

# Robusno upravljanje dinamičkim sustavima promjenjivim s obzirom na parametre

---

**Periša, Bartol**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:352877>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-16**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Bartol Periša**

ZAGREB, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Vladimir Milić, mag. ing.

Student:

Bartol Periša

ZAGREB, 2024.

## IZJAVA

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.*

*Bartol Periša*

## ZAHVALA

*Zahvaljujem se svom mentoru izv. prof. dr. sc. Vladimiru Miliću što mi je omogućio da napišem ovaj rad i na danom povjerenju, te brojnim savjetima, strpljenju i posvećenom vremenu tokom mentorstva.*

*Prvenstveno zahvaljujem svojoj obitelji na neizmjernoj ljubavi i podršci koju sam imao priliku primiti.*

*Bartol Periša*



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 24 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 24 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Bartol Periša**

JMBAG: **0035237614**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Robusno upravljanje dinamičkim sustavima promjenjivim s obzirom na parametre**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Robust control of parameter-varying dynamical systems**

Opis zadatka:

Mnoga istraživanja u području teorije upravljanja bave se primjenama metoda sinteze regulatora linearnih sustava za upravljanje nelinearnim dinamičkim sustavima. Linearni sustavi promjenjivi s obzirom na parametre (eng. *Linear Parameter-Varying* – LPV) su proširenje linearnih sustava na nelinearne ili vremenski promjenjive sustave, u smislu da se vremenski promjenjivi mjerljivi parametri koji se nazivaju parametri rasporeda (eng. *scheduling parameters*) koriste za formiranje prostora stanja ovisnog o parametrima sustava. Široka klasa nelinearnih dinamičkih sustava može se transformirati u tzv. kvazi-LPV oblik, gdje parametri raspoređivanja mogu uključivati ulazne i izlazne varijable sustava, varijable stanja kao i vanjske signale sustava. Atraktivnost upravljanja LPV sustavima leži i u činjenici da su vrlo efikasni numerički algoritmi za rješavanje  $H_\infty$  problema primjenom linearnih matričnih nejednadžbi (eng. *Linear Matrix Inequalities* – LMI) implementirani u lako dostupne računalne alate.

U radu je potrebno:

1. Provesti teorijska razmatranja o sintezi robusnog zakona upravljanja linearnim sustavima promjenjivim u parametrima primjenom konveksne optimizacije i linearnih matričnih nejednadžbi.
2. Odabrati nelinearni dinamički sustav s najmanje tri stupnja slobode gibanja, na primjer robotski manipulator, te izvesti njegov matematički model primjenom Euler-Lagrangeovog formalizma.
3. Nelinearni matematički model sustava transformirati u odgovarajući linearni model koji će afino ovisiti o parametrima sustava.
4. Primjenom programskih paketa MATLAB i Yalmip, ili sličnih, provesti sintezu robusnog regulatora za automatsko upravljanje modelom lineariziranim s obzirom na parametre sustava.
5. Simulacijama na računalu primjenom programskog paketa MATLAB analizirati odzive odabranog dinamičkog sustava u zatvorenom krugu s projektiranim robusnim regulatorom. Dobivene odzive usporediti s odzivima koji se dobiju sa standardnim decentraliziranim PD regulatorom.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

24. 4. 2024.

**2. rok (izvanredni):** 11. 7. 2024.  
**3. rok:** 19. i 20. 9. 2024.

**2. rok (izvanredni):** 15. 7. 2024.  
**3. rok:** 23. 9. – 27. 9. 2024.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

izv. prof. dr. sc. Vladimir Milić

izv. prof. dr. sc. Petar Čurković

# Sadržaj

Sadržaj	i
Popis slika	iv
Popis tablica	v
Popis simbola	vi
Popis kratica	ix
Sažetak	x
Abstract	xi
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>I Teorijska razmatranja</b>	<b>3</b>
<b>2 Linearne matrične nejednadžbe</b>	<b>4</b>
2.1 Konveksna optimizacija . . . . .	5
2.1.1 Semidefinitno programiranje . . . . .	7
2.1.2 Elipsoid metoda . . . . .	7
2.1.3 Metoda unutarnje točke . . . . .	8
2.2 Ljapunov kriterij stabilnosti . . . . .	9
2.3 Analiza stabilnosti . . . . .	13
2.4 Sinteza regulatora stanja . . . . .	14
<b>3 <math>\mathcal{H}_\infty</math> metoda sinteze regulacijskog sustava</b>	<b>15</b>
3.1 Norme i prostori sustava . . . . .	15
3.2 $\mathcal{H}_\infty$ sinteza . . . . .	17
3.2.1 Sinteza regulatora stanja . . . . .	20
<b>4 Linearni sustavi promjenjivi s obzirom na parametre</b>	<b>22</b>
4.1 Matematička identifikacija linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre . . . . .	23
4.2 Sinteza regulatora linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre .	24

---

<b>II</b>	<b>Sinteza robusnog regulatora linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Matematičko modeliranje dinamičkog sustava</b>	<b>31</b>
5.1	Nelinearni model sustava . . . . .	32
5.2	Linearizacija dinamičkog modela s obzirom na parametre . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Simulacijski rezultati</b>	<b>45</b>
6.1	Parametrizacija sustava . . . . .	45
6.2	Decentralizirani PD regulator . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>62</b>
	<b>Literatura</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Vektorske i matrične norme</b>	<b>66</b>
A.1	Vektorske norme . . . . .	66
A.2	Matrične norme . . . . .	67
<b>B</b>	<b>MATLAB kodovi</b>	<b>68</b>

# Popis slika

3.1	$\mathcal{H}_\infty$ regulacijski problem. . . . .	20
5.1	Robot RRR strukture. . . . .	32
5.2	Shema istosmjernog motora nezavisne i konstantne uzbude. . . . .	37
6.1	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 1$ bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	46
6.2	Odziv i upravljačka varijabla sustava za $\gamma = 10$ bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	47
6.3	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 15$ bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	48
6.4	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 30$ bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	49
6.5	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 1$ uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	50
6.6	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 10$ uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	50
6.7	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 15$ uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	51
6.8	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\gamma = 30$ uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	51
6.9	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ , $\gamma = 15$ , bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	52
6.10	Odziv sustava i upravljačke varijable za $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ , $\gamma = 15$ , uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	53
6.11	Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice $\mathbf{A}$ . . . . .	53
6.12	Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice $\mathbf{A}$ za $\gamma = 30$ uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	54
6.13	Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice $\mathbf{A}$ , uz matrice $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ za $\gamma = 15$ , bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	55
6.14	Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice $\mathbf{A}$ , uz matrice $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ za $\gamma = 15$ , s poremećajem $\mathbf{w}$ . . . . .	56
6.15	Odziv sustava i upravljačke varijable za veće perturbacije parametara matrice $\mathbf{A}$ . . . . .	56
6.16	Odziv sustava i upravljačke varijable za veće perturbacije parametara matrice $\mathbf{A}$ uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	57
6.17	Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani PD regulator, bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	59
6.18	Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani PD regulator, uz poremećaj $\mathbf{w}$ . . . . .	59
6.19	Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani tzv. optimalni PD regulator, bez poremećaja $\mathbf{w}$ . . . . .	60



6.20 Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani tzv. optimalni PD regulator, uz poremećaj  $\mathbf{w}$ . . . . . 61

# Popis tablica

5.1	I. Dimenzijski parametri . . . . .	32
5.2	II. Dimenzijski parametri . . . . .	40
5.3	III. Dimenzijski parametri . . . . .	40
5.4	Parametri rasporeda . . . . .	41

# Popis simbola

$\mathbf{A}$	Matrica koeficijenata objekta upravljanja	
$\mathbf{A}_c$	Matrica koeficijenata dinamičkog regulatora	
$\mathbf{A}_T$	Matrica koeficijenata zatvorenog regulacijskog kruga	
$\mathbf{B}, \mathbf{B}_2$	Matrice ulaza	
$\mathbf{B}_1$	Matrica ulaza uz vektor egzogenih veličina	
$\mathbf{B}_c$	Matrica ulaza dinamičkog regulatora	
$\mathbf{B}_T$	Matrica ulaza zatvorenog regulacijskog kruga	
$\mathbf{C}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$	Matrice izlaza	
$\mathbf{C}(q, \dot{q})$	Matrica centrifugalnih i Coriolisovih sila sustava	J
$\mathbf{C}_c$	Matrica izlaza dinamičkog regulatora	
$\mathbf{C}_T$	Matrica izlaza zatvorenog regulacijskog kruga	
$\mathbf{D}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{22}$	Matrice prijenosa	
$\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{21}$	Matrice prijenosa uz vektor egzogenih veličina	
$\mathbf{D}_c$	Matrica prijenosa dinamičkog regulatora	
$\mathbf{D}_T$	Matrica prijenosa zatvorenog regulacijskog kruga	
$\mathbf{G}(q)$	Vektor gravitacijskih sila/momenata sustava ,	N · m
$\mathbf{G}(s)$	Matrica prijenosnih funkcija objekta upravljanja	
$\mathbf{H}(q)$	Matrica inercija sustava ,	N · m
$\mathbf{I}$	Jedinična matrica	
$\mathbf{K}$	Matrica pojačanja regulatora stanja	
$\mathbf{K}(s)$	Matrica prijenosa dinamičkog regulatora	

$\mathbf{K}_t$	Matrica momentnih konstanti motora	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$
$\mathbf{K}_v$	Matrica naponskih konstanti motora	$\text{V} \cdot \text{s}/\text{rad}$
$\mathbf{R}_a$	Matrica ukupnih armaturnih otpora armaturnih krugova motora	$\Omega$
$\mathbf{T}(s)$	Matrica prijenosnih funkcija zatvorenog regulacijskog kruga	
$\mathbf{u}$	Vektor upravljačkih varijabli, vektor uzbude	
$\mathbf{u}_a$	Vektor napona armatura motora	$\text{V}$
$\mathbf{w}$	Vektor egzogenih ulaza u objekt upravljanja	
$\mathbf{x}$	Vektor varijabli stanja	
$\mathbf{x}_0$	Vektor početnih stanja sustava	
$\mathbf{x}_e$	Vektor ravnotežnog stanja sustava	
$\mathbf{y}$	Vektor mjerenih izlaza iz objekta upravljanja	
$\mathbf{z}$	Vektor izlaznih signala iz objekta upravljanja	
$\mathcal{L}$	Lagrangian	$\text{J}$
$\boldsymbol{\tau}$	Vektor vanjskih generaliziranih sila/momenata aktuatora ,	$\text{N} \cdot \text{m}$
$f_0$	Funkcija cilja	
$f_i$	Funkcija ograničenja nejednakosti	
$g_i$	Funkcija ograničenja jednakosti	
$J_1$	Dinamički moment inercije prvog segmenta i baze s motorom	$\text{kg}/\text{m}^2$
$K_1, K_2, K_3$	Kinetičke energije segmenata	$\text{J}$
$L_1, L_2, L_3$	Duljine segmenata	$\text{m}$
$m_1, m_2, m_3$	Mase segmenata	$\text{kg}$
$N$	Prijenosni omjer	
$P_1, P_2, P_3$	Potencijalne energije segmenata	$\text{J}$
$q_i$	Općena koordinata i-tog segmenta	
$s$	Laplaceov operator	

$t$	Vrijeme	s
$V(\mathbf{x})$	Ljapunovljeva funkcija	J

**Konstante**

$g$	gravitacijsko ubrzanje	9,81 m/s <sup>2</sup>
-----	------------------------	-----------------------

**Grčka slova**

$\lambda$	Svojtvena vrijednost
$\phi$	Logaritamska barijera
$\rho$	Vektor parametara rasporeda

**Indeksi**

$(\cdot)^*$	Transponirana konjugirano kompleksna matrica
$(\cdot)^{-1}$	Inverzna matrica
$(\cdot)^T$	Transponirana matrica
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarni produkt
$\mathbb{R}$	Skup realnih brojeva
$\mathbb{R}^n$	n-dimenzionalni vektorski prostor
$\mathbb{R}_+$	Skup nenegativnih realnih brojeva
$\mathbb{Z}$	Skup cijelih brojeva
$\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_\infty$	Hardyevi prostori
$\mathcal{RH}_2$	Skup stabilnih pravilnih realnih racionalnih funkcija
$\mathcal{RH}_\infty$	Skup stabilnih striktno pravilnih realnih racionalnih funkcija
$\ \cdot\ _2$	$\mathcal{H}_\infty$ norma
$\ \cdot\ _\infty$	$\mathcal{L}_\infty$ , odnosno $\mathcal{H}_\infty$ norma
$\text{conv}( \cdot )$	Konveksna ljuska skupa $ \cdot $
$\sup\{ \cdot \}$	Najmanja gornja granica od $ \cdot $
$\text{trace}(\cdot)$	Trag matrice

# Popis kratica

**ARE** Algebraic Riccati Equation.

**DOF** Degree of Freedom.

**LDI** Linear Differential Inclusion.

**LMI** Linear Matrix Inequality.

**LPV** Linear Parameter-Varying.

**LQG** Linear Quadratic Gaussian.

**LTI** Linear Time Invariant.

**SDP** Semidefinite Programming.

# Sažetak

Tema ovog završnog rada je postupak sinteze robusnog regulatora linearnog sustava promjenjivog s ozbirom na parametre sustava, s naglaskom na rješavanje  $\mathcal{H}_\infty$  optimizacijskog problema uz pomoć linearnih matričnih nejednadžbi koje je moguće rješavati u lako dostupnim računalnim alatima poput MATLAB-a. Pritom se promatraju korišteni numerički algoritmi za rješavanje optimizacijskih problema poput metode unutarnje točke i elipsoid algoritma. Nastoje se spoznati temeljni kriteriji stabilnosti dinamičkih sustava zasnovani na direktnoj Ljapunovljevoj metodi, kao i njihova formulacija kroz linearne matrične nejednadžbe koristeći lemu ograničene realnosti. Iz dobivenog nelinearnog modela robotskog manipulatora cilj je uz linearizaciju takvog modela s ozbirom na parametre rasporeda sustava ostvariti sintezu robusnog regulatora danog sustava, s naglaskom na regulator stanja u povratnoj vezi zatvorene petlje. Simulacijski rezultati te rješavanje linearnih matričnih nejednadžbi provest će se uz pomoć programskih alata MATLAB i Yalmip s implementiranim SDPT3 solverom.

**Ključne riječi:** Robusno upravljanje, linearni sustavi promjenjivi s ozbirom na parametre,  $\mathcal{H}_\infty$  kriterij, linearne matrične nejednadžbe, Yalmip

# Abstract

This thesis presents the process of synthesizing a robust controller for a linear parameter-varying system, with a focus on solving the  $\mathcal{H}_\infty$  optimization problem using linear matrix inequalities that can be addressed through readily available computational tools such as MATLAB. The study will explore the numerical algorithms used to solve optimization problems, such as the interior-point method and the ellipsoid algorithm. Fundamental stability criteria for dynamic systems, based on the direct Lyapunov method, will be examined, along with their formulation through linear matrix inequalities using the bounded-real lemma. From obtained nonlinear model of a robotic manipulator, the goal is to synthesize a robust controller for the system by linearizing the model concerning the system's scheduling parameters, emphasizing state feedback control in a closed-loop configuration. Simulation results and the solution of linear matrix inequalities will be carried out using MATLAB and Yalmip, with the implementation of the SDPT3 solver.

**Keywords:** Robust control, linear parameter-varying systems,  $\mathcal{H}_\infty$  criterion, linear matrix inequalities



# 1 Uvod

Predmet razmatranja ovog završnog rada je robusno upravljanje linearnim sustavima promjenjivim s obzirom na parametre, gdje se pritom termin robusnosti odnosi na rješavanje  $\mathcal{H}_\infty$  problema upravljanja koristeći linearne matrične nejednadžbe. Danas je robusnost jedan od neizostavnih zahtjeva dinamičkih sustava, primarno jer ne postoji sustav koji čitav svoj radni vijek djeluje bez poremećaja, bilo vanjskih ili unutarnjih, koji bi utjecali na željeni odziv danog sustava, poput trenja između konstrukcijskih komponenti i temperaturnih promjena, što dovodi do perturbacija parametara rasporeda koji služe za formiranje prostora stanja ovisnog o parametrima sustava. Upotreba linearnih matričnih nejednadžbi svoju reputaciju dobiva razvitkom efikasnih numeričkih algoritama za rješavanje  $\mathcal{H}_\infty$  problema implementiranih u lako dostupne računalne alate, gdje se takav problem smatra optimizacijskim problemom koji se najčešće rješava metodama unutarnje točke.

U prvom se dijelu rada prolazi kroz temeljne matematičke koncepte i pojmove, počevši od analize linearnih matričnih nejednadžbi temeljenih na razvitku konveksnog programiranja koje predstavlja proširenje standardnog problema optimizacije temeljenog na principu da se željena funkcija cilja nastoji minimizirati s obzirom na postavljene funkcije ograničenja jednakosti i funkcije ograničenja nejednakosti. Primarna literatura koja prati danu tematiku je [1] i [2] gdje se također razmatraju metode unutarnje točke, Luré-ove metode, inverzni problem općeg upravljanja i više, kao i povijesni osvrt na razvoj područja konveksne optimizacije i teorije upravljanja. Nadalje, prolazi se kroz tematiku stabilnosti regulacijskih sustava prema Ljapunovu, gdje za stabilnost linearnih sustava trebaju biti ostvareni uvjeti da funkcija  $V(\mathbf{x})$  bude pozitivno definitna, te da derivacija spomenute funkcije,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  bude negativno definitna ili semidefinitna. Problem stabilnosti se dalje proširuje kroz primjenu linearnih matričnih nejednadžbi, čime se dolazi do optimizacijskog problema koji je moguće riješiti upotrebom lako dostupnih računalnih alata, kao što je MATLAB. Detaljniji pogled na aspekte stabilnosti dan je u [3] i [4]. Također, opisuje se primjena linearnih matričnih nejednadžbi u rješavanju  $\mathcal{H}_\infty$  problema, gdje  $\mathcal{H}_\infty$  norma prijenosne funkcije regulacijskog kruga mora biti manja od skalara  $\gamma$ . Spomenuta izlaganja na tematiku  $\mathcal{H}_\infty$  pratila su literaturu poput [5] i [6]. U završetku prvog dijela daje se osvrt na povijesni razvoj linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre, kao i njihova matematička identifikacija i sinteza regulatora nelinearnih sustava, te opis dinamičkog regulatora prema [7].

Kroz drugi dio završnog rada izvodi se nelinearni model robotskog manipulatora s tri stupnja slobode gibanja, polazeći od Lagrangiana koji je definiran kao razlika ukupne kinetičke i ukupne potencijalne energije dinamičkog sustava, iz kojeg se dobiva opći oblik rješenja Lagrangeove jednadžbe. Također je opisan uvod dinamike elektromotora u nelinearni model, koji se linearizira s obzirom na parametre rasporeda sustava, kao i matematički zapisi matrica sustava afino ovisnih o parametrima rasporeda. Za navedenu tematiku koristan je izvor [8]. Na temelju dobivenog linearnog modela prikazanog u prostoru stanja dobiveni su simulacijski rezultati putem programskih paketa MATLAB i Yalmip, koristeći SDPT3 solver [9]. Konačno, dobiveni simulacijski prikazi s korištenim regulatorom stanja uspoređuju se s prikazima dobivenim uz implementirani standardni decentralizirani PD regulator.

# Dio I

## Teorijska razmatranja

## 2 Linearne matrice nejednadžbe

Povijest linearnih matrice nejednadžbi (eng. *Linear Matrix Inequalities* - LMI) započinje 1890-ih godina, kada je Ljapunov u svojem radu svijet upoznao sa prvom matrice nejednadžbom,  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0$ , čije će se mogućnosti analize promatrati kasnije. Tijekom 1940-ih godina znanstvenici tadašnjeg Sovjetskog Saveza, Lur'ė, Postinkov i drugi, prvi su upotrijebili Ljapunove metode za rješavanje problema upravljanja nekog fizikalnog sustava, točnije problem stabilnosti regulacijskog sustava s nelinearnim aktuatorom.

Premda je kriterij stabilnosti imao oblik matrice nejednadžbe, formu LMI-a nikad nisu eksplicitno postavili. Kako računala još nisu imala mogućnost rješavati navedene nejednadžbe, one su se morale svesti na oblik polinomskih nejednadžbi kako bi se mogle riješiti analitički, što ih je ograničavalo na sustave nižeg reda. Već 1960-ih, znanstvenici Kalman, Popov i Yakubovich uspjeli su reducirati rješenja matrice nejednadžbi proizašlih iz Lur'ė-ovog problema koristeći lemu pozitivne realnosti (*Positive-Real lemma*). Iz toga su proizašli kriteriji poput Popovog kriterija stabilnosti, Tsyppkin kriterija i ostalih. Iako su dani kriteriji bili primjenjivi na sustave višeg reda, nije ih bilo moguće rabiti za sustave koji sadrže više od jedne nelinearnosti. Krajem 1960-ih, došlo se do spoznaje da se ista familija matrice nejednadžbi može riješiti pomoću algebarske Riccatieve jednadžbe (eng. *Algebraic Riccati Equation* - ARE). U [10] prvi se put spominje mogućnost upotrebe računalnih algoritama za rješavanje matrice nejednadžbi. Spoznaja da se linearne matrice nejednadžbe mogu rješavati putem računala kroz konveksno programiranje zbilja se ranih 1980-ih. Potaknuti time, metodu unutarnje točke (eng. *Interior-Point Method*) kasnih 1980-ih razvili su znanstvenici Nemirovskii i Nesterov. Daljnja izlaganja kroz ovo poglavlje slijede reference [1]-[3], te [10, 11, 12, 13, 14].

**Definicija 2.1** (*Linearna matrice nejednadžba*).

Linearna matrice nejednadžba definira se kao

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i > 0, \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  vektor rješenja, a  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  su simetrične matrice. Za oblik funkcije (2.1) kaže se da matrica  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  afino ovisi o vektoru  $\mathbf{x}$ . Znak nejednakosti vrijedi za pozitivno definitnu matricu  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Pritom je skup  $\{\mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0\}$  konveksan. ■

Skup linearnih matričnih nejednadžbi  $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x})$  moguće je zapisati u dijagonalnoj formi matrične nejednadžbe

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.2)$$

Za slučaj nelinearnih nejednadžbi koristi se Schur komplement koji ih transformira u formu linearnih matričnih nejednadžbi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{x}) &> 0, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T &> 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nejednadžbe (2.3) istovjetne su LMI formi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.4)$$

gdje  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$  i  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  afino ovise o vektoru rješenja  $\mathbf{x}$ .

## 2.1. Konveksna optimizacija

Konveksna optimizacija već je spomenuta kao neizostavan alat u rješavanju linearnih matričnih nejednadžbi. Promatra se kao proširenje standardnog problema optimizacije koji glasi

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_0(\mathbf{x}), \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdje je  $f_0(\mathbf{x})$  funkcija cilja,  $f_i(\mathbf{x})$  su funkcije ograničenja nejednakosti te  $g_i(\mathbf{x})$  funkcije ograničenja jednakosti. U problemu konveksne optimizacije oblika

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_0(\mathbf{x}), \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

ograničenja jednakosti za  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  su linearna, a skup  $f_0, f_1, \dots, f_m$  je konveksan za  $\theta \in [0, 1]$ , iz čega slijedi da za bilo koje točke  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  iz domene od  $f_i$  vrijedi Jensenova nejednakost

$$f_i(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y}) \leq \theta f_i(\mathbf{x}) + (1 - \theta)f_i(\mathbf{y}). \quad (2.7)$$

Time je također dokazana konveksnost funkcije ograničenja  $f_i$  ukoliko je domena funkcije  $f_i$  konveksna. Za (2.1) spomenut je konveksan skup  $\{\mathbf{x} : \mathbf{F}(x) > 0\}$ . Može se dokazati da za (2.1) vrijedi uvjet konveksnosti.

*Dokaz.* Matrične nejednadžbe za  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  glase

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{F}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i \mathbf{F}_i.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Evaluacijom jednadžbi dobiva se

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i(\theta\mathbf{x}_i + (1-\theta)\mathbf{y}_i) \\ &= \mathbf{F}_0 + \theta \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i + (1-\theta) \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{F}_0 + \theta(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_0) + (1-\theta)(\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}_0), \\ &= \mathbf{F}_0 + \theta\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \theta\mathbf{F}_0 + (1-\theta)\mathbf{F}(\mathbf{y}) - (1-\theta)\mathbf{F}_0, \\ &= \theta\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1-\theta)\mathbf{F}(\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Time je dokazan uvjet konveksnosti za linearne matrične nejednadžbe. Korisno je spomenuti još neke ključne pojmove često spominjane u kontekstu konveksne optimizacije.

**Definicija 2.2** (*Konveksni skup [1]*).

Za skup  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  kažemo da je konveksan ukoliko za bilo koje točke  $x, y \in Q$  i  $\theta \in [0, 1]$  vrijedi

$$\theta x + (1-\theta)y \in Q.\tag{2.10}$$

Kao rezultat, konveksni skup  $Q$  sadrži spojnicu proizvoljnih točaka  $x, y$  iz  $Q$ . ■

**Definicija 2.3** (*Konveksna ljuska [1]*).

Za  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ , konveksna ljuska skupa  $Q$  je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz  $Q$

$$\text{conv}(Q) = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_1, \dots, x_k \in Q, \theta_1, \dots, \theta_k \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \theta_i = 1\}.\tag{2.11}$$

Konveksna ljuska skupa  $Q$  je najmanji konveksni skup koji sadrži  $Q$ . ■

### 2.1.1 Semidefinitno programiranje

Već 90-ih godina znanstvenici Apkarian i Gahinet sveli su  $\mathcal{H}_\infty$  problem na problem semidefinitnog programiranja (eng. *Semidefinite Programming*), čime je bilo jasno da će semidefinitno programiranje predstavljati ključan alat za analizu te sintezu regulacijskih sustava. U formulaciji optimizacijskog problema, ograničenja će predstavljati linearne matrične nejednadžbe. Za slučaj sinteze LPV regulatora, optimizacijski problem bit će ovisan o parametrima sustava. Za rješavanje parametriziranih problema potrebno je pronaći neparametrizirani problem koji će sadržavati dovoljne uvjete prema parametriziranom problemu. Standardni prikaz semidefinitnog programa glasi

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

za  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ , a  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  je linearna matrična nejednadžba (2.1) uz afini oblik funkcije cilja. Parametrizirani semidefinitni program ima zapis

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{F}(\eta, \mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \eta \in \Gamma, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

gdje je općenito  $\eta \in \Gamma$  skup svih poremećaja sustava, ali u ovom slučaju predstavlja vektor parametara sustava  $\rho$ . U nastavku su definirane dvije ključne metode konveksne optimizacije, elipsoid metoda i metoda unutarnje točke.

### 2.1.2 Elipsoid metoda

Znanstvenici Nemirovski, Shor i Yudin su 1970-ih postavili početnu elipsoid metodu koju je već 1979. godine prilagodio američki matematičar Khachiyan [11], te time razvio prvi polinomski vremenski ovisan algoritam za rješavanje problema linearnog programiranja. Važnost metode bila je mogućnost određivanja izvedivosti jednadžbe unutar već određenog polinomnog broja iteracija. Iako je za teorijske svrhe, kao analizu kompleksnosti optimizacijskih problema, metoda bila superiorna, u praksi nije mogla konkurirati bržoj simpleks metodi.

**Definicija 2.4** (*Elipsoid metoda [2]*).

Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična, pozitivno semidefinitna matrica i  $a \in \mathbb{R}^n$ . Vrijedi

$$\varepsilon = \{z \mid (z - a)^T \mathbf{A}(z - a) \leq 1\}, \tag{2.14}$$

gdje je  $\varepsilon$  elipsoid sa središtem u  $a$ . Prilikom inicijalizacije algoritma, elipsoid koji

sigurno sadrži optimalnu točku glasi  $\varepsilon = \varepsilon^{(0)}$ , a središte elipsoida je  $a = x^{(0)}$ . Slijedi presjek elipsoida  $\varepsilon^{(0)}$  ravninom kroz središte  $x^{(0)}$  čime se dobiva

$$\varepsilon_{(p)} = \varepsilon^{(0)} \cap \{z \mid g^{(0)T}(z - x^{(0)}) \leq 0\}. \quad (2.15)$$

Vektor  $g^{(0)}$  definira smjer presjeka prema optimalnoj točki. Zatim se presjek elipsoida (2.15) obuhvaća elipsoidom  $\tilde{\varepsilon}$  minimalnog volumena

$$\tilde{\varepsilon} = \{z \mid (z - \tilde{a})^T \tilde{\mathbf{A}}(z - \tilde{a}) \leq 1\}, \quad (2.16)$$

gdje su

$$\tilde{a} = a - \frac{\mathbf{A}\tilde{g}}{m+1}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \frac{m^2}{m^2-1}(\mathbf{A} - \frac{2}{m+1}\mathbf{A}\tilde{g}\tilde{g}^T\mathbf{A}), \quad \tilde{g} = \frac{g}{\sqrt{g^T\mathbf{A}g}}. \quad (2.17)$$

Pritom navedeni izrazi vrijede samo za  $m \geq 2$ . Slijedi sažetak algoritma kojime se dolazi do traženog optimalnog rješenja.

*Iteracija kroz elipsoid algoritam.* Za  $k = 1, 2, \dots$  definira se presječna ravnina  $x^{(k)}$  s vektorom  $g^{(k)}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{g} &:= \frac{g^{(k)}}{\sqrt{g^{(k)T}\mathbf{A}^{(k)}g^{(k)}}}, \\ x^{(k+1)} &:= x^{(k)} - \frac{1}{m+1}\mathbf{A}^{(k)}\tilde{g}, \\ \mathbf{A}^{(k+1)} &:= \frac{m^2}{m^2-1}(\mathbf{A}^{(k)} - \frac{2}{m+1}\mathbf{A}^{(k)}\tilde{g}\tilde{g}^T\mathbf{A}^{(k)}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdje se volumen svakog idućeg elipsoida eksponencijalno smanjuje prema nejednadžbi

$$\mathbf{vol}(\varepsilon^{(k)}) \leq e^{\frac{-k}{2m}} \mathbf{vol}(\varepsilon^{(0)}). \quad (2.19)$$

■

### 2.1.3 Metoda unutarnje točke

Kao odgovor na tada nedostižnu simpleks metodu u pogledu performansi rješavanja samih algoritama, indijski matematičar Karmarkar je 1968. godine u [12] predstavio novi polinomski vremenski ovisan algoritam linearnog programiranja koji se s vremenom unaprijedio za širi spektar problema konveksne optimizacije poput kvadratnog programiranja i semidefinitnog programiranja. Prednost Karmarkarove metode bila je u tome da je zahtijevala manji broj iteracija za dostizanje optimalnog rješenja naspram simpleks metoda što se postizalo korištenjem projektne geometrije koja je drastično smanjila pojave numeričkih grešaka algoritma. Metode zasnovane na Karmarkovoj metodi nazivaju se metode unutarnje točke (eng. *Interior-Point Methods*) od kojih je



najkorištenija metoda barijere, preciznije logaritamska metoda barijere u obliku primalno-dualnog algoritma [13].

U metodi barijere, kao i u većini metoda unutarnje točke, koristi se Newtonova metoda za pronalazak smjera minimiziranja zbog svoje brze stope konvergencije. Prema [14], uzrok toga je to što Newtonova metoda eksplicitno koristi informaciju o drugoj derivaciji funkcije cilja iz Hessian matrice prilikom izračuna smjera minimiziranja. Kako se kroz rad protežu linearne matrične nejednadžbe, razmatrat će se metoda barijere uz ograničenja nejednakosti, odnosno problem optimizacije kao problem semidefinitnog programiranja. Ako se na (2.6) želi primijeniti Newtonova metoda, potrebno je konveksni problem s ograničenjima nejednakosti preoblikovati u konveksni problem sa ograničenjima jednakosti. To se postiže aproksimacijom preko logaritamske funkcije barijere čime se dobiva

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \left(-\frac{1}{t}\right) \log(-f_i(\mathbf{x})), \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdje se funkcija

$$\phi(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^m \log(-f_i(\mathbf{x})), \quad (2.21)$$

naziva logaritamska barijera ili log barijera (eng. *logarithmic barrier*) za (2.6). Ukoliko domena log barijere  $\phi(\mathbf{x})$  glasi  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}) < 0, i = 1, 2, \dots, m\}$  uz  $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , funkcija log barijere neprekidno raste. Što je  $t$  veći, izvedena aproksimacija je bolja. Sada semidefinitni problem glasi

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & c^T \mathbf{x} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \log(-f_i(\mathbf{x})), \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Izraz (2.22) je konveksan, a log barijera ostaje rastuća funkcija za gore dane uvjete. Korištenjem Newtonove metode, za početnu točku u  $t = 0$  je optimum barijere jednak optimalnom rješenju funkcije cilja, uz ograničenje jednakosti  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Kroz iteracije, izlazak točke optimuma  $x^*$  iz domene nije moguć, čime se definira centralni put [14] čija krajnja pozicija znači kraj iteracije, a time i konačnu vrijednost  $x^*$  za koju je izraz  $c^T \mathbf{x}$  minimiziran.

## 2.2. Ljapunov kriterij stabilnosti

Neosporivu važnost ima pojam stabilnosti regulacijskih sustava. Ukoliko se radi o nelinearnim sustavima koji po definiciji sadrže više ravnotežnih stanja, govori se o

*stabilnosti ravnotežnih stanja*. Za linearne sustave dovoljno je koristiti pojam *stabilnost sustava*. Ovdje će primarno biti naglasak na doktrini stabilnosti ruskog matematičara Aleksandra Mihailoviča Ljapunova. Njegova disertacija iz 1892. godine postavila je temeljni pristup analizi stabilnosti dinamičkih sustava. Razmatra se nepobudeni dinamički sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.23)$$

za  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  sa pobudom  $\mathbf{u}(t) = 0$ . Pritom je  $\mathbf{x}_e$  ravnotežno stanje sustava (2.23) ukoliko vrijedi  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) \equiv 0$ . Ravnotežno stanje  $\mathbf{x}_e$  je lokalno stabilno ako  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  uz početne uvjete u blizini  $\mathbf{x}_e$  ostaje u blizini ravnotežnog stanja, drugim riječima, sustav  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  tijekom vremena mijenja se s obzirom na stanja blizu ravnotežnog stanja  $\mathbf{x}_e$ . Asimptotska lokalna stabilnost ravnotežnog stanja vrijedi ako je zadovoljena lokalna stabilnost, uz dodatan uvjet da sustav  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  za stanja blizu  $\mathbf{x}_e$  nastavi težiti prema  $\mathbf{x}_e$  za  $t \rightarrow \infty$ .

**Definicija 2.5** (*Stabilnost u smislu Ljapunova [3]*).

Ravnotežno stanje  $\mathbf{x}_e$  sustava (2.23) u  $t = t_0$  stabilno je u smislu Ljapunova ako za bilo koji  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$  tako da je

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0. \quad (2.24)$$

Termin uniformne stabilnosti garantira očuvanje stabilnosti ravnotežnog stanja. ■

**Definicija 2.6** (*Asimptotska stabilnost u smislu Ljapunova [3]*).

Ravnotežno stanje  $\mathbf{x}_e$  sustava (2.23) za  $t = t_0$  asimptotski je stabilno u smislu Ljapunova ako i samo ako postoji  $\delta(t_0)$  za koji je

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0. \quad (2.25)$$

Pritom je uniformna asimptotska stabilnost ostvarena ako je ravnotežno stanje stabilno u smislu Ljapunova te ako postoji  $\delta$  neovisan o  $t_0$  za koji vrijedi (2.25). ■

Prema Ljapunovu postoje direktna i indirektna metoda utvrđivanja stabilnosti. Razmatrat će se samo direktna metoda gdje se stabilnost određuje prema brzini promjene energetske funkcije sustava, bez da se eksplicitno integrira (2.23). Pretpostavlja se autonomni<sup>1</sup> dinamički sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

<sup>1</sup>Vremenski invarijantan dinamički sustav bez pobude.

koji je opisan skalarnom Ljapunovljevom funkcijom više varijabli  $V(\mathbf{x})$ . Funkcija  $V(\mathbf{x})$  je *pozitivno definitna* ako ima kontinuirane parcijalne derivacije za  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i ako je

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0, & \text{za } \mathbf{x} \neq 0, \\ = 0, & \text{za } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

*Pozitivna semidefinitnost* ostvaruje se za uvjete iz (2.27), ali ako je  $V(\mathbf{x})$  jednaka nuli i za druge točke iz  $\mathbf{x}$  različite od nula.

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} \geq 0, & \text{za } \mathbf{x} \neq 0, \\ = 0, & \text{za } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Ukoliko je funkcija  $-V(\mathbf{x})$  pozitivno definitna, tada je  $V(\mathbf{x})$  *negativno definitna* funkcija, a ako je funkcija  $-V(\mathbf{x})$  pozitivno semidefinitna, tada je  $V(\mathbf{x})$  *negativno semidefinitna* funkcija. Postoji još slučaj *ndefinitne* funkcije, koji vrijedi kada  $V(\mathbf{x})$  za  $\mathbf{x}$  postigne pozitivne i negativne vrijednosti. Na temelju definitnosti funkcije  $V(\mathbf{x})$  može se zaključiti je li ravnotežno stanje globalno stabilno ili asimptotski globalno stabilno. Za pozitivno definitnu funkciju  $V(\mathbf{x})$  i negativno definitnu funkciju  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , gdje za  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  vrijedi  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , ravnotežno stanje je globalno asimptotski stabilno. Globalna stabilnost ravnotežnog stanja  $\mathbf{x}_e$  postiže se uz gornje uvjete, ali samo sa negativno semidefinitnom funkcijom  $\dot{V}(\mathbf{x})$ . Vrijedi promotriti slučaj kada  $V(\mathbf{x})$  glasi

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (2.29)$$

Funkcija (2.29) naziva se *kvadratna Ljapunovljeva funkcija* koja je pozitivno definitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti simetrične pozitivno definitne matrice  $\mathbf{P}$  pozitivne. Kvadratna forma funkcije  $V(\mathbf{x})$  posebno je važna u analizi stabilnosti LTI sustava zbog činjenice su i oni definirani kao kvadratične funkcije. Za LTI sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.30)$$

deriviranjem (2.29) dobiva se

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Konstatira se *Ljapunovljeva matrična jednadžba*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0, \quad (2.32)$$

za koju da bi linearni dinamički sustav bio globalno asimptotski stabilan, mora postojati simetrična pozitivno definitna matrica  $\mathbf{P}$  koja je rješenje jednadžbe (2.32) za izabranu pozitivno definitnu matricu  $\mathbf{Q}$ . Poznato je da uz početno definiranu matricu  $\mathbf{Q}$  eksplicitno rješenje jednadžbe (2.32) ima oblik

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} (e^{\mathbf{A}t})^T \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt. \quad (2.33)$$

Na stabilnost sustava može se gledati i na način da funkcija  $\dot{V}(\mathbf{x})$  mora biti negativno definitna za simetričnu pozitivno definitnu matricu  $\mathbf{Q}$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x}, \quad (2.34)$$

čime ujedno i vrijedi

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0. \quad (2.35)$$

Također, ako postoji simetrična pozitivno definitna matrica  $\mathbf{P}$  kvadratne Ljapunovljeve funkcije  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  za koju je zadovoljena kvadratna stabilnost dinamičkog sustava, može se uvesti *stupanj opadanja* (eng. *Decay rate*) [2] koji predstavlja najveći skalar  $\alpha$  linearnog sustava

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.36)$$

ako za sve trajektorije  $\mathbf{x}$  sustava (2.36) vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0. \quad (2.37)$$

Za odgovarajući  $\alpha$  zadovoljena je nejednadžba

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq -2\alpha V(\mathbf{x}), \quad (2.38)$$

koja ako vrijedi za sve trajektorije, ostvaruje uvjet

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0))e^{-2\alpha t}. \quad (2.39)$$

Iz (2.37) lako je zaključiti da je sustav stabilan za  $\alpha = 0$ .

Sustav (2.36) ujedno je linearna diferencijalna inkluzija<sup>2</sup> (eng. *Linear Differential Inclusion* - LDI) koja se često realizira kao PLDI (eng. *Polytopic LDI*), gdje uz matricu  $\mathbf{A}(t)$  kao konveksnu kombinaciju

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^L \theta_i \mathbf{A}_i(t), \quad \sum_{i=1}^L \theta_i = 1, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad (2.40)$$

---

<sup>2</sup>Diferencijalna inkluzija definira se kao  $\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$ , gdje ukoliko skup  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ima samo jedan element vrijedi diferencijalna jednadžba za npr. vremenski promjenjiv sustav,  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ .

vrijedi

$$\mathbf{A}(t) \in \text{conv}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_L\}, i = 1, \dots, L. \quad (2.41)$$

Skalar  $L$  maksimalan je broj vrhova politope određenom s (2.41), u čijim se vrhovima provjerava teže li trajektorije sustava prema nuli za  $t \rightarrow \infty$ . U nastavku slijedi analiza stabilnosti pomoću linearnih matričnih nejednadžbi.

## 2.3. Analiza stabilnosti

Težnja stabilnosti je težnja trajektorije prema nuli za  $t \rightarrow \infty$ , čime se osigurava stabilnost sustava. Promatra se oblik linearne diferencijalne inkluzije (2.30). Linearna matrična nejednadžba istovjetna (2.35) ima oblik

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.42)$$

Oblik nejednadžbe (2.42) samo je drugačiji zapis standardne LMI (2.1). Često se koristi i dualna forma nejednadžbe (2.42) koja se ostvaruje supstitucijom  $\mathbf{P} = \mathbf{Y}^{-1}$ . Isto se može postići množenjem gornje LMI s obje strane matricom  $\mathbf{P}^{-1}$ .

*Izvod dualne nejednadžbe.*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Y} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Y} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pritom matrica  $\mathbf{Y}$  zadržava ista svojstva kao matrica  $\mathbf{P}$ . Za slučaj politopske LDI, čiji je cilj osigurati što veću robusnost sustava s ozbirom na promjenjive parametre, LMI glasi

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, L, \quad (2.44)$$

gdje je  $L$  broj vrhova politope u kojima se provjerava konvergencija trajektorija sustava, a sami vrhovi određeni su konveksnom kombinacijom matrica  $\mathbf{A}_i$ . Usto se za politopsku LDI može zapisati LMI koji odgovara izrazu (2.38)

$$\mathbf{P} > 0, \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i + 2\alpha \mathbf{P} \leq 0, i = 1, 2, \dots, L. \quad (2.45)$$

Moguć je istovjetan prikaz u dualnom obliku

$$\mathbf{Y} > 0, \mathbf{Y} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{Y} + 2\alpha \mathbf{Y} \leq 0, i = 1, 2, \dots, L. \quad (2.46)$$

## 2.4. Sinteza regulatora stanja

U cilju postizanja željenih performansi te stabilnosti sustava, potrebno je provesti sintezu regulatora zatvorene petlje. Razmatra se sinteza regulatora linearne diferencijalne inkluzije oblika linearnog vremenski invarijantnog sustava. Za LTI sustav uz matricu prijenosa  $\mathbf{D} = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{2.47}$$

gdje su  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , u povratnu vezu zatvorenog sustava uvodi se regulator stanja

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x},\tag{2.48}$$

gdje matrica  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  predstavlja regulator stanja dinamičkog sustava. Time se matrica koeficijenata  $\mathbf{A}$  i matrica izlaza  $\mathbf{C}$  proširuju zbog uvođenja regulatora stanja, čime LMI (2.42) glasi

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \end{bmatrix} < 0.\tag{2.49}$$

Kako je u nejednadžbi (2.49) izraz drugog retka nelinearan, točnije bilinearan jer se nepoznanice  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{K}$  množe, potrebno je navedeni izraz putem metode supstitucije transformirati u linearnu matričnu nejednadžbu. Uvodi se supstitucija  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}$  i  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{Y}$  uz koju slijedi

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} < 0.$$

Nadalje, obje strane množe se sa  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}$  i dobiva se

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} < 0,$$

gdje se sada uvodi  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}$  i  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{Y}$ , usto vrijedi  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{F} < 0.$$

Time se bilinearna nejednadžba formirala u LMI

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Y} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{F} \end{bmatrix} < 0.\tag{2.50}$$

Sada je nepoznanice  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{P}$  moguće odrediti iz  $\mathbf{P} = \mathbf{Y}^{-1}$  i  $\mathbf{K} = \mathbf{F}\mathbf{Y}^{-1}$ . U slučaju politopskih LDI sustava lako je dokazivo da je izvod linearne matrične nejednadžbe isti, čime se konačno dobiva

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &> 0, \\ \mathbf{Y}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{F}^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i\mathbf{F} &\leq -2\alpha\mathbf{Y}, \quad i = 1, 2, \dots, L.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Isti bi se rezultati postigli izravnim korištenjem dualnih formi nejednadžbi, čime bi se donekle skratio njihov izvod.

# 3 $\mathcal{H}_\infty$ metoda sinteze regulacijskog sustava

Kroz naredno poglavlje objasniti će se  $\mathcal{H}_\infty$  metoda optimizacije koja se najčešće koristi kada je primarni zahtjev robusnost samog sustava. Pritom se ističu dva  $\mathcal{H}_\infty$  optimizacijska problema koja se mogu formulirati u semidefinitni problem [5], to su sinteza regulatora stanja i sinteza dinamičkog regulatora punog reda. Analizirat će se samo prvi problem, formuliran preko linearnih matričnih nejednadžbi. Oba problema riješili su matematičari Peterson i Doyle 1980-ih koristeći algebarske Riccatieve jednadžbe (eng. *Algebraic Riccati Equation* - ARE), dok su SDP forme oba problema numerički riješili matematičari Skelton i Iwasaki 1990-ih, više u [6]. Kako je potrebna dobra matematička podloga za razumijevanje  $\mathcal{H}_\infty$  metode optimiranja, u sljedećem će se poglavlju ukratko objasniti najkorištenije norme u teoriji automatske regulacije.

## 3.1. Norme i prostori sustava

U prilogu A navedene su osnovne formulacije normi, dok će ovdje veći fokus biti na vremenske i frekvencijske domene, točnije na funkcijske norme. Prvo će se definirati  $\mathcal{L}_2$  funkcijski prostor koji predstavlja beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor<sup>1</sup> ograničen na osi  $j\mathbb{R}$ . Pritom je skalarni produkt kompleksnog Hilbertovog prostora, za matrice  $\mathbf{G}, \mathbf{Z} \in \mathcal{L}_2$ , definiran kao

$$\langle \mathbf{G}(j\omega), \mathbf{Z}(j\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[\mathbf{G}(j\omega)^* \mathbf{Z}(j\omega)] d\omega, \quad (3.1)$$

gdje je  $\mathbf{G}(j\omega)^*$  transponirana konjugirano kompleksna matrica od  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Inducirana norma ulaznog signala, koja definira ukupnu energiju dane ulazne funkcije, tj. kompleksne matrične funkcije  $\mathbf{G}(j\omega)$ , glasi

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{G}, \mathbf{G} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[\mathbf{G}(j\omega)^* \mathbf{G}(j\omega)] d\omega}. \quad (3.2)$$

Vrijedi spomenuti i  $\mathcal{L}_2$  stabilnost, gdje za sustav (koji iz ulaznog signala konačne energije vraća izlazni signal konačne energije) koji je globalno asimptotski stabilan, vrijedi da je  $\mathcal{L}_2$  stabilan ukoliko nakon ograničenog vanjskog poremećaja (konačne

<sup>1</sup>Hilbertov prostor je prostor potpunog skalarnog produkta gdje je norma inducirana samim skalarnim produktom, a primjer konačno dimenzionalnog Hilbertovog prostora je  $\mathbb{R}^n$  sa standardnim skalarnim produktom.

energije) koji uzrokuje regulacijsku pogrešku ograničene energije, tijekom vremena konvergira natrag u ravnotežno stanje. U slučaju realnih konačno racionalnih matrica prijenosnih funkcija<sup>2</sup> bez polova na imaginarnoj osi ( $\text{Im} = 0$ ), govori se o podskupu  $\mathcal{L}_2$  prostora, oznake  $\mathcal{RL}_2$ . Slijedi definicija  $\mathcal{L}_\infty$  stabilnosti, za koju je sustav (ulaznog signala ograničene amplitude koji rezultira izlaznom signalu ograničene amplitude) koji je globalno asimptotski stabilan,  $\mathcal{L}_\infty$  stabilan ukoliko ograničeni vanjski poremećaj (permanentnog trajanja) koji uzrokuje regulacijsku pogrešku ograničene amplitude ne konvergira prema ravnotežnom stanju nakon izbacivanja iz ravnotežnog stanja. Ovakva se stabilnost još naziva BIBO (eng. *Bounded-Input-Bounded-Output* - BIBO) stabilnost. Norma  $\mathcal{L}_\infty$  prostora uvjetovana na  $j\mathbb{R}$  za matricnu funkciju  $\mathbf{G}(j\omega)$  je

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} |\mathbf{G}(j\omega)|, \quad (3.3)$$

gdje "sup" znači *supremum*, koji označava minimalnu gornju granicu za  $\omega \rightarrow \infty$ . Kao i za  $\mathcal{L}_2$  prostor,  $\mathcal{RL}_\infty$  definira se kao podprostor od  $\mathcal{L}_\infty$  koji obuhvaća sve realno racionalne pravilne matrice prijenosnih funkcija bez polova na imaginarnoj osi. Sada se konačno definiraju Hardyevi prostori,  $\mathcal{H}_2$  i  $\mathcal{H}_\infty$ . Hardyev  $\mathcal{H}_2$  prostor ograničava se na analitičke funkcije<sup>3</sup> za nenegativne realne vrijednosti kompleksne ravnine, te se definira kao podprostor od  $\mathcal{L}_2$ . Norma  $\mathcal{H}_2$  prostora matricne funkcije  $\mathbf{G}(j\omega)$  ima oblik [4]

$$\|\mathbf{G}(s)\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[\mathbf{G}(j\omega)^* \mathbf{G}(j\omega)] d\omega} < \infty, \quad (3.4)$$

gdje  $\mathbf{G}(j\omega)$  predstavlja transponiranu konjugirano kompleksnu matricu od  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Analogno prethodnim slučajevima, za realno racionalne pravilne matrice prijenosnih funkcija bez polova na imaginarnoj osi vrijedi podprostor od  $\mathcal{H}_2$  oznake  $\mathcal{RH}_2$ . Na red dolazi  $\mathcal{H}_\infty$  prostor koji je prostor svih analitičkih matricnih funkcija lijeve strane kompleksne ravnine ( $\text{Re} < 0$ ). Norma takvog prostora jednaka je najmanjoj gornjoj granici matricne funkcije  $\mathbf{G}(s)$

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |\mathbf{G}(j\omega)|. \quad (3.5)$$

Također,  $\mathcal{RH}_\infty$  je realni racionalni podprostor od  $\mathcal{H}_\infty$  koji obuhvaća sve realno racionalne pravilne matrice prijenosnih funkcija. Neka je sada definiran sustav s ulazom  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$  i izlazom  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ . Osobito važna relacija je da  $\mathcal{H}_\infty$  norma ujedno predstavlja maksimalno  $\mathcal{L}_2$  pojačanje definirane prijenosne funkcije  $\mathbf{G}(s)$  danog sustava. Koristeći Parsevalov teorem<sup>4</sup>, slijedi izvod relacije

<sup>2</sup>Red polinoma brojnika prijenosne funkcije manji je od reda polinoma nazivnika prijenosne funkcije.

<sup>3</sup>Analitičke funkcije su funkcije koje su diferencijabilne na čitavoj domeni te ih je moguće razviti u Taylorov red.

<sup>4</sup>Parsevalov teorem veza je između vremenske i frekvencijske domene prema izrazu:  $\int_0^{+\infty} \mathbf{f}(t)^* \mathbf{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(j\omega)^* \mathbf{f}(j\omega) d\omega$ .



Izvod ovisnosti  $\mathcal{H}_\infty$  norme i  $\mathcal{L}_2$  pojačanja.

$$\|\mathbf{z}\|_2 = \int_0^{+\infty} \mathbf{z}(t)^* \mathbf{z}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}(j\omega)^* \mathbf{z}(j\omega) d\omega. \quad (3.6)$$

Uzimajući u obzir prijenosnu funkciju sustava  $\mathbf{G}(j\omega) = \frac{\mathbf{z}(j\omega)}{\mathbf{w}(j\omega)}$ , slijedi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}(j\omega)^* \mathbf{z}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(j\omega)^* \mathbf{G}(j\omega)^* \mathbf{G}(j\omega) \mathbf{w}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(j\omega)^* \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2 \mathbf{w}(j\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jednadžba (3.7) sada se uspoređuje s najvećim  $\mathcal{L}_2$  pojačanjem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_2 &\leq \sup_{\omega} \{\|\mathbf{G}(j\omega)\|_2\} \|\mathbf{w}(j\omega)\|_2, \\ \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}(j\omega)\|_2} &\leq \sup_{\omega} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uočava se da je desna strana nejednakosti (3.8) zapravo  $\mathcal{H}_\infty$  norma prijenosne funkcije (3.5), čime se konačno dobiva

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left\{ \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}(j\omega)\|_2} \right\}. \quad (3.9)$$

Stoga, dovoljno je zadovoljiti stabilnost  $\mathcal{H}_\infty$  norme prijenosne funkcije kako bi se osigurao zahtjev robusnosti dinamičkog sustava.

## 3.2. $\mathcal{H}_\infty$ sinteza

Kada se pokazala veza između  $\mathcal{H}_\infty$  norme i maksimalnog  $\mathcal{L}_2$  pojačanja, slijedi formulacija problema  $\mathcal{H}_\infty$  optimiranja uz linearne matricne nejednadžbe, izražene kao problem semidefinitnog programiranja koji je moguće riješiti putem Yalmip-a realiziranog u MATLAB-u. Zapis u prostoru stanja za standardni dinamički sustav glasi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Prema [15], definira se kvadratna funkcija toka energije (eng. *quadratic supply function*) kao

$$\mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2, \quad (3.11)$$

gdje ako postoji kvadratna funkcija akumulirane energije (eng. *quadratic storage function*) tj. kvadratna Ljapunovljeva funkcija uz matricu  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  za koju je kvadratna

Ljapunovljeva funkcija pozitivno definitna, sustav je  $\mathcal{L}_2$  stabilan ako vrijedi nejednadžba

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \mathbf{z}^T \mathbf{z}, \quad \gamma \geq 0. \quad (3.12)$$

Integriranjem nejednadžbe (3.12) po vremenu od 0 do  $t$  dobiva se

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq \int_0^t (\gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \mathbf{z}^T \mathbf{z}) dt, \quad (3.13)$$

uz početni uvjet  $\mathbf{x}(0) = 0$  i  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$  konačno slijedi

$$\begin{aligned} \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 &\geq 0, \\ \gamma &\geq \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{w}\|}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Kako je prethodno pokazano,  $\mathcal{L}_2$  pojačanje jednako je  $\mathcal{H}_\infty$  normi prijenosne funkcije  $\mathbf{G}(s)$ , što je desna strana izraza (3.14). Također, uvrštavanjem jednadžbi prostora stanja (3.10) u deriviranu kvadratnu Ljapunovljevu funkciju

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}, \quad (3.15)$$

dobiva se

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{w})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Uvođenjem jednadžbe (3.16) u izraz (3.12), te uvrštavanjem izlaza  $\mathbf{z}$  prostora stanja (3.10) slijedi raspis

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{w} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \\ + (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T) (\mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{w}) &\leq 0, \\ \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{w} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \\ + \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{w} &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

nakon separacije varijabli

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C}] \mathbf{x} + \mathbf{x}^T [\mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}] \mathbf{w} + \\ + \mathbf{w}^T [\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C}] \mathbf{x} + \mathbf{w}^T [\mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I}] \mathbf{w} &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Matrični oblik nejednadžbe (3.18) glasi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.19)$$

iz čega proizlazi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.20)$$

Uz primjenu Schur komplementa, (2.3) i (2.4), nejednadžba (3.20) zapisuje se u matričnom obliku često viđenom u literaturi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.21)$$

Osobitu važnost prilikom  $\mathcal{H}_\infty$  sinteze uz linearne matrične nejednadžbe ima lema ograničene realnosti.

**Definicija 3.1** (*Lema ograničene realnosti*).

Za dinamički sustav (3.10) opisan prijenosnom funkcijom

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (3.22)$$

uz linearnu matričnu nejednadžbu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.23)$$

vrijede tvrdnje

- Postoji pozitivno definitna matrica  $\mathbf{P}$  kao rješenje (3.23),
- $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty < \gamma$  uz stabilnu matricu  $\mathbf{A} \rightarrow \text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})) < 0$ .

■

U kontekstu optimizacijskog problema semidefinitnog programiranja, interpretacija leme ograničene realnosti glasi

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \gamma, \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0, \mathbf{P} > 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Prema 3.1, nenegativni skalar  $\gamma$  treba biti veći od  $\mathcal{H}_\infty$  norme prijenosne funkcije  $\mathbf{G}(s)$ , što se dobiva Laplaceovom transformacijom sustava (3.10)

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{W}(s), \\ \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{W}(s). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Za početni uvjet  $\mathbf{X}(0) = 0$  slijedi

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W}(s), \quad (3.26)$$

a supstitucijom dobivene jednadžbe (3.26) u izlaz  $\mathbf{Z}(s)$ , dobiva se izlaz  $\mathbf{Z}(s)$  u formi

$$\mathbf{Z}(s) = \{\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\}\mathbf{W}(s), \quad (3.27)$$

Konačno, iz međusobnog omjera vektora izlaza  $\mathbf{Z}(s)$  i vektora ulaza  $\mathbf{W}(s)$  proizlazi matrica prijenosnih funkcija  $\mathbf{G}(s)$

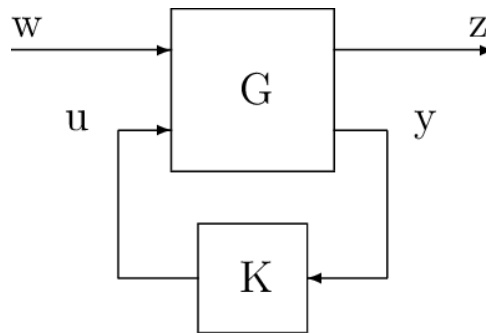
$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.28)$$

### 3.2.1 Sinteza regulatora stanja

Prethodno opisan sustav nije uključivao dinamiku regulatora izraženu preko matrice pojačanja regulatora stanja  $\mathbf{K}$ . Prema slici 3.1, potrebno je objekt upravljanja  $\mathbf{G}$  stabilizirati ulazom  $\mathbf{u}$  preko povratne veze

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}, \quad (3.29)$$

gdje  $\mathbf{y}$  predstavlja ulaz u regulator  $\mathbf{K}$ .



Slika 3.1:  $\mathcal{H}_\infty$  regulacijski problem [16].

Pritom vrijedi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

gdje objekt upravljanja  $\mathbf{G}$  u obliku prostora stanja glasi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Uvođenjem (3.29) u gornji izraz dobivaju se izrazi mjenog izlaza  $\mathbf{y}$  i vektora izlaza  $\mathbf{z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{G}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{u} = \mathbf{G}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{K}\mathbf{y}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{G}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{G}_{22}\mathbf{u} = \mathbf{G}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{G}_{22}\mathbf{K}\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

dodatnim uvrštavanjem  $\mathbf{y}$  u  $\mathbf{z}$  iz izraza (3.32) slijedi izlaz  $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}_{21}]\mathbf{w}. \quad (3.33)$$

Prijenosna funkcija objekta upravljanja glasi

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}_{21}. \quad (3.34)$$

Analogno prethodnom postupku, slijedi sinteza regulatora stanja za zakon upravljanja

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (3.35)$$

gdje se cilj dobiti matricu pojačanja regulatora stanja  $\mathbf{K}$  za koju će  $\mathcal{H}_\infty$  norma matrice prijenosnih funkcija biti manja od pozitivnog skalara  $\gamma$ . Za prostor stanja objekta upravljanja  $\mathbf{G}$  uvode se potrebne pretpostavke da su  $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_{22} = 0$  te  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{I}$ . Uvrštavanjem zakona upravljanja  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$  u prostor stanja (3.31) uz navedene pretpostavke slijedi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Analogno izvodu izraza (3.28) dobiva se matrica prijenosnih funkcija

$$\mathbf{T}(s) = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}. \quad (3.37)$$

Kako bi  $\mathcal{H}_\infty$  norma prijenosne funkcije  $\mathbf{T}(s)$  bila manja od  $\gamma$ , mora postojati matrica  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  koja zadovoljava matričnu nejednadžbu oblika

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}) & \mathbf{P}\mathbf{B}_1 & (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})^T \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.38)$$

što u literaturi najčešće poprima formu

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}) & \mathbf{B}_1 & (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})^T\mathbf{P} \\ \mathbf{B}_1^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{P}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K}) & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.39)$$

Kako bi se riješili problema bilinearnosti u  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{K}$ , uvodi se supstitucija varijabli  $\mathbf{P} = \mathbf{Y}^{-1}$  i  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{Y}$  iz čega slijedi LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.40)$$

Upotrebom numeričkih algoritama za rješavanje SDP problema, putem alata YALMIP, dobiva se tražena matrica  $\mathbf{P}$  i regulator stanja  $\mathbf{K} = \mathbf{F}\mathbf{P}$ , čime je  $\|\mathbf{T}(s)\|_\infty$  minimizirana.

## 4 Linearni sustavi promjenjivi s obzirom na parametre

Značajna očekivanja prema području automatske regulacije proizlaze iz činjenice da zahtjevi za energetskom isplativošću, kao i performansama rada industrijskih postrojenja postaju sve traženija. U svrhu ekonomske isplativosti, javlja se potreba zamjene postojećih sustava upravljanja sa novim rješenjima koja sadrže manji broj potrebnih aktuatora i senzora, ali uz uvjet iste ili čak bolje izvedbe. Kako bi se stalo u korak ovim izazovima, razvijena su dobro primjenjiva teoretska rješenja poput robusnog, optimalnog i nelinearnog pristupa upravljanju, čime se nastoje proširiti i nadograditi rezultati postignuti korištenjem linearnih vremenski - invarijantnih (eng. *Linear Time Invariant - LTI*) sustava, koji su često korišteni u području automatizacije. Iako su znanja dostupna, svakako je teško stvoriti novi, koherentni matematički opis, koji najčešće rezultira kompleksnim modelima dinamičkih sustava iz kojeg je potrebno zaključiti koji pokazatelji i učinci ostaju u modelu, te koji se iz modela eliminiraju. Također, veličine poput koeficijenata i faktora često su nepoznate, čime se javlja potreba provođenja eksperimenata za njihovo utvrđivanje.

Sredinom 20. stoljeća, točnije 1940-ih, istraživanja prema frekvencijskoj domeni potvrdila su efikasnost i performanse već spomenutih LTI sustava, ali zahtjevi za većom preciznošću i pouzdanošću doveli su do prihvaćanja spoznaje da većina dinamičkih sustava ima nelinearan karakter koji je vremenski promjenjiv, te da ih treba uzeti u obzir pri analizi matematičkog modela. Tijekom 1980-ih, iz činjenice da je u primjeni sama identifikacija i upravljanje nelinearnih sustava teško izvediva bez odgovarajuće strukture, potaknula su se svojevrsna istraživanja, koja su rezultirala spoznajom da se nelinearni sustavi mogu vrlo dobro aproksimirati s više LTI sustava u blizini odabrane radne točke.

Naime, tražilo se dodatno proširenje LTI sustava koje bi obuhvatilo nelinearne (NP) i vremenski - promjenjive (eng. *Time Variant - TV*) aspekte, što je rezultiralo razvitkom linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre (eng. *Linear Parameter-Varying - LPV*). Za opis jednog takvog sustava potrebno je za svaku radnu točku definirati LTI model, čime se linearizira nelinearni model. Za postizanje globalne stabilnosti stanja dinamičkog sustava vrši se interpolacija samih regulatora svake radne točke pomoću funkcije rasporeda (eng. *scheduling function*). Pritom „promjenjiv s obzirom na parametre” znači da su matrice sustava formiranog prostora stanja ovisne o vremenski promjenjivim mjerljivim parametrima zvanima *parametri rasporeda* (eng. *scheduling*

parameters). Značajni zamah LPV sustavi dobili su 1990-ih uvođenjem linearnih matričnih nejednadžbi (eng. *Linear Matrix Inequalities* - LMI) za rješavanje  $\mathcal{H}_\infty$  problema [17], a u zadnjih 20-ak godina takvi sustavi sve su češći u industriji sa sve širim poljem primjena.

U nastavku se razmatra identifikacija takvih sustava prateći [18], [7] i [19].

## 4.1. Matematička identifikacija linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre

**Definicija 4.1** (*Dinamički sustav promjenjiv s obzirom na parametre*).

Dinamički sustav  $\mathcal{S}$  promjenjiv s obzirom na parametre definira se kao

$$\mathcal{S} = (\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}), \quad (4.1)$$

gdje  $\mathbb{T}$  predstavlja skup definiran vremenskom varijablom, a obuhvaća kontinuirano vrijeme (eng. *Continuous Time* - CT),  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , te diskretno vrijeme (eng. *Discrete Time* - DT),  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ . Signalni prostor  $\mathbb{W}$  dimenzije  $n_{\mathbb{W}}$  definira raspon signala sustava, a  $\mathbb{P}$  dimenzije  $n_{\mathbb{P}}$  naziva se prostor rasporeda koji je najčešće zatvoren podskup vektorskog prostora na kojem variraju  $\rho \in \mathbb{P}^{\mathbb{T}}$ . Ponašanje sustava  $\mathfrak{B} \subseteq (\mathbb{W} \times \mathbb{P})^{\mathbb{T}}$  predstavlja prostor svih trajektorija parametara kompatibilnih sa sustavom. ■

Poznavanjem promatranog sustava može se zaključiti koje od trajektorija varijabli  $\rho$  je potrebno uključiti u novi podskup iz  $\mathbb{P}^{\mathbb{T}}$ , koji je opisan kao

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{P}} = \pi_{\rho}\mathfrak{B} = \{\rho \in \mathbb{P}^{\mathbb{T}} \mid \exists w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \text{ s.t. } (w, \rho) \in \mathfrak{B}\}, \quad (4.2)$$

gdje  $\pi_{\rho}$  označava preslikavanje u  $\mathbb{P}^{\mathbb{T}}$ , a  $\mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$ , preslikani raspored ponašanja sustava, opisuje sve izvedive trajektorije rasporeda iz  $\mathcal{S}$ . Za fiksno odabranu trajektoriju parametra  $\rho \in \mathfrak{B}_{\mathbb{P}}$  vrijedi preslikano ponašanje sustava

$$\mathfrak{B}_{\rho} = \{w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \mid (w, \rho) \in \mathfrak{B}\}, \quad (4.3)$$

koje definira sve trajektorije signala kompatibilne s odabranim fiksnim trajektorijama parametara rasporeda iz  $\rho$ . Ukoliko je trajektorija parametara iz  $\rho$  konstantna,  $\rho \in \mathfrak{B}_{\rho}$  uz  $\rho(t) = \rho$  za sve  $t \in \mathbb{T}$ , gdje je  $\rho \in \mathbb{P}$ , dobiva se stacionarno ponašanje sustava  $\mathfrak{B}_{\rho}$

$$\mathfrak{B}_{\rho} = \{w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \mid (w, \rho) \in \mathfrak{B} \text{ uz } \rho(t) = \rho, \forall t \in \mathbb{T}\}. \quad (4.4)$$

**Definicija 4.2** (*Stacionarni sustav*).

Neka je  $\mathcal{S} = (\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$  sustav promjenjiv s obzirom na parametre, gdje uz  $\mathfrak{B}_\rho$  za dani  $\rho \in \mathbb{P}$  vrijedi

$$\mathcal{F}_\rho = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}_\rho), \quad (4.5)$$

gdje je  $\mathcal{F}_\rho$  stacionarni sustav iz  $\mathcal{S}$ . ■

**Definicija 4.3** (*LPV sustav*).

Sustav  $\mathcal{S}$  promjenjiv s obzirom na parametre postaje linearan ukoliko su zadovoljeni uvjeti

- $\mathbb{T}$  je zatvoren skup nad zbrajanjem, što znači da ako se uzmu  $\{t_1, t_2\} \in \mathbb{T}$ , njihov zbroj  $t_1 + t_2$  također je element iz  $\mathbb{T}$ ,
- $\mathbb{W}$  je vektorski prostor, a  $\mathfrak{B}_\rho$  je linearni podprostor od  $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$  za sve  $\rho \in \mathfrak{B}_\rho$ ,
- Za izabrani  $(w, \rho) \in \mathfrak{B}$  i  $t \in \mathbb{T}$ , vrijedi  $(w(\cdot + t), \rho(\cdot + t)) \in \mathfrak{B}$ , što znači vremensku invarijantnost.

■

Za konstantnu trajektoriju parametra  $\rho \in \mathbb{P}$ , sustav (4.5) uz ispunjene uvjete iz 4.3 postaje LTI sustav, dok za  $\rho = \text{konst.}$  i preslikano ponašanje  $\mathfrak{B}$  dani LPV sustav  $\mathcal{S}$  definira skup LTI sustava.

**Definicija 4.4** (*Skup stacionarnih sustava*).

Skup LTI sustava za definirani LPV sustav  $\mathcal{S} = (\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$

$$\mathcal{F}_\mathcal{S} = \{\mathcal{F} = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B}) \mid \exists \rho \in \mathbb{P}\}, \quad (4.6)$$

naziva se skup stacionarnih sustava od  $\mathcal{S}$ . ■

## 4.2. Sinteza regulatora linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre

Regulator je ključna komponenta pri ispunjenju specifikacija i željenih performansi samog sustava, a najčešće je prisutan kod sustava povratne veze (eng. *feedback closed loop system*). Dinamika sustava izražena je preko običnih diferencijalnih jednadžbi (eng. *ordinary differential equations*), koje ujedno služe za realizaciju regulatora željenih zahtjeva. Model sustava nikada nije u potpunosti točan, stoga regulator mora moći



osigurati i nepredvidiva odstupanja u odnosu na izvedeni model, a da pritom performanse sustava ne variraju značajno. Tu dolazi pojam robusnosti, a time i robusno upravljanje. Ukoliko se na nelinearni karakter gleda kao na nesigurnosti sustava koje pritom nisu prevelike, moguće je izvesti sintezu robusnog, linearnog regulatora.

Za veći stupanj nelinearnosti potreban je nelinearni regulator, a *gain scheduling* princip to omogućuje, gdje se koristi teorija sinteze linearnog sustava za sintezu nelinearnih regulatora. Uvođenjem LPV sustava nije potrebno provoditi sintezu nelinearnog regulatora jer se, uz određene promjene, sinteza regulatora može provesti slično kao sinteza linearnog regulatora. Parametri često ovise o mjerenim signalima, a samim time i regulator o parametrima  $\rho$ . Nelinearni model formulira se LPV formom sustava [19], a ukoliko se parametri  $\rho$  smatraju internima, poput ulaznih i izlaznih varijabli sustava, vanjskih signala sustava, varijabli stanja, tada se govori o kvazi-LPV sustavu.

**Definicija 4.5 (Kvazi-LPV sustav).**

Dinamički sustav promjenjiv s obzirom na parametre,  $\mathcal{S} = (\mathbb{T}, \mathbb{P}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$ , s parametrima rasporeda  $\rho$  i signalima  $w$  smatra se kvazi-LPV sustavom ukoliko  $\mathfrak{B}_\rho$  nije linearni podprostor od  $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ , gdje  $\rho$  više nije slobodna varijabla. ■

Prema [7], *gain scheduling* postupak sinteze regulatora nelinearnih sustava definira se u tri koraka

- Formulacija LPV modela

Nelinearni model najčešće je preoblikovan u kvazi-LPV oblik, gdje pritom mora vrijediti veza između parametara i stanja sustava,  $\rho(t) = \sigma(\mathbf{x}(t)) \in \Omega$ . Time se izjednačuju trajektorije LPV sustava i nelinearnog sustava

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\sigma(x))\mathbf{x} + \mathbf{B}(\sigma(x))\mathbf{u}, \quad (4.7)$$

gdje je  $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektor varijabli stanja,  $\mathbf{A}(\rho) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  matrica koeficijenata te  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  parametar rasporeda sustava ograničen skupom  $\Omega$ . Čest je slučaj da  $\mathbf{A}(\rho)$  afino ovisi o parametrima sustava

$$\mathbf{A}(\rho) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \rho_i, \quad (4.8)$$

gdje ukoliko je skup  $\Omega$  definiran kao eng. *hypercube*,  $\Omega = \{\underline{\rho}_i \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i\}$ , afina ovisnost matrice  $\mathbf{A}(\rho)$  o parametrima prelazi u politopski (eng. *polytopic*) oblik

$$\mathbf{A}(\rho) = \sum_{i=1}^{2^p} \tilde{\mathbf{A}}_i \delta_i, \quad \sum_{i=1}^{2^p} \delta_i = 1, \quad \delta_i \geq 0, \quad (4.9)$$

sa vrijednostima  $\tilde{\mathbf{A}}_i$  dobivenima iz rubnih točaka  $\Omega$  iz (4.8). Pritom u (4.7),  $\sigma(\mathbf{x})$  mora biti poznat, čime je uspostavljena ovisnost regulatora samo o parametrima, točnije o mjerenim signalima. Također, za  $\sigma(\mathbf{x})$  uvjet je ovisnost samo o mjerenim signalima jer tada je moguće definirati nelinearni regulator iz sintezom dobivenog LPV regulatora. Pritom na čitavom rasponu vrijednosti  $\Omega$  nelinearni sustav i LPV sustav trebaju se opisom podudarati što je više moguće. Često korištena metoda u literaturi za pretvorbu nelinearnog sustava u LPV sustav je interpolacija stacionarnih linearnosti iz nelinearnog sustava (eng. *interpolation of stationary linearizations of the nonlinear system*).

Iz [7] slijedi da se dani nelinearni sustav  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  uz parametrizirane stacionarne točke  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$  transformira u LPV sustav

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\rho)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\rho)\delta\mathbf{u}(t), \quad (4.10)$$

gdje vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho) &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)\rho_i, \quad \mathbf{B}(\rho) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)\rho_i, \\ \sum_{i=1}^k \rho_i &= 1, \quad \rho_i \geq 0, \quad \delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}(\rho), \quad \delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}(\rho), \end{aligned} \quad (4.11)$$

a stacionarne točke su  $\{\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i\} = \{\mathbf{x}(\rho^i), \mathbf{u}(\rho^i)\}$ .

- Sinteza regulatora LPV sustava

Dobivenim LPV opisom nelinearnog sustava moguće je provesti sintezu regulatora. Pritom treba uzeti u obzir da se prilikom takve sinteze regulatora zanemaruju odnosi samih parametara sustava  $\rho$  sa stanjima, izlazima i ulazima sustava, čime je sinteza regulatora slična sintezi regulatora linearnih sustava. Dobiveni LPV opis promatra se kao linearna diferencijalna inkluzija. Takva ideja nije novost, devedesetih godina prošlog stoljeća u [20] razmatrala se stabilnost nelinearnih sustava koristeći LDI prikaz putem linearizacije nelinearnog sustava, te pojam globalne linearizacije (eng. *global linearization*) [21] za dobivanje željenog LDI opisa nelinearnog sustava.

**Definicija 4.6** (*Linearna diferencijalna inkluzija*).

Kada diferencijalne jednadžbe zbog nesigurnosti u sustavu nisu dovoljne za opis takvog fizikalnog sustava, često se u automatskoj regulaciji koriste diferencijalne inkluzije. Linearna diferencijalna inkluzija

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{M}\mathbf{x}(t), \quad (4.12)$$

za  $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  ima rješenje, a time i trajektoriju inkluzije  $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  koja

zadovoljava (4.12), a u slučaju politopskih diferencijalnih inkluzija vrijedi

$$\mathbf{M} = \text{conv}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k\}. \quad (4.13)$$

■

Prema [22] utvrđeno je sljedeće, da je LDI (4.12) slabo asimptotski stabilna ukoliko postoji barem jedna asimptotski stabilna trajektorija inkluzije, dok je strogo asimptotski stabilna ako su sve trajektorije inkluzije asimptotski stabilne. Za nelinearni sustav  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  pridružen (4.12)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (4.14)$$

svaka trajektorija nelinearnog sustava bit će ujedno i trajektorija dane LDI ako su ispunjeni uvjeti

$$\mathbf{f}(0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbf{M}\mathbf{x}. \quad (4.15)$$

Korištenjem LMI-a moguće je utvrditi strogu asimptotsku stabilnost diferencijalne inkluzije, a time i nelinearnog sustava, primjer je Ljapunovljeva matrična nejednadžba

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0, \quad (4.16)$$

gdje matrica  $\mathbf{P}$  mora biti pozitivno definitna da bi PLDI bila strogo asimptotski stabilna.

U slučaju  $\mathcal{H}_\infty$  sinteze regulatora LPV sustava, cilj je pronaći minimalno  $\mathcal{L}_2$  pojačanje sustava zatvorene petlje manje od pozitivne vrijednosti  $\gamma$ . Takvo pojačanje mora vrijediti za sve postojeće trajektorije parametara sustava,  $\rho \in \Omega$  te  $\dot{\rho} \in \tilde{\Omega}$ . Prilikom takve sinteze LPV sustava, posebni značaj ima lema ograničene realnosti (eng. *bounded-real lemma*) 3.1, koju je 1962. godine prvi postavio ruski znanstvenik V. A. Yakubovich, a kasnije i unaprijedio uz znanstvenike R. Kalmana i Popova, zbog čega se također naziva KYP lema. Za  $\mathcal{H}_\infty$  regulacijski problem, LPV sustav u prostoru stanja uz pretpostavku da je  $\mathbf{D}_{22} = 0$  glasi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\rho)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(\rho)\mathbf{w} + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{u}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1(\rho)\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}(\rho)\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2(\rho)\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}(\rho)\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

uz dinamiku LPV regulatora opisanu prostorom stanja oblika

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c(\rho)\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\rho)\mathbf{y}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c(\rho)\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c(\rho)\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Uzimajući u obzir povratnu vezu

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}, \quad (4.19)$$

prostori stanja objekta upravljanja  $\mathbf{G}(s)$  (4.17) i LPV regulatora (4.18) poprimaju formu

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) & \mathbf{B}_1(\rho) & \mathbf{B}_2(\rho) \\ \mathbf{C}_1(\rho) & \mathbf{D}_{11}(\rho) & \mathbf{D}_{12}(\rho) \\ \mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{21}(\rho) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c(\rho) & \mathbf{B}_c(\rho) \\ \mathbf{C}_c(\rho) & \mathbf{D}_c(\rho) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Matrica prijenosnih funkcija zatvorenog regulacijskog kruga je

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_T(\rho) & \mathbf{B}_T(\rho) \\ \mathbf{C}_T(\rho) & \mathbf{D}_T(\rho) \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_T(\rho) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{D}_c(\rho)\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{C}_c(\rho) \\ \mathbf{B}_c(\rho)\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{A}_c(\rho) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_T(\rho) &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\rho) + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{D}_c(\rho)\mathbf{D}_{21}(\rho) \\ \mathbf{B}_c(\rho)\mathbf{D}_{21}(\rho) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_T(\rho) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{D}_c(\rho)\mathbf{C}_2(\rho) & \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{C}_c(\rho) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_T(\rho) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}(\rho) + \mathbf{D}_{12}(\rho)\mathbf{D}_c(\rho)\mathbf{D}_{21}(\rho) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Zahtjev da  $\mathcal{L}_2$  pojačanje bude manje od pozitivnog skalara  $\gamma$  za  $\rho \in \Omega$  i  $\dot{\rho} \in \tilde{\Omega}$  vrijedi ukoliko postoji pozitivno definitna matrica  $\mathbf{P}(\rho)$  koja zadovoljava

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(\rho)\mathbf{A}_T(\rho) + \mathbf{A}_T^T(\rho)\mathbf{P}(\rho) + \frac{d}{dt}\mathbf{P}(\rho) & \mathbf{P}(\rho)\mathbf{B}_T(\rho) & \mathbf{C}_T^T(\rho) \\ \mathbf{B}_T^T(\rho)\mathbf{P}(\rho) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_T^T(\rho) \\ \mathbf{C}_T(\rho) & \mathbf{D}_T(\rho) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.23)$$

U slučaju da granice derivacija parametara  $\dot{\rho} \in \tilde{\Omega}$  nisu poznate, matrica  $\mathbf{P}(\rho)$  zamjenjuje se matričnom konstantom  $\mathbf{P}$  čime je derivacijski član  $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$  jednak nuli.

Druge metode poput LQG [23] i  $\mu$  - sinteze [24] također se mogu uzeti u obzir.

- Izvod nelinearnog regulatora

Poslije utvrđivanja postojanosti regulatora, ovisnosti parametara sustava o izlazima, ulazima i stanjima sustava ponovno vrijede. Time nelinearni regulator glasi

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{y}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{y}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Kako bi se u potpunosti osigurao iskaz da se izjednačuju trajektorije nelinearnog sustava i LPV sustava uz  $\rho = \sigma(\mathbf{x})$ , potrebno je pronaći valjani dio domene  $\rho \in \Omega$  za koji je dani iskaz ostvariv. Koristeći kvadratnu Ljapunovljevu funkciju nelinearnog zatvorenog regulacijskog kruga

$$\mathbf{V} = \mathbf{x}_T^T \mathbf{P}(\sigma(\mathbf{x})) \mathbf{x}_T,\tag{4.25}$$

gdje je

$$\mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix},\tag{4.26}$$

određuje se njena derivacija koja treba biti negativna za  $\sigma(\mathbf{x}) \in \Omega$  i  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}) \in \tilde{\Omega}$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{x}_T^T (\mathbf{A}_T^T(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{P}(\sigma(\mathbf{x})) + \mathbf{P}(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{A}_T(\sigma(\mathbf{x})) + \sum_i \frac{\partial \mathbf{P}(\sigma(\mathbf{x}))}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i(\mathbf{x})) \mathbf{x}_T.\tag{4.27}$$

Prema [25], dobiva se domena valjanosti (eng. *validity domain*)  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{V}(\mathbf{x}) \leq c\}$ , gdje je  $c$  odabran tako da vrijedi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{V}(\mathbf{x}) \leq c\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(\mathbf{x}) \in \Omega, \dot{\sigma}(\mathbf{x}) \in \tilde{\Omega}\}.\tag{4.28}$$

Prilikom izbora tražene domene, potrebno je promotriti ponašanje regulatora. Prilikom zahtjeva regulatora boljih performansi poput robusnosti i bržeg odziva, potrebno je imati širi raspon  $\dot{\rho} \in \tilde{\Omega}$  kako bi se održala domena valjanosti nelinearnog sustava zatvorene petlje.

## Dio II

# Sinteza robusnog regulatora linearnih sustava promjenjivih s obzirom na parametre

# 5 Matematičko modeliranje dinamičkog sustava

Matematički model dinamičkog sustava najčešće se opisuje diferencijalnim jednadžbama, koje nam daju informaciju kako ponašanje sustava varira tijekom vremena. Pritom se podrazumijeva da takav model nije u potpunosti vjeran jer ne može obuhvatiti svaku radnu točku u kojoj sustav djeluje. Ovdje će se razmatrati izvod matematičkog modela robotskog manipulatora s tri stupnja slobode gibanja<sup>1</sup> (eng. *Degree of Freedom* - DOF) putem Euler-Lagrangeovog formalizma koji proizlazi iz minimizacije funkcionala, tj. funkcije *akcije* sustava oblika

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (5.1)$$

gdje je  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  vektor upravljanih koordinata,  $\dot{q}$  derivirani vektor upravljanih koordinata, a  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$  predstavlja Lagrangian koji je jednak razlici kinetičke i potencijalne energije

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - P(q(t)). \quad (5.2)$$

Deriviranjem izraza (5.1) i njenim izjednačavanjem s nulom, dolazi se do Hamiltonianove zakonitosti [26], koja nalaže sljedeće

$$\partial S = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \text{ za } i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Jednadžba forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (5.4)$$

naziva se Euler-Lagrange jednadžba. Treba napomenuti da desna strana izraza (5.4) u općoj formi nije jednaka nuli, već varijabli  $\tau_i$  generaliziranih, vanjskih sila koje djeluju na promatrani sustav. Često se umjesto izraza (5.4), koji uglavnom služi da definiranje matematičkog modela fizikalnog sustava, koristi opći oblik rješenja Euler-Lagrange jednadžbe

$$\tau = \mathbf{G}(q) + \mathbf{H}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}, \quad (5.5)$$

gdje je  $\tau$  vektor vanjskih momenata/sila,  $\ddot{q}$  vektor ubrzanja upravljanih koordinata,  $\mathbf{G}(q)$  je vektor gravitacijskog utjecaja na sustav koja opisuje brzinu promjene potencijalne energije ovisno o upravljanoj koordinati,  $\frac{\partial P}{\partial q}$ ,  $\mathbf{H}(q)$  je matrica inercija koja mora biti simetrična, regularna matrica<sup>2</sup>, a  $\mathbf{C}(q, \dot{q})$  predstavlja matricu centrifugalnih i

<sup>1</sup>Stupanj slobode gibanja definiran je i jednak broju upravljanih koordinata  $q$  koje opisuju orijentaciju i položaj fizikalnog sustava u prostoru

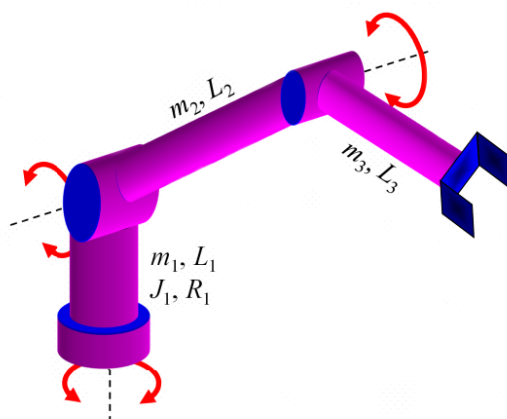
<sup>2</sup>Matrica je regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od nule,  $\det(\mathbf{H}) \neq 0$

Coriolisovih sila.

U nastavku slijedi izvod i opis nelinearnog modela robotskog manipulatora.

## 5.1. Nelinearni model sustava

Promatra se robotski manipulator s tri stupnja slobode gibanja, ili drugačije, robotski manipulator RRR strukture<sup>3</sup>. Čine ga tri uzdužna segmenta međusobno povezana trima zakretnim zglobovima prema slici 5.1, gdje su dimenzije robota prema [27] dane u tablici 5.1.



Slika 5.1: Robot RRR strukture<sup>4</sup>.

Tablica 5.1: I. Dimenzijski parametri

Parametar	Vrijednost	Parametar	Vrijednost
$J_1$	1.266 kgm <sup>2</sup>	$L_1$	0.60 m
$m_1$	13 kg	$L_2$	0.45 m
$m_2$	23.902 kg	$L_3$	0.45 m
$m_3$	1.285 kg		

Prvotno se definira vektor upravljanih koordinata,  $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ , gdje  $q_1$  predstavlja rotaciju prvog zgloba,  $q_2$  drugog zgloba te  $q_3$  trećeg zgloba. Kako bi se formiralo rješenje (5.5), prvo je potrebno definirati Lagrangian  $\mathcal{L}$  sustava, putem kojeg će se preko zakonitosti (5.4) za svaku pojedinu upravljaju koordinatu dobiti pripadajuća

<sup>3</sup>RRR struktura definirana je trima rotacijskim stupnjevima slobode gibanja

<sup>4</sup>Izvor slike: M. Crneković, Kolegij: Robotika, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2023.



komponenta  $\tau_i$ . Kako bi se pojednostavio raspis jednadžbi, uvode se oznake

$$\begin{aligned} s_i &= \sin q_i, \\ c_i &= \cos q_i, \\ s_{ij} &= \sin(q_i + q_j), \\ c_{ij} &= \cos(q_i + q_j). \end{aligned}$$

Za prvi segment,  $i = 1$ , duljine  $L_1$  i mase  $m_1$  slijede izrazi za kinetičku energiju i potencijalnu energiju.

$$K_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2, \quad (5.6)$$

$$P_1 = -m_1 g L_1 = \text{konst.} \quad (5.7)$$

Slijede kinetička energija i potencijalna energija drugog segmenta,  $i = 2$ , duljine  $L_2$  i mase  $m_2$

$$K_2 = \frac{1}{6} m_2 L_2^2 (\dot{q}_1^2 s_2^2 + \dot{q}_2^2), \quad (5.8)$$

$$P_2 = -m_2 g (L_1 + \frac{1}{2} L_2 c_2). \quad (5.9)$$

Još preostaje formulacija energija za  $i = 3$ , čime se dolazi do trećeg segmenta duljine  $L_3$  i mase  $m_3$  za koji slijedi

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{2} m_3 [(L_2^2 s_2^2 + L_2 L_3 s_2 s_{23} + \frac{1}{3} L_3^2 s_{23}^2) \dot{q}_1^2 + \\ &+ L_2 L_3 c_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \dot{q}_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{3} L_3^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$P_3 = -m_3 g (L_1 + L_2 c_2 + \frac{1}{2} L_3 c_{23}). \quad (5.11)$$

Sada je moguće dobiti ukupnu kinetičku i potencijalnu energiju sustava, a samim time i Lagrangian  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 + K_3 \\ &= \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 L_2^2 (\dot{q}_1^2 s_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 [(L_2^2 s_2^2 + L_2 L_3 s_2 s_{23} + \\ &+ \frac{1}{3} L_3^2 s_{23}^2) \dot{q}_1^2 + L_2 L_3 c_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \dot{q}_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{3} L_3^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2], \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= -m_1 g L_1 - m_2 g (L_1 + \frac{1}{2} L_2 c_2) - m_3 g (L_1 + L_2 c_2 + \frac{1}{2} L_3 c_{23}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lagrangian sada glasi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K - P \\ &= \dot{q}_1^2 [\frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{6} m_2 L_2^2 s_2^2 + \frac{1}{2} m_3 (L_2^2 s_2^2 + L_2 L_3 s_2 s_{23} + \frac{1}{3} L_3^2 s_{23}^2)] + \\ &+ \dot{q}_2^2 [\frac{1}{6} m_2 L_2^2 + \frac{1}{2} m_3 L_2^2] + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \frac{1}{6} m_3 L_3^2 + m_1 g L_1 + m_2 g (L_1 + \\ &+ \frac{1}{2} L_2 c_2) + \frac{1}{2} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 L_2 L_3 c_3 \dot{q}_2 + m_3 g (L_1 + L_2 c_2 + \frac{1}{2} L_3 c_{23}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Deriviranjem Lagrangiana  $\mathcal{L}$  po komponentama vektora upravljanih koordinata prema jednadžbi (5.4) uz postojanje vanjskih momenata/sila  $\tau_i$ , dobiva se

- za prvu upravljaju koordinatu  $q_1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 \left[ J_1 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 s_2^2 + m_3 (L_2^2 s_2^2 + L_2 L_3 s_2 s_{23} + \frac{1}{3} L_3^2 s_{23}^2) \right], \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \ddot{q}_1 \left[ J_1 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 s_2^2 + m_3 (L_2^2 s_2^2 + L_2 L_3 s_2 s_{23} + \frac{1}{3} L_3^2 s_{23}^2) \right] + \\ &+ \dot{q}_1 \left[ \frac{2}{3} m_2 L_2^2 s_2 c_2 \dot{q}_2 + m_3 (2 L_2^2 s_2 c_2 \dot{q}_2 + L_2 L_3 s_2 c_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \right. \\ &\left. + \dot{q}_3) + L_2 L_3 s_{23} c_2 \dot{q}_2 + \frac{2}{3} L_3^2 s_{23} c_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Time se dobiva prva komponenta  $\tau_1$  vektora  $\tau$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ &= \ddot{q}_1 \left[ J_1 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 s_2^2 + m_3 (L_2^2 s_2^2 + L_2 L_3 s_2 s_{23} + \frac{1}{3} L_3^2 s_{23}^2) \right] + \\ &+ \dot{q}_1 \left[ \frac{2}{3} m_2 L_2^2 s_2 c_2 \dot{q}_2 + m_3 (2 L_2^2 s_2 c_2 \dot{q}_2 + L_2 L_3 s_2 c_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \right. \\ &\left. + L_2 L_3 s_{23} c_2 \dot{q}_2 + \frac{2}{3} L_3^2 s_{23} c_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

- za drugu upravljaju koordinatu  $q_2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \frac{1}{2} L_2 L_3 m_3 c_3 + \dot{q}_2 \left( \frac{1}{3} L_2^2 m_2 + L_2^2 m_3 \right) + \quad (5.19)$$

$$+ (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \frac{1}{3} L_3^2 m_3 + \frac{1}{2} L_2 L_3 m_3 c_3 \dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \dot{q}_1^2 \left[ m_3 \left( \frac{1}{3} L_3^2 c_{23} s_{23} + L_2^2 c_2 s_2 + \frac{1}{2} L_2 L_3 c_{23} s_2 + \frac{1}{2} L_2 L_3 s_{23} c_2 \right) + \right. \quad (5.20)$$

$$\left. + \frac{1}{3} L_2^2 m_2 c_2 s_2 \right] - g \left[ m_3 \left( \frac{1}{2} L_3 s_{23} + L_2 s_2 \right) + \frac{1}{2} L_2 m_2 s_2 \right],$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \frac{1}{2} L_2 L_3 m_3 c_3 - (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \frac{1}{2} L_2 L_3 m_3 s_3 \dot{q}_3 + \ddot{q}_2 \left( \frac{1}{3} L_2^2 m_2 + \right. \quad (5.21)$$

$$\left. + L_2^2 m_3 \right) + (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \frac{1}{3} L_3^2 m_3 + L_2 L_3 \frac{1}{2} m_3 (-s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + c_3 \ddot{q}_2).$$

Sada se definira druga komponenta  $\tau_2$  vektora  $\tau$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \\ &= \ddot{q}_2 [m_3(L_2 L_3 c_3 + L_2^2 + \frac{1}{3} L_3^2) + \frac{1}{3} L_2^2 m_2] + \ddot{q}_3 m_3 (\frac{1}{2} L_2 L_3 c_3 + \\ &\quad + \frac{1}{3} L_3^2) - \dot{q}_2 \dot{q}_3 L_2 L_3 s_3 m_3 - \dot{q}_3^2 L_2 L_3 s_3 \frac{1}{2} m_3 - \dot{q}_1^2 [m_3 (\frac{1}{3} L_3^2 c_{23} s_{23} + \\ &\quad + L_2^2 c_2 s_2 + \frac{1}{2} L_2 L_3 (c_{23} s_2 + c_2 s_{23})) + \frac{1}{3} L_2^2 c_2 s_2 m_2] + \\ &\quad + g [m_3 (\frac{1}{2} L_3 s_{23} + L_2 s_2) + \frac{1}{2} L_2 m_2 s_2].\end{aligned}\tag{5.22}$$

- za treću upravljaju koordinatu  $q_3$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \frac{1}{3} m_3 L_3^2 + \frac{1}{2} L_2 L_3 c_3 \dot{q}_2 m_3\tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} &= \dot{q}_1^2 \frac{1}{2} m_3 (L_2 L_3 s_2 c_{23} + \frac{2}{3} L_3^2 s_{23} c_{23}) - g \frac{1}{2} m_3 L_3 s_{23} + \\ &\quad - \frac{1}{2} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 L_2 L_3 s_3 \dot{q}_2\end{aligned}\tag{5.24}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) = (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \frac{1}{3} m_3 L_3^2 + \frac{1}{2} L_2 L_3 m_3 (c_3 \ddot{q}_2 - s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3).\tag{5.25}$$

Slijedi treća komponenta  $\tau_3$  vektora  $\tau$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} \\ &= \ddot{q}_2 m_3 (\frac{1}{3} L_3^2 + \frac{1}{2} L_2 L_3 c_3) + \ddot{q}_3 \frac{1}{3} L_3^2 m_3 - \dot{q}_1^2 \frac{1}{2} m_3 (L_2 L_3 s_2 c_{23} + \\ &\quad + \frac{2}{3} L_3^2 s_{23} c_{23}) + \dot{q}_2^2 \frac{1}{2} L_2 L_3 s_3 m_3 + g \frac{1}{2} m_3 L_3 s_{23}.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Konačno se može postaviti jednadžba (5.5) s danim pripadajućim članovima

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix},\tag{5.27}$$

gdje treba napomenuti da vektor poremećaja  $\mathbf{w}$  nije bio uziman prilikom izvoda dinamičkog modela sustava, ali za formiranje prostora stanja će biti. Slijede formulacije pripadajućih matricejskih komponenti.

- za  $\mathbf{G}(q)$

$$\mathbf{G}_1 = 0$$

$$\mathbf{G}_2 = g[m_3(\frac{1}{2}L_3s_{23} + L_2s_2) + \frac{1}{2}L_2m_2s_2]$$

$$\mathbf{G}_3 = g\frac{1}{2}m_3L_3s_{23}$$

- za  $\mathbf{H}(q)$

$$\mathbf{H}_{12} = \mathbf{H}_{13} = \mathbf{H}_{21} = \mathbf{H}_{31} = 0$$

$$\mathbf{H}_{11} = J_1 + \frac{1}{3}m_2L_2^2s_2^2 + m_3(L_2^2s_2^2 + L_2L_3s_2s_{23} + \frac{1}{3}L_3^2s_{23}^2)$$

$$\mathbf{H}_{22} = m_3(L_2L_3c_3 + L_2^2 + \frac{1}{3}L_3^2) + \frac{1}{3}L_2^2m_2$$

$$\mathbf{H}_{23} = \mathbf{H}_{32} = m_3(\frac{1}{2}L_2L_3c_3 + \frac{1}{3}L_3^2)$$

$$\mathbf{H}_{33} = \frac{1}{3}L_3^2m_3$$

- za  $\mathbf{C}(q, \dot{q})$

$$\mathbf{C}_{11} = E_1\dot{q}_2$$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{33} = 0$$

$$\mathbf{C}_{13} = E_2\dot{q}_1$$

$$\mathbf{C}_{21} = E_3\dot{q}_1$$

$$\mathbf{C}_{22} = E_4\dot{q}_3$$

$$\mathbf{C}_{23} = E_5\dot{q}_3$$

$$\mathbf{C}_{31} = E_6\dot{q}_1$$

$$\mathbf{C}_{32} = E_7\dot{q}_2$$

gdje su

$$E_1 = \frac{2}{3}m_2L_2^2s_2c_2 + m_3(2L_2^2s_2c_2 + L_2L_3(s_2c_{23} + s_{23}c_2) + \frac{2}{3}L_3^2s_{23}c_{23})$$

$$E_2 = m_3(L_2L_3s_2c_{23} + \frac{2}{3}L_3^2s_{23}c_{23})$$

$$E_3 = -[m_3(\frac{1}{3}L_3^2c_{23}s_{23} + L_2^2c_2s_2 + \frac{1}{2}L_2L_3(c_{23}s_2 + c_2s_{23})) + \frac{1}{3}L_2^2c_2s_2m_2]$$

$$E_4 = -L_2L_3s_3m_3$$

$$E_5 = -L_2L_3s_3\frac{1}{2}m_3$$

$$E_6 = -\frac{1}{2}m_3(L_2L_3s_2c_{23} + \frac{2}{3}L_3^2s_{23}c_{23})$$

$$E_7 = \frac{1}{2}L_2L_3s_3m_3$$

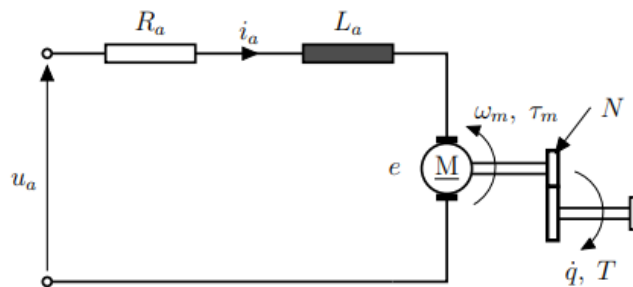
Uzimajući u obzir ulazne poremećaje  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , model sustava (5.5) glasi

$$\mathbf{G}(q) + \mathbf{H}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{w} = \tau, \quad (5.28)$$

Vektor  $\tau$ , odnosno vektor pobude  $\mathbf{u}(t)$  definirat će se putem dinamike elektromotora opisanog jednadžbom

$$u_a = e + R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt}, \quad (5.29)$$

gdje su  $u_a$  napon armature,  $i_a$  struja armature,  $L_a$  ukupni induktivitet armaturnog kruga,  $R_a$  ukupni radni otpor armaturnog kruga te  $e$  protuelektromotorna sila, što prikazuje slika 5.2.



Slika 5.2: Shema istosmjernog motora nezavisne i konstantne uzbude<sup>5</sup>.

Pritom vrijede relacije

$$\begin{aligned} e &= K_e \Phi_n \omega_m, \\ \tau_m &= K_t i_a, \end{aligned} \quad (5.30)$$

pri čemu su  $\Phi_n$  nazivna vrijednost glavnog magnetskog toka po pojedinom polu,  $K_e$  konstrukcijska konstanta motora,  $K_v$  naponska konstanta motora,  $K_t$  momentna konstanta motora i  $\omega_m$  mehanička brzina vrtnje. Uz prijenosni omjer  $N$  iz

$$\begin{aligned} T &= N \tau_m = N K_t i_a, \\ \omega_m &= N \dot{q}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

međusobnim se supstituiranjem izraza (5.29), (5.30) i (5.31) dobiva diferencijalna jednadžba

$$u_a = R_a i_a + K_v N \dot{q} + L_a \frac{di_a}{dt}, \quad (5.32)$$

gdje se uz zanemarivu vrijednost induktivnog člana jednadžbe (5.32) dobiva

$$u_a = R_a i_a + K_v N \dot{q}. \quad (5.33)$$

<sup>5</sup>Izvor slike: V. Milić, A. Jokić, Kolegij: Računalni alati, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2023.

Izraz (5.28) sada glasi

$$\mathbf{G}(q) + \mathbf{H}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{w} = \mathbf{N}\mathbf{K}_t\mathbf{i}_a, \quad (5.34)$$

odnosno

$$\mathbf{G}(q) + \mathbf{H}(q)\ddot{q} + [\mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{K}_t\mathbf{K}_v\mathbf{N}^2\mathbf{R}_a^{-1}]\dot{q} + \mathbf{w} = \mathbf{N}\mathbf{K}_t\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{u}_a. \quad (5.35)$$

Uz pomoć [8], odabrane su vrijednosti dijagonalnih matrica  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{K}_v$ ,  $\mathbf{K}_t$  i  $\mathbf{R}_a$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v &= \begin{bmatrix} 0.573 & 0 & 0 \\ 0 & 0.382 & 0 \\ 0 & 0 & 0.382 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_t &= \begin{bmatrix} 0.573 & 0 & 0 \\ 0 & 0.382 & 0 \\ 0 & 0 & 0.382 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, & \mathbf{R}_a &= \begin{bmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Prema [28] slijedi definicija prostora stanja danog nelinearnog dinamičkog sustava. Varijable stanja sustava su

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T, \\ \mathbf{x}_2 &= \dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T, \end{aligned} \quad (5.37)$$

što daje vektor varijabli stanja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Za sustav (5.35) vrijedi zapis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

što u prostoru stanja glasi

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{H}^{-1}(q) [\mathbf{G}(q) + [\mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{K}_t\mathbf{K}_v\mathbf{N}^2\mathbf{R}_a^{-1}]\dot{q} - \mathbf{N}\mathbf{K}_t\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{u}_a + \mathbf{w}] \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

U nastavku se razmatra linearizacija sustava (5.40).

## 5.2. Linearizacija dinamičkog modela s obzirom na parametre

Nelinearni matematički model sada je potrebno linearizirati oko određenog ravnotežnog stanja, gdje će pritom dinamika nelinearnog modela biti opisana samo u okolini tog ravnotežnog stanja, drugim riječima, linearni model bit će u mogućnosti opisati ponašanje nelinearnog sustava samo u definiranoj okolini oko ravnotežnog stanja, za koje vrijedi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) = 0. \quad (5.41)$$

Ravnotežno stanje vrijedi ukoliko su ostvarene vrijednosti  $\mathbf{x}_e$ ,  $\mathbf{w}_e$  i  $\mathbf{u}_e$ .

Linearni model dobiva se iz razvoja nelinearne funkcije u Taylorov red, pritom uzimajući u obzir samo članove parcijalnih derivacija prvog reda funkcije  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = & \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_e) + \\ & + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e) + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^n} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)^n + \\ & + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}^n} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_e)^n + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^n} \right|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e)^n. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ukoliko se u Taylorovom razvoju zanemari prvi član sume prema (5.41), te ako su sve potencije razlika  $\Delta \mathbf{x}$ ,  $\Delta \mathbf{w}$  i  $\Delta \mathbf{u}$  neznatne, linearni model sustava ima oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{A}(\rho)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(\rho)\mathbf{w} + \mathbf{B}_2(\rho)\mathbf{u}. \quad (5.43)$$

O parametrima ovisne matrice linearnog sustava (5.43) definiraju se kao Jacobianove matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \end{array} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e}, \\ \mathbf{B}_1(\rho) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{w}} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{w}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{w}} \end{array} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e}, \\ \mathbf{B}_2(\rho) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}} \end{array} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}_e, \mathbf{w}_e, \mathbf{u}_e}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

uz dimenzije  $\mathbf{A}(\rho) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $\mathbf{B}_1(\rho) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ ,  $\mathbf{B}_2(\rho) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ .

Iz (5.44) dobiveni su sljedeći oblici matrica sustava

$$\mathbf{A}(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{42}(\rho) & A_{43}(\rho) & A_{44}(\rho) & A_{45}(\rho) & A_{46}(\rho) \\ 0 & A_{52}(\rho) & A_{53}(\rho) & A_{54}(\rho) & A_{55}(\rho) & A_{56}(\rho) \\ 0 & A_{62}(\rho) & A_{63}(\rho) & A_{64}(\rho) & A_{65}(\rho) & A_{66}(\rho) \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{B}_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{1,41}(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,52}(\rho) & B_{1,53}(\rho) \\ 0 & B_{1,62}(\rho) & B_{1,63}(\rho) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{2,41}(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,52}(\rho) & B_{2,53}(\rho) \\ 0 & B_{2,62}(\rho) & B_{2,63}(\rho) \end{bmatrix}.$$

Time je definiran kvazi-LPV sustav 3-DOF robotskog manipulatora, gdje su vrijednosti potrebnih dimenzijskih parametara prikazane u tablici 5.2 i 5.3, te parametara rasporeda u tablici 5.4. Elementi matrica (5.45) afino ovisnih o parametrima sustava prikazani su u nastavku.

Tablica 5.2: II. Dimenzijski parametri

Parametar	Vrijednost	Parametar	Vrijednost	Parametar	Vrijednost
$b_1 = L_3^2 m_3$	0.2602	$b_6 = L_3$	0.45	$b_{11} = L_3 m_3 g$	5.6726
$b_2 = L_2^2 m_2$	4.8402	$b_7 = L_2$	0.45	$b_{12} = L_2 m_2 g$	105.5154
$b_3 = L_2^2 m_3$	0.2602	$b_8 = L_2^2 m_3^2$	0.3344	$b_{13} = L_2 m_3 g$	5.6726
$b_4 = L_2 L_3 m_3$	0.2602	$b_9 = m_3 b_2$	6.2197	$b_{14} = L_3^2 b_8$	0.0677

Tablica 5.3: III. Dimenzijski parametri

Parametar	Vrijednost	Parametar	Vrijednost
$b_5 = K_{t2} K_{v2} N_2^2 / R_{a2}$	27.3608	$b_{16} = K_{t3} N_3 / R_{a3}$	4.7750
$b_{10} = K_{t1} N_1 / R_{a1}$	3.7369	$b_{17} = K_{t3} K_{v3} N_3^2 / R_{a3}$	27.3608
$b_{15} = K_{t2} N_2 / R_{a2}$	4.7750	$b_{18} = K_{t1} K_{v1} N_1^2 / R_{a1}$	32.1191



Tablica 5.4: Parametri rasporeda

Parametar	Vrijednost	Parametar	Vrijednost
$\rho_1$	$\dot{q}_1$	$\rho_6$	$\cos(q_2)$
$\rho_2$	$\dot{q}_2$	$\rho_7$	$\cos(q_2 + q_3)$
$\rho_3$	$\dot{q}_3$	$\rho_8$	$\sin(q_3)$
$\rho_4$	$\sin(q_2)$	$\rho_9$	$\cos(q_3)$
$\rho_5$	$\sin(q_2 + q_3)$		

Nazivnici elemenata matrica u nastavku su

$$v_1 = 3J_1 + b_1\rho_5^2 + b_2\rho_4^2 + 3b_3\rho_4^2 + 3b_4\rho_4\rho_5,$$

$$v_2 = 4b_2 + 12b_3 - 9b_3\rho_9^2,$$

$$v_3 = L_3v_2,$$

$$v_4 = -9b_8\rho_9^2 + 12b_8 + 4b_9,$$

$$v_5 = L_3^2v_4.$$

Elementi matrice  $\mathbf{A}(\rho)$ :

$$\begin{aligned} A_{42}(\rho) = & -3(\rho_1\rho_2(\frac{2}{3}\rho_7^2b_1 - \frac{2}{3}\rho_5^2b_1 + 2\rho_6^2b_3 - 2b_3\rho_4^2 + 2b_4(\rho_7\rho_6 - \rho_5\rho_4) + \\ & + \frac{2}{3}b_2\rho_6^2 - \frac{2}{3}b_2\rho_4^2) + \rho_1\rho_3(\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + b_4\rho_6\rho_7 - b_4\rho_4\rho_5))/v_1 + \\ & - 3(w_1 - \rho_1(\rho_2(2b_3\rho_4\rho_6 + b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_5\rho_6) + \frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \frac{2}{3}b_2\rho_6\rho_4) + b_{18}) + \\ & + b_{10}u_{a1} - \rho_1\rho_3(\frac{2}{3}b_1\rho_7\rho_5 + b_4\rho_7\rho_4))(2b_2\rho_6\rho_4 + 6b_3\rho_6\rho_4 + 2b_1\rho_7\rho_5 + \\ & + 3b_4\rho_7\rho_4 + 3b_4\rho_5\rho_6)/v_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{43}(\rho) = & -3(\rho_1\rho_2(\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + b_4(\rho_7\rho_6 - \rho_5\rho_4)) - \rho_1\rho_3(-\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 + \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + \\ & + b_4\rho_5\rho_4))/v_1 - 3(2b_1\rho_7\rho_5 + 3b_4\rho_7\rho_4)(w_1 - \rho_1(\rho_2(2b_3\rho_6\rho_4 + b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_5\rho_6) + \\ & + \frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \frac{2}{3}b_2\rho_4\rho_6) + b_{18}) + b_{10}u_{a1} - \rho_1\rho_3(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + b_4\rho_4\rho_7))/v_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{44}(\rho) = & -3(\rho_2(2\rho_6\rho_4b_3 + b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_5\rho_6) + \frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \frac{2}{3}\rho_6\rho_4b_2) + \rho_3(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \\ & + b_4\rho_7\rho_4) + b_{18})/v_1 \end{aligned}$$

$$A_{45}(\rho) = -3\rho_1(2\rho_6\rho_4b_3 + b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_6\rho_5) + \frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \frac{2}{3}\rho_6\rho_4b_2)/v_1$$

$$A_{46}(\rho) = -3\rho_1(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \rho_7\rho_4b_4)/v_1$$

$$A_{52}(\rho) = 12(\rho_1^2(\frac{1}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{1}{3}b_1\rho_5^2 + b_3\rho_6^2 - b_3\rho_4^2 + b_4(\rho_7\rho_6 - \rho_4\rho_5) + \frac{1}{3}b_2\rho_6^2 + \\ - \frac{1}{3}b_2\rho_4^2) - \frac{1}{2}b_{12}\rho_6 - b_{13}\rho_6 - \frac{1}{2}\rho_7b_{11})/v_2 - 6(2b_6 + 3b_7\rho_9)(\frac{1}{2}\rho_1^2(\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 + \\ - \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + b_4\rho_6\rho_7 - b_4\rho_5\rho_4) - \frac{1}{2}\rho_7b_{11})/v_3$$

$$A_{53}(\rho) = 12(\rho_1^2(\frac{1}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{1}{3}b_1\rho_5^2 + \frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_6 - \rho_5\rho_4)) + \frac{1}{2}b_4\rho_9\rho_3^2 + \rho_2\rho_3\rho_9b_4 + \\ - \frac{1}{2}b_{11}\rho_7)/v_2 + 6(2b_6 + 3\rho_9b_7)(\frac{1}{2}\rho_1^2(-\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 + \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + b_4\rho_4\rho_5) + \\ + \frac{1}{2}b_4\rho_9\rho_2^2 + \frac{1}{2}\rho_7b_{11})/v_3 + 18\rho_8b_7(w_3 + \frac{1}{2}\rho_1^2(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + b_4\rho_4\rho_7) + \\ + b_{16}u_{a3} - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_2^2 - \rho_3b_{17})/v_3 - 216\rho_8\rho_9b_3(w_2 + \\ + \rho_1^2(\frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_5\rho_6) + \frac{1}{3}b_1\rho_5\rho_7 + b_3\rho_4\rho_6 + \frac{1}{3}b_2\rho_6\rho_4) - \frac{1}{2}\rho_4b_{12} + \\ - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - b_{13}\rho_4 - \rho_2(b_5 - b_4\rho_3\rho_8) + b_{15}u_{a2} + \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_3^2)/v_2^2 + \\ + 108\rho_8\rho_9b_3b_6(2b_7 + 3\rho_9b_6)(w_3 + \frac{1}{2}\rho_1^2(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + b_4\rho_4\rho_7) + b_{16}u_{a3} + \\ - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_2^2 - b_{17}\rho_3)/v_3^2$$

$$A_{54}(\rho) = 24\rho_1(\frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_6\rho_5) + \frac{1}{3}b_1\rho_7\rho_5 + b_3\rho_6\rho_4 + \frac{1}{3}b_2\rho_6\rho_4)/v_2 - 6\rho_1(2b_6 + \\ + 3\rho_9b_7)(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + b_4\rho_7\rho_4)/v_3$$

$$A_{55}(\rho) = 6b_4\rho_2\rho_8(2b_6 + 3\rho_9b_7)/v_3 - 12(b_5 - b_4\rho_3\rho_8)/v_2$$

$$A_{56}(\rho) = 12(b_4\rho_2\rho_8 + b_4\rho_3\rho_8)/v_2 + 6b_{17}(2b_6 + 3\rho_9b_7)/v_3$$

$$\begin{aligned}
A_{62}(\rho) = & 12\left(\frac{1}{2}\rho_1^2\left(\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + b_4\rho_6\rho_7 - b_4\rho_4\rho_5\right) - \frac{1}{2}b_{11}\rho_7\right)(b_2 + 3b_3 + b_1 + \\
& + 3b_4\rho_9)/v_5 - 6(\rho_1^2\left(\frac{1}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{1}{3}b_1\rho_5^2 + b_3\rho_6^2 - b_3\rho_4^2 + b_4(\rho_7\rho_6 + \right. \\
& \left. - \rho_4\rho_5) + \frac{1}{3}b_2\rho_6^2 - \frac{1}{3}b_2\rho_4^2\right) - \frac{1}{2}b_{12}\rho_6 - b_{13}\rho_6 - \frac{1}{2}b_{11}\rho_7)(2b_6 + 3\rho_9b_7)/v_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{63}(\rho) = & 18\rho_8b_7(w_2 + \rho_1^2\left(\frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_6\rho_5) + \frac{1}{3}b_1\rho_7\rho_5 + b_3\rho_4\rho_6 + \frac{1}{3}b_2\rho_4\rho_6\right) + \\
& - \frac{1}{2}b_{12}\rho_4 - b_{13}\rho_4 - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - \rho_2(b_5 - b_4\rho_3\rho_8) + b_{15}u_{a2} + \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_3^2)/v_3 + \\
& - 12\left(\frac{1}{2}\rho_1^2\left(-\frac{2}{3}b_1\rho_7^2 + \frac{2}{3}b_1\rho_5^2 + b_4\rho_4\rho_5\right) + \frac{1}{2}b_4\rho_9\rho_2^2 + \frac{1}{2}b_{11}\rho_7\right)(b_2 + \\
& + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)/v_5 - 6(2b_6 + 3b_7\rho_9)(\rho_1^2\left(\frac{1}{3}b_1\rho_7^2 - \frac{1}{3}b_1\rho_5^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_6 - \rho_4\rho_5)\right) + \frac{1}{2}b_4\rho_9\rho_3^2 + b_4\rho_2\rho_3\rho_9 - \frac{1}{2}b_{11}\rho_9)/v_2 - 36b_4\rho_8(w_3 + \\
& + \frac{1}{2}\rho_1^2\left(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + b_4\rho_4\rho_7\right) + b_{16}u_{a3} - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_2^2 - b_{17}\rho_3)/v_5 + \\
& + 108b_3b_6\rho_9\rho_8(2b_6 + 3b_7\rho_9)(w_2 + \rho_1^2\left(\frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_6\rho_5) + \frac{1}{3}b_1\rho_7\rho_5 + \right. \\
& \left. + b_3\rho_4\rho_6 + \frac{1}{3}b_2\rho_4\rho_6\right) - \frac{1}{2}b_{12}\rho_4 - b_{13}\rho_4 - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - \rho_2(b_5 - b_4\rho_3\rho_8) + \\
& + b_{15}u_{a2} + \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_3^2)/v_3^2 - 216b_{15}\rho_9\rho_8(b_2 + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)(w_3 + \\
& + \frac{1}{2}\rho_1^2\left(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + b_4\rho_4\rho_7\right) + b_{16}u_{a3} - \frac{1}{2}b_{11}\rho_5 - \frac{1}{2}b_4\rho_8\rho_2^2 - b_{17}\rho_3)/v_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{64}(\rho) = & 12\rho_1\left(\frac{2}{3}\rho_7\rho_5b_1 + \rho_7\rho_4b_4\right)(b_2 + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)/v_5 - 12\rho_1(2b_6 + \\
& + 3\rho_9b_7)\left(\frac{1}{2}b_4(\rho_7\rho_4 + \rho_5\rho_6) + \frac{1}{3}b_1\rho_7\rho_5 + b_3\rho_4\rho_6 + \frac{1}{3}b_2\rho_4\rho_6\right)/v_3
\end{aligned}$$

$$A_{65}(\rho) = 6(b_5 - b_4\rho_3\rho_8)(2b_6 + 3\rho_9b_7)/v_3 - 12b_4\rho_2\rho_8(b_2 + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)/v_5$$

$$A_{66}(\rho) = -6(2b_6 + 3b_7\rho_9)(b_4\rho_2\rho_8 + b_4\rho_3\rho_8)/v_3 - 12b_{17}(b_2 + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)/v_5$$

Elementi matrice  $\mathbf{B}_1(\rho)$ :

$$B_{1,41}(\rho) = -3/v_1$$

$$B_{1,52}(\rho) = -12/v_2$$

$$B_{1,53}(\rho) = 6(2b_6 + 3\rho_9 b_7)/v_3$$

$$B_{1,62}(\rho) = B_{1,53}(\rho)$$

$$B_{1,63}(\rho) = -12(b_2 + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)/v_5$$

Elementi matrice  $\mathbf{B}_2(\rho)$ :

$$B_{2,41}(\rho) = 3b_{10}/v_1$$

$$B_{2,52}(\rho) = 12b_{15}/v_2$$

$$B_{2,53}(\rho) = -6b_{16}(2b_6 + 3\rho_9 b_7)/v_3$$

$$B_{2,62}(\rho) = -6b_{15}(2b_6 + 3\rho_9 b_7)/v_3$$

$$B_{2,63}(\rho) = 12b_{16}(b_2 + 3b_3 + b_1 + 3b_4\rho_9)/v_5$$

## 6 Simulacijski rezultati

U narednom se poglavlju provodi sinteza robusnog regulatora modela lineariziranog s obzirom na parametre sustava koristeći programske pakete MATLAB i Yalmip, uz pomoć [29] i [30]. Prilikom upotrebe Yalmip paketa postoji mogućnost odabira *solvera* optimizacijskog problema, u ovom slučaju odabran je lako dostupan i besplatan solver SDPT3 [9]. Glavni je cilj razmatranje odziva linearnog sustava u slučaju perturbacija određenih parametara rasporeda matrice koeficijenata  $\mathbf{A}(\rho)$ , te stabilnost sustava uz uvedeni regulator stanja, gdje svojstvene vrijednosti proširene matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  moraju imati negativne realne dijelove, čime su smještene na lijevoj strani kompleksne ravnine. Također, mora biti zadovoljena  $\mathcal{H}_\infty$  norma prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga za dobiveni skalar  $\gamma$ .

Uzimajući u obzir LMI (3.40), promatrat će se i slučaj uvođenja težinskih matrica i  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora, kao i usporedba s odzivima sustava uz prisustvo poremećaja  $\mathbf{w}$  i odzivima dobivenima uz standardni decentralizirani PD regulator, o tome u nastavku.

### 6.1. Parametrizacija sustava

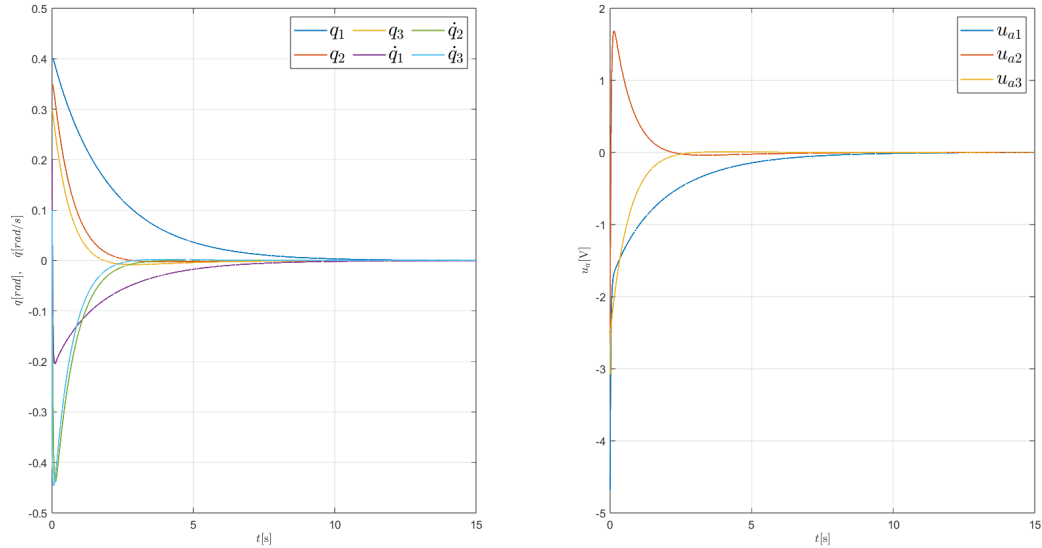
Da bi se provele željene simulacije prilikom uvođenja regulatora stanja, potrebno je prvenstveno parametrizirati matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$ , što je istovjetno zapisu navedenih matrica u afinoj ovisnosti o parametrima rasporeda sustava (4.8). Isto je potrebno napraviti i za matrice regulatora  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{F}$  iz kojih se dobiva matrica pojačanja  $\mathbf{K}$ .

Kako je ovakav pristup potpune parametrizacije sustava visoke kompleksnosti, s trenutno dostupnim softverom i hardverom optimizacijski problem dane forme nije bilo moguće riješiti, zbog čega su uvedena pojednostavljena gdje su matrice  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$  konstante. U prilogu B nalaze se MATLAB kodovi, uključujući i kod za slučaj potpune parametrizacije sustava, gdje su se pritom elementi matrice  $\mathbf{A}$  proglasili parametrima  $\theta$ .

Odabrane vrijednosti elemenata matrica  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$  su

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 3.9062 & -10.1562 \\ 0 & -10.1562 & 33.0729 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & -6.3948 & 2.5847 \\ 0 & -5.4837 & 14.4854 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Korištenjem MATLAB-ove funkcije `ode45()`, slijedi prikaz dobivenih simulacijskih rezultata za slučaj kada je samo matrica  $\mathbf{A}$  parametrizirana, a matrice  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{F}$  su definirane kao Yalmip varijable. Slika 6.1 prikazuje odziv i upravljačku varijablu sustava za dobiveni  $\gamma$  iz (3.40), ne uzimajući u obzir poremećaje i druge modifikacije sustava.



Slika 6.1: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 1$  bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Dobiveni su matrica pojačanja  $\mathbf{K}$  i skalar  $\gamma$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -6.3649 & -2.7929 & -0.6450 & -4.6454 & -1.5766 & -0.3093 \\ -1.0157 & -8.2333 & 2.9629 & -0.9037 & -7.8036 & -0.6494 \\ -0.7475 & -1.4456 & -7.0693 & -0.2868 & 0.1524 & -0.9703 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = 1.$$

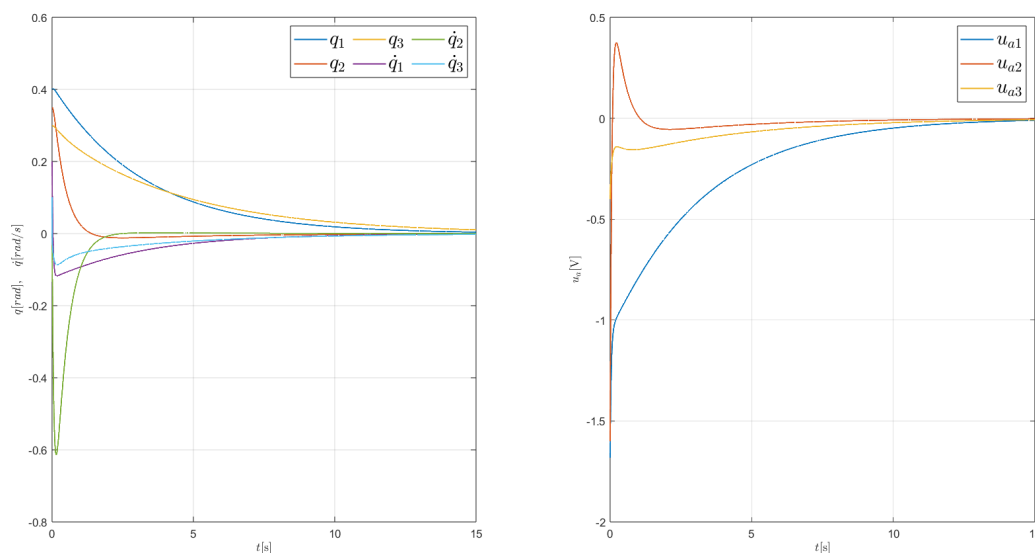
Svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  su

$$\lambda_1 = -493.03, \quad \lambda_2 = -39.34, \quad \lambda_3 = -26.42,$$

$$\lambda_4 = -0.47, \quad \lambda_5 = -1.39 + 0.17j, \quad \lambda_6 = -1.39 - 0.17j,$$

gdje sve imaju negativan realni dio čime je sustav stabilan. Kako je skalar  $\gamma$  jednak jedan, sustav za izabrane matrice  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$  zadovoljava kriterij stabilnosti, ali ga se smatra graničnim, što se u općem slučaju nastoji izbjeći. Vidljiv je dosta sporiji odziv prve upravljane koordinate  $q_1$  u usporedbi s preostale dvije koordinate  $q_2$  i  $q_3$ , što se djelomično može objasniti zanemarivanjem dinamičkih momenata inercije ostalih dvaju segmenata.

Slijedi prikaz upravljačke varijable i odziva sustava za različite vrijednosti skalara  $\gamma$ , gdje se regulator smatra  $\gamma$ -suboptimalnim regulatorom čija je prednost lakša i brža implementacija regulatora zbog činjenice da se ne zahtijeva da skalar  $\gamma$  bude minimizirana vrijednost, gdje pritom zadržava dovoljno dobre performanse u odnosu na slučaj kada je  $\gamma$  minimiziran. Slika 6.2 prikazuje upravljačku varijablu i odziv sustava za  $\gamma = 10$ .



Slika 6.2: Odziv i upravljačka varijabla sustava za  $\gamma = 10$  bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Dobivena matrica  $\mathbf{K}$  i svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  su

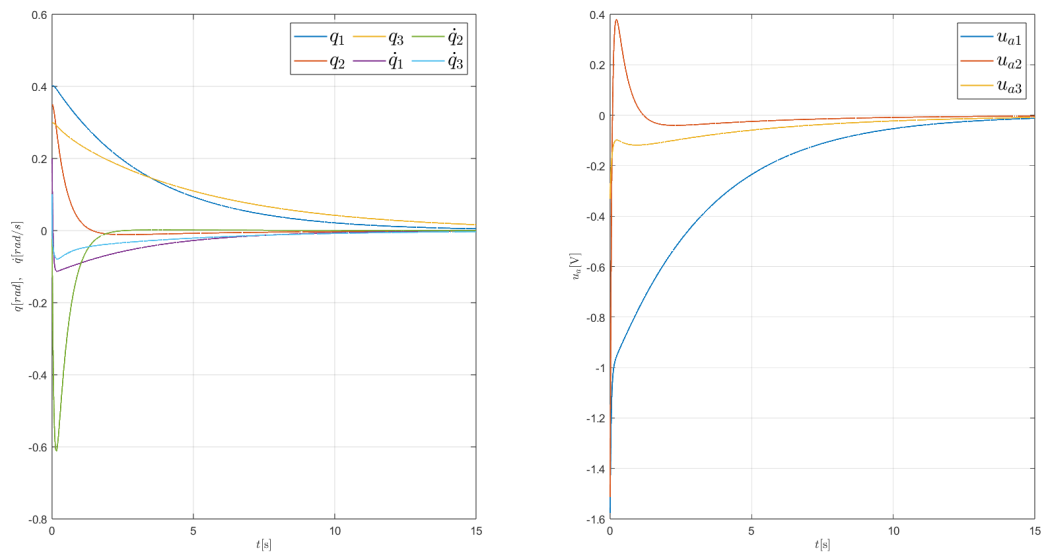
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -3.0967 & -0.3478 & -0.0378 & -1.5489 & -0.1904 & -0.0156 \\ -0.1751 & -3.7481 & -0.5254 & -0.1549 & -2.5197 & -0.3154 \\ -0.0261 & -0.3458 & -0.7861 & -0.0213 & -0.2568 & -0.2943 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -440.3004, \quad \lambda_2 = -29.6473, \quad \lambda_3 = -15.3148,$$

$$\lambda_4 = -2.3156, \quad \lambda_5 = -0.3082, \quad \lambda_6 = -0.2187,$$

iz čega proizlazi da je sustav stabilan.

Upravljačku varijablu i odziv sustava za vrijednost skalara  $\gamma = 15$  prikazuje slika 6.3, gdje će se također prikazati dobivene svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  i matrica pojačanja  $\mathbf{K}$ .



Slika 6.3: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 15$  bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Matrica pojačanja  $\mathbf{K}$  i svojstvene vrijednosti od  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  glase

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.9917 & -0.2214 & 0.0088 & -1.5351 & -0.1266 & 0.0077 \\ -0.0972 & -3.7016 & -0.4449 & -0.0963 & -2.4472 & -0.2687 \\ -0.0132 & -0.3386 & -0.6001 & -0.0121 & -0.2417 & -0.2512 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -437.5869, \quad \lambda_2 = -29.6088, \quad \lambda_3 = -15.1362,$$

$$\lambda_4 = -2.3361, \quad \lambda_5 = -0.2982, \quad \lambda_6 = -0.19,$$

za koje je sustav stabilan.

Na slici 6.4 prikazani su simulacijski rezultati za  $\gamma = 30$ , a dobivene vrijednosti polova  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  i matrice pojačanja su

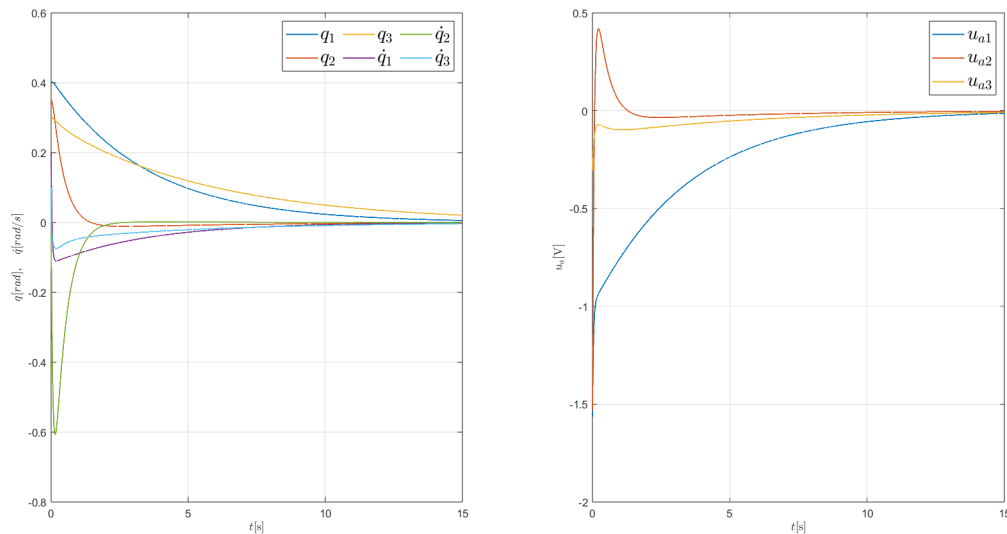
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.9890 & -0.1244 & 0.0476 & -1.7215 & -0.0826 & 0.0337 \\ -0.0492 & -3.8505 & -0.4383 & -0.0405 & -2.5893 & -0.2598 \\ -0.0066 & -0.3535 & -0.5065 & -0.0045 & -0.2491 & -0.2581 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -438.2211, \quad \lambda_2 = -30.1610, \quad \lambda_3 = -15.4695,$$

$$\lambda_4 = -2.3065, \quad \lambda_5 = -0.2925, \quad \lambda_6 = -0.1741,$$

gdje je sustav stabilan.





Slika 6.4: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 30$  bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Usporedbom rezultata postignutih za  $\gamma = 1$ , povećanjem skalara  $\gamma$  primjetno je potrebno dulje vrijeme stabilizacije, kako poopcenih koordinata tako i upravljačke varijable.

Prema [31], u dinamiku sustava poremećaj  $\mathbf{w}$  definira se kao nemodelirano, statičko trenje

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_{m1}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{m2}\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (6.2)$$

gdje su  $\mathbf{F}_{m1}, \mathbf{F}_{m2} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dijagonalne pozitivno definitne matrice. Pritom elementi glavne dijagonale od  $\mathbf{F}_{m1}$  predstavljaju koeficijente viskoznog trenja, dok dijagonalni elementi matrice  $\mathbf{F}_{m2}$  označavaju koeficijente Coulombovog trenja. Za manje vrijednosti danih koeficijenata će  $\mathcal{H}_\infty$  normu biti lakše minimizirati s obzirom na skalar  $\gamma$ , dok se povećanjem vrijednosti koeficijenata trenja navedeni zahtjev teže ostvaruje.

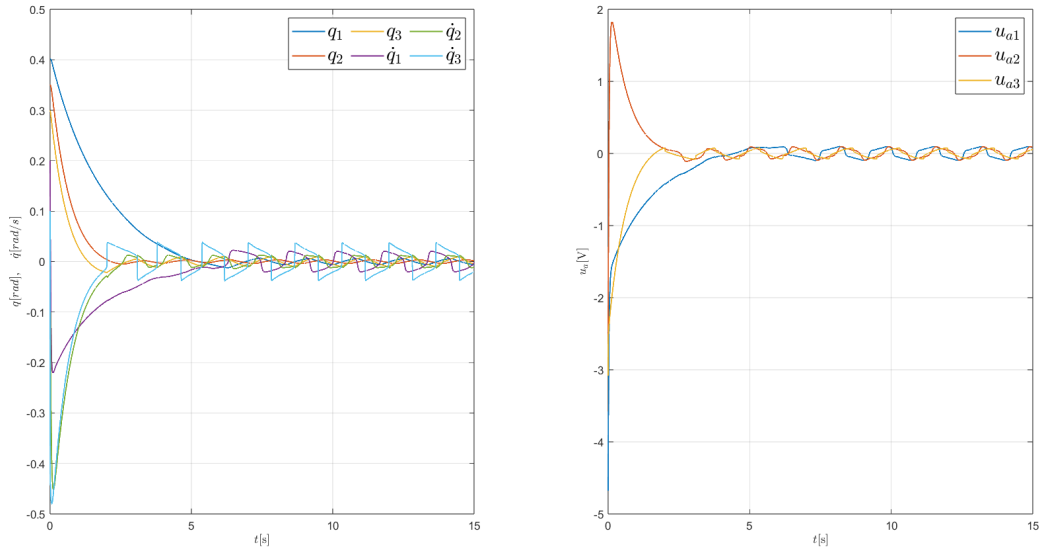
Nadalje, vrijedi oblik jednadžbe

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_{m1}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{m2} \tanh(100\dot{\mathbf{q}}), \quad (6.3)$$

gdje se koristi funkcija tangensa hiperbolnog kako bi se izbjegli mogući numerički problemi prilikom rada. Matrice  $\mathbf{F}_{m1}$  i  $\mathbf{F}_{m2}$  glase

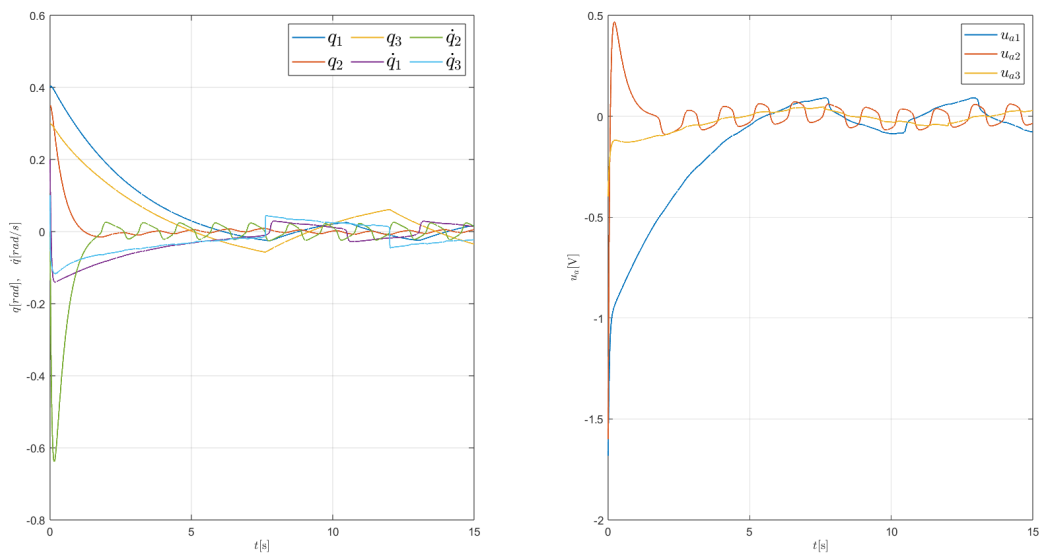
$$\mathbf{F}_{m1} = \begin{bmatrix} 0.73 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90 & 0 \\ 0 & 0 & 0.71 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{m2} = \begin{bmatrix} 0.82 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Simulacijski rezultati uz prisustvo trenja kao poremećaja sa slučaj bez  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora su prikazani na slici 6.5.



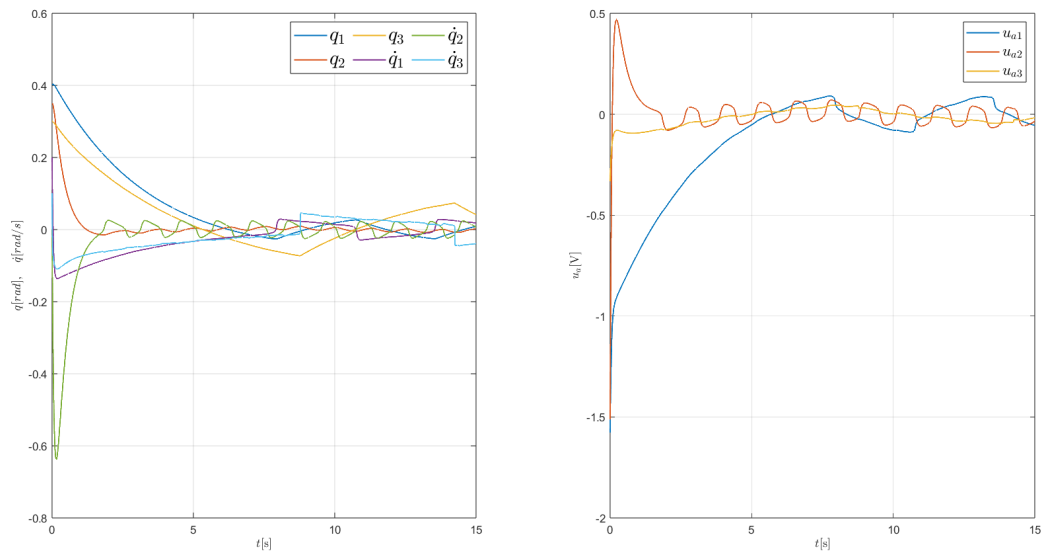
Slika 6.5: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 1$  uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Vidljiva je jasna razlika između dobivenih odziva uz prisustvo trenja i odziva iz 6.1, što je bilo očekivano. Analogno se dobiva prikaz rezultata za slučaj  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora, za vrijednost  $\gamma = 10$ , uz prisustvo nemodeliranog, statičkog trenja, na slici 6.6.



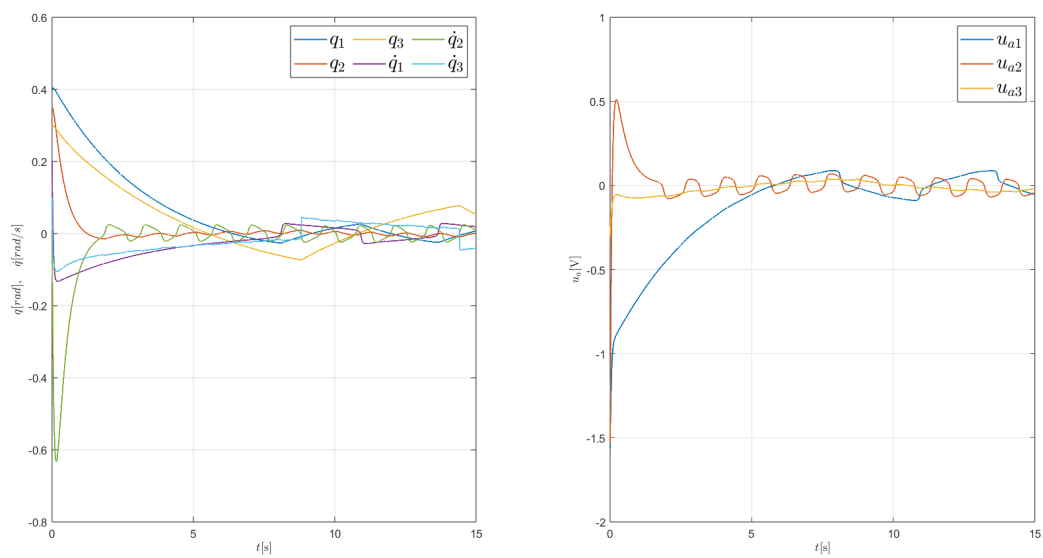
Slika 6.6: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 10$  uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Ukoliko je skalar  $\gamma = 15$ , rezultati na slici 6.7 su sljedeći.



Slika 6.7: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 15$  uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Za dva puta veći skalar  $\gamma$  dobiva se prikaz na slici 6.8.



Slika 6.8: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\gamma = 30$  uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Sada se razmatra slučaj kada se u LMI (3.40) umjesto jediničnih matrica uvede neke druge dijagonalne matrice, točnije težinske matrice koje polaze iz Bolza-type funkcije cilja

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{w}, \quad (6.5)$$

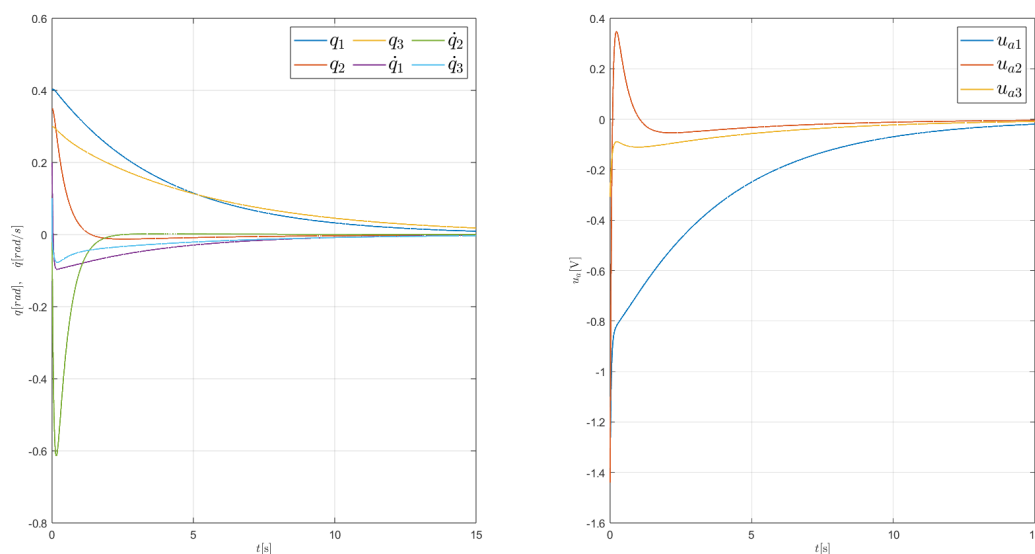
što je analogno kada se u izraze (3.11)-(3.13) dodaje težinska matrica  $\mathbf{R}$ , čime se dobiva

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq \int_0^t (-\gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} - \mathbf{z}^T \mathbf{z}) dt. \quad (6.6)$$

Proizvoljno odabrane težinske matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , koje su pritom pozitivno definitne, imaju vrijednosti

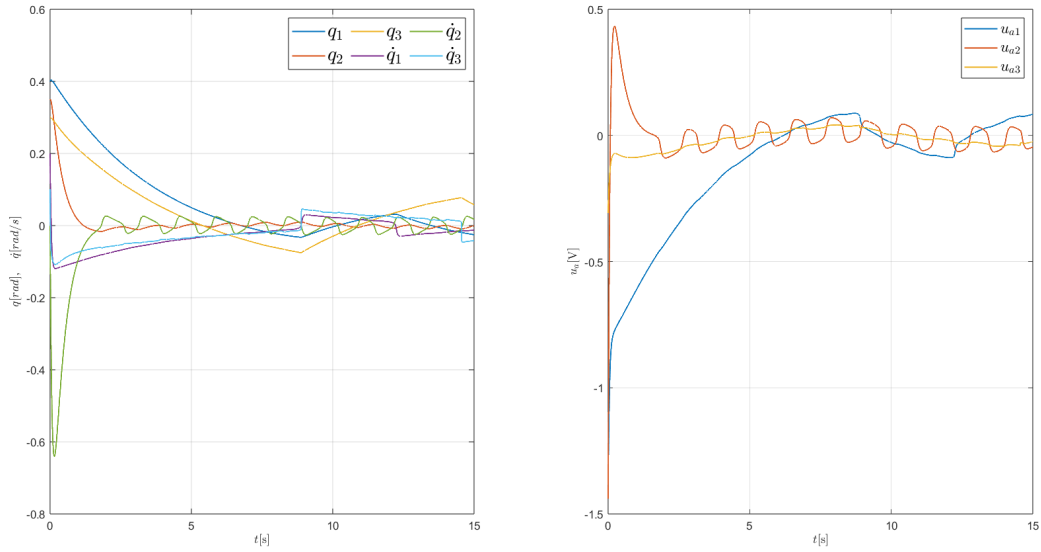
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Slika 6.9 prikazuje odzive i upravljačke varijable dinamičkog sustava uz nove težinske matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , za slučaj bez poremećaja i prisustvo  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora za vrijednost skalara  $\gamma = 15$ .



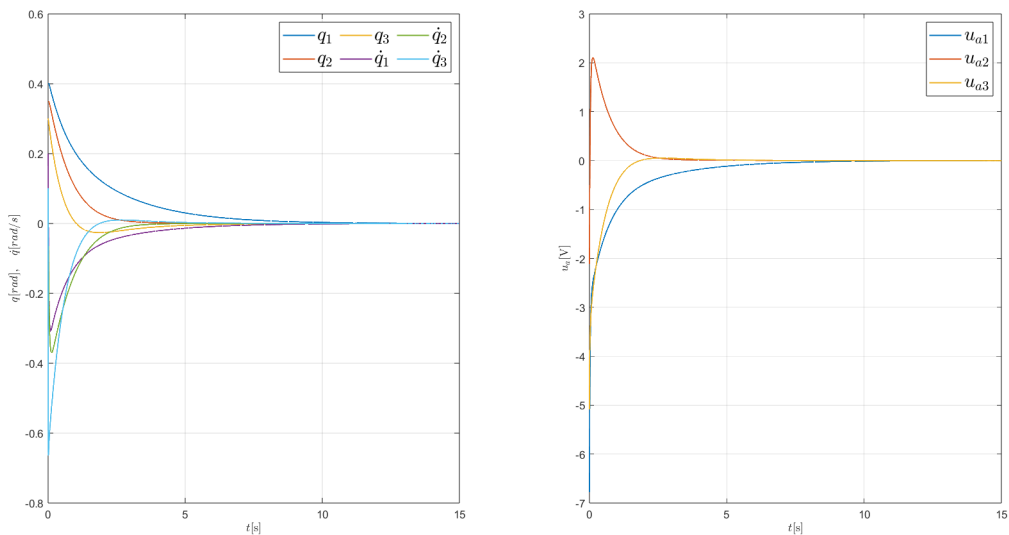
Slika 6.9: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ ,  $\gamma = 15$ , bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Ukoliko se uvede poremećaj u obliku nemodeliranog, statičkog trenja, na slici 6.10 su simulacijski rezultati za nove težinske matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  uz  $\gamma = 15$ .



Slika 6.10: Odziv sustava i upravljačke varijable za  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ ,  $\gamma = 15$ , uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Konačno nastupa slučaj kada se parametriziranoj matrici  $\mathbf{A}$  uvede određene perturbacije parametara, gdje je zahtjev robusnosti od iznimne važnosti. Prikazat će se i simulacijski rezultati za neke ekstremnije vrijednosti perturbacija kako bi se uvidio i takav aspekt. U nastavku, slika 6.11 prikazuje postignute rezultate za slučaj bez težinskih matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , bez poremećaja  $\mathbf{w}$  te s izostavljenim  $\gamma$ -suboptimalnim regulatorom.



Slika 6.11: Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice  $\mathbf{A}$ .

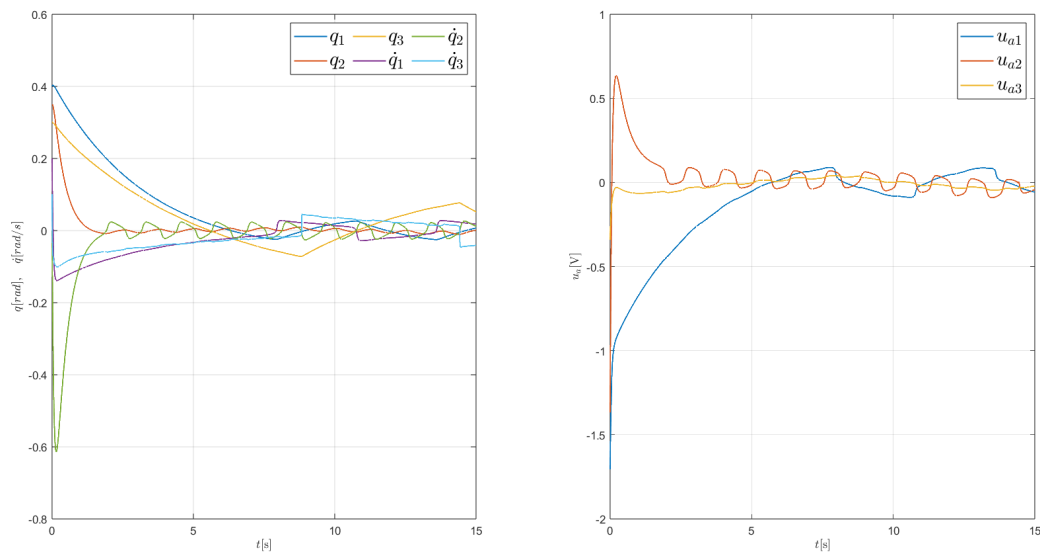
Dobivene su matrica  $\mathbf{K}$  i svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -6.2339 & -6.9944 & -2.5533 & -5.0102 & -2.1241 & -0.6473 \\ 0.5811 & -8.5302 & 3.2584 & -1.1719 & -7.9052 & -1.0812 \\ -0.9817 & -6.0328 & -7.6608 & -0.8326 & -1.2516 & -1.1937 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -496.12, \quad \lambda_2 = -40.77, \quad \lambda_3 = -26.47,$$

$$\lambda_4 = -0.45, \quad \lambda_5 = -1.41 + 0.47j, \quad \lambda_6 = -1.41 - 0.57j,$$

prema kojima je sustav stabilan. Slučaj prisutnosti nemodeliranog, statičkog trenja, te  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora za  $\gamma = 30$  prikazuje slika 6.12.



Slika 6.12: Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice  $\mathbf{A}$  za  $\gamma = 30$  uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Matrica pojačanja  $\mathbf{K}$  i svojstvene vrijednosti od  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$  iznose

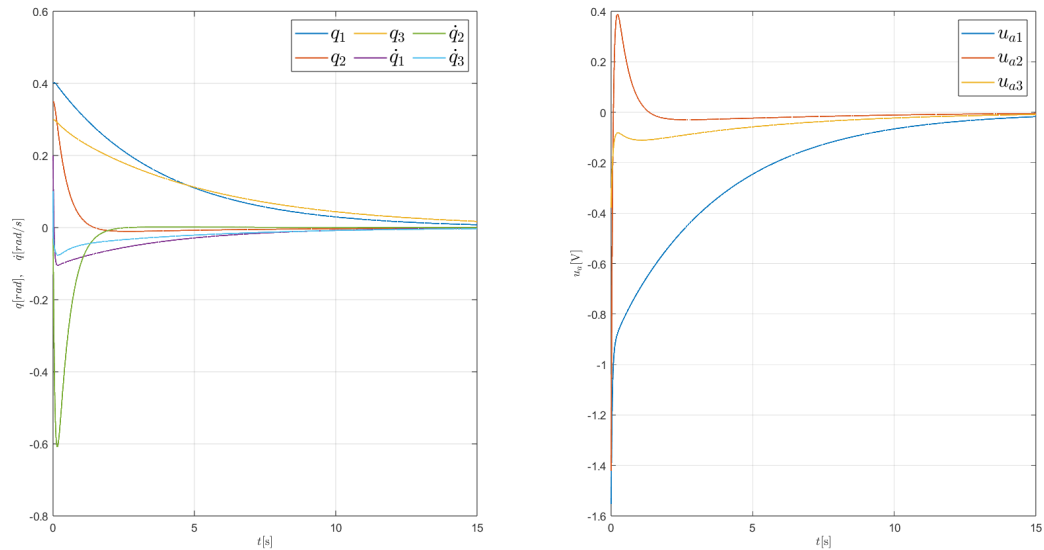
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.9797 & -0.4530 & -0.0368 & -1.7364 & -0.1604 & 0.0137 \\ 0.5185 & -3.8356 & -0.6159 & 0.0096 & -2.5850 & -0.4907 \\ 0.0528 & -0.4719 & -0.5542 & -0.0036 & -0.3296 & -0.2947 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -438.6053, \quad \lambda_2 = -30.2055, \quad \lambda_3 = -15.5206,$$

$$\lambda_4 = -2.3022, \quad \lambda_5 = -0.2926, \quad \lambda_6 = -0.1783,$$

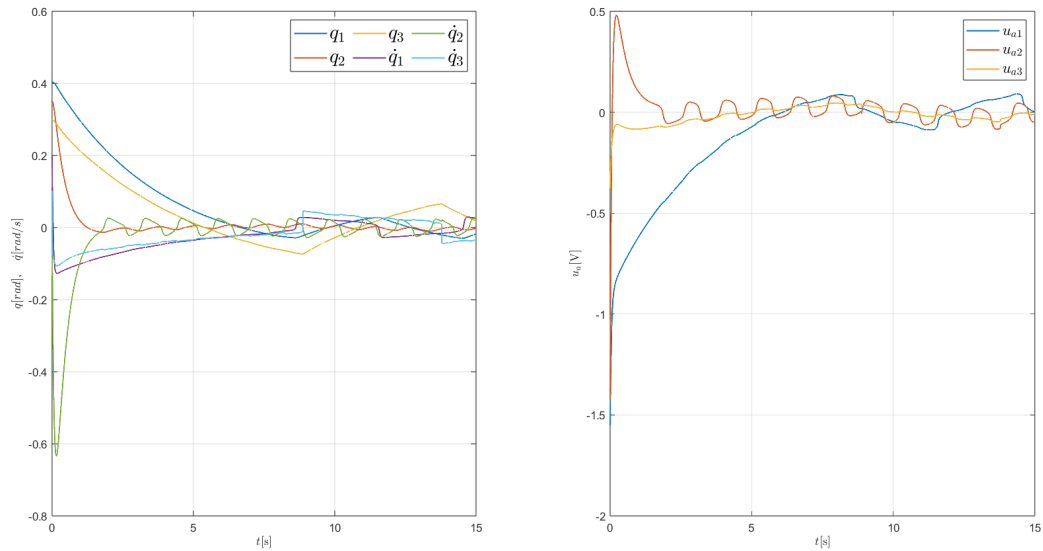
čime je sustav stabilan.

Slijedi prikaz simulacija na slici 6.13 za uvedene težinske matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , bez poremećaja uz  $\gamma$ -suboptimalni regulator za  $\gamma = 15$ .



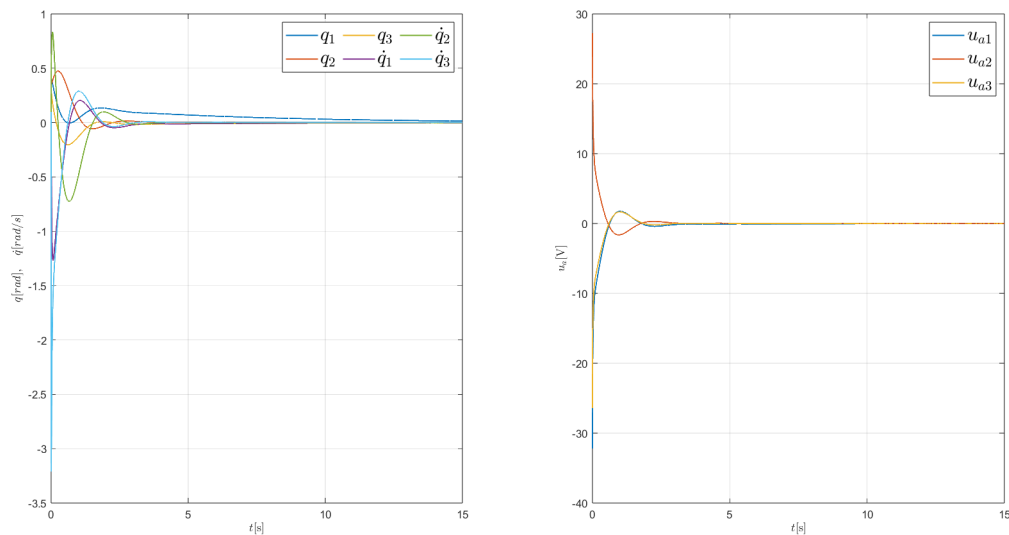
Slika 6.13: Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice  $\mathbf{A}$ , uz matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  za  $\gamma = 15$ , bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Ako se u prethodnom slučaju 6.13 nemodelirano, statičko trenje uzima u obzir, slijede simulacijski rezultati na slici 6.14.



Slika 6.14: Odziv sustava i upravljačke varijable za perturbacije parametara matrice  $\mathbf{A}$ , uz matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  za  $\gamma = 15$ , s poremećajem  $\mathbf{w}$ .

Prilikom većih perturbacija parametara matrice  $\mathbf{A}$ , bez poremećaja  $\mathbf{w}$  i bez  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora dobivaju se idući rezultati prikazani na slici 6.15.



Slika 6.15: Odziv sustava i upravljačke varijable za veće perturbacije parametara matrice  $\mathbf{A}$ .

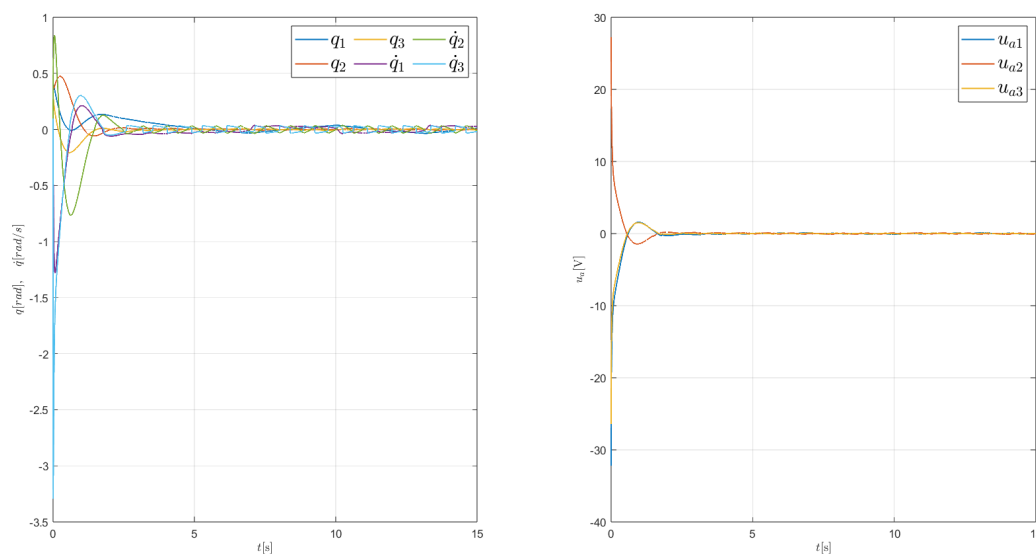
Vidljiva je znatna promjena dinamike sustava, a prvenstveno upravljačke varijable koja seže i do preko 30V, o čijoj bi se fizikalnosti za promatrani sustav dalo diskutirati.



Vrijedi promotriti svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -572.77, & \lambda_2 &= -42.50, & \lambda_3 &= -21.48, \\ \lambda_4 &= -0.16, & \lambda_5 &= -1.57 + 2.481j, & \lambda_6 &= -1.57 - 2.48j. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Primjetan je porast iznosa imaginarnih dijelova, što objašnjava veći harmonični karakter. Uvođenjem poremećaja u sustav, ponovno bez težinskih matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  i  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora, simulacijski rezultati na slici 6.16 su sljedeći.



Slika 6.16: Odziv sustava i upravljačke varijable za veće perturbacije parametara matrice  $\mathbf{A}$  uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

U Yalmipu je također rješiv slučaj parametriziranih matrica  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{K}$  uz matrice  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$  konstantne, gdje je povratna poruka nakon rješavanja sljedeća.

```

number of iterations      = 28
primal objective value   = -1.00000001e+00
dual objective value     = -9.99999976e-01
gap := trace(XZ)         = 6.05e-08
relative gap             = 3.02e-08
actual relative gap      = -1.22e-08
rel. primal infeas       = 1.31e-09
rel. dual infeas         = 2.85e-08
norm(X), norm(y), norm(Z) = 1.5e-01, 6.5e+01, 2.8e+03
norm(A), norm(b), norm(C) = 1.9e+03, 1.0e+00, 9.4e+01
Total CPU time (secs)    = 2.39
CPU time per iteration   = 0.09

```

```

termination code          = 0
DIMACS: 1.3e-09  0.0e+00  2.9e-08  0.0e+00  -1.2e-08  2.0e
-08

```

---

## 6.2. Decentralizirani PD regulator

Decentralizirana regulacija često se koristi u slučajevima kada postoji veći broj podsustava koje je potrebno upravljati, što svoju primjenu nalazi i u području robotskih manipulatora. Prema [31], implementacijom PD regulatora ulazna veličina objekta upravljanja definirana je kao

$$\tau = \mathbf{K}_p \tilde{q} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{q}}, \quad (6.9)$$

gdje je  $\tilde{q}$  razlika povratne i referentne vrijednosti

$$\tilde{q} = q - q_r, \quad (6.10)$$

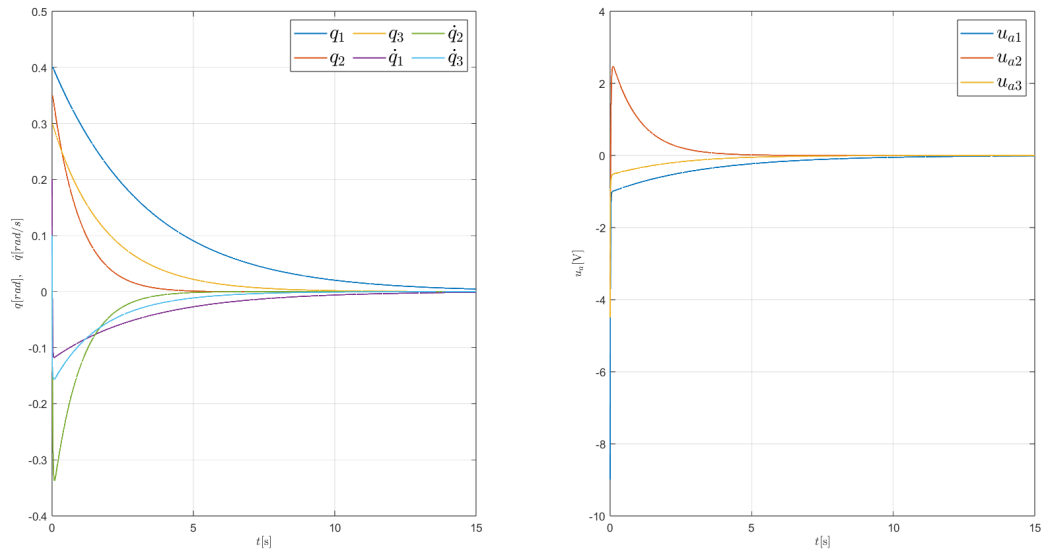
što analogno vrijedi i za derivaciju izraza (6.10). Kako se prilikom postupka linearizacije ravnotežno stanje ostvaruje za  $q_r = 0$ , vektor poopćenih koordinata  $q$  jednak je  $\tilde{q}$ . Ako se izraz (6.9) supstituiru u (5.28), pritom ne uzimajući vektor poremećaja  $\mathbf{w}$ , dobiva se

$$\mathbf{G}(q) + \mathbf{H}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} = \mathbf{K}_p \tilde{q} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{q}}, \quad (6.11)$$

čime je opisana dinamika zatvorenog regulacijskog kruga s PD regulatorom. Sada je potrebno odrediti matrice pojačanja  $\mathbf{K}_p$  i  $\mathbf{K}_d$  takve da sustav ostane stabilan. Proizvoljno su odabrane su vrijednosti

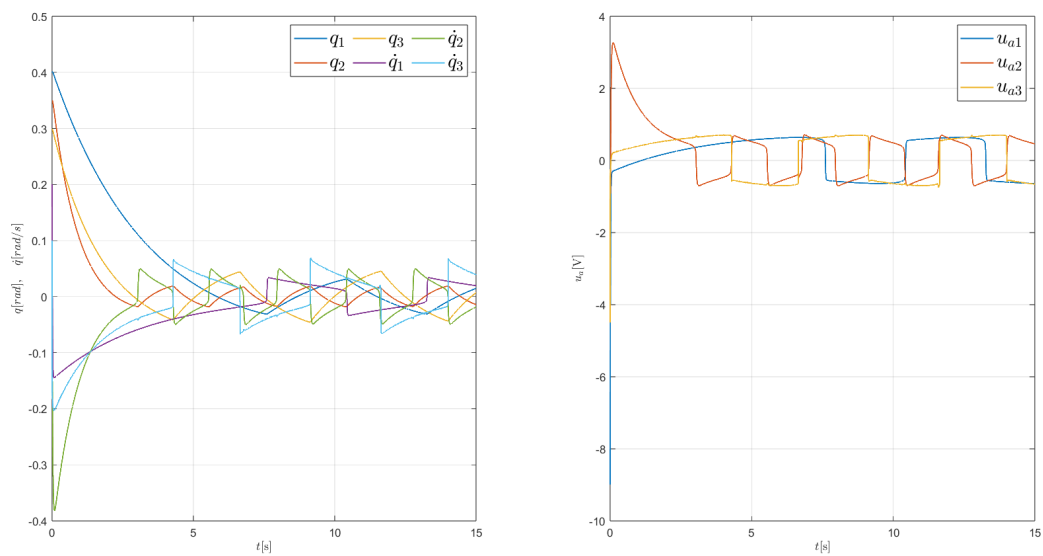
$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

čiji se dijagonalni elementi mogu naknadno mijenjati kako bi se poboljšale željene performanse sustava. Simulacijski rezultati provest će se prvo bez poremećaja kao nemodeliranog, statičkog trenja, što prikazuje slika 6.17.



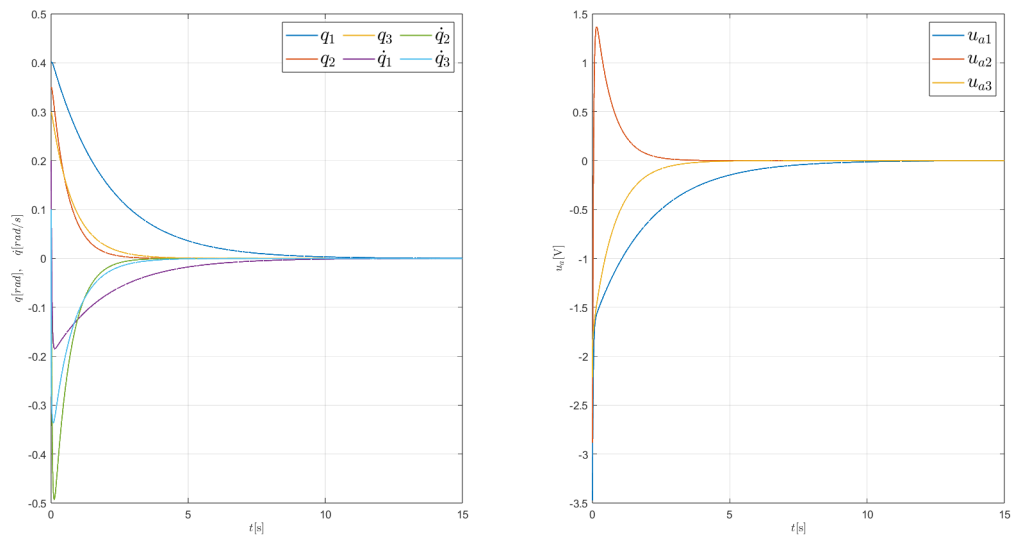
Slika 6.17: Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani PD regulator, bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

U slučaju poremećaja  $\mathbf{w}$  (6.3), dobivaju se rezultati prema slici 6.18.



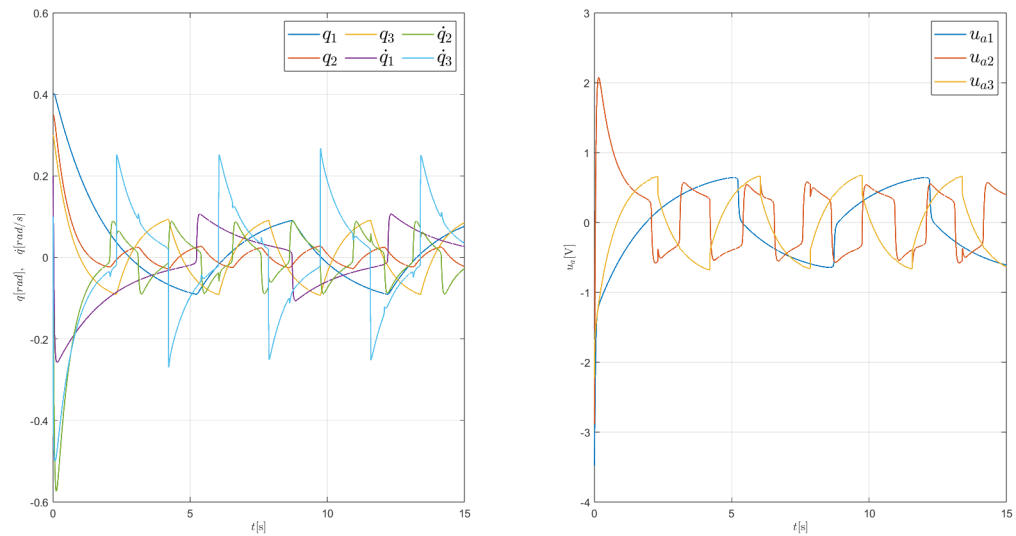
Slika 6.18: Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani PD regulator, uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Zapaža se značajno odstupanje od ravnotežnog stanja u odnosu na izvršene simulacije s regulatorom stanja. Vrijedi pogledati i primjer PD regulatora čije su matrice pojačanja  $\mathbf{K}_p$  i  $\mathbf{K}_d$  dobivene iz elemenata matrice  $\mathbf{K}$  množeći odgovarajuće varijable stanja. Dobiveni odzivi i upravljačka varijabla sustava za slučaj optimalnog PD regulatora dani su na slici 6.19.



Slika 6.19: Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani tzv. optimalni PD regulator, bez poremećaja  $\mathbf{w}$ .

Ukoliko se sustavu dovodi poremećaj u obliku nemodeliranog, statičnog trenja (6.3), simulacijski rezultati za taj slučaj su na slici 6.20.



Slika 6.20: Odziv sustava i upravljačke varijable uz implementirani tzv. optimalni PD regulator, uz poremećaj  $\mathbf{w}$ .

Kao i na slici 6.18, uočava se značajno odstupanje od ravnotežnog stanja, čime se potvrđuje regulator stanja kao bolji izbor traženog zahtjeva robusnosti dinamičkog sustava.

## 7 Zaključak

Kroz ovaj rad opisani su temeljni koncepti konveksne optimizacije, neke od osnovnih metoda poput metoda unutarnje točke i elipsoid metode kojima se rješavaju problemi semidefinitnog programiranja. Objasnila se stabilnost dinamičkih sustava prema Ljapunovu, gdje se promatrajući kvadratnu Ljapunovljevu funkciju  $V(\mathbf{x})$  koja predstavlja energetska funkciju sustava prema direktnoj metodi Ljapunova, može zaključiti je li sustav, točnije ravnotežno stanje stabilno, nestabilno ili asimptotski stabilno.

Upotrebom linearnih matričnih nejednadžbi se  $\mathcal{H}_\infty$  optimizacijski problem formulirao kao problem semidefinitnog programiranja, gdje je zbog bilinearnosti između matrica  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{K}$  bilo potrebno linearnu matričnu nejednadžbu formuliranu pomoću leme ograničene realnosti svesti na njen dualni oblik. Pritom ograničenje optimizacijskog problema semidefinitnog programiranja predstavlja linearna matrična nejednadžba, a minimizira se nenegativni skalar  $\gamma$ . Uvođenjem regulatora stanja u regulacijski krug nastojalo se dobiti matricu pojačanja  $\mathbf{K}$  regulatora stanja za koju je  $\mathcal{H}_\infty$  norma matrice prijenosnih funkcija,  $\|\mathbf{T}(s)\|_\infty$  minimizirana.

Provela se linearizacija dinamičkog sustava promjenjivog s ozbirom na parametre, čiji se model dobio putem Euler-Lagrangeovog formalizma. Na osnovu lineariziranog modela dobiveni su simulacijski rezultati, gdje se razmatrao slučaj utjecanja nemodeliranog, statičkog trenja na sustav, kao i prisutnost  $\gamma$ -suboptimalnog regulatora. Promatrane su simulacije u kojima se uvode veće perturbacije parametara rasporeda, čime se jasno vide razlike u rezultatima u usporedbi s manjim perturbacijama parametara. Također je dana usporedba regulatora stanja sa standardnim decentraliziranim PD regulatorom.

Buduća razmatranja mogu uključivati sintezu dinamičkog regulatora u regulacijsku petlju, uključujući Kalmanov filter kojim bi se smanjila potreba za izravnim mjerenjem svih stanja promatranog sustava. Moguća su i proširenja analize stabilnosti na nelinearne sustave s preciznije modeliranim poremećajima poput trenja, temperaturnih promjena, utjecaja vlage i drugih.

# Literatura

- [1] Y. Nesterov. *Lectures on Convex Optimization*, volume 137. Springer-Verlag, Switzerland, 2018.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [3] S. Sastry. *Nonlinear systems: Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
- [5] S. Ibaraki. *Nonconvex Optimization Problems in  $H_\infty$  Optimization and Their Applications*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Department of Mechanical Engineering, 2000.
- [6] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All Controllers for the General  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, 1994.
- [7] F. Bruzelius. *Linear Parameter-Varying Systems - an approach to gain scheduling*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Department of Signals and Systems, 2004.
- [8] V. M. Hernández-Guzmán, V. Santibáñez, and G. Herrera. Control of Rigid Robots Equipped with Brushed DC-Motors as Actuators. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 5(6):718–724, 2007.
- [9] R. H. Tütüncü, K. C. Toh, and M. J. Todd. Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3. *Mathematical Programming*, 95(2):189–217, 2003.
- [10] J. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):621–634, 1972.
- [11] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. In *Proceedings of the Doklady Akademii Nauk*, volume 244, pages 1093–1096. Moscow, USSR, August, 1979.

- [12] N. Karmarkar. A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. New Jersey, USA, December, 1984.
- [13] J. Gondzio. Interior point methods 25 years later. *European Journal of Operational Research*, 218(3):587–601, 2012.
- [14] H. Hindi. A Tutorial on Convex Optimization II: Duality and Interior Point Methods. In *Proceedings of the IEEE 2006 American Control Conference*, pages 11–13. Minneapolis, USA, June, 2006.
- [15] C. Scherer and S. Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. 2004.
- [16] H. Rotstein and A. Desages. Computation of  $l_1$  Optimal Controllers Using  $\mathcal{H}_2$  Projections. In *Proceedings of the 7th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, volume 3, pages 3323–3328. Haifa, Israel, June, 1998.
- [17] F. Wu, X. Hua Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced L2-norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10):983–998, 1996.
- [18] R. Tóth. *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*, volume 403. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [19] J. S. Shamma. *Analysis and design of gain scheduled control systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 1988.
- [20] R. W Liu. Convergent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(4):384–391, 1968.
- [21] R. W. Liu, R. Saeks, and R. J. Leake. On Global Linearization. *Mathematical Aspects of Electrical Network Analysis*, 3:93–102, 1971.
- [22] V. Veliov. Stability-like properties of differential inclusions. *Set-Valued Analysis*, 5(1):73–88, 1997.
- [23] M. Haraguchi and H. Y. Hu. Using a new discretization approach to design a delayed LQG controller. *Journal of Sound and Vibration*, 314(3-5):558–570, 2008.
- [24] P. Apkarian. Nonsmooth  $\mu$ -synthesis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(13):1493–1508, 2011.



- [25] F. Bruzelius, S. Pettersson, and C. Breitholtz. Region of attraction estimates for LPV-gain scheduled control systems. In *Proceedings of the IEEE 2003 European Control Conference (ECC)*, pages 892–897. Cambridge, UK, September, 2003.
- [26] A. N. Hirani. Linearization Methods for Variational Integrators and Euler-Lagrange Equations. Master’s thesis, California Institute of Technology, CMS Department, 2000.
- [27] R. Fernando and K. Rafael. Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 11(3):267–282, 2001.
- [28] P. Woo, Z. Yu, and H. Chen. Gain Scheduled LPV  $H_\infty$  Control Based on LMI Approach for a Robotic Manipulator. *Journal of Robotic Systems*, 19(12):585–593, 2002.
- [29] J. Löfberg. YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, pages 284–289. Taipei, Taiwan, September, 2004.
- [30] J. Löfberg. Automatic robust convex programming. *Optimization methods and software*, 27(1):115–129, 2012.
- [31] R. Kelly, V. Santibáñez, and A. Loría. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag, London, 2005.

# A Vektorske i matrice norme

Navode se osnovne definicije i pojmovi vezani za norme, koji su od izrazite važnosti za razumijevanje izlaganja uz prostore i norme dinamičkih sustava.

## A.1. Vektorske norme

Na vektorskom prostoru  $\mathbf{V}$  svaka funkcija  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  koja zadovoljava dolje dane uvjete naziva se vektorska norma.

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V,$
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0,$
- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- Nejednakost trokuta:  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$

Za konačnodimenzionalan vektorski prostor  $V = \mathbb{R}^n$  ili  $V = \mathbb{C}^n$  postoji p-norma vektora izraza

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A.1})$$

gdje se za  $p = 1, 2, \infty$  dobivaju tri najčešće korištene vektorske norme od kojih je samo  $l_2$  norma dobivena skalarnim produktom

- za  $p = 1$  dobiva se 1-norma ili  $l_1$  norma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|, \quad (\text{A.2})$$

- za  $p = 2$  dobiva se 2-norma,  $l_2$  norma ili *euklidska* norma

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|^2}, \quad (\text{A.3})$$

- za  $p = \infty$  dobiva se  $\infty$ -norma ili  $l_\infty$  norma ili *max* norma

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |\mathbf{x}_i|. \quad (\text{A.4})$$

## A.2. Matrične norme

Svaka funkcija  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  koja zadovoljava dolje dane uvjete naziva se matrična norma.

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n},$
- $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0},$
- $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n},$
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$

Ukoliko se na matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  koristi odgovarajuća vektorska norma, prilikom čega se matrica promatra kao vektor, može se dobiti *Frobeniusova* norma koja ujedno odgovara vektorskoj 2-normi, ona glasi

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}. \quad (\text{A.5})$$

Češći je slučaj da se koriste operatorske ili inducirane matrične p-norme oblika

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}_p \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p, \quad (\text{A.6})$$

gdje se uvrštavanjem odgovarajućih vektora i matrica u gornji izraz, za  $p = 1, 2, \infty$  dobiva

- za  $p = 1$  dobiva se matrična 1-norma ili maksimalna stupčana norma, a zove se tako jer predstavlja maksimalnu sumu elemenata stupaca

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,2,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad (\text{A.7})$$

- za  $p = 2$  dobiva se matrična 2-norma ili spektralna norma

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}), \quad (\text{A.8})$$

gdje za  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$  vrijedi  $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{A}),$

- te za  $p = \infty$  dobiva se matrična  $\infty$ -norma ili maksimalna retčana norma, a zove se tako jer predstavlja maksimalnu sumu elemenata redaka

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{i=1,2,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{A.9})$$

U odnosu na 1-normu i  $\infty$ -normu, pri analizi stabilnosti češće se koristi matrična inducirana 2-norma koja se najčešće procjenjuje drugim matričnim normama zbog svoje teške izračunljivosti u praksi.

## B MATLAB kodovi

---

```
1 close all
2 clear all
3
4
5 %% Izvod nelinearnog modela 3DOF robotskog manipulatora
6
7 syms q1 q2 q3 q1_dot q2_dot q3_dot q1_ddot q2_ddot q3_ddot w1
      w2 w3 ua1 ua2 ua3
8
9 % parametri sustava
10
11 m1=13; %kg
12 m2=23.902; %kg
13 m3=1.285; %kg
14 mM=0; %kg
15
16 L1=0.6; %m
17 L2=0.45; %m
18 L3=0.45; %m
19
20 J1=1.266; %kgm^2
21 g=9.81; %m/s^2
22
23 Ra=[2.3, 0, 0; 0, 1.2, 0; 0, 0, 1.2]; %Ohm
24 N=[15, 0, 0; 0, 15, 0; 0, 0, 15];
25 Kv=[0.573, 0, 0; 0, 0.382, 0; 0, 0, 0.382]; % Nm/A
26 Kt=[0.573, 0, 0; 0, 0.382, 0; 0, 0, 0.382]; % Vs/rad
27
28 % vektori upravljanih koordinata
29
30 q=[q1;q2;q3];
31 qdot=[q1_dot;q2_dot;q3_dot];
32 qddot=[q1_ddot;q2_ddot;q3_ddot];
33
```

```

34 s1 = sin(q1);
35 s2 = sin(q2);
36 s3 = sin(q3);
37 s23 = sin(q2+q3);
38 c1 = cos(q1);
39 c2 = cos(q2);
40 c3 = cos(q3);
41 c23 = cos(q2+q3);
42
43 % izvod Lagrangiana L
44
45 term1 = q1_dot^2 * (1/2 * J1 + 1/6 * m2 * L2^2 * s2^2 + 1/2 *
      m3 * (L2^2 * s2^2 + L2 * L3 * s2 * s23 + 1/3 * L3^2 * s23
      ^2) + 1/2 * mM * (L2 * s2 + L3 * s23)^2);
46
47 term2 = q2_dot^2 * (1/6 * m2 * L2^2 + 1/2 * m3 * L2^2 + 1/2 *
      mM * L2^2);
48
49 term3 = (q2_dot + q3_dot)^2 * (1/6 * m3 * L3^2 + 1/2 * mM *
      L3^2);
50
51 term4 = 1/2 * (q2_dot + q3_dot) * (m3 * L2 * L3 * c3 * q2_dot
      + 2 * mM * L2 * L3 * c3 * q2_dot);
52
53 term5 = m1 * g * L1 + m2 * g * (L1 + 1/2 * L2 * c2) + m3 * g
      * (L1 + L2 * c2 + 1/2 * L3 * c23) + mM * g * (L1 + L2 * c2
      + L3 * c23);
54
55 % derivacije Lagrangiana L
56
57 L = term1 + term2 + term3 + term4 + term5;
58
59 Lq1=diff(L,q1);
60 Lq1dot=diff(L,q1_dot);
61
62 Lq2=diff(L,q2);
63 Lq2dot=diff(L,q2_dot);

```

```

64
65 Lq3=diff(L,q3);
66 Lq3dot=diff(L,q3_dot);
67
68 % elementi vektora G(q)
69
70 G1 = 0;
71
72 G2 = g * (m3 * (1/2 * L3 * s23 + L2 * s2) + mM * (L3 * s23 +
      L2 * s2) + 1/2 * L2 * m2 * s2);
73
74 G3 = g * (1/2 * m3 * L3 * s23 + mM * L3 * s23);
75
76 % elementi matrice H(q)
77
78 H12 = 0;
79 H13 = 0;
80 H21 = 0;
81 H31 = 0;
82
83 H11 = J1 + (1/3) * m2 * L2^2 * s2^2 + m3 * (L2^2 * s2^2 + L2
      * L3 * s2 * s23 + (1/3) * L3^2 * s23^2) + mM * (L2 * s2 +
      L3 * s23)^2;
84
85 H22 = m3 * (L2 * L3 * c3 + L2^2 + (1/3) * L3^2) + mM * (2 *
      L2 * L3 * c3 + L2^2 + L3^2) + (1/3) * L2^2 * m2;
86
87 H23 = m3 * (1/2 * L2 * L3 * c3 + (1/3) * L3^2) + mM * (L2 *
      L3 * c3 + L3^2);
88
89 H32 = H23;
90
91 H33 = (1/3) * L3^2 * m3 + L3^2 * mM;
92
93 % clanovi E
94
95 E1 = (2/3) * m2 * L2^2 * s2 * c2 + ...

```

```

96      m3 * (2 * L2^2 * s2 * c2 + L2 * L3 * (s2 * c23 + s23 *
          c2) + (2/3) * L3^2 * s23 * c23) + ...
97      2 * mM * (L2 * s2 + L3 * s23) * (L2 * c2 + L3 * c23);
98
99 E2 = m3 * (L2 * L3 * s2 * c23 + (2/3) * L3^2 * s23 * c23) +
      ...
100     2 * mM * L3 * c23 * (L2 * s2 + L3 * s23);
101
102 E3 = -(m3 * ((1/3) * L3^2 * c23 * s23 + L2^2 * c2 * s2 +
          (1/2) * L2 * L3 * (c23 * s2 + c2 * s23)) + ...
103     mM * (L3 * c23 + L2 * c2) * (L3 * s23 + L2 * s2) +
          (1/3) * L2^2 * c2 * s2 * m2);
104
105 E4 = -L2 * L3 * s3 * (m3 + 2 * mM);
106
107 E5 = -L2 * L3 * s3 * (1/2 * m3 + mM);
108
109 E6 = -((1/2) * m3 * (L2 * L3 * s2 * c23 + (2/3) * L3^2 * s23
          * c23) + ...
110     mM * L3 * c23 * (L2 * s2 + L3 * s23));
111
112 E7 = (1/2) * L2 * L3 * s3 * (m3 + 2 * mM);
113
114 % elementi matrice C(q, qdot)
115
116 C11=E1*q2_dot;
117
118 C12=0;
119
120 C13=E2*q1_dot;
121
122 C21=E3*q1_dot;
123
124 C22=E4*q3_dot;
125
126 C23=E5*q3_dot;
127

```

```
128 C31=E6*q1_dot;
129
130 C32=E7*q2_dot;
131
132 C33=0;
133
134 % matrice G(q),H(q),C(q,q_dot)
135
136 G=[G1; G2; G3];
137 H=[H11 H12 H13; H21 H22 H23; H31 H32 H33];
138 C=[C11 C12 C13; C21 C22 C23; C31 C32 C33];
139
140 %% Izvod matrica prostora stanja iz definiranog nelinearnog
    modela
141
142 % vektor poremećaja w
143
144 w=[w1;w2;w3];
145
146 % upravljacka varijabla sustava u_a
147
148 ua=[ua1; ua2; ua3];
149
150 % vektor varijabli stanja x
151
152 x1=q;
153 x2=qdot;
154 x=[x1;x2];
155
156 fx=[x2; -(H^(-1))*(G+w+(C+((Kt*Kv*N^(2))/(Ra))*eye(3,3))*qdot
    -((N*Kt)/(Ra))*ua)];
157
158 % matrica sustava A_jac
159
160 A_jac=jacobian(fx, x);
161
162 % matrice ulaza B1_jac i B2_jac
```



```
163
164 B1_jac=jacobian(fx, w);
165 B2_jac=jacobian(fx, ua);
166
167 vec=[x.', w.', ua.'];
168 rjesenja=vpasolve(fx,vec);
169
170 A=subs(A_jac,{q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot, w1, w2, w3,
    ua1, ua2, ua3}, ...
171     {rjesenja.q1, rjesenja.q2, rjesenja.q3, rjesenja.q1_dot,
    rjesenja.q2_dot, rjesenja.q3_dot, ...
172     rjesenja.w1, rjesenja.w2, rjesenja.w3, rjesenja.ua1,
    rjesenja.ua2, rjesenja.ua3});
173
174 B1=subs(B1_jac,{q1, q2, q3},{rjesenja.q1, rjesenja.q2,
    rjesenja.q3});
175
176 B2=subs(B2_jac,{q1, q2, q3},{rjesenja.q1, rjesenja.q2,
    rjesenja.q3});
```

---

```
1 close all
2 clear all
3 clc
4
5 global A_nom B1_nom B2_nom K n Kp Kd
6
7 theta1=sdpvar(1); theta2=sdpvar(1); theta3=sdpvar(1); ...
8     theta4=sdpvar(1); theta5=sdpvar(1);
9
10 theta6=sdpvar(1); theta7=sdpvar(1); theta8=sdpvar(1); ...
11     theta9=sdpvar(1); theta10=sdpvar(1);
12
13 theta11=sdpvar(1); theta12=sdpvar(1); theta13=sdpvar(1); ...
14     theta14=sdpvar(1); theta15=sdpvar(1);
15
16 % A(\theta) uz manje perturbacije \theta
17
```

```
18 a3=[0, 0.5784, theta2;
19     0, theta6, theta7;
20     0, theta11, theta12];
21
22 a4=[theta3, 0.1746, theta5;
23     theta8, theta9, theta10+0.4856;
24     theta13, theta14, theta15];
25
26 A=[zeros(3,3),eye(3,3); a3, a4];
27
28 % A(\theta) uz vece perturbacije \theta
29
30 a3=[0, 10.4932, theta2;
31     0, theta6, theta7;
32     0, theta11, theta12];
33
34 a4=[theta3, 2.4922, theta5;
35     theta8, theta9, theta10+4.5843;
36     theta13, theta14, theta15];
37
38 A=[zeros(3,3),eye(3,3); a3, a4];
39
40 % A(\theta) bez perturbacija
41
42 a3=[0, theta1, theta2;
43     0, theta6, theta7;
44     0, theta11, theta12];
45
46 a4=[theta3, theta4, theta5;
47     theta8, theta9, theta10;
48     theta13, theta14, theta15];
49
50 A=[zeros(3,3),eye(3,3); a3, a4];
51
52 % definiranje konstantnih matrica B1 i B2
53
54 B1 = [
```

```
55     0     0     0
56     0     0     0
57     0     0     0
58     7.47262     0     0
59     0     4.5726     -1.4756
60     0     -1.4756     14.4532];
61
62 B2 = [
63     0     0     0
64     0     0     0
65     0     0     0
66     4.5736     0     0
67     0     3.3346     -5.3127
68     0     -5.3127     54.3785];
69
70
71 % matrica izlaza C1
72
73 C1=[eye(3,3), zeros(3,3)];
74
75 % matrice prijenosa D11 i D12
76
77 D11=eye(3,3);
78 D12=D11;
79
80 n = size(A, 1); % dimenzija vektora varijabli stanja x
81 m = size(B2, 2); % dimenzija vektora ulaznih varijabli u
82 p = size(C1, 1); % dimenzija vektora izlaza z
83 q = size(D11, 2); % dimenzija vektora poremećaja w
84
85 % matrica Y
86
87 Y=sdpvar(6,6,'symmetric');
88
89 % matrica F
90
91 F=sdpvar(3,6,'full');
```

```
92
93 gamma=sdpvar(1);
94
95 % odabir solvera
96
97 options = sdpsettings('solver', 'sdpt3');
98
99 % optimiranje
100
101 LMI1=[Y*A' + A*Y + F'*(B2)' + B2*F , B1, Y*C1' + F'*(D12)';
102      B1', -gamma*eye(q), D11'];
103      C1*Y + D12*F, D11, -gamma*eye(p)];
104
105 theta=[theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6,theta7,
106        theta8,theta9,...
107        theta10,theta11,theta12,theta13,theta14,theta15];
108
109 LMI = [LMI1<=0, Y>=0, gamma>=0];
110 LMI = [LMI, theta>=0, sum(theta)==1, uncertain(theta)];
111 res=optimize(LMI, gamma, options);
112
113 %% Uvodenje matrica Q i R
114
115 Q=[100, 0, 0; 0, 30, 0; 0, 0, 10];
116 R=[6, 0, 0; 0, 3, 0; 0, 0, 3];
117
118 LMI1=[Y*A' + A*Y + F'*(B2)' + B2*F , B1, Y*C1' + F'*(D12)';
119      B1', -gamma*Q, D11'];
120      C1*Y + D12*F, D11, -gamma*R];
121
122 theta=[theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6,theta7,
123        theta8,theta9,...
124        theta10,theta11,theta12,theta13,theta14,theta15];
125
126 LMI = [LMI1<=0, Y>=0, gamma>=0];
127 LMI = [LMI, theta>=0, sum(theta)==1, uncertain(theta)];
128 res=optimize(LMI, gamma, options);
```

```
127
128 % za gamma==10
129
130 LMI1=[Y*A' + A*Y + F'*(B2)' + B2*F , B1, Y*C1' + F'*(D12)';
131      B1', -gamma*Q, D11'];
132      C1*Y + D12*F, D11, -gamma*R];
133
134 LMI = [LMI1<=0, Y>=0, gamma==10];
135 LMI = [LMI, theta>=0, sum(theta)==1, uncertain(theta)];
136 res=optimize(LMI, gamma, options);
137
138 % za gamma==15
139
140 LMI1=[Y*A' + A*Y + F'*(B2)' + B2*F , B1, Y*C1' + F'*(D12)';
141      B1', -gamma*Q, D11'];
142      C1*Y + D12*F, D11, -gamma*R];
143
144 theta=[theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6,theta7,
        theta8,theta9,...
145        theta10,theta11,theta12,theta13,theta14,theta15];
146
147 LMI = [LMI1<=0, Y>=0, gamma==15];
148 LMI = [LMI, theta>=0, sum(theta)==1, uncertain(theta)];
149 res=optimize(LMI,gamma,options);
150
151 % za gamma==30
152
153 LMI1=[Y*A' + A*Y + F'*(B2)' + B2*F , B1, Y*C1' + F'*(D12)';
154      B1', -gamma*Q, D11'];
155      C1*Y + D12*F, D11, -gamma*R];
156
157 theta=[theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6,theta7,
        theta8,theta9,theta10,theta11,theta12,theta13,theta14,
        theta15];
158
159 LMI = [LMI1<=0, Y>=0, gamma==30];
160 LMI = [LMI, theta>=0, sum(theta)==1, uncertain(theta)];
```

```
161 res=optimize(LMI, gamma, options);
162
163 %% prikaz matrica Y i F
164
165 Y = double(Y);
166 F = double(F);
167
168 %% izracun matrice pojačanja K
169
170 K = F/Y;
171
172 %% nominalne matrice sustava
173
174 A_nom = [
175
176     0         0         0     1.0000         0         0
177     0         0         0         0     1.0000         0
178     0         0         0         0         0     1.0000
179     0         0         0    -25.3706         0         0
180     0    -32.2775     2.5348         0    -16.3013    40.7533
181     0     47.9938    -39.0370         0     40.7533
182         -417.3264];
183
184 B1_nom = [
185
186     0         0         0
187     0         0         0
188     0         0         0
189     0.7899         0         0
190     0     0.5958    -1.4895
191     0    -1.4895    15.2527];
192
193 B2_nom = [
194
195     0         0         0
196     0         0         0
197     0         0         0
198     2.9518         0         0
199     0     2.8449    -7.1123
```

```
197         0    -7.1123    72.8318];
198
199 %% simulacija uz ode45()
200
201 % matrice pojačanja standardnog decentraliziranog PD
    regulatora
202
203 kpd=[-10, -10, -10];
204 Kp=diag(kpd);
205
206 kdd=[-25, -17, -15];
207 Kd=diag(kdd);
208
209 [T,X]=ode45(@odefunkpdoptw,[0 15],[0.4,0.35,0.3,0.2,0,0.1]);
210
211 ubz=K*X'; % slucaj bez poremećaja w
212
213 uw=K*X'; % slucaj sa poremećajem w
214
215 upd=Kp*(X(:,1:3))' + Kd*(X(:,4:6))'; % slucaj sa PD
    regulatorom
216
217 updopt=zeros(3,size(X,1)); % slucaj sa optimalnim PD
    regulatorom
218
219 updopt(1,:)=K(1,1)*(X(:,1))' + K(1,4)*(X(:,4))';
220 updopt(2,:)=K(2,2)*(X(:,2))' + K(2,5)*(X(:,5))';
221 updopt(3,:)=K(3,3)*(X(:,3))' + K(3,6)*(X(:,6))';
222
223 %% simulacijski prikazi
224
225 figure(1)
226 subplot(1,2,1)
227 plot(T, X, 'LineWidth',1.2)
228 xlabel('$t[s]$', 'Interpreter', 'latex')
229 ylabel('$q[rad]$', 'Interpreter', 'latex')
230 legend('$q_{1}$', '$q_{2}$', '$q_{3}$', '$\dot{q}_{1}$', ...
```

```

231     '$\dot{q}_{2}$', '$\dot{q}_{3}$', 'NumColumns', 3, '
        Interpreter', 'latex')
232 grid on
233
234 % u nastavku se s ...
235 % obzirom na odabranu konfiguraciju uvrstavao odabrani ubz,
        uw ili upd
236
237 subplot(1,2,2)
238 plot(T,ubz, 'LineWidth', 1.2)
239 xlabel('$t[s]$', 'Interpreter', 'latex')
240 ylabel('$u_a[V]$', 'Interpreter', 'latex')
241 legend('$u_{a1}$', '$u_{a2}$', '$u_{a3}$', 'Interpreter', 'latex
        ')
242 grid on

```

---

```

1 function dx=odefunk(t,x)
2
3 global A_nom B2_nom K n
4
5 dx=zeros(n,1);
6
7 % ulaz u objekt upravljanja
8
9 u=K*x;
10
11 dx(1:n)=A_nom*x(1:n)+B2_nom*u;
12
13 end

```

---

```

1 function dx=odefunkw(t,x)
2
3 global A_nom B1_nom B2_nom K n
4
5 dx=zeros(n,1);
6
7 % matrice koeficijenata trenja
8

```



```

9 Fm1=[0.73, 0, 0;
10     0, 0.9, 0;
11     0, 0, 0.71];
12
13 Fm2=[0.82, 0, 0;
14     0, 0.75, 0;
15     0, 0, 0.85];
16
17 % ulaz u objekt upravljanja
18
19 u=K*x;
20
21 % model nemodeliranog, staticnog trenja
22
23 w=Fm1*x(4:n)+Fm2*tanh(100*x(4:n));
24
25 dx(1:n)=A_nom*x(1:n)+B2_nom*u + B1_nom*w;
26
27 end

```

---

```

1 function dx=odefunkpd(t,x)
2
3 global A_nom B2_nom Kp Kd n
4
5 dx=zeros(n,1);
6
7 % ulaz u objekt upravljanja
8
9 u=Kp*x(1:3) + Kd*x(4:6);
10
11 dx(1:n)=A_nom*x(1:n)+B2_nom*u;
12
13 end

```

---

```

1 function dx=odefunkpdw(t,x)
2
3 global A_nom B2_nom Kp Kd n
4

```

```
5 dx=zeros(n,1);
6
7 % matrice koeficijenata trenja
8
9 Fm1=[0.73, 0, 0;
10      0, 0.9, 0;
11      0, 0, 0.71];
12
13 Fm2=[0.82, 0, 0;
14      0, 0.75, 0;
15      0, 0, 0.85];
16
17 % model nemodeliranog, staticnog trenja
18
19 w=Fm1*x(4:n)+Fm2*tanh(100*x(4:n));
20
21 % ulaz u objekt upravljanja
22
23 u=Kp*x(1:3) + Kd*x(4:6) + w;
24
25 dx(1:n)=A_nom*x(1:n) + B2_nom*u;
26
27 end
```

---

```
1 function dx=odefunkpdopt(t,x)
2
3 global A_nom B2_nom n K
4
5 dx=zeros(n,1);
6
7 u=zeros(3,1);
8
9 % ulaz u objekt upravljanja
10
11 u(1)=K(1,1)*x(1) + K(1,4)*x(4);
12 u(2)=K(2,2)*x(2) + K(2,5)*x(5);
13 u(3)=K(3,3)*x(3) + K(3,6)*x(6);
```

```
14
15 dx(1:n)=A_nom*x(1:n)+B2_nom*u;
16
17 end

```

---

```
1 function dx=odefunkpdoptw(t,x)
2
3 global A_nom B2_nom n K
4
5 dx=zeros(n,1);
6
7 u=zeros(3,1);
8
9 % matrice koeficijenata trenja
10
11 Fm1=[0.73, 0, 0;
12      0, 0.9, 0;
13      0, 0, 0.71];
14
15 Fm2=[0.82, 0, 0;
16      0, 0.75, 0;
17      0, 0, 0.85];
18
19 % model nemodeliranog, staticnog trenja
20
21 w=Fm1*x(4:n)+Fm2*tanh(100*x(4:n));
22
23 % ulaz u objekt upravljanja
24
25 u(1)=K(1,1)*x(1) + K(1,4)*x(4);
26 u(2)=K(2,2)*x(2) + K(2,5)*x(5);
27 u(3)=K(3,3)*x(3) + K(3,6)*x(6);
28
29 dx(1:n)=A_nom*x(1:n)+B2_nom*(u+w);
30
31 end

```

---

```
1 close all

```

```
2 clear all
3 clc
4
5 theta1=sdpvar(1); theta2=sdpvar(1); theta3=sdpvar(1);
6 theta4=sdpvar(1); theta5=sdpvar(1); theta6=sdpvar(1);
7 theta7=sdpvar(1); theta8=sdpvar(1); theta9=sdpvar(1);
8 theta10=sdpvar(1); theta11=sdpvar(1); theta12=sdpvar(1);
9 theta13=sdpvar(1); theta14=sdpvar(1); theta15=sdpvar(1);
10 theta16=sdpvar(1); theta17=sdpvar(1); theta18=sdpvar(1);
11 theta19=sdpvar(1); theta20=sdpvar(1); theta21=sdpvar(1);
12 theta22=sdpvar(1); theta23=sdpvar(1); theta24=sdpvar(1);
13 theta25=sdpvar(1);
14
15 % definiranje matrice A
16
17 a3=[0, theta1, theta2;
18     0, theta6, theta7;
19     0, theta11, theta12];
20
21 a4=[theta3, theta4, theta5;
22     theta8, theta9, theta10;
23     theta13, theta14, theta15];
24
25 A=[zeros(3,3),eye(3,3); a3, a4];
26
27 % definiranje matrica B1 i B2
28
29 b11=zeros(3,3);
30 b12=[theta16, 0, 0];
31 b13=[0, theta17, theta18];
32 b14=[0, theta19, theta20];
33
34 B1 =[b11;b12;b13;b14];
35
36 b21=zeros(3,3);
37 b22=[theta21, 0, 0];
38 b23=[0, theta22, theta23];
```

```
39 b24=[0, theta24, theta25];
40
41 B2 =[b21;b22;b23;b24];
42
43 % matrica izlaza C1
44
45 C1=[eye(3,3), zeros(3,3)];
46
47 % matrice prijenosa D11 i D12
48
49 D11=eye(3,3);
50 D12=D11;
51
52 n = size(A, 1); % dimenzija vektora varijabli stanja x
53 m = size(B2, 2); % dimenzija vektora ulaznih varijabli u
54 p = size(C1, 1); % dimenzija vektora izlaza z
55 q = size(D11, 2); % dimenzija vektora poremećaja w
56
57 % parametriziranje matrice Y
58
59 Y0=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y1=sdpvar(6,6,'symmetric');
60 Y2=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y3=sdpvar(6,6,'symmetric');
61 Y4=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y5=sdpvar(6,6,'symmetric');
62 Y6=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y7=sdpvar(6,6,'symmetric');
63 Y8=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y9=sdpvar(6,6,'symmetric');
64 Y10=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y11=sdpvar(6,6,'symmetric');
65 Y12=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y13=sdpvar(6,6,'symmetric');
66 Y14=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y15=sdpvar(6,6,'symmetric');
67 Y16=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y17=sdpvar(6,6,'symmetric');
68 Y18=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y19=sdpvar(6,6,'symmetric');
69 Y20=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y21=sdpvar(6,6,'symmetric');
70 Y22=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y23=sdpvar(6,6,'symmetric');
71 Y24=sdpvar(6,6,'symmetric'); Y25=sdpvar(6,6,'symmetric');
72
73
74 Y=Y0 + Y1*theta1 + Y2*theta2 + Y3*theta3 + Y4*theta4 + ...
75     Y5*theta5 + Y6*theta6 + Y7*theta7 + Y8*theta8 + ...
```

```

76     Y9*theta9 + Y10*theta10 + Y11*theta11 + Y12*theta12 +
      ...
77     Y13*theta13 + Y14*theta14 + Y15*theta15 + ...
78     Y16*theta16 + Y17*theta17 + Y18*theta18 + Y19*theta19 +
      ...
79     Y20*theta20 + Y21*theta21 + Y22*theta22 + Y23*theta23 +
      ...
80     Y24*theta24 + Y25*theta25;
81
82 % parametriziranje matrice F
83
84 F0=sdpvar(3,6,'full'); F1=sdpvar(3,6,'full'); F2=sdpvar(3,6,'
      full'); F3=sdpvar(3,6,'full');
85 F4=sdpvar(3,6,'full'); F5=sdpvar(3,6,'full'); F6=sdpvar(3,6,'
      full'); F7=sdpvar(3,6,'full');
86 F8=sdpvar(3,6,'full'); F9=sdpvar(3,6,'full'); F10=sdpvar(3,6,
      'full'); F11=sdpvar(3,6,'full');
87 F12=sdpvar(3,6,'full'); F13=sdpvar(3,6,'full'); F14=sdpvar
      (3,6,'full'); F15=sdpvar(3,6,'full');
88 F16=sdpvar(3,6,'full'); F17=sdpvar(3,6,'full'); F18=sdpvar
      (3,6,'full'); F19=sdpvar(3,6,'full');
89 F20=sdpvar(3,6,'full'); F21=sdpvar(3,6,'full'); F22=sdpvar
      (3,6,'full'); F23=sdpvar(3,6,'full');
90 F24=sdpvar(3,6,'full'); F25=sdpvar(3,6,'full');
91
92 F=F0 + F1*theta1 + F2*theta2 + F3*theta3 + F4*theta4 + ...
93     F5*theta5 + F6*theta6 + F7*theta7 + F8*theta8 + ...
94     F9*theta9 + F10*theta10 + F11*theta11 + F12*theta12 +
      ...
95     F13*theta13 + F14*theta14 + F15*theta15 + ...
96     F16*theta16 + F17*theta17 + F18*theta18 + ...
97     F19*theta19 + F20*theta20 + F21*theta21 + ...
98     F22*theta22 + F23*theta23 + F24*theta24 + ...
99     F25*theta25;
100
101 gamma=sdpvar(1);
102

```

```
103 % odabir solvera
104 options = sdpsettings('solver', 'sdpt3');
105
106 % optimiranje
107
108 LMI1 = [Y >= 0];
109
110 LMI2=[Y*A' + A*Y + F'*(B2)' + B2*F , B1, Y*C1' + F'*(D12)';
111      B1', -gamma*eye(q), D11';
112      C1*Y + D12*F, D11, -gamma*eye(p)];
113
114 LMI=[LMI1, LMI2<=0];
115
116 theta=[theta1, theta2, theta3, theta4, theta5, theta6, theta7
117        ,...
118        theta8, theta9, theta10, theta11, theta12, theta13,...
119        theta14, theta15, theta16, theta17, theta18, theta19,
120        theta20,...
121        theta21, theta22, theta23, theta24, theta25];
122
123 ogr = [theta >= 0, sum(theta)==1];
124
125 LMI = [LMI, ogr, uncertain(theta), gamma>=0];
126
127 res=optimize(LMI, gamma, options);
```

---