

# Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu složene geometrije

---

Žilić, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:334727>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-29**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Ivan Žilić

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak, dipl. ing.

Student:

Ivan Žilić

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku i višem asistentu dr. sc. Marijanu Andriću na stručnoj pomoći i savjetima tijekom pisanja ovog rada.

Također, zahvaljujem se i obitelji i prijateljima na podršci koju su mi pružali tijekom dosadašnjeg studiranja.

Ivan Žilić



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - x / x	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 - xxx	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ivan Žilić** JMBAG: **0035225076**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu složene geometrije**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Vortex lattice method for a lifting surface with complex geometry**

Opis zadatka:

Optjecanje oko nosećih površina, pored numerički zahtjevnih metoda računalne dinamike fluida, moguće je zadovoljavajuće modelirati numerički manje zahtjevnim metodama. Jedan od takvih pristupa je primjena metode singulariteta koja koristi polje brzina vrtloga raspoređenih u ograničenom području u polju optjecanja, na konturi promatranog tijela. Noseću površinu u potencijalnom optjecanju moguće je analizirati diskretizacijom vrtloga po krilu, dok je dodatnom diskretizacijom po tetivi moguće razmatrati i zakrivljeni profil noseće površine. Ovakva metoda diskretizacije noseće površine primjenom prstenastih vrtloga naziva se metoda vrtložne rešetke (engl. Vortex Lattice Method, VLM). Otklone upravljačkih površina, poput npr. krilaca, na promatranjoj nosećoj površini moguće je modelirati deformiranjem rešetke vrtloga.

U završnom radu potrebno je:

- računalno implementirati metodu vrtložne rešetke za noseću površinu odabrane geometrije i profila u MATLAB-u;
- usporediti rezultate koeficijenta aerodinamičke sile uzgona i sile induciranog otpora dobivenih implementiranom metodom s dostupnim rezultatima;
- provesti analizu aerodinamičkih koeficijenata za noseću površinu odabrane geometrije u konfiguraciji s otklonjenom upravljačkom površinom.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2023.

Datum predaje rada:

1. rok: 22. i 23. 2. 2024.  
2. rok (izvanredni): 11. 7. 2024.  
3. rok: 19. i 20. 9. 2024.

Predvideni datumi obrane:

1. rok: 26. 2. – 1. 3. 2024.  
2. rok (izvanredni): 15. 7. 2024.  
3. rok: 23. 9. – 27. 9. 2024.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. TEORIJSKI KONCEPTI.....	2
2.1. Fizikalni prikaz opjecanja krila.....	2
2.2. Potencijalno strujanje.....	5
2.3. Vrtložna nit.....	6
2.4. Vrtložna površina.....	8
2.5. Prstenasti vrtlog.....	9
2.6. Vrtložni trag.....	10
3. METODA VRTLOŽNE REŠETKE.....	11
3.1. Aeroprofil.....	12
3.2. Stvaranje mreže.....	13
3.3. Funkcije VORTXL i VORING.....	17
3.4. Trag.....	18
3.5. Sustav linearnih jednažbi.....	19
3.6. Aerodinamički koeficijenti.....	20
3.7. Upravljačke površine.....	23
4. ANALIZA REZULTATA.....	25
4.1. Usporedba s validiranim modelom vrtložne rešetke.....	25
4.2. Usporedba s programom XFLR5.....	26
4.3. Konfiguracija s otklonjenom upravljačkom površinom.....	30
5. ZAKLJUČAK.....	35
6. LITERATURA.....	36

## POPIS SLIKA

Slika 1. Optjecanje krila [1] .....	2
Slika 2. Vrtložna plahta [1] .....	3
Slika 3. Inducirani otpor.....	4
Slika 4. Vrtložna nit .....	6
Slika 5. Segment ravne vrtložne niti .....	7
Slika 6. Polubeskonačna vrtložna nit .....	7
Slika 7. Segment vrtložne površine.....	8
Slika 8. Prstenasti vrtlog.....	9
Slika 9. Početak vrtložnog traga.....	10
Slika 10. Metoda vrtložne rešetke .....	11
Slika 11. Primjer korištenog profila .....	12
Slika 12. Mreža panela .....	14
Slika 13. Prikaz elemenata VLM-a .....	15
Slika 14. Definiranje normale na panel .....	15
Slika 15. Prikaz elemenata VLM-a s normalama.....	17
Slika 16. Modeliranje vrtložnog traga.....	19
Slika 17. Raspodjela normiranih cirkulacija po normiranom rasponu.....	22
Slika 18. Raspodjela normiranog uzgona po normiranom rasponu .....	22
Slika 19. Geometrija izrađena na temelju [6].....	26
Slika 20. Prikaz korištenog profila za analizu.....	27
Slika 21. Prikaz korištene geometrije u MATLAB-u .....	28
Slika 22. Prikaz korištene geometrije u XFLR5 .....	28
Slika 23. Usporedba rezultata - koeficijent uzgona.....	29
Slika 24. Usporedba rezultata - koeficijent inducirano otpora.....	29
Slika 25. Diferencijalni otklon krilaca - 5° .....	30
Slika 26. Diferencijalni otklon krilaca - 10° .....	31
Slika 27. Raspodjela uzgona po rasponu za otklon krilaca – 5° .....	31
Slika 28. Raspodjela uzgona po rasponu za diferencijalne otklone krilaca .....	32
Slika 29. Raspodjela uzgona po tetivi na mjestu krilca otklonjenog prema gore .....	33
Slika 30. Raspodjela uzgona po tetivi na mjestu krilca otklonjenog prema dolje .....	33
Slika 31. Raspodjela uzgona po tetivi na sredini lijevog polukrila .....	34

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Podaci korišteni za generiranje geometrije VLM-a.....	13
Tablica 2. Geometrijski podaci korišteni u [6].....	23
Tablica 3. Usporedba rezultata za koeficijent uzgona.....	24
Tablica 4. Geometrijski podaci za konfiguraciju nalik na Dash 8 Q400.....	25
Tablica 5. Koeficijenti momenata valjanja.....	32



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$a_{ij}$	m/s	Koeficijent utjecaja
$\mathbf{A}_k$	-	Vektor definiran nasuprotnim vrhovima panela
$\mathbf{B}_k$	-	Vektor definiran nasuprotnim vrhovima panela
$C_{Di}$	-	Koeficijent inducirano otpora
$C_L$	-	Koeficijent uzgona
$C_l$	-	Koeficijent momenta valjanja
$D$	N	Sila otpora
$g$	m/s <sup>2</sup>	Ubrzanje sile teže
$h$	m	Udaljenost za definiranje Biot – Savartova zakona
$L$	N	Sila uzgona
$\mathbf{n}$	-	Vektor normale
$p$	Pa	Statički tlak
$Q_\infty$	m/s	Brzina neporemećene struje
$\mathbf{r}$	-	Radij vektor
$S_{ij}$	m <sup>2</sup>	Površina panela
$S_{ref}$	m <sup>2</sup>	Referentna površina
$u$	m/s	Tangencijalna brzina
$u, v, w$	m/s	Komponente inducirane brzine
$\mathbf{v}$	m/s	Polje brzine
$w_{ind}$	m/s	Vertikalna komponenta induciranih brzina, „downwash“
$x, y, z$	m	Koordinate Kartezijevog sustava
$\alpha$	°	Napadni kut
$\Gamma$	m <sup>2</sup> /s	Cirkulacija
$\mathbf{\Gamma}$	m <sup>2</sup> /s	Vektor cirkulacija
$\gamma$	m/s	Jedinična jačina vrtloga
$\delta$	°	Kut odklona upravljačke površine
$\theta$	°	Kut za definiranje Biot – Savartova zakona
$\rho_\infty$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća zraka
$\Phi$	m <sup>2</sup> /s	Potencijal brzine
$\Phi_\infty$	m <sup>2</sup> /s	Potencijal brzine neporemećene struje

## **SAŽETAK**

Cilj ovog završnog rada je izvršiti analizu optjecanja zraka oko noseće površine primjenom metode vrtložne rešetke. Analiza podrazumijeva proračun koeficijenata aerodinamičke sile uzgona i sile induciranog otpora za noseću površinu odabrane geometrije i profila. Do spomenutih koeficijenata se dolazi računalnom implementacijom, u radu i teorijski opisane, metode vrtložne rešetke u programskom jeziku MATLAB. Provedena je usporedba rezultata dobivenih na temelju analize različitih geometrija nosećih površina u MATLAB-u s rezultatima koji se dobivaju korištenjem programskog paketa XFLR5. Također, provedena je i analiza aerodinamičkih koeficijenata noseće površine odabrane geometrije s otklonjenom upravljačkom površinom.

Ključne riječi: noseća površina, metoda vrtložne rešetke, koeficijent uzgona, koeficijent induciranog otpora, upravljačka površina, moment valjanja

## **SUMMARY**

The aim of this paper is to perform an analysis of airflow around a lifting surface using the vortex lattice method. The analysis involves calculating the aerodynamic coefficients of lift and induced drag for a lifting surface with a selected geometry and airfoil. These coefficients are obtained through the computational implementation of the vortex lattice method, which is theoretically described in the paper, using the MATLAB programming language. A comparison was conducted between the results obtained from the analysis of different geometries of lifting surfaces in MATLAB and those obtained using the XFLR5. Additionally, an analysis was conducted on the aerodynamic coefficients of the lifting surface with a deflected control surface for the selected geometry.

Key words: Lifting surface, Vortex lattice method, Lift coefficient, Induced drag coefficient, Control surface, Rolling moment

## 1. UVOD

Projektiranje letjelica kompleksan je proces koji zahtjeva multidisciplinarni pristup. Jedna od tih disciplina je i područje aerodinamike, koje je ključno u pogledu ostvarivanja aerodinamički što efikasnijih nosećih površina. Generalno, glavni zadaci su povećanje uzgona, minimiziranje otpora i osiguranje potrebne stabilnosti.

Samo modeliranje optjecanja zraka oko nosećih površina s ciljem određivanja aerodinamičkih koeficijenata moguće je odrediti numeričkim metodama računalne dinamike fluida (eng. Computational Fluid Dynamics, CFD) koje se temelje na Navier-Stokesovim jednadžbama, odnosno diskretizaciji istih. S obzirom da je njihovo rješavanje numerički zahtjevno, uvođenjem nekoliko pretpostavki, optjecanje je moguće modelirati i numerički manje zahtjevnim metodama. Jedna od njih je metoda vrtložne rešetke (eng. Vortex Lattice Method, VLM) na kojoj se ovaj rad temelji. Metoda se temelji na potencijalnom strujanju u kojem se vrši diskretizacija vrtloga na konturi noseće površine koja se svodi na infinitezimalno malu debljinu tako da odgovara srednjoj liniji tankog aeroprofila. Osim ograničenja koje zahtjeva potencijalno strujanje (neviskoznost, male brzine strujanja i mali napadni kutovi), dodatno ograničenje je u vidu krutosti modela vrtložnog traga. Ograničenje specifično za program prikazan u ovom radu je što nije moguće modelirati noseće površine koje imaju diedarski kut, ali će biti moguće analizirati otklone upravljačkih površina, njihove odnose, kao i njihov utjecaj na raspodjelu uzgona po rasponu i tetivi.

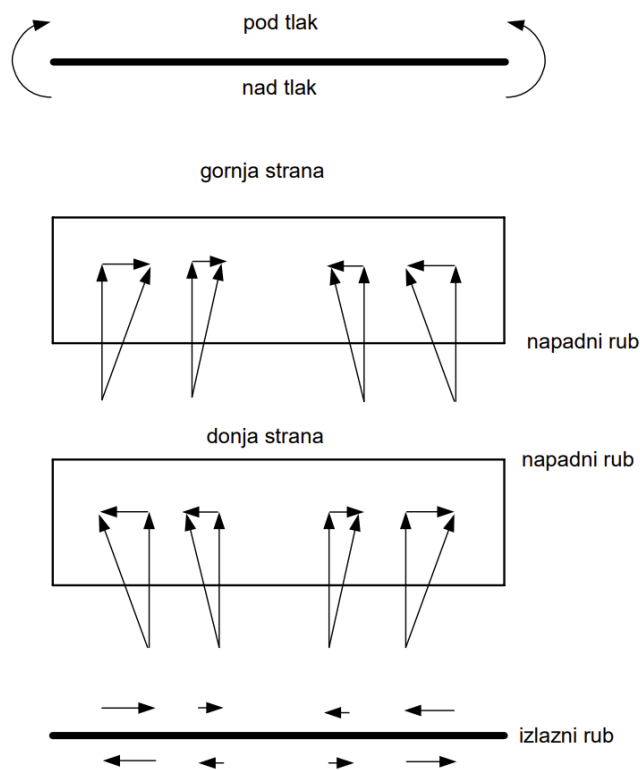
U prvom dijelu rada bit će ukratko prikazana teorijska formulacija problema, odnosno koncepti koji su sadržani u metodi vrtložne rešetke, a koji su detaljnije opisani u [1] i [2]. U drugom dijelu se opisuje sama metoda vrtložne rešetke, odnosno način kojim se pristupa računalnoj implementaciji iste. Opis se vrši prema [3]. U istom poglavlju paralelno prikazana je i implementacija u programskom paketu MATLAB, dostupnog na fakultetu, s ciljem vizualizacije diskretizacije i dobivanja iznosa aerodinamičkih koeficijenata. U zadnjem poglavlju rezultati se uspoređuju s rezultatima dobivenim analizom provedenom u slobodno dostupnom programskom paketu XFLR5. Analiza je izvršena za krilo nalik na ono zrakoplova Dash 8 Q400 za tri različite konfiguracije: bez otklona krilaca, s otklonom od  $5^\circ$  i otklonom od  $10^\circ$ .

## 2. TEORIJSKI KONCEPTI

### 2.1. Fizikalni prikaz optjecanja krila

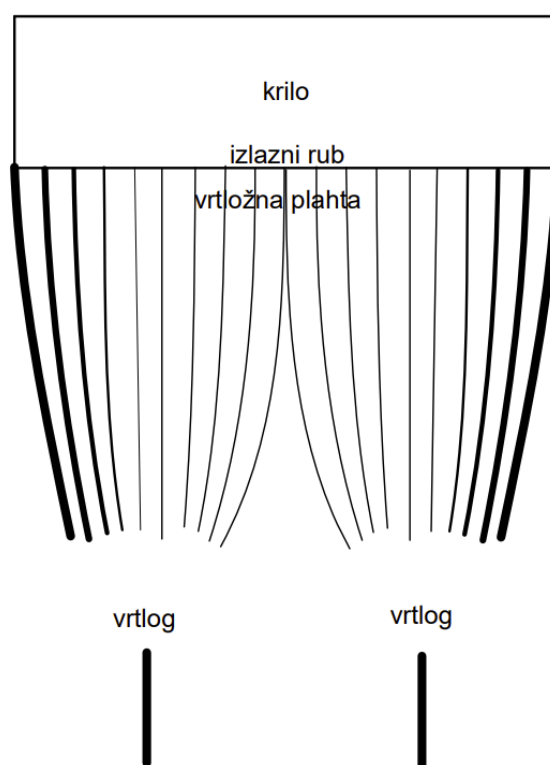
Aerodinamički uzgon tijekom leta nastaje zbog neujednačenog polja brzina (i posljedično tlaka) na gornjoj i donjoj strani krila. Oblik krila u poprečnom presjeku uzrokuje da zrak koji struji preko gornje površine ima veću brzinu, što prema Bernoullijevoj jednadžbi rezultira nižim tlakom u usporedbi sa zrakom koji struji ispod krila. Ta razlika u tlaku stvara uzgon na nosećoj površini, potiskujući krilo prema gore. Istovremeno, prema trećem Newtonovom zakonu, krilo jednakom i suprotnom silom gura zrak prema dolje, što uzrokuje da su strujnice, koje silaze s izlaznog ruba krila, usmjerene prema dolje u odnosu na krilo.

Ova razlika tlakova između gornje i donje površine krila također uzrokuje prestrujavanje zraka s donje na gornju stranu preko vrhova krila, što uzrokuje pojavu komponente strujanja u smjeru raspona krila, kao što je prikazano na slici 1. Na gornjoj strani krila zrak poprima bočnu komponentu usmjerenu od vrhova prema sredini krila, što dovodi do otklona strujnica prema sredini. Istovremeno, na donjoj strani krila zrak ima suprotno usmjerenu bočnu komponentu, uzrokujući otklon strujnica prema vrhovima krila.



Slika 1. Optjecanje krila [1]

Razlika u tlakovima između gornje i donje površine krila stvara tendenciju prestrujavanja zraka s donje na gornju stranu preko vrhova krila, što rezultira formiranjem vrtloga. Ovo prestrujavanje uzrokuje generiranje niza vrtloga duž raspona krila, koji su najizraženiji na vrhovima krila i postupno slabe prema korijenu. Vrtlozi koji se stvaraju na vrhovima krila, poznati kao vršni vrtlozi, oblikuju se tako da se jedan vrtlog na lijevom krilu okreće u smjeru kazaljke na satu, dok se drugi na desnom krilu okreće u suprotnom smjeru. Na određenoj udaljenosti iza krila, ovi vrtlozi se kombiniraju u jedan pozitivan vrtlog na desnoj strani i jedan negativan vrtlog na lijevoj strani, čime se formira vrtložni trag (ili vrtložna plahta) kao na slici 2.

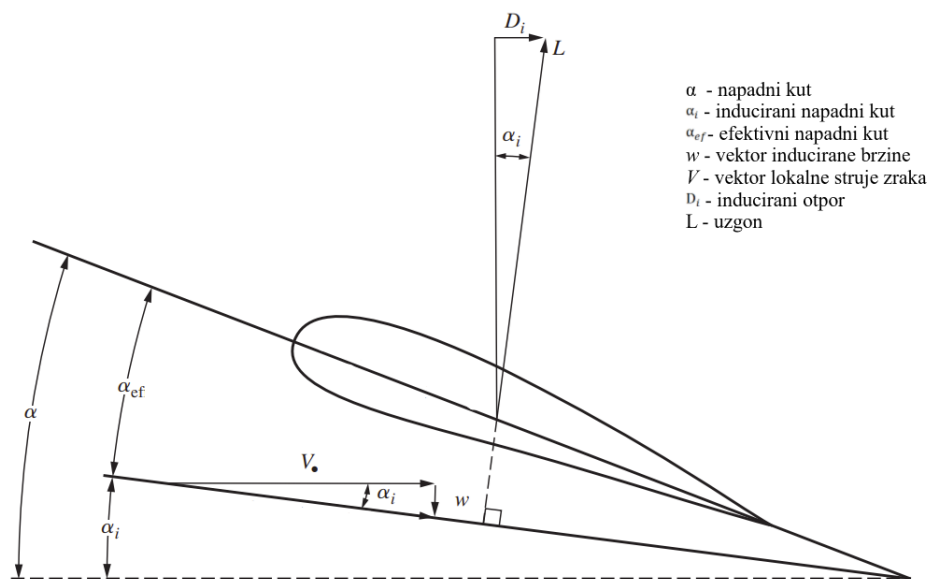


Slika 2. Vrtložna plahta [1]

Prisutnost vrtložnog traga značajno utječe na aerodinamičke karakteristike krila i povezana je s fenomenom porasta otpora. Uvođenje vrtložnosti u strujanju, prema Biot – Savartovom zakonu [1], rezultira pojavom inducirane brzine, tzv. "downwash," koja je usmjerena okomito prema dolje u odnosu na smjer neporemećene struje zraka. Ovo "istjecanje" zraka preko vrhova krila povlači zrak u neposrednoj blizini krila prema dolje, smanjujući efektivni napadni kut nailazećeg zraka na krilo. Smanjenje napadnog kuta rezultira zakretanjem vektora sile uzgona, koja je okomita na lokalnu rezultatnu brzinu (zbroj neporemećene i inducirane

brzine), za inducirani napadni kut u odnosu na okomicu na smjer neporemećenog strujanja, što je prikazano na slici 3.

Kao posljedica toga, uzgon na krilu ima dodatnu komponentu u smjeru neporemećenog strujanja, što uzrokuje otpor poznat kao inducirani otpor. Inducirani otpor je neizbježna posljedica generiranja uzgona, budući da stvara dodatnu silu u smjeru suprotnom od smjera kretanja, povećavajući ukupan aerodinamički otpor zrakoplova.



Slika 3. Inducirani otpor

## 2.2. Potencijalno strujanje

U uvodu je navedeno da se metoda vrtložne rešetke temelji na nekoliko pretpostavki. Glavna pretpostavka je ona o tome da je strujanje u kojem se promatrani slučaj nalazi, nestlačivo potencijalno. Potencijalno strujanje definira polje brzine kao gradijent skalarne funkcije:

$$\vec{v} = \nabla\Phi, \quad (2.1)$$

gdje je  $\Phi$  skalarni potencijal brzine.

Potencijalno strujanje znači da je polje bezvrtložno, odnosno da je rotor polja brzine jednak nuli:

$$\nabla \times \vec{v} = 0. \quad (2.2)$$

Također, potencijalno polje definirano je i kao neviskozno.

Ova postavka definira uvjete našem promatranom slučaju pa je tako primjena modela potencijalnog strujanja ograničena na male iznose brzina strujanja jer pretpostavka o nestlačivosti vrijedi samo u području do iznosa  $M = 0.3$ . Uz ograničenja brzine strujanja, pretpostavke o neviskozosti i nestlačivosti, ograničavaju i iznos napadnog kuta na male vrijednosti zbog toga što pri većim napadnim kutovima dolazi do pojave odvajanja strujanja, odnosno sloma uzgona.

Polazeći od jednadžbe kontinuiteta, uz prethodnu definiciju polja brzine (2.1), nestlačivo potencijalno strujanje opisano je Laplaceovom jednadžbom

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (2.3)$$

dok Eulerova jednadžba prelazi u Euler-Bernoullijev integral za slučaj stacionarnog strujanja

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{konst.} \quad (2.4)$$

Osnovna rješenja Laplaceove jednadžbe za ravninsko strujanje su izvor, dipol i vrtlog. Zbog linearnosti navedenih jednadžbi, rješenje ukupnog potencijala strujanja može se pronaći superponiranjem osnovnih rješenja. Do samog rješenja promatranog slučaja strujanja, odnosno optjecanja noseće površine, dakle dolazi se ispravnim modeliranjem raspodjele superpozicija po konturi noseće površine ili, vidjet će se kasnije u tekstu, raspodjelom po srednjoj liniji zakrivljenosti profila.

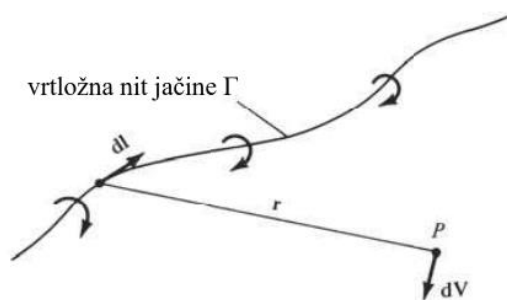


Kako bi problem bio jednoznačno definiran, potrebno je postaviti rubne uvjete. Prvi rubni uvjet govori da utjecaj singulariteta ne postoji na beskonačnoj udaljenosti, a drugi definira nepromočivosti stijenke.

U nastavku će se prikazati vrtložni elementi kao samostalni singulariteti ili kao spomenuta kombinacija singulariteta koja se koristi u metodi vrtložne rešetke.

### 2.3. Vrtložna nit

Spomenuto rješenje Laplaceove jednadžbe, ravninski vrtlog jačine  $\Gamma$  postavljen u proizvoljnoj točki O, može se promatrati i kao ravna linija beskonačne duljine koja prolazi kroz točku O okomito na ravninu u kojoj se vrtlog nalazi. [1] Ta ravna linija je vrtložna nit jačine  $\Gamma$ . Vrtložna nit inducira strujanje iste jačine u svakoj ravnini okomitoj na nju.



Slika 4. Vrtložna nit

Generalno, vrtložna nit može biti i zakrivljena, kao na slici 4., gdje se vidi radijus vektor  $r$  od usmjerenog segmenta niti  $dl$  do proizvoljne točke P u prostoru. Segment  $dl$  inducira brzinu u točki P jednaku:

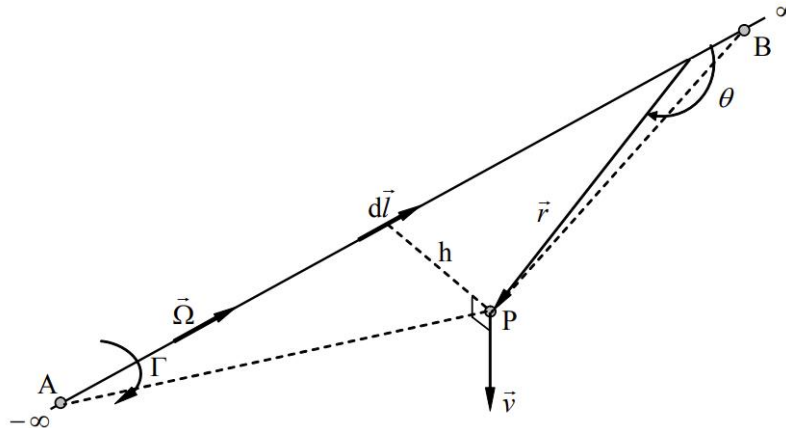
$$d\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.5)$$

Navedena jednadžba prikazuje jedan od temeljnih zakona neviskoznog i nestlačivog strujanja, Biot - Savartov zakon. S obzirom da je u pitanju vektorski produkt, vektor inducirane brzine  $v$  je okomit i na  $dl$  i  $r$ .

Izraz za brzinu induciranu ravnom vrtložnom niti konačne duljine, to jest segmentom AB na slici 5., u točki P je

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\theta_A - \cos\theta_B), \quad (2.6)$$

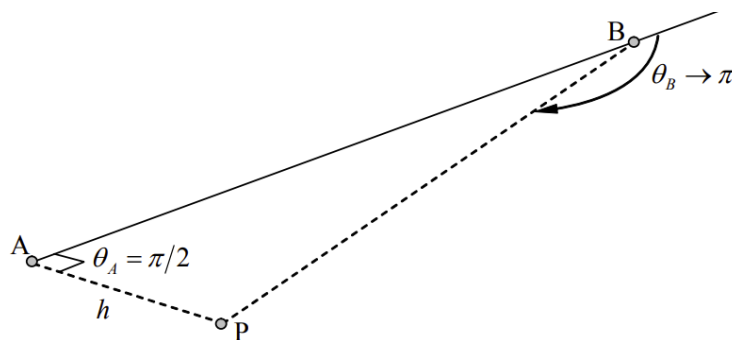
gdje je  $h$  najkraća udaljenost točke P od vrtložne niti, a  $\theta$  kut između vektora vrtložnosti i vektora  $r$ .



**Slika 5. Segment ravne vrtložne niti**

Dok je izraz za brzinu induciranu uslijed polubeskonačne vrtložne niti prikazane slikom:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \quad (2.7)$$



**Slika 6. Polubeskonačna vrtložna nit**

Ponašanje vrtložnih niti opisano je dvama zakonima. To su poznati Helmholtzovi zakoni:

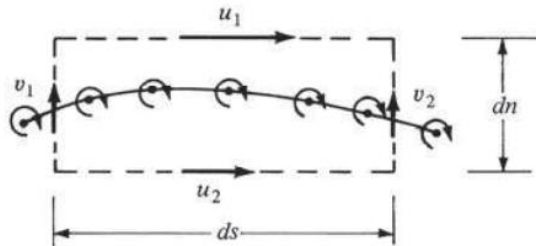
1. Jačina vrtložne niti je konstantna duž cijele svoje duljinom.
2. Vrtložna nit ne može završavati negdje unutar fluida. Treba se protezati u beskonačnost ili mora zatvarati krivulju.

Ti zakoni se koriste u nastavku za definiciju ostalih vrtložnih elemenata.

## 2.4. Vrtložna površina

Postavljanjem beskonačno mnogo vrtložnih niti jedne pored druge, dobije se vrtložna površina. Diferencira li se poprečna dužina vrtložne površine  $s$ , a jedinična jačina u skladu s tim kao  $\gamma$ , infinitezimalno mala brzina  $dv$  koju inducira dio površine jačine  $\gamma ds$  iznosi

$$dv = \frac{\gamma ds}{2\pi r} \quad (2.8)$$



Slika 7. Segment vrtložne površine

Promotri li se elementarni četverokut koji obuhvaća diferencijalni dio površine  $ds$ , prema slici 7. te približavanjem vrtložnoj površini i postavljanjem jednadžbi prema [1], dolazi se do zaključka da je diskontinuitet tangencijalne komponente brzine upravo jednak gustoći vrtložne površine [2]

$$u_1 - u_2 = \gamma \quad (2.9)$$

Primjenom navedenog na slučaj koji će se razmatrati, preciznije primjenom za slučaj noseće površine, prema [2], tanak profil može se zamijeniti njegovom srednjom linijom, a da se njegove značajke ne razlikuju bitno od profila male debljine. Pa tako jednadžbu (2.9) primjenivši na izlaznom rubu profila, dolazi se do nefizikalne situacije da su brzine različite. Jedino prihvatljivo rješenje je da je na izlaznom rubu profila gustoća iznosi nula, što se naziva Kutta uvjet:

$$\gamma = 0. \quad (2.10)$$

Navedeno je iznad da je na elementu  $ds$  postavljen elementarni vrtlog jačine  $\gamma$

$$d\Gamma = \gamma \cdot ds, \quad (2.11)$$

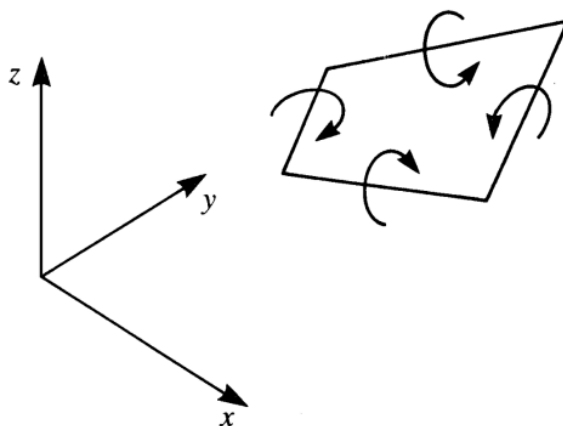
čijom integracijom po zatvorenoj konturi aeroprofila, te primjenom teorema Kutta – Joukowski

$$L = \rho Q_\infty \Gamma s, \quad (2.12)$$

gdje  $Q_\infty$  označava brzinu neporemećene struje zraka, dolazi se do rezultirajuće sile uzgona.

## 2.5. Prstenasti vrtlog

Prstenasti vrtlozi se koriste kao nadogradnja na potkovičaste vrtloge [2] koji se ne koriste u ovom radu. Prstenasti vrtlozi modelirani su sa četiri vrtložne niti konačne duljine tako da zatvaraju krivulju u obliku četverokuta, na primjer kao na slici 8. Svaka od četiriju niti inducira brzinu u proizvoljnoj točki prema prije navedenom Biot – Savartovom zakonu (2.5). Konačan iznos brzine inducirane ovim segmentima jednostavno se dobije zbrajanjem svih pojedinačnih induciranih brzina. Prstenasti vrtlozi su nadogradnja na potkovičaste u smislu da se koriste za modeliranje optjecanja oko nosećih površina kod kojih postoji srednja zakrivljenost profila jer se mreža diskretizira ne samo po rasponu, već i po tetivi.

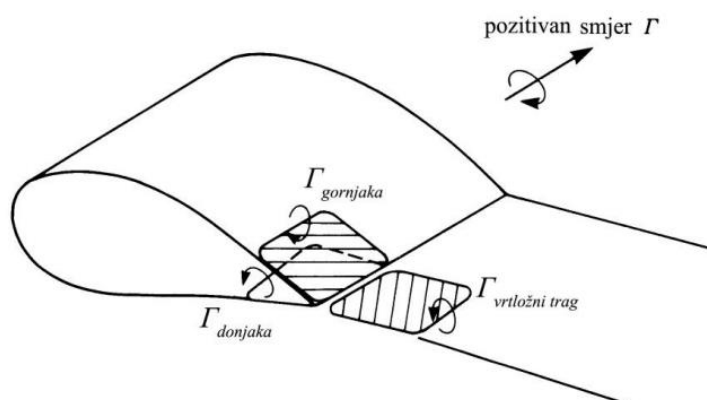


Slika 8. Prstenasti vrtlog

## 2.6. Vrtložni trag

Na temelju dosadašnje analize, primjenom teorema Kutta – Joukowski i Helmholtzovih zakona, dolazi se do zaključka da se i vrtložni trag iza noseće površine aproksimira distribucijom rješenja Laplaceove jednadžbe. Prema npr. metodi noseće linije [2], vrtložni trag se modelira raspodjelom slobodnih vrtloga, tj. vrtložnih niti koje se protežu u beskonačnost. No, valjano je trag prikazati i prstenastim vrtlozima koji također ispunjavaju postavljene zakone.

Također, potrebno je postaviti ograničenje u formi Kuttinog uvjeta da ukupna cirkulacija na mjestu izlaznog ruba krila mora biti jednaka nuli, odnosno da je cirkulacija vrtložnog traga jednaka cirkulacijama donjake i gornjake izlaznog ruba, kao na slici 9.



Slika 9. Početak vrtložnog traga

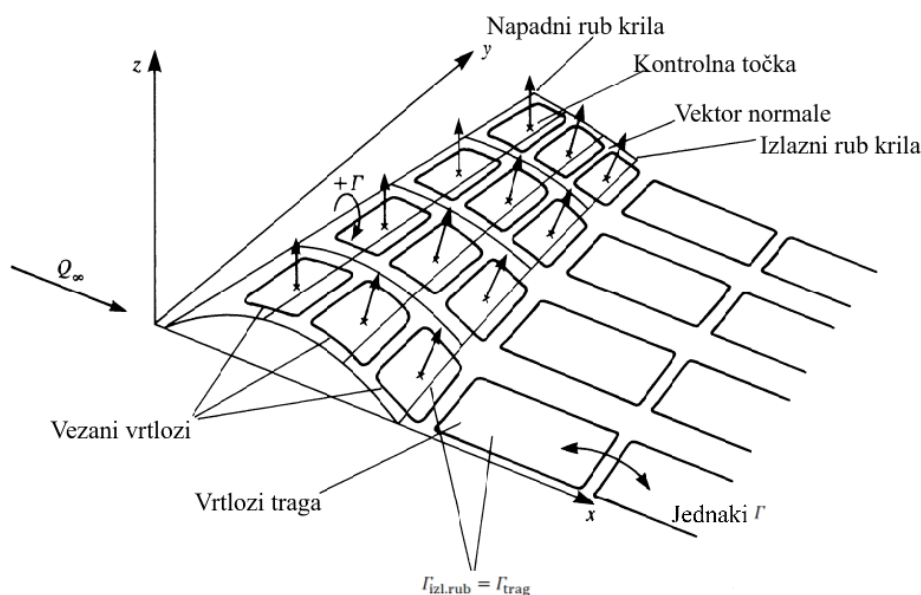
### 3. METODA VRTLOŽNE REŠETKE

U ovom poglavlju usporedno će se prikazati teorijski model VLM-a prema [3] s računalnom implementacijom modela u MATLAB-u.

Metoda vrtložne rešetke je trodimenzionalna numerička metoda kojom je moguće rješavati optjecanje oko nosećih površina proizvoljne geometrije. Temelji se na konceptima prikazanim u prošlom poglavlju, od kojih je još jednom vrijedno spomenuti, u kontekstu ograničenja ove metode:

1. Ograničenja potencijalnog strujanja
2. Modeliranje geometrije raspodjelom vrtloga po srednjoj površini zakrivljenosti
3. Krutost vrtložnog traga.

Ova metoda je u svojoj srži nadogradnja na metodu noseće linije koja je detaljno opisana u [1], [2] i [3], s tom razlikom što koristi diskretizaciju noseće površine prstenastim vrtlozima raspodjeljenima i po rasponu i po tetivi. Opći prikaz navedenog se vidi na slici 10.



Slika 10. Metoda vrtložne rešetke

Rješenje VLM-a mora ispunjavati Dirichletov rubni uvjet definiran na površini koji nalaže da normalna komponenta brzine strujanja iznosi nula

$$\nabla(\Phi + \Phi_\infty) \cdot n = 0. \quad (3.1)$$

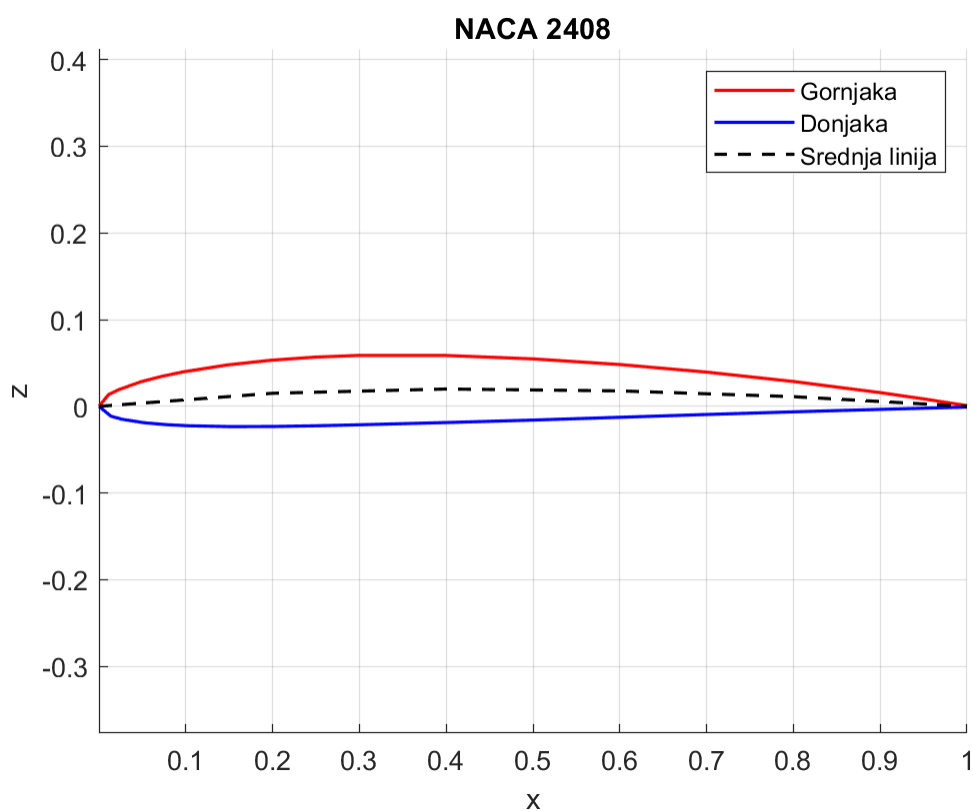
Slijedi uobičajen algoritam kojim je posložena metoda vrtložne rešetke sa, za ovaj rad, specifičnim dijelovima kojima je stvoren geometrijski model.

### 3.1. Aeroprofil

Prije svega, potrebno je stvoriti aeroprofil noseće površine, odnosno doći do koordinata linije srednje zakrivljenosti na koju se svodi profil. Do koordinata se dolazi iz baze podataka o profilima [5], a u MATLAB-u do linije srednje zakrivljenosti profila:

```
%CAMBER LINE  
  
x_camber = linspace(0,1,IC+1);  
  
z_g_int = interp1(x_g,z_g,x_camber,'spline');  
z_d_int = interp1(x_d,z_d,x_camber,'spline');  
  
z_camber = (z_g_int + z_d_int)/2;
```

Pokazni profil prikazan je na slici 11.



Slika 11. Primjer korištenog profila

### 3.2. Stvaranje mreže

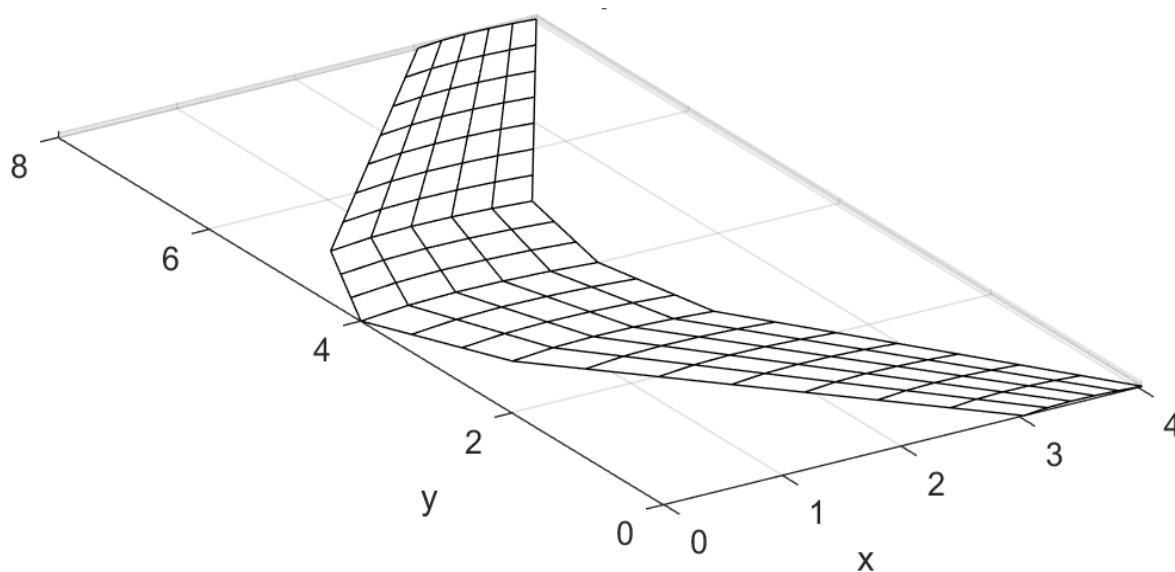
Osim linije srednje zakrivljenosti profila, u stvaranju proizvoljne geometrije noseće površine, a samim time i mreže panela, korišteni su i suženje krila, kut strijele četvrtine tetive, dodatan kut strijele (odnosno prijelom krila, eng. *kink*), a nekonvencionalni način na koji je implementirano uvijanje krila bit će prikazan kasnije.

Za generiranje mreže panela noseće površine (slika 12.), potrebno je izabrati geometrijske podatke prikazane tablicom 1. u kojoj je dodatni kut strijele definiran tako da je strijela krila na tom dijelu zbroj kuta strijele i tog dodatnog kuta. Nakon postavljanja proizvoljnih geometrijskih podataka može se prijeći na sljedeće elemente VLM-a.

**Tablica 1. Podaci korišteni za generiranje geometrije VLM-a**

Broj panela po tetivi (IC)	5
Broj panela po rasponu (IB)	20
Raspon [m]	4
Korijenska tetiva [m]	1
Suženje krila [-]	0.5
Uvijanje krila [°]	0
Kut strijele [°]	20
Kut dodatne strijele [°]	20

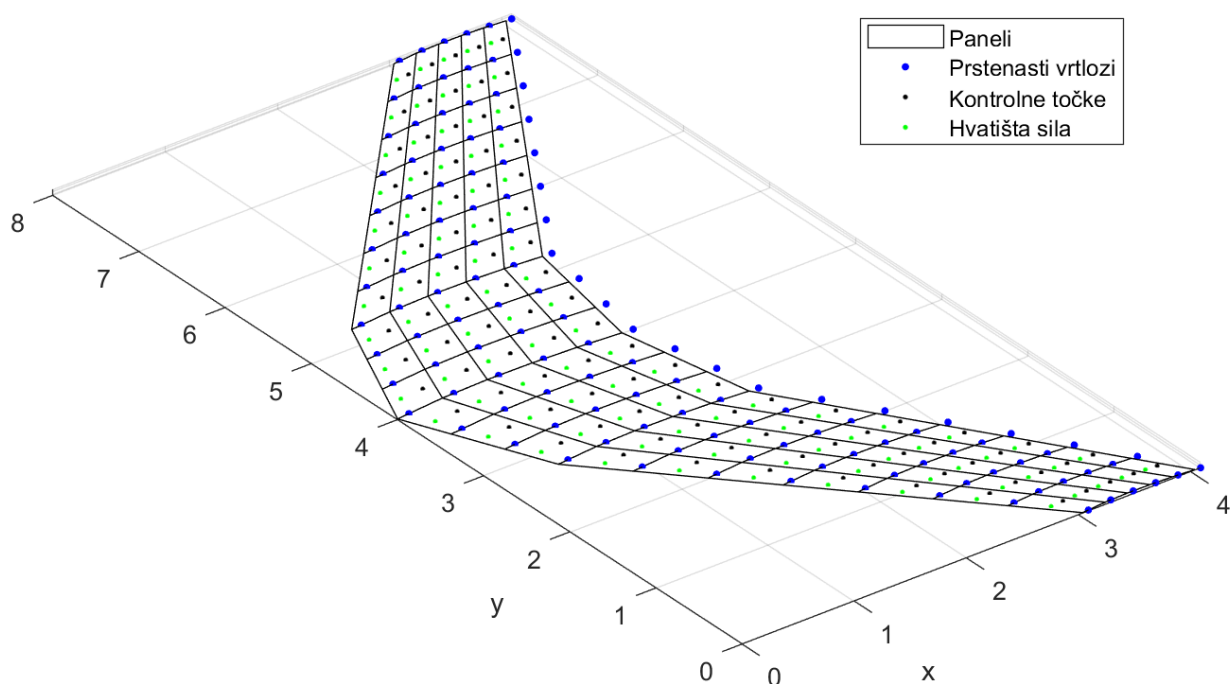




**Slika 12. Mreža panela**

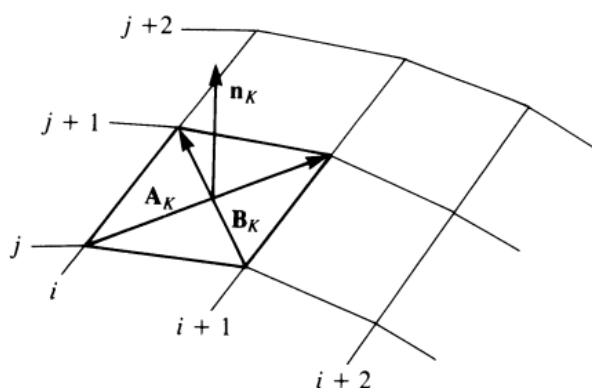
Prstenasti vrtlozi, kao generatori uzgona i induciranih brzina, postavljeni su tako da im je prednji segment postavljen na četvrtini tetive panela. Kontrolne točke, kao točke u kojima se prema Biot – Savartovom zakonu induciraju spomenute brzine, pozicionirane su na tri četvrtine tetive panela i na polovici duljine panela po rasponu, tako da se nalaze u središtu prstenastih vrtloga prema slici 13.

Silu uzgona stvara prema teoremu Kutta – Joukowski vezani vrtlog prstena (2.5). Zbog toga se hvatišta sila kao sljedeći element koji je također prikazan na slici 13., postavlja na sredini vezanog vrtloga, opet na četvrtini tetive panela.



Slika 13. Prikaz elemenata VLM-a

Svi navedeni elementi, to jest  $x$ ,  $y$  i  $z$  koordinate panela, prstenastih vrtloga, kontrolnih točaka i hvatišta sila spremaju se u matrice. S tom razlikom što su matrice koordinata panela i prstenastih vrtloga veličine  $(IC + 1, IB + 1)$ , dok su ostale veličine  $(IC, IB)$ , gdje  $IC$  označava broj panela po tetivi, a  $IB$  broj panela po rasponu.



Slika 14. Definiranje normale na panel

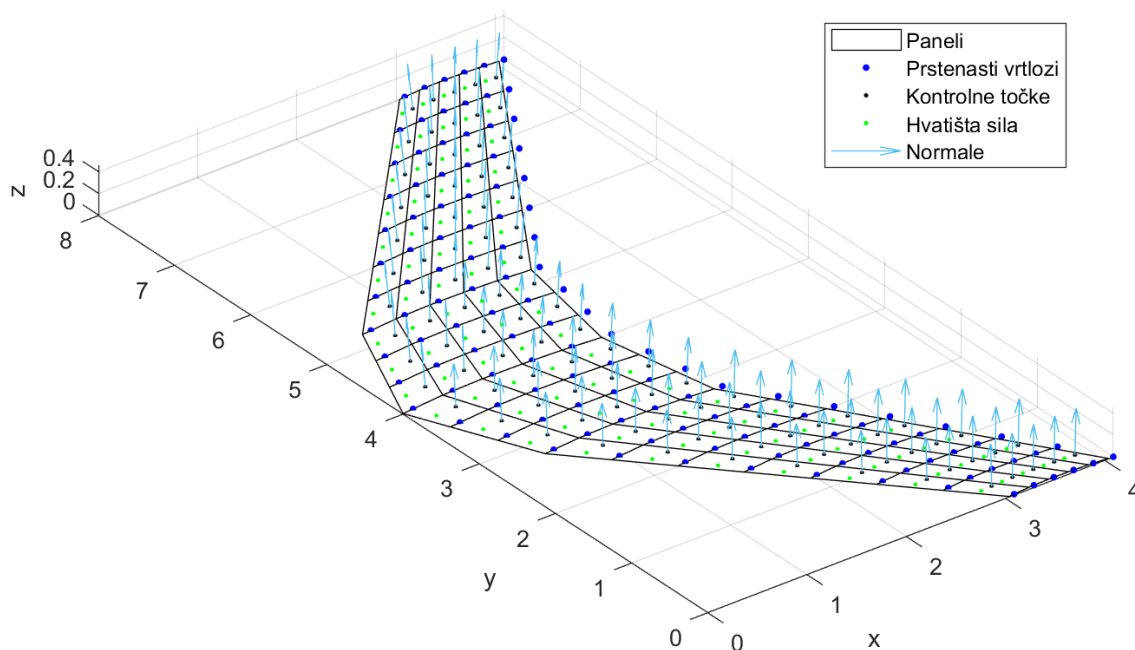
Također, u ovom dijelu se definiraju i normale na površine panela na pozicijama kontrolnih točaka. Metoda kojom se definiraju prikazana je slikom 14. i sljedećom formulom

$$\mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{A}_k \times \mathbf{B}_k}{|\mathbf{A}_k \times \mathbf{B}_k|} \quad (3.2)$$

gdje su vektori  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  određeni suprotnim vrhovima svakog pojedinog panela, a njihov će vektorski produkt prikazivati upravo normalu. Implementirano u MATLAB-u:

```
%NORMALE
nk = zeros(IC*IB,3);
LN = zeros(IC*IB,3);
for i = 1:IC
    for j = 1:IB
        Ak = [x(i+1, j+1) - x(i,j), y(i+1, j+1) - y(i,j), z(i+1, j+1) - z(i,j)];
        Bk = [x(i, j+1) - x(i+1,j), y(i, j+1) - y(i+1, j), z(i, j+1) - z(i+1, j)];
        LN(j + IB*(i-1), :) = [xkt(i,j),ykt(i,j),zkt(i,j)];
        nk(j + IB*(i-1), :) = cross(Ak,Bk)/norm(cross(Ak,Bk));
    end
end
hold on
X = LN(:,1);, Y = LN(:,2);, Z = LN(:,3);
U = nk(:,1);, V = nk(:,2);, W = nk(:,3);
quiver3(X,Y,Z,U,V,W,0.5)
axis equal
```

Na postojeću sliku, ubačene normale prikazane su slikom 15.



Slika 15. Prikaz elemenata VLM-a s normalama

### 3.3. Funkcije VORTXL i VORING

Brzine inducirane u kontrolnim točkama računaju se pomoću funkcija VORTXL i VORING. Matematička formulacija ovih funkcija jasno je prikazana u [3].

Funkcija VORTXL računa brzinu induciranu vrtložnom niti konačne duljine u točki koordinata  $(x_t, y_t, z_t)$ , a njen prikaz u MATLAB-u:

```
function v_indT = VORTXL(xt, yt, zt, x1, y1, z1, x2, y2, z2, Gamma)

    VPr1r2x = (yt - y1) * (zt - z2) - (zt - z1) * (yt - y2);
    VPr1r2y = -(xt - x1) * (zt - z2) + (zt - z1) * (xt - x2);
    VPr1r2z = (xt - x1) * (yt - y2) - (yt - y1) * (xt - x2);
    absVPr1r2 = sqrt(VPr1r2x^2 + VPr1r2y^2 + VPr1r2z^2);
    r1 = sqrt((xt - x1)^2 + (yt - y1)^2 + (zt - z1)^2);
    r2 = sqrt((xt - x2)^2 + (yt - y2)^2 + (zt - z2)^2);
    if r1 < eps || r2 < eps || absVPr1r2 < eps
        u = 0; v = 0; w = 0;
```

```

    v_indT = [u, v, w];

end

SPror1 = (x2 - x1) * (xt - x1) + (y2 - y1) * (yt - y1) + (z2 - z1) * (zt - z1);
SPror2 = (x2 - x1) * (xt - x2) + (y2 - y1) * (yt - y2) + (z2 - z1) * (zt - z2);
K = Gamma / (4 * pi * absVPr1r2^2) * (SPror1 / r1 - SPror2 / r2);
u = K * VPr1r2x;; v = K * VPr1r2y;; w = K * VPr1r2z;
v_indT = [u, v, w];

end

```

Funkcija VORING računa brzinu induciranu prstenastim vrtlogom u točki koordinata  $(xt, yt, zt)$ , a na način da koristi prethodno prikazanu funkciju VORTXL četiri puta kao ekvivalent četirima segmentima od kojih se sastoji prsten. Njen prikaz u MATLAB-u:

```

function v_indT = VORING(xt, yt, zt, x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3, x4, y4, z4, Gamma)

    v_ind1 = VORTXL(xt, yt, zt, x1, y1, z1, x2, y2, z2, Gamma);
    v_ind2 = VORTXL(xt, yt, zt, x2, y2, z2, x3, y3, z3, Gamma);
    v_ind3 = VORTXL(xt, yt, zt, x3, y3, z3, x4, y4, z4, Gamma);
    v_ind4 = VORTXL(xt, yt, zt, x4, y4, z4, x1, y1, z1, Gamma);
    v_indT = v_ind1 + v_ind2 + v_ind3 + v_ind4;

end

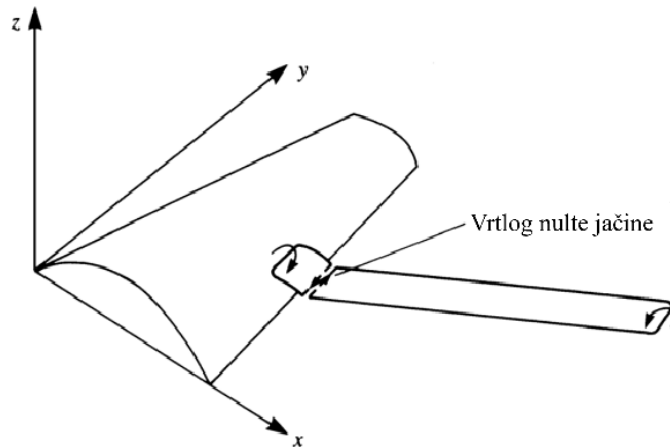
```

U ovom dijelu je korisno uvesti i dodatnu funkciju za izračun brzina induciranih isključivo izlaznim vrtložnim nitima, a koje se koriste za određivanje inducirano otpora. Navedeno se postiže isključivanjem utjecaja vezanih vrtložnih niti iz funkcije VORING.

### 3.4. Trag

Potrebno je zadovoljiti Kuttin uvjet (2.5), tako što se izlazni vrtlog poništava krutim postavljanjem prstenastih vrtloga traga jačine jednake onima u posljednjem redu prstenova, na izlaznom rubu noseće površine. U stacionarnoj metodi vrtložne rešetke, koja se primjenjuje u ovom radu, izlazni vrtlozi traga se postavljaju tako da su paralelni sa smjerom neporemećenog strujanja. Na slici 16. prikazano je navedeno pod pretpostavkom da brzina neporemećene struje zraka nastrojava pod kutem na noseću površinu.

U nestacionarnom VLM-u, trag se modelira na način da se u svakom vremenskom trenutku sastoji od novih prstenastih vrtloga, ali i starih koji se pomiču dalje od noseće površine. Nestacionarni model prikazan je u [4].



Slika 16. Modeliranje vrtložnog traga

### 3.5. Sustav linearnih jednadžbi

Promatrani slučaj se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi (3.3) koji slijedi iz postavljenog rubnog uvjeta (3.1) u svrhu određivanja raspodjele cirkulacija  $\Gamma$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_\infty \cdot n_1 \\ -Q_\infty \cdot n_2 \\ \vdots \\ -Q_\infty \cdot n_m \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

gdje  $m$  predstavlja ukupan broj prstenastih vrtloga promatranog slučaja, a prva matrica označava matricu koeficijenata utjecaja  $a$ , općenito zapisane

$$a_{ij} = [u \quad v \quad w]_{ij} \cdot n_i, \quad i = 1 \dots m, j = 1 \dots m, \quad (3.4)$$

gdje  $u, v, w$  predstavljaju komponente inducirane brzine u svakoj pojedinoj kontrolnoj točki, dok  $n$  označava normalu na promatrani panel  $i$ .

Prikazani vektor na desnoj strani jednadžbe može se nazvati **RHS**, takav da je

$$RHS_i = -Q_\infty \cdot n_i, i = 1 \dots m. \quad (3.5)$$

Konačno, sustav linearnih jednadžbi može se zapisati kao

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{RHS} \quad (3.6)$$

U ovom dijelu može se pokazati način na koji je implementirano uvijanje krila. Uvijanje je uvedeno modificiranjem po rasponu vektora neporemećene struje, na sljedeći način prikazan u MATLABU:

```
AoA = 4*pi/180;
twist = -2*pi/180;
twist_span = [linspace(twist,0,IB/2) linspace(0,twist,IB/2)];
Q_infN = 34.3;
for i = 1:IC
    for j = 1:IB
        AoA_span(j + IB*(i-1)) = AoA + twist_span(j);
        Q_inf = [Q_infN*cos(AoA_span(j + IB*(i-1))), 0, Q_infN*sin(AoA_span(j + IB*(i-1)))]';
        RHS(j + IB*(i-1), :) = -nk(j + IB*(i-1), :)*Q_inf;
    end
end
GAMMA = a\RHS;
```

### 3.6. Aerodinamički koeficijenti

Kako bi se dobio krajnji rezultat, to jest ono što i je interes ovog rada, a to su aerodinamički koeficijenti sile uzgona  $C_L$  i induciranog otpora  $C_{Di}$ , potrebno je iskoristiti teorem Kutta – Joukowski (2.5).

Stoga, za izračun lokalne sile uzgona vezanog segmenta prstenastog vrtloga na panelima napadnog ruba noseće površine, koristi se

$$\Delta L_{ij} = \rho Q_{\infty} \Gamma_{ij} \Delta y_{ij}, \quad i = 1, \quad (3.7)$$

dok se za ostale panele noseće površine koristi

$$\Delta L_{ij} = \rho Q_{\infty} (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{ij}, \quad i > 1. \quad (3.8)$$

Do konačnog iznosa sile uzgona dolazi se sumiranjem svih lokalnih sila uzgona

$$L = \sum_{I=1}^{IC} \sum_{j=1}^{IB} \Delta L_{ij}, \quad (3.9)$$

a do koeficijenta sile uzgona noseće površine

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2 S_{ref}}, \quad (3.10)$$

gdje  $S$  predstavlja referentnu površinu u x-y ravnini,  $\rho$  referentnu gustoću zraka, a  $Q_\infty$  brzinu neporemećene struje zraka.

Koristeći geometriju sa slike 15. te slijedeći navedeni algoritam, moguće je prikazati raspodjelu normirane cirkulacije po rasponu (slika 17.), kao i raspodjelu normiranog uzgona po rasponu (slika 18.). Na osima grafova se nalaze normirane vrijednosti, to jest vrijednosti su podijeljene maksimalnima za taj slučaj. Na osi apscise normirani raspon definiran je (3.11) dijeljenjem  $y$  vrijednosti raspona sa maksimalnom vrijednosti, odnosno samim rasponom  $B$ .

$$\bar{y} = \frac{y}{B} \quad (3.11)$$

Na osi ordinate grafa na slici 17. nalazi se normirana cirkulacija, definirana (3.12) kao iznos cirkulacija duž raspona podijeljenima s maksimalnim iznosom cirkulacije:

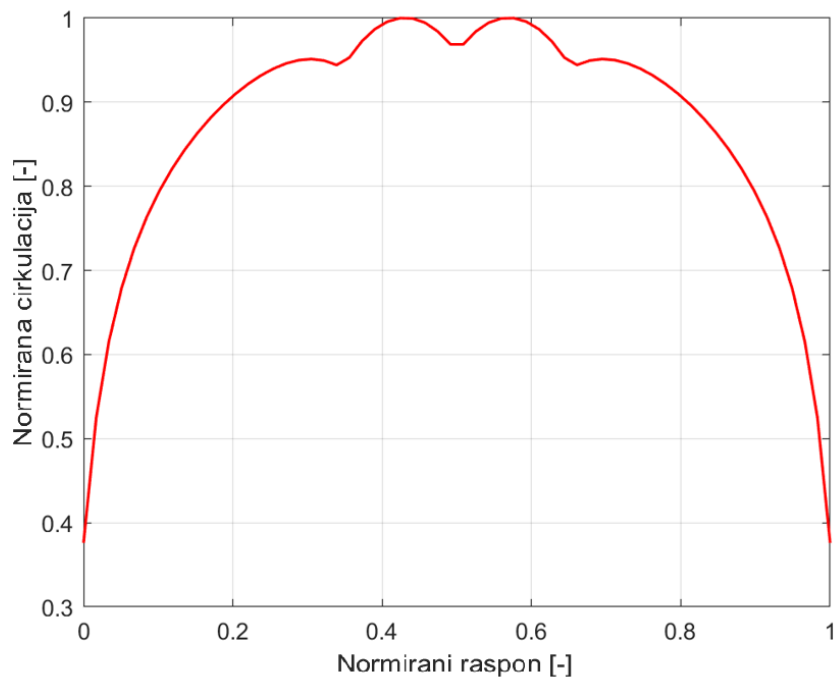
$$\bar{\Gamma}(y) = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma_{max}}, \quad (3.12)$$

dok se na osi ordinate grafa na slici 18. nalazi normirani uzgon, definiran (3.13) kao iznos uzgona duž raspona podijeljenima s maksimalnim iznosom uzgona:

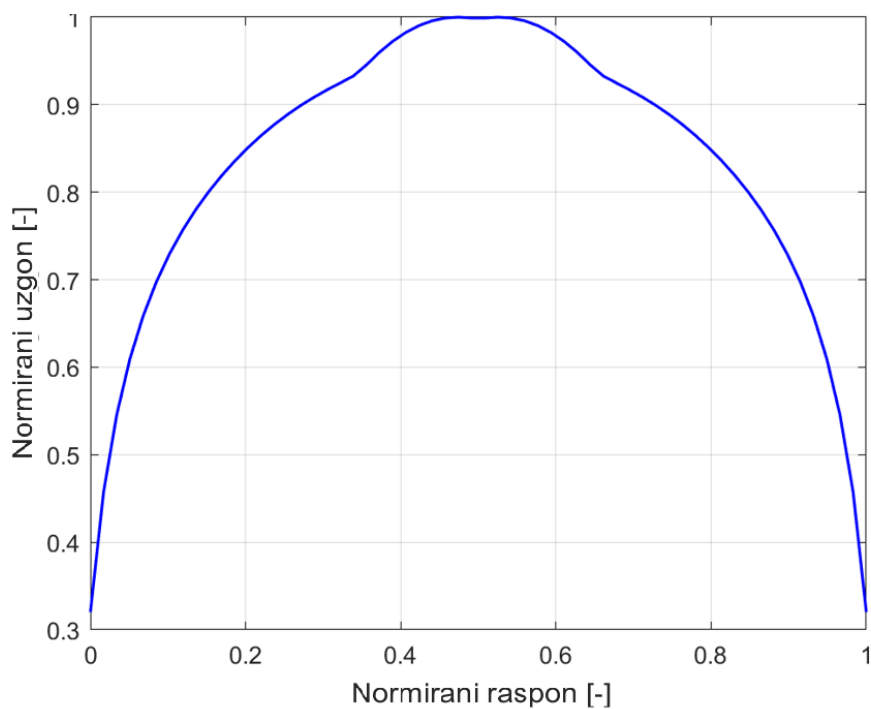
$$\bar{L}(y) = \frac{L(y)}{L_{max}}. \quad (3.13)$$

Na grafovima su vidljivi određeni diskontinuiteti. Središnje „udubljenje“ je karakteristično za konfiguracije koje posjeduju strijelu, dok se uzrok za vanjske diskontinuitete nalazi na položaju promjene strijele krila.





**Slika 17. Raspodjela normiranih cirkulacija po normiranom rasponu**



**Slika 18. Raspodjela normiranog uzgona po normiranom rasponu**

Računanje induciranoog otpora se vrši na nešto kompliciraniji način. Za izračun induciranoog otpora na panelima napadnog ruba noseće površine koristi se

$$\Delta D_{ij} = -\rho w_{ind} \Gamma_{ij} \Delta y_{ij}, \quad i = 1, \quad (3.14)$$

a za izračun na ostalim panelima

$$\Delta D_{ij} = -\rho w_{ind} (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{ij}, \quad i > 1, \quad (3.15)$$

gdje  $w_{ind}$  predstavlja „downwash“ u svakoj kontrolnoj točki, a izračunava se na način da se zbroje sve brzine inducirane segmentima vrtložnih niti paralelnima s osi x.

Ukupna sila otpora se stoga dobije jednostavnim zbrajanjem:

$$D = \sum_{l=1}^{IC} \sum_{j=1}^{IB} \Delta D_{ij}, \quad (3.16)$$

a koeficijent inducirano otpora

$$C_{Di} = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho Q_{\infty}^2 S_{ref}}. \quad (3.17)$$

### 3.7. Upravljačke površine

Dodatna mogućnost ovog rada je uvođenje upravljačkih površina, odnosno krilaca. Na postojeću geometriju krilca je moguće implementirati deformacijom određenog dijela mreže. Dio mreže koji se smatra upravljačkom površinom moguće je otkloniti definiranjem osi zakreta (eng. *hinge line*) i korištenjem 2D matrice rotacije za x i z koordinate dijela mreže koji se rotira oko navedene osi, dok y koordinate ostaju nepromijenjene. Matematička formulacija te 2D matrice rotacije pokazana je jednadžbom (3.15).

$$\begin{bmatrix} x_{rot} \\ z_{rot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Ako se zahtijeva da upravljačka površina iznosi 20% tetive, poželjno je postaviti broj panela po tetivi tako da broj bude višekratnik broja 5, zbog jednostavnije implementacije koda prikazanog niže:

```
x_hinge = x_le + 0.8*Chord;
```

```
for j = 1:(broj_panela_krilca + 1)
```

```
    for i = (IC-0.2*IC+1):(IC+1)
```

```
x_hinge = x_hinge(j);, y_hinge = y(i-0.2*IC,j); z_hinge = z(i-0.2*IC,j);  
  
x_aps = x(i,j);, y_aps = y(i,j);, z_aps = z(i,j);  
  
x_rel = x_aps - x_hinge;, z_rel = z_aps - z_hinge;  
  
x_rot = x_rel*cos(d) - z_rel*sin(d);, z_rot = z_rel*cos(d) + x_rel*sin(d);  
  
x_otk = x_rot + x_hinge;, z_otk = z_rot + z_hinge;  
  
x_a(i,j) = x_otk;, z_a(i,j) = z_otk;  
  
end  
  
end
```

Geometrija nastala ovim načinom prikazana je kasnije u radu, a koristi se za analizu raspodjele uzgona i izračun koeficijenata momenata valjanja.

## 4. ANALIZA REZULTATA

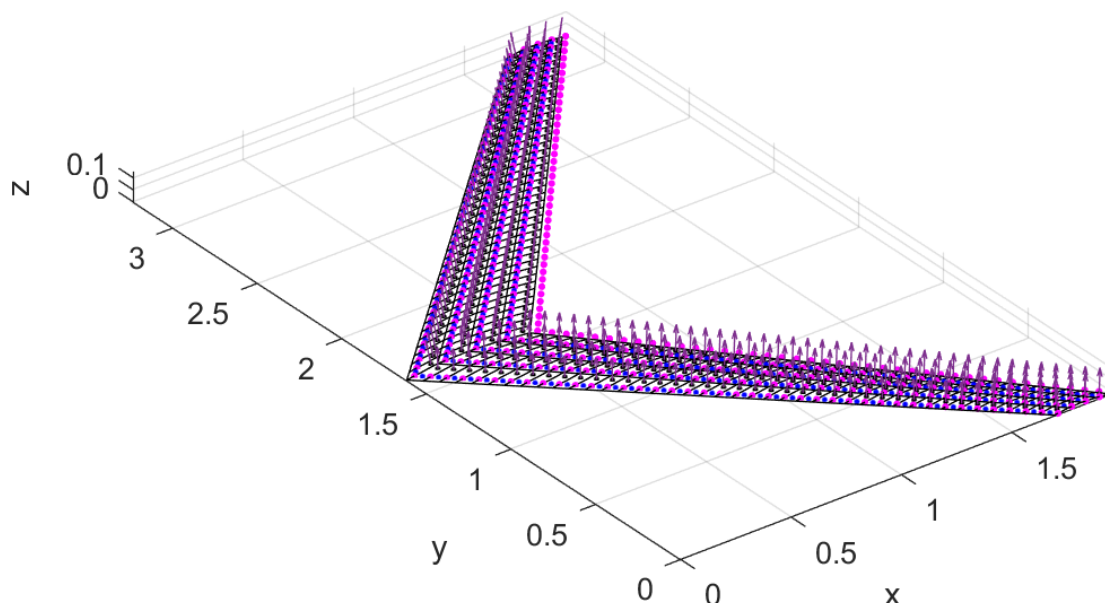
### 4.1. Usporedba s validiranim modelom vrtložne rešetke

Prva usporedba, a samim time i validacija rezultata izvršena je na temelju [6] gdje se također implementira metoda vrtložne rešetke. Za potrebe ovog rada valjano je osloniti se na prije navedeni rad jer su u njemu rezultati validirani i usporedbom s teorijskim rješenjima i usporedbom s danim eksperimentalnim podacima.

**Tablica 2. Geometrijski podaci korišteni u [6]**

Raspon [m]	3.232
Korijenska tetiva [m]	0.557
Suženje krila [-]	0.45
Površina [m]	1.303
Kut strijele [°]	45
Uvijanje [°]	-2

Koristeći geometriju navedenu u [6], a prikazanu tablicom 2., dobivena noseća površina prikazana je slikom 19. Rezultati analize provedene za napadni kut  $\alpha = 6^\circ$ , prikazani su u tablici 3.



Slika 19. Geometrija izrađena na temelju [6]

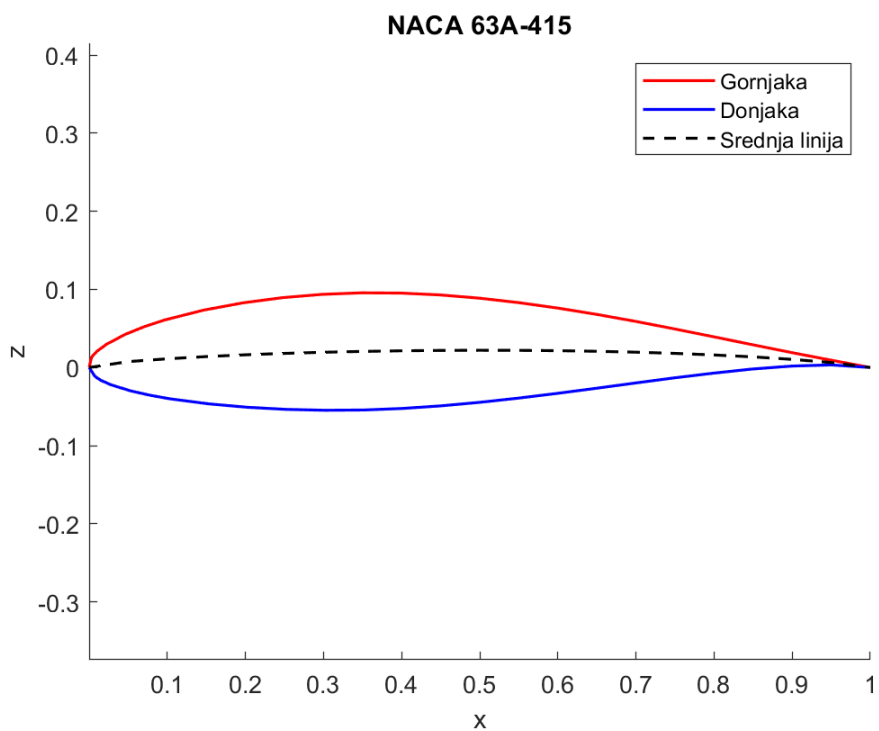
Tablica 3. Usporedba rezultata za koeficijent uzgona

Veličina	Ref. vrijednost za [6]	Program [6]	<i>MATLAB</i>
$C_L$ [–]	0.5629	0.566	0.5589

Iznos koeficijenta uzgona dobiven ovim programom, prikazan u zadnjem stupcu u usporedbi s [6] čini razliku od 1.27 %. Za taj rad referentna vrijednost je ona dobivena korištenjem programa Tornado. U usporedbi i sa, za taj rad referentom vrijednošću, razlikuje se za 0.7 % što potvrđuje valjanost izrađenog programa.

#### 4.2. Usporedba s programom XFLR5

Kao što je rečeno u uvodu, analiza aerodinamičkih koeficijenata i raspodjele uzgona po rasponu i tetivi vršit će se na geometriji noseće površine nalik onoj zrakoplova Dash 8 Q400. Podaci su preuzeti iz dostupnih izvora [7], dok su neki podaci uzeti kao približni stvarnima, kao na primjer profil prikazan slikom 20. Također, valja izdvojiti pojednostavnjenje u vidu zanemarivanja kuta dihedrala kako bi se analiza mogla izvršiti u izrađenom programu.

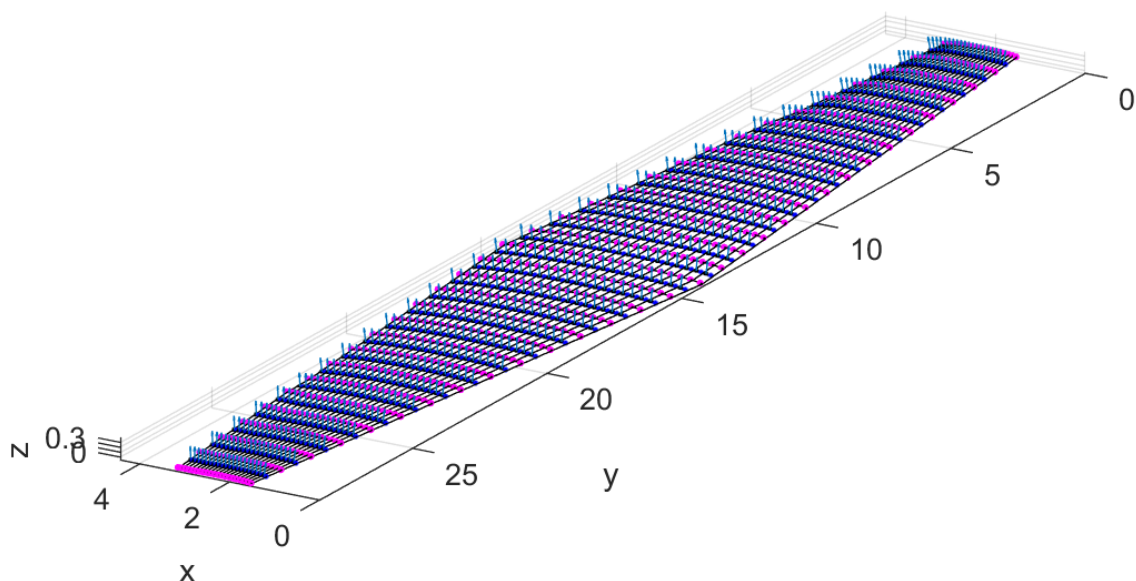


**Slika 20. Prikaz korištenog profila za analizu**

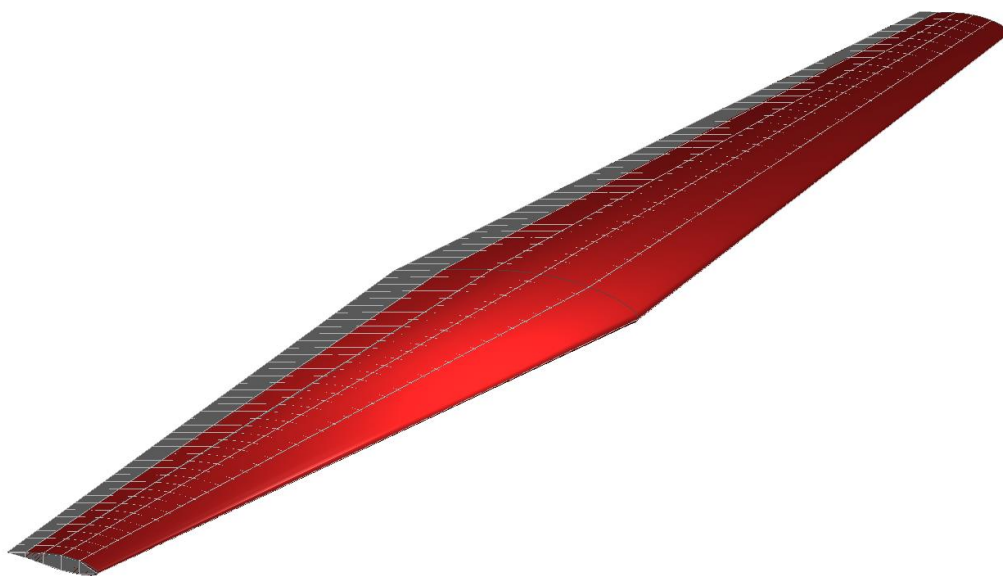
**Tablica 4. Geometrijski podaci za konfiguraciju nalik na Dash 8 Q400**

Raspon [m]	28.42
Korijenska tetiva [m]	4.39
Suženje krila [-]	0.369
Površina [m]	85.402
Kut strijele [°]	6.1
Uvijanje [°]	-2

U tablici 4. navedeni su podaci korišteni za izradu geometrija u programima MATLAB i XFRLR5 [8]. Redom spomenute geometrije se nalaze na dolje prikazanim slikama 21. i 22.

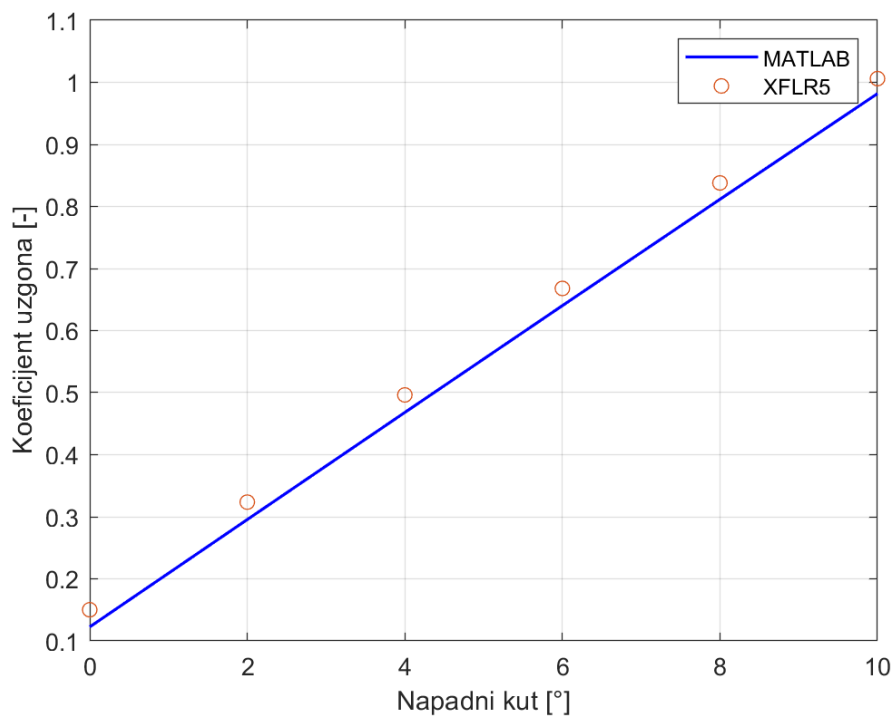


**Slika 21. Prikaz korištene geometrije u MATLAB-u**

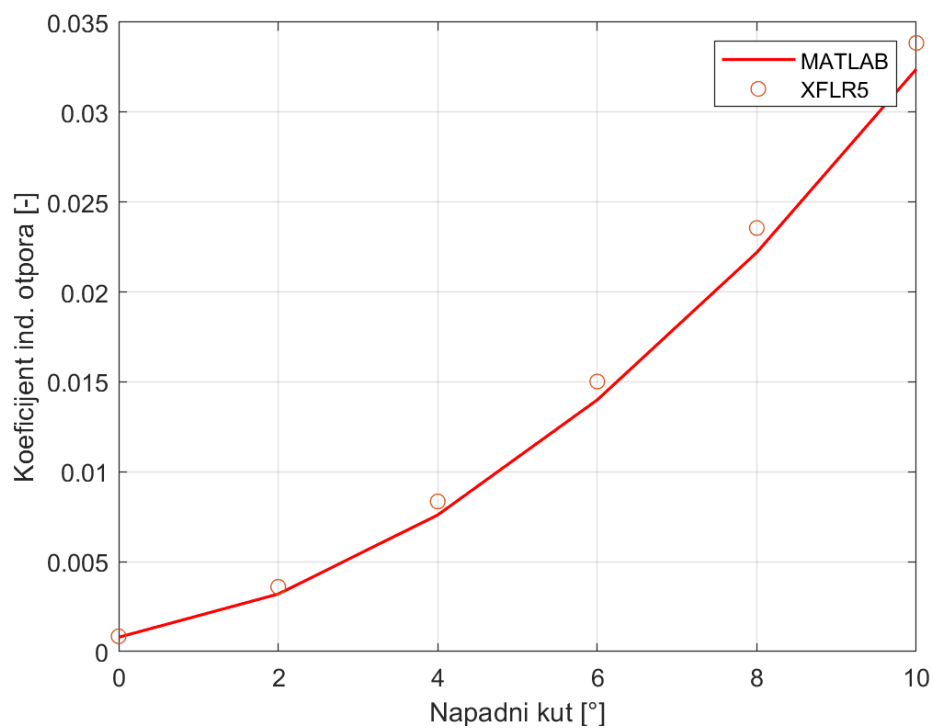


**Slika 22. Prikaz korištene geometrije u XFLR5**

Analiza u oba programa je izvršena na temelju istih podataka postavljenih u predprocesoru. Osim unošenja navedene geometrije, postavljen je i jednak broj panela po rasponu i po tetivi. Po rasponu ih je postavljeno 80, a po tetivi 5. I u MATLAB-u i u XFLR5 analiza se provela fiksiranjem iznosa brzine neporemećene struje od 34.3 m/s. Za analizu u XFLR5 upotrijebljen je model „VLM2“ koji koristi metodu vrtložne rešetke sastavljenu od prstenastih vrtloga. Rezultati dobiveni analizama po nizu napadnih kutova ( $0^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $8^\circ$  i  $10^\circ$ ) prikazani su slikama 23. i 24. u obliku dijagrama  $C_L - \alpha$ , odnosno  $C_{Di} - \alpha$ .



Slika 23. Usporedba rezultata - koeficijent uzgona



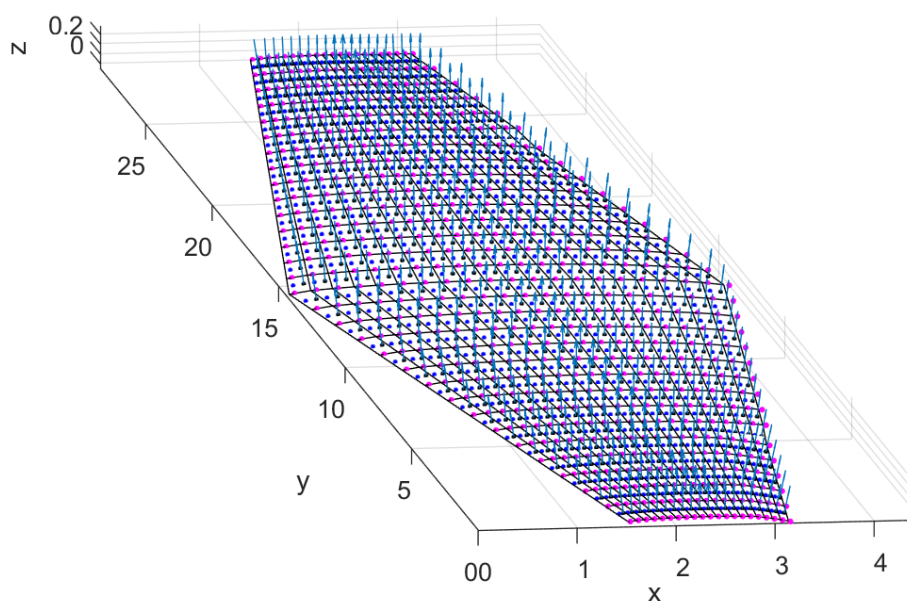
Slika 24. Usporedba rezultata - koeficijent induciranog otpora



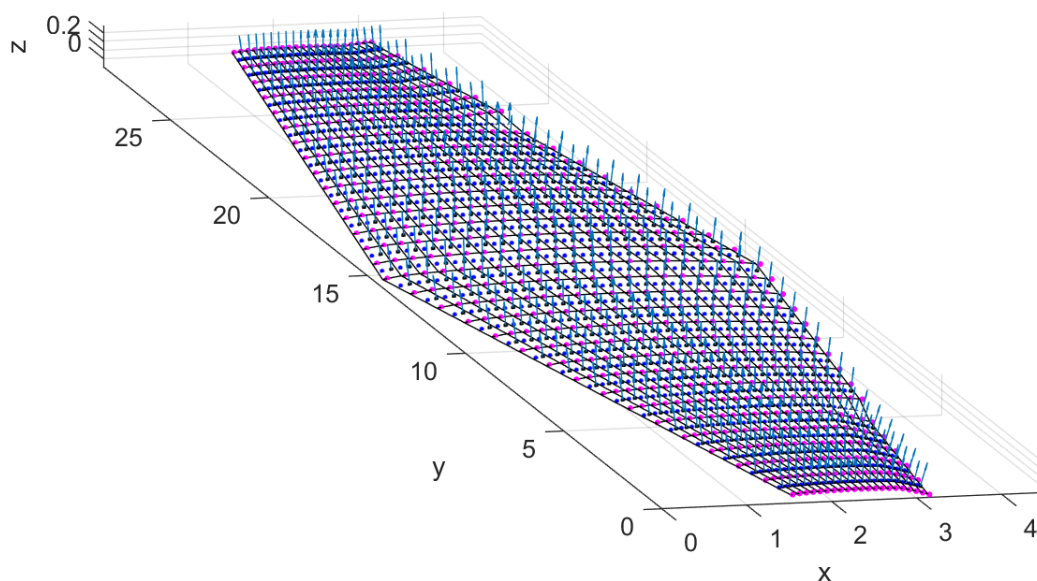
Oba dijagrama zanimljivo je promatrati u kontekstu apsolutnih i relativnih odstupanja rezultata dobivenih u MATLAB-u u odnosu na rezultate dobivene u XFLR5. Dijagram na slici 23. prikazuje da je apsolutno odstupanje konstantno, a relativno se smanjuje, dok dijagram na slici 24. prikazuje da se apsolutno odstupanje povećava, a relativno smanjuje.

### 4.3. Konfiguracija s otklonjenom upravljačkom površinom

Na geometriju prikazanu slikom 25., krilca je moguće implementirati deformacijom određenog dijela mreže. U programu se analiziraju konfiguracije s kontrolnim površinama otklonjenim diferencijalno za  $5^\circ$  (slika 25.) i  $10^\circ$  (slika 26.), kao i za slučaj otklona oba krilca prema dolje za  $5^\circ$ .

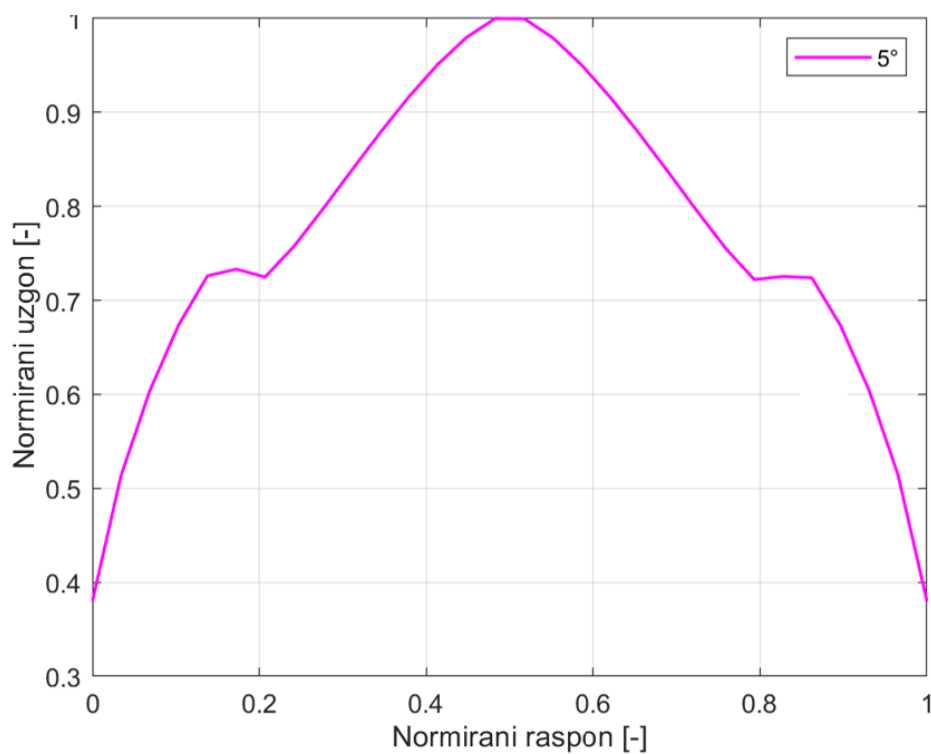


Slika 25. Diferencijalni otklon krilaca -  $5^\circ$



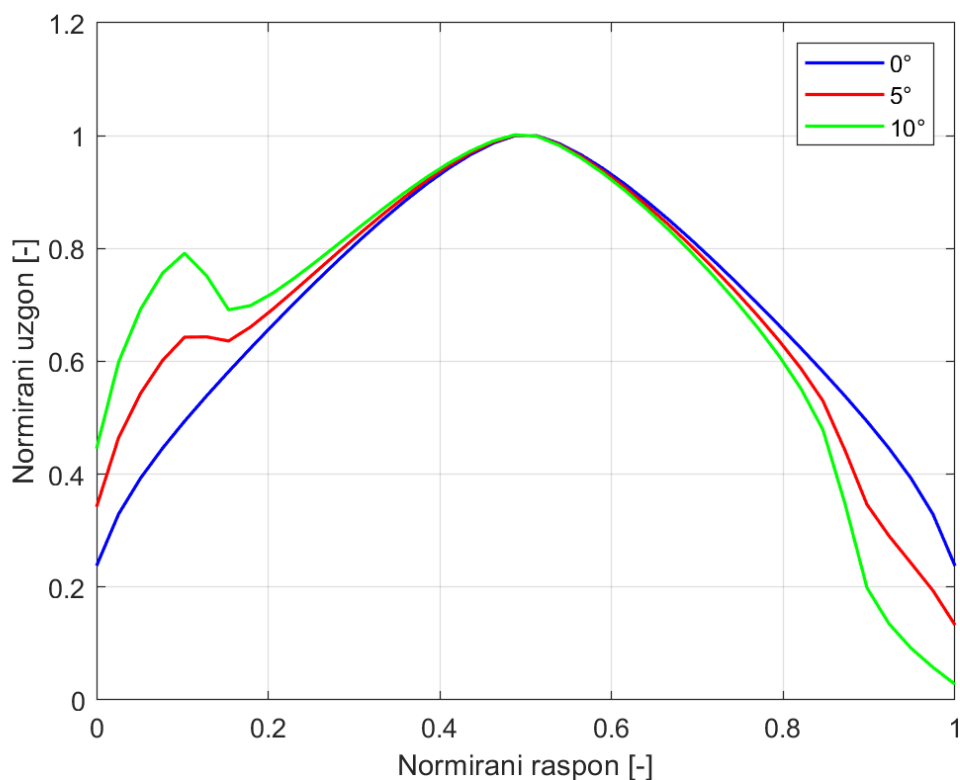
**Slika 26. Diferencijalni otklon krilaca -  $10^\circ$**

Analiza počinje prikazom raspodjele uzgona po rasponu za otklon krilaca u iznosu od  $5^\circ$  (slika 27.). Utjecaj krilaca otklonjenih prema dolje očituje se u porastu uzgona na tom dijelu raspona gdje se krilca nalaze. Graf je simetričan zbog simetričnosti otklona krilaca. Vrijednosti na osima definirane su jednačbama (3.11) i (3.13).



**Slika 27. Raspodjela uzgona po rasponu za otklon krilaca –  $5^\circ$**

Na slici 28. prikazana je raspodjela uzgona po rasponu za otklone od  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  i za slučaj kada krilca nisu otklonjena. Vrijednosti uzgona za sve konfiguracije su normirane s maksimalnom za slučaj s neotklonjenim upravljačkim površinama. S obzirom da je lijevo krilce otklonjeno prema dolje, a desno prema gore, vidljivo je da se povećanjem kuta otklona povećava i uzgon na tom dijelu raspona. Samim time se i tjemena funkcija za otklonjene površine imaju vrijednosti veće od 1.



**Slika 28. Raspodjela uzgona po rasponu za diferencijalne otklone krilaca**

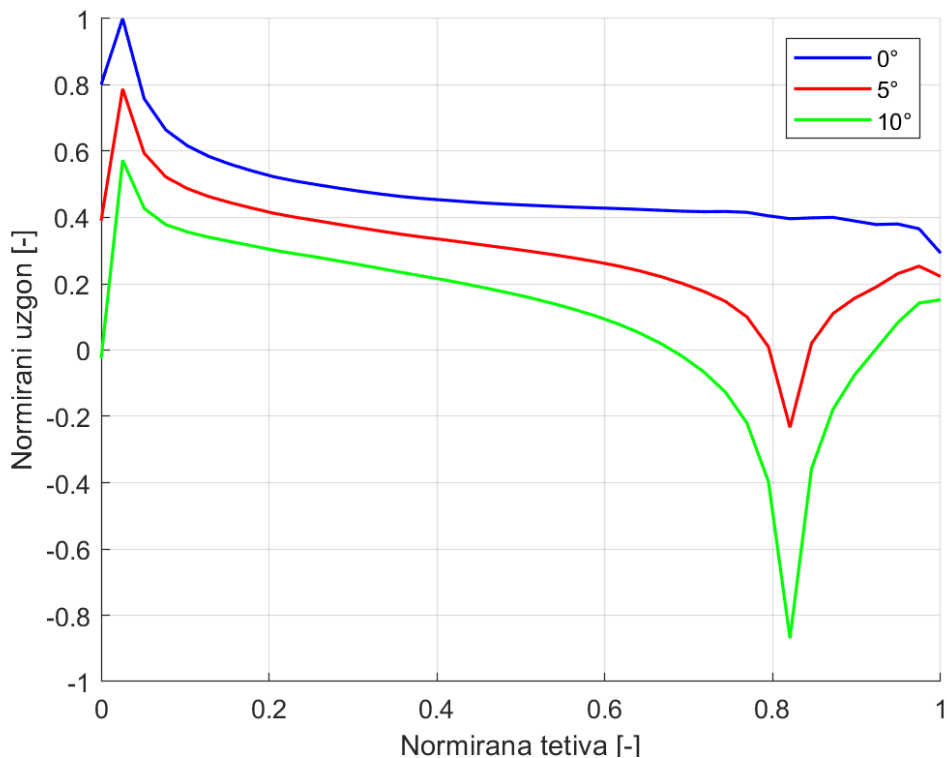
Interesantno je promotriti raspodjele uzgona po tetivama. Na slici 29. pokazana je raspodjela normiranog uzgona po tetivi na mjestu krilca otklonjenog prema gore, a na slici 30. raspodjela normiranog uzgona po tetivi na mjestu krilca otklonjenog prema dolje. I za slučaj raspodjele po tetivi, uzgon se normira maksimalnom vrijednošću konfiguracije s neotklonjenim kontrolnim površinama, ali ovdje na način da se razmotri raspodjela doprinosa uzgona na svakom panelu gdje je promatrana tetiva te se podijeli s maksimalnom vrijednosti, prikazano formulom:

$$\bar{L}(x) = \frac{\Delta L_{i,tetiva}}{\Delta L_{i,tetiva,max,\delta=0^\circ}}, \quad (4.1)$$

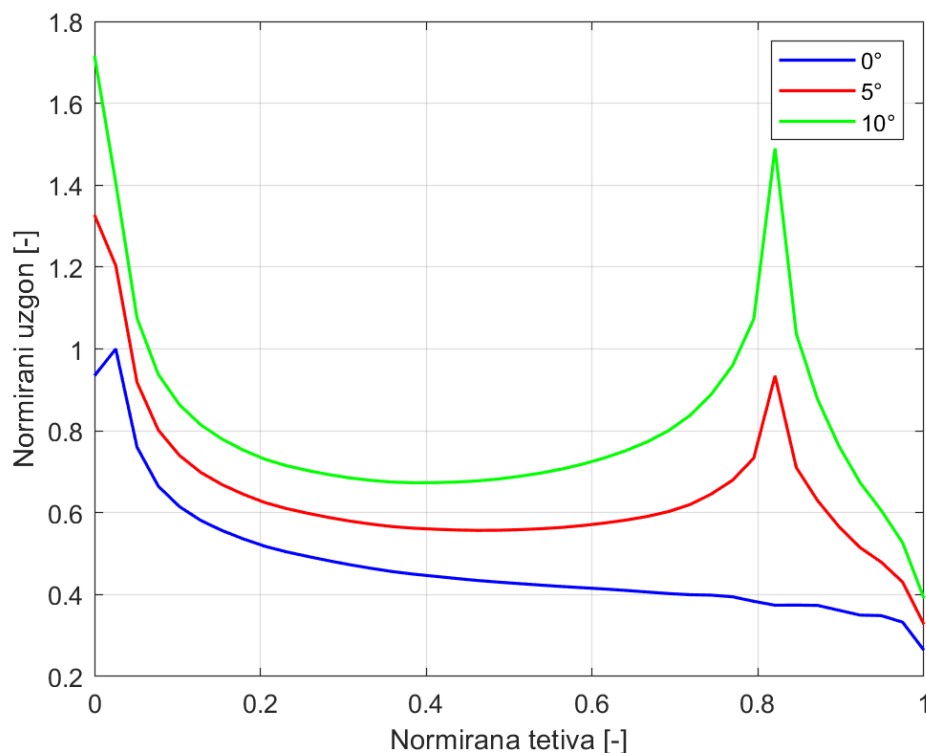
gdje  $i$  označava red panela gdje se nalazi tetiva. Normirana tetiva definirana je (4.2) dijeljenjem s ukupnom duljinom lokalne tetive  $c$ :

$$\bar{x} = \frac{x}{c}. \quad (4.2)$$

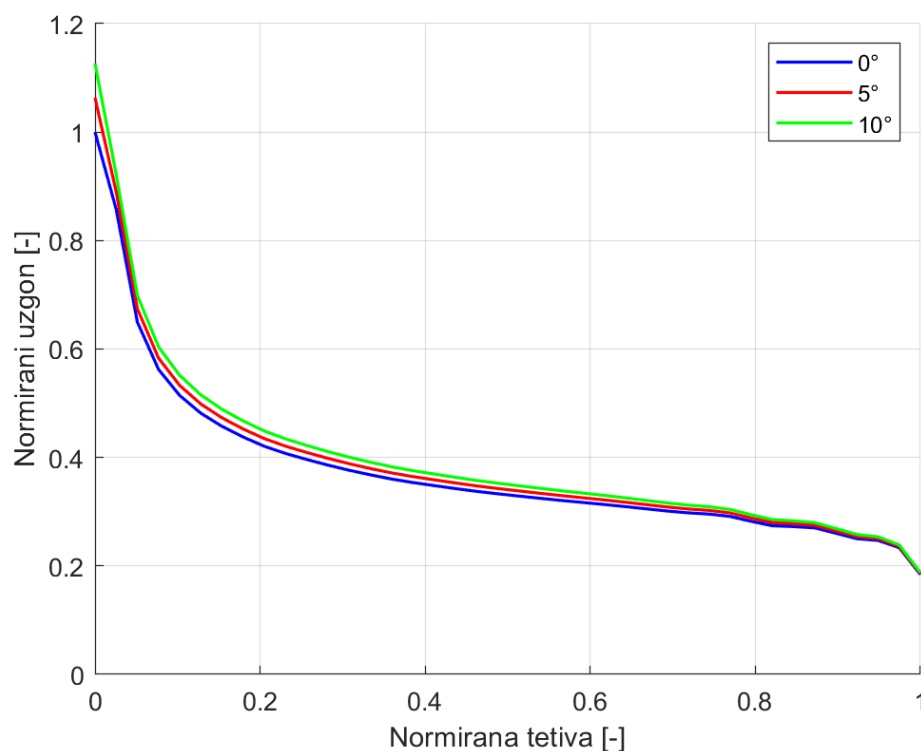
Ponovno vrijedi spomenuto, otklon krilaca prema dolje uzrokuje porast uzgona, a prema gore pad vrijednosti sile uzgona. Interesantno je promotriti i utjecaj krilca otklonjenog prema dole na raspodjelu uzgona po tetivi koja se nalazi na sredini lijevog krila (slika 31.). Povećanje otklona kontrolne površine uzrokuje lokalni porast vrijednosti uzgona.



**Slika 29. Raspodjela uzgona po tetivi na mjestu krilca otklonjenog prema gore**



**Slika 30. Raspodjela uzgona po tetivi na mjestu krilca otklonjenog prema dolje**



**Slika 31. Raspodjela uzgona po tetivi na sredini lijevog polukrila**

Zaključno, tablicom 5. moguće je prikazati i koeficijente momenata valjanja za sve tri prikazane konfiguracije:

**Tablica 5. Koeficijenti momenata valjanja**

Veličina	0°	5°	10°
$C_l [-]$	$-3.025 * 10^{-4}$	$-0.3029$	$-0.6056$

Vrijednost za koeficijent momenta valjanja  $C_l$  za konfiguraciju bez otklona krilaca ne iznosi očekivanih nula zbog odstupanja u točnosti programa, odnosno numerički predstavlja nulu.

## 5. ZAKLJUČAK

Kako je izloženo, u ovom radu prikazana implementacija metode vrtložne rešetke može se koristiti za proračun aerodinamičkih koeficijenata sile uzgona i induciranog otpora noseće površine proizvoljne geometrije. Pokazano je da se može valjano koristiti niz geometrijskih elemenata za izradu željene konfiguracije s izuzetkom diedarskog kuta.

Zbog prikaza raznolikosti programa, značajan dio rada zauzela je vizualizacija utjecaja otklona krilaca na raspodjelu uzgona po rasponu i po tetivama na odabranim mjestima.

Prije upotrebe programa potrebno je imati na umu mogućnosti ove metode s obzirom na ograničenja koja su navedena u ovom radu, a koja se temelje na teorijskim aspektima na kojima je metoda nastala. No, provedenom analizom i usporedbom s programom XFLR5, kao i prošlim radovima [6], ova implementacija metode pokazuje zadovoljavajuću točnost. Počevši od upravo navedene usporedbe, program je validiran s obzirom na odstupanje rezultata. Zatim, promjenom geometrije ili uvjeta strujanja dobivaju se rezultati koji su u skladu s očekivanjima. Na primjer, porastom vitkosti opada koeficijent induciranog otpora, a porastom napadnog kuta raste i koeficijent sile uzgona (za male vrijednosti kuta). Na kraju, zadovoljavajuća točnost se očituje i u očekivanim prikazima raspodjele uzgona po rasponu i tetivi za konfiguracije krila s otklonjenim upravljačkim površinama.

Stoga, metoda vrtložne rešetke se može koristiti bilo za razumijevanje uvođenja različitih geometrijskih elemenata i njihov utjecaj na vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata, bilo za preliminarni dizajn nosećih površina.

## 6. LITERATURA

- [1] Janković, S., Vrdoljak, M., Virag, Z.: Aerodinamika 1, skripta, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [2] Anderson, Jr. J. D.: Fundamentals of aerodynamics, Sixth edition, McGraw-Hill, 2017.
- [3] Katz, J., Plotkin, A.: Low-speed aerodynamics, Cambridge University Press, 2010.
- [4] Andrić, M.: Prošireni nestacionarni model aerodinamičke interferencije leta u formaciji, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2023.
- [5] Selig, M.: UIUC Airfoil Coordinates Database. [https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord\\_database.html](https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html), posjećeno, rujan 2024.
- [6] Mačak, J.: Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu jednostavne geometrije, Završni rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [7] EASA: Type-certificate sheet for DHC-8, No. EASA.IM.A.191, 2023.
- [8] Deperrois A. Xflr5. <http://www.xflr5.tech/xflr5.htm>, posjećeno, rujan 2024.