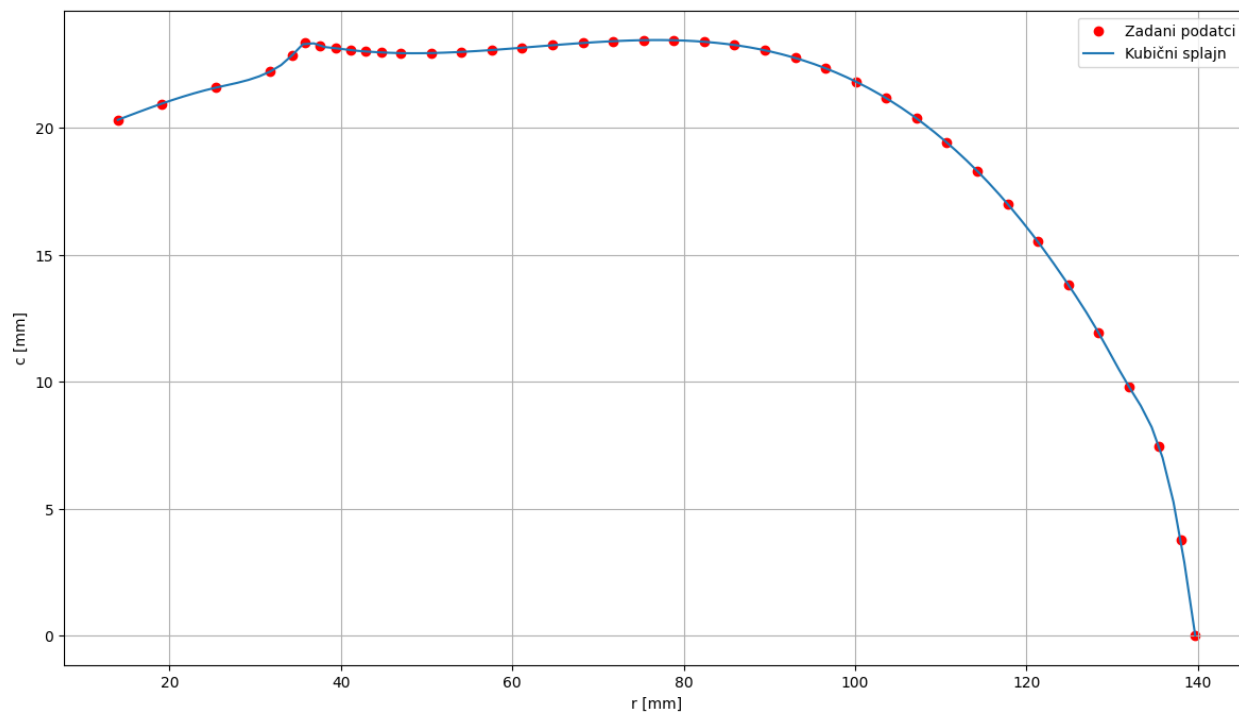
U Tablica 2 se može primijetiti da je vrijednost kuta uvijanja u dodatnim presjecima konstantna što djeluje nelogično pošto bi teoretski kut uvijanja trebao rasti približavajući se osi rotacije kako bi se održao uniformni korak propelera duž cijelog kraka. Međutim, kao što se može vidjeti na fotografiji propelera (Slika 9), na ovom propeleru nema značajnog rasta kuta uvijanja približavanjem glavčini pa je radi postizanja što bolje sličnosti s propelerom u dodatnim presjecima određen konstantan kut uvijanja.

Sada je, koristeći podatke iz Tablica 1 i Tablica 2, moguće dobiti raspodjele duljina tetiva, uvijanja te koordinata položaja napadnog ruba prikazane na Slika 10 – Slika 13. Osim podataka iz Tablica 1 i Tablica 2, na slikama je prikazan i kubični splajn koji interpolira zadane podatke. Splajn je dodan kako bi se prilikom modeliranja u CAD alatu moglo dodati još dodatnih

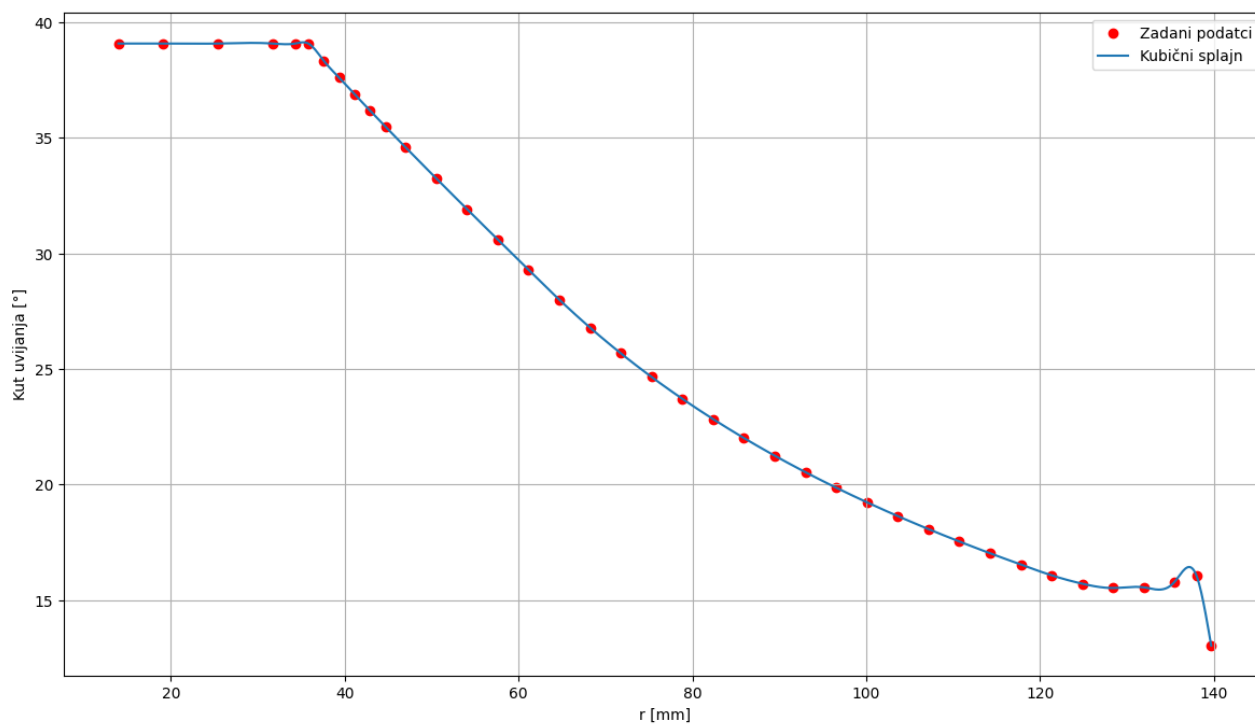
presjeka čime se osigurava bolja kontrola nad modelom tijekom samog modeliranja i time bolji model propelera.



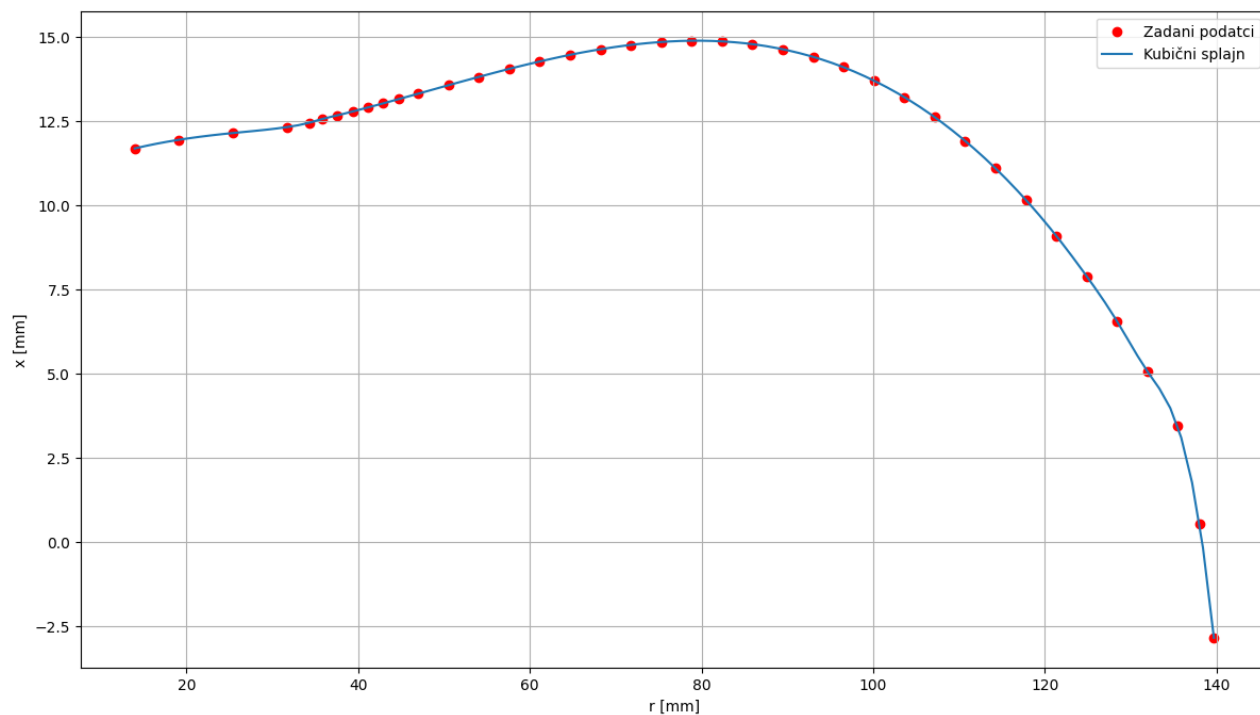
Slika 9 Fotografija propelera [33]



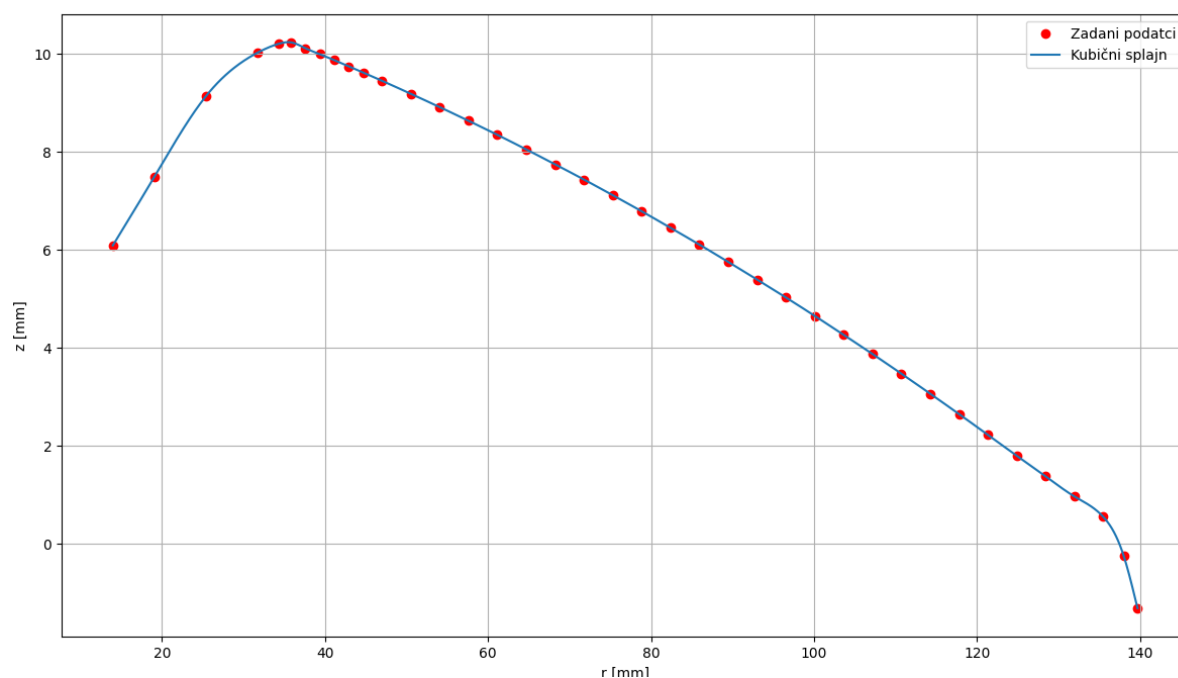
Slika 10 Distribucija duljine tetive



Slika 11 Distribucija kuta uvijanja



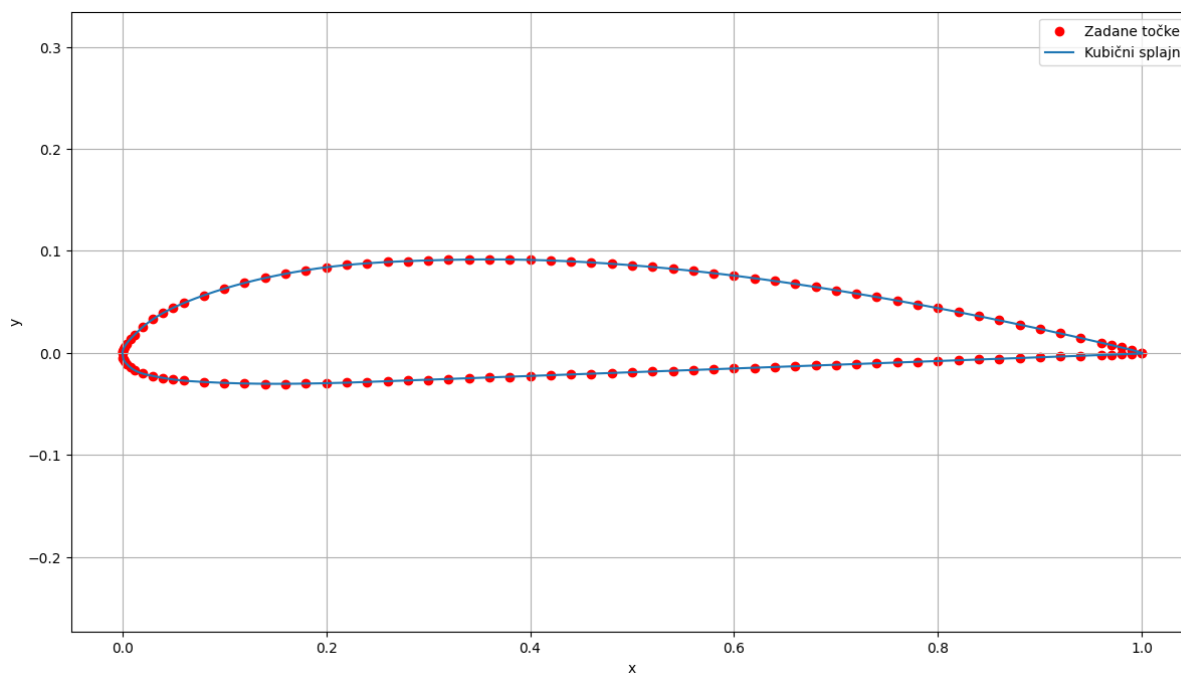
Slika 12 Distribucija x – koordinate napadnog ruba propelera



Slika 13 Distribucija z – koordinate napadnog ruba propelera

Jedini parametar koji nedostaje kako bi se u potpunosti mogla definirati geometrija propelera je aeroprofil. Olakotna okolnost u slučaju promatranog propelera je da se duž cijelog kraka koristi isti aeroprofil Clark – Y [31]. Podatci o geometriji aeroprofila su preuzeti iz [34] i prikazani na Slika 14. Uz sirove podatke o aeroprofilu, na slici je prikazan i kubični splajn koji

interpolira zadane podatke. Razlog za korištenje splajna je isti kao i u slučajevima distribucije duljine tetive, kuta uvijanja i položaja napadnog ruba.

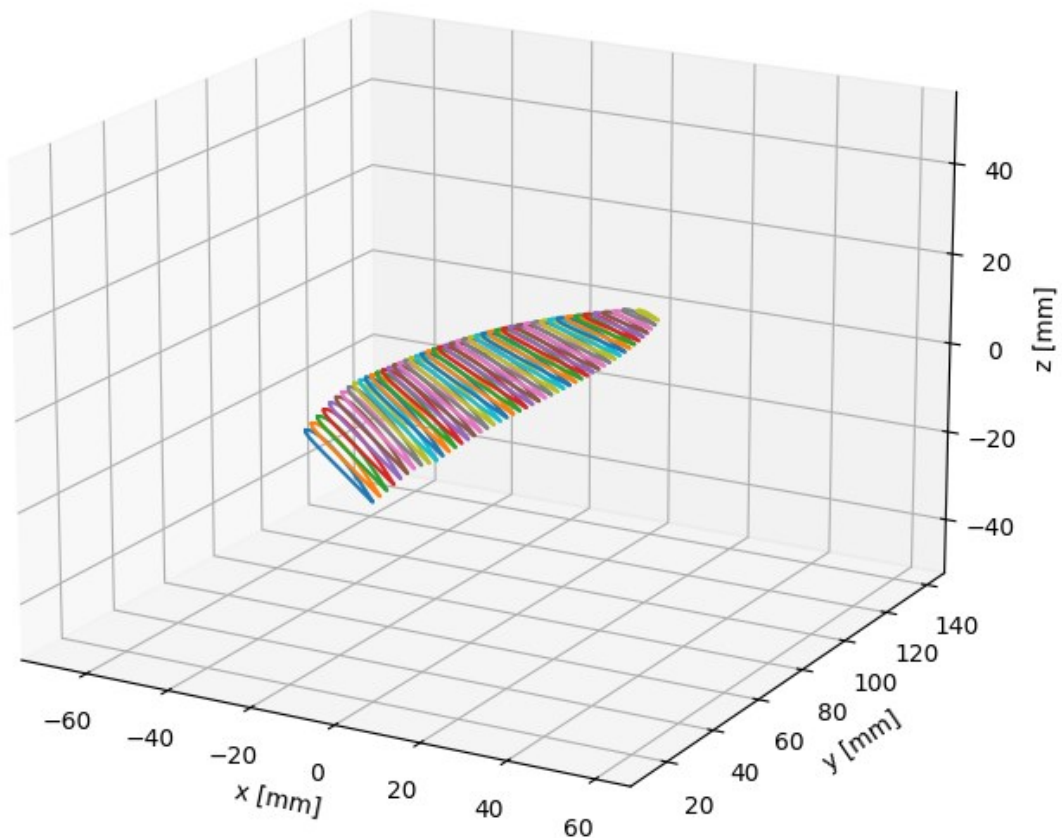


Slika 14 Aeroprofil Clark – Y

4.2.2. CAD model propelera

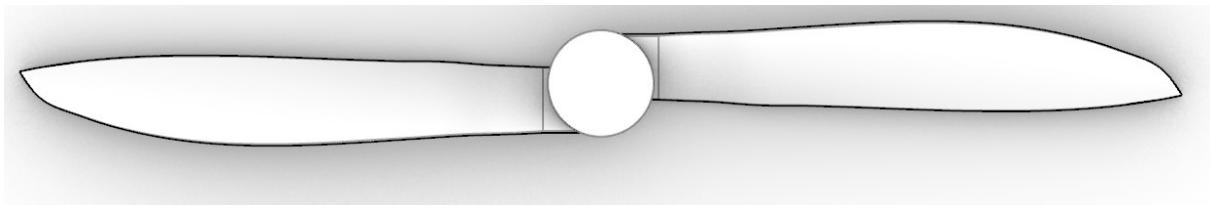
Koristeći geometrijske karakteristike propelera definirane u prethodnom poglavlju, sada je moguće izraditi CAD model propelera koji je nužan za provođenje simulacije. Pošto su sve karakteristike kraka propelera, uključujući i aeroprofil, u prethodnom poglavlju definirana kontinuiranim kubičnim splajnovima, moguće je dobiti proizvoljno velik broj presjeka lopatice propelera te na svakom presjeku proizvoljno velik broj točaka na lopatici propelera.

Svaka točka lopatice propelera se dobiva tako da se najprije odrede točke aeroprofila jedinične duljine tetive u xz ravnini s napadnim rubom u ishodištu, zatim se aeroprofil skalira na odgovarajuću duljinu i rotira za odgovarajući kut uvijanja. Za kraj se sve točke transliraju, najprije u smjeru osi y za odgovarajući radijus, a zatim i u smjeru osi x i z tako da napadni rub bude na odgovarajućoj poziciji prema distribucijama prikazanim na slikama 12 i 13. Slika 15 prikazuje ovako dobiven skup točaka za slučaj da je zadano 50 presjeka lopatice i 200 točaka na svakom aeroprofilu.



Slika 15 Poprečni presjeci lopatice propelera

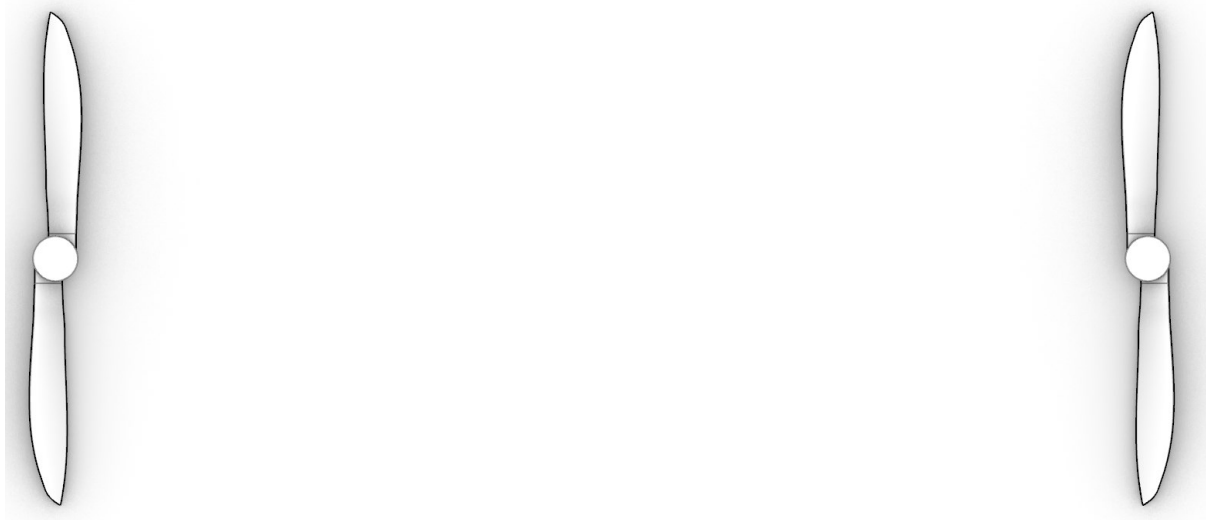
Ovako dobivene točke je sada moguće spremiti u .txt datoteku iz koje ih je moguće automatski uvesti u željeni CAD alat. U ovom slučaju je korišten CAD paket Rhino 8. Nakon toga je u samom CAD alatu moguće provući krivulje kroz točke svakog presjeka te korištenjem naredbe *Loft* dobiti površinu lopatice. Drugu lopaticu propelera je moguće vrlo jednostavno dobiti rotiranjem prve lopatice oko osi rotacije propelera za 180° . Također, modeliranje glavčine i spoja glavčine i lopatica je vrlo jednostavno te se u konačnici dobiva CAD model prikazan na Slika 16.





Slika 16 CAD model propelera: pogled od gore (gore), pogled sa strane (dolje)

Naravno, pošto je cilj obuhvatiti akustičku interferenciju dvaju propelera, potrebno je u postojeći model dodati i drugi propeler. Prema [35], minimalna preporučena udaljenost između osi rotacija promatranih propelera iznosi 610 mm pa je na ovoj udaljenosti pozicioniran i drugi propeler. Pošto je kod bespilotnih letjelica s četiri ili više propelera raspored propelera uvijek takav da se susjedni propeleri okreću u suprotnom smjeru, drugi propeler je potrebno zrcaliti oko osi y kako bi se njegovim okretanjem u suprotnom smjeru dobio željeni potisak. Konačni CAD model s dva propelera prikazan je na Slika 17.



Slika 17 CAD model s dva propelera

4.3. Proračunska mreža

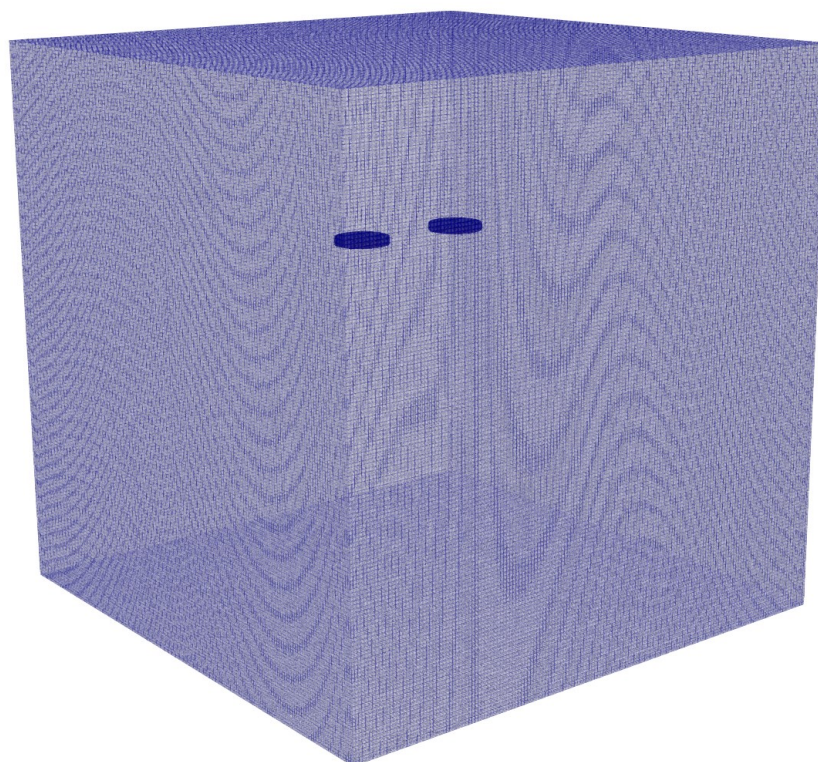
Sljedeći korak k dobivanju rezultata stacionarne simulacije je izrada proračunske mreže. Mreža koja se koristi u stacionarnoj simulaciji je identična mreži koja će se koristiti i u tranzijentnoj simulaciji što olakšava prijenos rješenja jedne simulacije u početni trenutak druge simulacije.

Proračunska mreža je podijeljena na tri zone pri čemu po jedna zona pripada svakom propeleru i „rotira“ s njim, dok najveći prostor pripada mirujućoj vanjskoj domeni strujanja. Granice vanjske domene čine kocku dimenzija 3x3x3 m pri čemu su propeleri pomaknuti prema gornjoj stranici. Granice rotirajućih zona svakog propelera su diskovi promjera 286 mm i debljine 147

mm. Slika 18 prikazuje zone mreže oko propelera, dok Slika 19 prikazuje vanjsku mrežu te položaj rotirajućih zona propelera.



Slika 18 Mreža oko propelera



Slika 19 Položaj rotirajućih zona unutar vanjske domene

Maksimalna veličina kontrolnih volumena određuje se na temelju maksimalne frekvencije (odnosno minimalne valne duljine) koju se želi obuhvatiti simulacijom. Različiti autori preporučuju od 8 do čak 25 kontrolnih volumena po najmanjoj valnoj duljini [29] tako da je za ovu simulaciju odlučeno koristiti 12 kontrolnih volumena po najmanjoj valnoj duljini. Kada bi se htjelo obuhvatiti i najviše frekvencije koje ljudsko uho može čuti (20 kHz), prema jednadžbi

(1) najmanja promatrana valna duljina bi iznosila 0.01715 m, pa bi najveća dopuštena dimenzija kontrolnog volumena bila

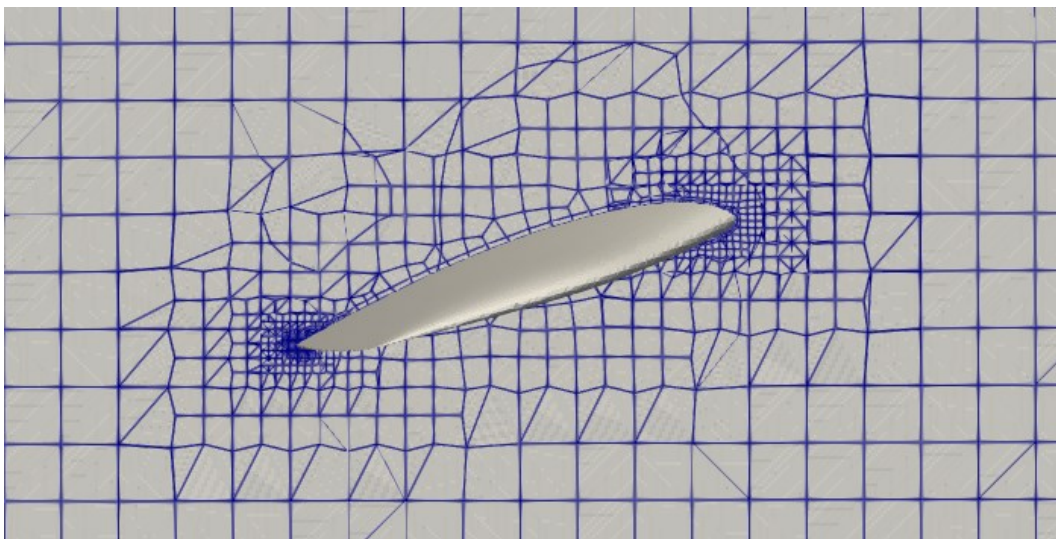
$$l_{max} = \frac{\lambda_{min}}{12} \approx 1.43 \times 10^{-3} \text{ m.} \quad (85)$$

Kada bi se s ovakvim kontrolnim volumenima htjela ispuniti čitava domena (ne uračunavajući pri tome eventualna profinjenja mreže oko propelera) bilo bi potrebno

$$n = \left(\frac{3}{l_{max}}\right)^3 \approx 9.25 \times 10^9 \quad (86)$$

kontrolnih volumena. Obzirom da se radi o broju ćelija koji je prevelik za raspoložive računalne resurse, maksimalna promatrana frekvencija je ograničena na 1500 Hz. U tom slučaju minimalna valna duljina iznosi približno 0.229 m pa je maksimalna dopuštena dimenzija kontrolnog volumena 0.019 m. Time je ukupan broj ćelija u mreži (uračunavajući i profinjenja oko propelera) smanjen na prihvatljivih 13.1 milijuna ćelija od kojih po 2.3 milijuna pripadaju rotirajućoj zoni oko svakog propelera, a 8.5 milijuna vanjskoj domeni.

Kao što se može vidjeti na Slika 20 koja prikazuje presjek proračunske mreže oko lopatice propelera, posebna pozornost je obraćena na mrežu oko propelera gdje se koristi znatno finija mreža, posebice u okolini napadnog i izlaznog ruba lopatice, nego li u ostatku domene. Na ovaj način se osigurava da granica proračunske mreže kvalitetno prati površinu propelera, ali se i izbjegavaju brojne numeričke greške koje mogu nastati zbog loše kvalitete mreže.



Slika 20 Profinjena mreže oko lopatice propelera

4.4. Rubni uvjeti

Sljedeći korak u definiranju postavki simulacije je određivanje rubnih uvjeta. Pošto se oba propelera nalaze unutar zona rotirajućih koordinatnih sustava, rubni uvjet polja brzine na stijenkama propelera također se zadaje u rotirajućem koordinatnom sustavu, odnosno zadaje se relativna brzina, a ne apsolutna. Kako se propeler okreće zajedno s koordinatnim sustavom, relativna brzina na stijenkama propelera mora biti jednaka nuli. S druge strane, budući da se promatra letjelica u lebdenju, na vanjskim rubovima domene se može primijeniti Von Neumannov rubni uvjet kojim se propisuje da je gradijent polja brzine na vanjskim rubovima jednak nuli.

Von Neumannov rubni uvjet se također koristi pri definiranju rubnog uvjeta polja tlaka na stijenkama propelera te na gornjoj i donjoj stranici vanjskog ruba domene. Na bočnim stranama domene je pak postavljena vrijednost polja tlaka (Dirichletov rubni uvjet) na vrijednost nula. Pri računalnim simulacijama dinamike nestlačivih fluida nužno je barem u jednoj točki propisati vrijednost tlaka, a obzirom da su sve bočne stranice dovoljno daleko od propelera da na njima nema značajnih promjena tlaka. Pri tome se postavljena vrijednost od 0 Pa može protumačiti na način da se u cijeloj simulaciji barata s manometarskim tlakom kojem treba dodati vrijednost atmosferskog tlaka kako bi se dobila vrijednost apsolutnog tlaka. Razlog zašto se može baratati s manometarskim umjesto apsolutnog tlaka je taj što se u osnovnim jednadžbama dinamike fluida za nestlačiva strujanja polje tlaka pojavljuje isključivo u obliku gradijenta polja tlaka, a pošto dodavanja konstantne vrijednosti atmosferskog tlaka svakako nema utjecaja na gradijent polja tlaka, onda nema niti utjecaja na polje brzine.

Nadalje, pošto se u simulaciji koristi $k - \omega$ SST model turbulencije, potrebno je definirati rubne uvjete i za polja turbulentne kinetičke energije i brzine disipacije turbulentne kinetičke energije. Na stijenkama propelera se za oba polja koriste zidne funkcije kojima se rješava strujanje u graničnom sloju, dok je na vanjskim granicama domene propisan Von Neumannov rubni uvjet. Dodatno, pošto se proračunska mreža sastoji od više različitih zona, potrebno je propisati dodatan skup rubnih uvjeta na plohama između pojedinih zona koji omogućuje komunikaciju između kontrolnih volumena u različitim zonama.

Unutar jedne zone svi kontrolni volumeni su spojeni tako da na svakoj stranici graniče točno s jednim susjednim kontrolnim volumenom. Takva mreža naziva se konformna mreža, dok se mreže koje ne ispunjavaju ovaj uvjet, poput mreža na granicama različitih zona, nazivaju nekonformne mreže [36]. Za povezivanje kontrolnih volumena na granicama različitih zona, u programskom paketu foam-extend koristi se opće mrežno sučelje (skraćeno GGI, od eng. *General Grid Interface*) koje putem težinskih faktora određuje protok fizikalnih svojstava

fluida kroz granice između različitih ćelija. GGI se zadaje kao rubni uvjet na odgovarajućim plohama.

Radi preglednosti, rubni uvjeti za polja svih veličina na svim plohama su prikazani u Tablica 3.

Tablica 3 Rubni uvjeti

Plohe	Rubni uvjeti polja brzine	Rubni uvjeti polja tlaka	Rubni uvjeti polja turbulentne kinetičke energije	Rubni uvjeti polja brzine disipacije turbulentne kinetičke energije
Stijenke propelera	Dirichletov rubni uvjet: (0, 0, 0)	Von Neumannov rubni uvjet	Zidna funkcija	Zidna funkcija
Vanjske granice domene (gornja i donja stranica)	Von Neumannov rubni uvjet	Von Neumannov rubni uvjet	Von Neumannov rubni uvjet	Von Neumannov rubni uvjet
Vanjske granice domene (bočne stranice)	Von Neumannov rubni uvjet	Dirichletov rubni uvjet (0)	Von Neumannov rubni uvjet	Von Neumannov rubni uvjet
Granice između rotirajućih i mirujuće zone	GGI	GGI	GGI	GGI

4.5. Simulacije s višestrukim koordinatnim sustavima

U ovom poglavlju su dana teoretska razmatranja simulacija računalne dinamike fluida s višestrukim koordinatnim sustavima (skraćeno MRF od eng. *Multiple Reference Frame*). Poseban naglasak je stavljen na rotirajuće koordinatne sustave pošto se takvi koordinatni sustavi koriste u simulaciji.

MRF simulacije se koriste kada postoji više dijelova koji su u relativnom gibanju te se tada strujanje oko svakog dijela rješava u odgovarajućem koordinatnom sustavu vezanom za taj dio [37]. Pri tome koordinatni sustav može biti inercijski, ako se ne giba ili ako se translacija konstantnom brzinom, ili neinercijski, ako se koordinatni sustav rotira ili ako se translacija

promjenjivom brzinom. Za inercijske koordinatne sustave se strujanje određuje rješavanjem standardnih Navier-Stokesovih jednadžbi, koje za slučaj nestlačivog strujanja glase

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u_I u_I) - \nabla \cdot (v_{eff} \nabla u_I) &= -\nabla \frac{p}{\rho} \\ \nabla \cdot u_I &= 0,\end{aligned}\tag{87}$$

gdje u_I označava brzinu strujanja u inercijskom koordinatnom sustavu (apsolutnu brzinu), a v_{eff} efektivnu kinematičku viskoznost koja je jednaka zbroju molekularne i turbulentne viskoznosti. U rotirajućem koordinatnom sustavu, jednadžbe (87) se svode na [36]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u_R u_I) - \nabla (v_{eff} \nabla u_R) + \omega \times u_R &= -\nabla \frac{p}{\rho} \\ \nabla \cdot u_R &= 0,\end{aligned}\tag{88}$$

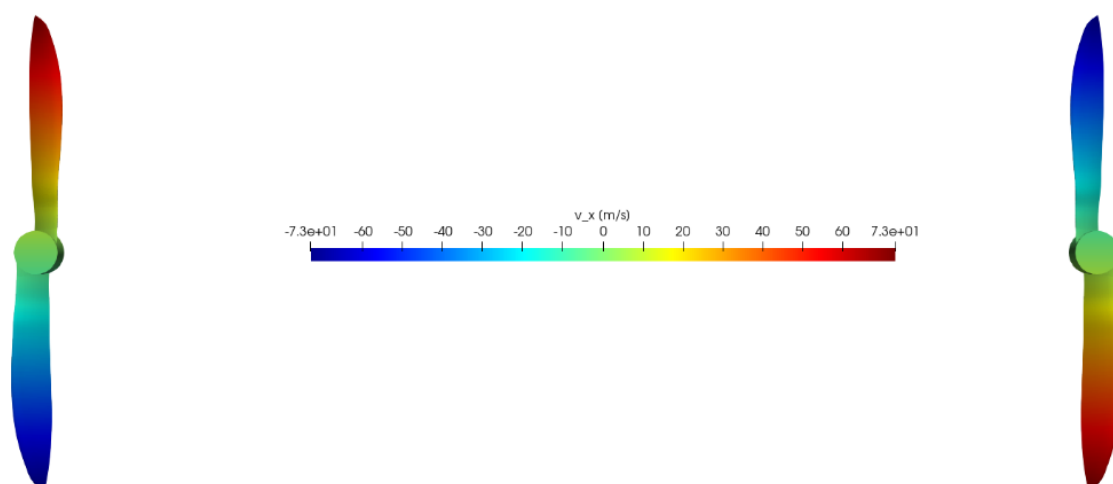
pri čemu u_R označava relativnu brzinu u rotirajućem koordinatnom sustavu, a ω kutnu brzinu koordinatnog sustava.

Rotirajući koordinatni sustavi se u simulaciji zadaju u posebnoj datoteci *MRFZones*, u kojoj se najprije definiraju zone na koje se odnosi pojedini koordinatni sustav nakon čega se definira ishodište koordinatnog sustava i os rotacije te na kraju brzina vrtnje. Obzirom da u simulaciji postoje dva propelera koja se gibaju oko različitih osi rotacije, potrebno je definirati dva rotirajuća koordinatna sustava od kojih se jedan vrti u pozitivnom smjeru osi z kutnom brzinom 523.6 rad/s (5000 okretaja u minuti), dok se drugi vrti istom brzinom u suprotnom smjeru.

4.6. Rezultati simulacije

Uz navedene postavke simulacije moguće je provesti stacionarnu simulaciju strujanja oko rotirajućih propelera. U ovom poglavlju su prikazani rezultati stacionarne simulacije te su iz rezultata simulacije izračunati potisak i moment potreban za pogon propelera te su rezultati uspoređeni s podacima o propeleru koje nudi proizvođač.

Prvi zanimljivi rezultat koji se dobiva iz stacionarne simulacije je polje brzine na propelerima. Pošto je brzina vrtnje propelera zadana i iznosi 5000 okretaja u minuti, rubnim uvjetima je zadano i polje brzine na stijenkama propelera pa se ovaj rezultat može koristiti za inicijalnu provjeru valjanosti simulacije, odnosno za provjeru vrte li se propeleri oko zadanih osi zadanom brzinom. Pošto se os rotacije poklapa s os z globalnog koordinatnog sustava, a lopatice se pružaju u smjeru globalne osi y, za provjeru se koristi komponenta brzine u smjeru osi x, prikazana na Slika 21.



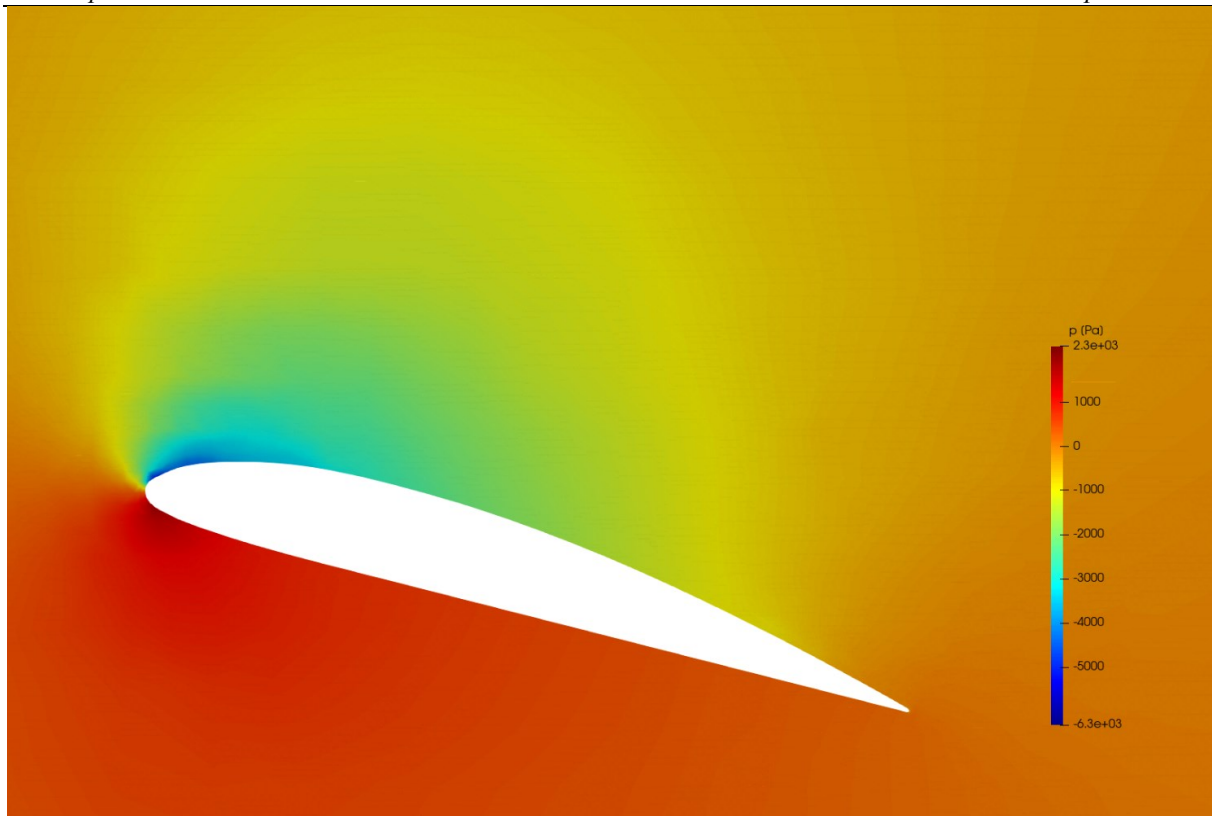
Slika 21 Komponenta polja brzine u smjeru osi x

Vidljivo je da se propeleri uistinu vrte oko zadanih osi rotacije pošto je u njima brzina jednaka nuli, a iz maksimalnih veličina brzina vidljivo je da se propeleri vrte ispravnom brzinom. Maksimalni iznos brzine pri 5000 okretaja u minuti mora iznositi

$$v_{tip} = \frac{d_{prop}}{2} \frac{n_{RPM}\pi}{30} \approx 73\text{m/s}, \quad (89)$$

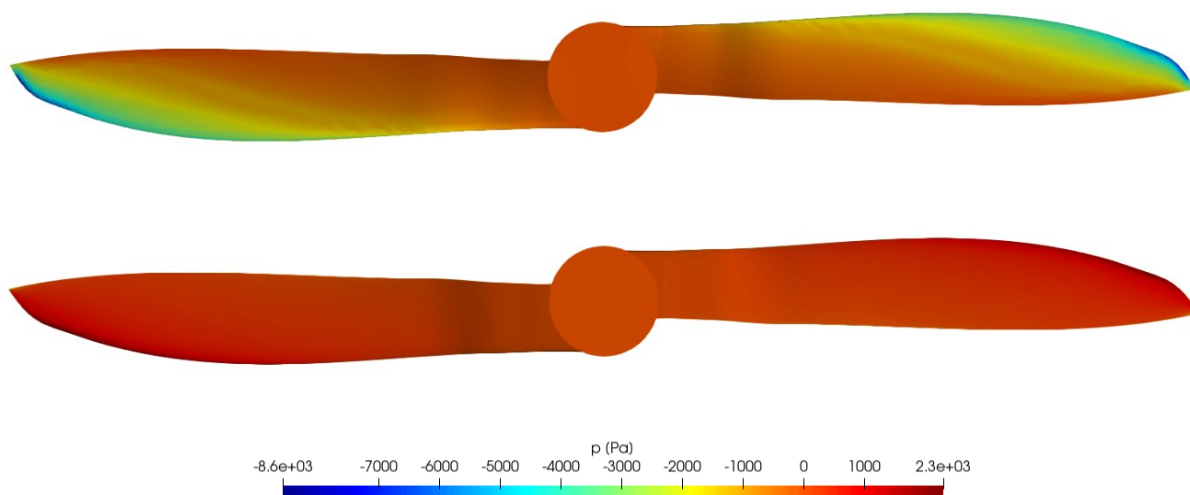
gdje je d_{prop} promjer propelera, a n_{RPM} broj okretaja u minuti. Na Slika 21 je vidljivo da se i maksimalna brzina poklapa sa zadanom.

Za računanje potiska i momenta propelera te usporedbu tih rezultata važno je i polje tlaka. Slika 23 prikazuje raspodjelu tlaka na lopaticama jednog propelera (raspodjela tlaka je vrlo slična i na drugom propeleru pa je radi preglednosti prikazan samo jedan propeler), dok je na Slika 22 prikazana raspodjela tlaka oko poprečnog presjeka propelera na radijusu 120 mm.



Slika 22 Polje tlaka oko poprečnog presjeka lopatice propelera

Na Slika 23 može se vidjeti da su promjene tlaka duž raspona lopatice, ali i duž tetive (što se može vidjeti i na Slika 22) te da su apsolutni iznosi podtlakova na gornjaci znatno veći nego li pretlak na donjaci. Također, može se vidjeti i da se najveće razlike pretlaka na donjaci i podtlaka na gornjaci ostvaruju na prednjem dijelu presjeka lopatice što je u skladu s teorijskim razmatranjima.



Slika 23 Raspodjela tlaka na lopaticama propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Koristeći simulacijom dobiveno polje brzine, moguće je izračunati smična naprezanja na površini propelera u smjeru svih triju koordinatnih osi globalnog koordinatnog sustava

$$\tau_i = \rho(v + v_t)n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (90)$$

gdje član $n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ predstavlja usmjerenu derivaciju u smjeru normale na površinu propelera.

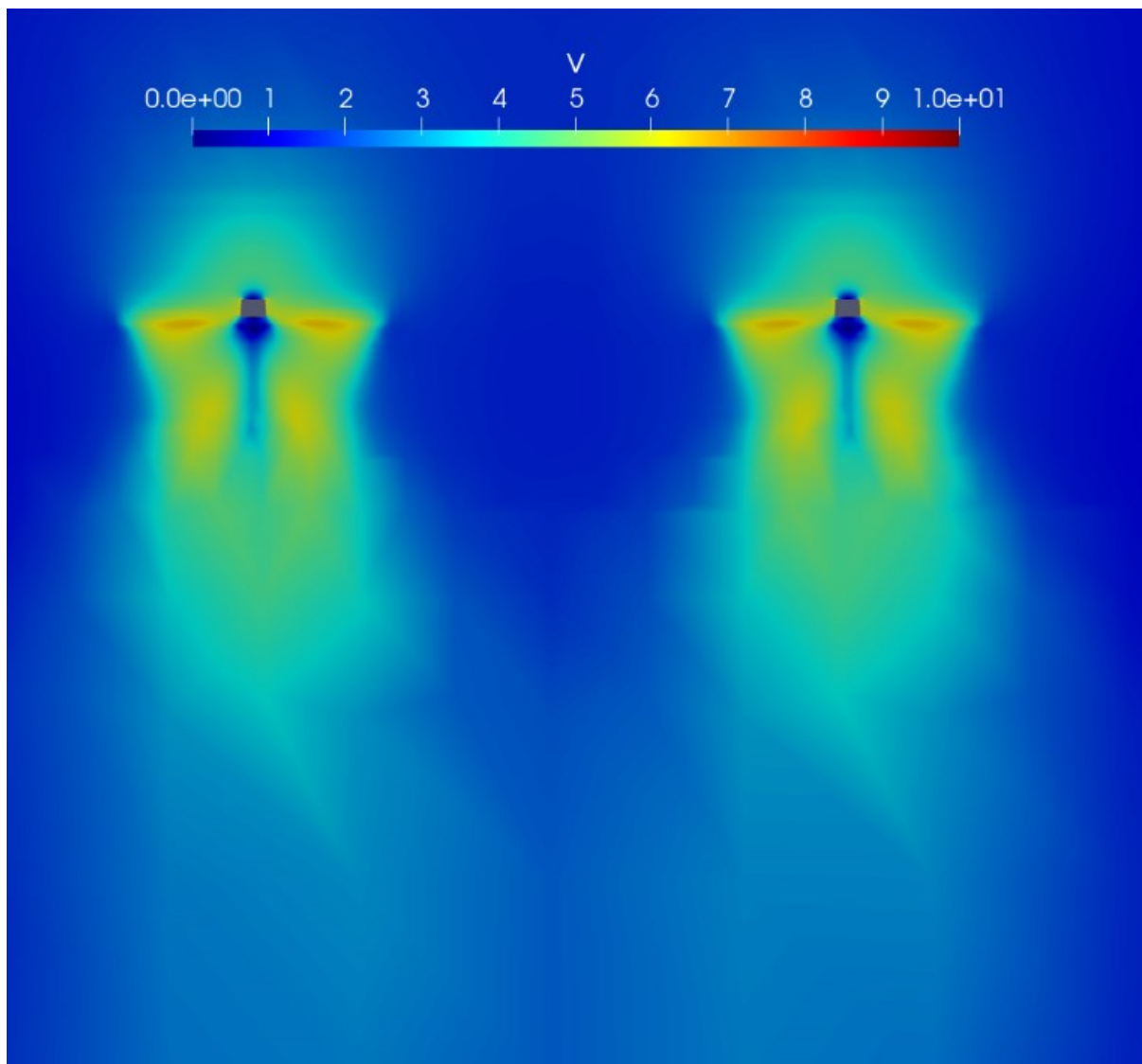
Integracijom smičnih naprezanja i tlaka po površini propelera moguće je dobiti potisak i moment propelera prikazan u Tablica 4. U Tablica 4 su radi usporedbe prikazani i podatci proizvođača za iste uvjete rada propelera (lebdenje i brzina vrtnje od 5000 okretaja u minuti).

Tablica 4 Usporedba potiska i momenta propelera dobivenih stacionarnom simulacijom s podacima proizvođača

Svojstvo	Podatci proizvođača	Rezultati simulacije
Potisak (N)	6.329	6.205
Moment (Nm)	0.122	0.138

Iz tablice je vidljivo da potisak dobiven simulacijom vrlo dobro odgovara podacima proizvođača te razlika iznosi manje od 2%. S druge strane, kod momenata postoji nešto značajnija razlika od približno 13%. Ipak, valja imati na umu da se radi o relativnom malim iznosima momenata pa i male numeričke greške dovode do relativno velike relativne pogreške. Također, dodatni razlog zbog kojih postoje određene greške i kod računanja momenta i potiska su nesavršenosti CAD modela koje proizlaze iz činjenice da distribucije duljine tetive i kuta uvijanja nisu dostupne za cijeli radijus propelera.

Dodatno, u rezultatima simulacije je moguće provjeriti postoji li interakcija vrtložnih tragova propelera. Slika 24 prikazuje apsolutne intenzitete polja brzine u vrtložnim tragovima propelera u ravnini koja sadrži osi rotacije oba propelera iz kojih je vidljivo da postoji područje u kojem se vrtložni tragovi spajaju, ali su intenziteti brzina na tom području mali pa je i interakcija relativno slaba.



Slika 24 Polje brzina u vrtložnom tragu propelera

5. TRANZIJENTNA SIMULACIJA BUKE PARA PROPELERA

5.1. Uvod

U ovom poglavlju su prikazani rezultati tranzijentnih CFD simulacija buke propelera u bliskom akustičkom polju s rotirajućom mrežom. Prvotno je planirano provesti tranzijentnu simulaciju u trajanju jednog punog okreta propelera s vremenskim korakom koji odgovara jednom 1° zakreta propelera. Međutim, nakon 60 provedenih koraka ustanovljeno je da je vrijeme potrebno za takvu simulaciju uz dostupne računalne resurse značajno dulje od vremena raspoloživog za izradu ovog rada. Stoga je, nakon provedenih prvih 60 vremenskih koraka, vremenski korak povećan na 5° zakreta propelera po koraku. Ipak, pošto su računalni zahtjevi i na ovakvu simulaciju relativno veliki, simulacija je zaustavljena pri kutu zakreta od 150° .

Iz tog razloga su u ovom poglavlju rezultati simulacije prikazani u dva potpoglavlja. U prvom potpoglavlju su prikazani rezultati koji uključuju samo prvih 60 koraka finije simulacije, dok su u sljedećem potpoglavlju prikazani rezultati cjelokupne simulacije koja uključuje i finije i grublje vremenske korake.

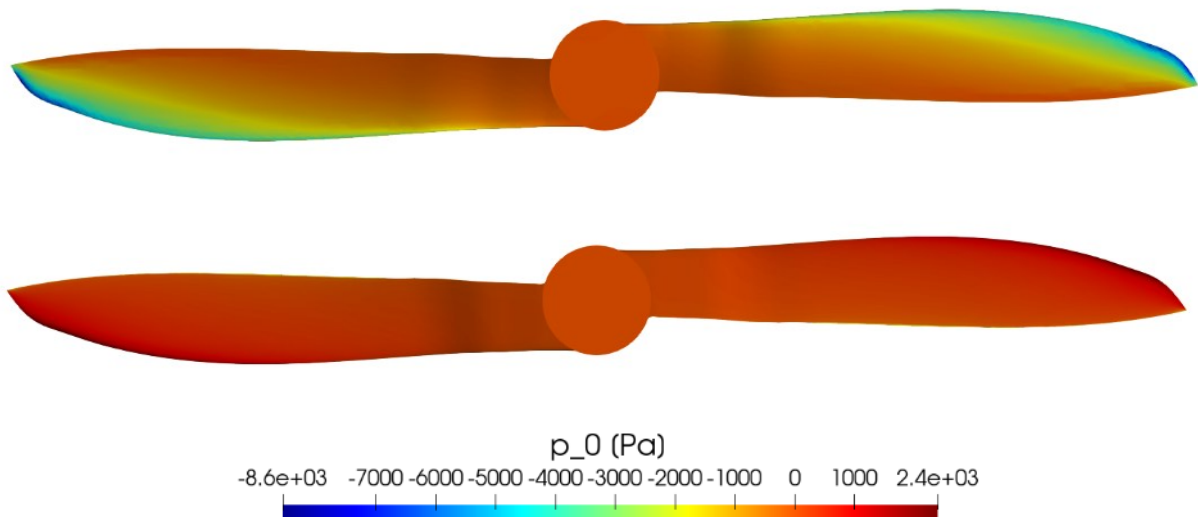
Na kraju je, koristeći polja tlaka svih koraka simulacije provedena akustička analiza u bliskom akustičkom polju oko para propelera s posebnim naglaskom na akustičku interakciju propelera.

5.2. Rezultati prvih 60 koraka simulacije

Iz razloga pojašnjenih u prethodnom potpoglavlju, najprije će se analizirati rezultati strujanje dobiveno u prvih 60, finijih koraka simulacije.

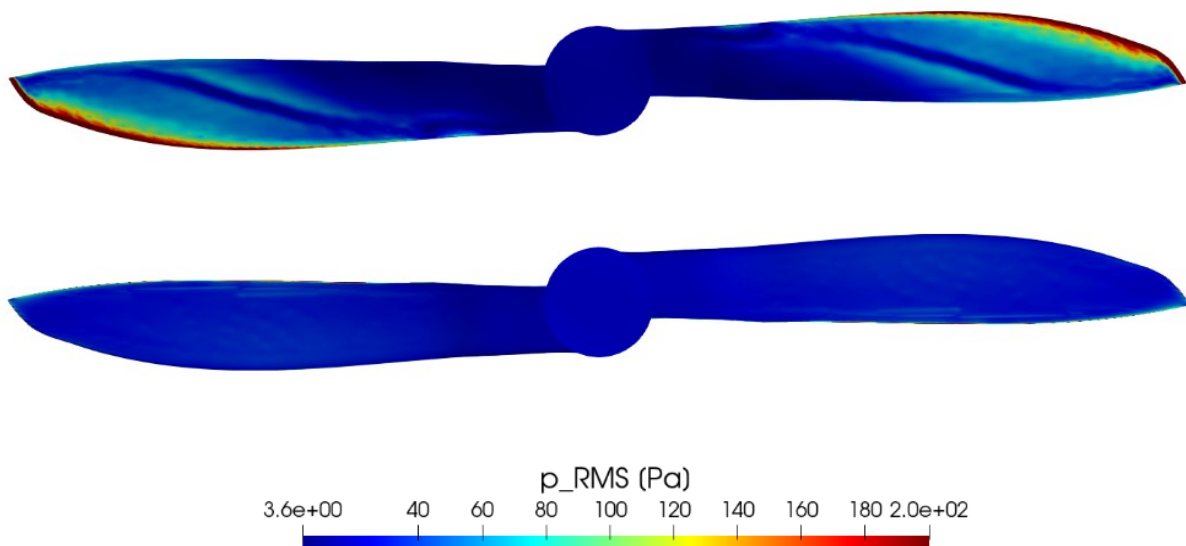
Prva kontrola uspješnosti je usporedba vremenski osrednjenog polja tlaka na stijenkama propelera, prikazanog na Slika 25 s poljem tlaka iz stacionarne simulacije. Vidljivo je da je vremenski osrednjeni tlak p_0 dobiven u ovim koracima tranzijentne simulacije praktično jednak polju tlaka dobivenom stacionarnom simulacijom na Slika 23 što svakako ukazuje da je točnost tijekom ovih koraka simulacije vrlo visoka.

Dodatno, pošto je osrednjeno polje tlaka praktično jednako stacionarnoj simulaciji, i prosječna sila potiska i moment su gotovo jednaki rezultatima stacionarne simulacije te odstupanja iznose manje od 1%.



Slika 25 Vremenski osrednjeno polje tlaka na stijenama propelera u finijoj simulaciji: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Sljedeći zanimljiv rezultat je raspodjela oscilacija tlaka po površini propelera. Kako bi se izbjeglo prikazivanje oscilacija tlaka u svakom vremenskom koraku, na Slika 26 je prikazana samo vrijednost efektivnog akustičkog tlaka (p_{RMS}) izračunata prema jednadžbi (2), a koja predstavlja prosječnu vrijednost intenziteta oscilacija tlak.



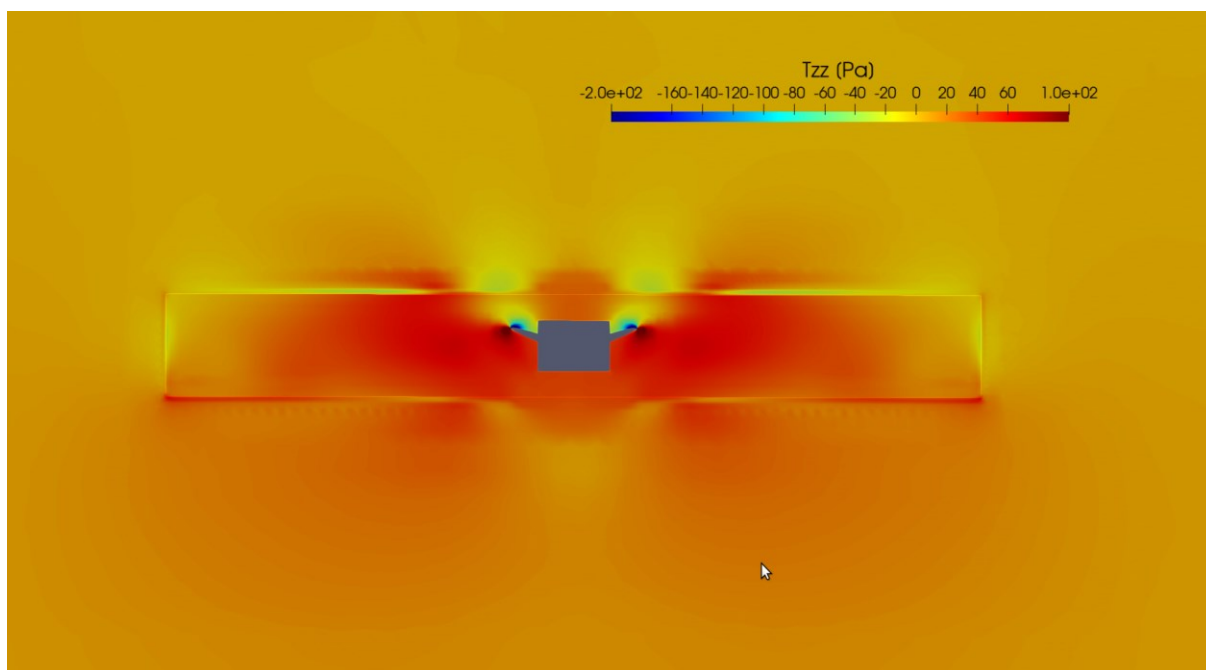
Slika 26 Efektivni akustički tlak na stijenama propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Na slici je vidljivo da se većina oscilacija javlja na gornjaci, dok su oscilacije tlaka na donjaci vrlo slabog intenziteta. Ovakav rezultat je i očekivan pošto su apsolutne vrijednosti tlaka na gornjaci daleko veće od vrijednosti tlakova na donjaci, a strujanje duž gornjake je daleko nestabilnije nego li duž donjake. Razlog tome je što se na gornjaci javljaju nepovoljni gradijenti

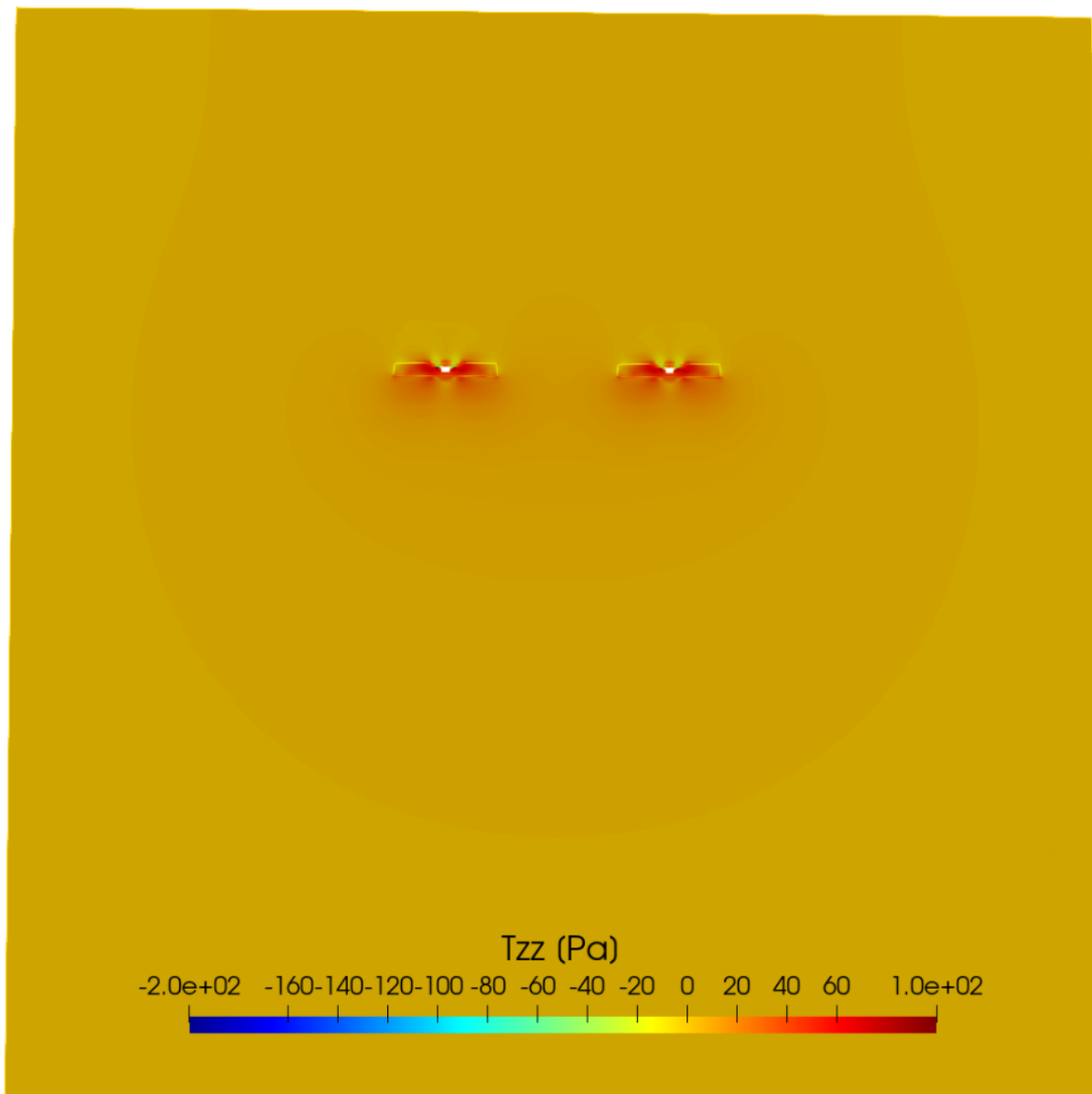
tlaka koji svojim djelovanjem mogu uzrokovati odvajanje strujanja koje je karakterizirano velikim oscilacijama tlaka. Pošto se odvajanje strujanja događa povećanjem napadnog kuta aeroprofila, a kako je u slučaju lebdenja letjelice napadni kut duž propelera jednak kutu uvijanja pa je iz tablice 1 i Slika 11 vidljivo da se duž propelera javljaju relativno veliki napadni kutevi, može se zaključiti da je upravo odvajanje strujanja glavni uzrok ovih oscilacija tlaka.

Valja imati na umu da ove oscilacije tlaka same po sebi ne predstavljaju izvor buke nego su one buka koju bi bilježio mikrofoni postavljeni na samom propeleru, što nije mjerodavan rezultat za analizu buke koju čuju ljudi u okolini letjelice. Ipak, pošto se polje tlaka izravno javlja i u izrazu za Lighthillov tenzor naprezanja (jednadžba (71)) koji predstavlja kvadrupolne izvore zvuka i u izrazu (81) koji predstavlja jakost dipolnih izvora zvuka, jasno je da se iz ovog polja tlaka ipak može steći određena predodžba o tome na kojem dijelu propelera nastaje najveća količina buke.

U nastavku su prikazane veličine karakteristične za jakost pojedinih izvora zvuka. Najprije su na Slika 27 i Slika 28 prikazana komponenta T_{zz} Lighthillovog tenzora naprezanja izračunata prema jednadžbi (71), pri čemu je zanemaren član $c_0^2 \rho \delta_{ij}$ jer je provedena simulacija nestlačivog strujanja pa je $\rho = konst.$ te kada bi se računala dvostruka divergencija Lighthillovog tenzora naprezanja u jednadžbi (79) taj član bi bio jednak nuli.



Slika 27 Komponenta T_{zz} Lighthillovog tenzora naprezanja oko jednog propelera



Slika 28 Komponenta T_{zz} Lighthillovog tenzora naprezanja oko para propelera

Valja imati na umu da je na Slika 27 i Slika 28 prikazana samo jedna od devet komponenti Lighthillovog tenzora naprezanja, zbog toga što polja ostalih komponenti kvalitativno izgledaju vrlo slično, ali su manjeg iznosa.

Također, na Slika 27 i Slika 28 valja primijetiti određene numeričke nestabilnosti na granicama između zona koje rotiraju s propelerom i ostatka mreže. Ove nestabilnosti bi se mogle razriješiti korištenjem većeg broja iteracija po vremenskom koraku, ali to u trenutku pisanja ovog rada nije izvedivo zbog ograničenih računalnih resursa. Dodatno, slične greške se mogu uočiti i u puno „skupljim“ simulacijama poput simulacije provedene u [29] (pogledati npr. sliku 11 u navedenoj literaturi).

Nadalje, na slikama se može primijetiti da je iznos komponente Lighthillovog tenzora naprezanja vrlo mali u vrtložnome tragu što upućuje da je buka koja nastaje kao rezultat interakcije propelera vrlo mala.

U Ffowcs-Williamsovoj i Hawkingsovoj analogiji, za razliku od kvadrupolnih izvora koji su raspoređeni unutar volumena opisanog graničnom plohom, monopolni i dipolni izvori se mogu nalaziti isključivo na plohi (zato se uz njih u jednadžbi (79) i nalazi Diracova delta-funkcija, a uz kvadrupole Heavisideova *step*-funkcija). Kako bi se izbjeglo uvođenje dodatnih ploha, a pošto FW-H analogija ne ograničava takvu mogućnost, ovdje će se demonstracije radi prikazati raspodjela monopola i dipola na stijenama propelera.

Pošto je za plohu na kojoj će se prikazati raspodjela dipola odabrana čvrsta stijenska propelera, drugi član desne strane jednadžbe automatski postaje jednak nuli jer zbog nepromočivosti plohe brzina fluida u smjeru normale mora biti jednaka brzini gibanja same plohe. Zbog toga jednadžba (81) poprima oblik

$$L_i = pn_i. \quad (91)$$

Pošto se dipoli u jednadžbi (79) pojavljuju u članu $\frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(h)]$, na površini propelera za koju je $h = 0$ i vrijedi jednadžba (91), može se pisati

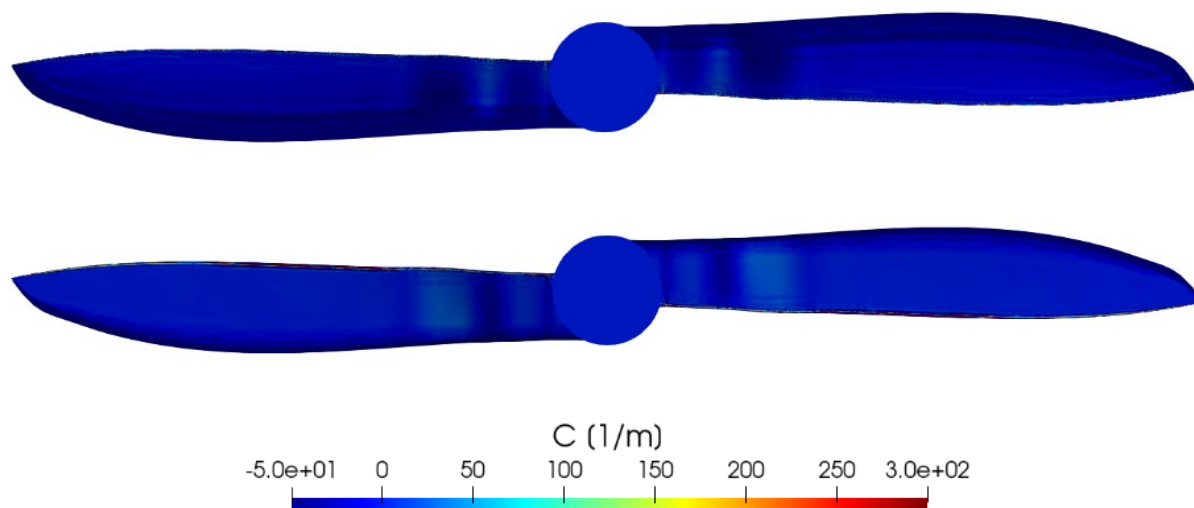
$$\frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(h)] = \delta(h) \frac{\partial pn_i}{\partial x_i} = \delta(h) \left(p \frac{\partial n_i}{\partial x_i} + n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right). \quad (92)$$

Na desnoj strani jednadžbe (92) sada je moguće primijetiti dva člana: $p \frac{\partial n_i}{\partial x_i}$ u kojem se javlja divergencija jedinične normale na površinu koja predstavlja totalnu zakrivljenost površine [38], definiranu izrazom

$$C = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (93)$$

gdje su R_1 i R_2 glavni radijusi zakrivljenosti, i član $n_i \frac{\partial p}{\partial x_i}$ koji predstavlja usmjerenu derivaciju polja tlaka u smjeru normale na površinu propelera.

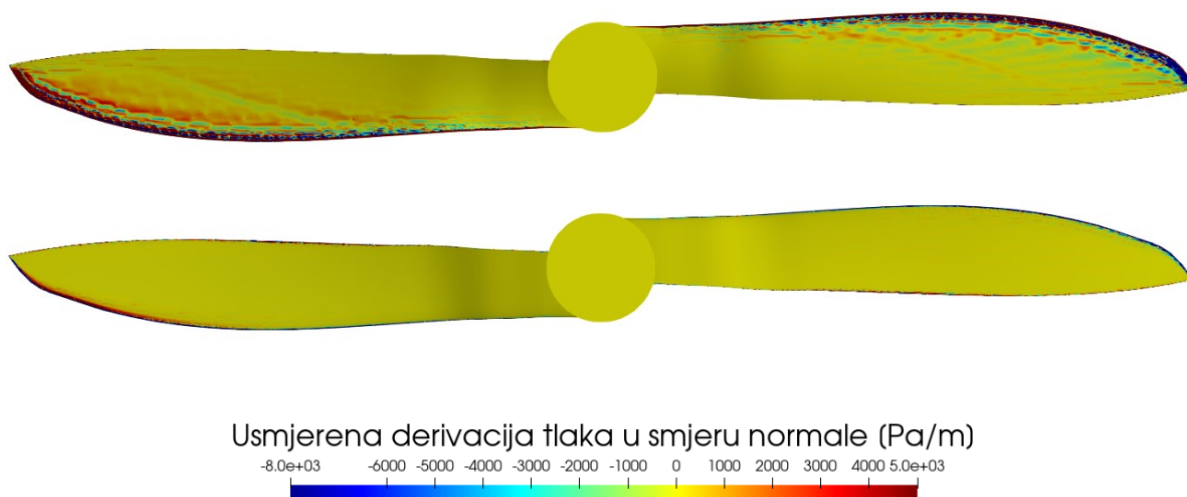
Slika 29 prikazuje vrijednosti totalne zakrivljenosti propelera, koja je naravno konstantna tijekom vremena pošto se geometrija propelera ne mijenja te se stoga prvi član desne strane jednadžbe (92) mijenja proporcionalno promjenama tlaka na površini propelera čija je srednja vrijednost prikazana na Slika 26 u vidu efektivnog akustičkog tlaka.



Slika 29 Zakrivljenost propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Sa Slika 29 je vidljivo da se, po apsolutnom iznosu, veće vrijednosti zakrivljenosti javljaju na gornjaci što dodatno doprinosi tome da se veći dio buke stvara na gornjaci. Ipak, najveće vrijednosti zakrivljenosti se javljaju na izlaznom bridu lopatica propelera gdje je ovo dominantan način stvaranja buke.

S druge strane, usmjerena derivacija tlaka u smjeru normale, koju predstavlja drugi član desne strane u jednadžbi (92) nije konstantna tijekom simulacije pa je na Slika 30 prikazana njena vrijednost u jednom trenutku simulacije.



Slika 30 Usmjerena derivacija polja tlaka u smjeru normale na plohu propelera: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Na slici je ponovno vidljivo da se najveće vrijednosti postižu na prednjem dijelu gornjake i oko napadnog ruba, što je ponovno očekivano pošto je i sa Slika 25 vidljivo da se upravo na tom području javljaju najveći gradijenti tlaka.

Još preostaje prikazati vrijednosti karakteristične za monopolne akustičke izvore. Kako je provedena nestlačiva simulacija strujanja gustoća je konstantna u cijelom području strujanja pa se jednadžba (80) može pojednostaviti

$$U_n = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) u_n + \frac{\rho}{\rho_0} v_n = v_n, \quad (94)$$

gdje je v_n brzina strujanja zraka u smjeru normale na površinu propelera. Kako je površina propelera nepromočiva, brzina u smjeru normale mora biti jednaka nuli pa je i $U_n = 0$, odnosno na površini propelera nema monopolnih izvora zvuka što je i očekivano pošto se na površini propelera ne događaju nikakve reakcije koje bi uzrokovale monopolne izvore zvuka.

Stoga, budući da na površini propelera nema akustičkih monopola, moguće je usporediti intenzitete isključivo dipola i kvadrupola. Uspoređujući Slika 27 – Slika 30, odmah je vidljivo da su veličine koje opisuju intenzitete dipolnih izvora i za nekoliko redova veličine veći od komponenti Lighthillovog tenzora naprezanja koje opisuju intenzitete kvadrupolnih izvora što se podudara s teorijskim razmatranjima pošto je propeler tipičan primjer dipolnog izvora zvuka [18].

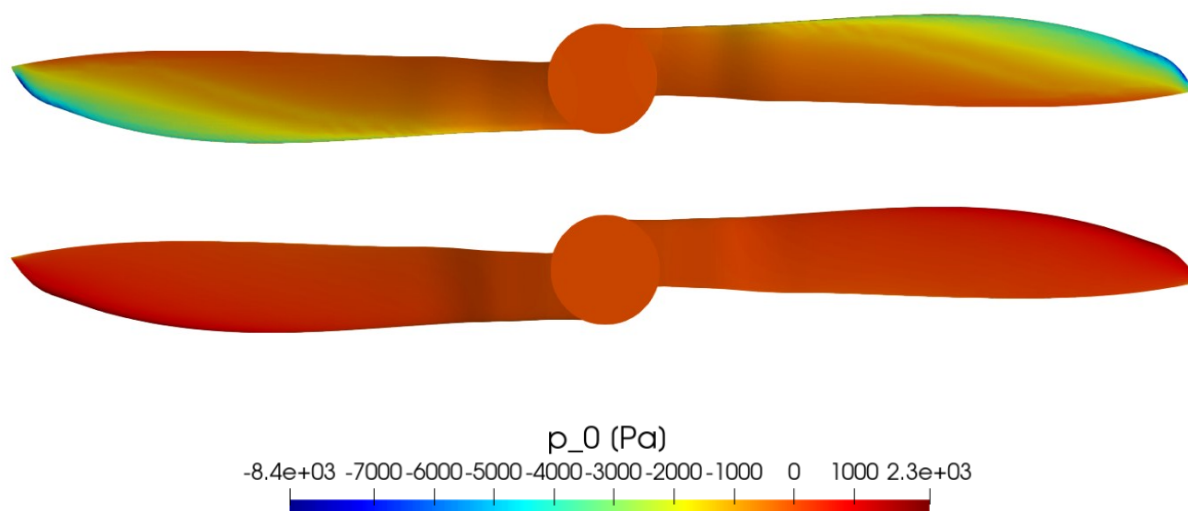
5.3. Sveukupni rezultati tranzijentne simulacije

Nakon početnih 60 koraka simulacije od 1 stupnja po koraku, kako bi se ubrzala propagacija rezultata, korak simulacije je povećan na 5 stupnjeva zakreta propelere, što odgovara vremenu od približno 0.000167 sekundi. Ovim povećanjem koraka u kasnijim koracima simulacije se unosi određena numerička pogreška zbog čega polja tlaka dobivaju dodatne oscilacije te se na taj način unosi svojevrsna numerička buka. Ipak, ovo povećanje koraka je bilo nužno kako bi se dobio dovoljno velik vremenski interval simulacije za kasniju akustičku analizu. U ovom poglavlju su prikazani sveukupni rezultati koji uključuju i prvih 60 finijih i posljednjih 17 grubljih vremenskih koraka.

Slično kao i u prethodnom poglavlju, najprije se provjerava vremenski osrednjeno polje tlaka te se na temelju njega računa potisak i moment propelera koji je moguće usporediti s podacima proizvođača.

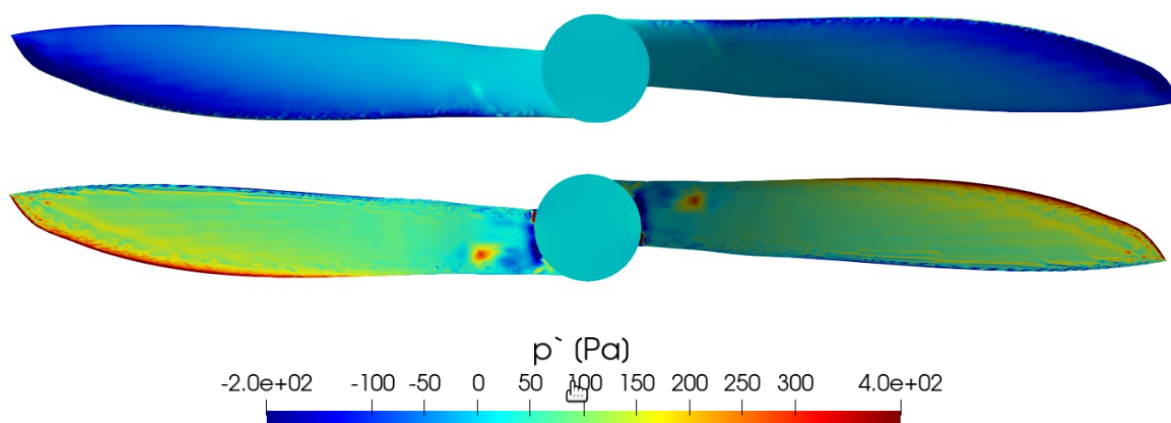
Slika 31 prikazuje vremenski osrednjeno polje tlaka na površini propelera koje uključuje sve korake simulacije. Na slici je vidljivo da ne postoji značajnije odstupanje osrednjenog polja

tlaka u odnosu na finije korake tranzijentne simulacije i stacionarnu simulaciju, te nema značajnijih odstupanja niti u iznosima potiska i momenta.



Slika 31 Osrednjeno polje tlaka na stijenjkama propelera u svim koracima simulacije: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Ipak, premda je osrednjeno polje tlaka više-manje jednako kao i tijekom finijih koraka, oscilacije tlakova između pojedinih grubljih koraka su znatno veće što se može vidjeti usporedbom Slika 32 sa Slika 25.



Slika 32 Oscilacije tlaka tijekom grubih koraka tranzijentne simulacije: gornjaka (gore) i donjaka (dolje)

Također, zanimljiv rezultat usporedbe oscilacija tlaka tijekom grubih koraka tranzijentne simulacije s oscilacijama tijekom finijih koraka simulacije je taj da se tijekom grubljih koraka javljaju značajne oscilacije tlaka i na donjaci propelera što nije bio slučaj kod finijih koraka pa se može zaključiti da su ove oscilacije tlaka isključivo rezultat numeričkih grešaka.

5.4. Akustička analiza rezultata tranzijentne simulacije

Sada je, koristeći polje tlaka dobiveno tranzijentnom simulacijom, moguće dobiti zapis oscilacija polja tlaka u željenim točkama domene. Pri tome valja imati na umu da je, zbog razloga iznesenih u poglavlju 3, moguće analizirati isključivo blisko akustično polje.

Pošto je cilj simulacije istražiti utjecaj interferencije između propelera postavljena su tri „mikrofona“ koji bilježe oscilacije tlaka tijekom vremenskih koraka. Pri tome je prvi mikrofon postavljen na pola puta između osi rotacija propelera i pomaknut prema dolje za 0.2 m. Druga dva mikrofona su postavljena na način da je udaljenost od osi rotacije bližeg propelera i mikrofona jednaka udaljenosti prvog mikrofona od osi rotacije oba propelera, a da je pri tome udaljenost druga dva mikrofona od osi rotacije daljeg propelera najveća moguća. Koordinate mikrofona te osi rotacije propelera su prikazane u Tablica 5.

Tablica 5 Položaji mikrofona u odnosu na osi rotacije propelera

Objekt	x koordinata [m]	y koordinata [m]	z koordinata [m]
Os rotacije prvog propelera	0.31	0	-
Os rotacije drugog propelera	-0.31	0	-
Mikrofon 1	0	0	-0.2
Mikrofon 2	0.62	0	-0.2
Mikrofon 3	-0.62	0	-0.2

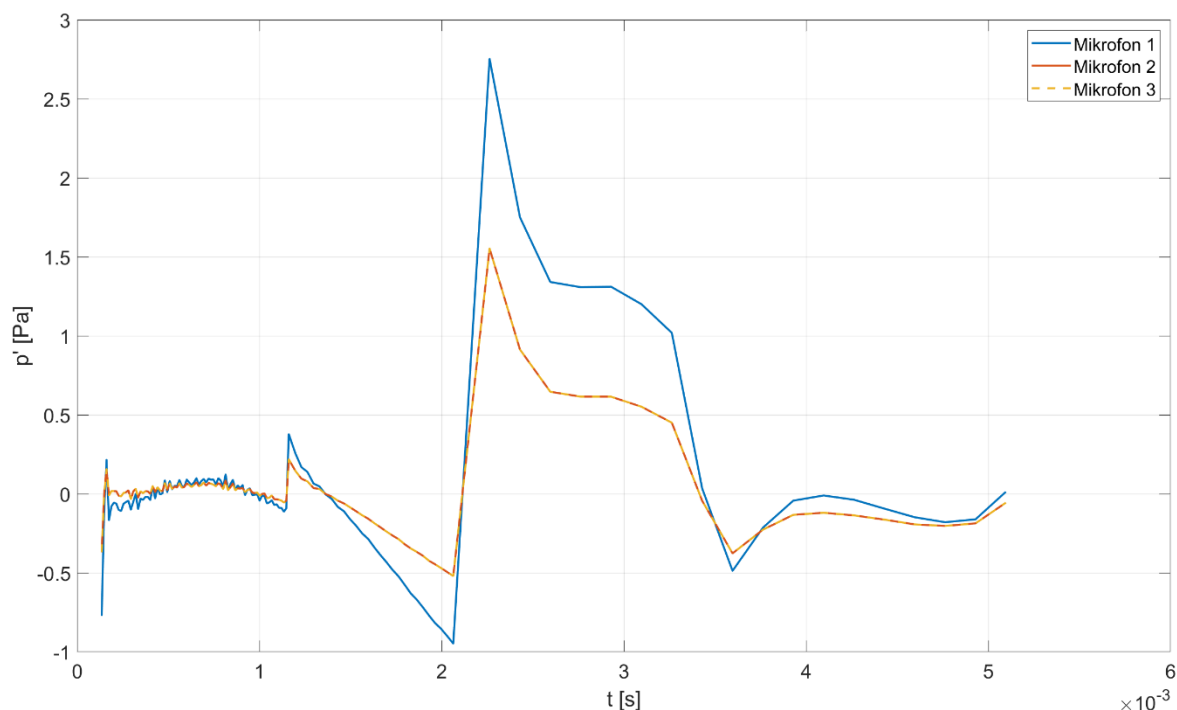
Ovakav raspored mikrofona omogućuje vrlo dobru analizu akustičke interferencije propelera u bliskom akustičkom polju pošto se mikrofon 1 nalazi na poziciji na kojoj je interferencija propelera najjača, dok su mikrofoni 2 i 3 postavljeni na ekvivalentnoj poziciji mikrofona 1 u odnosu na bliži propeler, ali dovoljno daleko od daljeg propelera da bi njegova buka bila minimalna zbog numeričkog prigušenja [18].



Slika 33 Položaji mikrofona u odnosu na propelere

Radi dodatne ilustracije, na Slika 33 je prikazan položaj mikrofona u odnosu na propelere u $x - z$ ravnini.

Sada je moguće dobiti zapis tlaka u ovim točkama te oduzimanjem srednjeg referentnog tlaka dobiti zapis akustičkog tlaka u vremenu prikazan na Slika 34.



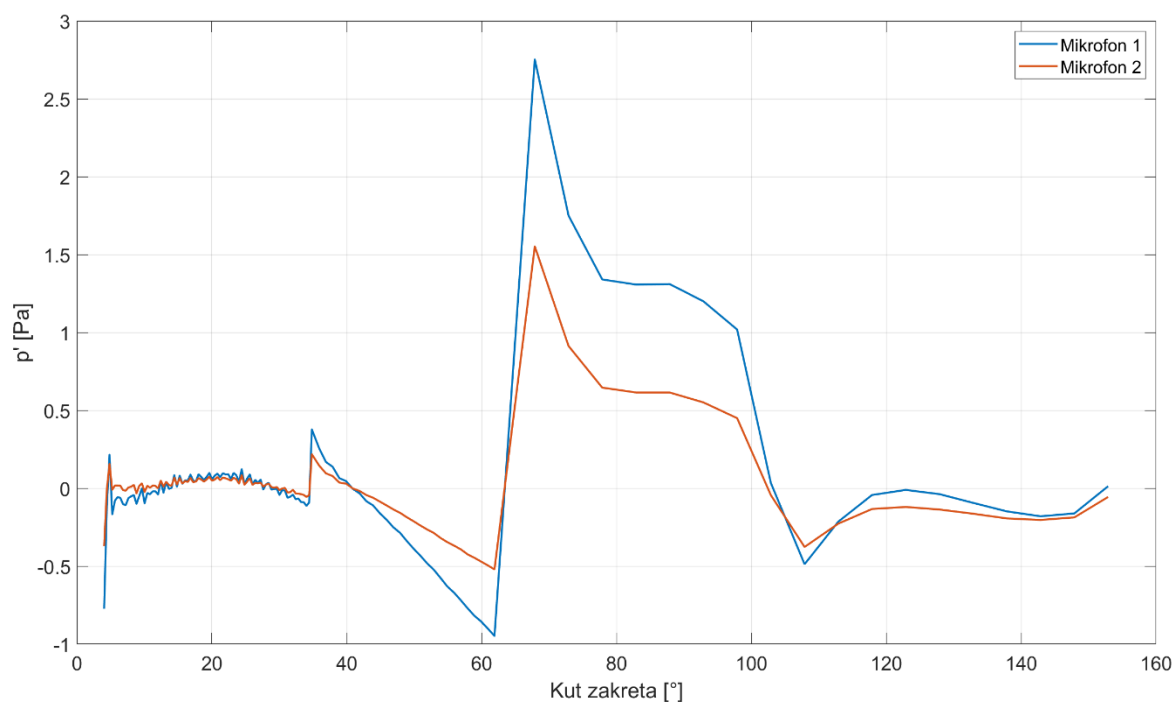
Slika 34 Akustički tlak u ovisnosti o vremenu na sva tri mikrofona

Najprije valja primijetiti da su zapisi akustičkog tlaka na mikrofona 2 i 3 jednaki što je očekivano pošto su oni postavljeni simetrično u odnosu na propelere. Zbog toga u daljnjim razmatranjima nije nužno promatrati i mikrofon 2 i mikrofon 3 pa će se analizirati samo rezultati s mikrofona 1 i 2.

Također, pošto vrijeme na osi x nije pretjerano korisna varijabla za analizu interakcije propelera, zgodnije je prikazati ovisnost akustičkog tlaka o kutu zakreta propelera kao što je učinjeno na Slika 35.

Na Slika 34 i Slika 35 se izvrsno vidi vrijednost simulacije s finijim vremenskim korakom pošto je u njima moguće vrlo dobro obuhvatiti i jako male oscilacije akustičkog tlaka. Nadalje na slikama valja primijetiti i dva vrlo oštra skoka koja se javljaju oko kuta zakreta od 60° i koji su posljedica povećane numeričke greške prilikom prelaska s manjeg na veći vremenski korak. Ipak, i nakon tog početnog poremećaja, vidljivo je da oko kuta zakreta od 90° postoje povećane oscilacije akustičkog tlaka, koje su posebno izražene za mikrofon 1.

Za razliku od prethodno analiziranih oscilacija pri kutu zakreta od 60° do 70° , oscilacije koje se protežu na rasponu kuteva zakreta od 80° do 100° su velikim dijelom fizikalne i posljedica su položaja lopatica propelera koje se pri tim kutevima zakreta pružaju u smjeru mikrofona.



Slika 35 Akustički tlak na mikrofona u ovisnosti o kutu zakreta propelera

Pri tome valja primijetiti da su sve oscilacije tlaka, bile one fizikalne ili numeričkog podrijetla, znatno izraženije na mikrofona 1. Ipak, ovo samo po sebi ne znači da postoji značajna interakcije među propelerima budući da bi i u slučaju nepostojanja ikakve interakcije među propelerima, mikrofon 1 trebao dobivati dvostruko veći efektivni akustički tlak iz jednostavnog razloga što prima poremećaje s oba propelera, dok mikrofon 2 (i 3) prima akustičke poremećaje samo s jednog propelera. Dakle, ukoliko postoji značajna akustička interferencija između dvaju propelera, efektivni akustički tlak na mikrofona 1 mora biti više nego dvostruko veći nego li na mikrofona 2.

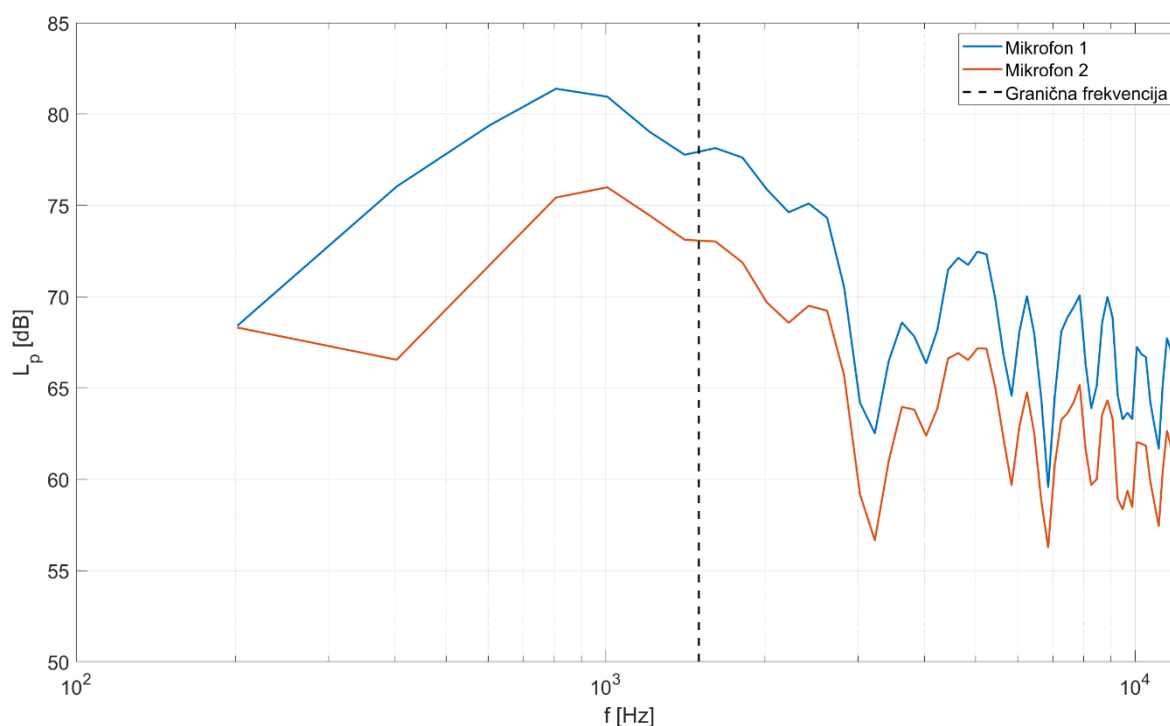
Premda je u ovom trenutku moguće izračunati efektivni akustički tlak na svakom od mikrofona, najprije će se provesti frekvencijska analiza akustičkog tlaka na mikrofona, a zatim će se na jednom mjestu prikazati iznosi efektivnog akustičkog tlaka i razine akustičkog tlaka s i bez A-težinske korekcije.

Prije samih rezultata frekvencijske analize, valja napomenuti da su razlučivost i raspon frekvencija koje se mogu dobiti diskretnom Fourierovom transformacijom ograničene ukupnim vremenom trajanja signala te brojem vremenskih intervala u kojemu je zapisan signal. Tako je najniža frekvencija koja se može dobiti jednaka inverznoj vrijednosti ukupnog trajanja signala,

što za ovaj slučaj znači da je, uz ukupno trajanje simulacije od približno $5 \cdot 10^{-3}$ s, najniža frekvencija obuhvaćena frekvencijskom analizom približno jednaka 200 Hz. Prema Nyquistovom teorem uzorkovanja, najveća frekvencija koja se može analizirati jednaka je polovici frekvencije uzorkovanja [39]. Pošto u ovom slučaju frekvencija uzorkovanja nije konstantna, može se baratati s njenom prosječnom vrijednošću koja iznosi 24 587 Hz, pa je maksimalna frekvencija koja se može dobiti jednaka 12 293.5 Hz. Ukupan broj frekvencija koji se može analizirati jednak je polovici ukupnog broja vremenskih intervala pa je i razlučivost definirana razlikom najveće i najmanje analizirane frekvencije podijeljen s polovicom ukupnog broja provedenih vremenskih koraka pa će ona biti jednaka najnižoj frekvenciji i u ovom slučaju iznositi 201.5 Hz.

Sasvim je jasno da ovakve karakteristike konačne frekvencijske analize nisu zadovoljavajuće, pri čemu je najproblematičnija vrlo gruba rezolucija koja nipošto nije dovoljna za kvalitetnu akustičku analizu. Ipak, valja imati na umu da ova ograničenja nisu posljedica metode provedene u ovom radu nego ograničenosti vremena i računalskih resursa za provedbu simulacije te bi se ovi problemi vrlo lako otklonili jednostavnim produljenjem vremena simulacije.

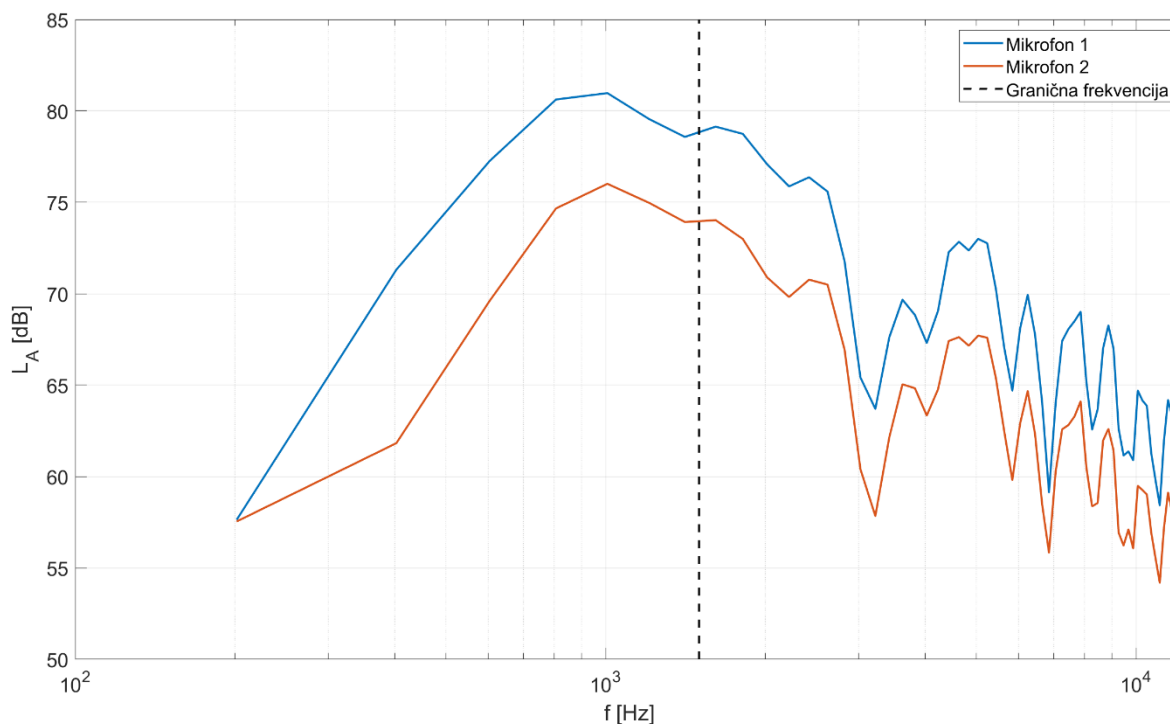
S time na umu, mogu se analizirati daljnji rezultati frekvencijske analize. Na Slika 36 su prikazane razine akustičkog tlaka po frekvencijama za mikrofone 1 i 2.



Slika 36 Razine akustičkog tlaka za mikrofone 1 i 2

Na Sliku 36, osim već diskutiranih ograničenja na raspon i rezoluciju, valja primijetiti i dodatno ograničenje postavljeno na frekvenciji od 1500 Hz, a koje proizlazi iz veličine kontrolnih volumena u proračunskoj mreži što je detaljnije analizirano u poglavlju 4.3. Zbog tog ograničenja, amplitude frekvencija većih od 1500 Hz se ne mogu smatrati pouzdanima.

Nadalje, za amplitude prikazane na slici 36 moguće je provesti A-težinsku korekciju opisanu u poglavlju 2.1, a koja korigira amplitude frekvencija prema ljudskoj osjetljivosti na pojedine frekvencije, što je prikazano na Slika 37.



Slika 37 A-korigirane razine akustičkog tlaka

Obzirom da se može promatrati relativno uzak raspon frekvencija između 200 i 1500 Hz, vidljivo je da se u ovom slučaju primjenom A-težinske korekcije ne mijenja značajno raspored amplituda po frekvencijama.

U oba slučaja, niska rezolucija frekvencijske analize stvara značajne probleme zbog kojih nije moguće uočiti karakteristične tonalne komponente buke propelera koje se podudaraju s frekvencijom prolaska lopatice propelera i njenim višim harmonicima. Zbog toga je nemoguće usporediti rezultate frekvencijske analize s eksperimentalno dobivenim rezultatima. Zbog toga je usporedbu s eksperimentalnim rezultatima moguće napraviti isključivo na temelju utjecaja interferencije na efektivni akustički tlak i ukupnu razinu buke.

Vrijednosti efektivnog akustičkog tlaka i ukupne razine akustičkog tlaka s i bez A-težinske korekcije su prikazane u Tablica 6.

Tablica 6 Sveukupni efektivni akustički tlakovi i razine akustičkog tlaka

Veličina	Mikrofon 1	Mikrofon 2
Efektivni akustički tlak [Pa]	0.5058	0.2950
Razina akustičkog tlaka [dB]	88.1	83.4
A-korigirani efektivni akustički tlak [Pa]	0.6547	0.3557
A-korigirana razina akustičkog tlaka [dBA]	90.3	85.0

Iz tablice je vidljivo da sveukupne vrijednosti glasnoće zvuka na mikrofону 1 nisu dvostruko veće nego li na mikrofону 2, što se može objasniti činjenicom da dio zvuka s udaljenijeg propelera ipak dopire i do mikrofona 2, ali svakako upućuje na to da nema značajne akustičke interakcije između propelera, odnosno da se za procjenu buke više propelera može koristiti jednostavna superpozicija buke jednog propelera. Ovakav zaključak je u skladu s eksperimentalnim ispitivanjima akustičke interakcije koplanarnih propelera [40], što pokazuje da unatoč svim ograničenjima i dalje korektno predviđa utjecaj akustičke interakcije propelera. Same vrijednosti iz tablice 6 nije moguće izravno usporediti s eksperimentalnim rezultatima pošto se eksperimenti mahom bave mjerenjem zvuka u dalekom akustičkom polju. Ipak, za procjenu moguće je iskoristiti aproksimaciju zakona inverza kvadrata udaljenosti, kojom se za mikrofon 2, može dobiti efektivni akustički tlak na udaljenosti od 1.5 m od propelera iznosa 0.1746 Pa, odnosno razina akustičkog tlaka od 78.8 dB što se jako dobro podudara s eksperimentalnim rezultatima gdje dobivena razina akustičkog tlaka iznosila 75 dB [40]. Ipak, valja imati na umu da zakon inverza kvadrata udaljenosti nipošto nije zamjena za neku od metoda širenja zvuka opisanih u poglavlju 3.3.2, nego se ovdje samo koristi za okvirnu usporedbu rezultata simulacije s eksperimentalnim rezultatima.

6. ZAKLJUČAK

Nakon analize utjecaja buke na čovjeka i iznošenja teorijskih osnova akustike koje uključuju osnovne veličine i karakteristike zvuka te izvode i elementarna rješenja valne jednačbe, u radu je iznesen pregled osnovnih metoda računalne aeroakustike s posebnim naglaskom na hibridne metode u kojima je moguće koristiti simulacije računalne dinamike fluida za modeliranje akustičkih izvora i analizu buke u bliskom akustičkom polju.

Zatim je, u praktičnom dijelu rada na temelju podataka proizvođača izrađen CAD model propelera APC 11x8 koji se koristi u daljnjim simulacijama. CAD model je korišten za izradu proračunske mreže s dva koplana propelera koji se okreću u suprotnom smjeru. Nakon uvođenja rubnih uvjeta, provedena je stacionarna simulacija koristeći pristup s višestrukim koordinatnim sustavima (MRF) čija su rezultirajuća polja brzine i tlaka korištena kao početni uvjeti u tranzijentnoj simulaciji.

Najveći problem prilikom provođenja tranzijentne simulacije je predstavljala iznimno velika računalna složenost simulacije zbog čega je umjesto s planiranim korakom koji odgovara kutu zakreta propelera od 1° po koraku, simulacija dovršena s korakom od 5° te sa skraćenim vremenom simulacije što je imalo negativne posljedice na kvalitetu rezultata pri frekvencijskoj analizi buke u bliskom akustičnom polju.

Na temelju polja brzine i tlaka u tranzijentnoj simulaciji, koristeći Ffowcs-Williamsovu i Hawkingsovu analogiju, su rekonstruirana polja koja predstavljaju dipolne i kvadrupolne akustičke izvore, dok je, zbog prirode strujanja oko propelera zaključeno da nema monopolnih izvora zvuka.

Premda je ograničeno vrijeme simulacije značajno otežalo analizu buke u bliskom akustičkom polju, oni rezultati koje je moguće usporediti s eksperimentalnim rezultatima pokazuju vrlo dobro slaganje. Ovo se prije svega odnosi na zaključak da ne postoji značajna konstruktivna interakcija između propelera te da je stoga za proračune buke višestrukih koplanskih propelera moguće iskoristiti princip superpozicije buke jednog izoliranog propelera. Rezultati koji se odnose na efektivni akustički tlak i razinu akustičkog tlaka svojim iznosom se također dobro slažu s eksperimentalno dobivenim rezultatima što dodatno potvrđuje ispravnost simulacije.

Ipak, moguća su daljnja poboljšanja kojima bi se moglo postići još bolje rezultate. Prije svega bi trebalo provesti značajno dulju simulaciju kako bi se postigao veći raspon frekvencija u frekvencijskoj analizi te finija rezolucija kojom bi bilo moguće obuhvatiti i tonalne zvukove.

Pri tome je uputno koristiti finiji korak od 1° po vremenskom koraku kako bi se izbjeglo povećane oscilacije tlaka povezane s grubljim korakom simulacije.

Nadalje, korištenjem nestlačivog modela strujanja omogućeno je relativno točno modeliranje izvora zvuka koji nastaju kao posljedica strujanja oko propelera i time je ustanovljeno da postoji minimalna interakcija propelera u ovom pogledu. Međutim, propeleri mogu djelovati na akustičko polje oko sebe i kroz refleksiju zvučnih valova koji dolaze s drugog propelera što nije moguće modelirati nestlačivim strujanjem. Uvođenjem stlačivosti, složenost simulacije bi značajno rasla, ali bi se u tom slučaju moglo obuhvatiti i refleksiju valova. Efektivni akustički tlak na ovaj način se ne bi značajno mijenjao pošto se refleksijom ne uvodi dodatna energija u akustički sustav, ali bi bilo moguće očekivati određene promjene u frekvencijskom spektru.

Za kraj, kao dodatno poboljšanje metodologije korištene u ovom radu, umjesto nestacionarnog $k - \omega$ SST modela turbulencije bi se mogli koristiti složeniji, ali i precizniji modeli turbulencije poput LES-a koji bi dali nešto bolje rezultate u vrtložnom tragu propelera.

LITERATURA

- [1] Tattersall, Ian. (2009). Language and the origin of symbolic thought. *Cognitive Archaeology and Human Evolution*. 109-116.
- [2] Birgitta, Berglund and Lindvall, Homas: A Draft Document of Community Noise. Who Environmental Health Criteria 12, World Health Organization, Geneva (1995).
- [3] Singh, N., & Davar, S. C. (2004). Noise pollution-sources, effects and control. *Journal of Human ecology*, 16(3), 181-187. Herold, Z.: Računalna i inženjerska grafika, Zagreb, 2003.
- [4] zvuk. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 25.10.2024. <<https://www.enciklopedija.hr/clanak/zvuk>>.
- [5] Glorig, Aram. "The problem of noise in industry." *American Journal of Public Health and the Nations Health* 51.9 (1961): 1338-1346.
- [6] Berglund, Birgitta. "Guidelines for community noise." *World Health Organization* (1999).
- [7] Rabinowitz, Peter M. "Noise-induced hearing loss." *American family physician* 61.9 (2000): 2749-2756.
- [8] Sliwinska-Kowalska, Mariola, and Adrian Davis. "Noise-induced hearing loss." *Noise and Health* 14.61 (2012): 274-280.
- [9] H. Lazarus, 1998, Noise and Communication: The present state. In N.L. Carter and R.F.S. Job (Eds.) Noise as a Public Health Problem, Vol. 1, pp. 157-162, Noise Effects '98 PTY Ltd., Sidney, Australia.
- [10] Babisch, Wolfgang. (2005). Noise and health. *Environmental health perspectives*. 113. A14-5. 10.1007/1-4020-4307-4_2.
- [11] Ising, H., and T. Gunther. "Interaction between noise-induced stress and magnesium losses: relevance for long-term health effects." *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*. Vol. 1997. No. 4. Institute of Noise Control Engineering, 1997.
- [12] Jacobsen, Finn. *An elementary introduction to acoustics*. DTU, 2007.
- [13] Kraut, B. (2009) *Krautov strojarški priručnik*. 11. izdanje Zagreb: Sajema d.o.o.
- [14] P.A. Nelson: An introduction to acoustics. Chapter 1 in *Fundamentals of Noise and Vibration*, ed. F.J. Fahy and J. Walker. E & FN Spon, London, 1998.
- [15] P.M. Morse: *Vibration and Sound* (2nd edition). The American Institute of Physics, New York, 1983.

- [16] "Frequency weighting equations". Cross Spectrum. 2004. [Archived](#) from the original on 2011-06-17 – pristupljeno 8. 11. 2024.
- [17] Virag, Z., Krizmanić S. (2021) *Dinamika Plinova*. 1. izdanje, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje
- [18] C.A. Wagner, T. Hüttl, P. Sagaut: *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge University Press, 2007
- [19] Russell, Daniel A. et al. "Acoustic monopoles, dipoles, and quadrupoles: An experiment revisited." *American Journal of Physics* 67 (1999): 660-664.
- [20] Azenić, A. (2016). *Implementacija i validacija modela propagiranja zvučnih valova* (Diplomski rad). Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje. Preuzeto s <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:925035>
- [21] Sjöberg, Erika. "Implementation of Aeroacoustic Methods in OpenFOAM." (2016).
- [22] Larsson, Johan. *Computational aero acoustics for vehicle applications*. Diss. Chalmers tekniska högsk., 2002.
- [23] Launder, Brian & Spalding, D.B.. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flow Computer Methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. 269-289. 10.1016/0045-7825(74)90029-2.
- [24] Wilcox, David. (2008). Formulation of the $k - \omega$ Turbulence Model Revisited. *Aiaa Journal - AIAA J*. 46. 2823-2838. 10.2514/1.36541.
- [25] Menter, F. R. (1992). Improved two-equation k - ω turbulence models for aerodynamic flows. (No. A-92183).
- [26] Ask, J. (2008). *Predictions of aerodynamically induced wind noise around ground vehicles* (No. 2762).
- [27] FfowcsWilliams, J.E. and Hawkings, D.L. (1969): Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 264(1151):321–342.
- [28] Brentner, K. S., & Farassat, F. (1998). Analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces. *AIAA journal*, 36(8), 1379-1386.
- [29] Mankbadi, R. R., Afari, S., & Golubev, V. V. (2019). Towards high-fidelity analysis of noise radiation and control of propeller-driven UAV. In *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* (p. 2632).
- [30] Advanced Precision Composites (2023). APC Propeller Nomenclature
- [31] Advanced Precision Composites (2024). APC Propeller Geometry Data
- [32] Advanced Precision Composites (2024). PROP-DATA-FILE_202410

- [33] Advanced Precision Composites (2024). <https://www.apcprop.com/wp-content/uploads/2017/03/LP11030.jpg> posjećeno 15. 11. 2024.
- [34] Airfoil Tools (2024). Clark Y airfoil <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=clarky-il> posjećeno 15. 11. 2024.
- [35] Penkov, I. & Aleksandrov, D. (2017). Analysis and study of the influence of the geometrical parameters of mini unmanned quad-rotor helicopters to optimise energy saving. *INTERNATIONAL JOURNAL OF AUTOMOTIVE AND MECHANICAL ENGINEERING*. 14. 4730-4746. 10.15282/ijame.14.4.2017.11.0372.
- [36] Balatinec, L. (2019). *Pregled metode povezivanja rotorske i statorske mreže u proračunskoj mehanici fluida za simulacije turbostrojeva* (Diplomski rad). Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje. Preuzeto s <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:395363>
- [37] Gregor Cvijetić. *Steady State Methods for Turbomachinery*. Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, 2014.
- [38] Peters, J. M. H. (2001). Total curvature of surfaces (via the divergence of the normal). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(6), 795–810. <https://doi.org/10.1080/00207390110053766>
- [39] teorem uzorkovanja. *Tehnički leksikon (2007), mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2024. Pristupljeno 20.11.2024.
<<https://tehnicki.lzmk.hr/clanak/teorem-uzorkovanja>>.
- [40] Bu, H., Wu, H., Bertin, C., Fang, Y., & Zhong, S. (2021). Aerodynamic and acoustic measurements of dual small-scale propellers. *Journal of Sound and Vibration*, 511, 116330.