

Usporedba numeričkog i analitičkog proračuna zareznog djelovanja kod vratila

Butković, Andrija

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:271367>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-31**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Andrija Butković

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Andrija Butković

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem svojim roditeljima, Željki i Petru te djevojci Katji na iznimnoj podršci i ljubavi pruženoj kroz prijediplomski studij. Također zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Skozritu za svu pruženu pomoć tijekom izrade završnog rada.

Andrija Butković



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 24 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 24 –	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Andrija Butković** JMBAG: **0035219654**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Usporedba numeričkog i analitičkog proračuna zarezanog djelovanja kod vratila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Comparison of numerical and analytical calculation of notch action in shafts**

Opis zadatka:

Vratila su strojni elementi za prijenos snage i gibanja koja na sebi nose strojne dijelove koji omogućavaju njihovu funkcionalnost. Zbog konstrukcijskih razloga vratila su promjenjivog promjera te sadržavaju specifične geometrijske karakteristike za spoj ostalih strojnih dijelova. Usljed opterećenja i same geometrije vratila dolazi do pojave koncentracije naprezanja na vratilu. U ovom završnom radu razmatrat će se vratilo koje služi kao među vratilo.

Za definirane podatke o vratilu, opterećenju i pripadnim strojnim dijelovima koji se na njemu nalaze potrebno je dimenzionirati i oblikovati vratilo te sve potrebne prijelaze između pojedinih stupnjeva vratila. Proračun je potrebno provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć

Zadatak zadan:

30. 11. 2023.

Datum predaje rada:

1. rok: 22. i 23. 2. 2024.
2. rok (izvanredni): 11. 7. 2024.
3. rok: 19. i 20. 9. 2024.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 26. 2. – 1. 3. 2024.
2. rok (izvanredni): 15. 7. 2024.
3. rok: 23. 9. – 27. 9. 2024.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

Skozrit Ivica

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

V Soldo

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE	VI
POPIS OZNAKA	VII
SAŽETAK.....	X
SUMMARY	XI
1. UVOD.....	1
2. Vratila	2
2.1. Podjela vratila	2
2.2. Materijali vratila.....	3
2.3. Rukavci	3
2.4. Strojni elementi na vratilima.....	4
2.4.1. Zupčanici.....	4
2.4.2. Remenice i lančanici	6
2.4.3. Spojke	7
2.4.4. Ležajevi.....	8
2.5. Tok proračuna i dimenzioniranje vratila	10
3. Metoda konačnih elemenata	11
3.1. Konačni elementi	11
3.2. 3D konačni elementi	12
3.2.1. Tetraedarski konačni elementi	12
3.2.2. Heksaedarski konačni elementi.....	14
4. ANALITIČKI PRORAČUN VRATILA	16
4.1. Parametri zadatka	16
4.2. Određivanje opterećenja na vratilu	17
4.3. Proračun idealnog oblika vratila	19
4.3.1. Presjeci 1 do 3	20
4.3.2. Presjek 3 (desno).....	21
4.3.3. Presjek 4.....	21
4.3.4. Presjek 5.....	22
4.3.5. Presjek 6 (lijevo).....	22
4.3.6. Presjeci od 6 do 8	23
4.3.7. Prethodne dimenzije vratila	23
4.4. Određivanje definitivnih dimenzija vratila	24
4.4.1. Izbor valjnih ležajeva oslonaca A i B	24
4.4.2. Određivanje promjera na dosjedima zupčanika	25
4.4.3. Određivanje promjera međustupnjeva	26
4.4.4. Definitivne dimenzije vratila	27
4.5. Kontrolni proračun dinamičke sigurnosti	28

4.5.1.	Presjek I	30
4.5.2.	Presjek II	31
4.5.3.	Presjek III.....	31
4.5.4.	Presjek IV.....	32
4.5.5.	Presjek V	33
4.5.6.	Presjek VI.....	35
4.5.7.	Presjek VII	35
4.5.8.	Presjek VIII.....	36
4.5.9.	Presjek IX.....	37
4.5.10.	Presjek X.....	37
4.6.	Provjera progiba, nagiba i kuta uvijanja	38
4.6.1.	Provjera na mjestu Z_1 u horizontalnoj ravnini	38
4.6.2.	Provjera na mjestu Z_1 u vertikalnoj ravnini	39
4.6.3.	Provjera na mjestu Z_2 u horizontalnoj ravnini	41
4.6.4.	Provjera na mjestu Z_2 u vertikalnoj ravnini	42
4.6.5.	Ukupni progib vratila i nagib elastične linije u osloncima	43
4.6.6.	Kut uvijanja vratila	44
5.	NUMERIČI PRORAČUN VRATILA	45
5.1.	Verifikacija štapa s jednim prijelaznim stupnjem opterećenim na savijanje	45
5.2.	Verifikacija štapa s jednim prijelaznim stupnjem opterećenim na uvijanje	48
5.3.	Verifikacija savijanja štapa na dva oslonca opterećenim silom na sredini	51
5.4.	Analiza vratila	53
5.5.	Prikaz izrade podmodela presjeka II.....	58
5.6.	Rezultati numeričke analize podmodela vratila	62
6.	ZAKLJUČAK.....	64
	LITERATURA.....	66
	PRILOZI.....	67

POPIS SLIKA

Slika 1.	Ravna vratila i koljenasto vratilo [1, 2]	2
Slika 2.	Teleskopsko i savitljivo vratilo [3, 4].....	3
Slika 3.	a – cilindrični čelni rukavac, b – cilindrični unutrašnji rukavac, c – konični rukavac, d – kuglasti rukavac [7]	4
Slika 4.	Reduktor spojen na elektromotor [5].....	5
Slika 5.	Čelnik s kosim zubima i stožasti zupčasti par [8, 9]	5
Slika 6.	Remenski prijenosnik [10]	6
Slika 7.	Nazubljeni klinasti remen [11]	6
Slika 8.	Lančani prijenosnik [12]	7
Slika 9.	Kruta spojka [13].....	7
Slika 10.	Spojka automobila [14]	8
Slika 11.	Klizni ležaj [15].....	8
Slika 12.	Valjni ležajevi [16].....	9
Slika 13.	Vrste konačnih elemenata [17].....	12
Slika 14.	Tetraedarski element 1. reda [18].....	13
Slika 15.	Tetraedarski element 2. reda [18].....	13
Slika 16.	Heksaedarski element 1. reda [18]	14
Slika 17.	Heksaedarski element 2. reda [18]	14
Slika 18.	Skica dispozicije vratila.....	16
Slika 19.	Izometrična skica vratila	17
Slika 20.	Vertikalna i horizontalna ravnina opterećenja vratila	18
Slika 21.	Kritični presjeci pri dimenzioniranju vratila	20
Slika 22.	Konstruktivske dužine i promjeri vratila	27
Slika 23.	Vratilo s označenim kritičnim presjecima	28
Slika 24.	Dijagram za faktor veličine strojnog dijela b_1 [5]	29
Slika 25.	Dijagram za faktor kvalitete površinske obrade b_2 [5].....	29
Slika 26.	Faktor β_{kf2} kod savijanja okretanjem i promjeni promjera [5]	30
Slika 27.	Faktor zareznog djelovanja kod savijanja vratila s utorom za pero [5].....	32
Slika 28.	Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja vratila s utorom za pero [5]	33
Slika 29.	Faktor $\beta_{ki1,4}$ kod uvijanja i promjeni promjera [5].....	34
Slika 30.	Proračunska skica u horizontalnoj ravnini za progib na mjestu Z_1	38
Slika 31.	Proračunska skica u vertikalnoj ravnini za progib na mjestu Z_1	40
Slika 32.	Proračunska skica u horizontalnoj ravnini za progib na mjestu Z_2	41
Slika 33.	Proračunska skica u vertikalnoj ravnini za progib na mjestu Z_2	42
Slika 34.	Skica vratila za proračun kuta uvijanja	44
Slika 35.	Model za verifikaciju savijanja s opterećenjem i rubnim uvjetima.....	45
Slika 36.	Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (5447 elemenata)	47
Slika 37.	Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (651968 elemenata)	47
Slika 38.	Model za verifikaciju uvijanja s opterećenjem i rubnim uvjetima.....	48
Slika 39.	Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (14459 elemenata)	50
Slika 40.	Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (2731438 elemenata)	50
Slika 41.	Model za verifikaciju savijanja na dva oslonca s opterećenjem i rubnim uvjetima	51

Slika 42.	Prikaz rezultata numeričke analize modela štapa na dva oslonca (8067 elemenata)	52
Slika 43.	Prikaz rezultata numeričke analize modela štapa na dva oslonca (140241 elemenata)	52
Slika 44.	3D model vratila u <i>Abaqus-u</i> ®	53
Slika 45.	Model vratila s definiranim referentnim točkama	54
Slika 46.	Opterećenja na vratilu unutar <i>Abaqus-a</i>	55
Slika 47.	Mreža konačnih elemenata na vratilu	55
Slika 48.	Globalni model vratila s 72725 elemenata	56
Slika 49.	Globalni model vratila s 188917 elemenata	56
Slika 50.	Globalni model vratila s 322115 elemenata	56
Slika 51.	Globalni model vratila s 991851 elemenata	57
Slika 52.	Presjek I globalnog modela vratila s 991851 elemenata	57
Slika 53.	Izbornik za kopiranje modela	58
Slika 54.	<i>Edit Attributes</i> izbornik za definiranje podmodela	58
Slika 55.	<i>Sketch</i> za izradu podmodela presjeka II	59
Slika 56.	3D model presjeka II	59
Slika 57.	Izbornik za odabir vrste rubnog uvjeta	60
Slika 58.	Površine podmodela kojima se dodjeljuje rubni uvjet <i>submodel</i>	60
Slika 59.	Izbornik za definiranje rubnog uvjeta podmodela	61
Slika 60.	Mreža konačnih elemenata podmodela presjeka II	61
Slika 61.	Rezultati analize podmodela presjeka II	62

POPIS TABLICA

Tablica 1. Parametri zadatka	16
Tablica 2. Promjeri idealnog vratila na presjecima od 1 do 3	21
Tablica 3. Promjeri idealnog vratila na presjecima od 6 do 8	23
Tablica 4. Karakteristike ležaja 6204	25
Tablica 5. Dimenzije pera	25
Tablica 6. Analitičke vrijednosti naprezanja štapa opterećenog na savijanje	46
Tablica 7. Numerički rezultati naprezanja štapa opterećenog na savijanje	46
Tablica 8. Analitičke vrijednosti naprezanja štapa opterećenog na uvijanje	49
Tablica 9. Numerički rezultati naprezanja štapa opterećenog na uvijanje	49
Tablica 10. Rezultati analitičkog proračuna štapa na dva oslonca	52
Tablica 11. Numerički rezultati štapa na dva oslonca	52
Tablica 12. Rezultati analize globalnog modela vratila	57
Tablica 13. Usporedba analitičkih i numeričkih rezultata naprezanja presjeka	62

POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE

AB-00-001 Vratilo

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
b	mm	širina zupčanika
B	mm	širina ležaja
b	mm	širina pera
b_1	-	faktor veličine strojnog dijela
b_2	-	faktor kvalitete površinske obrade
C	kN	dinamička nosivost ležaja
C_0	kN	statička nosivost ležaja
C_1	kN	dinamičko opterećenje ležaja
c_1	-	faktor za odnose $D/d \neq 2$
c_2	-	faktor za odnose $D/d \neq 1,4$
d	mm	promjer, manji promjer
D	mm	promjer, veći promjer
d_1	mm	diobeni promjer zupčanika Z_1
d_2	mm	diobeni promjer zupčanika Z_2
d_a	mm	minimalni promjer naslona ležaja
d_i	mm	promjer presjeka
d_{\min}	mm	minimalni potrebni promjer presjeka
E	N/mm ²	modul elastičnosti
f	mm	približni ukupni progib
F_A	N	reaktivna sila oslonca A
F_{Ah}	N	horizontalna komponenta reaktivne sile oslonca A
F_{AH}	N	sila oslonca A u horizontalnoj ravnini pri proračunu progiba
f_{Ah_i}	mm	progib u horizontalnoj ravnini oslonca A
F_{Av}	N	vertikalna komponenta reaktivne sile oslonca A
F_{AV}	N	sila oslonca A u vertikalnoj ravnini pri proračunu progiba
f_{Av_i}	mm	progib u vertikalnoj ravnini oslonca A
F_B	N	reaktivna sila oslonca B
F_{Bh}	N	horizontalna komponenta reaktivne sile oslonca B
F_{BH}	N	sila oslonca B u horizontalnoj ravnini pri proračunu progiba
f_{Bh_i}	mm	progib u horizontalnoj ravnini oslonca B
F_{Bv}	N	vertikalna komponenta reaktivne sile oslonca B
F_{BV}	N	sila oslonca B u vertikalnoj ravnini pri proračunu progiba
f_{Bv_i}	mm	progib u vertikalnoj ravnini oslonca B
f_{dop}	mm	dopušteni progib
f_{h_i}	mm	progib mjesta vratila u horizontalnoj ravnini
F_r	N	radijalna sila na zupčaniku
F_t	N	tangencijalna sila na zupčaniku

$f_{v,i}$	mm	progib mjesta vratila u vertikalnoj ravnini
G	N/mm ²	modul smičnosti
G_{Z1}	N	težina zupčanika Z_1
G_{Z2}	N	težina zupčanika Z_2
h	mm	visina pera
I	mm ⁴	moment tromosti
I_p	mm ⁴	polarni moment tromosti
l	mm	razmak oslonaca vratila
L_{10h}	h	vijek trajanja ležaja
L_{10h_min}	h	potrebni nazivni vijek trajanja
l_i	mm	proračunska udaljenost
l_t	mm	duljina vratila na kojoj djeluje moment uvijanja
M_f	Nmm	moment savijanja
$M_{h,i}$	Nmm	moment savijanja u horizontalnoj ravnini presjeka i
M_i	Nmm	moment savijanja presjeka i
M_{red}	Nmm	reducirani moment
$M_{red,i}$	Nmm	reducirani moment presjeka i
$M_{v,i}$	Nmm	moment savijanja u vertikalnoj ravnini presjeka i
n_m	okr/min	brzina vrtnje
P_r	kN	ekvivalentno dinamičko opterećenje ležaja
r_a	mm	minimalni radijus zaobljenja naslona ležaja
R_a	μm	srednje odstupanje profila
R_m	N/mm ²	vlačna čvrstoća
R_{max}	μm	najveća visina neravnina
S	-	postojeća sigurnost
$S_{potr.}$	-	potrebna sigurnost
T	Nmm	moment uvijanja
t_1	mm	dubina utora za pero na glavini
$t_{1,max}$	mm	najveća dubina utora za pero na glavini
W	mm ³	moment otpora
W_i	mm ³	moment otpora presjeka i
x	mm	udaljenost presjeka od oslonca
y	mm	udaljenost presjeka od oslonca
α	°	kut zahvatne crte zupčanika
α_0	-	faktor čvrstoće materijala
$\alpha_{h,i}$	rad	kut nagiba zamišljene osi vratila u horizontalnoj ravnini
$\alpha_{v,i}$	rad	kut nagiba zamišljene osi vratila u vertikalnoj ravnini
β	°	kut nagiba
$\beta_{Ah,i}$	rad	nagib elastične linije oslonca A u horizontalnoj ravnini
$\beta_{Av,i}$	rad	nagib elastične linije oslonca A u vertikalnoj ravnini
$\beta_{Bh,i}$	rad	nagib elastične linije oslonca B u horizontalnoj ravnini

β_{Bv_i}	rad	nagib elastične linije oslonca B u vertikalnoj ravnini
β_{kf}	-	faktor zareznog djelovanja pri savijanju
β_{kf2}	-	faktor zareznog djelovanja savijanja okretanjem štapova kod kojih se presjek mijenja u zavisnosti od R_m
β_{kt}	-	faktor zareznog djelovanja pri uvijanju
$\beta_{kt1,4}$	-	faktor zareznog djelovanja uvijanja okretanjem štapova kod koji se presjek mijenja u zavisnosti od R_m
ε	-	eksponent vijeka trajanja za ležajeve
ρ	mm	radijus zakrivljenosti
σ_f	N/mm ²	naprezanje pri savijanju
$\sigma'_{f,dop}$	N/mm ²	dopušteno naprezanje
σ_{fDN}	N/mm ²	trajna dinamička čvrstoća pri čisto naizmjeničnom promjenjivom naprezanju na savijanje
σ_{red}	N/mm ²	reducirano naprezanje
τ_{fDN}	N/mm ²	trajna dinamička čvrstoća pri čisto naizmjeničnom promjenjivom naprezanju na uvijanje
φ	-	faktor udara
φ	°	kut uvijanja
φ_{dop}	°	dopušteni kut uvijanja
ν	-	Poissonov faktor

SAŽETAK

Vratila su jedan od neizostavnih strojnih elemenata u velikom broju industrija, strojeva i uređaja. Zbog konstrukcijskih razloga često su izrađena s promjenjivim promjerom s obzirom na uzdužnu os vratila. Prilikom opterećenja vratila, na mjestima promjene promjera, dolazi do koncentracije naprezanja. Koncentracije naprezanja na vratilu u ovom su radu određena analitičkim proračunom. Analitički koncentracije naprezanja računaju se pomoću nominalnog naprezanja presjeka i faktora zarezno djelovanja. Naprezanja izazvana faktorom zarezno djelovanja moraju ispunjavati uvjete sigurnosti pri konstrukciji vratila. Uz analitički proračun, provedena je numerička analiza vratila te su rezultati uspoređeni.

Prvi dio rada sadrži teorijski prikaz vezan uz vratila i metodu konačnih elemenata. Opisane su vrste i izvedbe vratila. Također su prikazani i opisani neki od strojnih elemenata koji se mogu nalaziti na vratilima. Teorijski osvrt na metodu konačnih elemenata objašnjava njezino korištenje te prikazuje konačne elemente za 3D analizu.

Nakon teorijskog dijela, proveden je analitički proračun vratila. Kroz proračun je određeno opterećenje na vratilu nakon definiranja parametara zadatka. Vratilo je dimenzionirano s obzirom na opterećenje, zatim je provjerena dinamička sigurnost vratila uzevši u obzir utjecaje faktora zarezno djelovanja kod kritičnih presjeka vratila.

U trećem dijelu rada prikazan je numerički proračun vratila i verifikacijskih modela. Konačan oblik vratila modeliran je u programu *Solidworks 2020*® te je pomoću njega provedena numerička analiza u programskom paketu *Abaqus*®. Dobiveni rezultati analitičkog i numeričkog proračuna vratila međusobno su uspoređeni.

Ključne riječi: vratilo, koncentracija naprezanja, faktor zarezno djelovanja, metoda konačnih elemenata

SUMMARY

Shafts are one of the essential machine elements in a wide range of industries, machinery, and devices. Due to design considerations, they are often manufactured with variable diameters along the longitudinal axis of the shaft. When subjected to loads, stress concentration occurs at points where the diameter changes. In this study, stress concentrations on the shaft are presented using an analytical method. Analytical methods calculate stress concentrations based on the nominal stress of the cross-section and the notch effect factor. Stresses induced by the notch effect factor must meet safety requirements during shaft design. In addition to the analytical calculations, a numerical analysis of the shaft was performed, and the results were compared.

The first part of the paper provides a theoretical overview related to shafts and the finite element method. Different types and designs of shafts are described. Additionally, several machine elements that can be found on shafts are presented and described. The theoretical review of the finite element method explains its use and demonstrates finite elements for 3D analysis.

Following the theoretical part, an analytical calculation of the shaft was conducted. Through the calculation, the load on the shaft was determined after defining the task parameters. The shaft was dimensioned according to the load. Then, the dynamic safety of the shaft was verified, taking into account the effects of the notch factor at critical cross-sections of the shaft.

In the third part of the paper, a numerical calculation of the shaft and verification models is presented. The final shape of the shaft was modeled in *Solidworks 2020*® and a numerical analysis was conducted using the *Abaqus*® software package. The results of the analytical and numerical calculations of the shaft were compared.

Key words: shaft, stress concentrations, notch effect factor, finite element method

1. UVOD

Industrijski napredak čovječanstva obilježe je različitim izumima koji su postepeno zamjenjivali ručnu radnu snagu. Od ranih strojeva kao npr. vjetrenjače i mlinovi koristilo se vratilo za prijenos snage. Razvojem tehnologije i industrije uzrokovan je i razvoj samih vratila. Već u 19. stoljeću pojavom parnog stroja i industrijske revolucije vratila su postala neizostavan dio prijenosa snage. Njihova funkcija prijenosa rotacijskog gibanja i okretnog momenta postala je osnova za razvoj raznih modernih strojeva, npr. automobila, elektromotora, turbina itd.

Danas, vratila su ključni strojni elementi velikog broja strojeva i industrija. Njihova široka primjena u industriji, posebno u sektorima poput energetike, transporta i proizvodnje, zahtjeva pravilan pristup konstruiranju i proračunu vratila kako bi cjelokupni sustav mogao funkcionirati. Nepravilna konstrukcija vratila može uzrokovati povećane deformacije, koncentracije naprezanja, pa čak i katastrofalne lomove vratila, što može uzrokovati velike financijske gubitke.

U ovom radu dimenzionirano je vratilo pomoću analitičkog proračuna u nekoliko faza. Za proračun su zadani potrebni parametri zadatka te su prikazani rezultati proračuna. Vratilo vrši funkciju među vratila proizvoljnog prijenosnika snage, gdje je cilj postići redukciju brzine, a time povećati izlazni moment. Poseban naglasak stavlja se na provjeru dinamičke sigurnosti vratila gdje se provjerava utjecaj faktora zareznog djelovanja kod promjene promjera vratila. Nakon analitičkog proračuna provedena je numerička analiza 3D modela vratila u programskom paketu *Abaqus*®.

Cilj ovog rada je usporediti analitičke i numeričke rezultate naprezanja na dijelovima vratila gdje se pojavljuje utjecaj zareznog djelovanja.

2. Vratila

Vratila su strojni elementi koji se rotiraju oko vlastite osi te prenose okretni moment tj. korisnu snagu. Zbog svoje funkcije prijenosa snage, vratila su gotovo neizbježan element svakog radnog stroja. Na sebi nose ostale strojne elemente za prijenos snage i omogućavanje rotacije, tj. vrtnje. Neki od tih strojnih elemenata su zupčanici, remenice, tarenice, ležajevi, spojke, kočnice itd.

2.1. Podjela vratila

Osnovna podjela vratila proizlazi od položaja njihove geometrijske osi, tako mogu biti:

- ravna i
- koljenasta.

Na Slika 1. prikazana su ravna vratila i koljenasto vratilo.



Slika 1. Ravna vratila i koljenasto vratilo [1],[2]

Koljenasta vratila se koriste kod pretvorbe pravocrtnog gibanja u rotacijsko ili obrnuto.

Nadalje vratila se dijele ovisno o njihovom obliku:

- stupnjevana i glatka,
- ožlijebljena i ozubljena,
- izrađena iz jednog dijela zajedno s drugim strojnim elementom (npr. zupčanicom),
- kružnog poprečnog presjeka,
- poligonskog poprečnog presjeka i
- puna ili šuplja.

Također postoje vratila za specijalne namjene. Glavni predstavnici su savitljiva i teleskopska vratila. Savitljiva vratila koriste se u slučajevima kada nije moguće izvesti direktan spoj rotirajućih elemenata ili kada se tijekom rada mijenja međusobni položaj osi vrtnje vratila.

Sastavljena su od višeslojne žičane jezgre unutar savitljive kovinske cijevi. Najčešće se primjenjuju za pogon brojila, kod mjerila brzine vozila, kod bušilica i drugih alata.

Teleskopska vratila su vratila s promjenjivom dužinom. Koriste se kod slučajeva gdje je potreban prijenos snage uz zahtjev prilagodbe duljine. Izrađena su od nekoliko cilindričnih dijelova koji klize jedan u drugome što omogućuje mijenjanje duljine. Na Slika 2. prikazani su teleskopsko i savitljivo vratilo.



Slika 2. Teleskopsko i savitljivo vratilo [3],[4]

2.2. Materijali vratila

Prema [5] i [6] općenito se osovine i vratila izrađuju od čelika za strojogradnju S275, E295 i E335. Kod većih zahtjeva obzirom na opterećenje, radne temperature i atmosferu dolaze u obzir i materijali C35E, C45E, 34Cr4, 41Cr4, 42CrMo4. Kod motornih vozila za izradu vratila koriste se čelici za cementiranje 16MnCr5, 20MnCr5, 18CrNi8 i slični.

Legirani čelici također se mogu koristiti kod izrade vratila. Potrebno je naglasiti da se korištenje legiranih čelika isplati kod izmjeničnog savijanja samo onda kada ne postoji djelovanje zarez. Čelici visokih mehaničkih svojstava jako su osjetljivi na zarezna djelovanja.

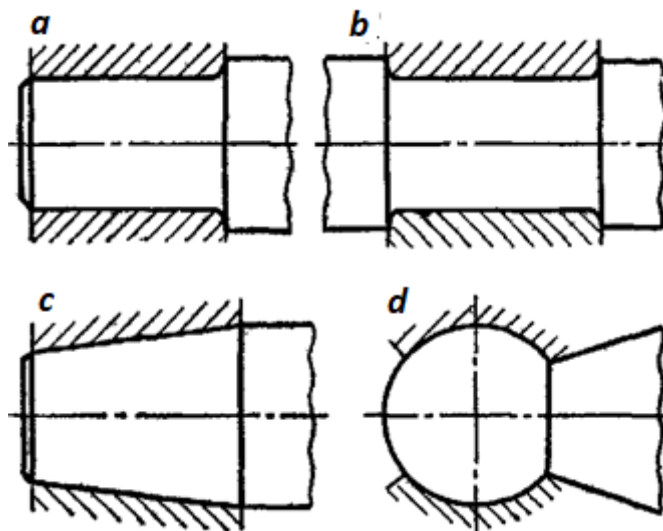
Na odabir materijala vratila često utječu različiti čimbenici. Uz najvažniji uvjet da materijal zadovoljava potrebnu čvrstoću, javljaju se i razni utjecaji koji mogu izazvati i kontradiktornost pri odabiru materijala. Neki od tih čimbenika su ugradbene dimenzije, vrsta opterećenja, cijena, lakoća obrade, utjecaj radne okoline (korozija), temperatura i mnogi drugi.

2.3. Rukavci

Rukavci kod osovina ili vratila su cilindrična, konična ili kuglasta dijelovi vratila ili osovina koji se u ležajima okreću ili miruju [6].

Rukavci se dijele na potporne i nosive rukavce. Nosivi rukavci su opterećeni poprečno na svoju os, dok su potporni rukavci opterećeni uzdužno svoje osi. Ovisno o položaju rukavca na osovini

ili vratilu oni se još dijele na čelne rukavce i unutrašnje rukavce. Čelni rukavci nalaze se na krajevima osovine ili vratila. Unutrašnji rukavci su unutar tijela, tj. duljine vratila, a ne na krajevima. Na Slika 3. prikazane su neke vrste rukavaca koje se mogu naći na vratilima i osovinama.



Slika 3. a – cilindrični čelni rukavac, b – cilindrični unutrašnji rukavac, c – konični rukavac, d – kuglasti rukavac [7]

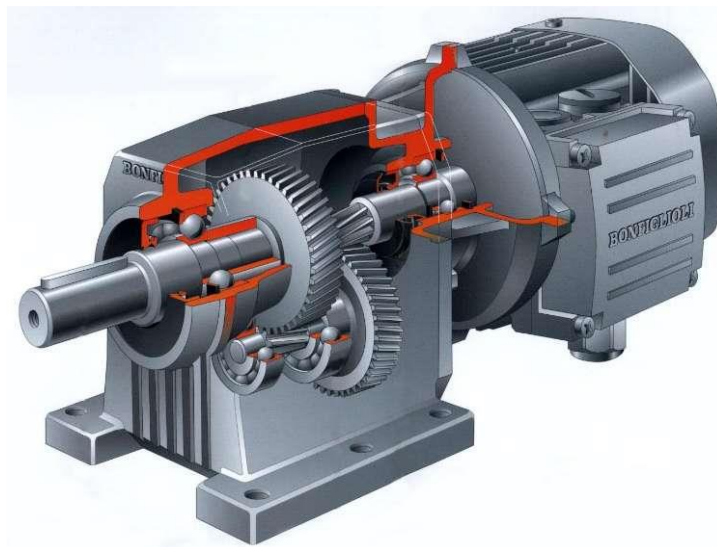
2.4. Strojni elementi na vratilima

U ovom poglavlju ukratko će se opisati i prikazati strojni elementi koji se često nalaze na vratilima. Svaki od elemenata ispunjava neki uvjet za pravilno funkcioniranje stroja.

2.4.1. Zupčanici

Zupčanici prenose gibanje i okretni moment s jednog vratila na drugo pomoću veze oblikom. Dodir dva zuba različitih zupčanika naziva se zupčani par, tj. zupčani prijenosnik. Najčešća primjena zupčanika je kod izrade reduktora i multiplikatora. Reduktori su strojevi koji prenose snagu od pogonskog stroja na gonjeni stroj tako da smanjuju broj okretaja, a time povećavaju izlazni moment dok multiplikatori rade obrnuto. Smanjenje broja okretaja je često bitno jer mnogi pogonski strojevi imaju vrlo visoku brzinu vrtnje. Na primjer elektromotori pri svojoj nazivnoj snazi uglavnom imaju brzine vrtnje preko 1000 okretaja u minuti. Tolike brzine vrtnje su za većinu industrijskih postrojenja prevelike. Tada se pomoću reduktora povećava izlazni moment, a smanjuje brzina što omogućava prilagodbu uporabe pogonskog stroja ovisno o zahtjevima radnog stroja. Na Slika 4. prikazan je djelomični presjek kućišta reduktora u kojemu

se nalaze vratila s zupčanicima i ležajevima. Reduktor je spojen na elektromotor te vrši smanjenje brzine vrtnje, a time se povećava izlazni moment.



Slika 4. Reduktor spojen na elektromotor [5]

Glavna podjela zupčanika provodi se prema obliku i međusobnom položaju osi vratila. Neki od vrsta zupčanika su:

- čelnici s ravnim zubima,
- čelnici s kosim zubima,
- čelnici sa strelastim zubima,
- stožnici s ravnim zubima,
- stožnici s kosim zubima,
- stožnici sa zakrivljenim zubima,
- čelnici s unutrašnjim ozubljenjem, itd.

Postoje još mnoge druge vrste zupčanika, te su ovdje spomenute samo neke od njih. Na Slika 5. prikazan je jedan čelnik s kosim zubima i par stožastih zupčasti par [8],[9]



Slika 5. Čelnik s kosim zubima i stožasti zupčasti par [8],[9]

2.4.2. Remenice i lančanici

Remenice i lančanici kao i zupčanici služe za prijenos gibanja i okretnog momenta s jednog vratila na drugo vratilo. Najčešće se koriste kod većih razmaka između osi vratila. Kao i zupčanici uglavnom ispunjavaju svrhu prilagodbe brzine vrtnje, tj. obavljaju redukciju ili multiplikaciju. Na Slika 6. prikazan je remenski prijenosnik s plosnatim remenom.



Slika 6. Remenski prijenosnik [10]

Remenski prijenosnici se razlikuju po tome kako prenose snagu i gibanje. Tako razlikuje prijenos trenjem i prijenos oblikom. Prijenos trenjem ostvaruje se korištenjem plosnatog ili klinastog remena dok se prijenos oblikom ostvaruje korištenjem zupčastog remena. Na Slika 7. prikazan je nazubljeni klinasti remen.



Slika 7. Nazubljeni klinasti remen [11]

Remen se prebacuje preko ramenica. Ramenice su elementi koji se nalaze na vratilima i rotiraju zajedno s vratilom. Razlikujemo pogonske, gonjene i zatezne remenice. Također svaka vrsta remena ima odgovarajući oblik utora na remenicama.

Lančani prijenos prenosi gibanje i okretni moment pomoću oblika. Lančani prijenos sastoji se od lanca i lančanika od kojih razlikujemo pogonski, gonjeni i zatezni lančanik. Imaju prednost naspram remenskog prijenosa zbog mogućnosti prijenosa većih sila. Doduše zahtijevaju podmazivanje i zaštitu od prašine i ostalih čestica. Na Slika 8. prikazan je lanac postavljen preko dva lančanika s kojima tvori lančani prijenosnik.



Slika 8. Lančani prijenosnik [12]

2.4.3. Spojke

Spojke su strojni elementi koji se koriste za prijenos okretnog momenta s jednog vratila na drugo ili s vratila na neki drugi strojni element. Spojke mogu omogućavati trajno ili povremeno spajanje ovisno o potrebi. Tijekom prijenosa snage ne obavljaju nikakvu transformaciju brzine vrtnje i okretnog momenta. Prijenos snage ovisi o izvedbi a može biti pomoću trenje i oblika. Na Slika 9. prikazana je jedna od izvedbi krute spojke.



Slika 9. Kruta spojka [13]

Spojke se najčešće postavljaju na izlaze pogonskih strojeva gdje se onda spajaju na ulaz gonjenog stroja. Uz svrhu prijenosa snage spojke osiguravaju i mnogo drugih funkcija koje su jako bitne u postrojenjima. Neke od funkcija koje spojke mogu izvršavati su: prigušivati

vibracije s pogonskog na gonjeni stroj, sprječavati preopterećenje, osiguravati mirno puštanje u rad i prilagoditi odstupanje osi dvaju vratila. Spojka osobnog automobila prikazana je na Slika 10.



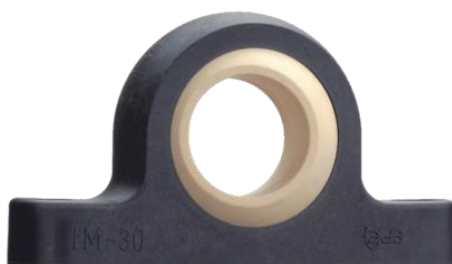
Slika 10. Spojka automobila [14]

Danas postoji mnogo različitih izvedba spojki, a ovdje će se spomenuti njihova osnova podjela:

- elastične spojke,
- neelastične spojke,
- uključno-isključne spojke,
- hidrodinamičke spojke i
- specijalne spojke.

2.4.4. Ležajevi

Osovine i vratila kao oslonce koriste valjne i klizne ležajeve. Koriste se kada je potrebno omogućiti neko od sljedećih gibanja: rotacijsko, linearno, linearno-rotacijsko ili sferno gibanje. Uz omogućavanje gibanja oni podupiru osovine i vratila te smanjuju trenje tijekom gibanja. Na Slika 11. prikazan je samopodesivi stojeći klizni ležaj.



Slika 11. Klizni ležaj [15]

Klizni ležajevi su ležajevi koji omogućuju relativno gibanje između površina koje su u izravnom kontaktu. Klizni ležajevi se koriste kada je potrebna velika nosivost, sporo gibanje ili ograničeni prostor. Područje primjene uključuje motore, turbine, hidrauličke strojeve i mnogo druge grane strojarstva. Za prednost im se uzima jednostavna konstrukcija i velika nosivost, ali pošto ne sadrže kotrljajuća tijela imaju veće trenje od valjnih ležajeva. Kako bi se smanjili gubici, trenje i trošenje materijala potrebno ih je podmazivati.



Slika 12. Valjni ležajevi [16]

Valjni ležajevi sadrže valjna tijela koja se nalaze između dva prstena. Valjna tijela omogućuju rotaciju između vanjskog i unutarnjeg prstena. Oblik valjnog tijela u ležaju može biti kugla, valjak, bačvica, stožac i iglica. Nadalje mogu se podijeliti prema smjeru djelovanja sile koju nose. Tako mogu biti radijalni, aksijalni i radijalno-aksijalni ležajevi. Na Slika 12. prikazane su različite vrste i dimenzije valjnih ležajeva.

Odabir ležajeva ovisi o mnogo faktora, a neki od njih su:

- opterećenje,
- dimenzije,
- brzina vrtnje,
- vijek trajanja,
- mogućnost podmazivanja,
- točnost vođenja,
- vrsta kretanja i
- cijena.

2.5. Tok proračuna i dimenzioniranje vratila

Proračun i dimenzioniranje vratila može se podijeliti u nekoliko faza:

1. Određivanje opterećenja na vratilu,
2. Određivanje naprezanja na vratilu,
3. Određivanje orijentacijskih dimenzija vratila,
4. Određivanje izvedbenih dimenzija vratila,
5. Određivanje i kontrola sigurnosti u kritičnim presjecima vratila,
6. Provjera progiba i nagiba vratila i
7. Provjera kuta uvijanja.

U ovom radu vratilo je konstruirano prema ovim fazama. Nakon analitičkog proračuna provedena je numerička analiza te su uspoređene vrijednosti naprezanja dobivenih na kritičnim presjecima gdje se mijenja promjer vratila.

3. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata (MKE) koristi se za numeričko rješavanje inženjerskih problema. Pomoću MKE je moguće rješavati različite probleme. Neki od problema mogu biti strukturne analize čvrstih tijela, izmjene topline, dinamika fluida i elektromagnetske pojave. MKE se temelji na diskretizaciji kontinuuma. Kontinuum se zamjeni s određenim brojem manjih elemenata koji su međusobno povezani u čvorovima te tvore mrežu. U nazivu metode riječ konačnih označava baš to da postoji konačan, tj. točno određen broj elemenata koji se koriste. Općenito kontinuum koji se mijenja sadrži beskonačan broj stupnjeva slobode gibanja, a mreža konačnih elemenata ima konačan broj stupnjeva slobode gibanja pa je moguće doći do numeričkog rješenja. U čvorovima elemenata računaju se sile i pomaci. Uz čvorove, konačni elementi sadrže i integracijske točke. Integracijske točke nalaze se unutar elemenata te se koriste za izračun naprezanja i deformacija. Kod jednostavnijih sustava gdje se koristi malen broj elemenata moguće je i ručno rješavanje sustava jednadžbi, ali kako je točnost rezultata analize MKE veća s velikim brojem elemenata razvoj računala je omogućio rješavanje problema s izuzetno velikim brojem elemenata. Za analizu pomoću MKE postoji nekoliko programa na današnjem tržištu. U ovom radu korišten je programski paket *Abaqus*®.

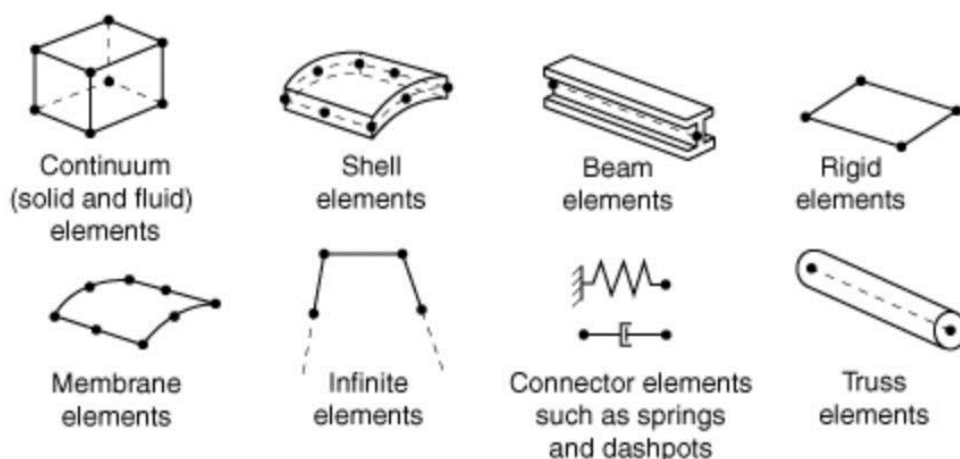
3.1. Konačni elementi

Unutar programskog paketa *Abaqus*® ima nekoliko različitih vrsta konačnih elemenata, neki od njih su:

- jednodimenzijски elementi,
- dvodimenzijски elementi,
- trodimenzijски elementi,
- cilindrični elementi i
- osnosimetrični elementi.

Odabir elementa ovisi o problemu koji se analizira. Tako je svaki od elemenata primjeren za određenu vrstu analize. Prikaz nekih od konačnih elemenata vidljiv je na Slika 13.

Konačni elementi također se dijele po broju čvorova. Tako razlikujemo elemente s manjim brojem čvorova ili linearne elemente i elemente s većim brojem čvorova ili kvadratne/kubne elemente. Linearni elementi sadrže čvorove na svojim krajevima, dok kvadratni/kubni sadrže dodatne čvorove na svojim bridovima ili unutar volumena elementa. Elementi s većim brojem čvorova su točniji i brže konvergiraju rješenju ali zahtijevaju veći kapacitet računala.



Slika 13. Vrste konačnih elemenata [17]

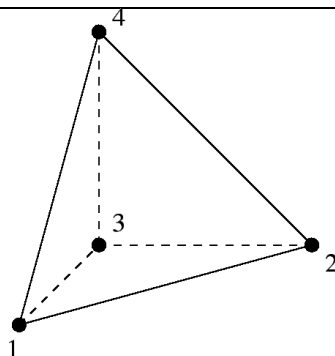
Još jedna od podjela ovisi o tipu problema. Tako postoje strukturni elementi, fluidni elementi i toplinski elementi. Strukturni elementi koriste se za modeliranje strukturalnih analiza gdje se određuju naprezanja, pomaci i sile. Fluidni elementi koriste se za modeliranje dinamike fluida. Koriste se za rješavanje problema protoka i ostalih pojava pri inženjerskoj uporabi fluida. Moguće je koristiti elemente za kompresibilne i nekompresibilne fluide. Toplinski elementi se koriste kod modeliranja prijenosa topline. Ovi elementi omogućuju simulaciju provođenja topline kroz materijal.

3.2. 3D konačni elementi

Kako se u ovom radu analizira vratilo s kompleksnom geometrijom, jedini način za kvalitetnu analizu je korištenje 3D konačnih elemenata. U nastavku je prikazan i opisan svaki od mogućih 3D elemenata unutar programskog paketa *Abaqus*®.

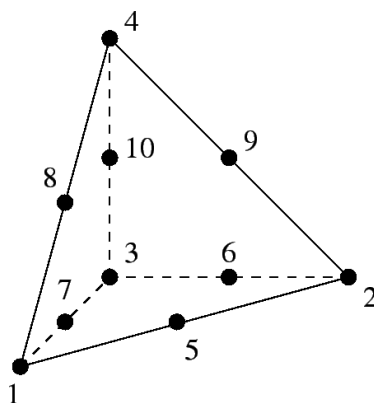
3.2.1. Tetraedarski konačni elementi

Najjednostavniji 3D konačni element je tetraedarski konačni element. Ovisno o broju čvorova razlikuju se tetraedarski element 1. reda i tetraedarski element 2. reda. Tetraedarski element 1. reda ili C3D4 kako se označava unutar programskog paketa *Abaqus*® sadrži 4 čvora i ima jednu integracijsku točku. Svaki čvor ima 3 stupnja slobode gibanja koji opisuju pomake u smjeru koordinatnih osi Kartezijevog koordinatnog sustava. Rotacija elementa nije moguća već se ona ostvaruje pomacima. Prema broju čvorova i stupnjevima slobode gibanja svaki element ima 12 stupnjeva slobode gibanja. Tetraedarski element 1. reda prikazan je na Slika 14.



Slika 14. Tetraedarski element 1. reda [18]

Za točnije rezultate koriste se tetraedarski elementi 2. reda ili C3D10 kako se označavaju u *Abaqus-u*®. Tetraedarski element 2. reda nastaje dodavanjem čvora na svaki brid tetraedarskog elementa 1. reda. Time sadrži 10 čvorova, svaki čvor s 3 stupnja slobode gibanja daje ukupno 30 stupnjeva slobode gibanja. Uz povećan broj čvorova, veći je i broj integracijskih točaka. Tetraedarski elementi 2. reda sadrže 4 integracijske točke. To je naravno više nego element 1. reda, time su rješenja točnije i postepenim povećavanjem gustoće mreže brže konvergiraju. Doduše zbog većeg broja čvorova zahtijevaju i veću računalnu snagu. Tetraedarski element 2. reda prikazan je na Slika 15.

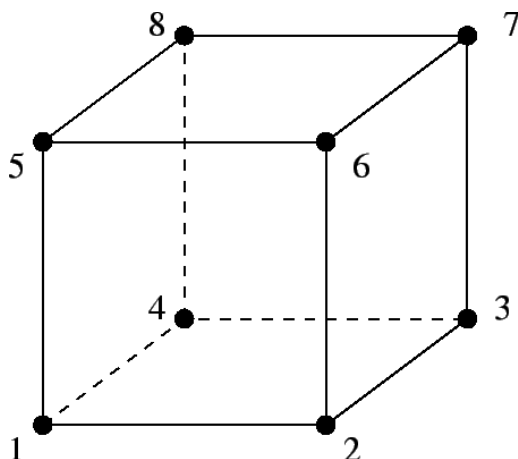


Slika 15. Tetraedarski element 2. reda [18]

Prednost tetraedarskih elemenata je što su vrlo povoljni za opisivanje kompleksnih geometrija. Pri opisivanju kompleksne geometrije unutar programskog paketa *Abaqus*® koristi se opcija *Free mesh*. Doduše uz svoje prednosti nose i neke nedostatke. Za precizne rezultate potrebno je koristiti guste mreže elemenata time raste i vrijeme računanja i zahtjevi memorije računala. Rezultati mogu biti loši ako su elementi jako deformirani, tj. ako je kut između dva brida prevelik ili premalen.

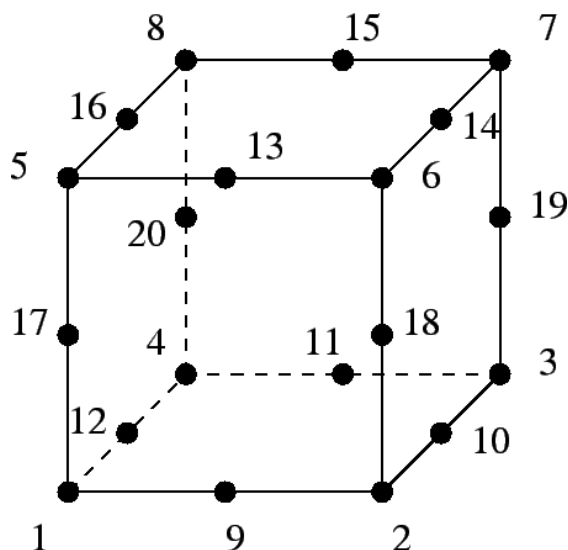
3.2.2. Heksaedarski konačni elementi

Heksaedarski elementi također se dijele na elemente 1. i 2. reda. Tako heksaedarski element 1. reda sadrži 8 čvorova. Svaki čvor sadrži 3 stupnja slobode gibanja kao i kod tetraedarskog elementa. Time elementi 1. reda sadrže 24 stupnja slobode gibanja. Unutar elementa nalazi se 8 integracijskih točaka. Slika 16. prikazuje heksaedarski element 1. reda.



Slika 16. Heksaedarski element 1. reda [18]

Dodavanjem jednog čvora na svaki brid elementa 1. reda dobiva se heksaedarski element 2. reda ili kako se još naziva serendipity element. Heksaedarski element 2. reda ima 20 čvorova, s 3 stupnja slobode gibanja, tj. ukupno 60 stupnjeva slobode gibanja. Unutar elementa nalaze se 27 integracijskih točaka. Slika 17. prikazuje heksaedarski element 2. reda.



Slika 17. Heksaedarski element 2. reda [18]

Zbog većeg broja integracijskih točaka od tetraedarskog elementa, heksaedarski element ima veću točnost pri manjoj gustoći mreže. Time zahtijevaju i manju računalnu snagu za

ostvarivanje iste točnosti kao i tetraedarski elementi. Posjeduju veliku točnost pri linearnim deformacijama. Zbog svojeg oblika povoljno oblikuju modele s ravnim površinama.

Za razliku od tetraedarskih elemenata nije moguće koristiti opciju *Free mesh*, pa je kod kompleksnijih geometrija potrebno posvetiti veću pažnju na podjelu geometrije na manje dijelove. Također ponekad je neophodno ručno podešavati mrežu kako bi se postigli kvalitetni rezultati.

4. ANALITIČKI PRORAČUN VRATILA

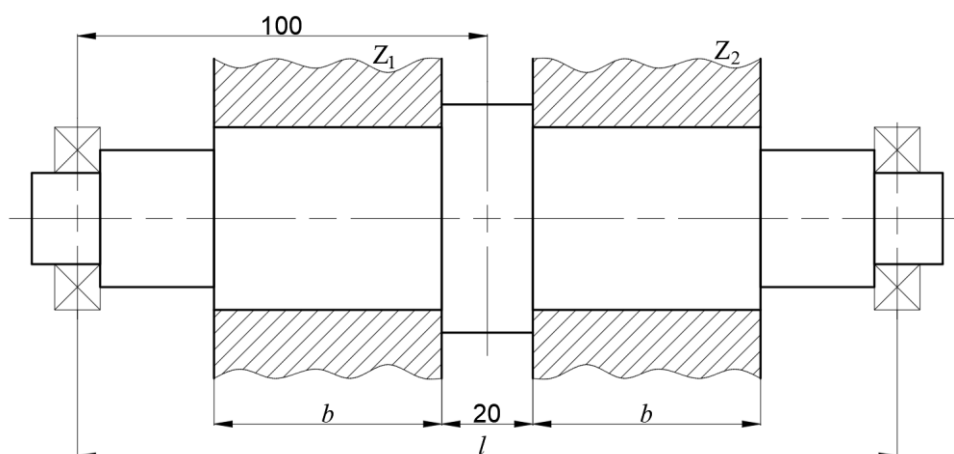
Analitički proračun vratila proveden je za među vratilo proizvoljnog prijenosnika snage. Za potrebe proračuna definirani su ulazni parametri zadatka. S obzirom na zadane parametre proveden je proračun vratila kako je navedeno u poglavlju 2.5.

4.1. Parametri zadatka

Zadani parametri zadatka definirani su u Tablica 1.

Tablica 1. Parametri zadatka

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Okretni moment	T	90 Nm
Brzina vrtnje vratila	n_m	600 okr/min
Materijal vratila	DIN St 42-2	/
Razmak oslonaca	l	200 mm
Težina zupčanika Z_1	G_{Z1}	60 N
Težina zupčanika Z_2	G_{Z2}	20 N
Širina glavine zupčanika Z_1 i Z_2	b	40 mm
Diobeni promjer Z_1	d_1	150 mm
Diobeni promjer Z_2	d_2	90 mm
Torzijsko opterećenja vratila	Naizmjenično	/
Potrebna sigurnost	$S_{potr.}$	2



Slika 18. Skica dispozicije vratila

4.2. Određivanje opterećenja na vratilu

Zupčanici s ravnim zubima pri zahvatu prenose na vratilo tangencijalnu i radijalnu silu. Tangencijalna sila na diobenom promjeru zupčanika prenosi i okretni moment.

Sile na zupčaniku Z_1 :

Tangencijalna sila:

$$F_{t1} = \frac{T}{r_1} = \frac{T}{\frac{d_1}{2}} = \frac{90000}{\frac{150}{2}} = 1200 \text{ N.} \quad (1)$$

Radikalna sila :

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \tan \alpha = 1200 \cdot \tan 20^\circ = 437 \text{ N.} \quad (2)$$

Sile na zupčaniku Z_2 :

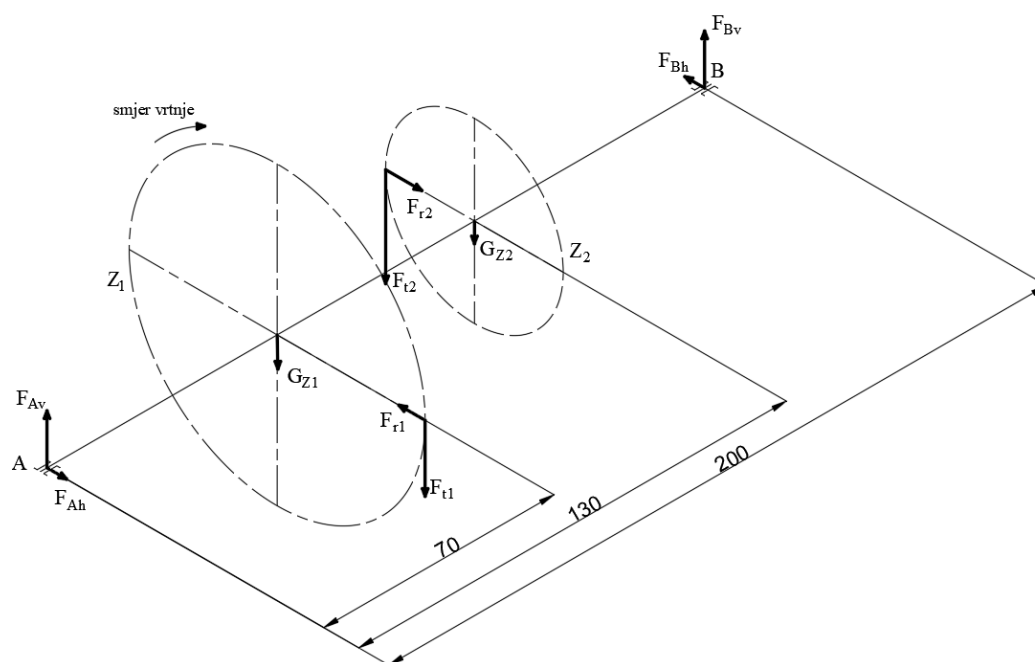
Tangencijalna sila:

$$F_{t2} = \frac{T}{r_2} = \frac{T}{\frac{d_2}{2}} = \frac{90000}{\frac{90}{2}} = 2000 \text{ N.} \quad (3)$$

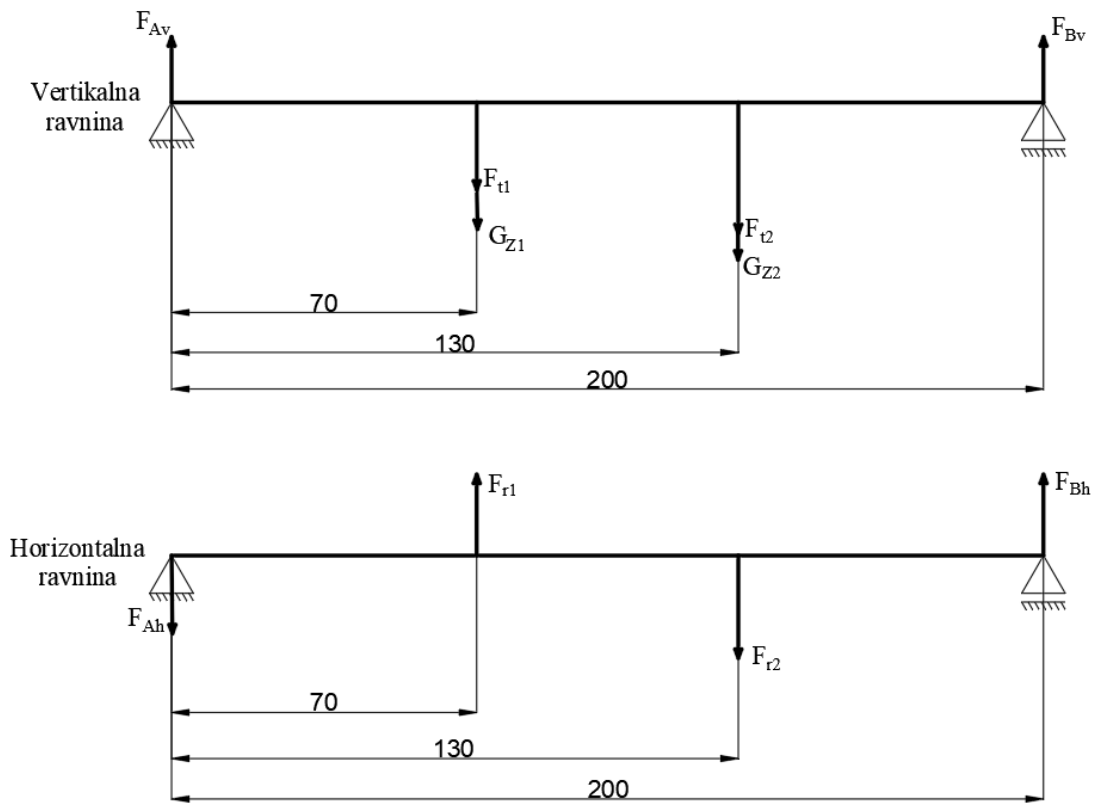
Radikalna sila :

$$F_{r2} = F_{t2} \cdot \tan \alpha = 2000 \cdot \tan 20^\circ = 728 \text{ N.} \quad (4)$$

Slika 19. prikazuje izometričnu skicu vratila s zupčanicima. Pomoću te skice se dolazi do Slika 20., to jest do opterećenja vratila u vertikalnoj i horizontalnoj ravnini.



Slika 19. Izometrična skica vratila



Slika 20. Vertikalna i horizontalna ravnina opterećenja vratila

Reakcije u osloncima A i B određuju se pomoću jednadžbi ravnoteže u svakoj ravnini. U vertikalnoj ravnini one glase:

$$\sum M_{Bv} = 0;$$

$$F_{Av} \cdot 200 - (F_{t1} + G_{z1}) \cdot (200 - 70) - (F_{t2} + G_{z2}) \cdot (200 - 130) = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_{Av} = 0;$$

$$F_{Bv} \cdot 200 - (F_{t1} + G_{z1}) \cdot 70 - (F_{t2} + G_{z2}) \cdot 130 = 0. \quad (6)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u jednadžbe (5) i (6) dobivaju se rezultati za vertikalne komponente sila u osloncima A i B:

$$F_{Av} = 1526 \text{ N}, \quad (7)$$

$$F_{Bv} = 1754 \text{ N}. \quad (8)$$

Postupak se ponavlja i za horizontalnu ravninu;

$$\sum M_{Bh} = 0;$$

$$F_{Ah} \cdot 200 - F_{r1} \cdot (200 - 70) + F_{r2} \cdot (200 - 130) = 0, \quad (9)$$

$$\sum M_{Ah} = 0;$$

$$F_{Bh} \cdot 200 + F_{r1} \cdot 70 - F_{r2} \cdot 130 = 0. \quad (10)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u jednadžbe (9) i (10) dobivaju se rezultati za horizontalne komponente sila u osloncima A i B:

$$F_{Ah} = 29,25 \text{ N}, \quad (11)$$

$$F_{Bh} = 320,25 \text{ N}. \quad (12)$$

Radijalne sile u osloncima A i B iznose:

$$F_A = \sqrt{F_{Av}^2 + F_{Ah}^2} = \sqrt{1526^2 + 29,25^2} \approx 1526 \text{ N}, \quad (13)$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bv}^2 + F_{Bh}^2} = \sqrt{1754^2 + 320,25^2} \approx 1783 \text{ N}. \quad (14)$$

Pomoću izračunatih reakcija u osloncima i zadanih sila koje opterećuju vratilo izradit će se oblik idealnog vratila. Reakcije u osloncima također će biti potrebne i za odabir ležajeva.

4.3. Proračun idealnog oblika vratila

Kod idealnog oblika vratila u svim poprečnim presjecima vratila vlada isto reducirano naprezanje. Prema jednadžbi za reducirano naprezanje poprečnog presjeka:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{M_{\text{red}}}{W} \leq \sigma'_{f,\text{dop}}, \quad (15)$$

gdje M_{red} predstavlja reducirani moment na određenom presjeku. Taj reducirani moment za presjeke opterećene na savijanje i uvijanje iznosi:

$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_f^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2}. \quad (16)$$

Za presjeke opterećeni samo na savijanje, uvrštavanjem $T = 0$, reducirani moment jednak je momentu savijanja. α_0 je faktor čvrstoće materijala, te ovisi o načinu opterećenja vratila. Za zadani način opterećenja vratila faktor čvrstoće dolazi iz jednadžbe:

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{fDN}}{1,73 \cdot \tau_{tDN}}. \quad (17)$$

Uvrštavanjem izraza za moment otpora kružnih poprečnih presjeka u jednadžbu (15) i sređivanjem dolazimo do izraza za promjer vratila:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{red}}}{\pi \cdot \sigma'_{f,\text{dop}}}} \approx \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{\text{red}}}{\sigma'_{f,\text{dop}}}}. \quad (18)$$

Pri izradi idealnog oblika vratila potrebno je uzeti u obzir orijentacijske vrijednosti dopuštenih

naprezanja koje naravno ovise o materijalu, a prema Haberhaueru i Bodensteinu [5] za vratila vrijedi:

$$\sigma'_{f,dop} \approx \frac{\sigma_{fDN}}{4}. \quad (19)$$

Za zadani materijal vratila DIN ST42-2 očitane su potrebne vrijednosti za daljnji proračun:

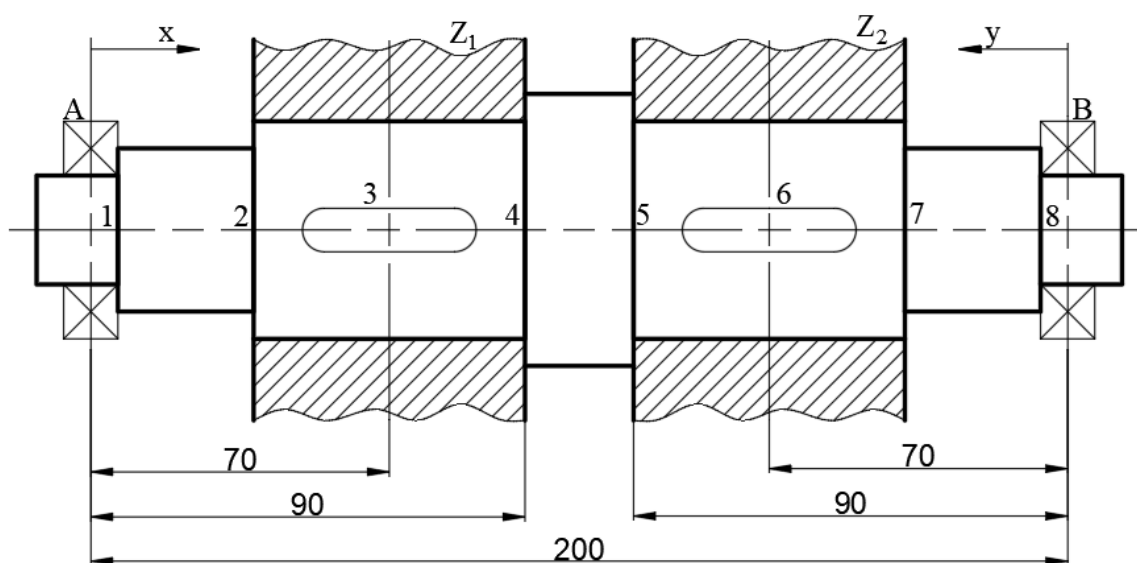
$$\sigma_{fDN} = 210 \text{ N/mm}^2, \quad (20)$$

$$\tau_{tDN} = 140 \text{ N/mm}^2, \quad (21)$$

$$\sigma'_{f,dop} \approx \frac{210}{4} = 52,5 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \text{odabrano } \sigma'_{f,dop} = 50 \text{ N/mm}^2, \quad (22)$$

$$\alpha_0 = \frac{210}{1,73 \cdot 140} = 0,87. \quad (23)$$

Slika 21. prikazuje kritične presjke o kojima treba voditi računa prilikom dimenzioniranja vratila. Presjeci 1, 2, 3(lijevo), 6(desno), 7 i 8 opterećeni su na savijanje dok su presjeci 3(desno), 4, 5 i 6(lijevo) opterećeni na savijanje i uvijanje.



Slika 21. Kritični presjeci pri dimenzioniranju vratila

4.3.1. Presjeci 1 do 3

Ovi presjeci opterećeni su na savijanje. Moment u presjecima će se izraziti pomoću radialne sile u ležaju A. Prema Slika 21. vrijednost x određuje udaljenost pojedinog presjeka od hvatišta sile u ležaju. x se kreće od 0 do 70 mm. Moment savijanja na tim presjecima iznosi:

$$M_x = F_A \cdot x = 1526 \cdot x. \quad (24)$$

Korištenjem jednadžbe (18) u Tablica 2. prikazani su rezultati potrebnog promjera za nekoliko vrijednosti x . Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u jednadžbu (18) ona glasi:

$$d_x = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 1526 \cdot x}{50}}. \quad (25)$$

Tablica 2. Promjeri idealnog vratila na presjecima od 1 do 3

$x_1 = 10$ mm	$d_{x1} = 14,51$ mm
$x_2 = 20$ mm	$d_{x2} = 18,28$ mm
$x_3 = 30$ mm	$d_{x3} = 20,92$ mm
$x_4 = 40$ mm	$d_{x4} = 23,03$ mm
$x_5 = 50$ mm	$d_{x5} = 24,80$ mm
$x_6 = 60$ mm	$d_{x6} = 26,36$ mm
$x_7 = 70$ mm	$d_{x7} = 27,75$ mm

4.3.2. Presjek 3 (desno)

Presjek 3 s desne strane opterećen na savijanje i uvijanje. Reaktivna sila ležajnog mjesta A uzrokuje moment savijanja tog presjeka, dok uvijanje uzrokuje prijenos okretnog momenta zupčanikom 1. Presjek 3 nalazi se na $x = 70$ mm od ležajnog mjesta A.

Moment savijanja presjeka 3:

$$M_3 = F_A \cdot 70 = 1526 \cdot 70 = 106820 \text{ Nmm}. \quad (26)$$

Moment uvijanje presjeka 3 zadana je parametrima zadatka:

$$T = 90000 \text{ Nmm}. \quad (27)$$

Prema jednadžbi (16) reducirani moment na presjeku 3 iznosi:

$$M_{\text{red3}} = \sqrt{M_3^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2} = 126525 \text{ Nmm}. \quad (28)$$

Uvrštavanjem vrijednosti iz (28) u jednadžbu (18) promjer presjeka 3 s desne strane iznosi:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{\text{red3}}}{\sigma'_{f,\text{dop}}}} \approx \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 126525}{50}} = 29,36 \text{ mm}. \quad (29)$$

4.3.3. Presjek 4

Presjek 4 nalazi se na $x = 90$ mm od ležajnog mjesta A. Opterećen je na savijanja i uvijanje. Pošto na presjeku 4 uz reaktivnu radijalnu silu ležajnog mjesta A djeluju i sile zupčanika Z_1 ,

potrebno je vektorski zbrojiti momente savijanja u horizontalnoj i vertikalnoj ravnini. Za izračun momenata u te dvije ravnine koriste se Slika 20 i Slika 21.

$$M_{h4} = F_{Ah} \cdot 90 - F_{r1} \cdot (90 - 70) = -6108 \text{ Nmm}, \quad (30)$$

$$M_{v4} = F_{Av} \cdot 90 - (F_{t1} + G_{z1}) \cdot (90 - 20) = 112140 \text{ Nmm}, \quad (31)$$

$$M_4 = \sqrt{M_{h4}^2 + M_{v4}^2} = \sqrt{(-6108)^2 + 112140^2} = 112306 \text{ Nmm}, \quad (32)$$

$$M_{red4} = \sqrt{M_4^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2} = 131190 \text{ Nmm}, \quad (33)$$

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red4}}{\sigma'_{f,dop}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 131190}{50}} = 29,72 \text{ mm}. \quad (34)$$

4.3.4. Presjek 5

Presjek 5 je opterećen kao i presjek 4 na uvijanje i savijanje. Moment savijanja izračunati će se s obzirom na reakcije u ležajnom mjestu B i udaljenosti od istog (y sa Slika 21.).

$$M_{h5} = F_{Bh} \cdot 90 - F_{r2} \cdot (90 - 70) = 14263 \text{ Nmm}, \quad (35)$$

$$M_{v5} = F_{Bv} \cdot 90 - (F_{t2} + G_{z2}) \cdot (90 - 20) = 117460 \text{ Nmm}, \quad (36)$$

$$M_5 = \sqrt{M_{h5}^2 + M_{v5}^2} = \sqrt{14263^2 + 117460^2} = 118323 \text{ Nmm}, \quad (37)$$

$$M_{red5} = \sqrt{M_5^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2} = 136376 \text{ Nmm}, \quad (38)$$

$$d_5 = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red5}}{\sigma'_{f,dop}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 136376}{50}} = 30,10 \text{ mm}. \quad (39)$$

4.3.5. Presjek 6 (lijevo)

Presjek 6 je s lijeve strane opterećen na savijanje i uvijanje. Moment savijanja se računa u odnosu na ležajno mjesto B.

$$M_6 = F_B \cdot 70 = 1783 \cdot 70 = 124810 \text{ Nmm}, \quad (40)$$

$$M_{red6} = \sqrt{M_6^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2} = 142041 \text{ Nmm}, \quad (41)$$

$$d_6 = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red6}}{\sigma'_{f,dop}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 142041}{50}} = 30,51 \text{ mm}. \quad (42)$$

4.3.6. Presjeci od 6 do 8

Ovi presjeci opterećeni su na savijanje. Moment u presjecima će se izraziti pomoću radijalne sile u ležaju B. Prema slici 9. vrijednost y određuje udaljenost pojedinog presjeka od hvatišta sile u ležaju. y se kreće od 0 do 70 mm. Moment savijanja na tim presjecima iznosi:

$$M_y = F_B \cdot y = 1783 \cdot y. \quad (43)$$

Korištenjem jednadžbe (18) u Tablica 3. su prikazani rezultati potrebnog promjera za nekoliko vrijednosti y . Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u jednadžbu ona glasi:

$$d_y = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 1783 \cdot y}{50}}. \quad (44)$$

Tablica 3. Promjeri idealnog vratila na presjecima od 6 do 8

$y_1 = 10 \text{ mm}$	$d_{y1} = 15,28 \text{ mm}$
$y_2 = 20 \text{ mm}$	$d_{y2} = 19,24 \text{ mm}$
$y_3 = 30 \text{ mm}$	$d_{y3} = 22,03 \text{ mm}$
$y_4 = 40 \text{ mm}$	$d_{y4} = 24,25 \text{ mm}$
$y_5 = 50 \text{ mm}$	$d_{y5} = 26,13 \text{ mm}$
$y_6 = 60 \text{ mm}$	$d_{y6} = 27,76 \text{ mm}$
$y_7 = 70 \text{ mm}$	$d_{y7} = 29,23 \text{ mm}$

4.3.7. Prethodne dimenzije vratila

Vratilo je potrebno stupnjevati kako bi se ostali elementi mogli staviti na vratilo. Prema prethodnim proračunima za potrebne promjere odabiru se sljedeće dimenzije promjera presjeka sa Slika 21.

Presjeci 1 i 8: $d_1 = d_8 = 20 \text{ mm}$.

Presjeci 2 i 7: $d_2 = d_7 = 25 \text{ mm}$.

Presjeci 3, 4, 5 i 6: $d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 32 \text{ mm}$.

4.4. Određivanje definitivnih dimenzija vratila

4.4.1. Izbor valjnih ležajeva oslonaca A i B

Odabir ležajeva izvršit će se proračunom na osloncu koji je više opterećen. Prema poglavlju 4.2. oslonac B nosi veće opterećenje od oslonca A. Izbor ležaja provest će se preko dinamičke opterećenosti ležaja C_1 .

$$C_1 = P_r \cdot \left(\frac{60 \cdot n_m \cdot L_{10h_min}}{10^6} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (45)$$

U izrazu (45) P_r predstavlja ekvivalentno dinamičko radijalno opterećenje ležaja. Kako nema aktivnih aksijalnih sila kod vratila, onda niti jedan ležaj u proračunu neće sadržavati aksijalnu komponentu sile. Zbog pogonskih uvjeta na vratilo javiti će se aksijalne sile. Te sile će se prenositi na ležaj oslonca A konstrukcijskom izvedbom kućišta prijenosnika. Nadalje, n_m je zadani broj okretaja u minuti (Tablica 1.), ε je eksponent vijeka trajanja ($\varepsilon = 3$ za teorijski dodir u točki, $\varepsilon = 10/3$ za teorijski dodir u liniji), L_{10h_min} je zahtjevni nazivni vijek trajanja u satima. Prema [6] uobičajena trajnost valjnih ležajeva za univerzalne prijenosnike iznosi od 8000 do 15000 sati.

$$P_r = F_B = 1783 \text{ N}, \quad (46)$$

$$\varepsilon = 3, \quad (47)$$

$$L_{10h_min} = 8000 \text{ h}, \quad (48)$$

$$C_1 = 1783 \cdot \left(\frac{60 \cdot 600 \cdot 8000}{10^6} \right)^{\frac{1}{3}} = 11,775 \text{ kN}. \quad (49)$$

Za prethodno odabrane promjere $d_1 = d_8 = 20 \text{ mm}$ odabire se ležaj veće dinamičke nosivosti C . Odabran je ležaj 6204 proizvođača SKF iz njegovog kataloga [19]. Tablica 4. sadrži karakteristike odabranog ležaja.

Potrebno je još provjeriti nazivni vijek trajanja ležaja na svakom osloncu.

Ležaj A:

$$P_r = F_A = 1526 \text{ N}, \quad (50)$$

$$L_{10h} = \frac{10^6}{60 \cdot n_m} \cdot \left(\frac{C}{P_r} \right)^\varepsilon = 19232 \text{ h} > L_{10h_min} = 8000 \text{ h}. \quad (51)$$

Ležaj B:

$$P_r = F_B = 1783 \text{ N}, \quad (52)$$

$$L_{10h} = \frac{10^6}{60 \cdot n_m} \cdot \left(\frac{C}{P_r} \right)^\varepsilon = 12057 \text{ h} > L_{10h_min} = 8000 \text{ h}. \quad (53)$$

Ležaj 6204 zadovoljava na oba ležajna mjesta. Promjeri d_1 i d_8 ostaju nepromijenjeni te iznose 20 mm.

Tablica 4. Karakteristike ležaja 6204

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Unutarnji promjer	d	20 mm
Vanjski promjer	D	47 mm
Širina ležaja	B	14 mm
Dinamička nosivost	C	13,5 kN
Statička nosivost	C_0	6,55 kN
Minimalni promjer naslon	d_a	min. 25,6 mm
Maksimalni radijus zaobljenja	r_a	max. 1 mm

4.4.2. Određivanje promjera na dosjedima zupčanika

Za prethodno odabrane promjere presjeka gdje se nalaze zupčanici odabran je $d = 32$ mm. Za taj promjer odgovara standardno pero DIN 6885 za raspon promjera 30...38 mm. Dimenzije tog pera dane su u Tablica 5.

Tablica 5. Dimenzije pera

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Širina pera	b	10 mm
Visina pera	h	8 mm
Dubina utora na glavini	t_1	5,0 + 0,2 mm

Dubina utora na glavini utječe na promjer koji prenosi moment uvijanja. Potrebno je korigirati minimalni potrebni promjer presjeka s obzirom na dubinu utora pera. Za određivanje novog minimalnog potrebnog promjera uzima se vrijednost potrebnog promjera dobivena pri proračunu u poglavlju 4.3.5 Presjek 6 (lijevo). Minimalna vrijednost promjera iznosi:

$$d_{\min} = d_6 + t_{1,\max} = 30,51 + 5,2 = 35,71 \text{ mm.} \quad (54)$$

Prema (54) zadovoljio bi i promjer od 36 mm, ali odabrati će se promjer od 38 mm. Tada nam vrijedi: $d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 38$ mm.

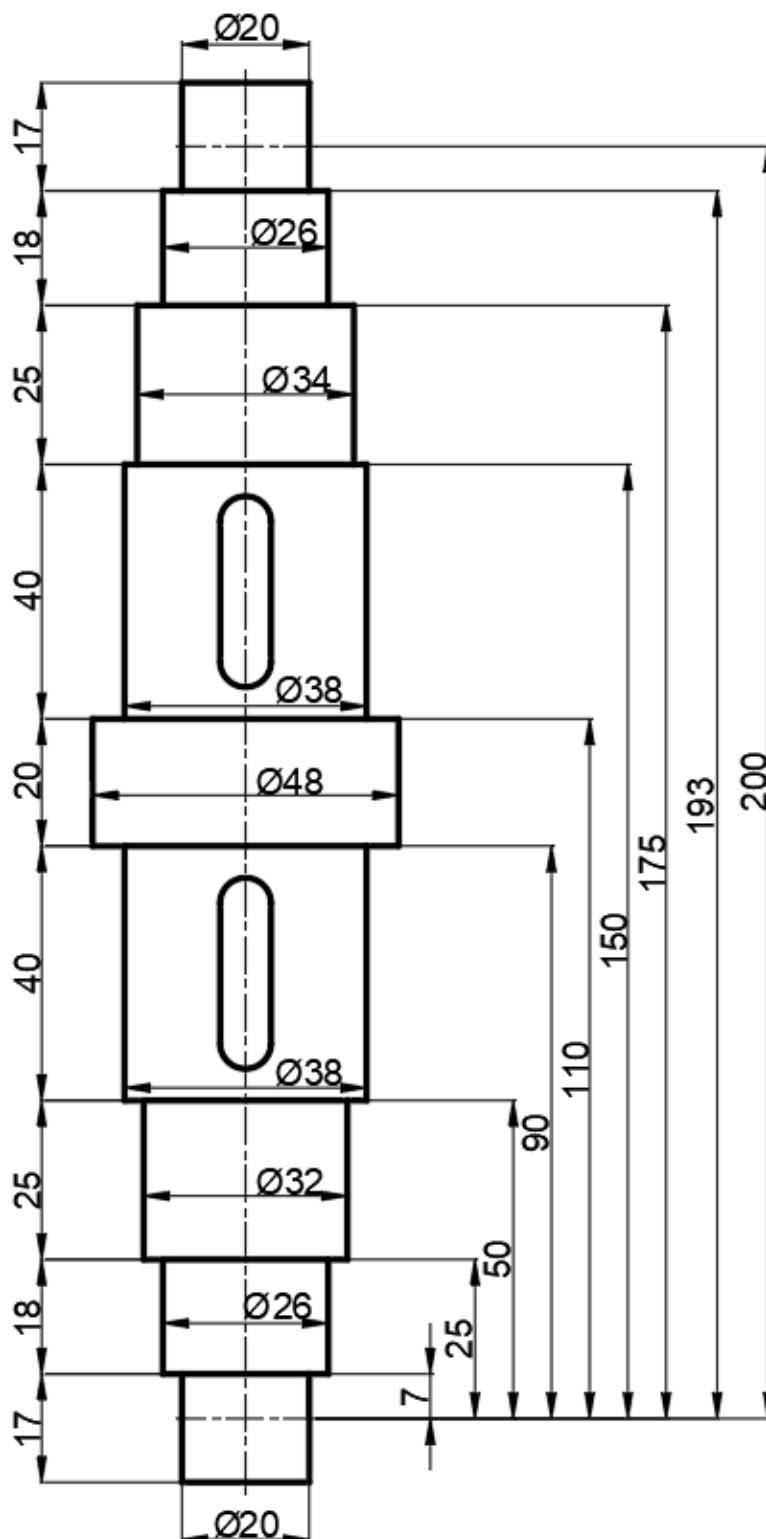
4.4.3. Određivanje promjera međustupnjeva

Stupanj vratila između ležaja i zupčanika može se izvesti samo s jednim promjerom koji zadovoljava uvijete opterećenja. Za potrebe većeg broja analiza utjecaja faktora zarezno djelovanja između ležajeva i zupčanika konstruirana su dva među stupnja. Promjer stupnja za naslon ležajeva uvjetovan je minimalnim promjerom naslona ležaja iz Tablica 4. Odabran je promjer od 26 mm za obje strane vratila. Sljedeći stupanj na udaljenosti $x = 25$ mm (Slika 21.) od ležajnog mjesta A izraditi će se s promjerom od 32 mm. Stupanj na udaljenosti $y = 25$ mm (Slika 21.) od ležajnog mjesta B izraditi će se s promjerom od 34 mm.

Dodavanje međustupnjeva omogućava veći broj mjesta za analizu utjecaja faktora zarezno djelovanja na naprezanje vratila. Različite dimenzije stupnjeva omogućiti će korištenje različitih radijusa i njihova vrijednost će utjecati na faktore za izračun faktora zarezno djelovanja.

4.4.4. Definitivne dimenzije vratila

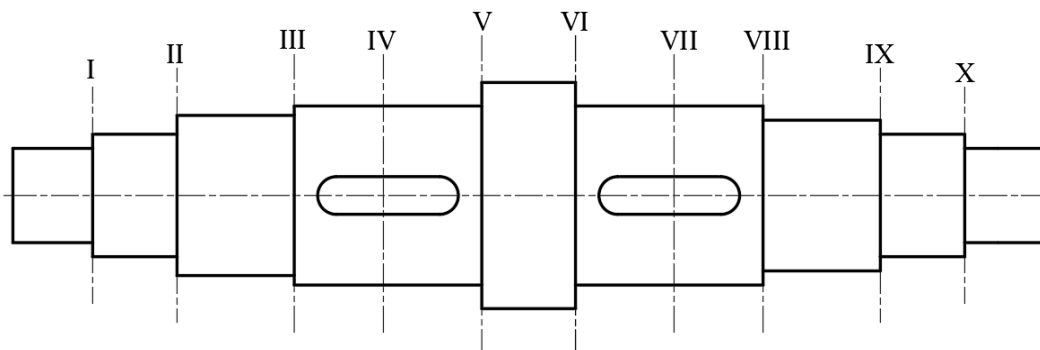
Slika 22. prikazuje definitivne dimenzije vratila. Korištenjem te slike napraviti će se tehnički crtež vratila koji će se koristiti dalje za proračun sigurnosti i izradu 3D modela za numeričku analizu.



Slika 22. Konstrukcijske dužine i promjeri vratila

4.5. Kontrolni proračun dinamičke sigurnosti

Provjeriti će se sigurnost svih kritičnih presjeka vratila (Slika 23.). Mjesta na kojima imamo prijelaz s manjeg na veći promjer i presjeci s utorom za pero.



Slika 23. Vratilo s označenim kritičnim presjecima

Kontrolni proračun dinamičke sigurnosti vratila uzima u obzir opterećenje presjeka, faktor zareznog djelovanja, veličinu strojnog dijela i kvalitetu površinske obrade. Dobivena sigurnost na svakom presjeku mora biti veća od zadane potrebne sigurnosti:

$$S = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{fDN}}{\varphi \cdot \beta_{kf} \cdot \sigma_f} \geq S_{potr.} \quad (55)$$

Gornja jednačba vrijedi za presjake opterećene samo na savijanje. Kod presjeka opterećenih i na uvijanje umjesto $\beta_{kf} \cdot \sigma_f$ uvrštavati će se reducirano naprezanje σ_{red} .

U (55) φ je faktor udara koji ovisi o karakteristikama pogonskog i gonjenog stroja. U ovom proračunu pretpostavljeno je da on nema utjecaja.

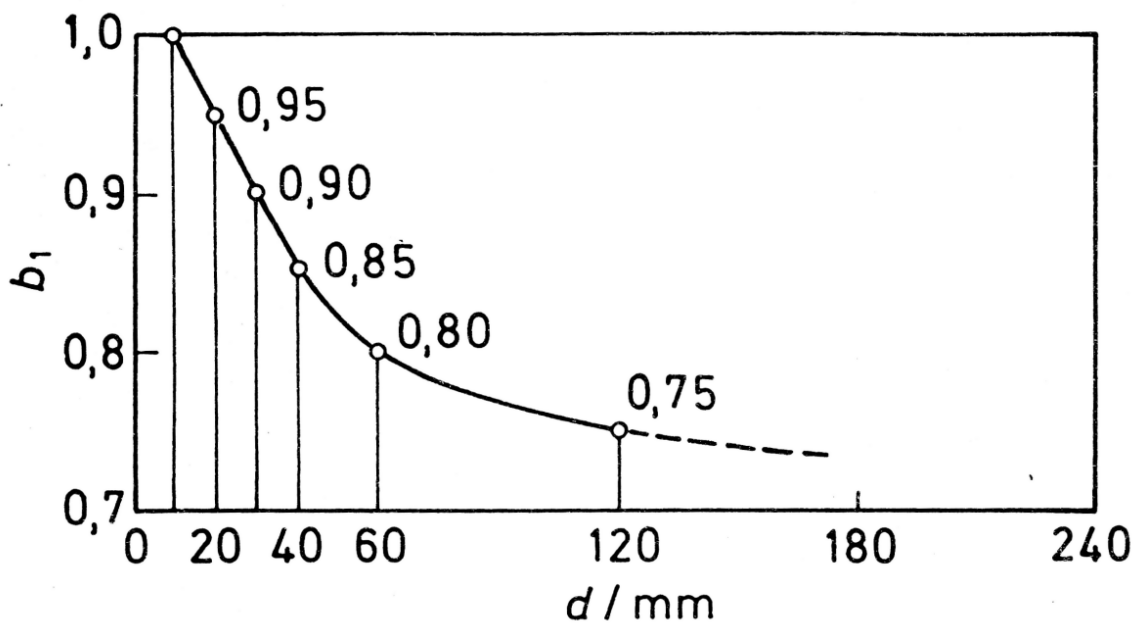
$$\varphi = 1 \quad (56)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 očitava se iz dijagrama sa Slika 24. On ovisi isključivo o promjeru vratila.

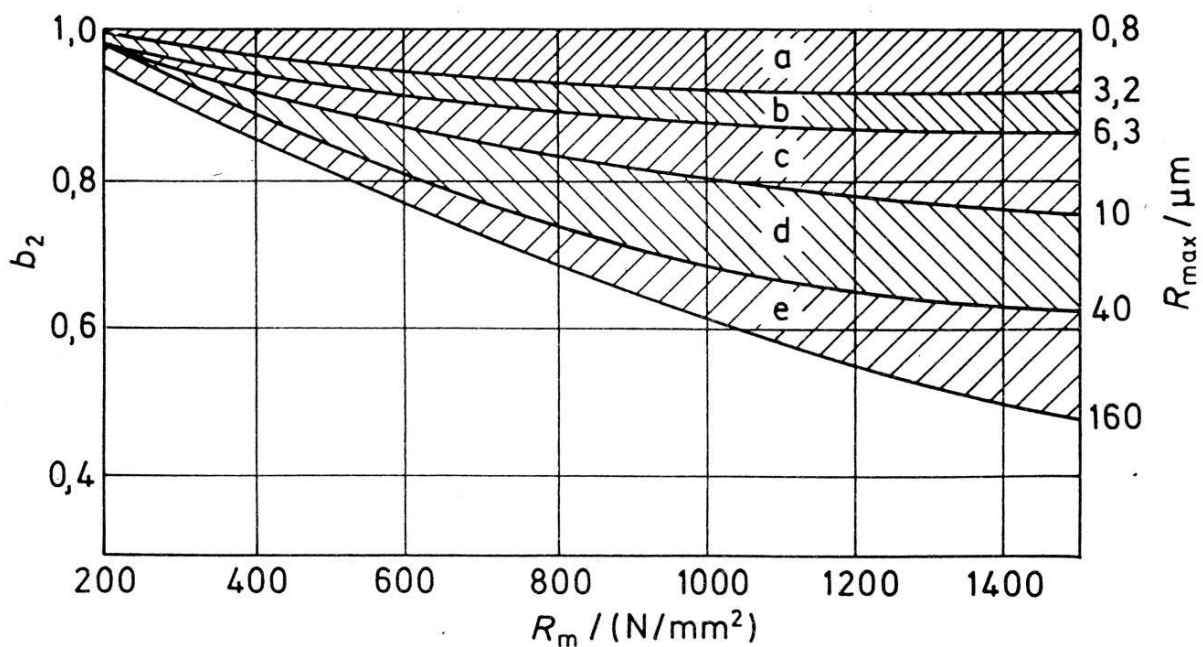
Faktor kvalitete površinske obrade b_2 očitava se iz dijagrama sa Slika 25. Za očitavanje faktora potrebno je poznavati R_{max} – najveću visinu neravnina i R_m – vlačna čvrstoća. Znači potrebno je znati koliko je kvalitetno površina obrađena i od kojeg je materijala izrađeno vratilo. Za zadani materijal vratila St 42-2 vlačna čvrstoća iznosi:

$$R_m = 420 \text{ N/mm}^2. \quad (57)$$

R_{max} će se očitavati za svaki pojedini presjek tako da se iz tehničkog crteža vratila očita vrijednost R_a (srednje odstupanje profila) te se uzme vrijednost R_{max} koja odgovara vrijednosti R_a . Vrijednosti R_{max} i R_a očitane su iz [20].



Slika 24. Dijagram za faktor veličine strojnog dijela b_1 [5]



Slika 25. Dijagram za faktor kvalitete površinske obrade b_2 [5]

4.5.1. Presjek I

Presjek I opterećen je na savijanje. Moment savijanja izračunati će se pomoću reakcije u osloncu A (13) i udaljenosti od oslonca A prema Slika 22.

$$M_I = F_A \cdot 7 = 1526 \cdot 7 = 10682 \text{ Nmm.} \quad (58)$$

Moment otpora presjeka računa se za manji promjer na prijelazu stupnjeva:

$$W_I = \frac{d_1^3 \cdot \pi}{32} = \frac{20^3 \cdot \pi}{32} = 785,4 \text{ mm}^3. \quad (59)$$

Naprezanje uzrokovano savijanjem iznosi:

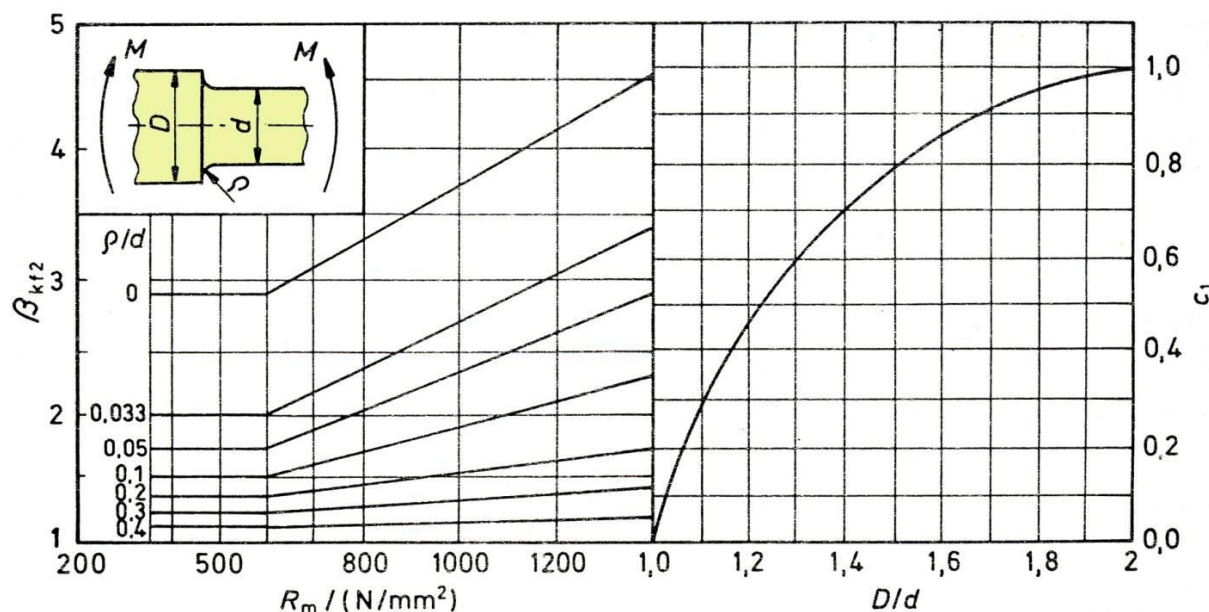
$$\sigma_{fI} = \frac{M_I}{W_I} = \frac{10682}{785,4} = 13,6 \text{ N/mm}^2. \quad (60)$$

Faktori b_1 i b_2 očitavaju se iz Slika 24. i Slika 25. kako je opisano prije.

$$b_1(d_1 = 20 \text{ mm}) = 0,95. \quad (61)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{\max} = 10 \text{ } \mu\text{m}) = 0,91. \quad (62)$$

Faktor zareznog djelovanja na presjeku I određuje se pomoću dijagrama na Slika 26. gdje se očitavaju vrijednosti c_1 i β_{kf2} te uvrštavaju u izraz (63).



Slika 26. Faktor β_{kf2} kod savijanja okretanjem i promjeni promjera [5]

$$\beta_{kfI} = 1 + c_1 \cdot (\beta_{kf2} - 1), \quad (63)$$

$$c_1 \left(\frac{D}{d} = 1,3 \right) = 0,6, \quad (64)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,04 \right) = 1,85, \quad (65)$$

$$\beta_{kfI} = 1 + 0,6 \cdot (1,85 - 1) = 1,51. \quad (66)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz za postojeću sigurnost (55), sigurnost presjeka I iznosi:

$$S_I = \frac{0,95 \cdot 0,91 \cdot 210}{1 \cdot 1,51 \cdot 13,6} = 8,84 > S_{\text{potr.}} = 2. \quad (67)$$

Presjek I zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.2. Presjek II

Sigurnost presjeka II računa se identično kao i presjek I.

$$M_{II} = F_A \cdot 25 = 1526 \cdot 25 = 38150 \text{ Nmm}, \quad (68)$$

$$W_{II} = \frac{d_{II}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{26^3 \cdot \pi}{32} = 1725,5 \text{ mm}^3, \quad (69)$$

$$\sigma_{fII} = \frac{M_{II}}{W_{II}} = \frac{38150}{1725,5} = 22,1 \text{ N/mm}^2, \quad (70)$$

$$b_1(d_{II} = 26 \text{ mm}) = 0,92, \quad (71)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{\text{max}} = 20 \text{ }\mu\text{m}) = 0,9. \quad (72)$$

Faktor zareznog djelovanja na presjeku II:

$$c_1\left(\frac{D}{d} = 1,23\right) = 0,52, \quad (73)$$

$$\beta_{\text{kfz}}\left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,11\right) = 1,49, \quad (74)$$

$$\beta_{\text{kfII}} = 1 + 0,52 \cdot (1,49 - 1) = 1,255, \quad (75)$$

$$S_{II} = \frac{0,92 \cdot 0,9 \cdot 210}{1 \cdot 1,255 \cdot 22,1} = 6,26 > S_{\text{potr.}} = 2. \quad (76)$$

Presjek II zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.3. Presjek III

Sigurnost presjeka III računa se identično kao i presjek I.

$$M_{III} = F_A \cdot 50 = 1526 \cdot 50 = 76300 \text{ Nmm}, \quad (77)$$

$$W_{III} = \frac{d_{III}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{32^3 \cdot \pi}{32} = 3217,0 \text{ mm}^3, \quad (78)$$

$$\sigma_{fIII} = \frac{M_{III}}{W_{III}} = \frac{76300}{3217} = 23,72 \text{ N/mm}^2, \quad (79)$$

$$b_1(d_{III} = 32 \text{ mm}) = 0,89, \quad (80)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{\text{max}} = 20 \text{ }\mu\text{m}) = 0,9. \quad (81)$$

Faktor zareznog djelovanja na presjeku III:

$$c_1\left(\frac{D}{d} = 1,1875\right) = 0,44, \quad (82)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2 ; \frac{\rho}{d} = 0,1875 \right) = 1,3, \quad (83)$$

$$\beta_{kfIII} = 1 + 0,44 \cdot (1,3 - 1) = 1,132, \quad (84)$$

$$S_{III} = \frac{0,89 \cdot 0,9 \cdot 210}{1 \cdot 1,132 \cdot 23,72} = 6,26 > S_{potr.} = 2. \quad (85)$$

Presjek III zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.4. Presjek IV

Presjek IV opterećen je na savijanje i uvijanja. Kako je već spomenuto potrebno je izračunati reducirano naprezanje. Reducirano naprezanje računa se preko reducirano momenta savijanja:

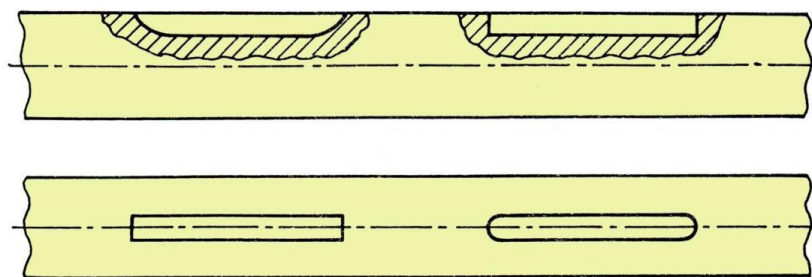
$$M_{redIV} = \sqrt{(\beta_{kfIV} \cdot M_{IV})^2 + 0,75 \cdot (\beta_{ktIV} \cdot \alpha_0 \cdot T)^2}. \quad (86)$$

Moment savijanja M_{IV} isti je kao i moment M_3 (26) iz poglavlja 4.3.2.:

$$M_{IV} = 106820 \text{ Nmm}. \quad (87)$$

Faktor zareznog djelovanja zbog savijanja za presjek s utorom za pero ovisi o prekidnoj čvrstoći materijala vratila i obliku utora za pero prema Slika 27.

Oblik	Prekidna čvrstoća R_m [N/mm ²]					
	300	400	500	600	700	800
A	1,4	1,45	1,5	1,55	1,58	1,62
B	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1



Oblik: A B

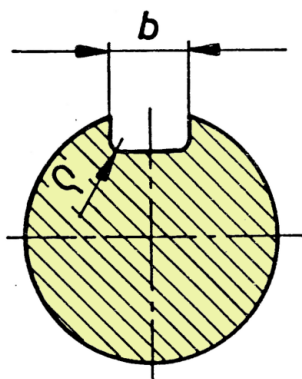
Slika 27. Faktor zareznog djelovanja kod savijanja vratila s utorom za pero [5]

Prema tehničkom crtežu vratila oblik utora za pero odgovara obliku B. Za točniju vrijednost faktora zareznog djelovanja interpolira se vrijednost za prekidnu čvrstoću materijala vratila. Slika 27. prikazuje vrijednost faktora zareznog djelovanja kod savijanja vratila s utorom za pero ovisno o čvrstoći materijala i obliku utora za pero. Vrijednost faktora iznosi:

$$\beta_{kfIV} = 1,72. \quad (88)$$

Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja vratila s utorom za pero određuje se iz Slika 28. Iz crteža vratila očitani radijus dna utora za pero je 1 mm. Prema tome faktor zareznog djelovanja za uvijanje iznosi:

$$\beta_{ktIV} = 1,87. \quad (89)$$



$$\begin{aligned} &\text{za } \rho = 0,10 \dots 0,15 \cdot b \text{ (mm):} \\ &\beta_{kt} = 1,8 \dots 2,0 \end{aligned}$$

Slika 28. Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja vratila s utorom za pero [5]

Uvrštavanjem vrijednosti u (86) dobiva se reducirani moment. Zajedno s momentom otpora presjeka dolazi se i do reduciranog naprezanja:

$$M_{redIV} = \sqrt{(1,72 \cdot 106820)^2 + 0,75 \cdot (1,87 \cdot 0,87 \cdot 90000)^2}, \quad (90)$$

$$M_{redIV} = 223240 \text{ Nmm},$$

$$W_{IV} = \frac{d_{IV}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{38^3 \cdot \pi}{32} = 5387,0 \text{ mm}^3, \quad (91)$$

$$\sigma_{redIV} = \frac{M_{redIV}}{W_{IV}} = \frac{223240}{5387} = 41,44 \text{ N/mm}^2. \quad (92)$$

Potrebno je još očitati faktore b_1 i b_2 te uvrstiti u jednadžbu za sigurnost presjeka.

$$b_1(d_{IV} = 38 \text{ mm}) = 0,86, \quad (93)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{max} = 2,5 \mu\text{m}) = 0,98, \quad (94)$$

$$S_{IV} = \frac{0,86 \cdot 0,98 \cdot 210}{1 \cdot 41,44} = 4,27 > S_{potr.} = 2. \quad (95)$$

Presjek IV zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.5. Presjek V

Presjek V opterećen je na savijanje i uvijanje. Faktor zareznog djelovanja pri savijanja određuje se pomoću crteža vratila i Slika 26.

$$c_1\left(\frac{D}{d} = 1,26\right) = 0,55, \quad (96)$$

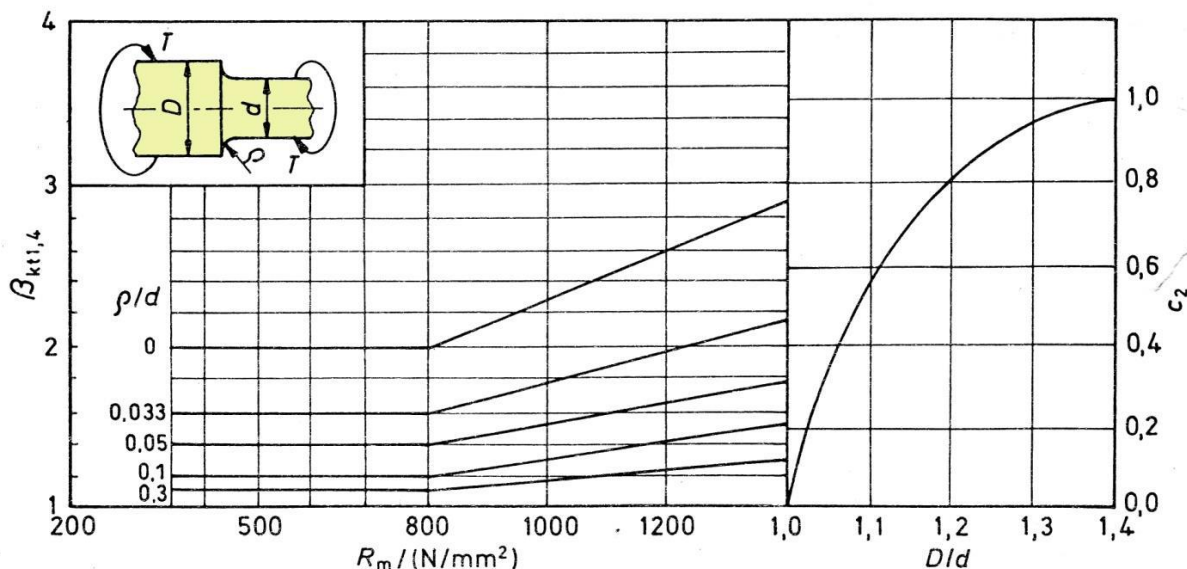
$$\beta_{kf2}\left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,05\right) = 1,75, \quad (97)$$

$$\beta_{kfV} = 1 + 0,55 \cdot (1,75 - 1) = 1,4125. \quad (98)$$

Za određivanje faktora zreznog djelovanja pri uvijanja vratila koristi se dijagram sa Slika 29.

i jednažba (99).

$$\beta_{kt} = 1 + c_2 \cdot (\beta_{kt1,4} - 1). \quad (99)$$



Slika 29. Faktor $\beta_{kt1,4}$ kod uvijanja i promjeni promjera [5]

$$c_2 \left(\frac{D}{d} = 1,26 \right) = 0,9, \quad (100)$$

$$\beta_{kt1,4} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,05 \right) = 1,4, \quad (101)$$

$$\beta_{ktV} = 1 + 0,9 \cdot (1,4 - 1) = 1,36. \quad (102)$$

Moment savijanja presjeka jednak je već izračunatom momentu M_4 (32) iz poglavlja 4.3.3 gore:

$$M_V = 112306 \text{ Nmm}. \quad (103)$$

Reducirani moment i reducirano naprezanje presjeka V iznosi:

$$M_{redV} = \sqrt{(1,4125 \cdot 112306)^2 + 0,75 \cdot (1,36 \cdot 0,87 \cdot 90000)^2}, \quad (104)$$

$$M_{redV} = 183491 \text{ Nmm},$$

$$W_V = \frac{d_V^3 \cdot \pi}{32} = \frac{38^3 \cdot \pi}{32} = 5387,0 \text{ mm}^3, \quad (105)$$

$$\sigma_{redV} = \frac{M_{redV}}{W_V} = \frac{183491}{5387} = 34,06 \text{ N/mm}^2. \quad (106)$$

Očitani faktori i sigurnost presjeka:

$$b_1(d_V = 38 \text{ mm}) = 0,86, \quad (107)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{max} = 2,5 \text{ } \mu\text{m}) = 0,98, \quad (108)$$

$$S_V = \frac{0,86 \cdot 0,98 \cdot 210}{1 \cdot 34,06} = 5,19 > S_{potr.} = 2. \quad (109)$$

Presjek V zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.6. Presjek VI

Sigurnost presjeka VI računa se identično kao i za presjek V.

Faktor zareznog djelovanja uslijed savijanja:

$$c_1 \left(\frac{D}{d} = 1,26 \right) = 0,55, \quad (110)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,026 \right) = 2,2, \quad (111)$$

$$\beta_{kfVI} = 1 + 0,55 \cdot (2,2 - 1) = 1,66. \quad (112)$$

Faktor zareznog djelovanja uslijed uvijanja:

$$c_2 \left(\frac{D}{d} = 1,26 \right) = 0,9, \quad (113)$$

$$\beta_{kt1,4} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,026 \right) = 1,7, \quad (114)$$

$$\beta_{ktVI} = 1 + 0,9 \cdot (1,7 - 1) = 1,63. \quad (115)$$

Moment savijanja presjeka jednak je izračunatom momentu M_5 (37) iz poglavlja 4.3.4.

$$M_{VI} = 118323 \text{ Nmm}. \quad (116)$$

Reducirani moment i reducirano naprezanje presjeka VI iznosi:

$$M_{redVI} = \sqrt{(1,66 \cdot 118323)^2 + 0,75 \cdot (1,63 \cdot 0,87 \cdot 90000)^2}, \quad (117)$$

$$M_{redVI} = 225380 \text{ Nmm},$$

$$W_{VI} = \frac{d_{VI}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{38^3 \cdot \pi}{32} = 5387,0 \text{ mm}^3, \quad (118)$$

$$\sigma_{redVI} = \frac{M_{redVI}}{W_{VI}} = \frac{225380}{5387} = 41,84 \text{ N/mm}^2. \quad (119)$$

Očitani faktori i sigurnost presjeka:

$$b_1(d_{VI} = 38 \text{ mm}) = 0,86, \quad (120)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{max} = 2,5 \text{ } \mu\text{m}) = 0,98, \quad (121)$$

$$S_{VI} = \frac{0,86 \cdot 0,98 \cdot 210}{1 \cdot 41,84} = 4,23 > S_{potr.} = 2. \quad (122)$$

Presjek VI zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.7. Presjek VII

Presjek VII geometrijski je identičan presjeku IV, ali različitoga opterećenja. Zbog iste geometrije faktori zareznog djelovanja za savijanje i uvijanje su istih vrijednosti za oba presjeka.

$$\beta_{kfVII} = 1,72, \quad (123)$$

$$\beta_{kt VII} = 1,87. \quad (124)$$

Moment savijanja presjeka jednak je izračunatom momentu M_6 (40) iz poglavlja 4.3.5.:

$$M_{VII} = 124810 \text{ Nmm}. \quad (125)$$

Reducirani moment i reducirano naprezanje presjeka VII iznosi:

$$M_{redVII} = \sqrt{(1,72 \cdot 124810)^2 + 0,75 \cdot (1,87 \cdot 0,87 \cdot 90000)^2} \quad (126)$$

$$M_{redVII} = 249327 \text{ Nmm},$$

$$W_{VII} = \frac{d_{VII}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{38^3 \cdot \pi}{32} = 5387,0 \text{ mm}^3, \quad (127)$$

$$\sigma_{redVII} = \frac{M_{redVII}}{W_{VII}} = \frac{249327}{5387} = 46,28 \text{ N/mm}^2. \quad (128)$$

Očitani faktori i sigurnost presjeka:

$$b_1(d_{VII} = 38 \text{ mm}) = 0,86 \quad (129)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{max} = 2,5 \text{ } \mu\text{m}) = 0,98 \quad (130)$$

$$S_{VII} = \frac{0,86 \cdot 0,98 \cdot 210}{1 \cdot 46,28} = 3,82 > S_{potr.} = 2. \quad (131)$$

Presjek VII zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.8. Presjek VIII

Presjek VIII opterećen je na savijanje. Moment savijanja izračunati će se pomoću reakcije u osloncu B (14) i udaljenosti od oslonca B prema Slika 22.

$$M_{VIII} = F_B \cdot (200 - 150) = 1783 \cdot 50 = 89150 \text{ Nmm}. \quad (132)$$

Moment otpora presjeka računa se za manji promjer na prijelazu stupnjeva:

$$W_{VIII} = \frac{d_{VIII}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{34^3 \cdot \pi}{32} = 3858,6 \text{ mm}^3. \quad (133)$$

Naprezanje uzrokovano savijanjem iznosi:

$$\sigma_{fVIII} = \frac{M_{VIII}}{W_{VIII}} = \frac{89150}{3858,6} = 23,10 \text{ N/mm}^2. \quad (134)$$

Faktor zareznog djelovanja uslijed savijanja:

$$c_1 \left(\frac{D}{d} = 1,12 \right) = 0,51 \quad (135)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,058 \right) = 1,7 \quad (136)$$

$$\beta_{kf VIII} = 1 + 0,51 \cdot (1,7 - 1) = 1,357 \quad (137)$$

Očitani faktori i sigurnost presjeka:

$$b_1(d_{VIII} = 34 \text{ mm}) = 0,88 \quad (138)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{max} = 20 \text{ } \mu\text{m}) = 0,9 \quad (139)$$

$$S_{\text{VIII}} = \frac{0,88 \cdot 0,9 \cdot 210}{1 \cdot 1,357 \cdot 23,10} = 5,30 > S_{\text{potr.}} = 2. \quad (140)$$

Presjek VIII zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.9. Presjek IX

Sigurnost presjeka IX izračunava se identično kao i sigurnost presjeka VIII.

$$M_{\text{IX}} = F_{\text{B}} \cdot (200 - 175) = 1783 \cdot 25 = 44575 \text{ Nmm}. \quad (141)$$

$$W_{\text{IX}} = \frac{d_{\text{IX}}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{26^3 \cdot \pi}{32} = 1725,5 \text{ mm}^3. \quad (142)$$

$$\sigma_{\text{fIX}} = \frac{M_{\text{IX}}}{W_{\text{IX}}} = \frac{44575}{1725,5} = 25,83 \text{ N/mm}^2. \quad (143)$$

Faktor zareznog djelovanja uslijed savijanja:

$$c_1 \left(\frac{D}{d} = 1,30 \right) = 0,6 \quad (144)$$

$$\beta_{\text{kf2}} \left(R_{\text{m}} = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,15 \right) = 1,45 \quad (145)$$

$$\beta_{\text{kfIX}} = 1 + 0,6 \cdot (1,45 - 1) = 1,27 \quad (146)$$

Očitani faktori i sigurnost presjeka:

$$b_1(d_{\text{IX}} = 26 \text{ mm}) = 0,92 \quad (147)$$

$$b_2(R_{\text{m}} = 420 \text{ N/mm}^2; R_{\text{max}} = 20 \text{ } \mu\text{m}) = 0,9 \quad (148)$$

$$S_{\text{IX}} = \frac{0,92 \cdot 0,9 \cdot 210}{1 \cdot 1,27 \cdot 25,83} = 5,30 > S_{\text{potr.}} = 2. \quad (149)$$

Presjek IX zadovoljava uvjet sigurnosti.

4.5.10. Presjek X

$$M_{\text{X}} = F_{\text{B}} \cdot (200 - 193) = 1783 \cdot 7 = 12481 \text{ Nmm}. \quad (150)$$

$$W_{\text{X}} = \frac{d_{\text{X}}^3 \cdot \pi}{32} = \frac{20^3 \cdot \pi}{32} = 785,4 \text{ mm}^3. \quad (151)$$

$$\sigma_{\text{X}} = \frac{M_{\text{X}}}{W_{\text{X}}} = \frac{12481}{785,4} = 15,89 \text{ N/mm}^2. \quad (152)$$

Faktor zareznog djelovanja uslijed savijanja:

$$c_1 \left(\frac{D}{d} = 1,3 \right) = 0,6 \quad (153)$$

$$\beta_{\text{kf2}} \left(R_{\text{m}} = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,04 \right) = 1,85 \quad (154)$$

$$\beta_{\text{kfX}} = 1 + 0,6 \cdot (1,85 - 1) = 1,51 \quad (155)$$

Očitani faktori i sigurnost presjeka:

$$b_1(d_X = 2 \text{ mm}) = 0,95 \quad (156)$$

$$b_2(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; R_{\max} = 10 \text{ } \mu\text{m}) = 0,91 \quad (157)$$

$$S_X = \frac{0,95 \cdot 0,91 \cdot 210}{1 \cdot 1,51 \cdot 15,89} = 7,56 > S_{\text{potr.}} = 2. \quad (158)$$

Presjek X zadovoljava uvjet sigurnosti.

Svi presjeci vratila zadovoljavaju uvjet sigurnosti. Time je vratilo dobro dimenzionirano.

4.6. Provjera progiba, nagiba i kuta uvijanja

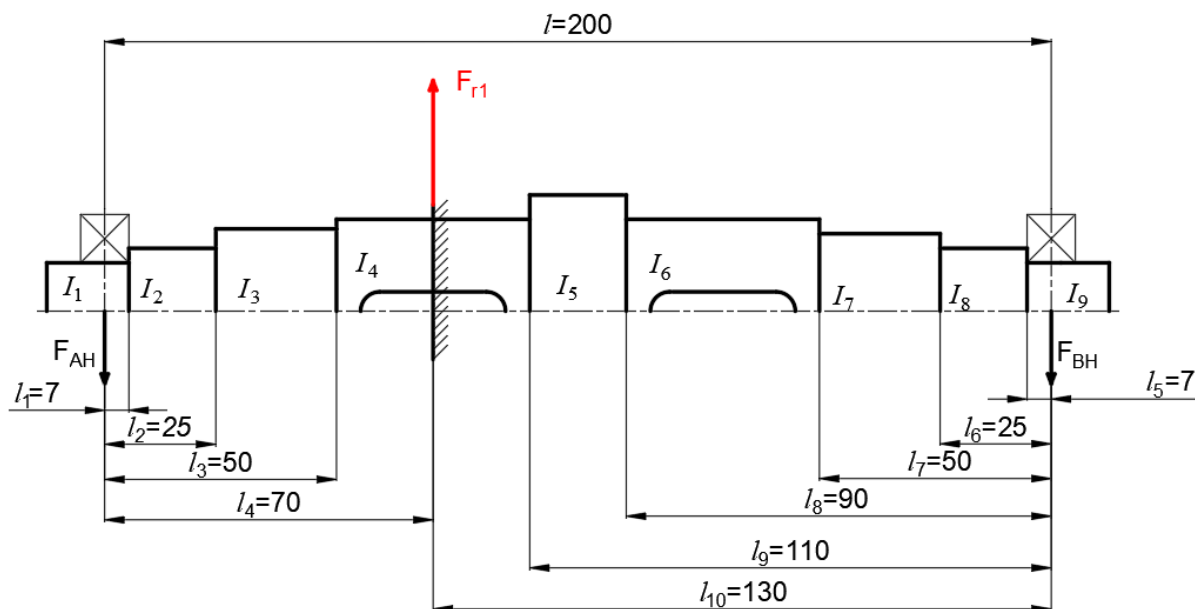
Za provjeru progiba i nagiba koristiti će se metoda zamišljenog uklještenja mjestima djelovanja aktivnih sila. Za svaki element potrebno je izračunati progibe u horizontalnoj i vertikalnoj ravnini. Dopusteni ukupni progib i nagib vratila, prema iskustvenim podacima, iznose:

$$f_{\text{dop}} = 0,00035 \cdot l = 0,07 \text{ mm}, \quad (159)$$

$$\tan \beta \leq 0,001 \dots 0,035. \quad (160)$$

4.6.1. Provjera na mjestu Z_1 u horizontalnoj ravnini

Kao aktivna sila djeluje nam samo horizontalna komponenta sila na zupčanika Z_1 . Potrebno je izračunati reakcije u osloncima A i B pri djelovanju samo te sile. Zatim se postavlja zamišljeno uklještenje na mjestu djelovanja aktivne sile, te se pomoću reakcija u osloncima A i B računaju progibi oslonaca A i B. Za proračun se koristi Slika 30.



Slika 30. Proračunska skica u horizontalnoj ravnini za progib na mjestu Z_1

$$F_{AH} = \frac{F_{r1} \cdot (l - l_4)}{l} = \frac{437 \cdot (200 - 70)}{200} = 284 \text{ N} \quad (161)$$

$$F_{BH} = \frac{F_{r1} \cdot (l - l_{10})}{l} = \frac{437 \cdot (200 - 130)}{200} = 153 \text{ N} \quad (162)$$

Progib konzole u osloncu A:

$$f_{AhZ1} = \frac{F_{AH}}{3E} \cdot \left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{I_4} \right) = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (163)$$

Progib konzole u osloncu B:

$$f_{BhZ1} = \frac{F_{BH}}{3E} \cdot \left(\frac{l_5^3}{I_9} + \frac{l_6^3 - l_5^3}{I_8} + \frac{l_7^3 - l_6^3}{I_7} + \frac{l_8^3 - l_7^3}{I_6} + \frac{l_9^3 - l_8^3}{I_5} + \frac{l_{10}^3 - l_9^3}{I_4} \right) \quad (164)$$

$$f_{BhZ1} = 4,63 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Progib u horizontalnoj ravnini na mjestu Z₁:

$$f_{hZ1} = f_{AhZ1} + \frac{(f_{BhZ1} - f_{AhZ1}) \cdot l_4}{l} = 3,08 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (165)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila iznosi:

$$\alpha_{hZ1} \approx \tan \alpha_{hZ1} = \frac{(f_{AhZ1} - f_{BhZ1})}{l} = -1,19 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (166)$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu A:

$$\beta_{AhZ1} = \frac{F_{AH}}{2E} \cdot \left(\frac{l_1^2}{I_1} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{I_2} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_3} + \frac{l_4^2 - l_3^2}{I_4} \right) - \alpha_{hZ1} \quad (167)$$

$$\beta_{AhZ1} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu B:

$$\beta_{BhZ1} = \frac{F_{BH}}{2E} \cdot \left(\frac{l_5^2}{I_9} + \frac{l_6^2 - l_5^2}{I_8} + \frac{l_7^2 - l_6^2}{I_7} + \frac{l_8^2 - l_7^2}{I_6} + \frac{l_9^2 - l_8^2}{I_5} + \frac{l_{10}^2 - l_9^2}{I_4} \right) + \alpha_{hZ1} \quad (168)$$

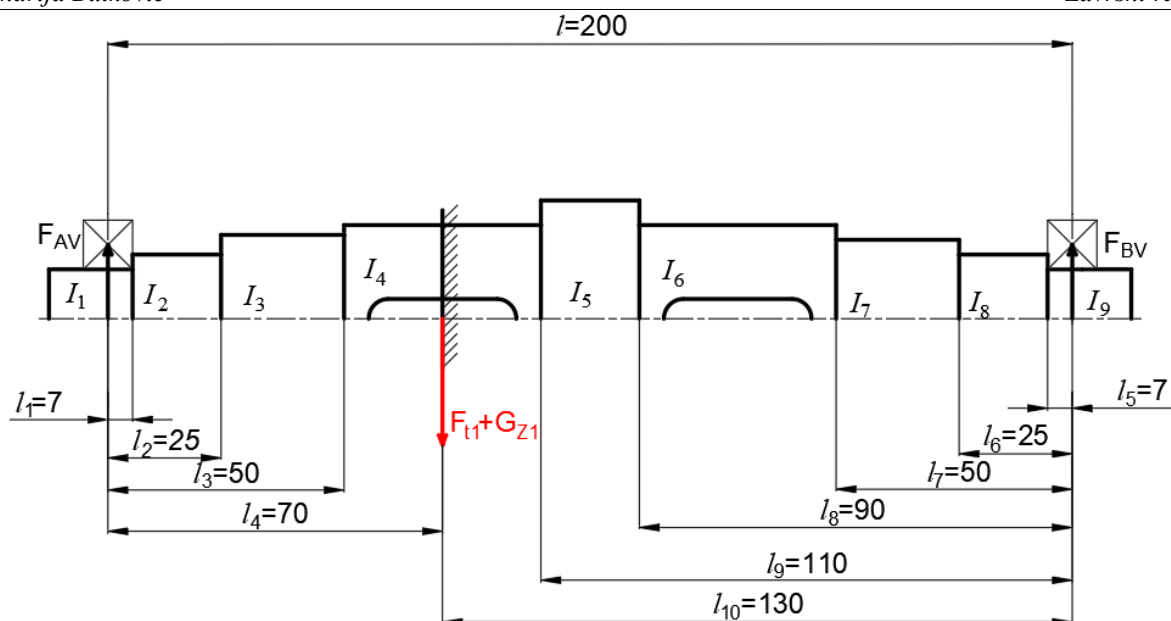
$$\beta_{BhZ1} = 5,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

4.6.2. Provjera na mjestu Z₁ u vertikalnoj ravnini

Za proračun progiba koriste se isti izrazi kao i u horizontalnoj ravnini, ali s opterećenjem iz vertikalne ravnine. Za proračun se koristi Slika 31.

$$F_{AV} = \frac{(F_{t1} + G_{Z1}) \cdot (l - l_4)}{l} = 819 \text{ N} \quad (169)$$

$$F_{BV} = \frac{(F_{t1} + G_{Z1}) \cdot (l - l_{10})}{l} = 441 \text{ N} \quad (170)$$



Slika 31. Proračunska skica u vertikalnoj ravnini za progib na mjestu Z_1

Progib konzole u osloncu A:

$$f_{AvZ_1} = \frac{F_{AV}}{3E} \cdot \left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{I_4} \right) = 6,47 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (171)$$

Progib konzole u osloncu B:

$$f_{BvZ_1} = \frac{F_{BV}}{3E} \cdot \left(\frac{l_5^3}{I_9} + \frac{l_6^3 - l_5^3}{I_8} + \frac{l_7^3 - l_6^3}{I_7} + \frac{l_8^3 - l_7^3}{I_6} + \frac{l_9^3 - l_8^3}{I_5} + \frac{l_{10}^3 - l_9^3}{I_4} \right) \quad (172)$$

$$f_{BvZ_1} = 13,35 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Progib u vertikalnoj ravnini na mjestu Z_1 :

$$f_{vZ_1} = f_{AvZ_1} - \frac{(f_{AvZ_1} - f_{BvZ_1}) \cdot l_4}{l} = 8,88 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (173)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila iznosi:

$$\alpha_{vZ_1} \approx \tan \alpha_{vZ_1} = \frac{(f_{AvZ_1} - f_{BvZ_1})}{l} = -3,44 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (174)$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu A:

$$\beta_{AvZ_1} = \frac{F_{AV}}{2E} \cdot \left(\frac{l_1^2}{I_1} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{I_2} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_3} + \frac{l_4^2 - l_3^2}{I_4} \right) - \alpha_{vZ_1} \quad (175)$$

$$\beta_{AvZ_1} = 21,34 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu B:

$$\beta_{BvZ_1} = \frac{F_{BV}}{2E} \cdot \left(\frac{l_5^2}{I_9} + \frac{l_6^2 - l_5^2}{I_8} + \frac{l_7^2 - l_6^2}{I_7} + \frac{l_8^2 - l_7^2}{I_6} + \frac{l_9^2 - l_8^2}{I_5} + \frac{l_{10}^2 - l_9^2}{I_4} \right) + \alpha_{vZ_1} \quad (176)$$

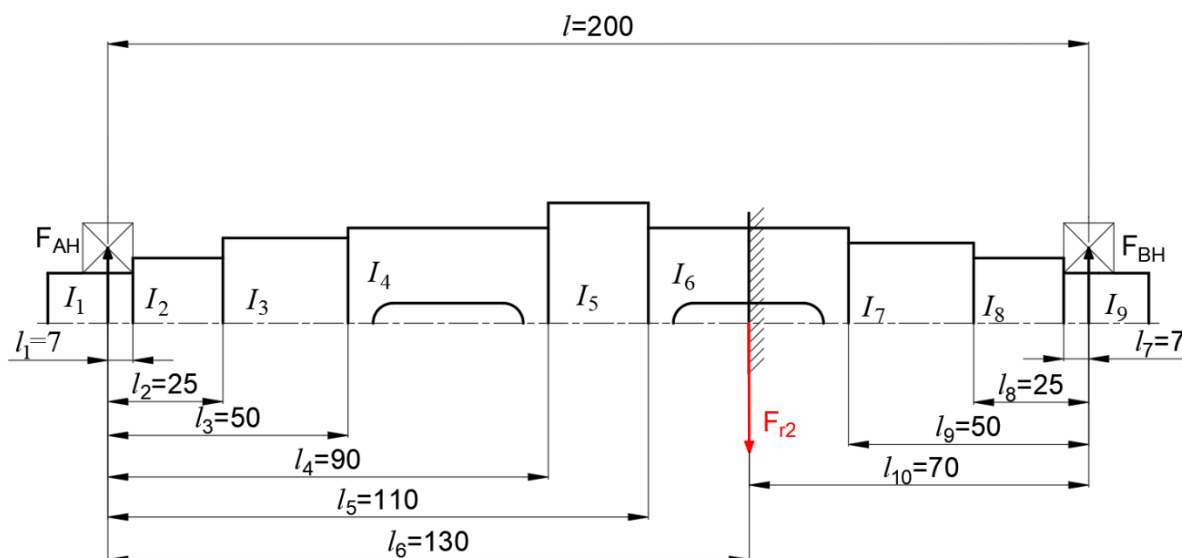
$$\beta_{BvZ_1} = 15,46 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

4.6.3. Provjera na mjestu Z_2 u horizontalnoj ravnini

Proračun je identičan kao i za prijašnja poglavlja.

$$F_{AH} = \frac{F_{r2} \cdot (l - l_6)}{l} = 255 \text{ N} \quad (177)$$

$$F_{BH} = \frac{F_{r2} \cdot (l - l_{10})}{l} = 473 \text{ N} \quad (178)$$



Slika 32. Proračunska skica u horizontalnoj ravnini za progib na mjestu Z_2

Progib konzole u osloncu A:

$$f_{AhZ2} = \frac{F_{AH}}{3E} \cdot \left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{I_4} + \frac{l_5^3 - l_4^3}{I_5} + \frac{l_6^3 - l_5^3}{I_6} \right) \quad (179)$$

$$f_{AhZ2} = 7,90 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Progib konzole u osloncu B:

$$f_{BhZ2} = \frac{F_{BH}}{3E} \cdot \left(\frac{l_7^3}{I_9} + \frac{l_8^3 - l_7^3}{I_8} + \frac{l_9^3 - l_8^3}{I_7} + \frac{l_{10}^3 - l_9^3}{I_6} \right) = 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (180)$$

Progib u horizontalnoj ravnini na mjestu Z_2 :

$$f_{hZ2} = f_{AhZ2} - \frac{(f_{AhZ2} - f_{BhZ2}) \cdot l_6}{l} = 5,50 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (181)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila iznosi:

$$\alpha_{hZ2} \approx \tan \alpha_{hZ2} = \frac{(f_{AhZ2} - f_{BhZ2})}{l} = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (182)$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu A:

$$\beta_{AhZ2} = \frac{F_{AH}}{2E} \cdot \left(\frac{l_1^2}{I_1} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{I_2} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_3} + \frac{l_4^2 - l_3^2}{I_4} + \frac{l_5^2 - l_4^2}{I_5} + \frac{l_6^2 - l_5^2}{I_6} \right) - \alpha_{hZ2} \quad (183)$$

$$\beta_{AhZ2} = 9,40 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu B:

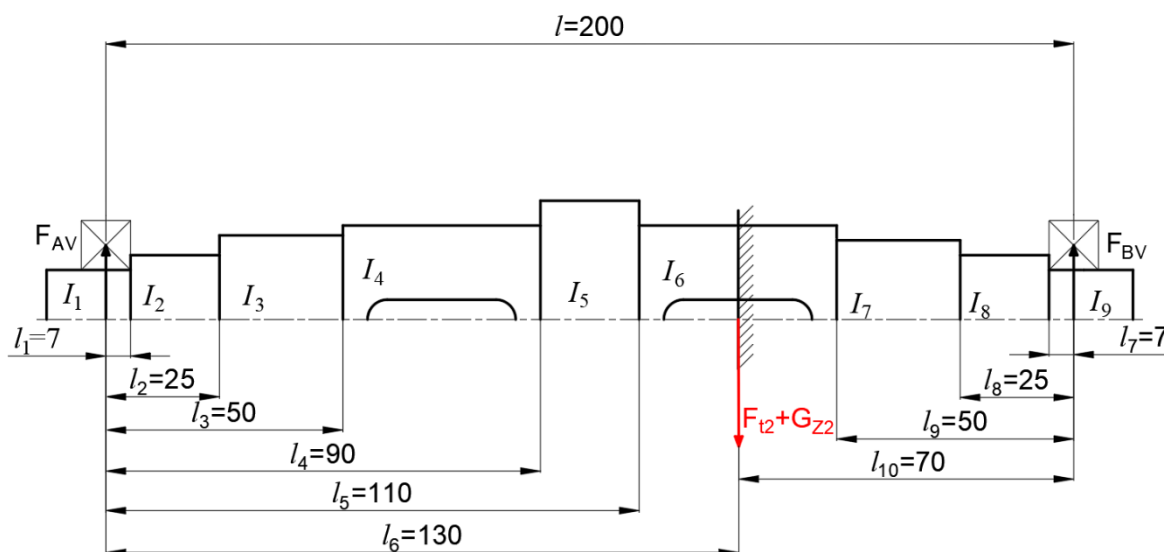
$$\beta_{\text{BhZ2}} = \frac{F_{\text{BH}}}{2E} \cdot \left(\frac{l_7^2}{I_9} + \frac{l_8^2 - l_7^2}{I_8} + \frac{l_9^2 - l_8^2}{I_7} + \frac{l_{10}^2 - l_9^2}{I_6} \right) + \alpha_{\text{hZ2}} = 11,30 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \quad (184)$$

4.6.4. Provjera na mjestu Z_2 u vertikalnoj ravnini

Proračun je identičan kao i za prijašnja poglavlja.

$$F_{\text{AV}} = \frac{(F_{\text{t2}} + G_{\text{Z2}}) \cdot (l - l_6)}{l} = 707 \text{ N} \quad (185)$$

$$F_{\text{BV}} = \frac{(F_{\text{t2}} + G_{\text{Z2}}) \cdot (l - l_{10})}{l} = 1313 \text{ N} \quad (186)$$



Slika 33. Proračunska skica u vertikalnoj ravnini za progib na mjestu Z_2

Progib konzole u osloncu A:

$$f_{\text{AvZ2}} = \frac{F_{\text{AV}}}{3E} \cdot \left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{I_4} + \frac{l_5^3 - l_4^3}{I_5} + \frac{l_6^3 - l_5^3}{I_6} \right) \quad (187)$$

$$f_{\text{AvZ2}} = 21,91 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Progib konzole u osloncu B:

$$f_{\text{BvZ2}} = \frac{F_{\text{BV}}}{3E} \cdot \left(\frac{l_7^3}{I_9} + \frac{l_8^3 - l_7^3}{I_8} + \frac{l_9^3 - l_8^3}{I_7} + \frac{l_{10}^3 - l_9^3}{I_6} \right) = 9,43 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (188)$$

Progib u vertikalnoj ravnini na mjestu Z_2 :

$$f_{\text{vZ2}} = f_{\text{AvZ2}} - \frac{(f_{\text{AvZ2}} - f_{\text{BvZ2}}) \cdot l_6}{l} = 13,80 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (189)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila iznosi:

$$\alpha_{\text{vZ2}} \approx \tan \alpha_{\text{vZ2}} = \frac{(f_{\text{AvZ2}} - f_{\text{BvZ2}})}{l} = 6,24 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (190)$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu A:

$$\beta_{\text{AvZ2}} = \frac{F_{\text{AV}}}{2E} \cdot \left(\frac{l_1^2}{I_1} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{I_2} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_3} + \frac{l_4^2 - l_3^2}{I_4} + \frac{l_5^2 - l_4^2}{I_5} + \frac{l_6^2 - l_5^2}{I_6} \right) - \alpha_{\text{vZ2}} \quad (191)$$

$$\beta_{AvZ2} = 24,95 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Nagib elastične linije vratila u osloncu B:

$$\beta_{BvZ2} = \frac{F_{BV}}{2E} \cdot \left(\frac{l_7^2}{I_9} + \frac{l_8^2 - l_7^2}{I_8} + \frac{l_9^2 - l_8^2}{I_7} + \frac{l_{10}^2 - l_9^2}{I_6} \right) + \alpha_{vZ2} = 32,48 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \quad (192)$$

4.6.5. Ukupni progib vratila i nagib elastične linije u osloncima

Približni proračun progiba u horizontalnoj i vertikalnoj ravnini:

$$f_h \cong f_{hz1} + f_{hz2} = 3,08 \cdot 10^{-3} + 5,50 \cdot 10^{-3} = 8,58 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (193)$$

$$f_v \cong f_{vz1} + f_{vz2} = 8,88 \cdot 10^{-3} + 13,80 \cdot 10^{-3} = 22,68 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (194)$$

Približni ukupni progib:

$$f = \sqrt{f_h^2 + f_v^2} = 24,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (195)$$

Progib vratila zadovoljava uvjet:

$$f = 0,02425 \text{ mm} \leq f_{\text{dop}} = 0,07 \text{ mm}. \quad (196)$$

Ukupni nagib elastične linije u horizontalnoj i vertikalnoj ravnini oslonca A:

$$\tan \beta_{Ah} = \tan \beta_{AhZ1} + \tan \beta_{AhZ2} = 1,68 \cdot 10^{-4} \quad (197)$$

$$\tan \beta_{Av} = \tan \beta_{AvZ1} + \tan \beta_{AvZ2} = 4,629 \cdot 10^{-4} \quad (198)$$

Rezultantni nagib elastične line kod oslonca A:

$$\tan \beta_A = \sqrt{\tan \beta_{Ah}^2 + \tan \beta_{Av}^2} = 6,309 \cdot 10^{-4} \quad (199)$$

Ukupni nagib elastične linije u horizontalnoj i vertikalnoj ravnini oslonca B:

$$\tan \beta_{Bh} = \tan \beta_{BhZ1} + \tan \beta_{BhZ2} = 1,467 \cdot 10^{-4} \quad (200)$$

$$\tan \beta_{Bv} = \tan \beta_{BvZ1} + \tan \beta_{BvZ2} = 4,794 \cdot 10^{-4} \quad (201)$$

Rezultantni nagib elastične line kod oslonca B:

$$\tan \beta_B = \sqrt{\tan \beta_{Bh}^2 + \tan \beta_{Bv}^2} = 5,013 \cdot 10^{-4} \quad (202)$$

Nagib elastične linije u osloncima A i B zadovoljava uvjet.

$$\tan \beta_A = 6,309 \cdot 10^{-4} \leq 0,001 \quad (203)$$

$$\tan \beta_B = 5,013 \cdot 10^{-4} \leq 0,001 \quad (204)$$

4.6.6. Kut uvijanja vratila

Kao posljedica djelovanja momenta uvijanja T na vratilu dolazi do pojave kuta uvijanje. Kut uvijanja, prema iskustvenim podacima, mora biti manji od dopuštenog:

$$\frac{\varphi_{\text{dop}}}{l_t} \leq 0,00025 \dots 0,0005 \text{ } ^\circ/\text{mm}. \quad (205)$$

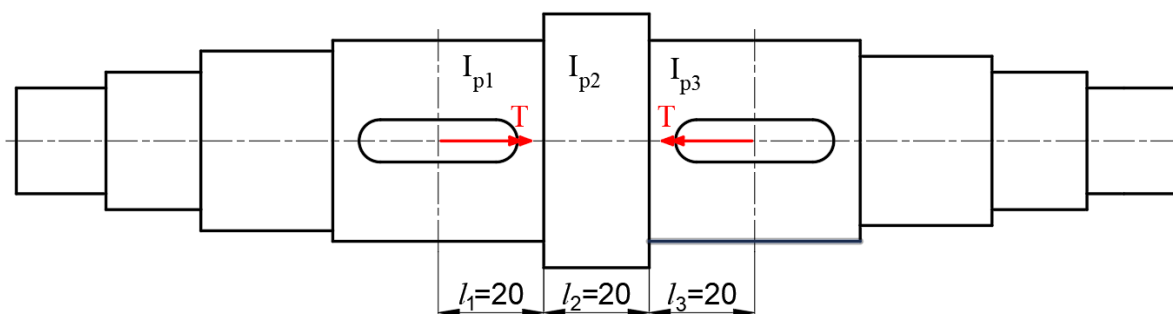
l_t predstavlja duljinu vratila na kojoj djeluje moment uvijanja. Iz crteža vratila očitano je iznos $l_t = 60 \text{ mm}$. Iz jednadžbe (205) proizlazi dopušteni kut uvijanja:

$$\varphi_{\text{dop}} = 0,015^\circ \quad (206)$$

Za izračun kuta uvijanja vratila potrebno je poznavati modul smičnosti materijal G . Za čelik on približno iznosi:

$$G = 81000 \text{ N/mm}^2 \quad (207)$$

Kako moment uvijanja djeluje na presjecima različitih dimenzija, potrebno je uzeti u obzir polarni moment tromosti svakog presjeka. Prema Slika 34. i dimenzijama očitanih iz crteža vratila izračunava se kut uvijanja.



Slika 34. Skica vratila za proračun kuta uvijanja

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{T}{G} \cdot \left(\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} + \frac{l_3}{I_{p3}} \right) = 0,01488^\circ \leq \varphi_{\text{dop}} = 0,015^\circ \quad (208)$$

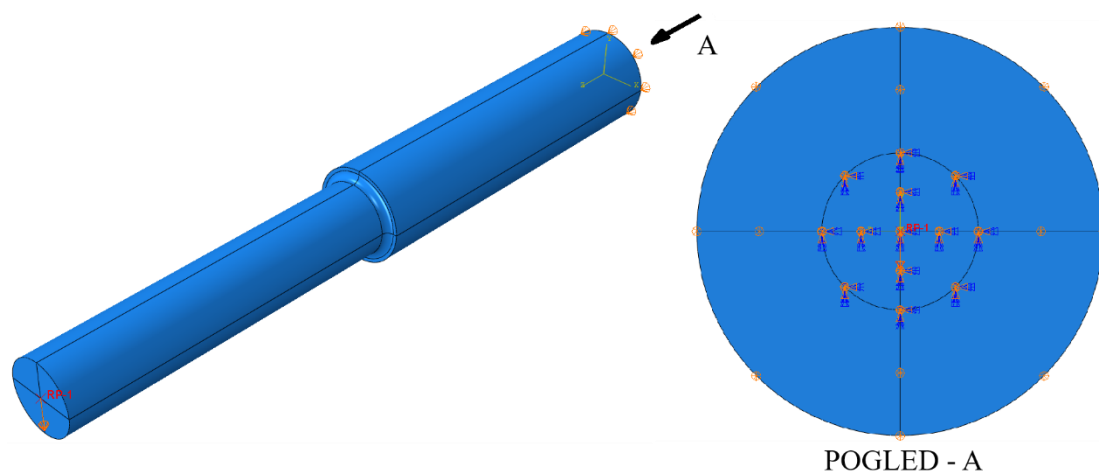
Kut uvijanja vratila zadovoljava.

5. NUMERIČI PRORAČUN VRATILA

U ovom poglavlju je opisan i prikazan numerički proračun vratila korištenjem programskog paketa *Abaqus*®. Prvo je provedena verifikacija problema na jednostavnim modelima, a zatim analiza cijelog vratila.

5.1. Verifikacija štapa s jednim prijelaznim stupnjem opterećenim na savijanje

Za verifikaciju je napravljen jednostavan 3D model koji je opterećen silom na jednom kraju, a drugi kraj je uklješten. Model je podijeljen na manje dijelove radi bolje diskretizacije. Slika 35. prikazuje 3D model unutar programa *Abaqus*®.



Slika 35. Model za verifikaciju savijanja s opterećenjem i rubnim uvjetima

Ukupna dužina modela je $l = 200$ mm, veći promjer je $D = 26$ mm dok je manji promjer $d = 20$ mm. Prelazak s većega na manji promjer nalazi se na polovici modela, to jest na 100 mm. Prijelazni radijus iznosi $R = 2$ mm.

Pretpostavlja se isti materijal kao i kod analitičkog proračuna vratila. Za postavke materijala u *Abaqus-u*® odabran je elastičan materijal s Youngovim modulom elastičnosti 210 GPa i Poissonovim faktorom 0,3.

Definirana je referentna točka RP-1 na kraju vratila s manjim promjerom. Postavljeno je kinematičko ograničenje *coupling* između RP-1 i površine na kraju vratila. Zatim je definirana sila koja djeluje u negativnom smjeru osi y iznosa 500 N. Na kraj vratila većeg promjera postavljen je rubni uvjet uklještenja. Za točnije rezultate napravljena je dodatna podjela površina na uklještenom kraju štapa (prikazano na Slika 35., desno) na koju je stavljen rubni uvjet uklještenja, a ostale površine imaju ograničen pomak u smjeru uzdužne osi štapa (z).

Analitička vrijednost naprezanja na prijelaznom radijusu modela određena je istim postupkom kao i kod određivanja naprezanja na kritičnim presjecima vratila u poglavlju 4.5.

Nominalno naprezanje uzrokovano savijanjem na presjeku prijelaznog radijusa:

$$\sigma' = \frac{M}{W} = \frac{F \cdot l}{\frac{d^3 \pi}{32}} = \frac{500 \cdot 200}{\frac{20^3 \cdot \pi}{32}} = 63,66 \text{ N/mm}^2 \quad (209)$$

Faktor zareznog djelovanja pri savijanju štapa određen je pomoću Slika 26.

$$\beta_{kf} = 1 + c_1 \cdot (\beta_{kf2} - 1) \quad (210)$$

$$c_1 \left(\frac{D}{d} = 1,3 \right) = 0,6 \quad (211)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2 ; \frac{\rho}{d} = 0,1 \right) = 1,5 \quad (212)$$

$$\beta_{kf} = 1 + 0,6 \cdot (1,5 - 1) = 1,3 \quad (213)$$

Koncentrirano naprezanje na prijelaznom radijusu iznosi:

$$\sigma = \sigma' \cdot \beta_{kf} = 63,66 \cdot 1,3 = 82,76 \text{ N/mm}^2 \quad (214)$$

Rezultati analitičkog proračuna za verifikacijski model štapa opterećenog na savijanje prikazani su u Tablica 6.

Tablica 6. Analitičke vrijednosti naprezanja štapa opterećenog na savijanje

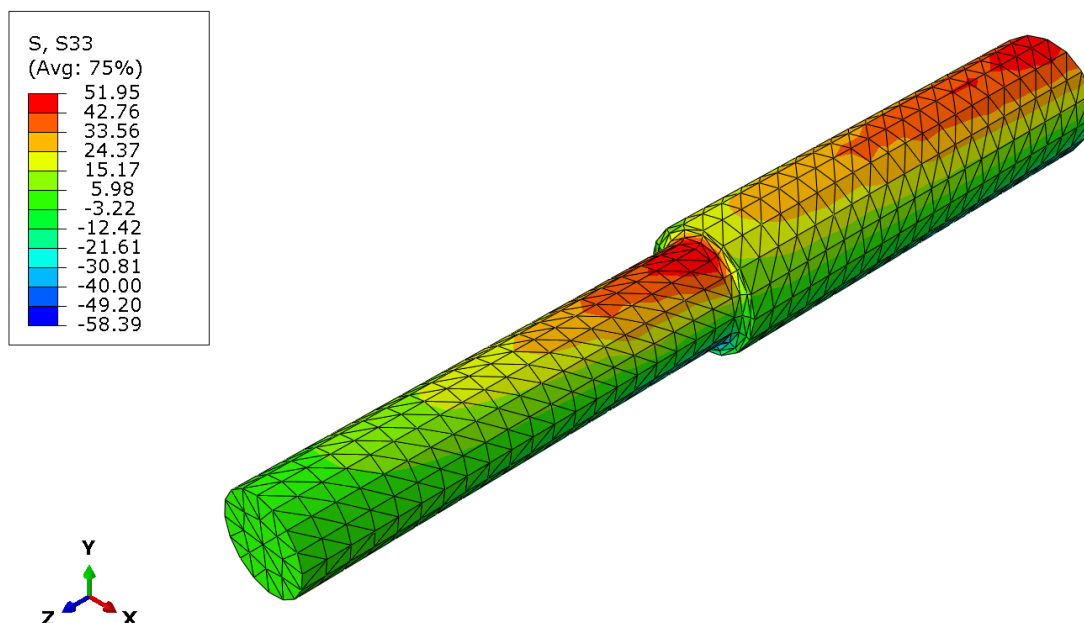
Mjesto na modelu	Naprezanje
Uklještenje	57,95 N/mm ²
Prijelazni radijus	82,76 N/mm ²

Za izradu mreže konačnih elemenata koristili su se C3D4 elementi. Rezultati numeričke analize štapa opterećenog na savijanje prikazani su u Tablica 7.

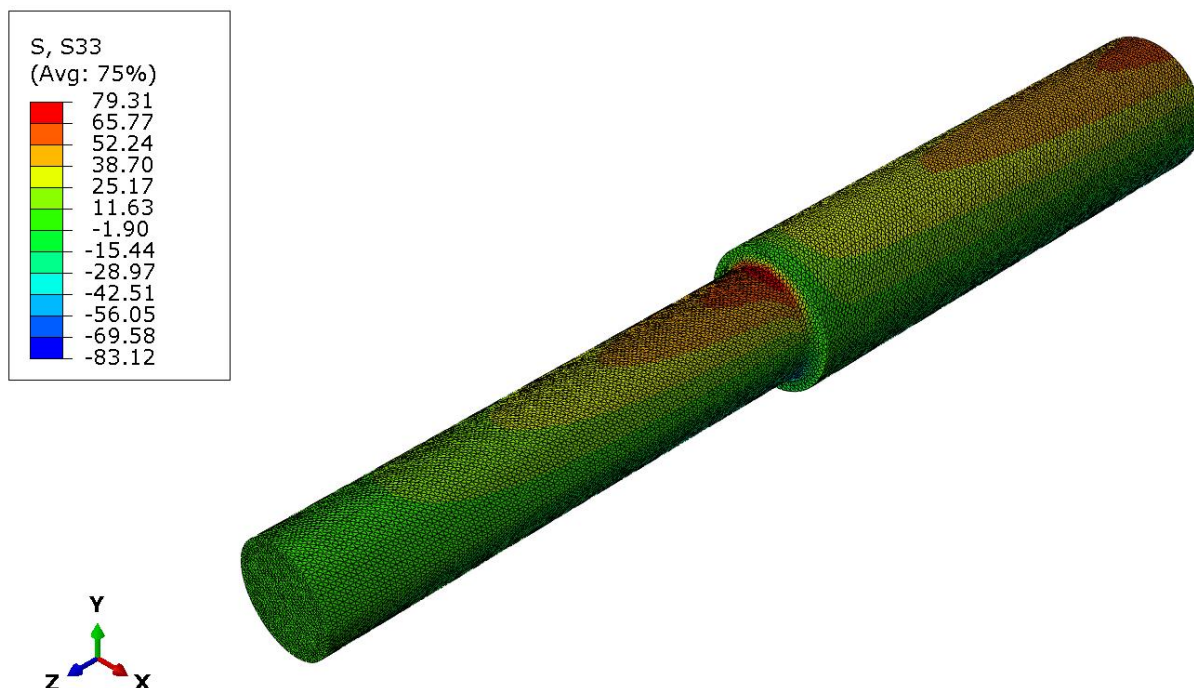
Tablica 7. Numerički rezultati naprezanja štapa opterećenog na savijanje

Broj elemenata	Naprezanje kod uklještenja	Naprezanje na prijelaznom radijusu
5447	49,63 N/mm ²	58,39 N/mm ²
12224	51,71 N/mm ²	60,09 N/mm ²
26294	55,95 N/mm ²	65,19 N/mm ²
76197	56,05 N/mm ²	66,17 N/mm ²
141195	56,63 N/mm ²	70,68 N/mm ²
254577	57,55 N/mm ²	75,44 N/mm ²
651968	58,05 N/mm ²	83,12 N/mm ²

Iz Tablica 7. zaključeno je da vrijednosti naprezanja kod prijelaznog radijusa i uklještenja postaju sve točnije što je veći broj elemenata na modelu. Slika 36. i Slika 37. prikazuju rezultate numeričke analize pri manjoj i većoj gustoći mreže.



Slika 36. Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (5447 elemenata)



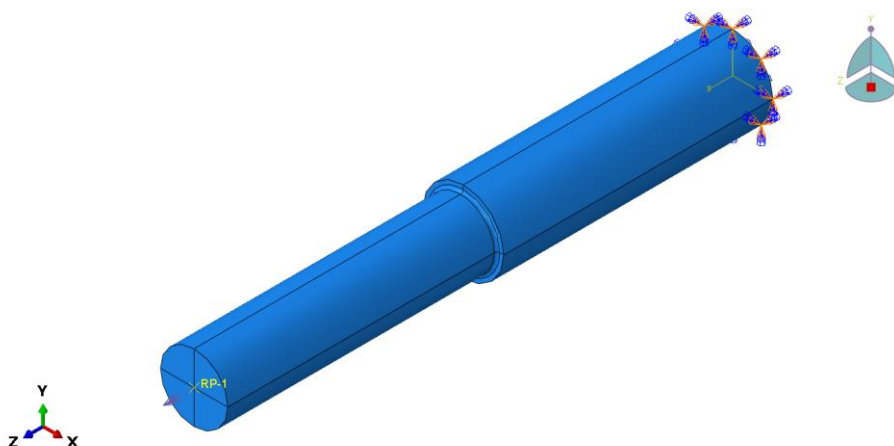
Slika 37. Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (65198 elemenata)

5.2. Verifikacija štapa s jednim prijelaznim stupnjem opterećenim na uvijanje

Za verifikaciju napravljen je sličan model kao i kod prijašnje verifikacije. Model će na slobodnom kraju biti opterećen momentom u pozitivnom smjeru osi z .

Ukupna duljina modela je 200 mm iako to ne utječe na rezultate napreznja. Veći promjer je $D = 30$ mm, dok je manji promjer $d = 25$ mm. Prelazak s većega na manji promjer nalazi se na polovici modela, to jest na 100 mm. Prijelazni radijus iznosi $R = 1$ mm.

Definirana je referentna točka RP-1 na kraju vratila s manjim promjerom. Postavljeno je kinematičko ograničenje *coupling* između RP-1 i površine na kraju vratila. Zatim je definirana moment koji djeluje u pozitivnom smjeru osi z iznosa 100000 Nmm. Na kraj vratila većeg promjera postavljen je rubni uvjet uklještenja (svi pomaci i zakreti iznose 0).



Slika 38. Model za verifikaciju uvijanja s opterećenjem i rubnim uvjetima

Analitička vrijednost napreznja na prijelaznom radijusu modela određena je pomoću faktora zareznog djelovanja pri uvijanje pomoću dijagrama sa Slika 29.

Nominalna vrijednost smičnog napreznja na prijelaznom radijusu iznosi:

$$\tau' = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{\frac{d^3 \cdot \pi}{16}} = \frac{100000}{\frac{25^3 \cdot \pi}{16}} = 32,60 \text{ N/mm}^2 \quad (215)$$

Faktor zareznog djelovanja pri uvijanju štapa određen je pomoću Slika 29.

$$\beta_{kt} = 1 + c_2 \cdot (\beta_{kt1,4} - 1) \quad (216)$$

$$c_2 \left(\frac{D}{d} = 1,2 \right) = 0,8 \quad (217)$$

$$\beta_{kt1,4} \left(R_m = 420 \text{ N/mm}^2; \frac{\rho}{d} = 0,04 \right) = 1,5 \quad (218)$$

$$\beta_{kt} = 1 + 0,8 \cdot (1,5 - 1) = 1,4 \quad (219)$$

Koncentrirano naprezanje na prijelaznom radijusu iznosi:

$$\tau = \tau' \cdot \beta_{kt} = 32,60 \cdot 1,4 = 45,64 \text{ N/mm}^2 \quad (220)$$

Dobiveno smično naprezanje je pretvoreno u ekvivalentno normalno naprezanje korištenjem HMH teorije.

$$\sigma_{red} = 1,73 \cdot \tau = 78,95 \text{ N/mm}^2 \quad (221)$$

Tablica 8. Analitičke vrijednosti naprezanja štapa opterećenog na uvijanje

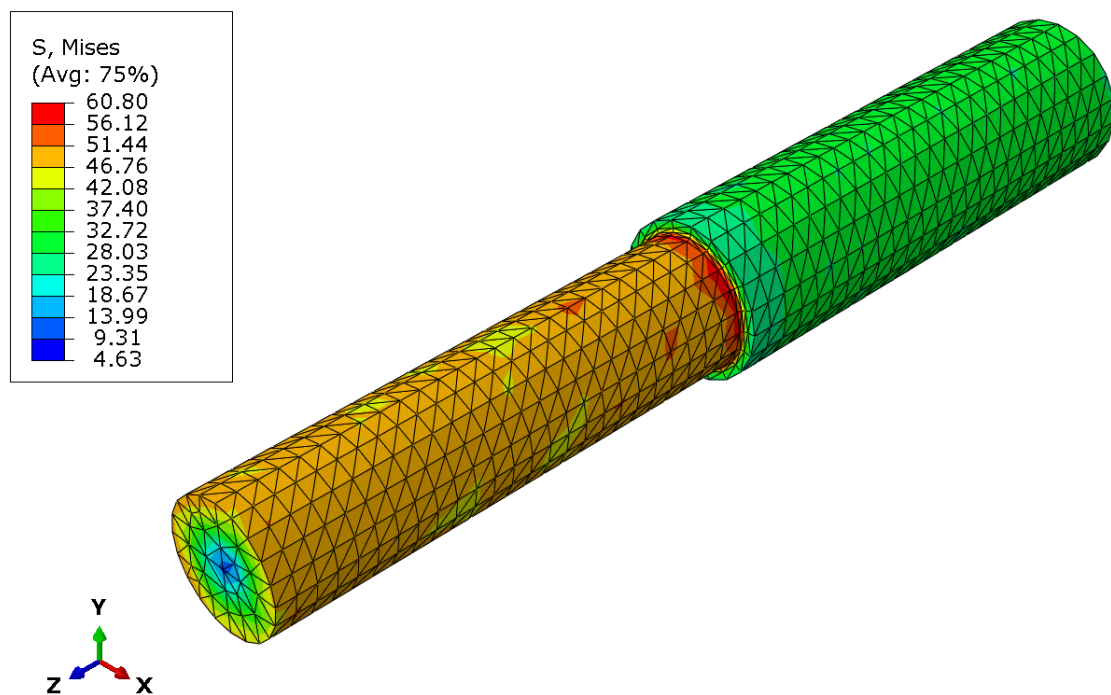
Mjesto na modelu	Naprezanje (von Misesu)
Manji promjer d	56,39 N/mm ²
Prijelazni radijus	78,95 N/mm ²
Veći promjer D	32,63 N/mm ²

Za izradu mreže konačnih elemenata koristili su se C3D4 elementi. Rezultati numeričke analize štapa opterećenog na uvijanje prikazani su u Tablica 9.

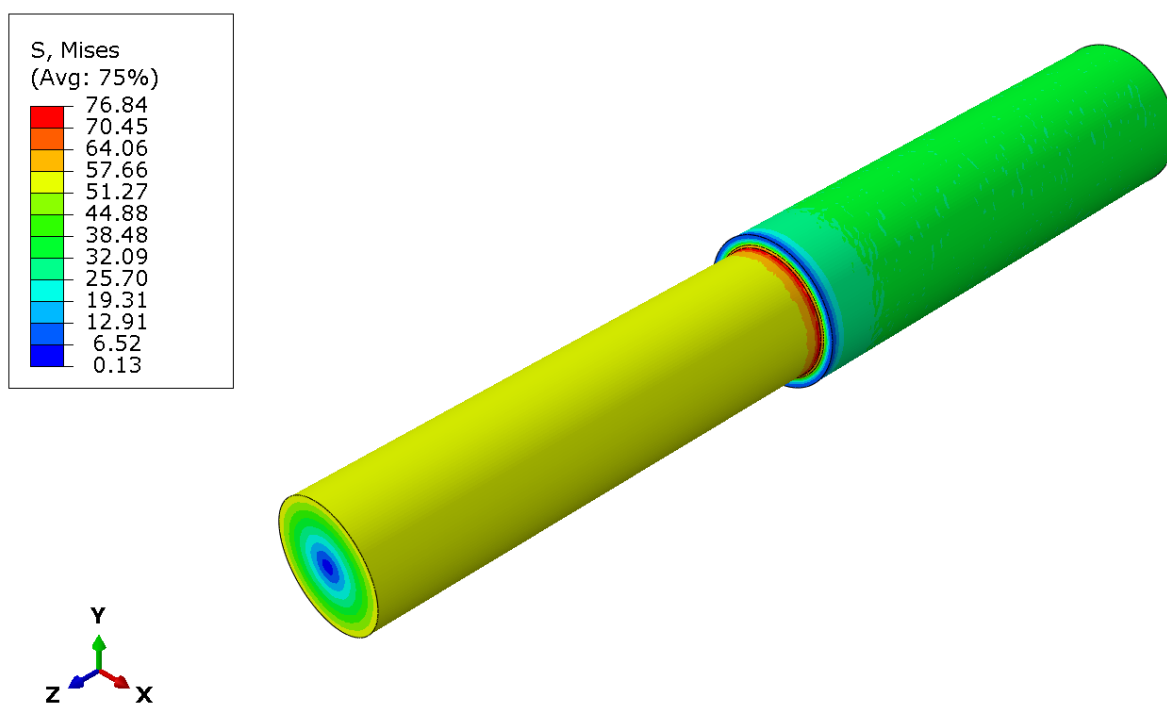
Tablica 9. Numerički rezultati naprezanja štapa opterećenog na uvijanje

Broj elemenata	Naprezanje na manjem promjeru	Naprezanje na prijelaznom radijusu	Naprezanje na većem promjeru
7566	48,71 N/mm ²	59,17 N/mm ²	30,23 N/mm ²
14459	52,91 N/mm ²	60,80 N/mm ²	31,78 N/mm ²
35063	55,62 N/mm ²	62,85 N/mm ²	32,09 N/mm ²
107422	56,28 N/mm ²	64,93 N/mm ²	32,89 N/mm ²
231628	56,31 N/mm ²	66,95 N/mm ²	32,71 N/mm ²
732371	56,59 N/mm ²	68,75 N/mm ²	32,78 N/mm ²
2731438	56,69 N/mm ²	76,84 N/mm ²	32,78 N/mm ²

Iz Tablica 9. vidljivo je da se naprezanja na manjem i većem promjeru postepeno približavaju numeričkom rješenju porastom broja elemenata na modelu. Slika 39. i Slika 40. prikazuju rezultate numeričke analize pri manjoj i većoj gustoći mreže.



Slika 39. Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (14459 elemenata)



Slika 40. Prikaz rezultata numeričke analize modela opterećenog na uvijanje (2731438 elemenata)

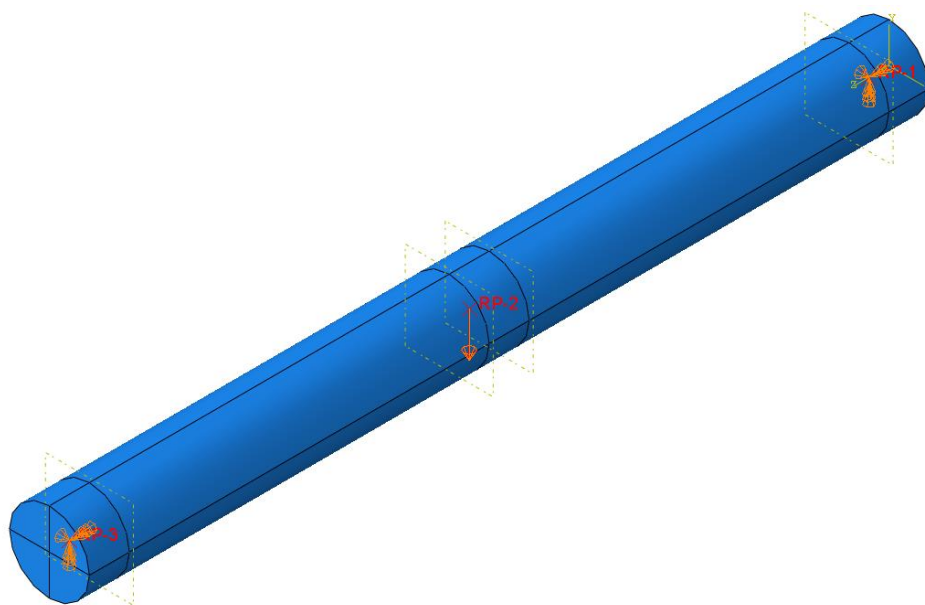
5.3. Verifikacija savijanja štapa na dva oslonca opterećenim silom na sredini

Za verifikaciju napravljen je 3D model štapa duljine 210 mm i promjera 20 mm. Model je podijeljen u više dijelova za bolje definiranje oslonaca i područja djelovanja sile. Širine područja oslonaca iznose 10 mm, a na centralnu os štapa i u središtu područja oslonaca postavljene su referentne točke. Tim pristupom dolazimo do proračunske duljine razmaka oslonaca od 200 mm.

Područje djelovanja sile široko je 10 mm i nalazi se na sredini između dvaju oslonaca. Na uzdužnoj osi štapa i središtu područja djelovanja sile postavljena je referentna točka.

Referentne točke (RP1 i RP3) oslonaca vezane su za područje oslonaca pomoću opcije *Rigid body – tie*. Rubni uvjeti jednog ležajnog mjesta su: $U1=U2=U3=UR2=UR3=0$, što predstavlja nepomično ležajno mjesto. Rubni uvjeti drugog ležajnog mjesta su: $U1=U2=UR2=UR3=0$, što predstavlja pomično ležajno mjesto. Rotacija oko osi x je omogućena u oba oslonca time što $UR1 \neq 0$.

Za povezivanje referentne točke i područja djelovanja sile odabrana je opcija *Coupling – continuum distributing*. U referentnu točku (RP2) postavljena je sila iznosa 500 N u negativnom smjeru osi y .



Slika 41. Model za verifikaciju savijanja na dva oslonca s opterećenjem i rubnim uvjetima

U Tablica 10. prikazani su rezultati analitičkog proračuna progiba i naprezanja štapa na dva oslonca, a u Tablica 11. su prikazani numerički rezultati ovisni o broju elemenata tijekom analize u *Abaqus-u*®. Slika 42. i Slika 43. prikazuje rezultate naprezanja numeričke analize pri manjoj i većoj gustoći mreže.

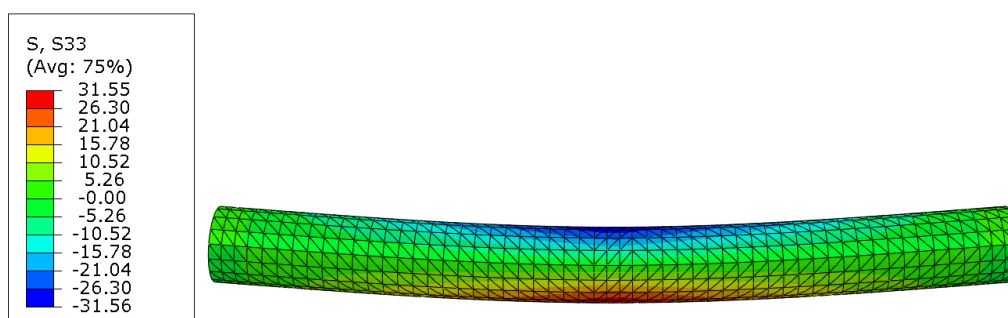
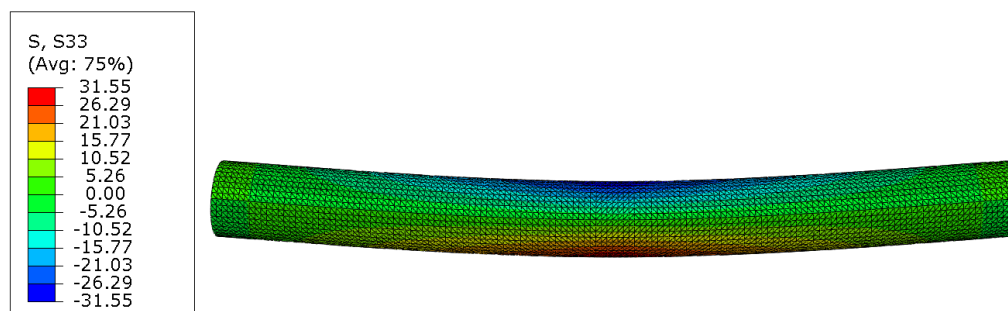
Tablica 10. Rezultati analitičkog proračuna štap na dva oslonca

Veličina	Vrijednost
Progib na sredini štapa	0,0505 mm
Maksimalno naprezanje	31,83 N/mm ²

Tablica 11. Numerički rezultati štap na dva oslonca

Broj elemenata	Progib na sredini štapa	Maksimalno naprezanje
8067	0,0517 mm	31,56 N/mm ²
15724	0,0517 mm	31,59 N/mm ²
32016	0,0517 mm	31,62 N/mm ²
61994	0,0517 mm	31,56 N/mm ²
140241	0,0517 mm	31,55 N/mm ²

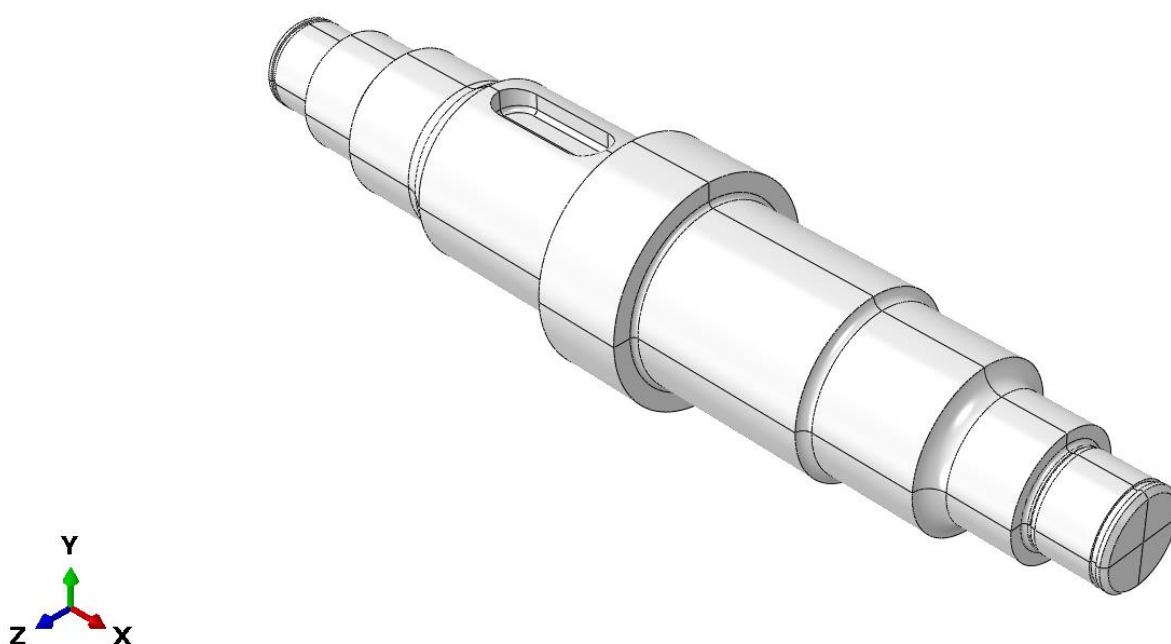
Iz Tablica 11. vidljivo je da je točnost rezultata dobra i pri manjem broju konačnih elemenata. Zaključuje se da je način zadavanja sile i rubnih uvjeta dovoljno dobar za korištenje u analize modela vratila.

**Slika 42. Prikaz rezultata numeričke analize modela štap na dva oslonca (8067 elemenata)****Slika 43. Prikaz rezultata numeričke analize modela štap na dva oslonca (140241 elemenata)**

5.4. Analiza vratila

3D model napravljen je u programu *Solidworks 2020*® te je exportan kao STEP datoteka. Nakon toga STEP datoteka vratila učitana je u *Abaqus-u*®. Na Slika 44. prikazan je 3D modela vratila u *Abaqus-u*®.

U modulu *Property* definiran je materijal modula elastičnosti 210000 N/mm^2 i Poissonovog faktora 0,3. Zatim je napravljen *Section* vrste *Solid, Homogeneous*. Modelu vratila dodijeljen je *Section* i materijal. 3D model vratila učitani je u modul *Assembley* te je u modulu *Step* napravljen *step* za statičku generalnu analizu.

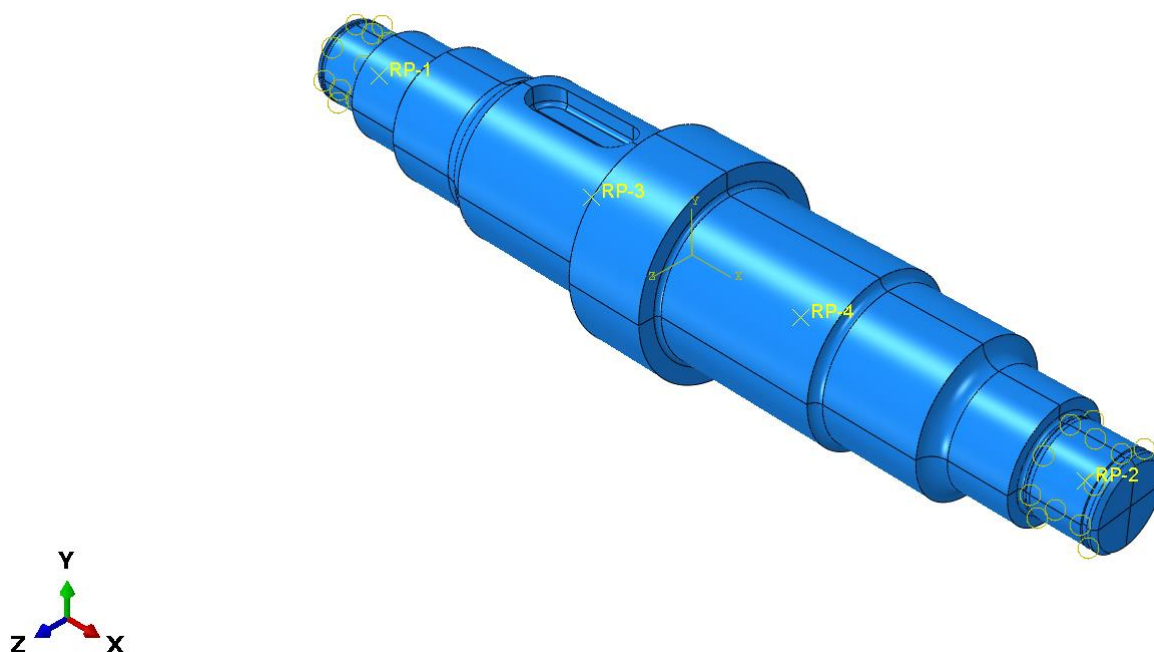


Slika 44. 3D model vratila u *Abaqus-u*®

Za pojednostavljenje opterećenja u modulu *Interaction* definirane su 4 referentne točke na središnjoj osi vratila:

- RP1 – na sredini područja ležajnog mjesta A,
- RP2 – na sredini područja ležajnog mjesta B,
- RP3 – na sredini područja zupčanika Z_1 i
- RP4 – na sredini područja zupčanika Z_2 .

RP1 i RP2 vezane su za površine na kojima se nalazi ležaj pomoću opcije *Constrain – Rigid body – tie*. RP3 i RP4 povezane su za površine gdje se nalaze odgovarajući zupčanici pomoću opcije *Constrain – Coupling – continuum distribuitng*. Na Slika 45. prikazane su referentne točke na modelu vratila.

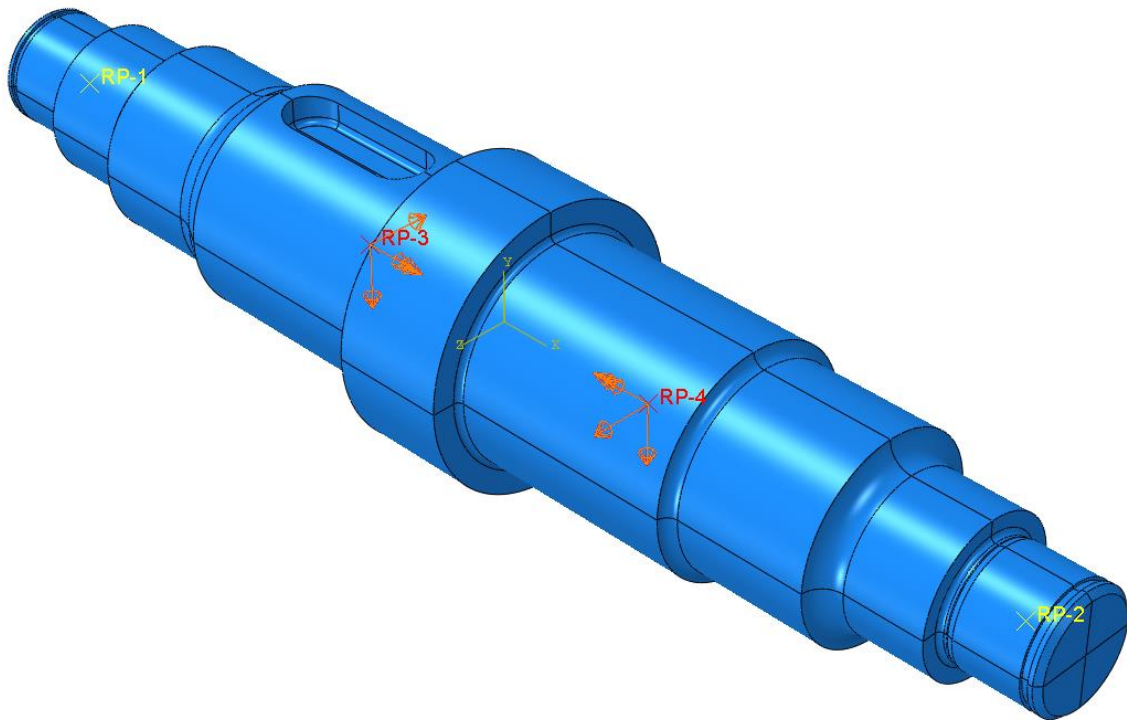


Slika 45. Model vratila s definiranim referentnim točkama

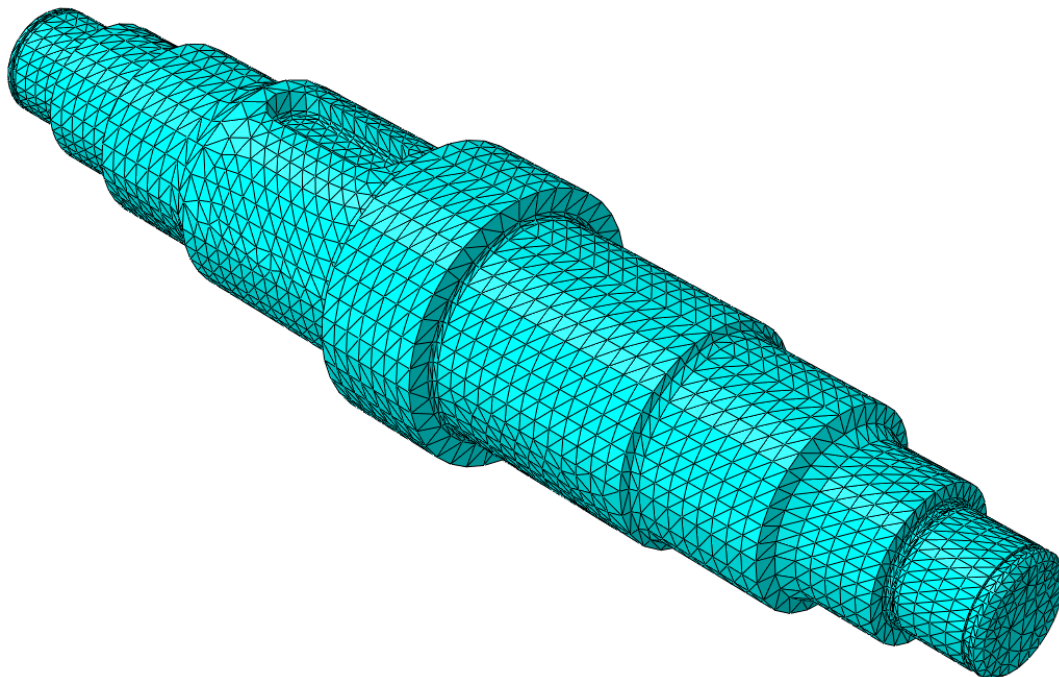
U modulu *Load* definirana su opterećenja i rubni uvjeti vratila. Na ležajno mjesto A (RP1) postavljen je rubni uvjet *Displacement/rotation*, te su ograničeni svi pomaci $U_1=U_2=U_3=0$. Za ležajno mjesto B (RP2) odabran je isti rubni uvjet samo je dopušten pomak u smjeru uzdužne osi vratila, tj. osi x $U_1 \neq 0$, $U_2=U_3=0$.

Za sile koristi se *Concentrated force*. Sile sa zupčanika (poglavlje 4.2.) postavljene su u odgovarajuće referentne točke u odgovarajućim smjerovima. Tangencijalne sile sa zupčanika zbrojene su s težinama zupčanika pošto djeluju u istom smjeru. Moment je definiran pomoću *Moment* i postavljen u RP3 u pozitivnom smjeru osi x i u RP4 u negativnom smjeru osi x . Slika 46. prikazuje opterećenja na 3D modelu vratila.

U modulu *Mesh* vratilu su dodijeljeni tetraedarski konačni elementi 1. reda (C3D4). Mreža konačnih elemenata na vratilu prikazana je na Slika 47. Provedene su 4 analize globalnog modela vratila s povećanjem gustoće mreže konačnih elemenata. Zatim se iz analize s najvećim brojem elemenata pomoću podmodela provjereno je naprezanje na prijelaznim radijusima vratila (presjeci I, II, III, V, VI, VIII, IX i X iz 4.5.). Izostavljena je analiza utora za pero zato što je opterećenje na vratilu u *Abaqusu* pojednostavljeno i pretpostavlja se da rezultati neće biti zadovoljavajući.

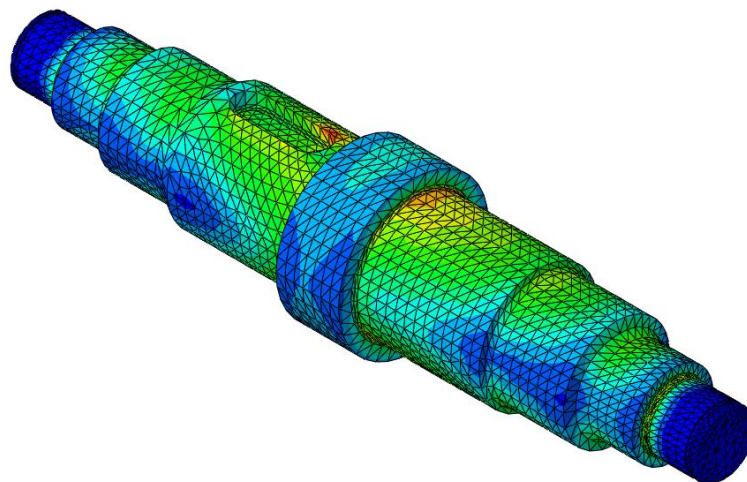
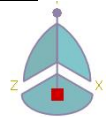
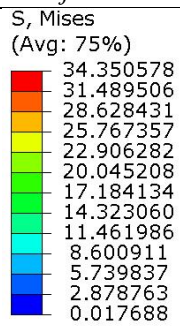


Slika 46. Opterećenja na vratilu unutar Abaqus-a



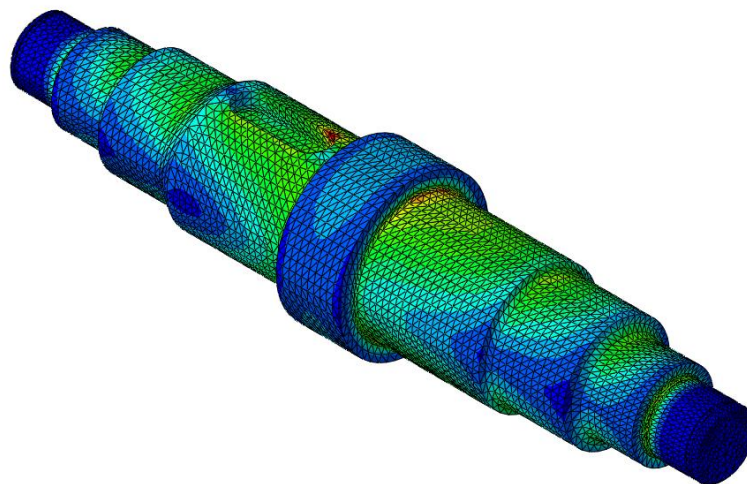
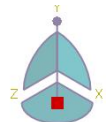
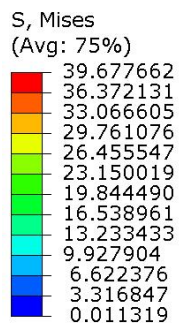
Slika 47. Mreža konačnih elemenata na vratilu

Rezultati analiza globalnog modela vratila prikazani su na slikama 42., 43., 44. i 45. Maksimalno naprezanje koje je prikazano u slikama nalazi se na utoru za pero. Kako je već spomenuto zbog načina opterećenja neće se razmatrati naprezanje presjeka kod utora za pero. Za referencu porasta točnosti povećavanjem gustoće mreže uzeti će se očitano naprezanje iz svakog globalnog modela na presjeku II. Rezultati su prikazani u Tablica 12.



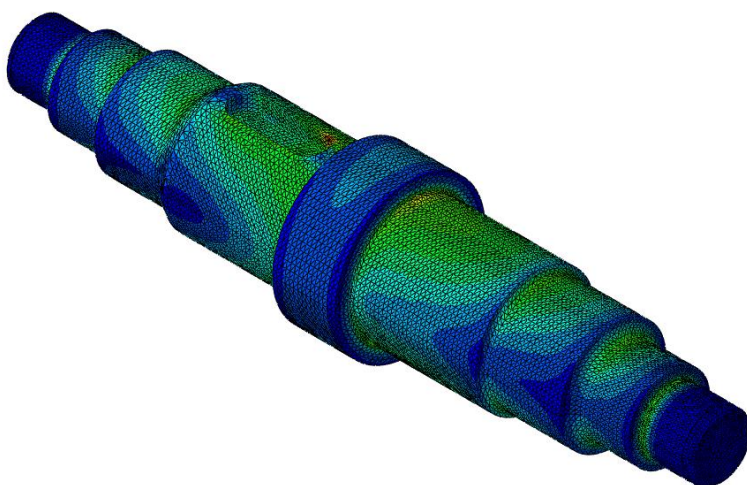
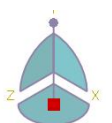
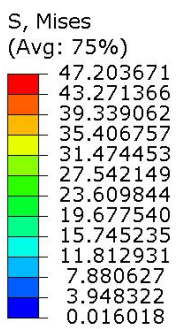
Y

Slika 48. Globalni model vratila s 72725 elemenata



Y

Slika 49. Globalni model vratila s 188917 elemenata

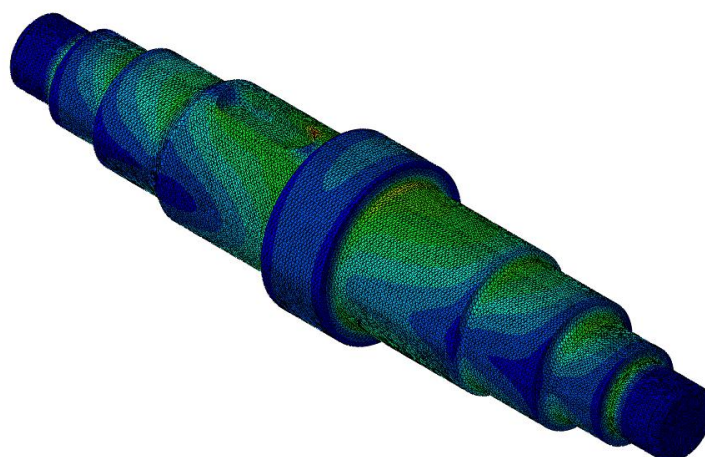
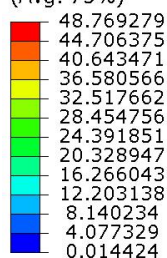


Y

Slika 50. Globalni model vratila s 322115 elemenata

S, Mises

(Avg: 75%)



Y



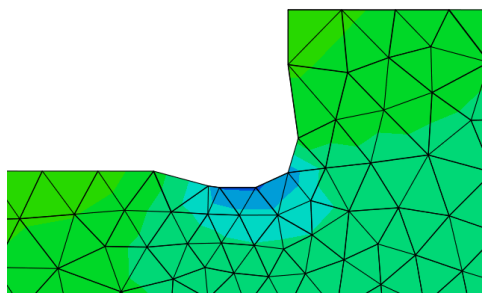
Slika 51. Globalni model vratila s 991851 elemenata

Tablica 12. Rezultati analize globalnog modela vratila

Broj elemenata	Naprezanje na presjeku II
72725	24,99 N/mm ²
188917	24,71 N/mm ²
322115	25,91 N/mm ²
991851	27,10 N/mm ²

Iz poglavlja 4.5.2 množenjem vrijednosti naprezanja na savijanje (70) i faktora zarezno djelovanja presjeka (75) ukupno naprezanje presjeka II iznosi 27,74 N/mm². Prema tome povećanje gustoće mreže približava rezultat numeričke analize analitičkom proračunu.

Iako rezultati analize kod najvećeg broja elemenata odstupaju od analitičkog rezultat za 2,36 % broj elementa je i dalje previše malen da bi kvalitetno opisao geometriju ostalih zaobljenja na vratilu. Na Slika 52. prikazan je presjek I vratila s 991851 elemenata na globalnom modelu vratila. Vidljivo je iz Slika 52. da je radijus aproksimiran s malenim brojem elemenata. Za bolju rezultate na prijelaznim presjecima vratila izrađeni su podmodeli svakog presjeka.

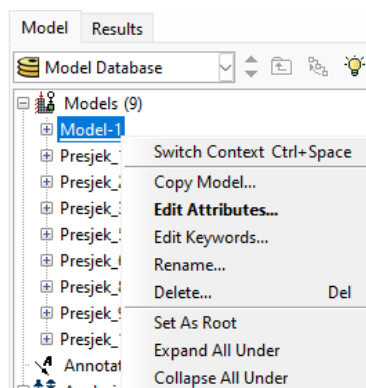


Slika 52. Presjek I globalnog modela vratila s 991851 elemenata

5.5. Prikaz izrade podmodela presjeka II

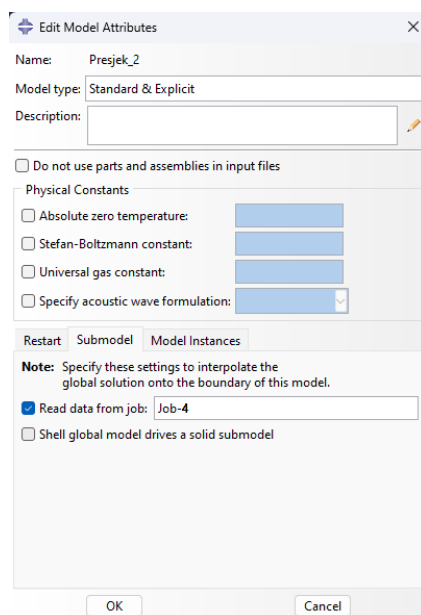
U ovom poglavlju prikazan je pristup izrade i analize podmodela presjeka II. Podmodeli ostalih presjeka izrađeni su na isti način.

Prvo je potrebno napraviti kopiju globalnog modela vratila. U izborniku *Model database* unutar *Abaqus-a*, desnim klikom miša na model vratila odabire se opcija *copy model* vidljivo na Slika 53.



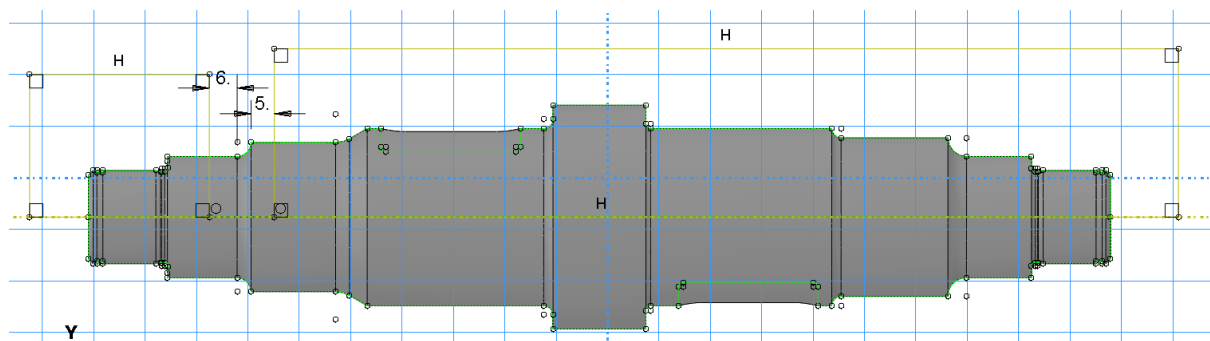
Slika 53. Izbornik za kopiranje modela

Nakon kopiranja modela promijenjeno mu je ime u odgovarajući presjek radi preglednosti. Zatim je potrebno podmodelu dodijeliti svojstvo podmodela. Desnim klikom na kopirani model odabire se opcija *Edit Attributes* također vidljivo na Slika 53. U izborniku koji je nakon toga otvoren potrebno je odabrati *Submodel* te kliknuti na kvadratić *Read data from job* i unesti *Job*, tj. analizu globalnog modela iz koje će podmodel uzimati ulazne podatke. Izbornik *Edit Attributes* prikazan je na Slika 54.



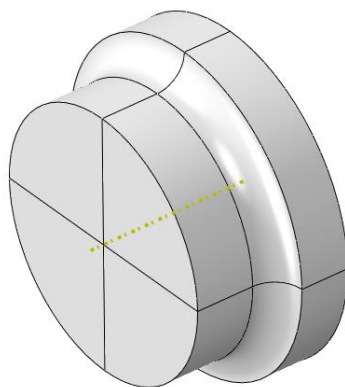
Slika 54. *Edit Attributes* izbornik za definiranje podmodela

Kako bi podmodel bio manji dio vratila u modulu *Part* opcijom *Cut: Revolve* radi se *sketch* kojim se „brišu“ svi dijelovi vratila izuzev presjeka koji promatramo. Slika 55. prikazuje *sketch* za odstranjivanje dijelova vratila opcijom *Cut: Revolve*.



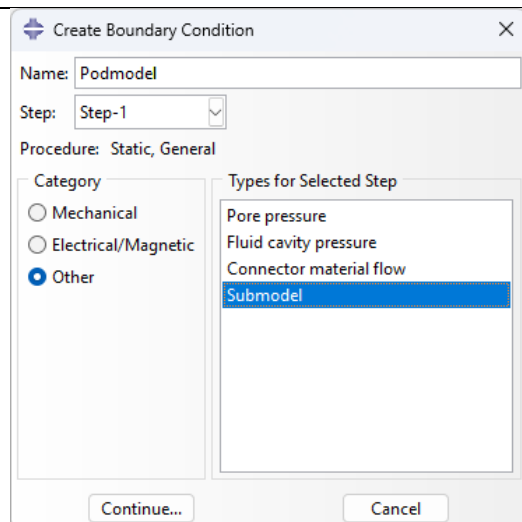
Slika 55. Sketch za izradu podmodela presjeka II

Nakon potvrde izrade opcije *Cut: Revolve* ostaje nam samo 3D model presjeka II vratila prikazanog na Slika 56. Pošto je podmodel kopija glavnog modela ostaju nam sve postavke od glavnog modela. Materijal, *section*, rubni uvjeti, sile, *interaction* i ostali su kao i kod vratila. Potrebno je obrisati ili spriječiti izvođenje aktivnih elemenata (sile, rubne uvjete, referentne točke...) koji su aktivni u globalnom modelu vratila, a nemaju interakcija s podmodelom. U izborniku *Model database* svakom od neaktivnih elemenata na podmodelu spriječeno je izvođenje tako da je na njega stisnut desni klik miša i odabrana opcija *Suppress*.



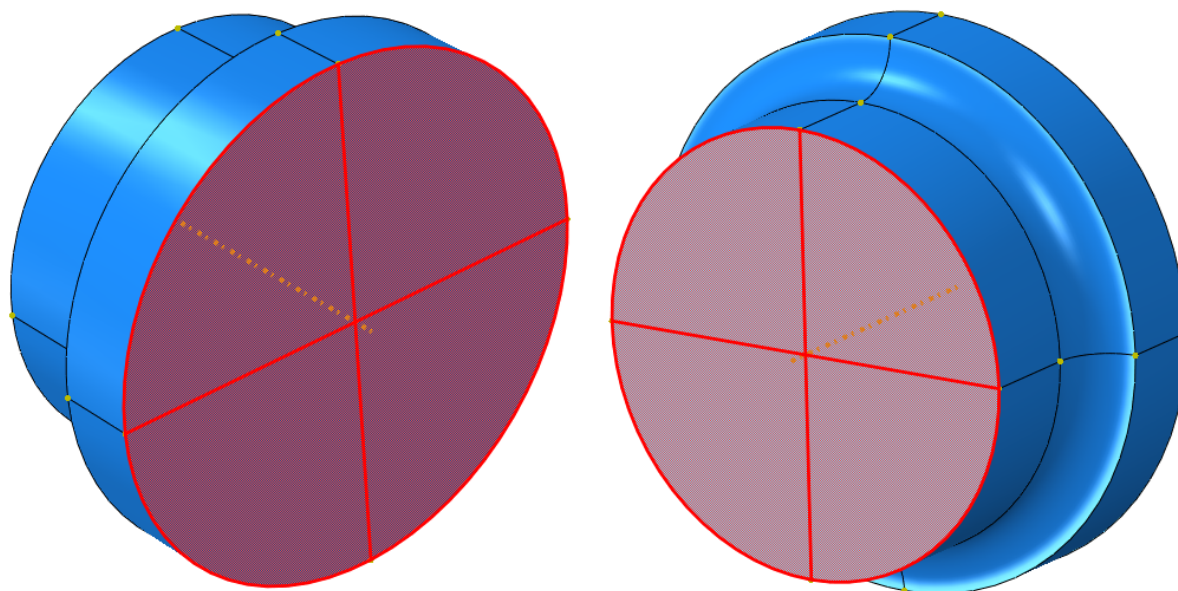
Slika 56. 3D model presjeka II

Potrebno je definirati na kojim površinama podmodel uzima podatke iz analize globalnog modela. To je učinjeno u modulu *Load*. Odabirom opcije *Create boundary condition* iskače izbornik kao na Slika 57. te se pod kategorijom odabire *other*, a u sljedećem izborniku opcija *submodel*.

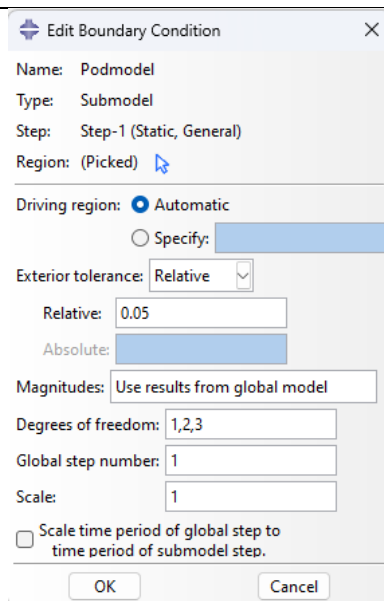


Slika 57. Izbornik za odabir vrste rubnog uvjeta

Zatim program zahtjeva da se odaberu površine podmodela koje će uzimati rezultate iz analize globalnog modela. Odabrani su presjeci okomiti na uzdužnu os vratila prikazani na Slika 58. Nakon toga se pojavi izbornik kao na Slika 59. Potrebno je upisati koji se stupnjevi slobode prenose s globalnog modela na podmodel i koji je globalni broj stepa. Za stupnjeve slobode upisani stupnjevi slobode pomaka 1, 2, i 3 zato što 3D konačni elementi sadrže samo translacijske stupnjeve slobode. Za *Global step number* uneseno je 1 jer u globalnom modelu imamo samo jedan *step*.

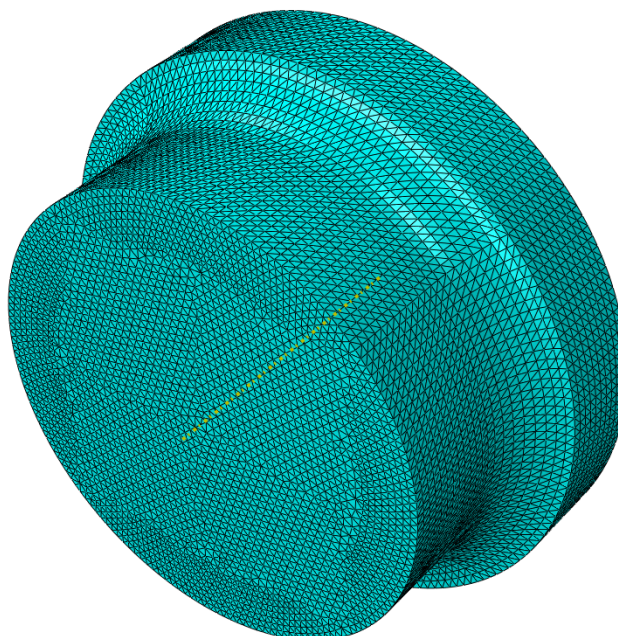


Slika 58. Površine podmodela kojima se dodjeljuje rubni uvjet *submodel*



Slika 59. Izbornik za definiranje rubnog uvjeta podmodela

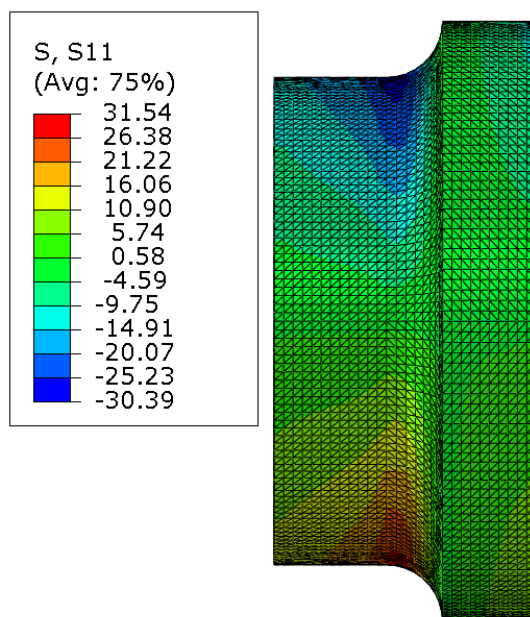
Za kraj postavljanja postavki potrebno je generirati mrežu konačnih elemenata na podmodelu. Naravno cilj je imati gušću mrežu nego na presjeku u globalnom modelu vratila. Za presjek II generirana je mreža od 436240 konačnih elemenata. Globalni model ima 991851 konačnih elemenata na cijelom vratilo te je time broj konačnih elemenata na presjeku II mnogo veći u podmodelu nego na globalnom modelu vratila. Na Slika 60. prikazana je generirana mreža na podmodelu presjek II.



Slika 60. Mreža konačnih elemenata podmodela presjeka II

Zatim je potrebno kreirati i pokrenuti analizu podmodela. Nakon provedene analize rezultate naprezanja su očitani. Za presjeke opterećene samo na savijanje, presjek I, II, III, VII, IX i X,

očitan su rezultati napreznja uzrokovanih savijanjem. U *Abaqus-u* to predstavlja rezultat napreznja S11 što se poklapa s uzdužnom osi vratila x u *Abaqus-u*. Prikaz analize napreznja presjeka II vidljiv je na Slika 61.



Slika 61. Rezultati analize podmodela presjeka II

Za presjke opterećene savijanjem i uvijanjem očitava se napreznje prema von Misesu iz *Abaqus-a*®.

5.6. Rezultati numeričke analize podmodela vratila

Tablica 13. Usporedba analitičkih i numeričkih rezultata napreznja presjeka

Podmodel	Analitičko napreznje	Numeričko napreznje	Relativna greška
Presjek I	20,54 N/mm ²	23,85 N/mm ²	16,11 %
Presjek II	27,74 N/mm ²	31,54 N/mm ²	13,70 %
Presjek III	26,85 N/mm ²	29,33 N/mm ²	9,24 %
Presjek V	34,06 N/mm ²	37,61 N/mm ²	10,42 %
Presjek VI	41,84 N/mm ²	39,90 N/mm ²	4,64 %
Presjek VIII	31,35 N/mm ²	34,51 N/mm ²	10,08 %
Presjek IX	32,80 N/mm ²	32,60 N/mm ²	0,61 %
Presjek X	23,99 N/mm ²	26,91 N/mm ²	12,17 %

U Tablica 13. prikazani su rezultati numeričke analize podmodela presjeka I, II, III, V, VI, VIII, IX i X. Također su prikazani analitički rezultati naprezanja te relativna greška između rezultata. Mreže elemenata podmodela presjeka u prosjeku imaju između 400000 i 500000 elemenata.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu proveden je analitički i numerički proračun vratila koje obavlja ulogu među vratila proizvoljnog prijenosnika snage. Analitičkim proračunom vratilo je dimenzionirano s obzirom na opterećenja koja su proizašla iz zadanih parametra zadatka. Nakon dimenzioniranja vratila provjerena je dinamička sigurnost kritičnih presjeka. Vratilo je na svim presjecima zadovoljilo uvjete dinamičke sigurnosti. Također provjeren je dopušteni progib, nagib i kut uvijanja vratila te su sve vrijednosti zadovoljile dopuštene granice. Time je vratilo dobro dimenzionirano i konstruirano.

Za verifikaciju rezultata i načina opterećenja provedene su 3 analize na jednostavnijim modelima unutar programskog paketa *Abaqus*. Kod verifikacija štapa opterećenog na savijanja vrijednost naprezanja na uklještenju konvergira analitičkom rezultatu povećanjem gustoće mreže. Kako je analitička vrijednost naprezanja na uklještenju jedan od osnovnih primjera iz nauke o čvrstoći zaključuje se da rezultati modela dobro opisuju naprezanja. Povećanjem gustoće mreže naprezanja na prijelaznom radijusu također konvergira analitičkom rješenju. Zaključuje se da numerički proračun utjecaja faktora zareznog djelovanja kod savijanja pri dovoljno gustoći mreže kvalitetno opisuje analitičko naprezanje.

Numerički rezultati verifikacije štapa opterećenog uvijanjem također konvergira analitičkom rezultatu povećanjem gustoće mreže. Analitički rezultati naprezanja na presjecima manjeg i većeg promjera dobiveni su osnovnim izrazima iz nauke o čvrstoći. Naprezanje na prijelaznom radijusu također konvergira analitičkom rješenju koje uzima utjecaj faktora zareznog djelovanja kod uvijanja. Time se može zaključiti da numerički proračun s dovoljnom gustoćom mreže dobro opisuje utjecaj faktora zareznog djelovanja kod uvijanja.

Verifikacija štapa na dva oslonca prikazuje da gustoća mreže elemenata nije imala veliki utjecaj na numeričke rezultate. Jednostavna geometrija modela vjerojatno pridonosi tome. Pomoću ove verifikacije utvrđeno je kako opisati djelovanje ležaja i opterećenja na vratilo pri numeričkoj analizi vratila.

Uspoređivanjem analitičkih i numeričkih rezultata verifikacijskih modela utvrđeno je da su rezultati i način opterećenja dovoljno točni za korištenje u numeričkoj analizi vratila. Za vratilo su provedene 4 numeričke analize kod kojih se postepeno povećavao broj konačnih elemenata. Rezultati analize modela vratila su poprilično grubi te na nekim prijelaznim radijusima naprezanja značajno odstupaju od analitičkih rješenja. Za točnije rezultate naprezanja kod

kritičnih presjeka vratila napravljeni su podmodeli svih presjeka na kojima se mijenja promjer vratila. Numeričke analize podmodela vratila dale su točnije rezultate od globalnih analiza.

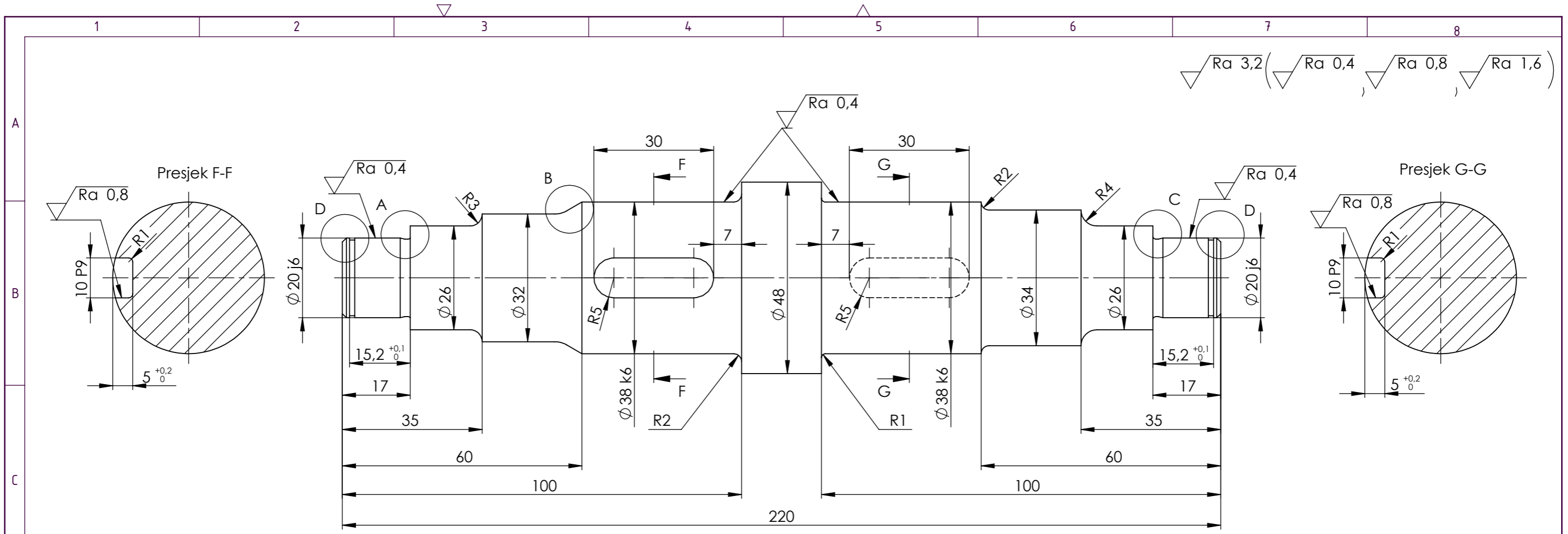
Iz Tablica 13. zaključuje se da neki rezultati numeričke analize (presjek VI i presjek IX) prilično dobro opisuju analitičke rezultate naprezanja. Dok neki rezultati imaju odstupanje od 10-ak %. Najveća greška rezultata je kod presjeka I te iznosi 16.11 %. Treba uzeti u obzir da su opterećenja na vratilu pojednostavljena te da bi se kvalitetnijim definiranjem opterećenja možda dobilo manje odstupanje numeričkih rezultata od analitičkih.

LITERATURA

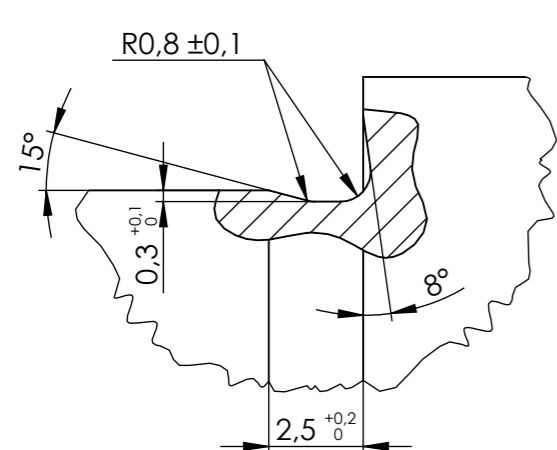
- [1] <https://www.gauricomponents.com/machine-components.html> (09.09.2024.)
- [2] https://www.perkins.com/en_GB/aftermarket/overhaul/overhaul-components/major-components/crankshaft.html (09.09.2024)
- [3] <https://www.elesa-ganter.in/en/ind/products/joints-couplings-gears--1/Joints--Universal-joint-shafts-with-needle-bearing--GN8083#categoryid=12522&sortby=0&facetvalue=>
(09.09.2024)
- [4] <https://www.goodway.com/accessories/tube-cleaner-shafts-brushes-machine-accessories/flexible-shaft-dry-tube-cleaning-heat> (09.09.2024.)
- [5] Vučković, K.: Vratila, podloge uz predavanja, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.
- [6] Decker, K. H.: Elementi strojeva, Tehnička knjiga Zagreb, 2006
- [7] https://www.researchgate.net/figure/Structural-elements-of-shafts-and-axles-Journals-are-support-sections-of-the-shaft-and_fig69_336835726 (09.09.2024.)
- [8] <https://www.indiamart.com/proddetail/helical-gear-23485654173.html> (09.09.2024.)
- [9] <https://www.directindustry.com/prod/quality-transmission-components/product-11708-2251671.html> (09.09.2024.)
- [10] <https://www.burtekkayis.com/detail-flat-belts> (09.09.2024.)
- [11] <https://www.winstore.com.mm/products/ws-005717> (09.09.2024.)
- [12] <https://bestindustrialsupplies.co.uk/transmissions> (09.09.2024.)
- [13] <https://www.haberkorn.com/hr/hr/strojni-elementi/industrijske-spojke/pogonske-spojke/krute-osovinske-spojke/51395-kruta-spojka-bk95-celik> (09.09.2024.)
- [14] <https://www.automobili.ba/dobar-vozac-dugovjecno-kvacilo-8-vaznih-savjeta/>
(09.09.2024.)
- [15] <https://www.hennlich.hr/proizvodi/sustavi-za-linearna-kretanja-klizni-lezajevi-samonamjestivi-klizni-lezajevi-samopodesivi-stojeci-lezaj-668/kstm.html> (09.09.2024.)
- [16] <https://sheikhaelectrical.com/products/ball-bearing> (09.09.2024.)
- [17] https://www.researchgate.net/figure/Fig-3-The-generally-used-group-of-elements-of-the-program-ABAQUS-Version-66_fig2_351713377 (09.09.2024.)
- [18] https://web.mit.edu/calculix_v2.7/CalculiX/ccx_2.7/doc/ccx/node25.html (09.09.2024.)
- [19] SKF: General Catalogue , 2008.
- [20] Herold, Z.: Računalna i inženjerska grafika, Zagreb, 2003.

PRILOZI

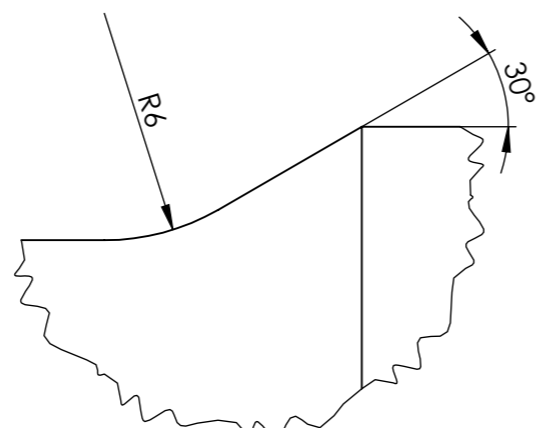
I. Tehnička dokumentacija



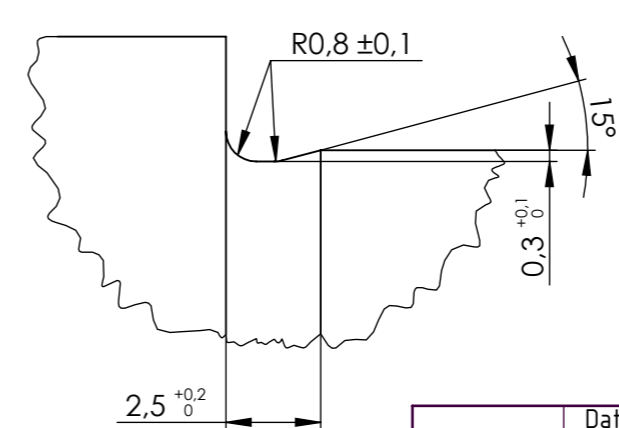
Detalj A
M 5:1



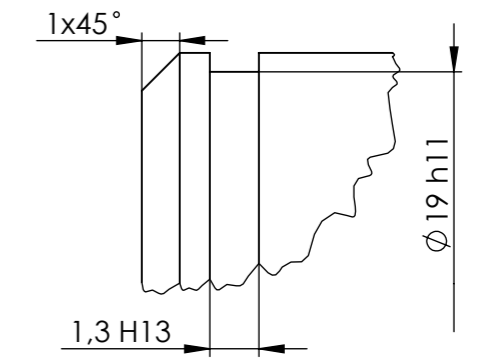
Detalj B
M 5:1



Detalj C
M 5:1



Detalj D
M 5:1



Napomena:
-prijelaza na detaljima A i C izraditi s srednjim odstupanjem profila $Ra\ 1,6$

ISO TOL	
$\Phi 20\ j6$	+0,009 -0,004
$\Phi 38\ k6$	+0,018 +0,002
$\Phi 19\ h11$	0 -0,130
10 P9	-0,015 -0,051
1,3 H11	+0,140 0

Projektirao	Datum	Ime i prezime	Potpis	
Razradio	08.2024.	Andrija Butković		
Crtao	08.2024.	Andrija Butković		
Pregledao		Andrija Butković		
Mentor		Ivica Skozrit		
Objekt:		Objekt broj:		
Napomena:		R. N. broj:		
Materijal:	St 42-2	Masa:	1,55 kg	
Naziv:		Vratilo		
Mjerilo originala:		1:1		Format: A3
Crtež broj:		AB-00-001		Listova: 1
				List: 1

