

# Računalna simulacija perspektive promatrača u zakrivljenom prostoru vremenu

---

**Parlov, Matko**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:389115>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-24**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Matko Parlov

ZAGREB, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Vladimir Milić, mag. ing.

Student:

Matko Parlov

ZAGREB, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru **prof. dr. sc. Vladimiru Miliću** na strpljenju, povjerenju i savjetima tijekom pisanja ovog rada. Izdvojio bih neizmjernu podršku koju mi je pružio kako bi moja želja ovako nestandardne teme se prenijela u stvarnost. Isto tako se zahvaljujem svojoj obitelji koja mi je pružila sve u životu te sam neizmjerno zahvalan na tome.

Matko Parlov



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: <b>602 – 04 / 24 – 06 / 1</b>	
Ur.broj: <b>15 – 24 –</b>	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Matko Parlov**

JMBAG: **0035235513**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalna simulacija perspektive promatrača u zakrivljenom prostoru-vremenu**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Computer simulation of the observer's perspective in curved spacetime**

Opis zadatka:

Tema ovog rada je simulacija perspektive stacionarnog promatrača u blizini jakog gravitacijskog polja numeričkim rješavanjem geodezika svjetlosnog tipa koristeći Schwarzschildovu metriku prostor-vremena. Cilj je načiniti računalni program u programskom jeziku MATLAB u kojem će se implementirati odgovarajuće numeričke metode za rješavanje diferencijalnih jednačbi koje slijede iz Schwarzschildovog rješenja Einsteinove jednačbe polja.

U radu je potrebno:

1. S pomoću Schwarzschildove metrike izvesti jednačbe koje opisuju geodezike svjetlosnog tipa. Usporediti rješenja dobivena direktnim rješavanjem jednačbe za geodezike i rješenja dobivena korištenjem Killingovih vektora u pojednostavljivanju sustava jednačbi.
2. Izvesti jednačbe sustava vidnog polja promatrača koji se nalazi u blizini gravitacijski potpuno urušenog objekta te opisati dobivene rezultate.
3. Načiniti simulacijske modele u matematičkom programskom jeziku MATLAB u kojima će se direktno numerički rješavati izvedene diferencijalne jednačbe. Napisati svoje vlastite funkcije u kojima će biti implementirane metoda Runge-Kutta četvrtog reda i Adamsova metoda četvrtog reda za rješavanje diferencijalnih jednačbi. Dati usporedbe ove dvije metode s obzirom na potrebno vrijeme izvršavanja.
4. Na temelju rezultata izvesti i sažeti zaključke te predložiti smjernice daljnjeg istraživanja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

30. 11. 2023.

**1. rok:** 22. i 23. 2. 2024.  
**2. rok (izvanredni):** 11. 7. 2024.  
**3. rok:** 19. i 20. 9. 2024.

**1. rok:** 26. 2. – 1. 3. 2024.  
**2. rok (izvanredni):** 15. 7. 2024.  
**3. rok:** 23. 9. – 27. 9. 2024.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Vladimir Milić

Prof. dr. sc. Damir Godec

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>i</b>
<b>Popis slika</b>	<b>vi</b>
<b>Popis simbola</b>	<b>vii</b>
<b>Popis kratica</b>	<b>ix</b>
<b>Sažetak</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Motivacija i ciljevi . . . . .	1
1.2 Gravitacijska optika . . . . .	2
<b>2 Gravitacija</b>	<b>3</b>
2.1 Aristotel . . . . .	3
2.2 Galileo Galilei . . . . .	3
2.3 Sir Isaac Newton . . . . .	5
2.3.1 Newtonov opis gravitacije . . . . .	5
2.3.2 Sustav gravitirajućih masa . . . . .	7
2.3.3 Gravitacijsko polje . . . . .	11
<b>3 Teorija relativnosti</b>	<b>17</b>
3.1 Skale i mjere sustava . . . . .	17
3.2 Relativnost u klasičnoj fizici . . . . .	19
3.2.1 Relativna brzina tijela . . . . .	19
3.2.2 Masa i duljina . . . . .	20
3.3 Sustavi u klasičnoj fizici . . . . .	21
3.4 Temeljni principi za relativnost u klasičnoj fizici . . . . .	23
3.5 Brzina svjetlosti . . . . .	23
3.5.1 Priroda svjetlosti . . . . .	24
3.5.2 Brzina svjetlosti kao konstanta . . . . .	25
3.6 Specijalna teorija relativnosti . . . . .	26

3.6.1	Vremenska dilatacija . . . . .	26
3.6.2	Kontrakcija duljine . . . . .	29
3.6.3	Simultanost . . . . .	30
3.7	Koordinatni sustavi za prostor i vrijeme . . . . .	31
3.7.1	Sinkronizacija satova . . . . .	31
3.7.2	Asinkronost satova u gibanju . . . . .	33
3.8	Lorentzove transformacije . . . . .	35
3.9	Minkowskijev prostor . . . . .	39
3.9.1	Upoznavanje sa sustavom prostora i vremena . . . . .	39
3.9.2	Vizualizacija različitih koordinatnih sustava . . . . .	40
3.9.3	Invarijanta prostora i vremena . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Opća teorija relativnosti</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1	Diferencijalna geometrija . . . . .	43
4.1.1	Tenzorska algebra . . . . .	43
4.1.2	Transformacija tenzora između koordinatnih sustava . . . . .	44
4.1.3	Metrika prostora . . . . .	46
4.2	Općeniti Riemannov prostor . . . . .	49
4.2.1	Mnogostrukost . . . . .	49
4.2.2	Kovarijantna derivacija . . . . .	50
4.2.3	Zakrivljenost prostora . . . . .	51
4.2.4	Geodezici . . . . .	54
4.3	Gravitacija u općoj teoriji relativnosti . . . . .	56
4.3.1	Poveznice sa geometrijom . . . . .	57
4.3.2	Opis gravitacije kao deformacije prostor-vremena . . . . .	59
4.4	Schwarzschildovo rješenje . . . . .	61
4.4.1	Schwarzschildova metrika . . . . .	61
4.4.2	Uvođenje Killingovih vektora . . . . .	62
4.4.3	Usporedba sa Newtonovim opisom gravitacije . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Perspektiva promatrača u blizini crne rupe</b> . . . . .	<b>69</b>
5.1	Jednadžbe za poput-svjetlosne geodezike . . . . .	69
5.1.1	Izračun putanje fotona s pomoću jednadžbe za geodezike . . . . .	69
5.1.2	Izračun putanje fotona s pomoću konstanti gibanja . . . . .	70
5.2	Opis problema . . . . .	73
5.2.1	Korišteni koordinatni sustav . . . . .	73
5.2.2	Definiranje slike . . . . .	76
5.2.3	Prikaz crne rupe . . . . .	78

---

5.2.4	Numeričko rješavanje putanje fotona . . . . .	79
5.3	Rezultati rada . . . . .	81
5.3.1	Slika promatračevog vidnog polja u blizini crne rupe . . . . .	81
5.3.2	Vizualizacija akrecijskog diska oko crne rupe . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>92</b>
	<b>Literatura</b>	<b>93</b>



# Popis slika

2.1	Skica Galileovog misaonog eksperimenta s kojim je ukazao na kontradiktornost Aristotelove teorije o proporcionalnosti inercije tijela i brzine padanja.	4
2.2	Dvije točkaste mase opisane Newtonovim izrazom za gravitaciju.	5
2.3	Vektor sile na jednoj masi uslijed gravitacijskog djelovanja.	6
2.4	Proizvoljni sustav točkastih masa u prostoru.	6
2.5	Pet jediničnih masa postavljene u dvodimenzionalnom prostoru.	8
2.6	Numeričko rješenje sustava sa pet točkastih masa.	9
2.7	Slučaj rješenja sustava za pobjeglu masu.	10
2.8	Grupiranje masa u različite parove.	10
2.9	Sustav sa dvije mase definiran u polarnom koordinatnom sustavu.	11
2.10	Vektorsko polje akceleracije masa uslijed gravitacijskog djelovanja mase u ishodištu.	12
2.11	Prikaz vektorskog polja s trećom dimenzijom kao veličina vektora.	13
2.12	Karakteristika efektivnog potencijala mase u ovisnosti prema radijalnoj udaljenosti od izvora potencijalnog polja za diskretne slučajeve rotacijske količine gibanja.	14
2.13	Grafički prikaz bilance energije za odabrani slučaj rotacijske količine gibanja i ukupne energije.	15
2.14	Eliptična orbita čestice s rotacijskom količinom gibanja $L = 2$ i ukupnom energijom $E = 0.4$ .	16
3.1	Problem relativne brzine bacanja lopte.	19
3.2	Prikaz dva različita promatranja istog niza događaja.	22
3.3	Skica pozicije planeta tijekom eklipse Jupiterovog mjeseca Io-a.	24
3.4	Skica Michelson-Morley eksperimenta.	26
3.5	Promatranja dva promatrača s relativnim međusobnim gibanjem na svjetlosni sat.	27
3.6	Pravokutni trokut za izračun prijeđenog puta fotona po promatraču B.	28
3.7	Skica trkališta gledanog iz perspektive stacionarnog promatrača s obzirom na trkalište.	29
3.8	Koordinate za prostor i vrijeme. Lijeva strana je prikaz koordinata za dvije dimenzije prostora a desna za jednu.	31
3.9	Proces sinkronizacije satova.	32

3.10	Sinkronizacija satova u gibanju. . . . .	33
3.11	Asinkronost satova u gibanju. Svaki sat predstavlja vrijednost vremena u sekunda:stotinka odnosno za svaku udaljenost od jedne svjetlosne sekunde satovi su pomaknuti za 50 stotinki u usporedbi sa satom u ishodištu. . . . .	35
3.12	Usporedba dva međusobno gibajuća sustava. . . . .	36
3.13	Koordinatni sustav prostora i vremena. . . . .	39
3.14	Prikaz širenja svjetlosti (žute linije) kroz vrijeme po osi $x$ od ishodišta. . . . .	40
3.15	Koordinatne osi sustava $K$ i $K'$ . . . . .	40
4.1	Diferencijalna udaljenost dvije točke u potpuno ravnom Euklidskom prostoru. . . . .	46
4.2	Mreža polarnog koordinatnog sustava. . . . .	48
4.3	Diferencijalna udaljenost polarnog koordinatnog sustava u obliku hipotenuze pravokutnog trokuta. . . . .	49
4.4	Vizualni prikaz ideje mnogostrukosti. . . . .	50
4.5	Paralelni transport vektora po dvodimenzionalnoj sferi. . . . .	51
4.6	Koordinatni sustav definiran na površini sfere. . . . .	52
4.7	Ilustracija općenitog puta u zakrivljenom prostoru. . . . .	55
4.8	Rješenja geodezika za dvodimenzionalni prostor na površini sfere sa pozadinskom slikom Merkatove projekcije Zemljine površine. . . . .	56
4.9	Koordinatni sustavi prostor vremena za dva promatrača koji se relativno gibaju i gledaju isti događaj. . . . .	58
4.10	Graf funkcije potencijala za Schwarzschildovo rješenje. . . . .	65
4.11	Graf funkcije potencijala za poput svjetlosne-čestice. . . . .	68
5.1	Skica postupka praćenja svjetlosti od kamere do izvora. . . . .	73
5.2	Lokalni koordinatni sustav kamere/promatrača. . . . .	74
5.3	Lokalni koordinatni sustav kamere/promatrača. . . . .	76
5.4	Prikaz Merkatove projekcije slike nebeske sfere. . . . .	77
5.5	Prikaz postupka mapiranja slike sa neba na vidno polje kamere. . . . .	77
5.6	Numeričko rješenje putanja fotona pri vizualizaciji sjene crne rupe. . . . .	78
5.7	Primjeri rješenja za slučajeve pozicije kamere na $r_c = 1.2r_s$ (lijevi graf) i $r_c = 0.5r_s$ (desni graf). . . . .	79
5.8	Grafički prikaz vremenskog izvršavanja Runge-Kutta i Adamsove metode za različite $N$ -ove pri $h = 10^{-3}$ te $\lambda_f = -100$ . . . . .	81
5.9	Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od $r_c = 10r_s$ . . . . .	82
5.10	Prikaz pojave Einsteinovog prstena. . . . .	82

5.11 Slika Einsteinovog prstena dobivena promatranjem teleskopa Hubble. Na slici vidimo Einsteinov prsten (bijeli obruč) koji je ujedno slika daleke galaksije koja se nalazi direktno iza galaksije (žuti dio) oko koje se fotoni zakreću. . . . .	83
5.12 Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od $r_c = 4r_s$ . . . . .	83
5.13 Preslikavanje slike šireg područja zbog jakog gravitacijskog djelovanja crne rupe. . . . .	84
5.14 Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od $r_c = 1.2r_s$ . . . . .	84
5.15 Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od $r_c = 1.2r_s$ zarotiranog za kut $\varphi = \pi$ oko svoje osi. . . . .	85
5.16 Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od $r_c = 0.7r_s$ zarotiranog za kut $\varphi = \pi$ oko svoje osi. . . . .	85
5.17 Slika super masivne crne rupe u središtu galaksije Messier 87 dobivene detekcijom sinhrotronske radijacije s pomoću Event Horizon Telescope-a (EHT). . . . .	86
5.18 Prikaz sustava crne rupe sa akrecijskim diskom. . . . .	87
5.19 Primjer fotona koji je došao sa akrecijskog diska. . . . .	87
5.20 Prikaz simulacije sustava crne rupe sa akrecijskim diskom. . . . .	88
5.21 Podjela područja na prikazu akrecijskog diska. . . . .	89
5.22 Putanje fotona koji se nalaze u 1. zoni prikaza akrecijskog diska. . . . .	89
5.23 Putanje fotona koji se nalaze u 2. (lijevo) i u 3.(desno) zoni prikaza akrecijskog diska. . . . .	90
5.24 Putanje fotona koji se nalaze u 4. zoni prikaza akrecijskog diska. . . . .	90
5.25 Putanje fotona koji se nalaze u 5. zoni prikaza akrecijskog diska. . . . .	91
5.26 Putanja fotona koji je došao sa akrecijskog diska te je napravio punu rotaciju oko crne rupe. . . . .	91

# Popis simbola

$a$	ubrzanje	$m/s^2$
$d$	duljina	$m$
$E$	energija	$J$
$F$	iznos sile	$N$
$K$	referentni koordinatni sustav	-
$L$	rotacijska količina gibanja	$kgm^2/s$
$l$	duljina	$m$
$M$	masa	$kg$
$m$	masa	$kg$
$p$	količina gibanja	$kgm/s$
$R$	skalar zakrivljenosti	-
$r$	radijus udaljenosti	$m$
$s$	prava udaljenost	$m$
$t$	koordinata vremena	$s$
$V$	potencijal	$J$
$v$	brzina	$m/s$
$x$	koordinata prostora	$m$
$y$	koordinata prostora	$m$
$z$	koordinata prostora	$m$

## Konstante

$c$	brzina svjetlosti	299792458 $m/s$
-----	-------------------	-----------------

$G$  gravitacijska konstanta  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

### Grčka slova

$\chi$  Vektor varijabli stanja, -

$\delta$  Kronecker delta -

$\eta$  metrika potpuno ravnog Minkowskijevog prostora -

$\Gamma$  Christoffelov simbol -

$\gamma$  Lorentzov faktor, -

$\lambda$  afini parametar -

$\tau$  pravo vrijeme  $s$

$\theta$  kutna koordinata, -

$\varphi$  kutna koordinata, -

### Indeksi

$D_i$  kovarijantna derivacija -

$E_k$  kinetička energija  $J$

$E_p$  potencijalna energija  $J$

$g_{mn}$  metrika prostora -

$K^\mu$  kontravarijantna komponenta Killingovog vektora -

$K_\mu$  kovarijantna komponenta Killingovog vektora -

$R^a_{bcd}$  Riemannov tenzor zakrivljenosti -

$R_{ab}$  Riccijev tenzor zakrivljenosti -

$V^i$  kontravarijantna komponenta općenitog tenzora prvog reda -

$V_i$  kovarijantna komponenta općenitog tenzora prvog reda -

### Akcenti

$\dot{\square}$  derivacija po vremenu  $t$  ili afini parametru  $\lambda$

$\vec{\square}$  vektor

# Popis kratica

SI Sustav međunarodnih jedinica (fr. *Système International d'Unités*).

# Sažetak

U ovom radu će se kroz uvodnih par poglavlja dati pregled i sažeti opis opće teorije relativnosti i kako se ona nadovezuje na specijalnu teoriju relativnosti te prijašnja shvaćanja o gravitaciji i vremenu. Kako mnogi izrazi nisu učestali u strojarstvu, ali i u većini ostalih grana znanosti, uvidjela se potreba da se svi termini ne uvode bez nadovezujućih objašnjenja kako bi se laik u ovom području i dalje mogao dobro orijentirati čitajući ovaj rad. Krajnji ishod rada je simulacija i vizualizacija, kako i sam naslov kaže, promatračeve perspektive u jako zakrivljenom prostor-vremenu. Nakon što opišemo termine i korišteni žargon, kako smo napomenuli, predstaviti ćemo upotrebljavani sustav sa koncentriranom masom u točki, tzv. Schwarzschildovo rješenje Einsteinovih jednadžbi polja. Na temelju toga ćemo numeričkim putem riješiti putanju fotona natrag kroz vrijeme, koji su došli u promatračevo vidno polje, tako ćemo dobiti njegovu sliku odnosno vidno polje. Pri numeričkom rješavanju ćemo usporediti metode rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi za ovaj sustav i usporediti njihove učinke. Na koncu ćemo dobivene rezultate simulacija predstaviti u kontekstu dosadašnjih promatranja i spoznaja o crnim rupama u astronomiji i astrofizici.

**Ključne riječi:** opća teorija relativnosti, zakrivljeni prostor-vrijeme, Schwarzschildovo rješenje, Einsteinova jednadžba polja, crna rupa.

# Abstract

In this work we will go through a few introductory chapters where we will hand out a brief description of the general theory of relativity and how it is tied to the special theory of relativity and earlier studies about gravitation and time. While many terms aren't common in engineering, and for that matter other branches of science, it was up most important to not introduce them without proper explanation where a rookie in the field could still find a footing while going through this paper. Final outcome of this work is simulation and visualization, as the title indicates, of observer's perspective in a strongly curved space-time. After we go over the terminology and jargon, as we have mentioned, we will present a specific solution used, the so called Schwarzschild's solution of Einstein's field equations. From there we will numerically solve photon trajectories back through time which entered the observer's field of view, thus we will get an image of what he sees. For numeric approach we will compare methods of integrating differential equations that describe the motion of a photon particle. Lastly, all results will be put into context of current astronomical and astrophysical observations and knowledge we have on the subject of black holes.

**Keywords:** general theory of relativity, curved space-time, Schwarzschild's solution, Einstein's field equation, black hole.



# 1 Uvod

Ljudski napredak i spoznaja o stvarnosti su drastično narasli u zadnjih 200 godina. Početkom prošloga stoljeća je Einstein postavio temelje novog modela shvaćanja prostora i vremena iz kojeg je iznjedrilo niz novih astronomskih otkrića predviđenih s pomoću njegovih jednadžbi. Jedna od tih spoznaja je postojanje crnih rupa. To je dovelo do niza popratnih znanstvenih i medijskih projekata u cilju predočavanja što su zapravo crne rupe, odnosno kako bi izgledalo biti u blizini jedne. Premda još nemamo načina da efikasno putujemo tisućama svjetlosnih godina, kako bi se približili jednoj (crnoj rupi), sam razvoj računalne znanosti i računala je doveo da se metaforički možemo dovesti u blizinu bilo koje i kakve god crne rupe mi to htjeli. No već smo puno toga nabasali u par uvodnih riječi pa prije nego što se natrpamo izrazima stanimo sa tempom i počnimo od početka.

## 1.1 Motivacija i ciljevi

Možda klišej ili ne, no uzor ovog projekta je film *Interstellar* od redatelja Cristophera Nolana. Premda pojmimo hollywoodske spektakle sa bez umnom zabavom, određeni aspekti spomenutog medija dodaju i potiču razvitak i istraživanja u područjima znanosti za koja se malo govori. Prije svega govorimo o području gravitacijske optike. Da malo opišemo film bez uništavanja prvog dojma, ako ga je tko imao na umu pogledati. Ukratko, poslana je ekspedicija kroz crvotočinu, koja ih šalje u blizinu ogromne crne rupe, nazvane Gargantua, gdje moraju obilaziti obližnje planete u nadi da pronađu prihvatljiv planet za nastavak ljudske vrste. Osim klasičnih filmskih pouka o ljubavi i hrabrosti, u filmu se velika pozornost posvećuje stvarnim<sup>1</sup> efektima dilatacije vremena i prostora te ubrzo se u filmu samo vrijeme tretira kao vrlo bitan resurs. Da opišemo točnije, jedan od planeta od interesa se nalazi vrlo blizu crne rupe te, kako ćemo poslije u jednadžbama vidjeti, vrijeme na tom planetu teče puno sporije od vremena koje ljudi doživljavaju na Zemlji. Samo taj detalj je dovoljan kao motivacija ovog rada, no više od toga, čitava kinematografija vezana za crnu rupu je produkt simulacija i jednadžbi opće teorije relativnosti. Detaljniji opis vizualizacije crne rupe vezane za film se može pročitati u [1]. Spomenuti rad je i temelj ovog, pa za dodatno shvaćanje određenih pojmova i ideja preporuka je detaljno ga pročitati i po potrebi sve referirane radove od kojih ćemo i ovdje par spomenuti.

Kako su mnogi izrazi i jednadžbe strani prosječnom čitatelju, osim naslova, ogroman cilj je i približavanje svega spomenutog široj publici koja je zainteresirana za ovaj rad. Ovakve početne riječi uvode i određenu odgovornost s obzirom da dato područje je ipak

---

<sup>1</sup>Pod stvarnim govorimo o teoretskim mogućnostima jednadžbi teorija relativnosti.

i dalje dosta složeno za obuhvatiti u par točaka. Ovo ne gledajmo stoga kao enciklopediju svega što se može iz ovog naučiti već kao uvodnu poveznicu za dalja proučavanja, bude li koga ovo motiviralo. Ubrzo ćemo vidjeti da se žargon, korišten u Općoj teoriji relativnosti, može dosta dobro prevesti u ostale grane znanosti, prije svega matematike, no ipak uzmimo to sa zrnom soli jer jednadžbe iza toga zahtijevaju puno pažnje i neprospavanih noći kako bi se u potpunosti shvatili. Za kraj ove male uvertire se želi ohrabriti čitatelja jer ovo što slijedi nije ništa strano onome što bi on trebao znati<sup>2</sup>, a pogotovo bi se trebala naglasiti kreativnost u razmišljanju koja može raščlaniti složene ideje na opipljive primjere.

## 1.2 Gravitacijska optika

Optika, odnosno znanost o vidu, se bavi promatranjima propagacije svjetlosti kroz medij, i među djelovanjem svjetlosti sa ostalim tvarima koje ispunjavaju prostor. Za pojam optike smo upoznati u svakodnevnom životu preko predmeta za vid, kao što su naočale ili dalekozori, no optika se ne veže samo na prolaz svjetlosti kroz staklene leće već možemo gledati bilo kakav primjer odmaka svjetlosti u prirodi. U našem kontekstu će sama gravitacija biti uzrok promjene putanje fotona (svjetlosne čestice) te će mase (kao izvor gravitacijskog djelovanja) biti svojevrzne leće. Pojam gravitacijska optika uvodima kao područje promatranja gravitacijskih leća. Premda pretpostavke o utjecaju gravitacijskog polja na svjetlost sežu i prije Einsteina, njegov model gravitacije je dao točniji opis pojave, te doveo do novih mogućnosti, kao što je postojanje crnih rupa. Razvojem računala su se primitivni<sup>3</sup> proračuni i slike počele rješavati i vizualizirati na puno brži i složeniji način od obične ljudske sposobnosti. Simulacije jakih gravitacijskih leća su dovele do klasificiranja novih pojava koje su s vremenom dokazane putem astronomskih promatranja. Konačno su se iz znanosti, simulacije gravitacijskih leća preselile i u multimedijski sadržaj za širu javnost. Mnoge zvjezdarnice, dokumentarci ili pak znanstveno fantastični filmovi su počeli koristiti simulacije i Einsteinove jednadžbe kako bi točnije izrazili daleke svemirske objekte.

---

<sup>2</sup>Pretpostavke su da se zna osnove iz derivacija i temeljno shvaćanje tenzorske algebre.

<sup>3</sup>Premda riječ primitivni upućuje na negativno, u ovom kontekstu mislimo na početne pokušaje vizualizacije gravitacijskih leća.

## 2 Gravitacija

Svakako je za pretpostaviti da ćemo se konstantno okretati oko pojma gravitacije duž cijelog ovog rada. Premda danas svima jasno, bar ono temeljno, gravitacija nije tisućljećima bila uvažavana u mjeri kako ju danas promatramo. Iako je za pretpostaviti da su određeni naučnici antike u egipatskoj ili jednoj od mezopotamijskih civilizacija imali, bar na umu, što bi mogla biti gravitacija, tek bi mogli reći da se dublje o tome počelo pričati u Grčkoj gdje su počeli temelji za gotovo sve današnje prirodne znanosti, a prije svega fizike i matematike.

### 2.1 Aristotel

Znamo kako je Aristotel dao ideju da svi predmeti žele doći u, kako je on to zvao, njihovo prirodno mjesto. To mjesto, po njemu, je za sve predmete na Zemlji bilo u samom centru planeta. Danas bi mogli uzeti poveznicu sa točkom najmanje energije odnosno svi predmeti žele biti u području sa najmanjim potencijalom tako da je već u određenoj mjeri Aristotel imao i pravo. Premda je njegovo shvaćanje bilo kroz opis svega materijalnog kao kombinacija 4 temeljna elementa (zemlja, voda, zrak i vatra) te su po njegovom razmišljanju sami ti elementi tražili svoje prirodno mjesto, primjerice zrak je išao od središta Zemlje prema gore. Dakako za detalje preporučuje se pogledati [2]. Uz Aristotela se može i spomenuti temelje i pokušaj dokazivanja geocentrične teorije, koju je najviše promovirao Ptolomej, te je bila prihvaćena stoljećima poslije Aristotela premda netom nakon Aristotelova života je grčki filozof Aristarh predložio heliocentrični model za kojega danas znamo da je ispravan, no njegova teorija je odbačena u korist geocentričnog modela.

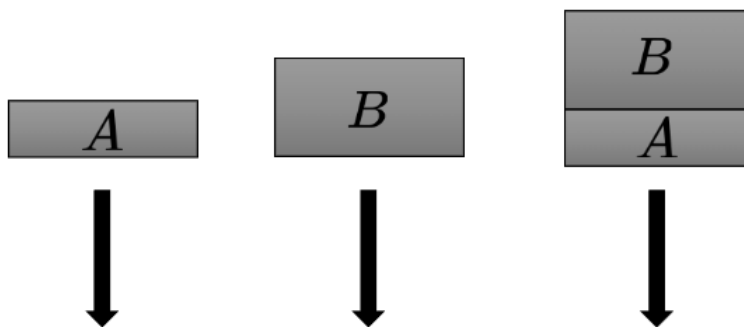
### 2.2 Galileo Galilei

Od antičke Grčke preskačemo u doba renesanse gdje dolazimo do velikana fizike Galileo Galileja. Svima poznat znanstvenik je, vezano za prije spomenutu raspravu između geocentričnog i heliocentričnog modela, zbog svojega rada i rušenja tadašnjih normi, završio u pritvoru. Priča oko njegovog sukoba sa vrhom Crkve je složena i zanimljiva, no nama nije od interesa. Kao mnoge priče u znanosti, i njegova je prožeta zanimljivim dogodovštinama, premda mnoge su samo prispodobe, pa primjerice da se uhvatimo za jednu. Po Aristotelu, teži predmeti padaju brže od lakših te se to razmišljanje uklesalo kao nepobitna norma. Jedna komična priča (najvjerojatnije

neistinita) je da su pokušali potvrditi njegovu teoriju bacivši dva kamena različite veličine, te su na svoje iznenađenje pobili njegovu teoriju i izrekli: *Više vjerujemo Aristotelu nego svojim očima*. Isto je i Galileo, koji je živio u Pisi, osmislio jednostavan eksperiment bacanja dva predmeta različite težine sa kosog tornja u Pisi. Sama slika renesansnog čovjeka koji baca cigle sa danas jednog od najpoznatijih turističkih atrakcija u svijetu je nešto što bi samo zamislili u filmovima, pa je stoga malo vjerojatno da je on za stvarno to i napravio, no vrlo moguće da je o tome dosta razmišljao. No i bez eksperimenta jednostavnim misaonim eksperimentom bi mogli pobiti Aristotelovu teoriju. Zamislimo predmet  $A$  i predmet  $B$  gdje vrijedi

$$m_A < m_B,$$

gdje  $m$  je masa predmeta. Pretpostavimo da je Aristotelova teorija točna i zaključujemo da će predmet  $B$  brže padati od predmeta  $A$ . Povežemo li predmet  $A$  sa predmetom  $B$  dolazimo do logičnog zaključka da će predmet  $A$ , jer je sporiji, zatezati predmet  $B$  te će skupa oba predmeta sporije padati.



Slika 2.1: Skica Galileovog misaonog eksperimenta s kojim je ukazao na kontradiktornost Aristotelove teorije o proporcionalnosti inercije tijela i brzine padanja.

Tu dolazimo do kontradikcije jer skupa  $A$  i  $B$  su teži od  $B$ , pa predstoji da predmeti s većom masom padaju sporije što je suprotno početnoj pretpostavci.

Dakako Galileova teorija upućuje na neovisnost brzine slobodnog pada usred gravitacijskog djelovanja i mase predmeta koji je objekt tog pada. To znači da bi pero i komad željeza padali na isti način. Kad bi sad uzeli pero i željeznu kuglu prije bi čuli grmoviti udar kugle nego vidjeli kako pero lagano dotiče podlogu ali u takvom sustavu imamo otpor zraka koji više utječe na pero. Kako bi potvrdili spomenutu Galileovu teoriju moramo izbaciti zrak iz igre, a gdje bolje to potvrditi nego na Mjesecu. Naime jedan monumentalni dokaz Galileove teorije je pokazan od strane astronauta Davida Scotta (člana posade Apollo 15), koji je pred kamerom pustio čekić i pero te su oba dotakli mjesečevu površinu u isto vrijeme.

## 2.3 Sir Isaac Newton

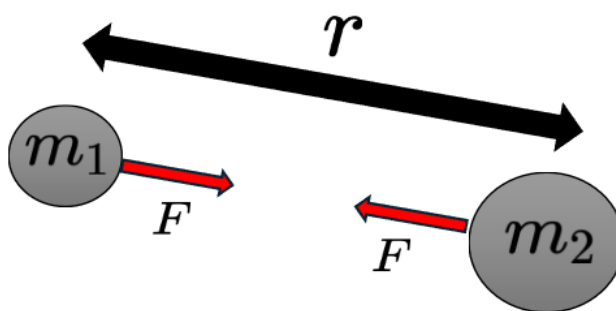
Prelazimo svega par godina na Isaaca Newtona. Zanimljivo je da godina smrti Galilea je ujedno i godina newtonovog rođenja<sup>1</sup>. Kao i kod Galilea, Newtona okružuju mnoge priče o njegovim pronalascima od kojih je najpoznatija sljedeća. Sjedeći pod stablom promatrajući nebo je na njegovu glavu pala jabuka što ga je navelo na razmišljanje. Gledajući Mjesec i jabuku se zapitao, zašto i Mjesec ne pada? Kako u prirodi nema iznimaka morao je postojati neki razlog i opće pravilo koje povezuje putovanje Mjeseca i jabuke. Nedugo nakon je u svojoj knjizi *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* postavio temelje orbitalne mehanike kakva se i danas koristi u svim svemirskim programima i astronomiji.

### 2.3.1 Newtonov opis gravitacije

Temeljni izraz koji opisuje gravitaciju je

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

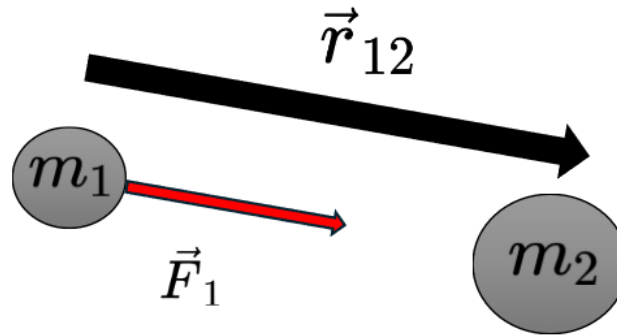
Sila između dvije mase  $m_1$  i  $m_2$  je kao prvo proporcionalna samim iznosom tih masa, pomnoženo sa konstantom  $G$  za koju danas znamo da vrijedi  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  te proporcionalna recipročnom vrijednosti kvadrata udaljenosti tih dviju masa  $r$ . Izraz (2.1) opisuje dvije točkaste mase koje se nalaze u prostoru što je prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2: Dvije točkaste mase opisane Newtonovim izrazom za gravitaciju.

Uviđamo kako sila djeluje na obe mase s istom vrijednošću i s vektorom koji pokazuje od središta jedne u drugu. Mogli bi to upotpuniti u izrazu ako se fokusiramo na jednu masu. Kao što prikazuje slika 2.3, uvodimo vektor položaja mase  $m_2$  s obzirom na masu  $m_1$  te ga definiramo kao vektor s ishodištem u težištu mase  $m_1$  i vrhom u težištu mase  $m_2$ , tad

<sup>1</sup>Galileo je umro 8. siječnja 1642. godine te je krajem iste, na Božić 25. prosinca 1642., rođen Newton.



Slika 2.3: Vektor sile na jednoj masi uslijed gravitacijskog djelovanja.

modificiramo izraz (2.1) u oblik

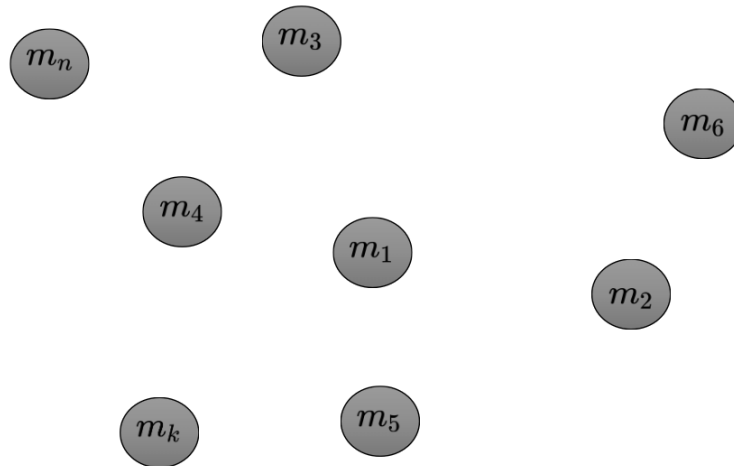
$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_{12}\|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}. \quad (2.2)$$

Za zapažanje je da ako promatramo silu na masu \$m\_2\$ imat ćemo obrnuti slučaj \$\vec{r}\_{21}\$ za kojeg vrijedi \$\vec{r}\_{21} = -\vec{r}\_{12}\$ onda i sama sila mora biti

$$\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_{21}\|^2} \frac{\vec{r}_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} = -\vec{F}_1,$$

odnosno obe sile su istog iznosa te suprotnog smjera.

Promatrali smo slučaj sa dvije mase što je jednostavno, no što kad imamo složeniji sustav.



Slika 2.4: Proizvoljni sustav točkastih masa u prostoru.

Tad analogno kao i kod sustava sa dvije mase primjenjujemo isti izraz s tim da za općenitu masu \$m\_i\$ mora vrijediti da će sila uslijed gravitacijskog privlačenja mase \$m\_j\$ biti

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|}, \quad (2.3)$$

gdje  $\vec{r}_{ij}$  je vektor relativnog položaja mase  $m_j$  s obzirom na masu  $m_i$ . Rezultantna sila na masi  $m_i$  mora biti zbroj svih pojedinih sila koje na nju djeluju

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \quad (2.4)$$

Primjenjujemo Newtonov 2. zakon, koji nalaže

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (2.5)$$

odnosno promjena količine gibanja je proporcionalna sili koja djeluje na spomenuto tijelo. Kako je količina gibanja produkt mase i njene brzine, derivacija  $\frac{dp}{dt}$ , uzimajući masu neovisnu o vremenu, je

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma. \quad (2.6)$$

što isto tako vrijedi i vektorski  $\vec{F} = m\vec{a}$ . S pomoću toga možemo postaviti zakon gibanja ovog sustava jer po (2.6) za  $i$ -tu masu vrijedi

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij}, \quad (2.7)$$

odnosno

$$\vec{a}_i = \sum_{j \neq i}^n \frac{\vec{F}_{ij}}{m_i},$$

što kad uvrstimo izraz (2.3) u jednadžbu će nam dati

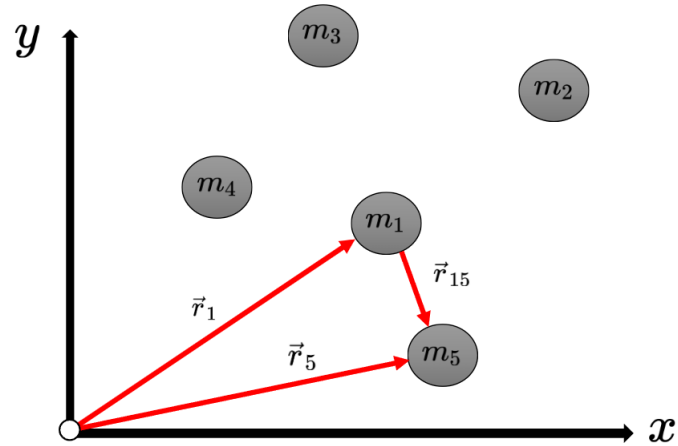
$$\vec{a}_i = \sum_{j \neq i}^n G \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|}. \quad (2.8)$$

Pokratila nam se masa promatranog objekta. Indirektno smo došli na Galileovu teoriju koja nalaže da će svi predmeti u gravitacijskom polju padati jednakim tempom.

### 2.3.2 Sustav gravitirajućih masa

Vratimo se na izraz (2.8). Vidimo kako će akceleracija direktno ovisiti o položajima svih masa u prostoru. Možemo s pomoću toga ovo oblikovati u sustav diferencijalnih jednadžbi. Uzmimo da se nalazimo u dvodimenzionalnom prostoru za kojeg vrijedi zapisani zakon. Sve prostorne komponente vektora izražavamo prema njihovim projekcijama na Kartezijeve pravokutne koordinate  $x$  i  $y$ . Postavimo stoga sustav, kao na slici 2.5, od 5 masa koje imaju jedinični iznos  $m_i = 1$ . Uzimamo prirodne koordinate takve da  $G = 1$  jer nas u konačnici zanima samo tendencija gibanja, a ne kako bi se stvarno vremenski ovaj sustav ponašao. Na slici 2.5 zorno možemo zaključiti da će svaka relativna pozicija među dvije masene čestice biti jednaka

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i. \quad (2.9)$$



Slika 2.5: Pet jediničnih masa postavljene u dvodimenzionalnom prostoru.

Kako je akceleracija pojedine čestice njena druga derivacija pozicije s obzirom na vrijeme vrijedi

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \sum_{j \neq i}^5 G \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \vec{e}_{ij}, \quad (2.10)$$

gdje smo uvrstili jedinični vektor  $\vec{e}_{ij}$  u smjeru vektora  $\vec{r}_{ij}$ . Izraz (2.10) predstavlja u stvari dvije jednadžbe vezane za pojedine komponente vektora akceleracije u referentnom koordinatnom sustavu koji je postavljen, tako da vrijedi

$$\frac{d^2}{dt^2} r_{ix} = \sum_{j \neq i}^5 G \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} e_{ijx},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r_{iy} = \sum_{j \neq i}^5 G \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} e_{ijy}.$$

Samom analizom sustava vidimo da za svaku masenu česticu vrijedu dvije jednadžbe drugog reda što znači da naš ukupni sustav sa 5 masa je 20. reda. To vrlo lako možemo simulirati uzimajući za svaku pojedinu masu 4 varijable stanja oblika

$$\chi_i = \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ \frac{d}{dt} r_{ix} \\ \frac{d}{dt} r_{iy} \end{bmatrix},$$



te će derivacija varijabli stanja biti jednaka

$$\frac{d}{dt}X_i = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}r_{ix} \\ \frac{d}{dt}r_{iy} \\ \sum_{j \neq i}^5 G \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} e_{ijx} \\ \sum_{j \neq i}^5 G \frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} e_{ijy} \end{bmatrix}.$$

Kako za pojedini  $\vec{r}_{ij}$  vrijedi jednadžba (2.9) koja se može rastaviti jednostavno po komponentama vektora

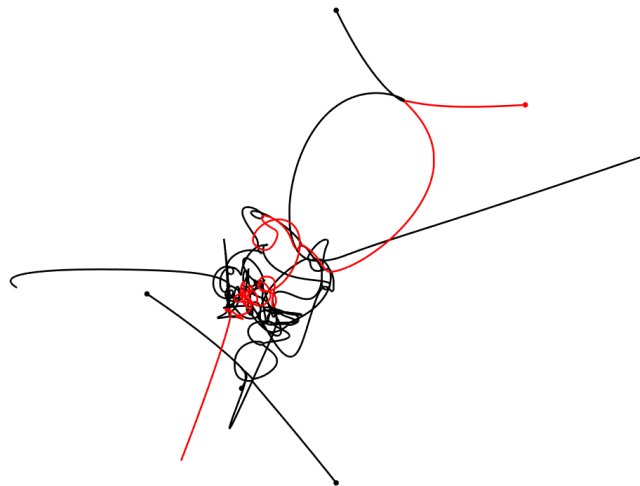
$$r_{ijx} = r_{ix} - r_{jx},$$

$$r_{ijy} = r_{iy} - r_{jy},$$

te se shodno tome druga norma tog vektora dobije jednostavnim korijenom zbroja kvadrata komponenti vektora

$$\|\vec{r}_{ij}\| = \sqrt{r_{ijx}^2 + r_{ijy}^2}.$$

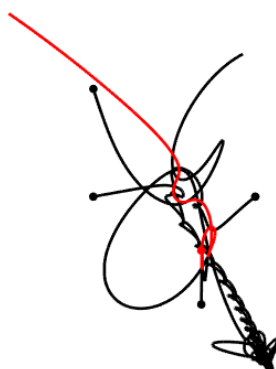
Putem ovih jednadžbi dolazimo do zaključka da će promjena stanja jedne mase ovisiti i o stanjima svih drugih masa što čini sustav uvelike zapetljanim. Bez obzira na to, numerički rješavači diferencijalnih jednadžbi nam pružaju priliku da dosta dobro aproksimiramo rješenja što je za naše potrebe sasvim dovoljno. Numeričkim rješavanjem dobivamo sliku 2.6.



Slika 2.6: Numeričko rješenje sustava sa pet točkastih masa.

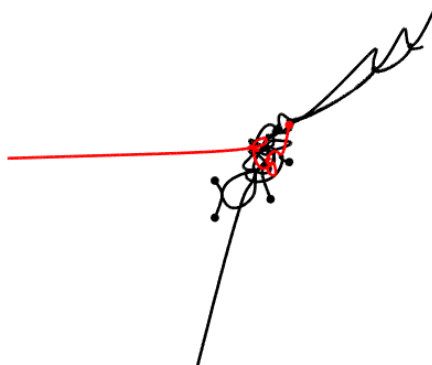
Na slici 2.6 su prikazane putanje svih pet masa koje su inicijalizirane sa nasumičnim pozicijama u prostoru te su svima početne brzine jednake nuli. Od svih putanja, radi

boljeg praćenja, je istaknuta jedna crvenom bojom. Na prvi pogled je sustav dosta kaotičan te sama statička slika ne pridonosi raspetljavanju čitave priče koja stoji iza ovakvog modela gravitacije. Naime početna pozicija svake mase je označena sa točkom, zatim slobodni krajevi će logično biti krajnje pozicije. Zamislimo to kao uže gdje imamo čvor na početku i slobodan kraj na drugom kraju. Vidimo da će većinom svi krajevi užeta završiti dosta blizu jednog drugog što bi i očekivali jer se mase međusobno privlače pa će stoga biti tendencija okupljanja svih masa u nakupinu. Premda je to većinom slučaj, zbog nasumičnosti kinematike pojedine mase, se mogu dogoditi slučajevi gdje masa pobjegne od ostatka masa<sup>2</sup> što pridonosi entropiji sustava koja je po Boltzmannovoj teoriji ništa drugo nego statistička pojava.



Slika 2.7: Slučaj rješenja sustava za pobjeglu masu.

Na slici 2.7 vidimo kako je crveno označena putanja mase završila daleko od ostatka drugih masa. Isto tako pojedini parovi čestice se mogu odvojiti i s time možemo završiti sa par različitih grupa masa kao na slici 2.8.



Slika 2.8: Grupiranje masa u različite parove.

Mogućnosti su, rekli bi, beskonačne te se složenost i broj ishoda povećavaju većim brojem masa u sustavu. Za zaključiti je da i sam naš Sunčev sustav je ništa drugo nego slučajan

<sup>2</sup>Dakako uz dovoljno vremena će se ta masa morati i vratiti, no gledamo sada kratkoročni period.

splet okolnosti, no stvarnost je puno složenija od ovakvog modela pa se stoga vratimo na lakšu tematiku.

### 2.3.3 Gravitacijsko polje

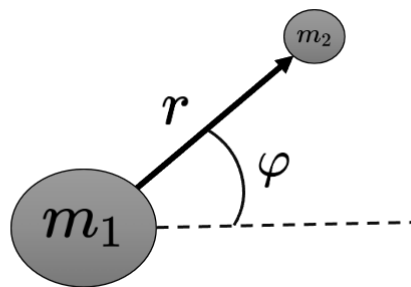
Ostaje nam i dalje odgovoriti na pitanje da li i Mjesec pada? Kako smo savladali slučaj sa pet masa uvedimo sada sustav sa dvije mase te ga postavimo na sljedeći način. Prvo uzimamo masu  $m_1$  da je puno veća od mase  $m_2$

$$m_1 \gg m_2.$$

Znamo da nebitno o masama, sile koje privlače oba tijela moraju biti jednake po iznosu i suprotnog smjera, primjerice čovjek povlači k sebi Zemlju istom silom kao i ona njega. Premda bi tako mogli kazati kako se Zemlja kreće prema nama, što je i do određene mjere točno, uzmimo akceleracije pojedinih tijela. Iz izraza (2.8) vidimo kako će akceleracija biti (osim duljine koja ih razdvaja) proporcionalna masom tijela koje ga privlači. Kako je masa  $m_1$  puno veća od  $m_2$ , vrijedit će

$$\vec{a}_1 \ll \vec{a}_2.$$

U prijevodu možemo zanemariti bilo kakvo gibanje mase  $m_1$  i postaviti ju, recimo, u središte našeg koordinatnog sustava. U prošleme primjeru smo radili sa Kartezijevim pravokutnim koordinatnim sustavom, no sada nam se pruža prilika uvođenja polarnog koordinatnog sustava koji će izgledati kao na slici 2.9.



Slika 2.9: Sustav sa dvije mase definiran u polarnom koordinatnom sustavu.

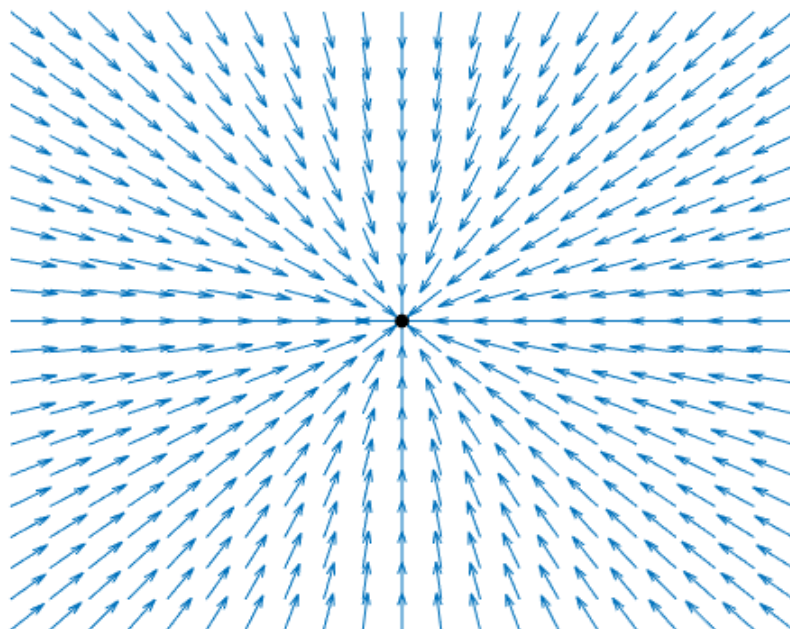
Ovako definiran sustav nam olakšava posao jer je jednadžba gibanja masa jednostavna. Kako znamo masa  $m_1$  je stacionarna dok masa  $m_2$  se stalno ubrzava prema središtu mase  $m_1$ . Pustimo li masu  $m_2$  da iz bilo koje početne pozicije slobodno pada, doseći će masu  $m_1$ , što je trivijalno rješenje koje nas ne zanima. Od interesa nam je uvođenje tangencijalne komponente brzine za masu  $m_2$  i vidjeti kako se ponaša sustav. Prije nego prijedemo na numeričko rješavanje uzeti ćemo si truda da ponajbolje analiziramo sustav. Kako bi

moгли nešto dublje reći uvodimo ideju polja. U fokusu nam se nalazi masa  $m_2$  koja se nalazi u gravitacijskom polju čiji izvor je ništa drugo nego masa  $m_1$ . Uzmimo izraz za akceleraciju mase  $m_2$

$$a_{2r} = -G\frac{m_1}{r^2}, \quad a_{2\varphi} = 0. \quad (2.11)$$

Dakle gdje god se nalazili u prostoru, akceleracija je uvijek vektor koji gleda prema ishodištu sustava te je obrnuto proporcionalan radijusom udaljenosti mase od istog tog ishodišta. To nam pruža mogućnost da svakoj točki u prostoru pridodamo njezin odgovarajući vektor akceleracije koju bi masa  $m_2$  osjetila da se nalazi točno na toj poziciji.

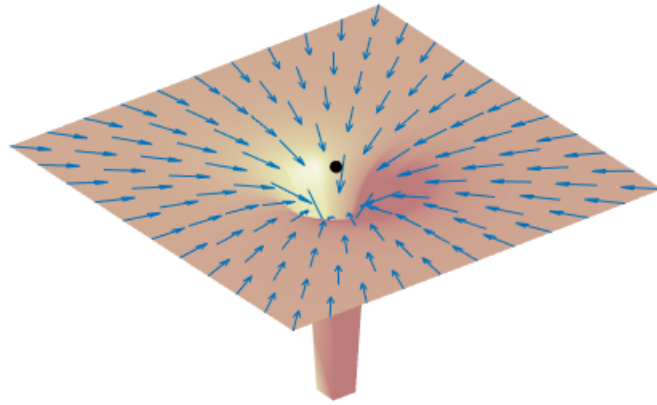
Kad bi našu masu  $m_2$  provukli kroz sve točke prostora i zapisali svaki vektor ubrzanja koje ono osjeti dobili bi vektorsko polje.



Slika 2.10: Vektorsko polje akceleracije masa uslijed gravitacijskog djelovanja mase u ishodištu.

Svi vektori gledaju prema središtu. Za napomenuti je da su na slici 2.10 prikazane orijentacije vektora, a ne i njihovi iznosi. Za zorniji prikaz veličine vektora akceleracije moramo dodati treću dimenziju slici 2.10 koja će označavati veličinu tih vektora. Slika 2.11 nije ništa drugo nego recipročna vrijednost kvadrata udaljenosti od ishodišta sustava u dvije dimenzije. Matematički možemo zaključiti da će u samom središtu vrijednost akceleracije biti beskonačna<sup>3</sup> no to područje izostavljamo iz pogleda.

<sup>3</sup>Recipročna vrijednost  $r$ -a na kvadrat će za  $r \rightarrow 0$  težiti u beskonačnost.



Slika 2.11: Prikaz vektorskog polja s trećom dimenzijom kao veličina vektora.

Pri analizi ovakvog sustava zanimaju nas konstante gibanja koje opisuju masu  $m_2$ . Mora uvijek vrijediti zakon očuvanja energije pa to vrijedi i za ovaj slučaj. Opišimo naš sustav kao sumu energija objekta koji orbitira to jest mase  $m_2$

$$E_k + E_p = E$$

gdje  $E_k$  je ukupna kinetička energija tijela koju možemo prikazati kao

$$E_k = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\varphi}^2,$$

a  $E_p$  kao

$$E_p = \int_{\infty}^r \frac{Gm_1m_2}{x^2} dx = \left| -\frac{Gm_1m_2}{x} \right|_{\infty}^r = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Suma kinetičke i potencijalne energije, uz supstituciju  $L = m_2r^2\dot{\varphi}$  kao rotacijska količina gibanja, glasi

$$\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_2r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = E. \quad (2.12)$$

Možemo podijeliti sve sa  $m_2$ , a kako  $E$  je konstanta, dijeljenjem sa  $m_2$  ostaje konstanta što možemo jednostavno upiti u simbol  $E$ , odnosno radimo  $\frac{E}{m_2} \rightarrow E$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = E, \quad (2.13)$$

gdje  $V(r)$  je efektivni potencijal čestice te je oblika

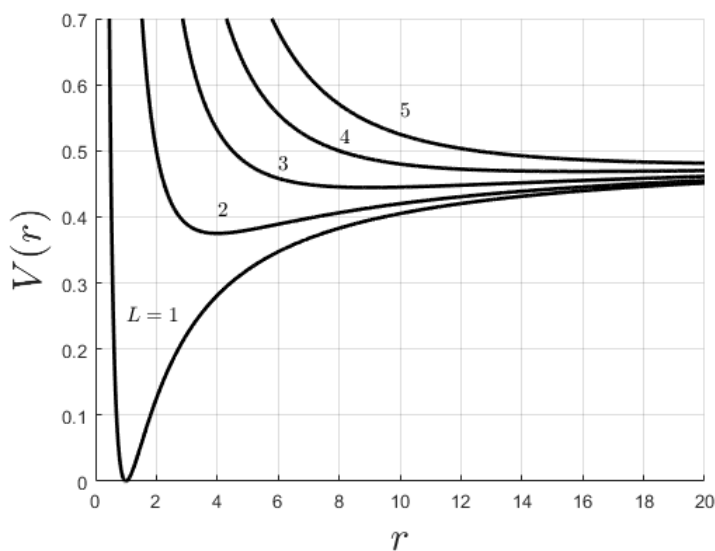
$$V(r) = -\frac{Gm_1}{r} + \frac{L^2}{2r^2}, \quad (2.14)$$

gdje smo napravili supstituciju  $\frac{L}{m_2} \rightarrow L$ .

Kako bi interpretirali funkciju za potencijal čestice moramo vidjeti kako ona utječe na ukupnu bilancu energije. Eksplicitno izrazimo radijalnu kinetičku energiju podijeljenu sa masom

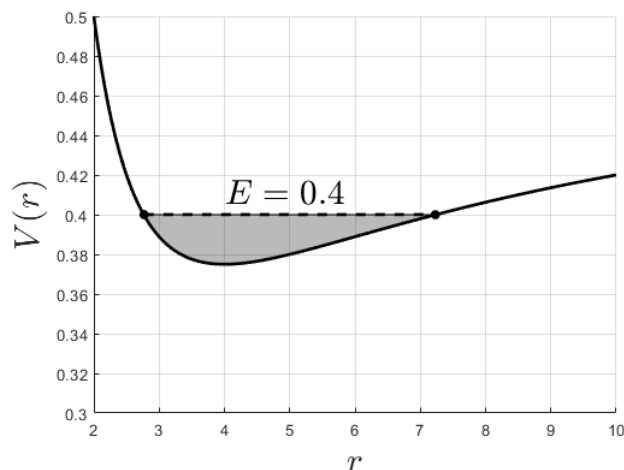
$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - V(r). \quad (2.15)$$

Mora vrijediti  $V(r) \leq E$  i  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \leq E$  što znači da kad  $V(r) < E$  vrijedi  $\dot{r}^2 > 0$ . Slično kao kod sustava opruge i mase gdje se kinetička energija mase izmjenjuje s elastičnom energijom u opruzi. Ako je opruga sabijena, tako da je sva energija sustava pohranjena u njenoj elastičnoj energiji, kinetička energija će biti nula, isto vrijedi i obrnuto ako imamo kinetičku energiju jednaku ukupnoj energiji sustava, odnosno opruga je skroz opuštena. No kako bismo bolje shvatili bit ovih veličina prikazujemo grafički ovisnosti funkcije  $V(r)$  sa različite diskretne slučajeve rotacijske količine gibanja  $L$  kao na slici 2.12.



Slika 2.12: Karakteristika efektivnog potencijala mase u ovisnosti prema radijalnoj udaljenosti od izvora potencijalnog polja za diskretne slučajeve rotacijske količine gibanja.

Kako radimo sa bezdimenzijskim veličinama za masu i konstantu gravitacije, svodimo sve na jedinične vrijednosti. U gornjem grafu na slici 2.12 smo prikazali 5 diskretnih slučajeva za  $L$  u vrijednostima od 1 do 5 kao što je i prikazano. Uz malu napomenu, kad  $r$  teži u beskonačnost, efektivni potencijal po izrazu (2.14) teži u nulu. Kako bismo imali efektivni potencijal čija je kompletna kodomena pozitivnog predznaka, povećali smo sve za pola u pozitivnom smjeru. To nam ne utječe na fiziku jer u konačnici promatramo relativne vrijednosti stanja, a ne apsolutne. Fokusirajmo se na samo jednu krivulju sa slike 2.12, za  $L = 2$  te postavimo ukupnu energiju da iznosi  $E = 0.4$ . Na slici 2.13 sivo označeno je područje razlike  $E - V(r)$  što odgovara kinetičkoj energiji u radijalnom smjeru. Za česticu koja se nalazi u ovom tzv. bunaru će se kroz vrijeme kinetička energija u radijalnom smjeru i efektivni potencijal pretakat jedan u drugi.



Slika 2.13: Grafički prikaz bilance energije za odabrani slučaj rotacijske količine gibanja i ukupne energije.

Ako gledamo geometrijski ovakav sustav opisuje eliptičnu orbitu gdje imamo periapsis<sup>4</sup> i apoapsis<sup>5</sup> na točkama gdje potencijal  $V(r) = E$ . U ovom slučaju periapsis je na  $r \approx 3$ , a apoapsis na  $r \approx 7$ . Kad čestica dođe u jednu od tih točaka mijenja smjer radijalne brzine. Uzmimo stoga ovaj sustav, zapisan s pomoću diferencijalnih jednadžbi slično kao i u izrazu (2.10), no sada postavimo početne uvjete u skladu sa bilancom energije kao i na slici 2.13. Dakle kako vrijedi  $L = 2$  mora isto tako vrijediti

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{L}{r_0^2},$$

gdje odabiremo početni  $r_0$  u intervalu gdje nalazimo sivo područje sa slike 2.13. Za  $E = 0.4$  početna brzina u radijalnom smjeru mora biti jednaka

$$\dot{r}_0 = \pm \sqrt{2(E - V(r_0))},$$

za koju proizvoljno odabiremo predznak. Sustav jednadžbi mora zadovoljavati očuvanje energije i rotacijske količine gibanja pa će sama brzina rotacije biti ovisna samo o radijusu udaljenosti  $r$  odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2},$$

te radijalna brzina je jednaka

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(E - V(r))},$$

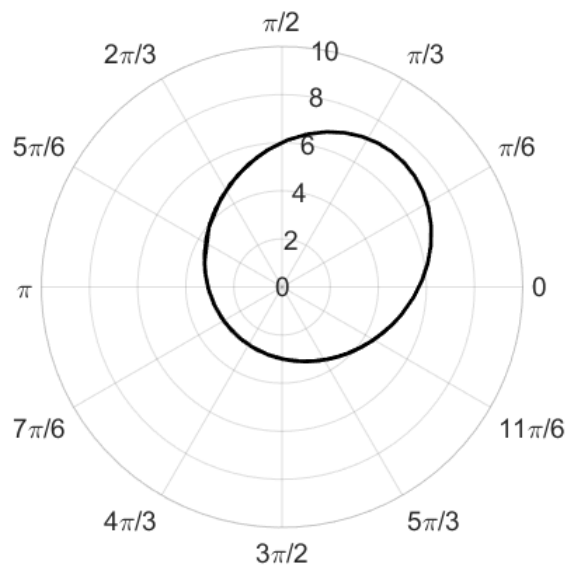
no ovdje nam je bitno znati predznak i kad se mijenja. Kako bi se mogli toga osloboditi deriviramo izraz po vremenu te dobivamo

$$\ddot{r} = \frac{-Gm_1}{r^2} + \frac{L^2}{r^3}.$$

<sup>4</sup>Periapsis je općeniti termin za točku orbite najbliže tijelu oko kojeg se orbitira.

<sup>5</sup>Suprotno od periapsis, apoapsis označuje najdalju točku orbite od tijela oko kojeg se orbitira.

Razlog dodatne derivacije i proširenje sustava na sustav trećeg reda je u cilju dobivanja detaljnijeg opisa kinematike. Ponovno rješavamo pojednostavljeni sustav numerički.



Slika 2.14: Eliptična orbita čestice s rotacijskom količinom gibanja  $L = 2$  i ukupnom energijom  $E = 0.4$ .

Vidimo po slici 2.14 da orbita ispunjava sve karakteristike koje smo proanalizirali promatrajući konstante gibanja. Naime kao i na grafu potencijala periapsis je na udaljenosti  $r \approx 3$  te apoapsis je na udaljenosti  $r \approx 7$ . Dodatno proširenje sustava nam je dobro došlo jer smo predznake za brzinu u potpunosti isključili iz naših izraza.

Korak po korak smo došli do odgovora na Newtonovo početno pitanje. Mjesec kao i svi predmeti (ako se referiramo samo na Zemljin sustav) uistinu pada prema Zemlji no za razliku od jabuke, koja je pogodila Newtona, Mjesec ima točno ukupne energije i rotacijske količine gibanja oko Zemlje da se nalazi u orbiti na prosječnoj udaljenosti od 384 401 km od Zemlje.



## 3 Teorija relativnosti

Na putu do opće teorije relativnosti moramo se osvrnuti na sam početak tog pojma u znanosti te razvitak teorije u specijalnu teoriju relativnosti. Korak po korak, izvedeći jednadžbe ćemo se upoznati sa samom relacijom između prostora i vremena te ostaviti na kraju temelj za sljedeće poglavlje koje će se baviti samom geometrijom prostora odnosno prostor-vremena. Glavnina ovog poglavlja je napravljena po uzoru na [3] uz velike inspiracije od strane prof. Brian Greena sa Columbia University čija predavanja na ovu temu, koja se lako mogu naći na internetu, daju puno više intuitivan način razmišljanja o ovim konceptima. Uz sve to je od preporuke pogledati [4] od strane Einsteina gdje je sve ideje o kojima ćemo pričati predstavio na čitatelju razuman način. Za svrhe ovog rada je dovoljno usavršiti sljedećih par potpoglavlja jer su oni sažetak spomenute literature te izvori ostaju za detaljniji uvid u ono što slijedi.

Priča o teoriji relativnosti počinje samom pričom o stvarnosti ili pobliže stvarnosti vremena i prostora u kojemu se nalazimo. Za odgovor na pitanje što je stvarnost, kroz povijest, smo se služili vlastitim promatranjima prirode oko nas. Za primjer nam stoje mnoge anegdote<sup>1</sup> kao primjerice Arhimedovo otkriće istisnine predmeta dok se kupao u kadi. Slučajno je, dok je mislio kako ispitati je li kruna od Hierona II. napravljena od zlata, igrajući se sa krunom i zlatnom polugom iste mase uvidio da se voda više podignula kad je u vodu uronio krunu za razliku od poluge zbog čega je zaključio da je kruna napravljena od različitog materijala i u sreći je iskočio gol iz kade i trčeći preko ulice vikao Heureka! (grč. *εὕρηκα!*)-*Pronašao sam!*. Isto tako je Newton, kad mu je jabuka pala na glavu dok je sjedio pod stablom, počeo zapisivati temeljne zakone vezane za gravitaciju i privlačenja masa. Galileo je, u raspravi sa prijateljem, bacao dvije kugle istih dimenzija ali različitih masa sa kosog tornja u Pisi. Zaključak je bio da ubrzanje predmeta u slobodnom padu na zemlji ne ovisi o masi što je ujedno do tad bilo kontradiktorno promišljanjima Aristotela. Pitanje stoji, što ako naša promatranja i dosadašnja iskustva isključuju određene pojave na različitim skalama stvarnosti.

### 3.1 Skale i mjere sustava

Skala u našem smislu će biti usko vezana uz red veličine. Vrlo dobra poveznica je sami fizički predmet kojeg zovemo skalama što je sinonim za ljestve ili stepenice. Veličine o kojima pričamo su prije svega veličine mase, duljine i vremena. Dakle trojni sustav dimenzija. Mi smo navikli na međunarodno prihvaćeni sustav kojeg nazivamo metrički, po

---

<sup>1</sup>Koliko su istinite je nemoguće znati jer je malo zapisa ili dokaza za njihovo postojanje.

mjeri duljine metru. Primjerice za duljinu možemo pričati o metru kao osnovnoj mjernoj jedinici koja je povijesno bila vezana uz meridijan koji prolazi kroz Pariz<sup>2</sup>, dok zbog shvaćanja da se mjere moraju definirati na temelju etalona koji su stalni, je promijenjen 1983. u definiciju puta kojeg svjetlost prijeđe u vakuumu za otprilike 3.335 nanosekunde. Uzmimo samo tu zamisao obe definicije metra. Govorimo o milijuntim ili milijarditim dijelovima duljine ili vremena. Teško je točno pojmiti i zamisliti takve veličine. Mi kad pričamo o brzinama govorimo o kilometrima po satu, kao primjerice 100  $km/h$  što je otprilike 28  $m/s$  što je djelić brzine svjetlosti. Sigurno svatko može zamisliti kako bi izgledalo da pored njih prođe auto s brzinom od 100  $km/h$ , no kako bi zamislili da se taj auto kreće 10 milijuna puta brže, bili to mogli pojmiti? Isto tako smo naviknuti i dobro predočavamo duljine od par metara pa do kilometara ili obrnuto centimetre i čak milimetre, no teško ćemo zamisliti nano ili pikometar te obrnuto kozmičke udaljenosti koje sežu u milijunima i milijardama kilometara, pa i znatno više. Vidljivo je da smo ograničeni u uskom području ukupne skale veličina zbog čega postoje velike vjerojatnosti da naša promatranja i zapisi temeljeni na tome nisu sveobuhvatna slika ukupne stvarnosti.

Vrlo je bitno se kratko osvrnuti i na mjere koje će se koristiti u ovome radu. Kako je većina svijeta prihvatila Sustav međunarodnih jedinica (fr. *Système International d'Unités*) ili SI sustav, mi ćemo se isto koristiti tim sustavom. U osnovi nam trebaju tri veličine; veličina za masu, vrijeme i duljinu, što će nam po SI sustavu biti  $kg$  kilogram za masu,  $s$  sekunda za vrijeme te  $m$  metar za duljinu. U elektrotehnici se može još uz te veličine pojaviti i četvrta  $A$  amper za jakost struje te u termodinamici se koristi i  $K$  kelvin za temperaturu no sama temperatura se može predstaviti kao prosječna kinetička energija čestica pomoću Boltzmannove konstante<sup>3</sup>. Mi ćemo se baviti gibanjima tijela za što su nam potrebne samo prve tri veličine. Za napomenuti je da mnoge druge veličine, koje ćemo koristiti, se mogu prikazati kombinacijom ove tri osnovne, primjerice tlak obično mjerimo u Paskalima odnosno  $Pa$  što se može u osnovnim jedinicama prikazati kao  $kgm^{-1}s^{-2}$  te jedinica za energiju Džul  $J$  koja isto tako se može pretvoriti u kombinaciju tri osnovne veličine,  $kgm^2s^{-2}$ .

Nužno SI sustav ne mora biti prikladan za određene probleme u relativnosti kako ćemo i vidjeti. Spominjali smo u početku skale želeći implicirati da naše poimanje stvarnosti i shodno tome mjerenja su prikladna našim svakodnevnim događanjima i okolišu u kojem se nalazimo. Primjerice svjetlost u jednoj sekundi prođe put od 299 792 458  $m$ , takva udaljenost je užasno velika za naše pojmove, no na kozmičkom nivou, gdje udaljenosti zvijezda mogu biti od par pa do stotina svjetlosnih godina, to postaje zrno pijeska u

<sup>2</sup>Jedan metar je bio 40 milijunti dio Pariškog meridijana.

<sup>3</sup>Boltzmannova konstanta daje odnos prosječne kinetičke energije plina i njegove temperature. Izraz koji daje odnos je  $\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT$  gdje Boltzmannova konstanta iznosi  $k = 1.380649 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ .

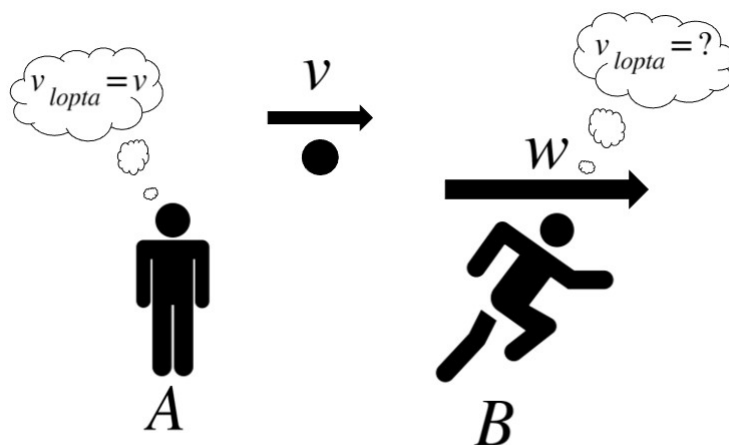
pustinji. Stoga će se umjesto SI sustava za duljinu ili vrijeme još i koristiti duljine vezane za put koji svjetlost prođe recimo u jednoj sekundi, minuti ili godini ovisno o problemu kojeg obrađujemo. Kad i zašto ćemo to koristiti će biti napomenuto kako se ne bi izgubili u svoj priči i jednadžbama.

## 3.2 Relativnost u klasičnoj fizici

Izraz klasična fizika će se provlačiti kroz ovaj rad. Usporedno ćemo istu nazivati Newtonska ili Galilejanska fizika u čast ljudi koji su najviše obilježili taj period znanosti. Klasična fizika će se odnositi na razmatranja i zakone postavljene o gibanjima tijela do modernog shvaćanja o tim pojmovima koje je postavio Albert Einstein te su svojevremeno bili dokazani<sup>4</sup>. Ideje klasične fizike ćemo prikazati na par primjera.

### 3.2.1 Relativna brzina tijela

Veliki dio teorije relativnosti je vezan uz gibanja odnosno relativnu brzinu dva sustava ili promatrača. Vrijedno je stoga uzeti u obzir promatranja i zakone, utemeljene u klasičnoj fizici, kako bi bolje razumjeli razliku koju uvodi Einstein za taj problem. Zamislimo sljedeću situaciju (prikaz na slici 3.1): bacamo (osoba A) loptu (objekt) brzine<sup>5</sup>  $v$  prema prijatelju (osoba B) koji od nas trči brzinom  $w$ .



Slika 3.1: Problem relativne brzine bacanja lopte.

Pitanje je kako osoba B pojmi brzinu lopte? Klasična fizika ima vrlo jednostavan odgovor na to pitanje. Jednostavno se brzine oduzmu jedna od druge što znači da osoba

<sup>4</sup>Svakako Newton i Galileo zbog dotadašnje aparature nisu ni mogli dokazati ili postaviti zakone koje je Albert Einstein postavio stoljećima iza njih.

<sup>5</sup>Brzina je relativna s obzirom na osobu A odnosno podlogu jer se podrazumijeva da osoba stoji.

B promatra loptu koja se kreće brzinom  $v_{lopta} = v - w$ , predznaci brzina su isti pa osobi B se čini da se lopta giba sporije. Suprotno da smo imali situaciju u kojoj je osoba B išla na loptu tad bi relativna brzina lopte s obzirom na osobu B bila zbroj njihovih veličina odnosno  $v_{lopta} = v + w$ . Dakle problem izračuna kako pojedini promatrač, koji se jednoliko giba u usporedbi sa nama, promatra gibanja različitih objekata je vrlo jednostavno<sup>6</sup> riješiti u klasičnoj fizici.

### 3.2.2 Masa i duljina

Ostala dva pojma odnosno veličine koje vežemo uz materijalne tvari, a to su masa i duljina, lako definiramo u okvirima klasične fizike. Primjerice masa predmeta se drži kao konstantna bez obzira na to je li predmet stoji ili se giba bilo kojom brzinom. Isto tako duljina koju promatramo ostaje nepromijenjena, lopta koja stoji i koja se giba ostaje istih dimenzija. Iz tih principa možemo izvući i sljedeće tvrdnje. Energija predmeta koji se giba odnosno kinetička energija je jednostavno  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Kako je masa ista bez obzira na gibanje tijela tad jedina promjena kinetičke energije slijedi usred promjene brzine predmeta. Tako za prije spomenuti primjer osoba B trčeći od lopte promatra loptu kao da ima manju kinetičku energiju nego što je promatramo mi. Možemo to i zamisliti u smislu da ga u nekom trenutku ta ista lopta i pogodi, kako se kretao u smjeru kretanja lopte, energija<sup>7</sup> s kojom je lopta udarila u njega je manja nego da je stajao ili još gore trčao u nju. Iz jednadžbe je jednostavno zaključiti da će energija kojom lopta udari od osobu B biti proporcionalna kvadratu njihove relativne brzine odnosno brzine lopte koju doživljava osoba B. Isto tako da se vežemo na duljinu. Primjerice zamijenimo loptu sa kopljem duljine  $l$  izmjerenu za koplje koje je stacionarno (ne giba se), osoba A i osoba B će isto reći da je koplje duljine  $l$  jer, kako smo rekli, duljina je konstantna bez obzira na brzinu promatrača relativno prema objektu.

Ove sve pojave su nam intuitivne, tako promatramo i vidimo svijet i stoga moraju biti istinite ili vrlo blizu istine, no kako smo rekli na početku, naša promatranja su vezana uz vrlo usko područje ukupne skale veličina koje vidimo. Vrlo je izvjesno da ova promatranja i principi nisu potpuno točni, no ne možemo ih tek tako odbaciti jer su oni i dalje dobri za određeni dio stvarnosti kojeg mi možemo pojmiti. Shodno tome je za reći da svi novi zakoni i jednadžbe, koje ćemo tijekom ovog rada izvoditi, moraju u sebi sadržavati izraze vezane uz klasičnu fiziku.

<sup>6</sup>Jednostavno uzmite sa dozom rezerve jer uistinu postoje vrlo komplicirani mehanizmi i kretanja kod kojih je izračun pojedinih brzina kompliciran no svodi se na iste principe.

<sup>7</sup>Ovdje je korištena energija u smislu kad loptica udari u osobu tad se podrazumijeva da će usporiti na brzinu osobe B te tako na njega prenijeti energiju koju će on osjetiti ili deformacijom njegovog lica ili topline uslijed udarca.

### 3.3 Sustavi u klasičnoj fizici

Pod sustave se osvrćemo na koordinatne sustave. Zašto pričamo o sustavima? Kako bi mogli bilo što zabilježiti i opisati, bilo to gibanje čestice ili planeta potrebno je te pojave odnosno događaje postaviti u kontekst. Kažemo li da se nalazimo na udaljenosti 100 metara istočno i 30 južno (ovdje se ne uzima ishodište da je sjecište nultog meridijana i ekvatora) s tim nećemo uopće definirati našu poziciju jer nismo izrekli u usporedbi s čime smo udaljeni toliko metara istočno a toliko južno. Kad govorimo o pozicijama i općenito o koordinatama moramo postaviti reference po kojima se mogu ravnati i drugi sustavi odnosno promatrači.

Ključno je imati za sustave sljedeće principe postavljene već za vrijeme Galilea. Bilo koji sustav odnosno promatrač<sup>8</sup> za svoje promatranje i opis događaja u stvarnosti je jednako upravu kao bilo koji drugi promatrač koji se giba relativno u usporedbi sa njime. Prikladno je i reći da stvarnost definiramo kao niz događaja, a svaki događaj se nalazi u jednoj točki prostora i u jednom vremenskom trenutku što može imati različite vrijednosti za pojedine sustave.

Pretpostavljamo da se svi promatrači, koje spominjemo, nalaze u inercijskom koordinatnom sustavu. Ukratko opisano, gibaju se konstantnom brzinom međusobno spram ostalih sustava/promatrača. Ključni princip je da je svaki promatrač jednako upravu u opisu stvarnosti, no iste pojave odnosno događaje za pojedinog promatrača to jest opis tih događaja za različite sustave nije jednak. Ne možemo tvrditi da postoji ishodište čitavog svemira ili stvarnosti te shodno tome da je kompletan svemir opisan sa jasno izraženim prostornim koordinatama<sup>9</sup>.

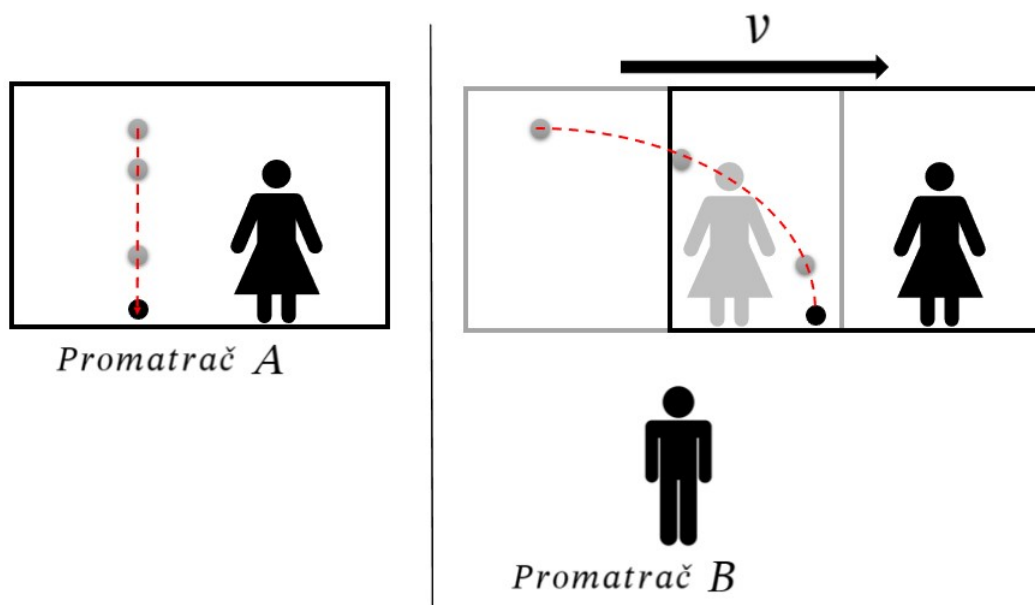
Za primjer uzmimo dva promatrača od kojih promatrač A se giba, recimo u vlaku, konstantnom brzinom  $v$  relativno prema promatraču B koji stoji mirno na tlu. Ispusti li promatrač A loptu iz ruke, bez postojanja otpora zraka, lopta će se nastaviti gibati brzinom  $v$ , kao i on, u horizontalnom smjeru zbog čega on vidi loptu kako ubrzano pada po pravcu. Osoba B koja promatra isti događaj gleda kako lopta isto pada, no istodobno se kreće brzinom  $v$  u horizontalnom smjeru. Prikaz primjera je na slici 3.2. Promatrač A vidi loptu kako se giba po pravcu dok promatrač B primjećuje krivulju kao putanju lopte. Kad bi oba promatrača pričala o događaju dobili bi različite odgovore, no kako smo rekli

---

<sup>8</sup>Koristit ćemo izraz promatrač i pridodati mu zaseban njegov sustav takav da je stacionaran u usporedbi sa njime te u većini slučajeva da se nalazi u njegovome ishodištu, no potomje ne mora biti slučaj.

<sup>9</sup>Ishodište za vrijeme nije spomenuto jer nismo dotakli samu fiziku vremena, no za klasičnu fiziku gdje je protok vremena konstantan se moglo uzeti ishodište vremenske koordinate kao početak samog svemira ili minimalne entropije, no kako znamo tvrdnje klasične fizike o vremenu nisu točne pa se stoga ne moramo na to posebno osvrutati.

svaki promatrač je upravo i istodobno ne isključuje tvrdnju drugog promatrača.



Slika 3.2: Prikaz dva različita promatranja istog niza događaja.

Kako onda može promatrač B shvatiti tvrdnje promatrača A i obrnuto? Odgovor je u transformaciji sustava pojedinih promatrača. Promatrač B zna da se A giba jednolikom brzinom  $v$ , ako sad on mjeri pojedine pozicije lopte, kako pada kroz vrijeme, i usporedno bilježi gdje se u usporedbi nalazi promatrač A prema njemu, doći će do istog zaključka za promatrača A kako je i A došao za samog sebe. Obrnuto vrijedi i za objašnjenje tvrdnje promatrača B od strane A no sad on može tvrditi da se promatrač B giba istom brzinom  $v$  u suprotnom smjeru u usporedbi sa njime i tako jednakim putem doći do zaključka zašto promatrač B vidi krivulju, a ne pravac.

Utvdili smo da svaki promatrač sa svojim sustavom može drugačije opisati događaje u prostoru te da je upravo isto kao i svi drugi promatrači. Uz to mora postojati način da svaki od promatrača dokaže tvrdnje ostalih znajući koje su relacije između različitih sustava vezanih za promatrače. U primjerima obično postavimo da se jedan promatrač giba jednolikom brzinom, no kako smo vidjeli, promatrač u gibanju može tvrditi da je on nepomičan te se drugi promatrač giba istom brzinom u obrnutom smjeru. Možemo li utvrditi koji sustav je u gibanju a koji ne bez postavljanja referenci? Kako bi utvrdili da li se gibamo ili ne, mora postojati način mjerenja ili niz eksperimenata koje promatrač može napraviti da utvrdi da se giba. Ako primjerice jedan od eksperimenata koji provode promatrači A i B rezultira različitim rezultatima<sup>10</sup> tad pravilo da pojedini promatrač je u potpunosti upravo o pojavi više ne stoji. No u principu ne postoji

<sup>10</sup>Podrazumijeva se da su eksperimenti napravljeni identičnim postupkom te je jedini faktor razlike u tome da se jedan promatrač giba.

nijedan eksperiment sa kojim bi promatrač A mogao utvrditi da se giba što dovodi do zaključka da svaki od promatrača može za sebe tvrditi da je stacionaran, a shodno tome se ostali promatrači gibaju određenom brzinom. Ovo zovemo principom relativnosti i mnogim misaonim eksperimentima su fizičari tijekom stoljeća dolazili do istog zaključka. Ovo navedeno je istaknuto za promatrače koji se gibaju jednolikom brzinom. Dakle svaki promatrač odnosno njegov sustav je tzv. inercijski sustav odnosno Galilejanski sustav. U prijevodu, osoba unutar sustava ne osjeća nikakve sile usred promjene gibanja sustava. To znači da se promatrač giba jednolikom brzinom to jest ne mijenja ni smjer ni količinu svoga gibanja. Ovo je vrlo bitno za imati u nastavnim razmatranjima.

### 3.4 Temeljni principi za relativnost u klasičnoj fizici

Sve relevantno za diskusiju vezano uz klasičnu fiziku smo spomenuli. Naime vrijeme u klasičnoj fizici je konstantno, to jest protok vremena koji doživljava<sup>11</sup> pojedini promatrač je isti neovisno o bilo čemu. Isto na primjeru relativne brzine, u klasičnoj fizici se podrazumijeva da se brzine samo zbrajaju ili oduzimaju. To se uzimalo kao istina i nije se previše o tome moglo propitkivati sve dok se nije došlo do zaključka da sama svjetlost odnosno elektromagnetski val putuje određenom brzinom. To je uvelike pomutilo shvaćanje stvarnosti jer se dosad mislilo da sve što vidimo se događa u trenutku kad nam je informacija došla u oči u obliku vidljive svjetlosti odnosno brzina elektromagnetskog vala se uzimala kao beskonačna.

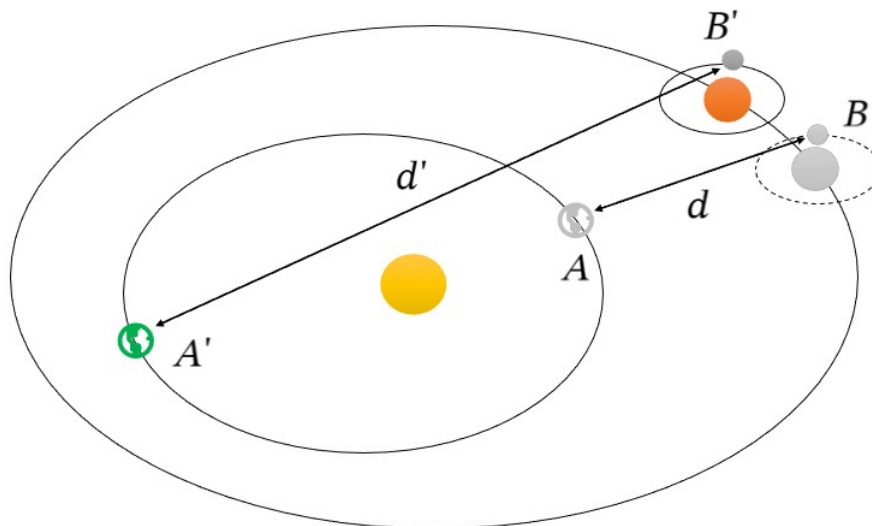
### 3.5 Brzina svjetlosti

Brzina svjetlosti se već od antičkih vremena uzimala kao beskonačna. Nije bilo smisla tadašnjim matematičarima i filozofima da signal kojim vidimo stvarnost može imati konačnu vrijednost. Galileo je tvrdio da svjetlost ima određenu brzinu, no tijekom svoga života to nije uspio dokazati ili pak pronaći njenu vrijednost. Tek je krajem 17.st danski astronom Ole Rømer u promatranjima gibanja Jupiterovog mjeseca Io-a pretpostavio da svjetlost putuje konačnom brzinom te ju je i aproksimirao temeljem promatranja. Da ne dobijemo krivi dojam kako je sa ovime tzv. klasična fizika postala beskorisna. Kako je to odlično Richard Feynman kazao u svojim predavanjima, sva prijašnja otkrića i razmišljanja, makar ne opisivali stvarnost u potpunosti točno kao što to znamo danas, su nas ipak doveli do današnjih spoznaja. Rømer nije bez veze zaključio da svjetlosti treba određeno vrijeme da doputuje do Zemlje. Svi proračuni

---

<sup>11</sup>Doživljavanje u ovom kontekstu je istovjetno mjerenju, a ne primjerice kako katkad kad nam je ugodno nam se čini da vrijeme brzo leti, a obrnuto osjetimo svaku sekundu.

temeljeni na Newtonovom modelu gravitacije su točno opisali kad eklipsa Io-a mora biti stoga Rømerov zaključak da Newton sigurno nije pogriješio ga je doveo do zaključka da svjetlosti treba određeno vrijeme da doputuje do zemlje.



Slika 3.3: Skica pozicije planeta tijekom eklipse Jupiterovog mjeseca Io-a.

U mjerenjima eklipse Io-a, Rømer je pronašao da se pojava ne događa periodično po njegovim mjerenjima iako bi po zakonima gibanja to morao biti slučaj. U mjerenjima, kad je Zemlja se udaljavala od Jupitera, je eklipsa sve više kasnila. Ekstremno, za vrijeme najmanje udaljenosti zemlje od Jupitera  $d$  i najveće  $d'$  je izmjerena razlika od otprilike 22 minute. Na to je Rømer zaključio da, kako postoji razlika u udaljenosti, onda sama svjetlost treba vremena dok ne prijeđe tu udaljenost. Kako je u ovom slučaju razlika udaljenosti otprilike jednaka promjeru Zemljine orbite oko Sunca<sup>12</sup> brzina svjetlosti je aproksimativno bila jednaka omjeru te razlike udaljenosti i razliku u vremenu za eklipsu Io-a. Uzimajući tadašnje aproksimacije promjera Zemljine orbite i mjerenja koje je dobio, Rømer je izračunao da je brzina svjetlosti otprilike  $220\,000\,000\text{ m/s}$  što je bilo na dosta dobrom putu od stvarne brzine, u svakom slučaju je pogođen red veličine. Od tad su napravljeni mnogi drugi pokusi za mjerenje brzine svjetlosti.

### 3.5.1 Priroda svjetlosti

Maxwell je nešto kasnije, promatrajući propagaciju elektromagnetskog vala kroz vakuum došao do zaključka da je brzina svjetlosti jednake veličine kao i brzina elektromagnetskog vala zbog čega je došao do zaključka da je sama svjetlost

<sup>12</sup>Jupiteru treba znatno duže da obiđe svoju orbitu (otprilike 12 puta više nego Zemlji), pa se tad može zanemariti Jupiterov pomak.



elektromagnetski val. Po Maxwelllovoj teoriji koja uvodi u sponu brzinu svjetlosti  $c$ , permabilnost vakuuma  $\mu_0$  te dielektričnu konstantu  $\varepsilon_0$  u izrazu

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (3.1)$$

Poznavajući povijesno uzetu permabilnost vakuuma<sup>13</sup> kao  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ , te dielektričnu konstantu vakuuma. Pomoću mjerenja kapaciteta  $C$ , površine kondenzatora  $A$  te udaljenosti ploča kondenzatora  $d$ , dielektrična konstanta medija između ploča kondenzatora se dobije iz izraza

$$\varepsilon = \frac{Cd}{A}. \quad (3.2)$$

Za vakuum dielektrična konstanta iznosi  $\varepsilon_0 = 8.8541878128 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ . Uvrštavanjem svih konstanti u (3.1) za brzinu svjetlosti dobivamo iznos od  $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$ .

### 3.5.2 Brzina svjetlosti kao konstanta

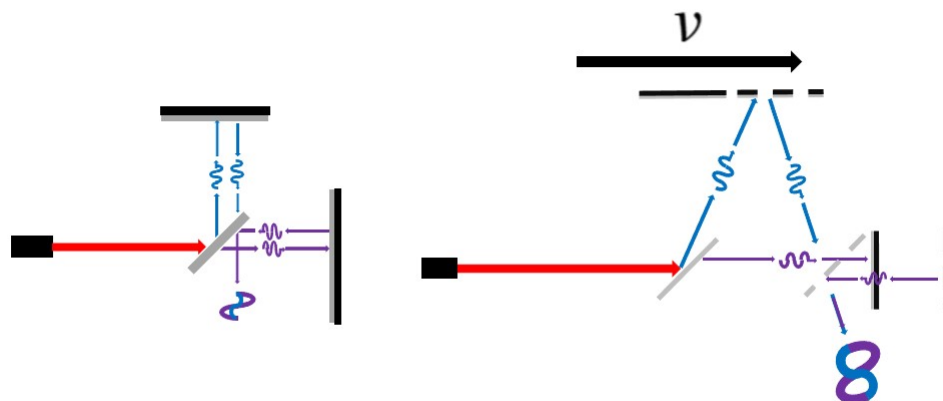
Prije nego što prijedemo na glavnu diskusiju ovog potpoglavlja recimo samo da brzina svjetlosti ovisi o mediju kroz koji prolazi. Svjetlost u vodi sporije putuje nego u vakuumu. U našim razmatranjima gledamo svjetlost u vakuumu i pitamo se je li svjetlost konstantna za sve promatrače kako god se oni gibali<sup>14</sup> ili to nije slučaj.

Kako je Rømer u mjerenjima dokazao da se svjetlost giba određenom brzinom, mnogi fizičari su počeli pojmiti svjetlosni val kao zvučni val. Pitanje je bilo, ako zvučni val prolazi kroz medij, bilo to zrak, voda ili krutina u obliku vibracije molekula, kako svjetlost prolazi kroz prazan svemirski prostor između planeta? Na to su odgovorili sa izmišljenim medijem kroz kojega putuje svjetlost, tzv. eter. Uzimajući tadašnje principe klasične fizike, znanstvenici Michelson i Morley su htjeli eksperimentom dokazati te izmjeriti relativno gibanje zemlje kroz eter. Pokus je uključivao interferometrijsku tehniku, pojednostavljenu na slici 3.4. Eksperiment se vodio po principu da svjetlost putuje konstantnom brzinom kroz eter te da relativna brzina Zemlje unutar etera rezultira različitom brzinom svjetlosti promatrane sa Zemlje nego da stojimo stacionarno s obzirom na eter. Vrlo slično kao kod primjera sa loptom i trkačem kojeg smo postavili na početku. Razlika između dvije izmjerene brzine svjetlosti, ona za eter i ona za Zemlju bi bila relativna brzina Zemlje s obzirom na eter. U pokusu bi se to manifestiralo drugačijom interferencijom zraka slično kao i na slici 3.4<sup>15</sup>.

<sup>13</sup>Poslije je utvrđeno da stvarna vrijednost permabilnosti je  $\mu_0 = 1.25663706212 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$ , što je dosta slično no dovoljno različito da se napomene.

<sup>14</sup>Ovdje aludiramo na inercijske sustave, dakle gibanje je po konstantnoj brzini i po iznosu i smjeru. Na bilo koji spomen gibanja promatrača će se to podrazumijevati ako nije eksplicitno navedeno.

<sup>15</sup>Ovdje je pokazana konstruktivna i destruktivna interferencija, što ne mora biti slučaj.



Slika 3.4: Skica Michelson-Morley eksperimenta.

Tijekom eksperimentiranja Michelson i Morley nisu uspjeli primijetiti nikakvu promjenu u interferenciji zraka. Taj tzv. nulti dokaz je unio dosta polemika u tadašnjem poznavanju svjetlosti. Počela su nova razmatranja koja su uključivala tvrdnju da brzina svjetlosti je konstantna bez obzira na gibanje promatrača zbog čega se princip relativnosti morao dopuniti i izmijeniti da prati nova razmišljanja.

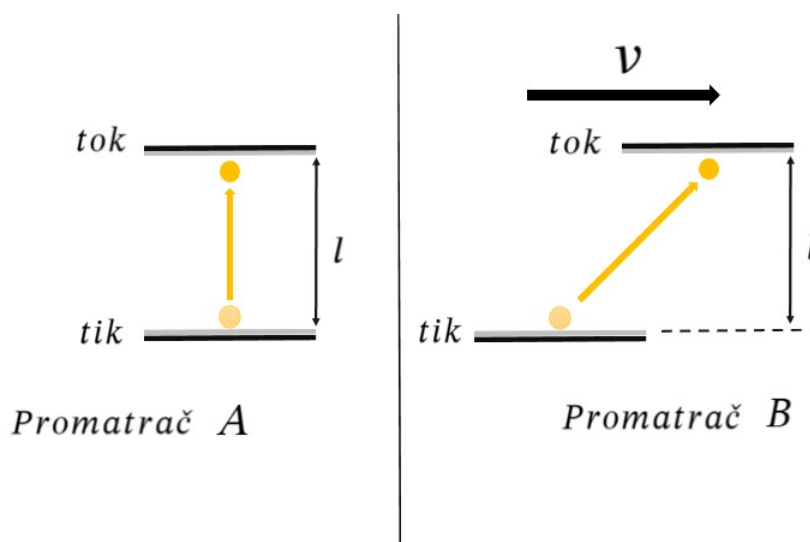
## 3.6 Specijalna teorija relativnosti

Mnogi koncepti su htjeli upotpuniti teoriju o eteru, takvu da se gibanjem sama svojstva medija mijenjaju osiguravajući potpunu nemogućnost u otkrivanju etera. Koncepti su uglavnom uključivali transformacije vezane za protok vremena unutar etera uslijed gibanja, no Einstein je na to gledao drugačije. Umjesto etera je tvrdio da se gibanjem sam prostor i vrijeme mijenjaju. Shodno tome je postavio temeljne principe nove teorije o relativnosti tzv. specijalna teorija relativnosti, koja je dotadašnja razmišljanja o relativnosti i pretpostavci da se svjetlost giba konstantnom brzinom za sve promatrače spojila u koherentnu teoriju o relativnosti.

### 3.6.1 Vremenska dilatacija

Temeljem nultog dokaza Michelson-Morley eksperimenta smo upućeni zaključkom da svjetlost mora biti konstantna za sve promatrače kako kod se gibali. Vođeni tim principom postavimo sljedeći problem vezan za vrijeme. Upitom da objasnimo što znači pojam vremena teško bi došli do smislenog odgovora ili objašnjenja. Naime svi znamo i osjećamo vrijeme no kad bi morali točno pokazati ili opisati vrijeme to ne bismo mogli napraviti. Uzmimo stoga neke ideje za koje vežemo veličinu vremena. Po SI sustavu jedna sekunda

je definirana kao 1/86400-ti dio jednog sunčanog dana<sup>16</sup>. Ključan dio takvog postavljanja vremena je referenca koja je ciklička. Dakle Zemlja se zarotira oko svoje osi svakog dana jedanput, isto tako Zemlja prođe potpunu orbitu oko Sunca svakih 365 dana odnosno jedne godine itd. Sad na to zamislimo promatrača A kako se giba, recimo u svemirskom brodu, konstantnom brzinom  $v$  relativno s obzirom na promatrača B. Kako moramo imati alat za točno mjerenje vremena, odnosno nekakvu ciklički pojavu, uvedimo tzv. pojam svjetlosnog sata. Princip je sljedeći, imamo dva ogledala razmaknuta za duljinu  $l$  između kojeg se odbija zraka svjetlosti odnosno foton. Kako je brzina svjetlosti konstantna, taj foton se odbija u ravnomjernim intervalima. Radi ukupnog pojednostavljenja izvoda, promatrajmo samo pojavu kad foton prvo udari o donjnje ogledalo, što možemo nazvati *tik* te zatim udari o gornje odnosno nazovemo to *tok*. Sad možemo pogledati kako različiti promatrači vide tu radnju odnosno kako vide *tik* i *tok*.



Slika 3.5: Promatranja dva promatrača s relativnim međusobnim gibanjem na svjetlosni sat.

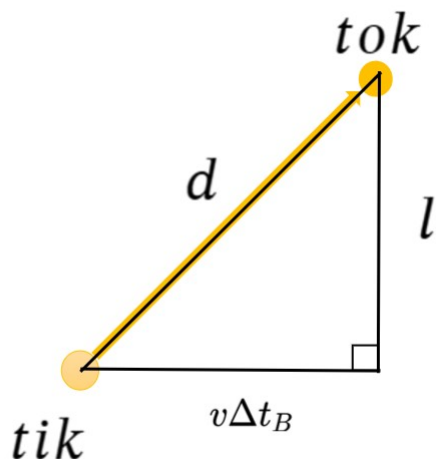
Promatrač A mjeri vrijeme koje je prošlo između *tik* i *tok* te znajući brzinu svjetlosti i duljinu  $l$  dolazi do zaključka  $\Delta t_A = \frac{l}{c}$ . Za promatrača B, zbog relativnog gibanja sata, svjetlost mora proputovati nešto veći put nazovimo ga  $d$ , što znači da vrijedi  $\Delta t_B = \frac{d}{c}$ . Iznos tog puta možemo izvući iz pravokutnog trokuta prikazanog na slici 3.6. Iz slike 3.6 slijedi da je duljina  $d$  jednaka

$$d = \sqrt{l^2 + v^2 \Delta t_B^2}. \quad (3.3)$$

Uvrstimo li (3.3) u izraz za vrijeme  $\Delta t_B$  te umjesto  $l$  zapišemo  $l = c \Delta t_A$  dobivamo

$$\Delta t_B = \frac{\sqrt{c^2 \Delta t_A^2 + v^2 \Delta t_B^2}}{c}, \quad (3.4)$$

<sup>16</sup>Takva referenca nije idealna zbog konstantne promjene rotacije Zemlje usred mnogih gravitacijskih utjecaja različitih svemirskih tijela Sunčevog sustava, no na našoj skali vremena te promjene su zanemarive



Slika 3.6: Pravokutni trokut za izračun prijeđenog puta fotona po promatraču B.

kvadriranjem i prebacivanjem  $\Delta t_B$  na lijevu, a  $\Delta t_A$  na desnu stranu dobivamo

$$\Delta t_B^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t_A^2, \quad (3.5)$$

naposljetku sve podijelimo sa  $1 - \frac{v^2}{c^2}$  te korjenujemo kako bi konačno dobili

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.6)$$

Iz (3.6) možemo zaključiti da vrijeme koje doživljava promatrač A prema promatranju promatrača B je različito za faktor  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Ključno je za spomenuti da bi isto to promatrač A vidio kad bi promatrao sat stacionaran prema promatraču B što je vezano za samu relativnost. Da se samo malo fokusiramo na taj faktor. Iako prije nije spomenuto, niti jedno tijelo se ne može gibati brže od brzine svjetlosti, stoga ako postoji neka relativna brzina  $v$ , izraz pod korijenom će biti uvijek manji od jedan te stoga faktor mora uvijek biti veći od jedan. U prijevodu, satovi u gibanju otkucavaju sporije nego stacionarni satovi s obzirom na promatrača. Kako će se taj faktor pojavljivati kroz daljnje izraze, uvest ćemo simbol koji će zamijeniti izraz s korijenom

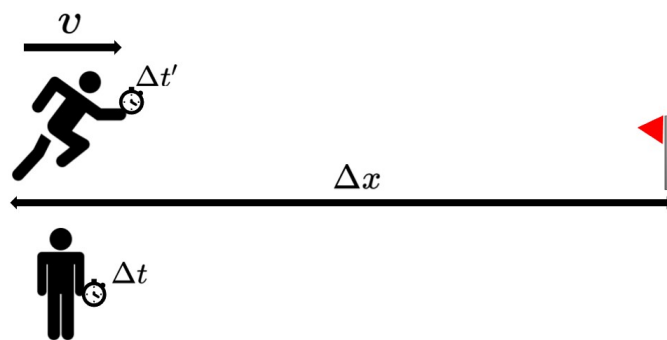
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.7)$$

$$\gamma > 1, \quad \frac{1}{\gamma} < 1.$$

Stoga (3.6) se jednostavno zapisuje kao  $\Delta t' = \gamma \Delta t$ , gdje smo uveli općenitu notaciju sa i bez ' gdje se podrazumijeva da promatrač s oznakom ' gleda sat kako se giba te vrijeme koje je on izmjerio  $\Delta t'$  je za faktor  $\gamma$  veće nego što vidi na satu koji se giba brzinom  $v$  s obzirom na njega.

### 3.6.2 Kontrakcija duljine

Kako smo rekli, glavni princip iz kojeg izvodimo sve jednadžbe je pretpostavka da brzina svjetlosti je konstantna bez obzira na sustav u kojem se nalazimo. Uzmemo li samo tu činjenicu, znamo da je brzina omjer duljine odnosno prostora te vremena. Kako se vrijeme mijenja promatrajući različite sustave koji se relativno gibaju s obzirom na nas tad mora isto vrijediti da se i sam prostor mijenja, kako bi mogla vrijediti pretpostavka da je brzina svjetlosti konstantna. Zamislimo sljedeći primjer. Stojimo na trkalištu i štopericom mjerimo trkača koji se giba relativno u usporedbi s nama.



Slika 3.7: Skica trkališta gledanog iz perspektive stacionarnog promatrača s obzirom na trkalište.

Osoba koja stoji mjeri vrijeme  $\Delta t$  potrebno za trkača da prijeđe zastavicu, te isto tako trkač drži sa sobom isto štopericu kojom mjeri vrijeme  $\Delta t'$  kad on prijeđe zastavicu počevši od početnog položaja gdje stoji stacionarni promatrač. Uzmemo li u obzir da znamo brzinu  $v$  tad promatrač koji stoji može lako izračunati duljinu  $\Delta x$  koja označuje udaljenost zastavice od njega

$$\Delta x = v\Delta t. \quad (3.8)$$

Isto tako za trkač se staza giba u suprotnom smjeru istom brzinom i mjeri vrijeme na štoperici (kako promatra stacionarni promatrač) te pomoću toga može izračunati put  $\Delta x'$

$$\Delta x' = v\Delta t'. \quad (3.9)$$

Poznavajući formulu za dilataciju vremena možemo izraziti  $\Delta t'$  s pomoću  $\Delta t$ . Promatrač vidi sve satove koji se gibaju, relativno s obzirom na njega, kako otkucavaju sporije pa

stoga mora vrijediti

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}. \quad (3.10)$$

Sad možemo izraz (3.10) uvrstiti u (3.9) te dobivamo

$$\Delta x' = \frac{v\Delta t}{\gamma}. \quad (3.11)$$

Vidimo da unutar (3.11) je sadržan izraz za  $\Delta x$  kao i u (3.8) što znači

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}. \quad (3.12)$$

Kako interpretirati ovaj izraz? Promatrač koji je stacionaran vidi stazu koja je duljine  $\Delta x$ . Trkač za kojeg, ako se premjestimo u njegov sustav gledanja stvari, staza se giba relativnom brzinom  $v$  u suprotnom smjeru. On promatra duljinu staze koja je kraća<sup>17</sup> od duljine koju vidi promatrač koji se giba skupa sa stazom.

### 3.6.3 Simultanost

Pod pojmom simultanost, mislimo na međudnos dva događaja s obzirom na vrijeme. U slučaju da su događaji simultani, tad aludiramo da su se dogodili u istom trenutku. Da to ne miješamo sa promatranjem jer sam signal određenog događaja treba proputovati put da bi došao do promatrača. Primjerice brzina zvuka je znatno sporija od brzine svjetlosti, sporija za  $10^6$  reda veličine otprilike. Za male udaljenosti, od par kilometara, možemo uzimati brzinu svjetlosti kao beskonačnu jer bi pričali o razlici od par mili sekundi što bilo tko od nas ne može uopće pojmiti, no brzinu zvuka na tim udaljenostima možemo. Pri udaru grmljavine prvo vidimo bljesak (svjetlosni signal) pa onda tek čujemo grom (zvučni signal). Ako ništa ne znamo o fizici i prijenosu različitih informacija tad bi *sljepo* zaključili da bljesak dolazi prije groma no pojave su simultane.

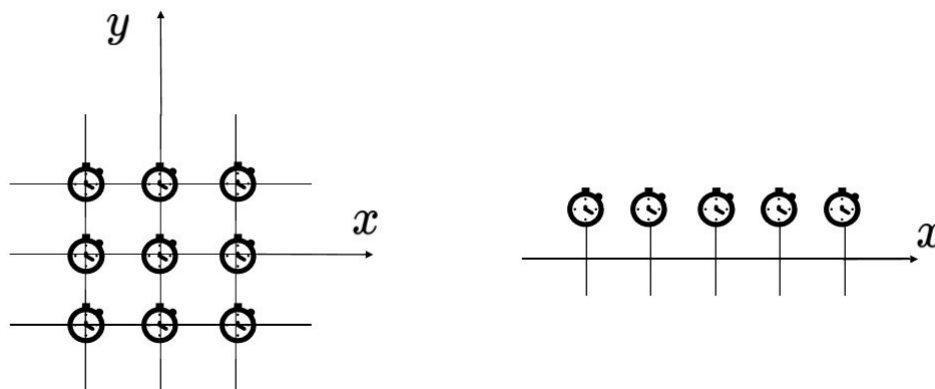
U klasičnoj fizici pojam simultanosti je jasno definiran i vrijedi za sve promatrače. Glavni princip iza toga je pretpostavka o apsolutnosti vremena, pa ako je događaj simultan u jednom referentnom sustavu, tad je simultan za sve bez obzira kako se oni gibali relativno među sobom.

U specijalnoj teoriji relativnosti smo na početku, pretpostavkom da je brzina svjetlosti za sve promatrače ista, došli do zaključka da samo vrijeme mora biti relativno za različite referentne sustave. S tim odmah dolazimo do zaključka da simultanost događaja u jednom referentnom sustavu ne vrijedi za sve referentne sustave koji se međusobno relativno gibaju.

<sup>17</sup>Kako smo u prijašnjem poglavlju naveli da  $\gamma$  mora uvijek biti veća od 1, tad njena recipročna vrijednost će biti manja što znači da faktor koji množi duljinu  $\Delta x$  je manji odnosno dolazi do skraćanja (kontrakcije) duljine.

## 3.7 Koordinatni sustavi za prostor i vrijeme

Kroz koncepte u prošlim potpoglavljima smo konstanto spominjali pojam sustava koordinata s kojim promatrač definira pojave u prostoru i vremenu. Samo da uvedemo svakodnevni primjer za ideju koordinatnog sustava prostora i vremena tako da zamislimo dogovor dva prijatelja za sastanak u kafiću. Dvije stvari su potrebne za to, a to su lokacija kafića (bilo to ulica i broj ili geografske koordinate) te vrijeme sastanka (u koliko sati će se susresti na koji dan itd.). Zamislimo dio koordinatnog sustava vezan za prostor kao rešetku gdje svaki čvor predstavlja jednu točku prostora<sup>18</sup>. Svaki čvor ima jednoznačno definiranu koordinatu prostora odnosno svoj broj. Sad zamislimo da smo na svaki čvor postavili jedan sat koji otkucava i mjeri vrijeme. Na taj način, ako promatramo pojavu koja se događa u prostoru na jednom čvoru u vremenu, možemo znati vrijeme tako da pogledamo na sat koji se nalazi u tom čvoru. Kako je trodimenzionalna rešetka dosta komplicirana za prikazati, koristimo se primjerom na dvodimenzionalnom i jednodimenzionalnom prostoru kao na slici 3.8.



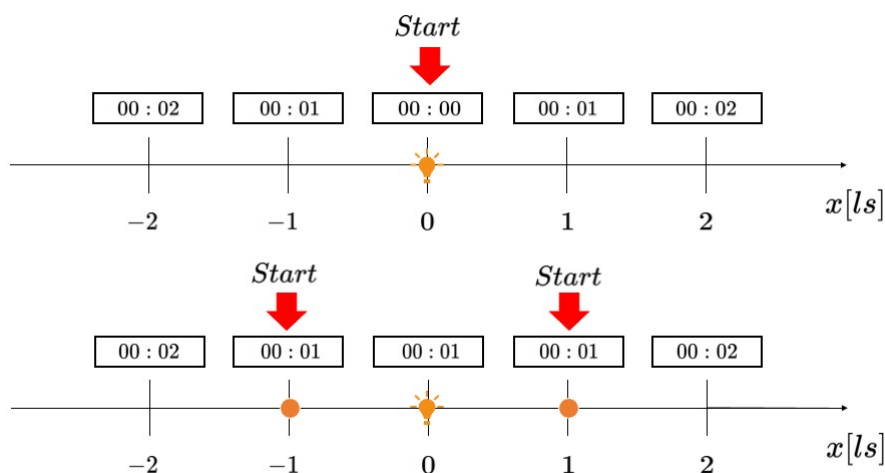
Slika 3.8: Koordinate za prostor i vrijeme. Lijeva strana je prikaz koordinata za dvije dimenzije prostora a desna za jednu.

### 3.7.1 Sinkronizacija satova

Ime potpoglavlja je malo apstraktnije prirode no vrlo važno za sustav prostora i vremena. U početku smo dali dobru sliku ideje uvodeći, u rešetke koordinatne mreže prostora, satove koji predstavljaju vremensku komponentu na svaki od čvorova te rešetke. Tu nismo spomenuli vrlo bitnu činjenicu, a to je da su satovi sinkronizirani, što po svojoj logici mora biti. U slučaju da satovi nisu sinkronizirani naša promatranja, koja su vezana za koordinatni sustav kojeg smo definirali, ne bi imala smisla. Zamislimo da

<sup>18</sup>Zamišljamo grubo diskretizirani prostor za potrebe ove diskusije.

bacimo loptu u 12:00 sati za sat koji se nalazi na našoj koordinati, a loptica padne na pod na nekoj udaljenosti odnosno koordinati u našem sustavu gdje sat čita 11:34 sati, kao da je loptica otišla natrag u vrijeme što nije fizikalno. Ova činjenica je vrlo banalna, no bitno je razmisliti kako bi sve te satove sinkronizirali kad bi mogli svaki od njih postaviti na svaki čvor koordinatnog sustava prostora. Jedan odgovor je da sve satove okupimo na jednom mjestu, sinkroniziramo ih ručno te ih pošaljemo na svaku točku prostora ali, kako smo vidjeli iz prijašnjih poglavlja, satovi koji se gibaju relativno u usporedbi s nama otkucavaju vrijeme sporije nego što otkucavaju satovi stacionarni spram nas. Rješenje problema je jednostavno. Postavimo svaki sat već na njihovo mjesto u prostoru zatim iz ishodišta sustava pošaljemo određeni signal, uzmimo da šaljemo svjetlosni signal, kad smo počeli mjeriti vrijeme te kad signal dođe do pojedinog sata tad se i on pokrene. No znamo da svjetlosti treba određeno vrijeme da dosegne pojedine satove razmještene po prostoru. Stoga pametno moramo odabrati mali posmak u početnom vremenu kad satovi otkucavaju tako da kad svjetlosni signal dođe do sata, udaljenog od ishodišta, on pokazuje isto vrijeme kao i sat u ishodištu. Taj posmak je lako za izračunati. Kako svjetlost ima konačnu brzinu  $c$ , za sat na udaljenosti  $l$  će biti potrebno  $l/c$  vremena da svjetlosni signal dođe do tog sata. Stoga posmak će biti jednak tom iznosu vremena koje je potrebno da svjetlost dopre do tog sata  $\Delta t = l/c$ . Prikažimo vizualno na primjeru jednodimenzionalnog prostora kao na slici 3.9.



Slika 3.9: Proces sinkronizacije satova.

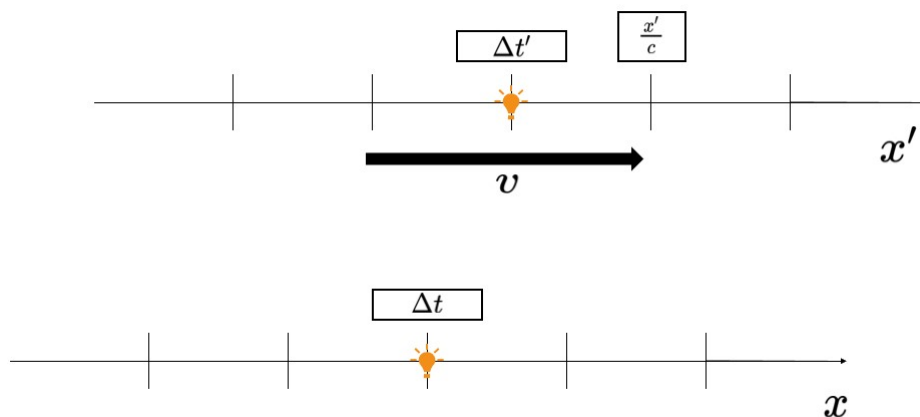
Primjer na slici 3.9 smo pojednostavnili uzimajući udaljenosti da su relativističke, govorimo o satovima udaljenim stotinama tisuća kilometara pa je stoga mjerna jedinica za put svjetlosna sekunda. Kako je prikazano, malo smo modernizirali opremu korištenjem digitalnih satova (minuta:sekunda) koji direktno prikazuju numeričku vrijednost vremena. Primjerice za sat na udaljenosti od jedne svjetlosne sekunde



postavljamo vrijeme za jednu sekundu u naprijed i tako dalje za ostale udaljenosti. Kad sat na ishodištu počne otkucavati od 00:00 u istom trenutku se sa njegovog mjesta pošalje svjetlosni signal koji putuje kroz prostor. Svaki sat razmješten po prostoru se upali čim ga svjetlost obasja. Iako naizgled ovakav primjer se ne čini bitnim ili korisnim, ključno ga je za shvatiti u sljedećem djelu kad budemo promatrali odnose satova za sustave koji se gibaju relativno s obzirom na naš sustav promatranja.

### 3.7.2 Asinkronost satova u gibanju

Sada zamislimo proces sinkronizacije satova u dva sustava koji se međusobno gibaju jednolikom brzinom. Kao i prije, kod sinkronizacije satova ćemo se koristiti jednostavnijim jednodimenzionalnim prostorom. Problem se svodi na rješavanje zagonetke kako promatrač vidi sinkronizaciju satova u sustavu koji se giba. Za rješavanje ovog problema moramo uzeti u obzir da je brzina svjetlosti konstantna bez obzira na promatrača kako se giba, odnosno možemo koristiti postavljene jednadžbe za dilataciju vremena i kontrakciju duljine koje izviru iz takvog postulata o brzini svjetlosti. Radi pojednostavnjenja postavimo da se dva sustava počinju sinkronizirati<sup>19</sup> kad se ishodišta sustava nalaze na istoj poziciji.



Slika 3.10: Sinkronizacija satova u gibanju.

Kako smo rekli, satovi se sinkroniziraju podjednako kao i u prošleme poglavlju. Kako svaki sustav zasebno postavlja satove za sebe, sustav koji se giba, kojeg na slici 3.10 označavamo sa crticom ', postavlja satove u naprijed tako da je vrijeme na satu postavljeno temeljem udaljenosti tog sata od ishodišta za  $x'/c$  s tim da je to apsolutna vrijednost jer nije bitno je li sat postavljen u lijevo ili desno po koordinatnoj osi. Kako promatrač koji promatra

<sup>19</sup>Pod pojmom sinkronizacije uzimamo početak otkucavanja sata u ishodištu koji usporedno šalje svjetlosni signal po kojem se drugi satovi počinju uključivati.

sinkronizaciju sustava u gibanju pojmi vrijeme koje je potrebno da prođe svjetlosti da dođe do koordinate  $x'$ ?

Prvo počnimo sa samom udaljenosti. Kako se sustav crtica giba, prema stacionarnom promatraču, svjetlost ne prijeđe samo  $x'$  već dodatan put koji sam sustav prođe u vremenu  $\Delta t$ , uz to, stacionarni promatrač primjećuje kontrakciju duljine sustava koji se giba. Sve ukupno, prijeđeni put je jednak

$$c\Delta t = \frac{x'}{\gamma} + v\Delta t \quad (3.13)$$

Izlučimo li  $\Delta t$  iz (3.13) imamo jednadžbu

$$\Delta t = \frac{x'}{\gamma(c - v)} \quad (3.14)$$

Uz sve to moramo uzeti u obzir na kraju i dilataciju vremena. Prema promatraču koji promatra sustav u gibanju, za njega svi satovi u tom sustavu otkucavaju vrijeme sporije za faktor  $\gamma$  odnosno vrijedi

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad (3.15)$$

Uvrstimo li (3.14) u (3.15) i sredimo li izraz dobivamo na kraju

$$\Delta t' = \frac{x'}{c^2}(c + v) \quad (3.16)$$

Da opišemo što jednadžba (3.16) znači. Vrijeme koje je potrebno svjetlosti da prođe udaljenost  $x'$  prema promatraču koji se giba skupa s tim sustavom je jednaka  $x'/c$ . Promatrač, koji stoji i promatra kako se svjetlosni signal giba prema poziciji  $x'$  te gledajući kako satovi (koji se gibaju) otkucavaju, zaključuje da je svjetlosti vrijeme potrebno da prođe taj put jednaka izrazu (3.16) odnosno razlika između (3.16) i  $x'/c$  je jednaka

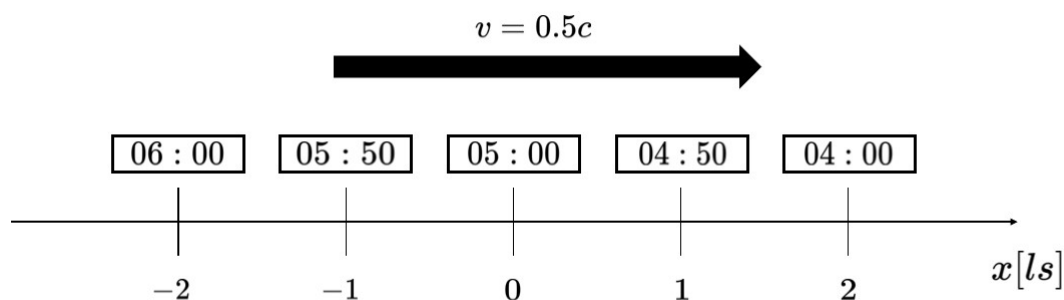
$$\Delta t_{posmak} = \frac{x'v}{c^2} \quad (3.17)$$

Vrijeme  $t_{posmak}$  označuje razliku u vremenu koje pokazuju satovi sustava koji se giba s obzirom na promatrača koji to gleda. Svi satovi koji su od ishodišta udaljeni u smjeru gibanja sustava, odnosno gibaju se od ishodišta, će kaskati za satom u ishodištu za taj iznos, a satovi koji se gibaju prema ishodištu prednjače u vremenu za taj iznos.

Kad bi promatrač za svoj sustav u potpunosti točno sinkronizirao satove, te iste satove bi promatrač koji se giba relativno s obzirom na sustav određenom brzinom promatrao kao asinkrone. Koristeći se izrazom (3.17) možemo i dobiti numeričke vrijednost za asinkronost satova u gibanju te vizualno prikazati. Uzmimo da je sustav, koji se sinkronizirao, giba s obzirom na nas brzinom  $v = 0.5c$  što znači da će satovi udaljeni od ishodišta<sup>20</sup> za

<sup>20</sup>Uzimamo da je sinkronizacija naših satova i satova u gibanju počela kad su satovi u ishodištima sustava se u potpunosti preklapili u prostornim koordinatama.

svaku udaljenost od jedne svjetlosne sekunde biti pomaknuti za pola sekunde u naprijed ili nazad ovisno o tome je li se sat giba prema početnom položaju ishodišta ili od njega. Dakle za jednodimenzionalni prostor bi to izgledalo kao i na slici 3.11. Napomena, na slici 3.11 uzimamo satove koji predstavljaju sekunda:stotinka. Iz ovog potpoglavlja je za zaključiti da koncept simultanosti ne vrijedi u specijalnoj relativnosti. Vidimo kako se događaji simultani za jednog promatrača događaju u drugačijim vremenskim trenucima za drugog. Svi dosadašnji principi i jednadžbe postavljene temeljem postulata da je brzina svjetlosti konstantna za sve promatrače će nam koristiti u generalizaciji transformacije sustava prostora i vremena.



Slika 3.11: Asinkronost satova u gibanju. Svaki sat predstavlja vrijednost vremena u sekunda:stotinka odnosno za svaku udaljenost od jedne svjetlosne sekunde satovi su pomaknuti za 50 stotinki u usporedbi sa satom u ishodištu.

### 3.8 Lorentzove transformacije

U prošlim potpoglavljima smo vidjeli kako sustavi u gibanju mijenjaju svojstva prostora i vremena s obzirom na pojedine promatrače. To bi nas uvelike trebalo podsjetiti na transformacije koordinatnih sustava. U mjeri smo i dotakli transformaciju međusobno gibajućih sustava iz jednog u drugi, no to sad sve možemo objediniti u par općenitijih izraza za prostor i vrijeme. Kako bi imali nama bliži i poznatiji analogni model transformacija sustava u gibanju početi ćemo sa izrazima vezanim za klasičnu fiziku. U osnovi je pitanje kako bi Newton i Galileo opisali sustav u gibanju s obzirom na njima stacionaran sustav. Kao i prije koristimo se jednodimenzionalnim primjerom jer je puno lakši za izvesti te se jednadžbe mogu poopćiti i na ostale dvije dimenzije prostora.

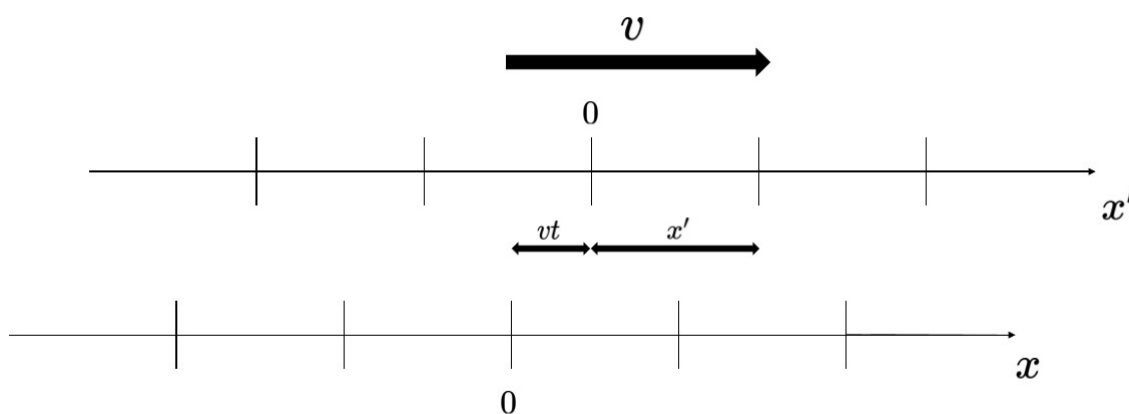
Prvo definirajmo dva sustava. Jedan sustav  $K$ , označimo ga sa  $x$  za poziciju i  $t$  za vrijeme, koji će biti stacionaran s obzirom na nas. Drugi sustav  $K'$  se giba brzinom  $v$  u pozitivnom smjeru  $x$  osi<sup>21</sup> te ima oznaku  $x'$  za poziciju i  $t'$  za vrijeme. Pitanje je sada

<sup>21</sup>Nije bitan toliko smjer, no počnimo sa lakšim primjerom koji se lako može modificirati.

kako transformirati jedan set prostornih koordinata iz sustava  $K$  te prebaciti ga u sustav  $K'$  ako znamo brzinu  $v$ ? U prijevodu tražimo matematički izraz koji prevodi koordinate iz sustava  $K$  u sustav  $K'$  i obrnuto. Počnimo prvo od pretpostavke da svjetlost putuje beskonačnom brzinom. To eliminira efekt vremenske dilatacija i asinkronosti satova te vrijeme u jednom sustavu je jednako u drugom odnosno

$$t = t'. \quad (3.18)$$

Za put se možemo koristiti vizualnim primjerom kao na slici 3.12.



Slika 3.12: Usporedba dva međusobno gibajuća sustava.

Vrlo očito će transformacija pozicije sustava iz jednog u drugi biti jednaka

$$x = x' + vt \quad (3.19)$$

Kako je vrijeme u oba sustava identično, ne moramo se previše baviti sa jednadžbom (3.19). Ako želimo sve izraziti u funkciji  $K'(x', t') = TK(x, t)$  gdje  $T$  predstavlja matricu transformacije jer je riječ o linearnoj transformaciji, tad bi jednadžba glasila

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Riješili smo problem za klasičnu fiziku, a sad se vratimo na relativnost. Znamo da je brzina svjetlosti konačna te moramo uzeti u obzir tri efekta: dilatacija vremena, skraćenje duljine te asinkronost satova u gibanju. Počnimo prvo od same pozicije. Znamo da će se čitav sustav  $K'$  zbog gibanja skratiti po iznosu za faktor  $1/\gamma$ . Sve skupa znači da vrijedi

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt. \quad (3.21)$$

To želimo izraziti kao funkciju  $x'(x, t)$  što lako možemo napraviti

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (3.22)$$

Možemo vrlo dobro uočiti u (3.22) i dio vezan za klasičnu fiziku  $x - vt$ , ali kako promatrač vidi skraćenu verziju sustava  $K'$ , moramo to korigirati odgovarajućim faktorom u vrijednosti  $\gamma$ .

Transformacija vremena je nešto složenija zbog same asinkronosti satova. U biti nema jedne transformacije vezane samo za vrijeme jer promatrač koji gleda satove u gibanju smatra da su satovi u potpunosti asinkroni te isto to vrijedi za promatrača koji gleda iz gibajućeg sustava promatrajući prijašnjeg promatrača. To znači da možemo samo reći o transformaciji vremena za samo jednu poziciju. Tražimo vrijednost sata koji se nalazi na određenoj koordinati  $x$ . Prvo možemo modificirati izraz (3.18) tako da uzmemo u obzir dilataciju vremena. Kako satovi u gibanju sporije otkucavaju vrijeme vrijedi

$$t = \gamma t'. \quad (3.23)$$

Promatrač koji gleda satove u  $K'$  sustavu koji se giba s obzirom na njega brzinom  $v$  primjećuje odmak svakog sata za vrijednost (3.17) odnosno vrijedi

$$t'(x') = t'_{ishodite} + \frac{x'v}{c^2}, \quad (3.24)$$

gdje  $t'(x')$  označuje vrijeme sata koje vidi promatrač u sustavu  $K$  gledajući na sat u sustavu  $K'$  na poziciji  $x'$ . Uvrštavanjem (3.24) u (3.23) dobivamo izraz

$$t = \gamma \left( t'_{ishodite} + \frac{x'v}{c^2} \right), \quad (3.25)$$

no mi želimo izraziti  $t'$  u funkciji  $x$  i  $t$ . Po teoriji relativnosti svaki promatrač može tvrditi da je on stacionaran te se svi drugi sustavi gibaju s obzirom na njega. To možemo primijeniti i na ovaj problem odnosno postavimo se sada kao promatrač vezan za sustav  $K'$ . Za nas, sustav  $K$  se giba isto brzinom  $v$ , no u suprotnom smjeru. To znači da će isti izraz (3.25), obrnemo li uloge koordinata sustava  $K$  i  $K'$ , se samo razlikovati za predznak uz brzinu  $v$  pa vrijedi

$$t' = \gamma \left( t - \frac{xv}{c^2} \right). \quad (3.26)$$

Izostavili smo pisanje vremena u ishodištu te ćemo to imati u obzir. Ovakav izraz izgleda puno ljepše pa ćemo ga ostaviti kakav je. Vidimo iz izraza sve komponente i efekte koje smo uzimali u obzir. Unutar zagrada imamo izraz vezan za asinkronost satova a sve množimo sa  $\gamma$  jer za sustav  $K'$  koji gleda na sustav  $K$ , koji se giba brzinom  $v$  s obzirom na njega, satovi otkucavaju sporije. Kao i kod transformacije sustava u klasičnoj fizici možemo zapisati izraze (3.26) i (3.22) u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Možemo još pojednostavniti i simetrizirati izraz tako da vrijeme pomnožimo sa  $c$  pa imamo izraz

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Za poopćenje na sve tri prostorne koordinate uvodimo veličinu  $\beta$  koja predstavlja omjer brzine i brzine svjetlosti odnosno  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$  vektor  $\vec{\beta}$  možemo podijeliti na komponente u smjeru pojedine koordinate prostora koji su po iznosu samo omjeri komponenti brzine  $v$  i brzine svjetlosti,  $\beta_x = \frac{v_x}{c}$ ,  $\beta_y = \frac{v_y}{c}$ ,  $\beta_z = \frac{v_z}{c}$ . Na koncu će Lorentzova transformacija za trodimenzionalni prostor i jednu dimenziju vremena glasiti

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Iznos  $\beta$  je jednak drugoj normi vektora  $\vec{\beta}$  ili zapisano kao  $\beta = \|\vec{\beta}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{c}$ . Izrazi kao što su (3.28) i (3.29) nam daju vrlo moćan i jednostavan, za korištenje, alat pri transformaciji koordinata položaja i vremena između dva međusobno gibajuća sustava.

Za kraj uzmimo izraze (3.22) i (3.26) i postavimo njihov omjer

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - vt)}{\gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)}. \quad (3.30)$$

Sređivanjem i supstitucijom  $\frac{x'}{t'}$  sa  $w'$ , a  $\frac{x}{t}$  sa  $w$  dobivamo izraz

$$w' = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}}. \quad (3.31)$$

Dakle ako u  $K$  sustavu bacimo lopticu brzinom  $w$ , za sustav  $K'$ , koji se giba u pozitivnom smjeru  $x$  osi sustava  $K$  brzinom  $v$ , će on mjeriti brzinu loptice  $w'$  po izrazu (3.31). Shodno tome kad bi uputili foton, koji možemo zamisliti kao lopticu bez mase koja se giba brzinom svjetlosti  $c$ , u smjeru  $x$  osi. Za promatrača u  $K'$  sustavu koji se isto giba u smjeru  $x$  osi brzinom  $v$  će po (3.31) relativna brzina tog fotona s obzirom na njega isto biti brzina svjetlosti. Takav ishod smo morali dobiti jer su svi prijašnji izrazi polazili iz principa da brzina svjetlosti za svakog promatrača je jednaka<sup>22</sup> te iznosi  $c$ .

<sup>22</sup>Dakako govorimo o brzini svjetlosti u vakuumu. Za druge medije kao voda ili zrak će brzina svjetlosti biti nešto manja.

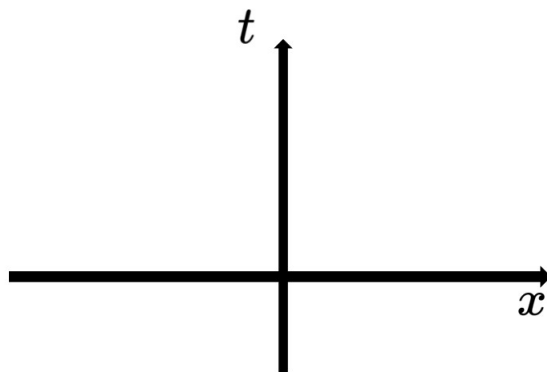
## 3.9 Minkowskijev prostor

Svu matematiku i izraze smo dobili u prijašnjem potpoglavlju, vezanu za transformaciju sustava prema teoriji relativnosti. Sad sve to možemo i vizualno prikazati i razvijati sam prostor i vrijeme kao zaseban sustav po sličnim karakteristikama kako su opisani sustavi u geometriji kao primjerice Kartezijev sustav koji je najjednostavniji primjer koordinatnog sustava.

### 3.9.1 Upoznavanje sa sustavom prostora i vremena

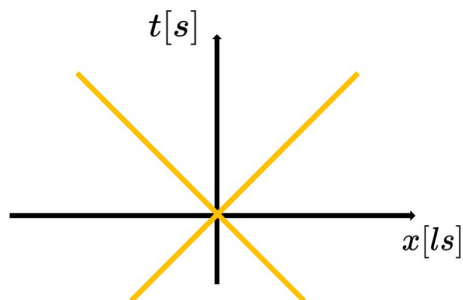
Koordinate prostora i vremena smo zasigurno svi koristili pri opisu nekih fizičkih procesa tijekom našeg školovanja. Primjerice kinematika i dinamika mehaničkih sustava je besmislena ako nemamo pojam o vremenu i prostoru u našim jednadžbama i koordinatnim sustavima. U većini slučajeva je zasigurno bila riječ o  $x$  i  $t$  koordinatnim sustavima gdje vrijeme postavljamo po horizontalnoj osi, a položaj po vertikalnoj.

Kod opisa prostora i vremena u teoriji relativnosti koristimo slični sustav, no izmijenjen s obzirom na položaj osi. Uglavnom uzimamo vertikalnu os kao  $t$  odnosno vrijeme, a horizontalnu os kao  $x$  to jest put. Koordinate prostora i vremena bi zapisivali i crtali kao na slici 3.13.



Slika 3.13: Koordinatni sustav prostora i vremena.

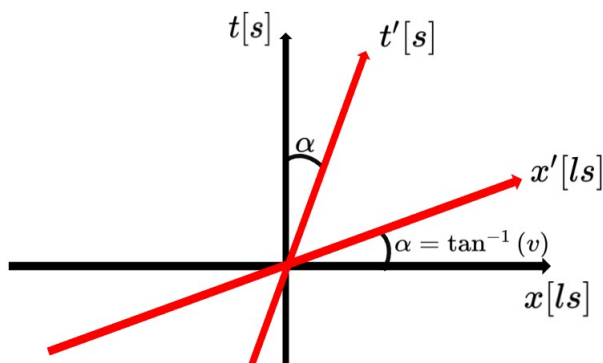
Pri dodjeljivanju mjera za prostor i vrijeme ćemo koristiti da  $x$  predstavlja veličinu svjetlosne sekunde a vrijeme veličinu sekunde. Lako se mogu te veličine skalirati natrag u SI sustav jedinica, no rad sa tim jedinicama za nas će biti nepraktičan. Znamo da brzinu definiramo kao omjer puta i vremena. Za tako definiran sustav jedinica koordinatnog sustava prostora i vremena će brzina svjetlosti biti pravac koji je smješten pod 45 stupnjeva. Brzina svjetlosti će nam predstavljati određenu granicu odnosno nijedan objekt osim samog elektromagnetskog vala neće imati veću ili jednaku brzinu. Na grafu to znači da će sav skup brzina biti većeg nagiba s obzirom na brzinu svjetlosti.



Slika 3.14: Prikaz širenja svjetlosti (žute linije) kroz vrijeme po osi  $x$  od ishodišta.

### 3.9.2 Vizualizacija različitih koordinatnih sustava

Pretpostavimo da se nalazimo u sustavu  $K$  koji je stacionaran s obzirom na nas. Tad će sustav izgledati kao na slici 3.13. Recimo sada da promatramo sustav  $K'$  koji se giba brzinom  $v$  relativno spram nas. Uzmimo da se u vremenu  $t = 0, t' = 0$  poklapaju ishodišta ta dva sustava. Gledamo prvo os vremena  $t'$ , koja se nalazi na koordinati  $x' = 0$ . Tražimo nagib te osi odnosno gledamo omjer  $t/x$ . Koristimo li izraze (3.24) i (3.21) gdje izraz za utjecaj asinkronosti satova se poništava jer  $x' = 0$  dobivamo da će nagib osi  $t'$  biti jednak  $\frac{1}{v}$  odnosno recipročna vrijednost brzine relativnog gibanja sustava  $K'$  s obzirom na sustav  $K$ . Nagib  $x'$  osi će samo biti recipročan nagibu  $t$  osi, to jest biti će jednak brzini  $v$ . Nacrtajmo sustav  $K$  i u njemu osi sustava  $K'$  koji se giba brzinom  $v$ <sup>23</sup>.



Slika 3.15: Koordinatne osi sustava  $K$  i  $K'$ .

Kad bi radili u mjernim jedinicama u metrima tad bi izgubili simetriju. Brzina svjetlosti bi iznosila poznatih  $c$  što znači da bi nagib pravca brzine svjetlosti bio skoro horizontalan na skali metra i sekunde što je teško za prikazati.

<sup>23</sup>Zapamtimo da je riječ o sustavima sa mjernim jedinicama prostora u svjetlosnim sekundama što znači da je brzina svjetlosti iznosa  $c = 1$ .



### 3.9.3 Invarijanta prostora i vremena

Za opis pojma invarijante početi ćemo sa poznatim primjerom koordinatnih sustava za prostor. Primjerice Kartezijev sustav. Ako imamo dvije točke u prostoru (koristit ćemo se dvodimenzionalnim prostorom), bez obzira kako mi zarotirali ili pomicali naš koordinatni sustav, udaljenost između te dvije točke ostaje ista. Znamo po Pitagorinim poučkom da će kvadrat udaljenosti biti jednak

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad (3.32)$$

Kako god mi razmjestili naš sustav, premda mijenjamo same iznose varijabli  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , sam konačni iznos sume njihovih kvadrata ostaje isti. Bilo bi stoga vrlo korisno pronaći ili dokazati postojanje takve invarijante i u sustavu prostora i vremena.

Počnimo od Lorentzovih transformacija za jedno dimenzionalni prostor. Uzmimo prvo izraz (3.22) i kvadrirajmo ga

$$\Delta x'^2 = \gamma^2(\Delta x^2 - 2\Delta xv\Delta t + v^2\Delta t^2). \quad (3.33)$$

Isto tako uzmimo izraz (3.26) te ga pomnožimo prvo sa  $c$  i sve skupa kvadrirajmo

$$c^2\Delta t'^2 = \gamma^2\left(c^2\Delta t^2 - 2\Delta xv\Delta t + \frac{\Delta x^2v^2}{c^2}\right). \quad (3.34)$$

Od (3.33) oduzmimo (3.34) kako bi pokratili član  $2xvt$

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 + v^2\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2v^2}{c^2}\right), \quad (3.35)$$

što možemo još dalje srediti u oblik

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left[\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 - \frac{v^2}{c^2}(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2)\right]. \quad (3.36)$$

Izraz (3.36) još daljnjom faktorizacijom poprima oblik

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2), \quad (3.37)$$

i na koncu imamo izraz

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2, \quad (3.38)$$

što predstavlja invarijantu prostora i vremena. Općenito se mogu pronaći dva zapisa

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2, \quad (3.39)$$

gdje  $\Delta s$  predstavlja *pravu dužinu* (eng. *proper distance*). Postoji i još jedan zapis gdje je vrijeme pozitivnog predznaka odnosno

$$\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (3.40)$$

Obrnuto od prijašnjeg izraza se sada  $\Delta\tau$  uzima kao *pravo vrijeme* (eng. *proper time*). Ove dvije invarijante su u potpunosti identične te se samo razlikuju po konvenciji predznaka,  $\Delta s^2 = -\Delta\tau^2$ . U principu obe su izašle iz istih jednadžbi i predstavljaju istu veličinu.

Proširivanje izraza na trodimenzionalni prostor je isto vrlo jednostavno. Jednadžbe se ne mijenjaju puno nego se samo dodaju nove varijable

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 \quad (3.41)$$

Invarijante prostora i vremena mogu biti od velike koristi jer poznavanjem koordinata sustava  $K$  i par potrebnih koordinata sustava  $K'$  se mogu relativno jednostavnim matematičkim izrazom doći do preostalih informacija.

Prije nego što završimo sa poglavljem spomenimo tri slučaja koja mogu vrijediti za invarijantu prostora i vremena. Kad bih imali samo prostor onda bi  $\Delta s^2$  bila uvijek pozitivna vrijednost, no pokraj promjene vremena na kvadrat stoji još i minus. Možemo imati tri rješenja koja su:

1.  $\Delta s^2 < 0$  odnosno  $\Delta\tau^2 > 0$  što znači da je promjena po vremenu veća od prostorne promjene i to će uvijek vrijediti za tzv. poput-vremenske čestice (eng. *time-like*) koje predstavljaju sve masene čestice.
2.  $\Delta s^2 = 0$  odnosno  $\Delta\tau^2 = 0$  vrijedi za slučajeve gdje je promjena po prostornim koordinatama jednaka promijeni po vremenskoj. U tom slučaju čestice putuje brzinom svjetlosti. Takve čestice nazivamo poput-svjetlosne (eng. *light-like*) i predstavljaju sve fotone.
3.  $\Delta s^2 > 0$  odnosno  $\Delta\tau^2 < 0$  će biti svojstveno za čestice kojima promjena po prostoru je veća od promjene u vremenu i za njih kažemo da su poput-prostorne čestice (eng. *space-like*) i koliko dosad znamo ne postoji nijedna čestica koja to zadovoljava.

Prostor i vrijeme, što se u praksi još može i nazvati Minkowskijevim prostorom, ima bitno drugačija svojstva od samog sustava prostora. Bitna razlika je vrijeme. Potpuno ravan Minkowskijev prostor je opisan invarijantom (3.39). Einstein će, par godina poslije postavljanja i formalizacije problema specijalne teorije relativnosti, postaviti novu teoriju koja daje opći opis relativnosti gdje sami prostor i vrijeme postaju deformirani.

## 4 Opća teorija relativnosti

Kao što smo naveli u uvodnom poglavlju, ovo nije detaljan pregled opće teorije relativnosti već temeljni opis koji će nam služiti za samu srž našeg rada. Bavimo se prije svega opisom gibanja čestica po prostor-vremenu koristeći se jednadžbama koje izviru iz upravo spomenute teorije pa je sukladno da o toj teoriji nešto i znamo. Za složeniju matematičku pozadinu je dobro pogledati već spomenutu literaturu, prije svega [3] i [4] te isto tako dio [5]. Ista literatura je korištena i u ovom poglavlju kao podloga. Ponovno kao i za specijalnu relativnost postoje mnoga predavanja koja se mogu pronaći na internetu te su besplatna. U prvom redu bi se željelo spomenuti predavanja od prof. Leonard Susskinda na Stanfordu.

### 4.1 Diferencijalna geometrija

Za dobivanje rezultata je potrebno poznavanje alata koji se koriste u općoj teoriji relativnosti. Pod alat mislimo matematičke izraze. Ovo nije nikakav uvod u diferencijalnu geometriju i Riemannovu geometriju, već će se dotaknuti glavni izrazi i laički ukratko opisati. Daljnja objašnjenja su dodatno temeljena na [6], te detaljnije o tenzorskoj algebri, koja slijedi, se može pronaći u [7].

#### 4.1.1 Tenzorska algebra

Glavnu ulogu u ovom području čine tenzori koji, kako znamo mogu biti različiti objekti. Primjerice tenzor nultog reda poznajemo bolje pod nazivom skalar, tenzor prvog reda kao vektor itd. Spominjući relativnost u prošlom poglavlju se koristimo tenzorima kako bi poopćili matematički zapis veličina u referentnim sustavima. U prvom poglavlju smo predstavili pojam polja gdje je za primjer uzeto gravitacijsko polje koje je ujedno vektorsko odnosno polje tenzora prvog reda. Potrebna matematička aparatura služi u svrsi prevođenja tenzora, a i s tim tenzorskih polja, iz jednog u drugi referentni sustav koordinata, a pri tome svojstva tenzora moraju ostati nepromijenjena. Kako je rad sa skalarima trivijalan uzet ćemo tenzor prvog reda odnosno vektor kojeg ćemo zapisivati na dva načina:

1.  $V_i$  za vektor sa kovarijantnim komponentama.
2.  $V^i$  za vektor sa kontravarijantnim komponentama.

Detalji o pojedinim terminima kao što su kovarijantne ili kontravarijantne komponente tenzora nam neće biti od interesa te se mogu detaljnije pogledati u spomenutoj literaturi. Nama je samo bitno da vektor može imati komponente sa donjim indeksom ili gornjim te ćemo na tome i ostati.

Za naš problem je potrebno poznavati dvije operacije koje možemo raditi sa tenzorima, zbrajanje i množenje. Rezultat ovih operacija mora isto biti tenzor. Zbrajanje tenzora se vrši sa tenzorima koji predstavljaju isti objekt te isto tako rezultat daje isti objekt. Dakle tenzori koji se zbrajaju moraju međusobno imati isti broj kovarijantnih i kontravarijantnih indeksa

$$U_i = V_i + S_i, P_i^j = R_i^j + T_i^j \dots,$$

isto to vrijedi za oduzimanje te samo mijenjamo predznake. Tenzori bilo kojeg reda se mogu zajedno množiti, a njihov umnožak tvori potpuno novi tenzor

$$U_{ij} = V_i S_j, P_i^j = R_i T^j \dots$$

Sa ovime smo već dobro upoznati preko linearne algebre gdje smo radili sa matricama odnosno tenzorima drugog reda. Znamo da vrijedi kako matrice pri zbrajanju i oduzimanju moraju imati iste dimenzije. Isto tako primjer množenja  $U_{ij} = V_i S_j$  bi bio istovjetan množenju dva vektora stupca istih dimenzija na način

$$U = VS^T,$$

gdje  $S^T$  je transponirana vrijednost vektora stupca  $S$ .

#### 4.1.2 Transformacija tenzora između koordinatnih sustava

Spomenuli smo da se tenzori mogu prevoditi iz jednog u drugi koordinatni sustav. Kako bi imali podlogu u tom smjeru uzmimo dva koordinatna sustava  $X$  i  $Y$ . Ti nazivi su proizvoljni te ne predstavljaju individualne osi već zasebne koordinatne sustave proizvoljne dimenzije. Svaka točka u tim koordinatnim sustavima je opisana kao suma komponenti koje ta točka projicira na osi što možemo zapisati kao  $x^i$  što predstavlja vektor pozicije proizvoljne točke u koordinatnom sustavu  $X$  te  $y^j$  što predstavlja vektor pozicije u koordinatnom sustavu  $Y$ . Recimo da znamo korelaciju između ta dva sustava odnosno znamo poziciju u sustavu  $X$  kao funkciju od pozicije u  $Y$  i obrnuto

$$x^i(y^j), y^j(x^i).$$

Ako to znamo onda lako možemo prevesti bilo koji tenzor koji bi se nalazio u  $X$  sustavu u sustav  $Y$  i obrnuto. Za primjer uzmimo tenzor prvog reda. Transformacija iz jednog

u drugi koordinatni sustav je različita za različite komponente vektora pa imamo dva slučaja

$$V_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x^i}{\partial y^j} V_i, \quad (4.1)$$

za transformaciju kovarijantnih komponenti tenzora te

$$V^j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y^j}{\partial x^i} V^i, \quad (4.2)$$

za transformaciju kontravarijantnih komponenti. Radi bolje preglednosti i lakšeg rada sa jednadžbama uvodimo Einsteinovu konvenciju sumiranja po indeksima. Ako u članu postoje indeksi koji se ponavljaju onda se po njima sumira taj član do konačnog broja dimenzije vezane za taj indeks. To znači da gornje jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$V_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} V_i,$$

$$V^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} V^i.$$

Uzmimo jednostavan primjer dva koordinatna sustava koji su međusobno skalirana za određen faktor  $k$ . Međusobna ovisnost oba koordinatna sustava je

$$y^j = kx^i.$$

Možemo to zamisliti kao da je  $X$  koordinatni sustav u metrima, a  $Y$  u milimetrima. Kontravarijantni vektor u  $X$  sustavu će se transformirati u  $Y$  po pravilu

$$V^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} x^i = kV^i.$$

Taj vektor predstavlja u  $X$  sustavu duljinu u metrima te će skaliranjem u  $Y$  prijeći u milimetre i povećati svaku od svojih komponenti za  $k$  puta što će biti 1000. Obrnuto vrijedi za kontravarijantni vektor gdje će u ovom slučaju vektor se preslikavati množenjem s recipročnom vrijednosti faktora  $k$ .

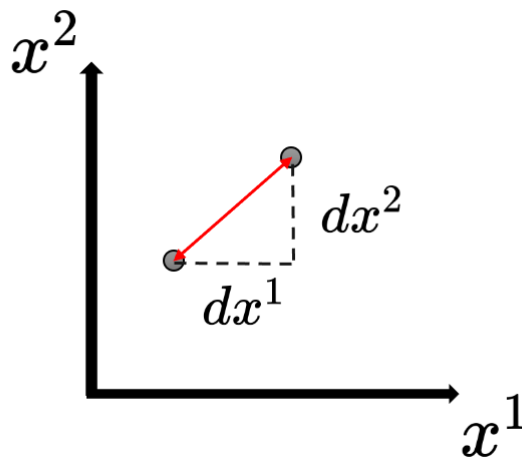
Pravila transformacije prate i tenzore višeg reda. Po pravilu za množenje tenzora možemo rastaviti svaki tenzor  $n$ -tog reda u produkt  $n$  broja tenzora prvog reda za koje vrijedi (4.1) i (4.2). Za primjer uzmimo tenzor drugog reda sa jednim kovarijantnim i jednim kontravarijantnim indeksom  $T_i^j$ . Njegova transformacija iz  $X$  u  $Y$  glasi

$$T_m^n = \frac{x^i}{y^m} \frac{y^n}{x^j} T_i^j,$$

što smo mogli dobiti da smo predstavili  $T_i^j$  kao umnožak dva tenzora prvog reda  $T_i^j = U_i V^j$  te nad svakim zasebno vršili transformaciju.

### 4.1.3 Metrika prostora

S osnova o tenzorima dolazimo do same geometrije. U diferencijalnoj geometriji promatramo male pomake i dijelove prostora jer se sama svojstva prostora mogu općenito mijenjati od točke do točke. Stalno tražimo općenitost izraza no počnimo u suprotnom smjeru od specifičnog primjera temeljem kojeg možemo poopćiti izraze i ideje na složenije primjere. Uzimamo potpuno ravan Euklidski prostor opisan Kartezijevim koordinatnim sustavom. Promatramo infinitezimalnu udaljenost u takvom sustavu između dvije točke tog prostora.



Slika 4.1: Diferencijalna udaljenost dvije točke u potpuno ravnom Euklidskom prostoru.

Koordinatne osi na slici 4.1 su označene sa  $x^1$  i  $x^2$  gdje indeksi u eksponentu ne predstavljaju potenciju već horizontalnu i vertikalnu os koordinatnog sustava. Zanima nas najkraća udaljenost dvije točke prostora što nije ništa drugo nego poznati Pitagorin poučak. Udaljenost ćemo pisati kao kvadrat njene vrijednosti

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2.$$

Ovakav zapis možemo prevesti u indeksni

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.3)$$

gdje  $i$  i  $j$  idu od jedan do dva te tenzor  $g_{ij}$  je jedan kad vrijedi  $i = j$ , a nula kad vrijedi  $i \neq j$ . U ovom izrazu smo uveli metriku u obliku tenzora  $g_{ij}$ . Vidimo da je metrika tenzor drugog reda odnosno za naše pojmove to možemo promatrati kao matricu, koja je u ovom slučaju jedinična

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

S pomoću metrike računamo izraz za najkraću udaljenost između dvije infinitezimalno daleke točke. Premda govorimo o diferencijalima udaljenosti, za potpuno ravan prostor bi isti izraz za diferencijalnu udaljenost vrijedio i u makroskopskom pogledu. Kako metrika ne ovisi o poziciji može se lako integrirati izraz (4.2) po obje koordinate te bi se dobio izraz za kvadrat udaljenosti kakvog znamo.

Metrika kao tenzor poštuje sva pravila transformacije tenzora kao što smo pokazali u prošlom potpoglavlju. To znači da preko transformacija možemo odrediti metriku različitih sustava poznavajući metriku samo jednog. Kako bi to potvrdili uzmimo opet dva koordinatna sustava  $X$  i  $Y$  koji opisuju isti prostor. To znači da najkraća udaljenost između dvije točke prostora mora biti jednaka odnosno vrijedi

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{mn}dy^m dy^n.$$

Dokaz za ovo je vrlo jednostavan. Koristimo se transformacijama zapisanim u (4.1) i (4.1) te dobivamo relaciju

$$g_{ij}dx^i dx^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^j}{\partial y^n} g_{mn} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i \frac{\partial y^n}{\partial x^j} dx^j,$$

što kraćenjem daje logičnu jednakost

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}dx^i dx^j.$$

Metrika nužno ne mora biti konstantna za prostor, te može ovisiti o samim koordinatama. To ne implicira da konstantna metrika i metrika ovisna o koordinatama ne mogu predstavljati identičan prostor. Uzmimo za primjer dva sustava koordinata, pravokutni sustav  $X$  i polarni koordinatni sustav  $Y$ . Relacija između oba koordinatna sustava je

$$x^1 = y^1 \cos(y^2), \quad x^2 = y^1 \sin(y^2),$$

i obrnuto,

$$y^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad y^2 = \arctan \frac{x^2}{x^1}.$$

Metrika prostora za potpuno pravokutni koordinatni sustav je oblika jedinični matrice, odnosno možemo uvesti Kronecker deltu  $\delta_{ij}$  koja predstavlja metriku ravnog prostora sa pravokutnim koordinatnim osima

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Metriku za polarni koordinatni sustav možemo izvesti s pomoću metrike za pravokutni putem transformacije

$$g_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^j}{\partial y^n} \delta_{ij}.$$

Potrebne derivacije su

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1} = \cos(y^2), \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^2} = -y^1 \sin(y^2),$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial y^1} = \sin(y^2), \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = y^1 \cos(y^2).$$

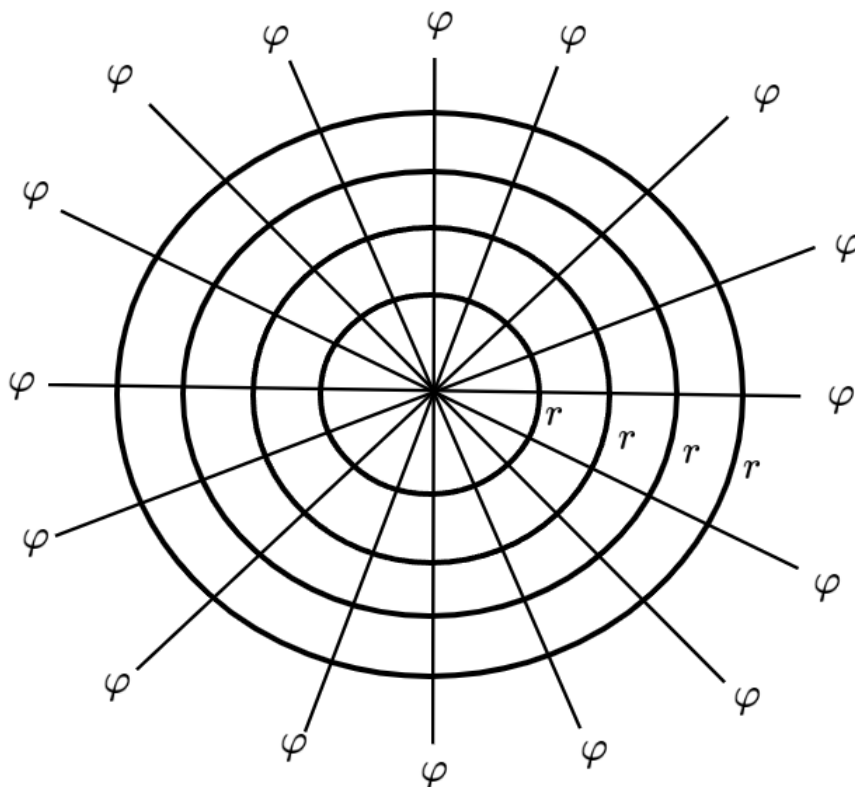
Uvrštavanjem svega se naposljetku dobije metrika za polarni koordinatni sustav koja u matričnom obliku je

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (y^1)^2 \end{bmatrix},$$

što u malo poznatijoj notaciji  $(y^1, y^2) \rightarrow (r, \varphi)$  je

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da sama metrika ovisi o udaljenosti od ishodišta  $r$  polarnog koordinatnog sustava. To bi i očekivali s obzirom na raspodjelu koordinatne mreže polarnog sustava.



Slika 4.2: Mreža polarnog koordinatnog sustava.

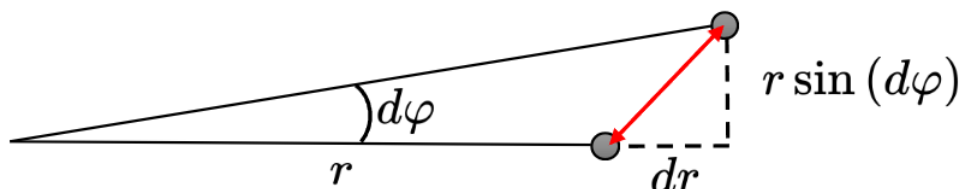
Vidimo po slici 4.2 da je mreža sačinjena od koncentričnih kružnica koje predstavljaju različite vrijednosti  $r$ -a dok pravci koji prolaze kroz ishodište korespondiraju različitim



kutevima  $\varphi$ . Očito da na većim kružnicama (veći  $r$ ) se luk između dva susjedna pravca povećava. Uzmemo li isti izraz za najkraću diferencijalnu udaljenost dobivamo jednadžbu:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Možemo to predstaviti kao pravokutni trokut na slici 4.3.



Slika 4.3: Diferencijalna udaljenost polarnog koordinatnog sustava u obliku hipotenuze pravokutnog trokuta.

Dakle crveno označena udaljenost na slici 4.3, to jest njen kvadrat je

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2(d\varphi),$$

a pošto radimo sa infinitezimalnim dijelovima prostora, sam kut  $d\varphi$  će biti vrlo mala vrijednost te funkciju sinusa možemo razviti u polinom pomoću Taylorovog razvoja gdje će nam svi članovi, osim člana prvog reda, biti zanemarivi. Tad možemo  $\sin(d\varphi)$  zapisati kao  $d\varphi$  te dobivamo ponovno izraz za diferencijalnu duljinu koju smo riješili preko metrike.

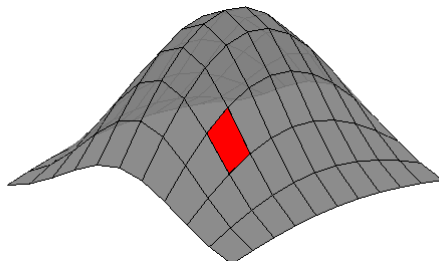
## 4.2 Općeniti Riemannov prostor

U prošlim potpoglavljima smo primjere tenzorske algebre i transformacija primjenjivali na Euklidske ravne prostore. Ti prostori su okarakterizirani da se u bilo kojoj točki prostora može zapisati metrika identična pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu odnosno metrika predstavlja jediničnu matricu. Za općenite prostore možemo imati dijelove prostora koji to ispunjavaju, a u određenim slučajevima prostor ne može imati jediničnu metriku ni u jednom dijelu. Kako je potrebno pronaći svojstva prostora moramo uvesti dodatan alat koji ih može ispitati. Vidjeli smo da čak metrika ovisna o koordinatama može predstavljati ravan Euklidski prostor, pa su nam potrebni dodatni alati za ispitivanje prostora temeljem metrike.

### 4.2.1 Mnogostrukost

Za Euklidski prostor su nam dobro poznate operacije kao derivacija ili integriranje što je neizostavan alat, stoga moramo uvesti iste te koncepte i za prostore sa

kompliciranijom geometrijom. U svrhu toga uvodimo pojam mnogostrukosti (eng. *manifold*) što predstavlja apstraktan topološki prostor gdje možemo za svaku točku tog prostora postaviti lokalni prostor koji ima svojstva Euklidskog<sup>1</sup>. Mnogostrukost možemo zamisliti kao niz Euklidskih prostora povezanih zajedno koji tvore kompliciraniji prostor kao na slici 4.4.



Slika 4.4: Vizualni prikaz ideje mnogostrukosti.

Izdvojimo li djelić prostora (crvenom označen kvadrat na slici 4.4) dobivamo aproksimativno ravan Euklidski prostor. U ovom slučaju smo imali primjer dvodimenzionalnog prostora prožet i zakrivljen, kako možemo zamisliti, u trećoj dimenziji. Bez obzira na to i dalje je taj prostor dvodimenzionalan. Vrijedi i da će pojedini lokalni Euklidski prostori, koji čine mnogostrukost kompliciranijeg prostora, biti iste dimenzije kao i prostor opisan kao mnogostrukost.

## 4.2.2 Kovarijantna derivacija

Ovakva ideja prostora nam pruža da sve definicije tenzora, koje smo imali u Euklidskom prostoru, možemo prevesti u općeniti zakrivljeni prostor. Premda imamo ideju vektora kao objekta koji spaja dvije točke prostora sa početkom i krajem te tako definiramo njegov smjer i veličinu, no u kontekstu mnogostrukosti, vektori (i ostali tenzori) su vezani za samo jednu točku prostora. No da se vežemo za lokalne prostore. Tenzore definiramo nad njihovim tzv. tangentnim prostorima koje vežemo za već spomenute lokalne Euklidske prostore. Potrebna nam je stoga veza između različitih tangentnih prostora za susjedne točke nad kojima su definirani. U svrhu toga uvodimo Christoffelov simbol  $\Gamma$  koji je definiran kao

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2}g^{jm} \left( \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right), \quad (4.4)$$

gdje  $g^{jm}$  je inverz metrike prostora. Premda po indeksima bi zaključili da je riječ o tenzoru, Christoffelovi simboli ne ispunjavaju svojstva tenzora. Vidimo da u izrazu stoje derivacije

<sup>1</sup>Određena svojstva koja opisuju zakrivljeni prostor će biti sadržana, no analogne operacije koje nalazimo u Euklidskoj geometriji ćemo moći prevesti sada za zakrivljene prostore putem koncepta mnogostrukosti.

metrike koje nisu tenzor te stoga isto vrijedi i za sveukupnu vrijednost. Christoffelov simbol ima svojstvo  $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$  što ćemo koristiti u sljedećim primjerima.

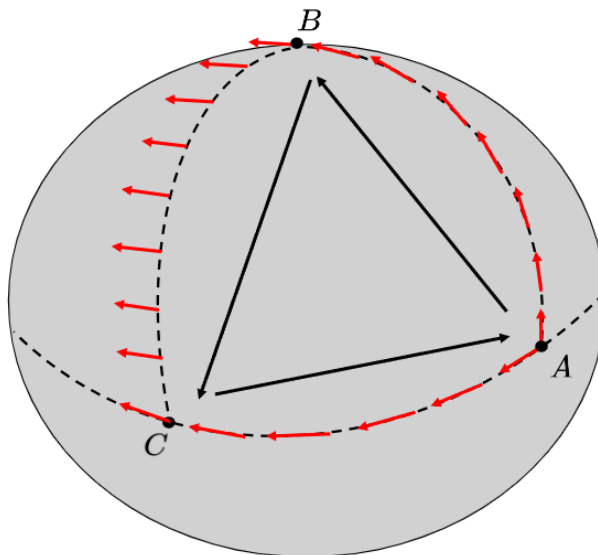
Glavna uloga Christoffelovog simbola je kao poveznica između tangentnih prostora te nam služi u poopćenom izrazu za parcijalnu derivaciju vektora po zakrivljenom prostoru. Kovarijantna derivacija je način transporta vektora iz jednog u drugi tangentni prostor, što ćemo vidjeti kasnije. Izraz za kovarijantnu derivaciju je sljedeći

$$D_i V^j = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + V^k \Gamma^j_{ik}. \quad (4.5)$$

Uzmemo li da se nalazimo u Euklidskom prostoru, konekcija  $\Gamma$  postaje nula za svaki svoj indeks te izraz za kovarijantnu derivaciju prelazi u obični izraz za parcijalnu derivaciju.

### 4.2.3 Zakrivljenost prostora

Samo svojstvo prostora možemo pronalaziti u njegovoj zakrivljenosti. Kako različite metrike mogu opisivati isti prostor, razvijamo alat koji nam s proizvoljnom metrikom prostora daje opis njegove zakrivljenosti. Metoda određivanja zakrivljenosti je putem tzv. paralelnog transporta vektora. Vizualno zamislimo zakrivljen prostor kao što je površina kugle.



Slika 4.5: Paralelni transport vektora po dvodimenzionalnoj sferi.

Predočimo si to na zorniji način kao na slici 4.5. Imamo koplje u ruci i nalazimo se na ekvatoru (točka A). Moramo prvo ravno ići na sjever do sjevernog pola (točka B) i za  $90^\circ$  skrenuti te južno doći do ekvatora (točka C). Od točke C idemo po ekvatoru natrag do točke A. Tijekom cijelog tog postupka držimo koplje ravno i paralelno kako smo počeli u

točki  $A$ . Vidimo da će zbog zakrivljenosti Zemlje rezultat biti da će nam se orijentacija koplja promijeniti. Glavni faktor koji je uzrokovao promjenu vektora je sama zakrivljenost prostora. Istim tim putem možemo i definirati tu zakrivljenost. Pri paralelnom transportu vektora moramo obići zatvorenu krivulju te ta krivulja mora omeđivati dio prostora. Primjerice da smo išli od  $A$  do  $B$  i natrag bi dobili ravnu liniju po prostoru zbog čega se orijentacija vektora ne bi promijenila. Matematički, paralelan transport vršimo s pomoću kovarijantne derivacije gdje provlačimo vektor po zatvorenoj krivulji. Kako je promjena vektora razmjerna zakrivljenosti te isto prostorom kojeg omeđuje put vektora, moramo i to uzeti u obzir. Na kraju dobivamo Riemannov tenzor zakrivljenosti oblika

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{bd} - \partial_d \Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^a{}_{cm} \Gamma^m{}_{bd} - \Gamma^a{}_{dm} \Gamma^m{}_{bc}. \quad (4.6)$$

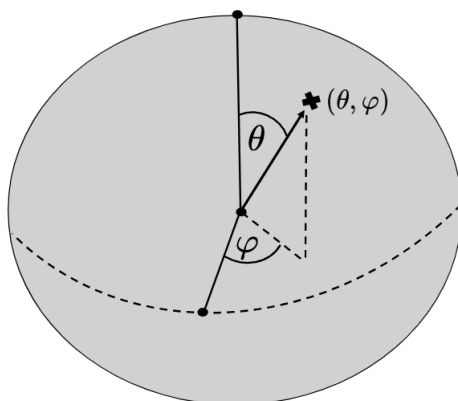
Zapis  $\partial_c$  definira parcijalnu derivaciju po koordinatama prostora  $\frac{\partial}{\partial x^c}$ . Očito je Riemannov tenzor, tenzor 4. reda što je užasno komplicirano za rješavati. Za primjer uzmimo dvodimenzionalni sferni prostor kao što smo i prije. Metrika prostora je jednaka

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

gdje ćemo uzeti jediničnu vrijednost radijusa kako bi pojednostavnili proračun

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Koordinatni sustav vezan za ovu metriku opisa prostora je kao na slici 4.6.



Slika 4.6: Koordinatni sustav definiran na površini sfere.

U našem smislu će  $(x^1, x^2)$  biti istovjetni sa  $(\theta, \varphi)$ . Jedina derivacija metrike po koordinati prostora koja neće biti nula je

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

ostale derivacije su nula. Inverz metričke je jednak

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Po izrazu (4.4) jedine ne nulte komponente Christoffelovog simbola će biti  $\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{21}$ , a po svojstvu koje smo prije zapisali, vrijedi  $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$ . Izrazi za komponente su sljedeći

$$\Gamma^1_{22} = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Jedine derivacije Christoffelovih simbola će biti po koordinati  $\theta$  odnosno  $x^1$  iz čega proizlazi

$$\partial_1 \Gamma^1_{22} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta,$$

$$\partial_1 \Gamma^2_{12} = -\frac{1}{\sin^2 \theta},$$

$$\partial_1 \Gamma^2_{21} = -\frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Konačno Riemannov tenzor zakrivljenosti, koji je sačinjen u ovom slučaju od 16 komponenti, te će za ne nulte komponente imati

$$R^1_{212} = \sin^2 \theta,$$

$$R^1_{221} = -\sin^2 \theta,$$

$$R^2_{121} = 1,$$

$$R^2_{112} = -1.$$

Vidimo da tenzor zakrivljenosti ukazuje na kompliciraniji opis od onog što smo navikli pod pojmom zakrivljenosti kao u primjerima iz čvrstoće.

Riemannov tenzor zakrivljenosti možemo reducirati na tenzor drugog reda zbrajanjem po indeksima. Tad dobivamo Riccijev tenzor zakrivljenosti koji je oblika

$$R_{ij} = R^k_{ikj}, \quad (4.7)$$

što je, ako pratimo Einsteinovu konvenciju jednostavno zbrajanje po indeksu  $k$ . Za naš slučaj prostora na površini sfere Riccijev tenzor glasi

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{121} = 1,$$

$$R_{12} = R^1_{112} + R^2_{122} = 0,$$

$$R_{21} = R^1_{211} + R^2_{221} = 0,$$

$$R_{22} = R^1_{212} + R^2_{222} = \sin^2 \theta,$$

što možemo zapisati i u obliku matrice

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Vidimo kako oba tenzora ovise o koordinati, premda bi pojmili da je zakrivljenost sfere konstantna. Zakrivljenost kakvu mi zamišljamo je skalarna vrijednost dok su ovo tenzori višeg reda te sadrže dodatne veličine vezane za zakrivljenost. Kako bi izvukli skalar zakrivljenosti za prostor skraćujemo indekse Riccijevog tenzora sa inverzom metrike prostora

$$R = g^{ij} R_{ij}. \quad (4.8)$$

Za dvodimenzionalni prostor na površini sfere, skalar zakrivljenosti bi bio

$$R = 2,$$

što vrijedi za jediničnu sferu. Za općenitu sferu, radijusa  $r$ . Riemannov i Riccijev tenzor zakrivljenosti su identični sa vrijednostima jedinične sfere ali u metrici imamo dodani  $r$  kojeg smo u početku postavili da je jednak jedan. Uvrstimo li sve vrijednosti ponovo u (4.8) dobivamo skalar zakrivljenosti

$$R = \frac{2}{r^2}$$

Zanimljivo, za sferu ispada recipročna vrijednost kvadrata udaljenosti od središta.

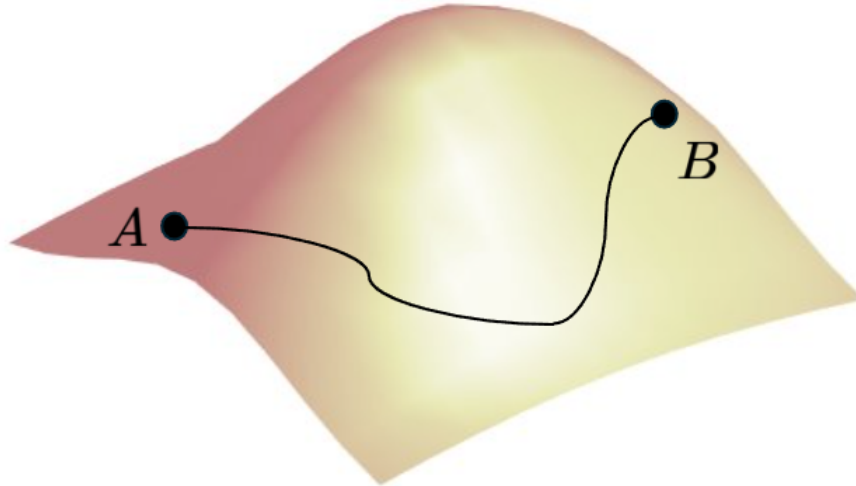
#### 4.2.4 Geodezici

Spominjali smo kako metrika definira najkraću udaljenost dvije infinitezimalno udaljene točke. Krivulju, koja opisuje najkraću udaljenost u prostoru, zovemo geodezikom. Zamislimo dvije točke prostora kao na slici 4.7 i tražimo izraz za njihov geodezik. Put koji bi prošli kretanjem kroz taj prostor je jednak

$$s = \int_A^B \sqrt{g_{ij} x^i x^j}, \quad (4.9)$$

gdje ćemo derivirati koordinate po proizvoljnom parametru  $\lambda$

$$s = \int_A^B \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda.$$



Slika 4.7: Ilustracija općenitog puta u zakrivljenom prostoru.

Cilj nam je da vrijednost  $s$  bude minimalna to jest imamo optimizacijski problem. Ujedno možemo promatrati put kao akciju te primjenjujemo princip najmanje akcije  $\delta s = \delta S = 0$

$$\delta s = \delta S = \int_A^B \delta \left( \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} \right) d\lambda = 0. \quad (4.10)$$

Daljnji postupak rješavanja je složeniji te se može pronaći u [3]. Krajnji rezultat je jednačba geodezika

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0. \quad (4.11)$$

Ponovno se vratimo na primjer prostora na površini sfere. Dobivamo sustav od dvije diferencijalne jednačbe drugog reda koje glase

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \Gamma^1_{22} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{d^2 \theta}{ds^2} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \Gamma^2_{12} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \Gamma^2_{21} \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

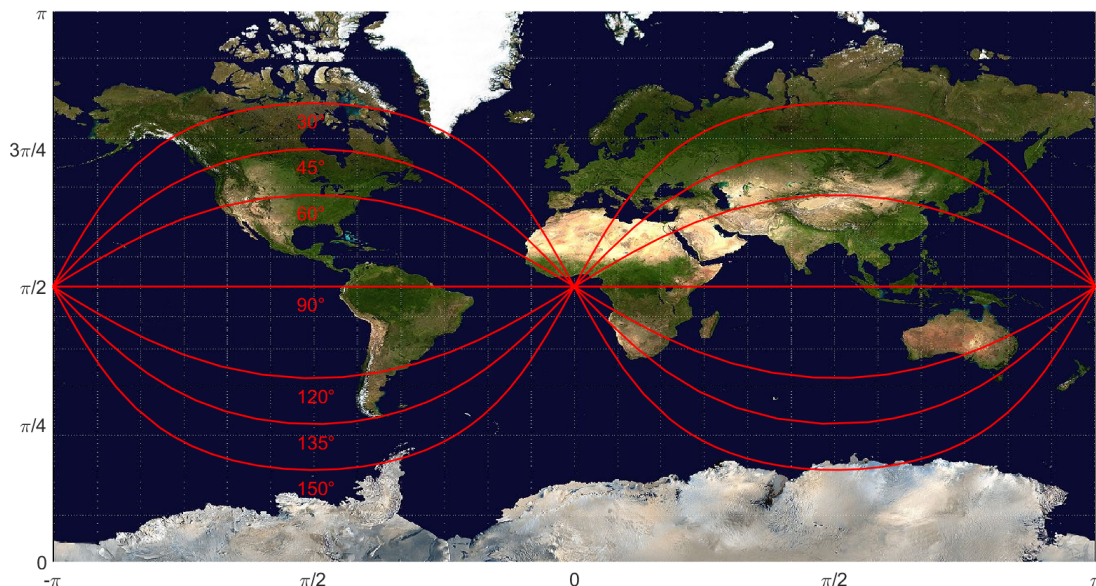
što konačno možemo prevesti u oblik

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2, \quad (4.12)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\theta}{ds}. \quad (4.13)$$

Kako bi si predočili što radimo, uzmimo našu sferu i preslikajmo ju na ravni dvodimenzionalni prostor. Dakako ne možemo prevesti zakrivljen prostor u ravni, no za većinu sfere je to potpuno dobro definiran prostor. Dakle  $\theta$  i  $\varphi$  će predstavljati dvije osi pravokutnog sustava gdje  $\varphi$  će biti horizontalna os, a  $\theta$  vertikalna. Nešto slično kao što

opisujemo koordinatni sustav Zemlje s pomoću geografske duljine i širine. Ovakav način opisa Zemljine kugle ujedno zovemo i Merkatovom projekcijom. Zanimljiva činjenica je da avioni putuju putem geodezika jer su to najkraće i stoga najravnije krivulje na Zemljinoj površini. Rješavanjem sustava diferencijalnih jednadžbi, datom u izrazima (4.12) i (4.13), numerički dobivamo rješenja prikazana na slici 4.8.



Slika 4.8: Rješenja geodezika za dvodimenzionalni prostor na površini sfere sa pozadinskom slikom Merkatove projekcije Zemljine površine<sup>3</sup>.

Na slici 4.8 smo se postavili na krajnju zapadnu točku ekvatora te smo krenuli u diskretnim slučajevima na puteve pod kutevima<sup>4</sup> od 30° do 150°. Vidimo da je rezultat dosta drugačiji od onoga na što smo navikli gledajući karte. Krećući se u skoro bilo kojem smjeru ćemo kad tad doći do sjecišta nultog meridijana i ekvatora i kompletno ćemo promijeniti polutku na kojoj smo bili. Iznimka je kad se krećemo ravno prema južnom ili sjevernom polu. Tad ostajemo na meridijanu na kojem smo počeli.

### 4.3 Gravitacija u općoj teoriji relativnosti

Prošavši kroz matematičke temelje opće teorije relativnosti, vrijeme je dati fizičku interpretaciju svega rečenog. Ponovno se osvrćemo na priču koja je urodila idejom, a zatim novom teorijom kakvu znamo danas. Einstein dok je radio u uredu za patente

<sup>3</sup>Pozadinska slika je preuzeta sa: <https://images.app.goo.gl/quo39A4q8HytHLut9>

<sup>4</sup>Na kompasima se orijentacija bilježi preko kuta koji je nula prema sjeveru, te u smjeru kazaljke na satu se povećava, primjerice istok je na 90°.



u Švicarskoj je promatrao radnika koji je prao prozore zgrade. Pri toj ideji je zamislio kako se radnik slučajno poskliznuo i počeo padati sa skele na kojoj je radio. Ključan detalj je, koji je Einsteina zaintrigirao u njegovoj mašti, što bi radnik osjećao da pada. U slobodnom padu ne bi osjećao ni jedan utjecaj sile ili bilo kakvog ubrzanja na svoje tijelo, premda bi sam ubrzavao relativno s obzirom na trotoar ulice. Kao da je radnik odjednom postao vezan za prije spomenuti inercijski sustav. Ta ključna spoznaja ga je navela da poopći ideje iz specijalne relativnosti.

### 4.3.1 Poveznice sa geometrijom

Premda se može u dosta slučajeva čuti kako specijalna relativnost je vezana za objekte koji se brzo gibaju dok je opća vezana za fiziku ogromnih masa, činjenica je da specijalna teorija relativnosti spada u poseban slučaj opće te kako smo radili i sa Riemannovim općim prostorima, počinjemo od jednostavnijih primjera prema sveukupnoj slici.

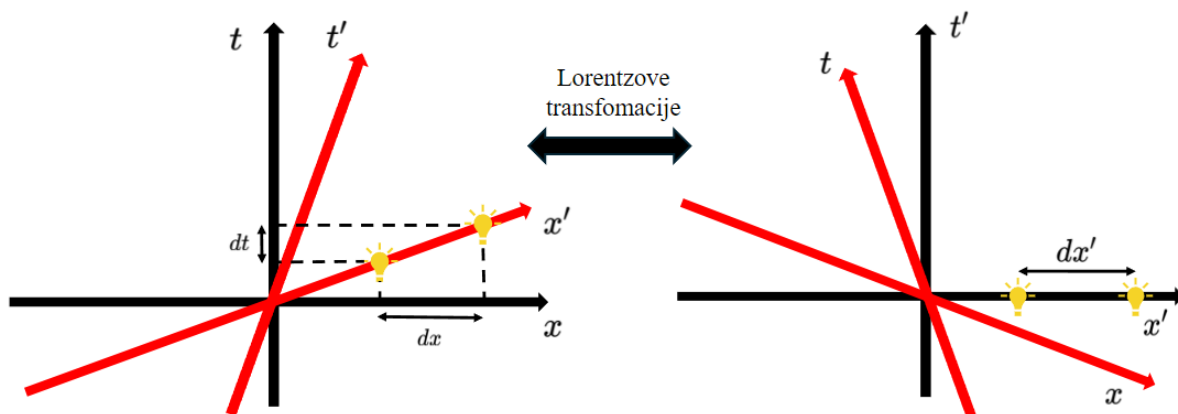
U dijelu za relativnost smo ukazali na invarijantu prostor-vremena koja je opisana izrazom (3.41). Vidimo da radimo u sustavu sa 4 dimenzije, tri prostorne i jedna vremenska. Iako vrijeme ima drastično različite karakteristike spram prostora. Za primjer, mi se po prostoru možemo kretati naprijed i nazad po koordinatama dok za vrijeme naizgled imamo samo jedan smjer. Što je vrijeme u svom fizičkom pojmu nećemo zamišljati, no samo ga tretirajmo zasebno od prostora. Premda drugačiji, specijalna relativnost nam je dala relaciju i međuzavisnost tih dimenzija. Ovaj, kako smo ga nazvali, Minkoskijew prostor možemo dosta dobro povezivati sa općenitim prostorom u geometriji te isti izrazi kao i u prošlom potpoglavlju vrijede. Uzmimo stoga metriku Minkoskijewog prostora. Izraz (3.41) možemo svesti na diferencijalni oblik koji je

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2, \quad (4.14)$$

gdje ćemo uzeti prirodne koordinate za prostor-vrijeme takve da  $c = 1$  kako ne bi vukli konstantu kroz naše izraze. Slično kao što smo imali u opisu metrike prostora, ovaj izraz predstavlja infinitezimalnu udaljenost dvije točke u prostor-vremenu te ju zovemo *prava udaljenost*. Primjerice govorili smo za simultanost kako nije dobro definirana u specijalnoj relativnosti, pa pokažimo primjer s pomoću koordinatnog sustava prostora i vremena kao na slici 4.9. Na slici 4.9 uzimamo da su u pitanju dva događaja koja predstavljamo u obliku paljenja lampi. Za prvog promatrača u koordinatnom sustavu  $x, y, z, t^5$  se lampice pale u drugačijim vremenskim periodima i na drugačijim mjestima u prostoru.

---

<sup>5</sup>Prikazujemo sustav kao dvodimenzionalan pa možemo reći da su komponente  $y$  i  $z$  jednake nuli i po njima se ne pomičemo.



Slika 4.9: Koordinatni sustavi prostor vremena za dva promatrača koji se relativno gibaju i gledaju isti događaj.

Za sustav  $x', y', z', t'$ , u kojeg se možemo prebaciti preko Lorentzovih transformacija da bude stacionaran, obje lampice se pale u isto vrijeme. Kako invarijanta prostora bez obzira na brzinu promatrača mora ostati konstantna tad vrijedi izraz

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2.$$

Uvrstimo li sve vrijednosti dobivamo jednakost

$$dx^2 - dt^2 = dx'^2,$$

to jest vrijedi  $dx'^2 = ds^2$ , odnosno *prava udaljenost*, kako sam naziv nalaže, nije ništa drugo nego prostorna udaljenost dva događaja koje bi promatrali u referentnom sustavu u kojima su simultani ( $dt = 0$ ). Slično bi i za vrijeme imali, kad bi imali dva događaja koja se u jednom referentnom sustavu nalaze na istoj poziciji. Primjerice ista lampa se upali pa zatim ugasi. Promatrač koji se giba relativno spram lampi bi vidio ta dva događaja u različitim vremenskim i prostornim koordinatama, dok bi promatrač u referentnom sustavu, stacionarnom s obzirom na lampu, promatrao samo vremensku razliku koju nazivamo *pravo vrijeme*.

Možemo sada i izraz (4.14) zapisati indeksno, gdje ćemo koristiti grčke simbole za indekse

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.15)$$

gdje  $x^\mu$  je vektor koordinata za kojeg ćemo uzeti da je nulta komponenta vrijeme, a ostale tri su prostor. Grčki zapis je uzet kao konvencija kad pričamo o geometriji prostor-vremena, no sve ostaje isto. Izraz za *pravu udaljenost* u jednadžbi (4.14) opisuje potpuno ravan Minkowskijev prostor, koji je pandan Euklidskom u geometriji samo prostora. Ovaj

poseban slučaj ima i posebnu oznaku za metriku  $\eta$  te vrijedi

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Možemo zaključiti da će ova matrica imati 4 svojstvene vrijednosti od kojih će jedna biti negativna te će se vezati za vrijeme. Pravilo je da će bilo koja metrika prostor-vremena imati tri pozitivne svojstvene vrijednosti i jednu negativnu vezanu za vrijeme.

Spominjali smo Einsteinovu ideju o čistaču prozora u slobodnom padu gdje je zaključeno da bi takav promatrač bio u inercijskom sustavu. Temelj specijalne relativnosti je da se promatrači nalaze u sebi vezanim inercijskim referentnim sustavima stoga na njih se primjenjuje metrika potpuno ravnog Minkowskijevog prostora. Einstein nalaže da sam prostor-vrijeme isto tako mogu biti zakrivljeni i komplicirane geometrije, a kako smo naveli prije, takve prostore možemo opisati kao mnogostrukost. U svakoj točki tog prostora možemo postaviti lokalni Euklidski prostor, no sada u prostor-vremenu to vrijedi za potpuno ravan Minkowskijev prostor. Na ovu misao ćemo se vratiti kad budemo uveli gravitaciju u priču. Za sada prijedimo na ostale geometrijske pojmove.

U ovakvom prostor-vremenu, opisanog kao mnogostrukost, možemo vršiti iste operacije transporta vektora kako bi dobili svojstva prostora. Uz sve ovo se isto tako veže i pojam geodezika, kao najravnije to jest najkraće udaljenosti između dviju točaka u prostoru. Sad je za spomenuti da sam prostor-vrijeme je definiran kao skup događaja, što znači da događaji predstavljaju točke prostor-vremena. Dakle geodezik u prostor-vremenu je najkraća prostorno vremenska udaljenost dvaju događaja. Opisan je istom jednadžbom kao i za prostor

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (4.16)$$

Ključna ideja je da ovo ne predstavlja samo najkraću prostornu, nego i vremensku udaljenost što daje glavobolju u razmišljanju, no završimo sa definicijom. Sve čestice koje slobodno putuju kroz prostor-vrijeme će pratiti geodezike, što proizlazi iz principa najmanje akcije.

### 4.3.2 Opis gravitacije kao deformacije prostor-vremena

Spomenuli smo da se sam prostor i vrijeme mogu deformirati, no nismo rekli zbog čega je to slučaj. Premda je Newton dosta dobro opisao utjecaj gravitacije u svojim jednadžbama, to nije riješilo što je zapravo gravitacija. Preko kojeg medija djeluju mase jedna na drugu ako znamo da udaljeni planeti su razdvojeni vakuumom svemira. Odgovor

je sam prostor odnosno samu deformaciju prostora i vremena opisujemo kao gravitaciju. Ovo sve je malo teško za upit pa si uzmimo par riječi da to objasnimo.

Newton je s pomoću svojih jednadžbi dobivao silu koja nadalje opisuje gibanje čestica u prostoru. Na sličan način je to Einstein napravio preko prostor-vremena. Sve čestice se gibaju po geodezicima, pa sama deformacija prostor-vremena utječe na izgled geodezika odnosno putanje kojom čestica putuje. Dakle samo gibanje koje smo opisivali preko sila je sada opisano geometrijom.

Kod Newtona sila je ovisila o masama čestica koje su u sustavu. S pomoću specijalne teorije relativnosti je Einstein došao do možda najpoznatijeg izraza u povijesti znanosti

$$E = mc^2. \quad (4.17)$$

Od svega nam je samo bitno da su masa i energije jedno te isto, povezano preko konstante brzine svjetlosti. Temeljem toga će u Einsteinovom opisu gravitacije, sam izvor deformacije prostor-vremena biti energija koja se nalazi u njemu. Ovu ideju je dobro predočio fizičar John Archibald Wheeler sa izrekom:

*Spacetime tells matter how to move;  
matter tells spacetime how to curve.*

*Prostor-vrijeme nalaže materiji kako da se giba;  
materija nalaže prostoru-vremenu kako će se deformirati.*

Matematički opis deformacije prostor-vremena pod utjecajem materije, to jest energije, je dan u Einsteinovoj jednadžbi polja te ona predstavlja srž opće teorije relativnosti

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

koja sadrži Riccijev tenzor  $R_{\mu\nu}$ , skalar zakrivljenosti  $R$ , metriku  $g_{\mu\nu}$ , kozmološku konstantu  $\Lambda$ , koja je toliko male vrijednosti na malim udaljenostima da ju možemo zanemariti<sup>6</sup>, te tenzor energije-impulsa  $T_{\mu\nu}$ . Premda vrlo kompaktna jednadžba, brzo se pretvori u težak i mukotrpan zadatak za rješavanje pa se u praksi koristimo gotovim rješenjima za pojedine slučajeve. Postoji više rješenja Einsteinove jednadžbe polja gdje pod rješenja mislimo na metriku prostora koja zadovoljava Einsteinovu jednadžbu polja. S pomoću metrike možemo, temeljem izraza za geodezike, dobit kinematiku čestice te ćemo tako i doći do rješenja našeg rada.

<sup>6</sup>Kozmološka konstanta je vezana za Hubbleova promatranja širenja svemira te je jednaka  $\Lambda = 1.1056 \cdot 10^{-52} m^{-2}$  pa njen utjecaj tek dolazi u obzir na ogromnim kozmološkim udaljenostima.

## 4.4 Schwarzschildovo rješenje

U radu uzimamo specifično rješenje Einsteinovih jednadžbi. Ujedno prvo, Schwarzschildovo rješenje opisuje relativno jednostavan sustav točkaste mase u prostoru. Ovo potpoglavlje prati predavanja prof. Sean M. Carrolla te se može pronaći u [8]. Za detaljniji matematički opis pogledati referencirani izvor.

### 4.4.1 Schwarzschildova metrika

Kao što i naslov nalaže, koristimo Schwarzschildovu metriku opisanu za Schwarzschildov koordinatni sustav  $(t, r, \theta, \varphi)$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega, \quad (4.19)$$

gdje  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ , a  $r_s$  se odnosi na Schwarzschildov radijus  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Oznake  $c$ ,  $G$  i  $M$  su konstante vezane redom za brzinu svjetlosti  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , gravitacijsku konstantu  $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  te masu tijela  $M$ ,  $[M] = \text{kg}$  koje je opisano kao točkasta masa u središtu koordinatnog sustava. Ovdje uzimamo opis metrike preko *pravog vremena* što se samo razlikuje za predznak od *prave udaljenosti*. Prvo radimo pojednostavljenja tako da uzmemo mjerne jedinice za vrijeme ili prostor takve da  $c = 1$ , te uvodimo supstituciju  $\frac{r}{r_s} \rightarrow r$  i  $\frac{t}{r_s} \rightarrow t$  te dobivamo

$$d\tau^2 = \left[ \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega \right] r_s^2. \quad (4.20)$$

Iz (4.20) možemo zaključiti da će sva rješenja za Schwarzschildovu metriku biti rješenja vezana za izraz pod uglatim zagradama skaliran za  $r_s^2$  što je neka konstanta. Možemo stoga promatrati samo

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega. \quad (4.21)$$

Ako iz (4.21) izrazimo metriku, tako da vrijedi  $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ , dobivamo

$$g = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{1}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

#### 4.4.2 Uvođenje Killingovih vektora

Zbog velike simetričnosti Schwarzschildovog rješenja možemo uvesti pojednostavljena tako da uvedemo u priču Killingove vektore  $K^\mu$ . Po definiciji vrijedi  $K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = konst.$ , gdje  $\lambda$  je afini parametar čiji smisao i važnost ne moramo znati za ovaj rad, a interesirani mogu pogledati spomenutu literaturu ovog potpoglavlja. Definicija tih vektora je analogna konstantama gibanja koje nalazimo u mehanici. Primjerice Killingov vektor koji se množi sa promjenom vremena po afini parametru će biti analogan energiji (očuvanje energije), a za bilo koju od prostornih koordinata će se odnositi na očuvanje količine gibanja odnosno očuvanje rotacijske količine gibanja. Jedan od tih nalaže da će se čestice gibati po ravni što je u principu očuvanje rotacijske količine gibanja. Iz toga možemo uzeti posebni slučaj ekvatorijalnog gibanja gdje  $\theta = \frac{\pi}{2}$  te je  $\frac{d\theta}{d\lambda} = konst.$ , a (4.21) možemo preoblikovati u

$$\epsilon = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2. \quad (4.22)$$

Kod računanja se može uzeti da su sve orbite ekvatorijalne tako da se samo zarotira koordinatni sustav. Metrika sada prelazi u  $3 \times 3$  matricu gdje svi parametri ovise o  $r$ . U prijevodu možemo pronaći Killingove vektore za  $t$  i  $\varphi$  jer metrika ne ovisi o tim parametrima. To što metrika ne ovisi o vremenu  $t$  još nalaže da je metrika stacionarna, a može se dokazati da je i statička<sup>7</sup>. Imamo sljedeća dva Killingova vektora

$$K^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad K^\mu = (0, 0, 0, 1),$$

koji redom su vektor za vrijeme i vektor za koordinatu  $\varphi$ . Ovo su kontravarijantne komponente tih vektora, a kovarijantne dobivamo množenjem sa metrikom  $K_\nu = g_{\mu\nu}K^\mu$  što rezultira u

$$K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{1}{r}\right), 0, 0, 0\right), \quad K_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2(\theta)),$$

no kako smo postavili da  $\theta = \frac{\pi}{2}$  vrijedi  $r^2 \sin^2(\theta) = r^2$ . Uvrštavanjem rezultata u definiciju dobivamo dvije konstante gibanja

$$E = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}, \quad (4.23)$$

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (4.24)$$

Ako pomnožimo (4.22) sa  $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$  i član uz  $\frac{d\varphi}{d\lambda}$  pomnožimo i podijelimo sa  $r^2$  dobivamo

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) \epsilon = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{r^4}{r^2} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2,$$

<sup>7</sup>Ovi pojmovi iza sebe vuku puno teorije koja se može pronaći u [8].

koristimo izraze (4.23) i (4.24) kako bi pojednostavnili u

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) \epsilon = E^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{L^2}{r^2},$$

te sve negativno prebacimo na suprotnu stranu

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) = E^2. \quad (4.25)$$

Da malo proanaliziramo izraz (4.25). Uredit ćemo jednadžbu kako bi dobili vrlo prepoznatljiv oblik

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = E^2. \quad (4.26)$$

Možemo lako prepoznati da je riječ o jednadžbi analognoj očuvanju energije, gdje  $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$  opisuje kinetičku energiju,  $V(r)$  potencijalnu, a  $E^2$  ukupnu energiju sustava. Potencijalna energija  $V(r)$  ovisi samo o radijalnoj udaljenosti što bi i očekivali. Potencijal zapisujemo kao funkciju u koju vraćamo konstante  $G$  i  $M$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) = \frac{1}{2}\epsilon - \frac{GM}{r}\epsilon + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}, \quad (4.27)$$

gdje  $\epsilon$  je jednak nuli za poput-svjetlosne čestice, jedan za poput-vremenske čestice i minus jedan za poput-prostorne čestice. Kako bi još dublje shvatili jednadžbe usporedimo ih sa rješenjima koja su prethodila Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti.

### 4.4.3 Usporedba sa Newtonovim opisom gravitacije

Kao što smo postavili u (4.23) i (4.24), vidljivo je da vrijedi očuvanje energije i očuvanje količine gibanja. Što više iz (4.24) se može izvući drugi Keplerov zakon. Drugi Keplerov zakon nalaže da će spojnica objekta koji orbitira i objekta oko kojeg taj orbitira prevlačiti jednaku površinu u jednakom vremenskom intervalu (zakon očuvanja rotacijske količine gibanja). U prijevodu vrijedi

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (4.28)$$

što možemo preoblikovati u oblik sličan izrazu (4.24)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = konst.,$$

gdje smo dvcu stavili pod opću konstantu. Kao i na samom početku, možemo uzeti izraz (2.12) koji je vezan za Newtonov opis gravitacije

$$\frac{1}{2}mr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = E. \quad (4.29)$$

Dijelimo sve sa  $m$  i  $\frac{E}{m}$ , pošto je konstanta, zapisujemo ponovno kao  $E$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E, \quad (4.30)$$

što je identično izrazu (4.26), no ako sada pogledamo efektivni potencijal  $V_{eff}(r)$  imamo jedan član manje nego u Općoj teoriji relativnosti

$$V_{eff}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}, \quad (4.31)$$

gdje smo napravili supstituciju  $\frac{L}{m} \rightarrow L$ . Izraz (4.30) je identičan (4.26). Kad bi uvrstili  $\epsilon = 1$  što vrijedi za poput-vremenske čestice koje opisuju sve čestice sa masom, izraz (4.27) i (4.31) bi se razlikovali za zadnji član u (4.27). Premda bi u (4.27) ostala  $\frac{1}{2}$  koja samo podiže ili spušta vrijednost  $V(r)$ , no za nas su bitnije relativne vrijednosti potencijala nego apsolutne.

Podsjetimo se grafa Newtonovog potencijala na slici 2.12 kako bi imali vizualnu ideju pri analizi funkcije. Za početak uzimamo funkciju (4.31) i deriviramo ju po  $r$ :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{r^3}. \quad (4.32)$$

Izjednačimo li to sa nulom možemo tražiti ekstreme funkcije potencijala

$$r = \frac{L^2}{GM}, \quad (4.33)$$

što je izraz za radijus kružne orbite. Možemo iz izraza izvući i tangencijalnu brzinu tako da uvrstimo  $v_\varphi = \frac{L}{r}$  što nam daje

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (4.34)$$

Dobili smo izraz za brzinu objekta koji se nalazi u kružnoj orbiti na udaljenosti  $r$  od centra mase  $M$ . Naknadno znači da se ukupna potencijalna energija ne mijenja odnosno radijalna brzina je jednaka nuli što znači da je potencijal jednak ukupnoj energiji.

Da uzmemo jedan drugi primjer. Za naš slučaj, gdje smo dodali 0.5, zbog čega se sve krivulje asimptotski približavati toj vrijednosti za  $r \rightarrow \infty$ . Možemo zaključiti da za vrijednosti kad  $L > 0$  će se čestica iz beskonačnosti približiti središtu do trenutka kad efektivni potencijal ne bude jednak njenoj ukupnoj energiji. U tom trenutku smjer radijalne brzine mijenja predznak i počinje se kretati u suprotnom smjeru. Poseban slučaj će vrijediti kad  $L = 0$  odnosno nema nikakvog tangencijalnog gibanja oko gravitirajućeg objekta te se upadajući objekt giba ravno u gravitirajući. Ako deriviramo (4.32) dobivamo

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{2GM}{r^3} + \frac{3L^2}{r^4}. \quad (4.35)$$



Stabilna orbita za  $L$  postoji ako postoji lokalni minimum u funkciji  $V(r)$ , odnosno za  $r$  u (4.33) izraz (4.35) je veći od nule. Pa možemo uvrstiti (4.33) u (4.35) i usporediti ga

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{2GM}{\left(\frac{L^2}{GM}\right)^3} + \frac{3L^2}{\left(\frac{L^2}{GM}\right)^4}.$$

sredimo li izraz dobit ćemo

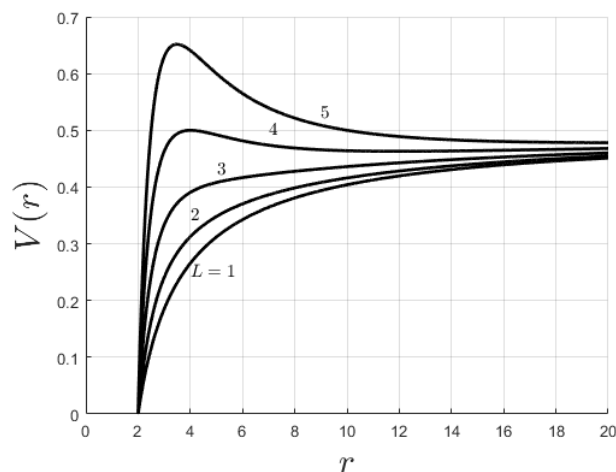
$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{G^4 M^4}{L^6}.$$

što je uvijek veće od nule pa po Newtonu za svaku vrijednost  $L > 0$  postoji stabilna orbita.

Prijeđimo na Einsteinov opis gravitacije, sada dodajemo  $\frac{GML^2}{r^3}$  u naš izraz za efektivnu potencijalnu energiju

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}. \quad (4.36)$$

Ovaj izraz kao i na slici 2.12 možemo prikazati u obliku grafa funkcije čime dobivamo sliku 4.10.



Slika 4.10: Graf funkcije potencijala za Schwarzschildovo rješenje.

Na slici 4.10 imamo različit graf, no vrijednosti za veće  $r$ -ove se sve više podudaraju sa onima na slici 2.12. U principu dodatni član djeluje najviše što smo bliži centru mase. Prvo da razjasnimo o skalama o kojima govorimo. Ovo su izrazi za općenitu točkastu masu  $M$ . Po izabranim jedinicama nam radijus ima mjernu jedinicu  $[GM]$ . Vidljiv je pad funkcije u nulu na vrijednosti  $r = 2GM$  na slici 4.10. To je upravo Schwarzschildov radijus o kojemu smo pričali. Kad bi samo uzeli u obzir da za čitavu masu Zemlje, ako uvrstimo u izraz

$$r_s = \frac{2GM}{c^2},$$

za Sustav međunarodnih jedinica (fr. *Système International d'Unités*) mjerne jedinice, bi dobili iznos od  $r_s \approx 4.435 \text{ mm}$  odnosno promjer bi bio  $d_s \approx 8.87 \text{ mm}$ . To bi bilo nešto više od pola promjera kovanice jednog centa ( $d = 16.5 \text{ mm}$ ). Tako da u praksi za planetarne orbite se izrazi (4.31) i (4.36) dobro podudaraju te se ne moramo baviti sa kompliciranijim Schwarzschildovim rješenjem. Derivacijom izraza (4.36) po  $r$  dobivamo

$$\frac{dV}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{r^4}, \quad (4.37)$$

izjednačavamo sa nulom i za  $r$  dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$GMr^2 - L^2r + 3GML^2 = 0,$$

čije rješenje je

$$r_{1,2} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM}. \quad (4.38)$$

Vidimo da će postojati rješenje ako je diskriminanta veća ili jednaka nuli odnosno

$$L \geq 2\sqrt{3}GM. \quad (4.39)$$

Kad bi (4.39) uvrstili u (4.38) dobili bi

$$r = 6GM,$$

što je ujedno najmanji radijus kružne orbite za čestice sa masom. Sve čestice koje se nalaze u području bliže centru će ići prema središtu. Iz grafova možemo vidjeti kako će postojati jedan maksimum i jedan minimum u našim jednadžbama. Ako deriviramo (4.37) dobili bi

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{2GM}{r^3} + \frac{3L^2}{r^4} - \frac{12GML^2}{r^5}. \quad (4.40)$$

Ponovo ako sredimo izraz (4.40) dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$f(r) = -2GMr^2 + 3L^2r - 12GML^2, \quad (4.41)$$

koja je konkavna (koeficijent uz najveću potenciju je negativan). Njene nul točke su

$$r_{1,2} = \frac{3L^2 \pm \sqrt{9L^4 - 96G^2M^2L^2}}{4GM} \quad (4.42)$$

odnosno diskriminanta je

$$D = 9L^4 - 96G^2M^2L^2. \quad (4.43)$$

Za  $D \geq 0$  vrijedi

$$L \geq \frac{4\sqrt{6}}{3}GM. \quad (4.44)$$

Dakle ako je  $L > \frac{4\sqrt{6}}{3}GM$  postoji područje  $\langle r_1, r_2 \rangle$  za  $r_1, r_2$  dobivenih iz (4.42) gdje funkcija  $V(r)$  je minimum. Svakako će to vrijediti ako jedan od radijusa iz (4.38), što ćemo nazvati  $r^*$ , element tog intervala  $r^* \in \langle r_1, r_2 \rangle$ . U pravilu je riječ o većem radijusu. Kad bi uvrstili (4.39) u (4.42) dobili bi vrijednosti  $r_1 = 12$ ,  $r_2 = 24$ . Vidljivo je da  $r = 6 \notin \langle 12, 24 \rangle$  što znači da je riječ o maksimumu funkcije. Uvrstimo  $L = 4$  u (4.38) i (4.42) dobili bi vrijednosti

$$r_1^* = 4, r_2^* = 12, r_1 \approx 5.1, r_2 \approx 18.93$$

što znači da je  $r_2^*$  lokalni minimum jer vrijedi  $r_2^* \in \langle r_1, r_2 \rangle$ . Za razliku od Newtonovog potencijala Einsteinov<sup>8</sup> nam ukazuje na pojavu dva radijusa za cirkularnu orbitu u slučaju da postoji lokalni minimum i maksimum funkcije. Mora se napomenuti kako će onaj unutarnji biti nestabilan jer bilo kakav pomak prema ili od gravitirajućeg objekta će ga ili uvući u njegovo središte ili će otići u beskonačnost. Samo će orbite koje prolaze kroz lokalni minimum potencijala biti stabilne ako je  $E < 0.5$  kao i kod Newtona.

Pitanje stoji, zašto bi se bavili Einsteinovim jednadžbama ako u praksi Newton daje skoro isto rješenje? Argument za to je da ćemo se baviti orbitama i putanjama blizu samog horizonta događaja što je ujedno i Schwarzschildov radijus. Isto tako ćemo slati svjetlosne čestice da putuju u blizini rupe za što klasična fizika nema dobro rješenje. Uvrstimo li  $\epsilon = 0$  u (4.27) dobivamo potencijal za svjetlosne čestice jednak

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad (4.45)$$

Kao i kod poput-vremenskih čestica, potencijal ćemo grafički prikazati kako bi imali bolji uvid u karakteristiku fotonских orbita. Graf funkcije potencijala za poput-svjetlosne čestice je prikazan na slici 4.11.

Možemo odmah uočiti sa slike 4.11 da će funkcija imati maksimum što odgovara kružnoj orbiti. Postojanje druge orbite moramo tražiti derivacijom (4.45)

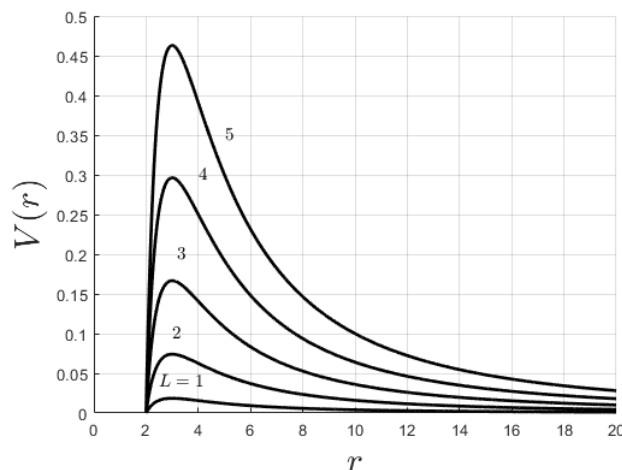
$$\frac{dV}{dr} = -\frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{r^4}, \quad (4.46)$$

izjednačimo sa nulom i dobivamo

$$r = 3 GM.$$

Za bilo koji iznos količine gibanja fotona postoji jedna kružna orbita koja se nalazi na  $r = 3 GM$ . To je ujedno radijus tzv. ftonske sfere. Fotoni koji se nalaze u kružnoj orbiti će upasti u središte ako im se smjer malo promijeni prema negativnom radijalnom smjeru te će otići u beskonačnost u suprotnom slučaju. Ovo nam daje mogućnost da razdvojimo fotone na one koje će upasti i one koji neće. Uzimamo pretpostavku da fotoni

<sup>8</sup>Skraćeno ga nazivamo Einsteinov aludirajući na Schwarzschildovo rješenje njegovih jednadžbi.



Slika 4.11: Graf funkcije potencijala za poput svjetlosne-čestice.

dolaze iz beskonačnosti. Ako dođu na radijus  $r = 3 GM$  možemo garantirati da će biti zarobljeni odnosno potencijalna informacija koja se kretala sa tim fotonom neće doći do promatrača gdje god se on nalazio, osim da nije bio u putanji prije nego što je foton došao na  $r = 3 GM$ . Svakako ako se promatrač nalazi unutar fotonske sfere, pa čak unutar horizonta, do njega može doći taj foton ako se nalazi na njegovoj putanji.

Za kraj se osvrnimo na problem dijeljenja sa nulom u izrazu (4.19). Postoje dvije ključne točke:

- Kad je  $r = r_s$  koeficijent prvog člana  $dt$  postaje nula, dok uz  $dr$  vrijednost odlazi u beskonačnost. Taj radijus ujedno još zovemo horizontom događaja. Nijedna čestica, bila masena ili foton, se ne može više vratiti iz područja manjeg radijusa od  $r_s$ . To ne znači da je čestica nestala, već izvan nemamo više informacija o njoj. Ujedno nikad nećemo vidjeti kako čestica prolazi horizont događaja jer će (temeljem metrike) trebati beskonačno vrijeme da ono prođe kroz tu granicu. Dakako u praksi će doći do tolikog pomaka u frekvenciji da će zadnja informacija biti prenošena sa ne primjetljivom frekvencijom zrake fotona. Isto tako prijelazom te točke kad smo na radijusu  $0 < r < r_s$ , članovi  $dt$  i  $dr$  mijenjaju predznak. Metrika i dalje ima tri pozitivne svojstvene vrijednosti i jednu negativnu.
- Točka singulariteta  $r = 0$  iza sebe ima ogromne polemike. Schwarzschildovo rješenje pretpostavlja točku beskonačne gustoće u središtu crne rupe. Bili singularitet bio poput čudne čestice sa beskonačnom gustoćom stoji za raspravu, no mnogi teoretiziraju da je to ključ sjedinjenja kvantne fizike i opće teorije relativnosti u sveobuhvatnu teoriju o našoj stvarnosti. Svakako postoje argumenti da singularitet ne postoji te da u stvarnosti crne rupe imaju drastično drugačija svojstva od onog što opisuje Schwarzschildovo rješenje.

# 5 Perspektiva promatrača u blizini crne rupe

Sav prethodni sadržaj je služio kao teoretska osnova za postavljanje i rješavanje problema vizualizacije perspektive promatrača u jakom gravitacijskom polju. Kako modeli klasične fizike nisu prikladni za ovakav problem od početka se impliciralo na korištenju jednadžbi iz opće teorije relativnosti. U ovom poglavlju ćemo iznijeti postupak i jednadžbe korištene u radu te same rezultate kao ishod potonjih. Glavni uzor rada se može pronaći u [1], a za zainteresirane pogledati i [9].

## 5.1 Jednadžbe za poput-svjetlosne geodezike

Promatračevo vidno polje je sačinjeno od niza upadnih fotona u njegov vidni prostor. Odmah nas navodi da ćemo jednadžbe gibanja imati vezane poput-svjetlosne geodezike. Da odmah napomenemo, pomak u frekvenciji fotona će se izdvojiti iz računa te ćemo se samo baviti njegovom putanjom oko crne rupe.

### 5.1.1 Izračun putanje fotona s pomoću jednadžbe za geodezike

Kako je rečeno, bavimo se sa tzv. Schwarzschildovom crnom rupom koja je opisana sa Schwarzschildovom metrikom. Pojam crna rupa ne mijenja naše jednadžbe već iz njih izvire ideja crne rupe kroz koju smo prošli krajem prošlog poglavlja. Radi pojednostavljenja, koristimo se bez dimenzijskim izrazom za Schwarzschildovu metriku dan u jednadžbi (4.21). Temeljem toga naš sustav je prostorno definiran u mjernim jedinicama Schwarzschildovog radijusa odnosno  $[r] = 2GM$ , a brzinu svjetlosti uzimamo kao jedan  $c = 1$ . Kako bi si skratili pisanje izraza uvodimo varijablu

$$w = 1 - \frac{1}{r},$$

te izraz (4.21) prelazi u

$$d\tau^2 = w dt^2 - w^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega, \quad (5.1)$$

gdje ponavljamo da vrijedi  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ . Ponovo zapisujemo metriku matrično

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -w(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Pomoću metrike možemo riješiti jednadžbu za geodezike uvrštavajući metriku u (4.16), s tim da ćemo varijablu  $s$  zamijeniti afini parametrom  $\lambda$  čime dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} - w \frac{d(w^{-1})}{dr} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - rw \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 - rw \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} w \frac{dw}{dr} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Vidimo da smo dobili sustav od 4 diferencijalne jednadžbe drugog reda što znači da nam je ukupni red sustava 8. Ovo je dosta kompliciran sustav kinematike fotona za koji možemo primijeniti pojednostavljenja. Uzmemo li samo ekvatorijalne orbite, za koje vrijedi  $\theta = \pi/2$  dobivamo potpuno ispravan reducirani model

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} - w \frac{d(w^{-1})}{dr} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - rw \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} w \frac{dw}{dr} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sveli smo sustav osmog reda na sustav šestog što je i dalje kompleksan model za naše potrebe. Svakako da možemo već s tim izrazima ići u simulaciju, no ovako kompleksni izrazi zahtijevaju ogromne računalne resurse kako bi se riješili u dogledno vrijeme.

### 5.1.2 Izračun putanje fotona s pomoću konstanti gibanja

Kako bi naknadno poboljšali naš model koristimo se Killingovim vektorima kako bi dobili konstante gibanja fotona za naš sustav. Isto smo i kod pojednostavljenja izraza (5.2) na (5.3) koristili rotacijsku konstantu gibanja gdje će svaka točka putanje fotona ležati na istoj plohi. Odaberemo li da su sve plohe ekvatorijalne (što možemo jednostavnom transformacijom koordinata), iz jednadžbi izostavljamo jednu prostornu dimenziju odnosno  $\theta$ -u. Odmah možemo uzeti konstante koje su izražene u (4.23) i (4.24). Kako bi dodatno pojednostavnili vratimo se na izraz (4.25) i eksplicitno izrazimo

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \frac{r-1}{r^3}L^2. \quad (5.4)$$

Mogli bi rješavati korijen ove jednadžbe te sa poznatim konstantama jednostavno riješiti jednadžbu integriranjem no ovako nam nedostaje puno informacija o našem sustavu. Bolji je način da deriviramo (5.4) po  $\lambda$  kako bi izvukli drugu derivaciju  $r$ -a što je analogno radijalnoj akceleraciji. Slično smo radili i kod Newtonovog izraza za radijalnu brzinu, gdje smo dodatno derivirali kako bi odbacili problem za predznacima. Kako su  $E$  i  $L$  konstante, a  $r$  je funkcija od  $\lambda$ ,  $r(\lambda)$ , dobivamo prvo

$$2\frac{dr}{d\lambda}\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{2r-3}{r^4}L^2\frac{dr}{d\lambda},$$

što na kraju je jednako

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{r-\frac{3}{2}}{r^4}L^2. \quad (5.5)$$

Možemo (5.5), (4.23) i (4.24) spojiti u sustav diferencijalnih jednadžbi koje možemo numerički riješiti. Još je potrebno pronaći početne uvjete. Podijelimo dvije konstante kako bi dobili

$$\frac{L}{E} = \frac{r^2}{1-\frac{1}{r}}\frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.6)$$

što možemo zapisati i kao

$$\frac{L}{E} = \frac{r^2}{1-\frac{1}{r}}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}, \quad (5.7)$$

Ako smo promatrač koji je stacionaran s obzirom na koordinatni sustav definiran u središtu crne rupe, vrijedi da su nam vrijednosti promjene  $dr$  i  $d\varphi$  jednake nuli jer se ne mičemo. Vrijedi samo  $dt \neq 0$ , te kako smo promatrač koji ima sve karakteristike kao poput-vremenske čestice (gibamo se sporije od brzine svjetlosti) tad nam je metrika jednaka

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{R}\right) dt^2,$$

gdje  $R$  je udaljenost od središta crne rupe gdje se nalazimo. Možemo iz naše metrike dobiti  $\frac{d\tau}{dt}$  što daje

$$\frac{L}{E} = \frac{R}{\sqrt{1-\frac{1}{R}}}R\frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (5.8)$$

$R\frac{d\varphi}{d\tau}$  možemo zamijeniti sa  $\sin(\beta)$  što je ujedno upadni/izlazni kut fotona u promatračevom vidnom polju, pa imamo

$$\frac{L}{E} = \frac{R}{\sqrt{1-\frac{1}{R}}}\sin(\beta). \quad (5.9)$$

Konačno možemo korjenovati (5.4) te uvrstiti (5.9) kako bi dobili početni uvjet za  $\frac{dr}{d\lambda}$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E \sqrt{1 - \sin^2(\beta)}, \quad (5.10)$$

što je jednako

$$\frac{dr}{d\lambda} = E \cos(\beta). \quad (5.11)$$

Sad smo izostavili predznak jer nam kosinus vraća točno ono što želimo. Za primijetiti je da će u slučaju  $\beta = \pi/2$  izraz biti jednak nuli, odnosno nema radijalne brzine u početku. To bi u samom trenutku kad je ispaljena čestica fotona i bila točna pretpostavka, no foton bi se po tome za bilo koji  $R$  gibao po kružnici. Potrebno nam je stoga uzeti u obzir i radijalno ubrzanje kako bi dobili točniju sliku. Izlistajmo stoga potrebne radnje; 1) Odabiremo našu udaljenost od središta crne rupe  $R$ . 2) Računamo početne uvjete s tim da uzimamo  $r_0 = R, \varphi_0 = 0, t_0 = 0$  te promjenu vremena po afini parametru proizvoljno odabiremo da bude jednaka  $\frac{dt}{d\lambda} = 1$ . S pomoću toga računamo konstante gibanja počevši sa

$$E = \left(1 - \frac{1}{r_0}\right) \frac{dt}{d\lambda}. \quad (5.12)$$

Temeljem konstante  $E$  i željenog izlaznog kuta  $\beta$  računamo drugu konstantu  $L$

$$L = \frac{Er_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{r_0}}} \sin(\beta), \quad (5.13)$$

i početni  $\frac{dr}{d\lambda}$

$$\frac{dr}{d\lambda} = E \cos(\beta). \quad (5.14)$$

Na kraju rješavamo sustav diferencijalnih jednadžbi numerički natrag po afini parametru

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)},$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad (5.15)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{r - \frac{3}{2}}{r^4} L^2.$$

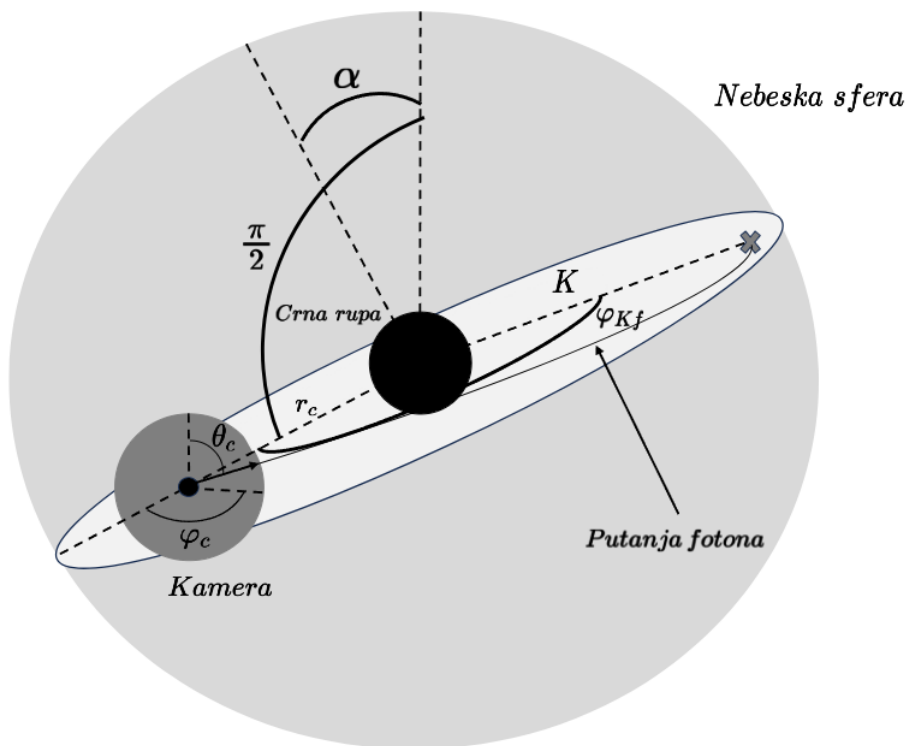
Vidimo da smo vrlo logičnim postupkom sveli izraz za putanju fotona na sustav četvrtog reda, s tim da nam sve diferencijalne jednadžbe ovise samo o jednoj varijabli, a to je radijalna udaljenost od središta koordinatnog sustava odnosno crne rupe. Kako nam samo vrijeme nije od interesa, možemo ga izostaviti iz proračuna pri rješavanju problema. To nam dalje svodi sustav na sustav trećeg reda.



## 5.2 Opis problema

Dosad smo samo navodili jednadžbe koje koristimo bez da smo se osvrnuli na postavljanje problema kojeg opisujemo. Premda već spomenuto, uzimamo promatrača koji je stacionaran. Kako se on ne giba po svojem geodeziku, za zaključiti je da nije u inercijskom sustavu. To nam neće toliko biti važno već napominjemo kako bi objasnili prošle postupke provedene unutar proračuna. Sama geometrijska interpretacija postavljenog problema je pokazana na slici 5.1.

### 5.2.1 Korišteni koordinatni sustav

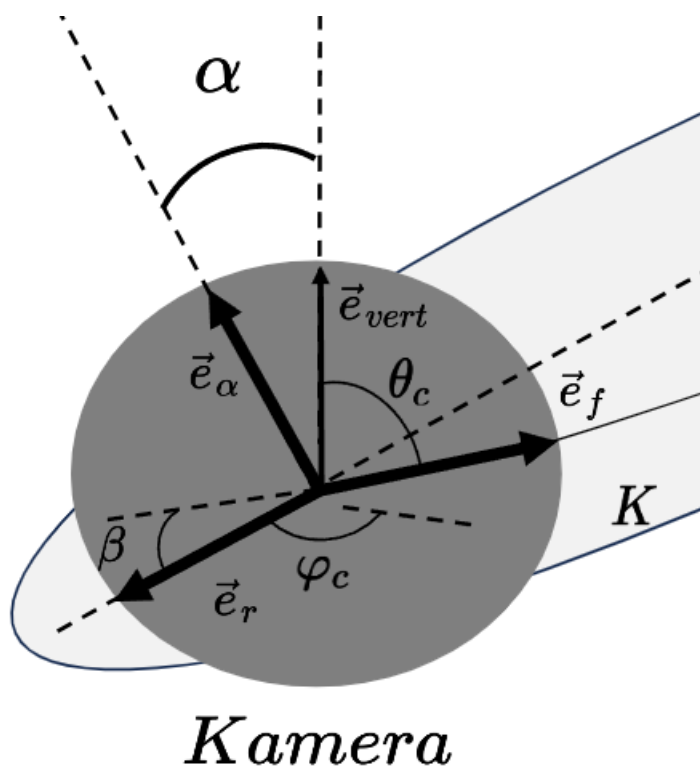


Slika 5.1: Skica postupka praćenja svjetlosti od kamere do izvora.

Model prikazan na slici 5.1 je učestao u području gravitacijske optike gdje ne pratimo fotone od njihovog izvora do kamere već idemo obrnutim postupkom natrag kroz vrijeme, od željenog kuta promatračevog vidokruga do samog izvora od kud je došao foton. Promatračevo vidno polje predstavljamo kao lokalni koordinatni sustav kamere s pomoću dva kuta ( $\varphi_c, \theta_c$ ) koje definiraju poziciju na jediničnoj sferi. Referenca kuta je tako smještena da pri iznosu  $\theta_c = \pi/2$ ,  $\varphi_c = 0$  ili  $\varphi_c = 2\pi$  se pogled pruža od ishodišta globalnog koordinatnog sustava prema van, a za  $\theta_c = \pi/2$  i  $\varphi_c = \pi$  kamera gleda ravno u crnu rupu. Sam lokalni koordinatni sustav kamere je udaljen od središta crne rupe za

radiju  $r_c$  kojeg ujedno uzimamo kao početni uvjet  $r_0$  pri izračunu putanje fotona.

Pojednostavljenjem sustava na prostorno dvodimenzionalan problem smo zanemarili kut  $\theta$ . To vrijedi za ekvatorijalne orbite fotona, no kako smo rekli, za ovaj sustav možemo bilo kakvu orbitu promatrati kao ekvatorijalnu primjenom odgovarajuće transformacije referentnog koordinatnog sustava. Naše prijašnje jednadžbe za putanju fotona su zapisane za dvodimenzijski koordinatni sustav kojeg ćemo nazvati  $K$  (bijela ploha označena na slici 5.1). Nužno je samo pronaći korespondenciju između kutova koji opisuju koordinatni sustav kamere i kutova  $\alpha$  i  $\beta$  vezanim za spomenuti sustav  $K$ . Da se osvrnemo samo na kutove  $\alpha$  i  $\beta$ . Kut  $\alpha$  će nam predstavljati otklon normale na plohu za koju je vezan koordinatni sustav  $K$ , od vertikalne osi globalnog koordinatnog sustava za kojeg je definiran Schwarzschildov koordinatni sustav. Možemo sve opisati matematički s pomoću prikaza na slici 5.2.



Slika 5.2: Lokalni koordinatni sustav kamere/promatrača.

Prvo definiramo vektor  $\vec{e}_r$  kao jedinični vektor koji je kolinearan sa vektorom koji spaja središte koordinatnog sustava odnosno središte crne rupe sa kamerom. Zatim imamo jedinični vektor  $\vec{e}_r$  koji označuje vektor pozicije upada fotona na sferi vidnog polja kamere. Vektor  $\vec{e}_f$  je definiran kao funkcija  $\vec{e}_f(\varphi_c, \theta_c)$ , to jest vektor pozicije na jediničnoj sferi kamere koji pokazuje od središta prema točki na površini sfere koja se nalazi na koordinatama  $(\varphi_c, \theta_c)$ . Kut  $\beta_0$  je definiran kao kut orijentacije upada fotona u prostor kamere. On je definiran kao kut između vektora  $\vec{e}_r$  i negativne vrijednosti

vektora  $\vec{e}_f$  te možemo jednostavnim izrazom dobiti da je njegova vrijednost

$$\beta_0 = \arccos(\vec{e}_r \cdot (-\vec{e}_f)). \quad (5.16)$$

Imamo definiran vektor  $\vec{e}_{vert}$  kao jedinični vektor usmjeren od središta koordinatnog sustava do točke na sferi kamere za koju vrijedi  $\theta_c = 0$ . Kako bi izračunali kut  $\alpha$  uvodimo dodatni korak preko vektora  $\vec{e}_\alpha$  za kojeg vrijedi da je okomit na plohu u kojoj je definiran koordinatni sustav  $K$ ,  $\vec{e}_\alpha \perp K$ . Kako oba vektora  $\vec{e}_r$  i  $\vec{e}_f$  leže na plohi za koju je vezan  $K$ , vektor  $\vec{e}_\alpha$  je definiran kao:

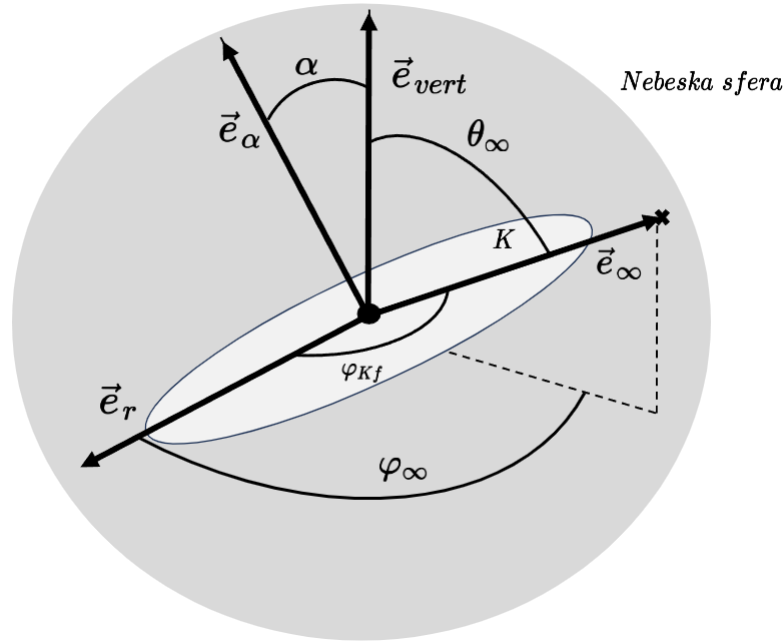
$$\vec{e}_\alpha = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_f}{\|\vec{e}_r \times \vec{e}_f\|},$$

te kut  $\alpha$  izražavamo kao

$$\alpha = \arccos(\vec{e}_{vert} \cdot \vec{e}_\alpha). \quad (5.17)$$

Kut  $\beta$  smo definirali pri postavljanju početnih uvjeta za naš sustav. Kako vektor  $\vec{e}_f$  pokazuje točku upada fotona u vidno polje kamere, sama orijentacija fotona je u smjeru suprotnom od tog vektora. Temeljem početnih uvjeta integriramo sustav diferencijalnih jednadžbi natrag po vremenu do (teoretski) beskonačnosti, no mi ćemo uzeti dovoljno veliku vrijednost afini parametra. Vidimo iz izraza (5.15) da će sve vrijednosti, kad  $r \rightarrow \infty$ , biti jednaki nuli (osim protoka vremena po afini parametru). U konačnici će se foton radijalno gibati (natrag kroz vrijeme) od središta crne rupe sa konstantnim kutom  $\varphi_f$  kojeg u ovom kontekstu vežemo za koordinatni sustav  $K$  pa ćemo uvesti oznaku  $\varphi_{Kf}$ , kako ga ne bi vezali za jednu od koordinata globalnog sustava. Od svih informacija će nas zanimati konačni kut  $\varphi_{Kf}$  kojim određujemo točku u beskonačnosti na nebeskoj sferi od kuda je foton došao.

Informacija o boji fotona (fizički je predstavljeno kao njegova valna duljina) se nalazi na nebeskoj sferi koja je poput lokalnog koordinatnog sustava kamere, definirana kao sferni koordinatni sustav sa radijusom u beskonačnosti, kojeg možemo predstaviti kao jediničan jer ćemo se baviti samo smjerovima. Ponovno se moramo baviti sa vektorima i kutevima među njima pa kao i za kameru, definiramo sustav kao na slici 5.3.

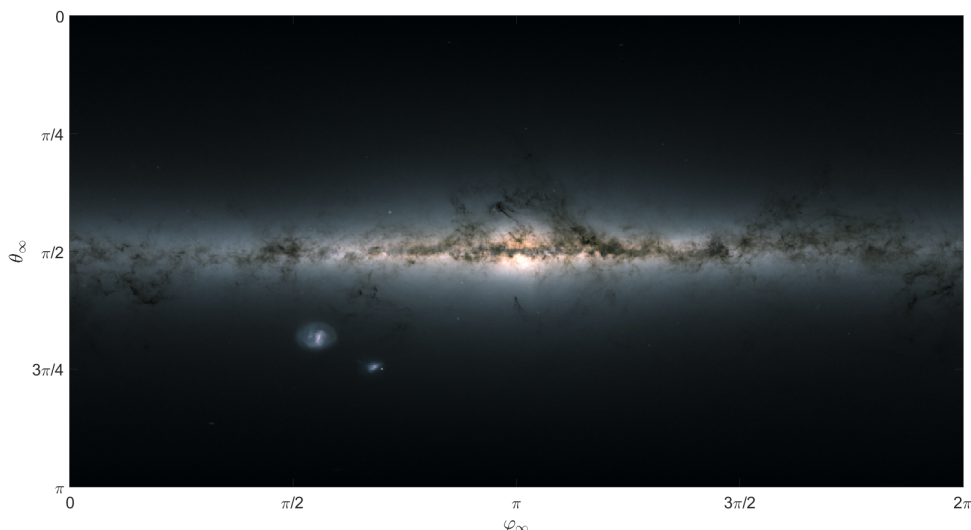


Slika 5.3: Lokalni koordinatni sustav kamere/promatrača.

Rješavanjem jednadžbi dobivamo podatke o položaju za koordinate  $\varphi_{Kf}$  i  $\alpha$  koju smo definirali na samom početku. Kako bi našli  $\varphi_\infty$  i  $\theta_\infty$  radimo obrnuti postupak od onog kojeg smo prošli za sustav kamere.

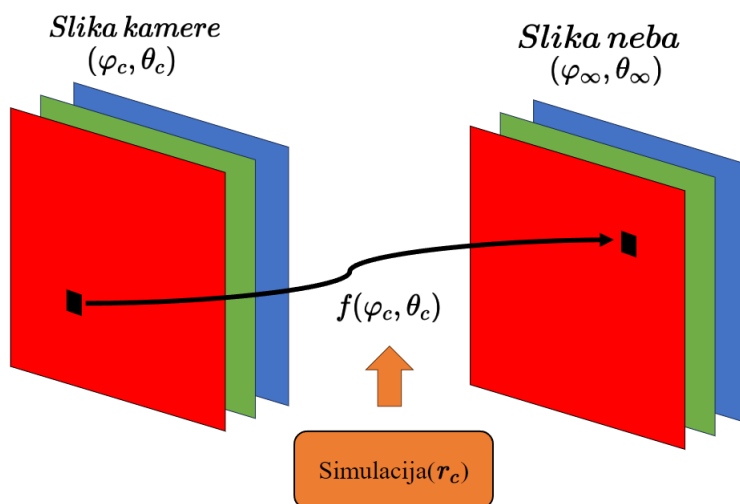
## 5.2.2 Definiranje slike

Za naš problem definiramo svaki foton kao jedan piksel vidnog polja kamere koji je došao iz beskonačnosti sa nebeske sfere. Uzeli smo koordinate  $\varphi_c$  i  $\theta_c$  koje su definirane za jedinični sferni koordinatni. Mi ćemo u rezultatima projicirati sferni na pravokutni odnosno radimo Merkatovu projekciju. Sliku diskretiziramo na konačan broj piksela gdje je svaki definiran kao pozicija  $\vec{e}_f(\varphi_c, \theta_c)$ . S pomoću toga znamo početne uvjete svakog fotona i provodimo proračun njihovih putanja natrag kroz vrijeme. Nakon željenog broja koraka dobivamo informaciju od kuda su došli u obliku kutova  $\varphi_\infty$  i  $\theta_\infty$ . Kako je nebeska sfera isto definirana kao slika, putem  $\varphi_\infty$  i  $\theta_\infty$  možemo interpolacijom pronaći odgovarajuće vrijednosti za poziciju piksela na nebeskoj sferi. To radimo jer, kao i kod kamere, slika nebeske sfere je diskretizirana na konačni broj piksela što ovisi o kvaliteti slike. Primjerice 2K slika je rezolucije  $1920 \times 1080$  odnosno  $\varphi_\infty$  je diskretiziran na 1920 točaka dok je  $\theta_\infty$  na 1080. Praktički je nemoguće da će naše rješenje pasti na jednu od tih diskretnih vrijednosti pa možemo interpolirati za našu vrijednost preko dvodimenzionalne mape slike.



Slika 5.4: Prikaz Merkatove projekcije slike<sup>1</sup>nebeske sfere.

U slučaju na slici 5.4 imamo sliku rezolucije  $1000 \times 500$  trodimenzionalnog obzora Mliječne staze. Putem računanja svake od putanja fotona dobivamo način mapiranja piksela sa slike nebeske sfere na sliku kamere. Mapiranje predstavimo kao funkciju u ovisnosti o  $\varphi_c$  i  $\theta_c$ ,  $f(\varphi_c, \theta_c)$ , koju apstraktno zamišljamo kao na slici 5.5 .



Slika 5.5: Prikaz postupka mapiranja slike sa neba na vidno polje kamere.

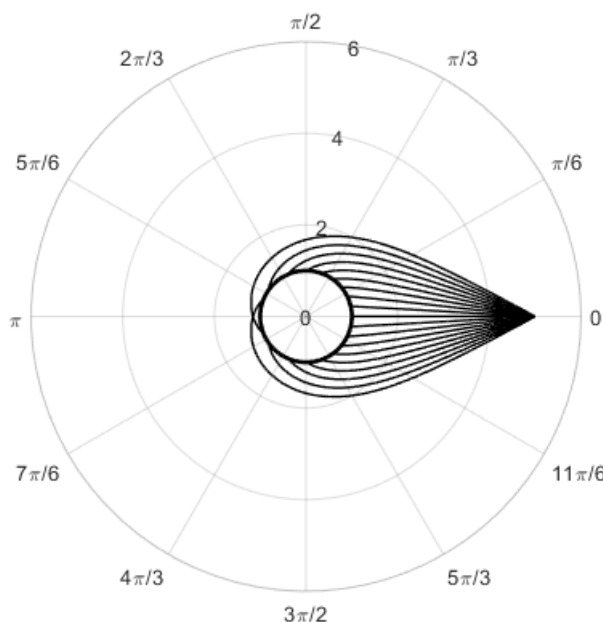
Preko simulacija (u kojima jedini faktor je udaljenost kamere od crne rupe  $r_c$ ) dobivamo način mapiranja informacija piksela sa slike neba na sliku koju kamera/promatrač vidi. Svaki piksel je isto tako vektor sa tri podatka za njegovu boju ili poznatije RGB vrijednosti. Možemo RGB vrijednosti podijeliti u tri različite matrice te temeljem

<sup>1</sup>Korištena slika je preuzeta sa: [https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2020/12/The\\_colour\\_of\\_the\\_sky\\_from\\_Gaia\\_s\\_Early\\_Data\\_Release\\_32](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2020/12/The_colour_of_the_sky_from_Gaia_s_Early_Data_Release_32).

zamišljene funkcije  $f(\varphi_c, \theta_c)$  preslikavamo te informacije na odgovarajuće piksele na slici kamere koju isto podijelimo na tri različite matrice.

### 5.2.3 Prikaz crne rupe

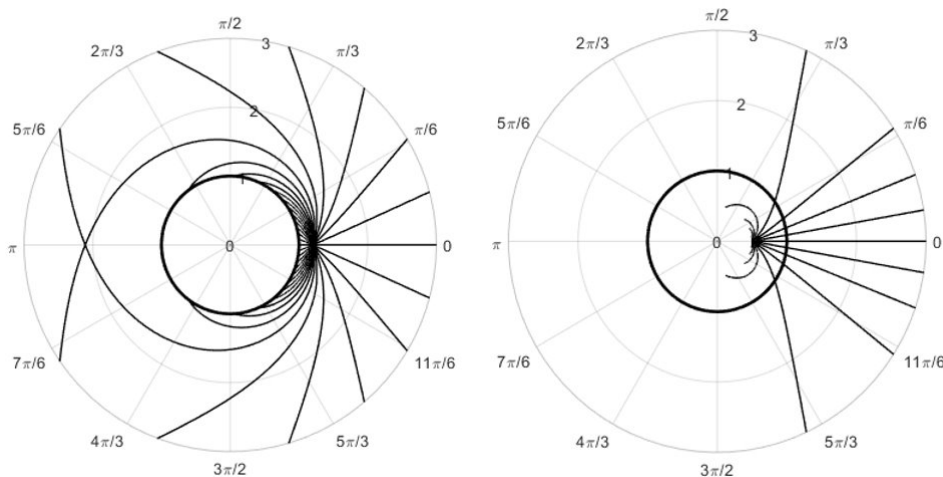
Dosad smo pričali o dijelu prikaza vezanom za nebesku sferu gdje su fotoni došli iz beskonačnosti, što je sa samom crnom rupom i kako ju prikazati? Crna rupa koju bi promatrač vidio ne bi bila kružnica Schwarzschildovog radijusa, niti bi vidio fotonsku sferu koja je radijusa  $r = 1.5r_s$ . Poslužimo se simulacijom na dvodimenzionalnom primjeru prostora kako bi to bolje pokazali. Slika 5.6 je simulacija sustava gdje je kamera udaljena od crne rupe za  $r_c = 5r_s$ .



Slika 5.6: Numeričko rješenje putanja fotona pri vizualizaciji sjene crne rupe.

Na slici 5.6 smo uzeli diskretne slučajeve upadnih kuteva u područje kamere, a istaknuli smo samo one kod kojih fotoni dolaze iz crne rupe. Svakako da u stvarnosti to je nemoguće jer fotoni ne mogu izaći izvan horizonta događaja, no mi umjesto toga zamišljamo to kao fotone koji su obojani crno odnosno ne prenose nikakvu energiju sa sobom. Vidimo kako je konus upadnih zraka u vidokrug kamere veći od konusa koji bi protezali tangente iz točke kamere na kružnicu horizonta događaja ( $r = 1$ ) ili pak na kružnicu fotonske sfere ( $r = 1.5r$ ). Slika crne rupe, koju ćemo vidjeti, ujedno zovemo sjenom crne rupe. Za zainteresirane na tu temu od preporuke je pogledati [10] gdje se osim Schwarzschildove crne rupe promatraju i sjene za Kerrovu crnu rupu koja je kompleksnijeg opisa, isto tako vezano dublje na Schwarzschildovu metriku stoji rad [11] gdje se promatraju crne rupe u

višim dimenzijama. U citiranoj literaturi se obrađuje analitički pristup dok ćemo mi pak sjenu računati numerički. Postupak je jednostavan, postavljamo uvjete kojim temeljem stanja fotona (vrijednost koordinate  $r$ ) determiniramo je li izašao iz crne rupe ili ne. Primjerice za sve radijuse kamere veće od radijusa fotonske sfere možemo odrediti da je taj uvjet kad se foton nalazi na radijusu manjem od radijusa fotonske sfere. Za sve radijuse  $r_c < 1.5r_s$  možemo postaviti uvjet kad se foton nalazi na udaljenosti  $r < r_c$ .



Slika 5.7: Primjeri rješenja za slučajeve pozicije kamere na  $r_c = 1.2r_s$  (lijevi graf) i  $r_c = 0.5r_s$  (desni graf).

Na slici 5.7 vidimo primjere pozicije kamere prvo u području između horizonta događaja i fotonske sfere, a zatim u području unutar same crne rupe. Ponavljamo, ovo su putanje fotona koji ulaze (bi ušli) u vidno polje kamere, pa rezultati gdje naizgled fotoni izlaze iz crne rupe su zapravo fotoni koji su došli iz beskonačnosti i ušli u crnu rupu do pozicije promatrača. Poslije ćemo i prikazati pojedine slučajeve u obliku slike koju promatrač vidi.

## 5.2.4 Numeričko rješavanje putanje fotona

Spominjali smo u par navrata rješavanje diferencijalnih jednadžbi za putanje fotona, no nismo se dotakli samog načina kako to ostvarujemo. Zbog specifičnosti problema i u cilju efikasnijeg algoritma se priseglo korištenju vlastito napravljenih rješavača za integriranje diferencijalnih jednadžbi numerički. Na taj način imamo bolju kontrolu nad postupkom. U početku su provjeravane dvije metode, Runge-Kutta i Adamsova četvrtog reda. O korištenim metodama se mogu pronaći detalji u [12]. Diferencijalnu jednadžbu  $n$ -tog reda predstavljamo u obliku  $n$  diferencijalnih jednadžbi prvog reda. To zapisujemo u obliku funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gdje ulaz predstavlja vektor trenutnih stanja  $\chi \in \mathbb{R}^n$ , a izlaz iz

funkcije će predstavljati promjenu tih stanja  $\dot{\chi} \in \mathbb{R}^n$ . Općenitije, za vremenski varijabilne sustave, funkcija  $f$  će biti oblika  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gdje dodatna varijabla na ulazu je vrijeme (ili koja druga neovisna varijabla o kojoj sustav ovisi). Integraciju diferencijalnih jednadžbi za metodu Runge-Kutta četvrtog reda radimo na sljedeći način

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, \chi_i), \\ k_2 &= f(t_i + h/2, \chi_i + k_1 h/2), \\ k_3 &= f(t_i + h/2, \chi_i + k_2 h/2), \\ k_4 &= f(t_i + h, \chi_i + k_3 h), \end{aligned}$$

gdje  $h$  je korak integracije, a  $t_i$  i  $\chi_i$  označavaju vrijeme i stanja u  $i$ -tom koraku. Pomoćne izraze ubacujemo u ukupni izraz za izračun stanja u sljedećem  $i + 1$  koraku

$$\chi_{i+1} = \chi_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (5.18)$$

Za sljedeći korak uzimamo izračunati u prošlom i tako radimo do konačnog broja koraka koje smo na početku odredili. Adamsova metoda traži informaciju o prošla tri stanja i trenutnom kako bi izračunala sljedeće. U proračun uključujemo prošle tri promijene stanja te za izračun varijabli stanja u sljedećem koraku se koristimo izrazom

$$\chi_{i+1} = \chi_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \quad (5.19)$$

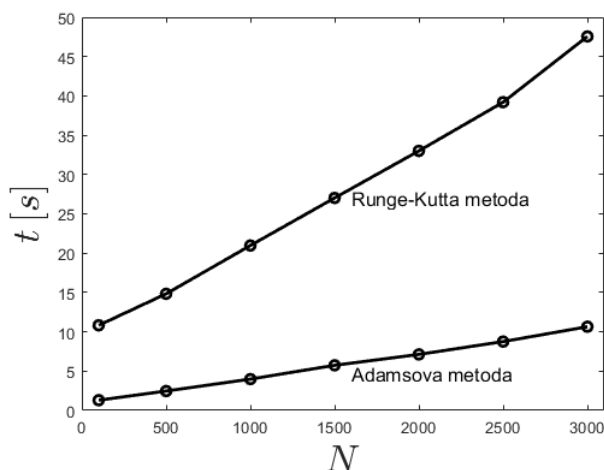
gdje  $f_i$  je evaluacija promjene varijabli stanja u  $i$ -tom koraku integracije. Usporedbu priloženih metoda radimo na pojednostavljenom sustavu putanje fotona opisanom s pomoću jednadžbi (5.15). Kako je slika sačinjena od niza piksela koji predstavljaju zasebne početne uvjete, prilazi se oblikovanju jednadžbi u izraze koji će odjednom moći obraditi postupak integracije za sve početne uvjete. Postupak koji koristimo je sljedeći. Sva stanja grupiramo u ogromnu matricu stanja za različite putanje fotona

$$X_i = \begin{bmatrix} \chi_{1i} & \chi_{2i} & \chi_{3i} & \cdots & \chi_{Ni} \end{bmatrix},$$

gdje  $\chi_{1i}$  predstavlja stanja vezana za prvi odabrani foton u  $i$ -tom vremenskom koraku. Ovisno kakvu rezoluciju slike smo zadali za promatrača/kameru, imat ćemo  $N$  broj vektora stanja unutar  $X$  što korespondira broju piksela. Ostale izraze za numeričko integriranje preformuliramo u smislu da nam je sad funkcija promijene stanja oblika  $f : \mathbb{R}^{(n+1) \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times N}$  i sukladno tome  $\chi_i$  u izrazima (5.18) i (5.19) prelazi u matricu  $X_i \in \mathbb{R}^{n \times N}$ . Kako bi konačno usporedili efikasnost opisanih metoda postavljamo problem izračuna  $N$  broja putanja fotona za slučaj samo ekvatorijalne orbite. Kut  $\theta_c$  je jednak  $\pi/2$ , a kutove  $\varphi_c$  dobivamo diskretizacijom intervala počevši od  $\varphi_c = \pi$ , pa do  $\varphi = 2\pi$  ili  $\varphi = 0$ , na  $N$  broj točaka. Postavljamo  $N = 1000$  različitih početnih uvjeta te integriramo natrag po afini parametru do  $\lambda_f = -100$  sa vremenskim korakom  $h = 10^{-3}$ .



Kriterij po kojem vrednujemo obje metode je vrijeme izvršavanja, zbog razloga što oba pristupa daju skoro ista rješenja (u ovom primjeru je najveća relativna greška odstupanja  $9.2113 \cdot 10^{-12}\%$  što je praktički zanemarivo). Nakon simulacija dobivamo da je vrijeme potrebno (u sekundama) za izvršavanje putem Runge-Kutta metode jednako  $t_{rk} = 21.5075$  s, a putem Adamsove metode to vrijeme iznosi  $t_{ad} = 4.0305$  s. Zaključujemo da Adamsova metoda za ovaj problem nadaleko smanjuje potrebno vrijeme izvršavanja. Kako bi potvrdili naš odabir primijenimo isti postupak za različite  $N$ -ove.



Slika 5.8: Grafički prikaz vremenskog izvršavanja Runge-Kutta i Adamsove metode za različite  $N$ -ove pri  $h = 10^{-3}$  te  $\lambda_f = -100$ .

Na slici 5.8 imamo grafički prikaz za različite slučajeve  $N$ -a. Očigledno Adamsova je puno brža od Runge-Kutta, pa ju logički odabiremo za konačni proračun.

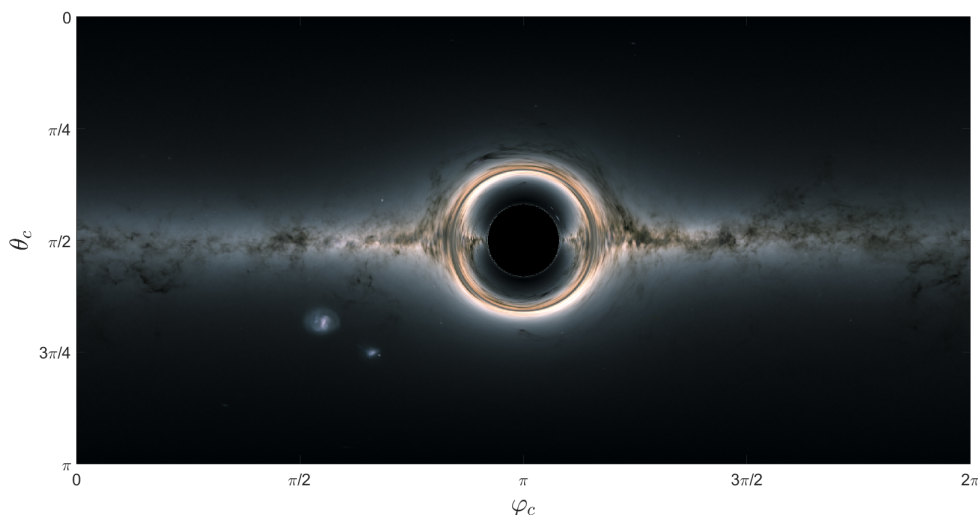
## 5.3 Rezultati rada

Došli smo na sam kraj rada gdje ćemo sve prije rečeno primijeniti i objediniti u konačni rezultat vizualizacije perspektive promatrača koji se nalazi u blizini crne rupe. Kao što je napomenuto, promjene frekvencije fotona (što bi se odrazilo na promjenu boje slike) se neće uključiti u simulacijski model. U principu bi se samo boje u određenim područjima blizu crne rupe (gdje je najveći frekvencijski pomak fotona) mijenjale.

### 5.3.1 Slika promatračevog vidnog polja u blizini crne rupe

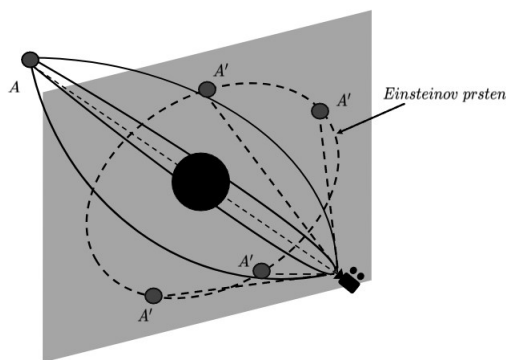
Pojam u blizini je malo bez sadržajan u kontekstu jednadžbi kakve smo postavili. Da se prisjetimo, naš sustav je postavljen s pomoću bez dimenzijskih koordinata gdje radijus je izražen u mjernim jedinicama vezanim za Schwarzschildov radijus  $[r] = r_s$ .

Uzmimo aproksimativnu vrijednost mase crne rupe u središtu galaksije M87 (poslije ćemo se detaljnije osvrnuti na spomenutu crnu rupu) koja iznosi šest i pol milijardi Sunčevih masa, to je otprilike  $1.2925 \cdot 10^{49} \text{ kg}$ , što kad uvrstimo u formulu za Schwarzschildov radijus  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  dobivamo iznos  $r_s \approx 1.92 \cdot 10^{22} \text{ m}$  što je ogromna udaljenost za naše pojmove. Mi nećemo trebati takve brojke jer je naše rješenje bez dimenzijsko i primjenjivo za bilo koji iznos mase crne rupe. Počnimo sa prvim prikazom gdje se postavljamo na udaljenost od  $r_c = 10r_s$ . Rezultat je dan na slici 5.10 gdje je slika nebeske sfere ujedno slika 5.4.



Slika 5.9: Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od  $r_c = 10r_s$ .

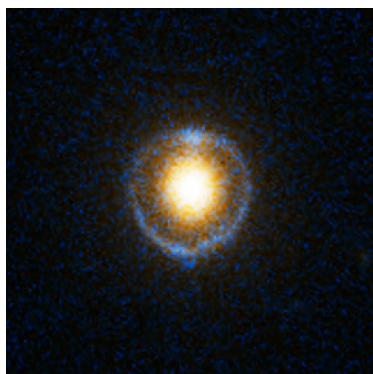
U središtu slike pronalazimo potpuno taman krug koji predstavlja sjenu crne rupe. Zanimljivo je kako se na određenom radijusu od crne rupe pojavljuje obroč. Tu pojavu nazivamo Einsteinovim prstenom.



Slika 5.10: Prikaz pojave Einsteinovog prstena.

Na slici 5.10 primjećujemo kako se zbog jakog zakrivljenja putanje fotona, određeni objekti (na slici 5.10 je istaknut objekt  $A$ ) mogu pojavljivati na različitim dijelovima

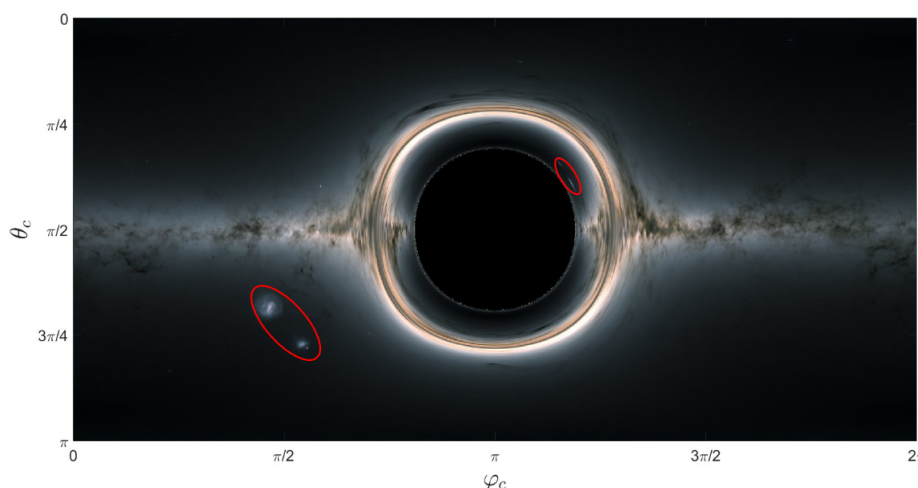
slike (točke  $A'$ ). Ekstremni slučaj je kad se objekt nalazi direktno iza crne rupe spram promatrača te postoji određeno područje (što nazivamo Einsteinovim prstenom) gdje se slika objekta manifestira kao obruč na slici promatrača.



Slika 5.11: Slika<sup>3</sup>Einsteinovog prstena dobivena promatranjem teleskopa Hubble. Na slici vidimo Einsteinov prsten (bijeli obruč) koji je ujedno slika daleke galaksije koja se nalazi direktno iza galaksije (žuti dio) oko koje se fotoni zakreću.

Postoje mnogi eksperimentalni dokazi, u obliku astronomskih promatranja, koji potvrđuju postojanje Einsteinovih prstena, a i time potvrđuju Einsteinov model gravitacije. Jedan od primjera je prikazan na slici 5.11, gdje je umjesto crne rupe, zakret fotona uzrokovan od strane galaksije, te sam Einsteinov prsten je rezultat savijanja putanje fotona koji dolaze iz još dalje galaksije.

Sad se približavamo na radijus od  $r_c = 4r_s$  kako bi pobliže promotrili utjecaj crne rupe na naš vidokrug.

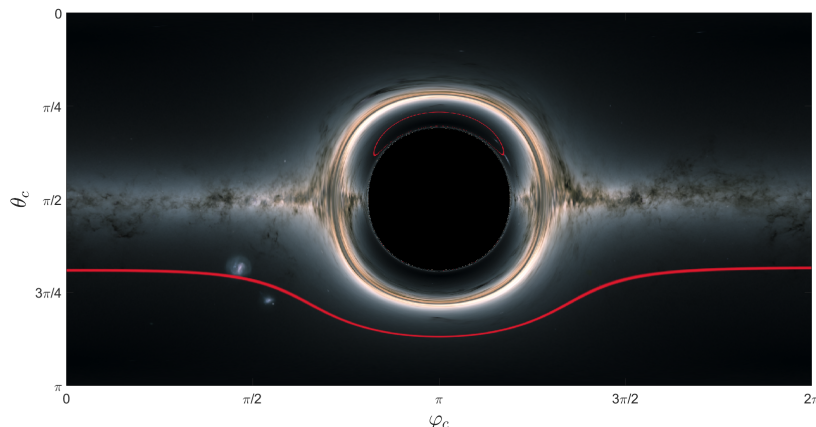


Slika 5.12: Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od  $r_c = 4r_s$ .

Na slici 5.12 izdvajamo dva područja (crvene elipse) koji predstavljaju jedan te isti

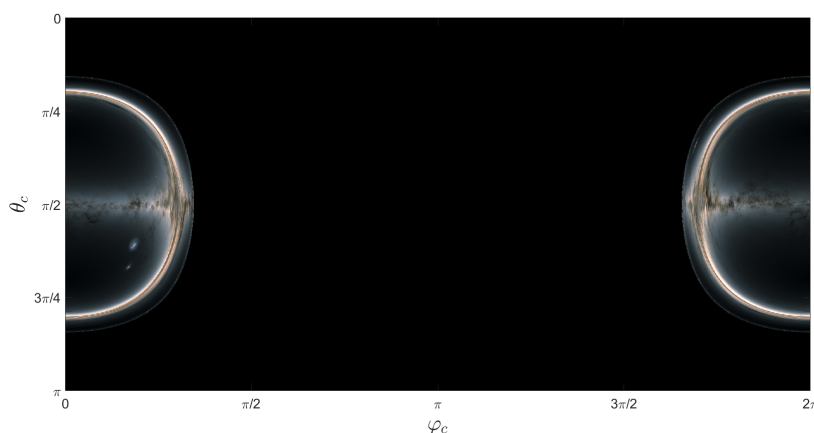
<sup>3</sup>Slika je preuzeta sa: <https://esahubble.org/images/opo0532g/>.

objekt/objekte udaljenih galaksija. Fotoni iz tog područja dolaze prvo direktnim putem u naš vidokrug, te isto tako određeni fotoni dolaze u zakret oko crne rupe i upadaju u naše vidno polje sa suprotne strane crne rupe. U stvarnosti se takve pojave pojavljuju beskonačno mnogo puta, pa mi teoretski vidimo svaki objekt beskonačno mnogo puta oko crne rupe. Fotoni se mogu zakretati dva ili više puta prije nego što dođu u naš vidokrug, no ta područja postaju sve bliža i iskrivljenija uz horizont da ih pak ne možemo više raščlaniti.



Slika 5.13: Preslikavanje slike šireg područja zbog jakog gravitacijskog djelovanja crne rupe.

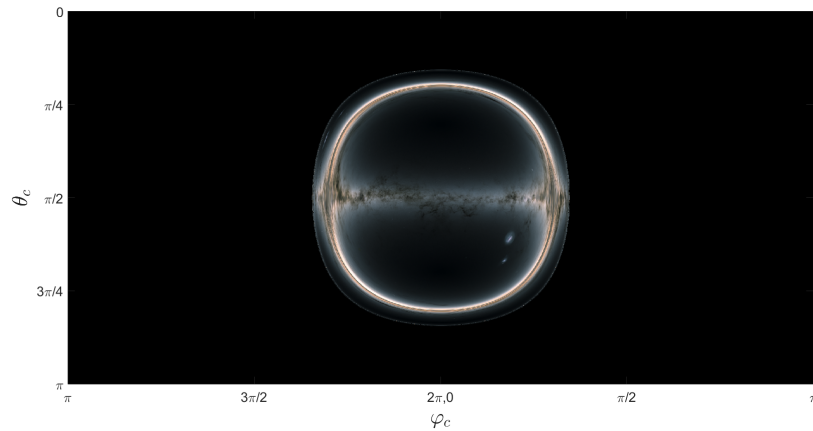
Na slici 5.13 je ponuđen prikaz gdje je istaknuto područje konstantnog  $\theta_\infty$  na slici neba. Vidimo kako je sama linija sada zakrivljena te preslikana na usko područje između crne rupe i Einsteinovog prstena te tvori zatvorenu krivulju. U principu na tom uskom području vidimo potpuni  $360^\circ$  obzor koji nas okružuje. Približimo se sada tik do horizonta događaja na udaljenosti  $r_c = 1.2r_s$  kao što smo imali na slici 5.7.



Slika 5.14: Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od  $r_c = 1.2r_s$ .

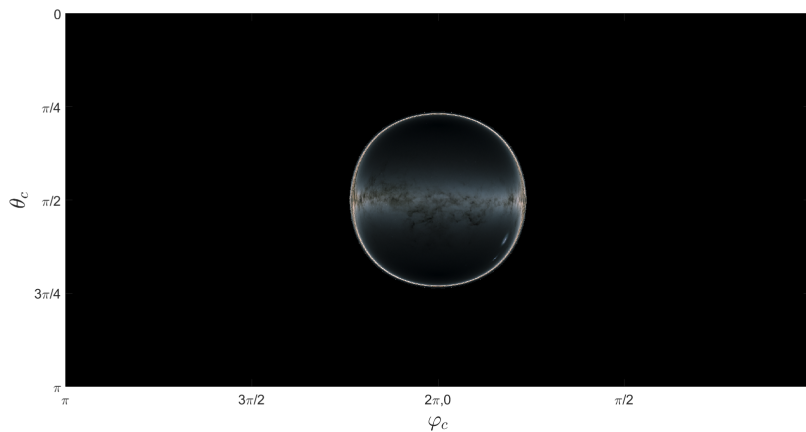
Vidimo na slici 5.14 da je većina pogleda kompletna tama. Kako govorimo o punom  $360^\circ$

pogledu u svim smjerovima, to bi značilo da većinu toga što vidimo je sjena crne rupe. Sliku nebeske sfere možemo samo vidjeti ako se okrenemo iza odnosno prebacimo pogled na kut  $\varphi_c = 0$  ili  $\varphi_c = 2\pi$ . Tad dobivamo prikaz na slici 5.15.



Slika 5.15: Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od  $r_c = 1.2r_s$  zarotiranog za kut  $\varphi = \pi$  oko svoje osi.

Promatrač koji bi stajao na  $r_c = 1.2r_s$  i gledao od crne rupe bi vidio prikaz kao na slici 5.15. Ono što predstavlja područje u središtu slike je pogled u svaki kutak neba odnosno vidio bi sve što se nalazi okolo crne rupe u svim smjerovima. Za kraj se približimo i prijedimo sam horizont događaja te postavimo se na udaljenosti od  $r = 0.7r_s$ .



Slika 5.16: Perspektiva promatrača u blizini crne rupe na udaljenosti od  $r_c = 0.7r_s$  zarotiranog za kut  $\varphi = \pi$  oko svoje osi.

Kao i na slici 5.15 za sliku 5.16 isto vrijedi da bi promatrač, koji se nalazi unutar horizonta događaja kad gleda od crne rupe, vidio svemir u svim smjerovima. Ovo je jako nesimetričan sustav. Promatrači koji stoje izvan crne rupe ne mogu vidjeti ništa što se nalazi iza horizonta događaja dok promatrač koji se nalazi na radijusu  $r < r_s$

može vidjeti sliku svemira koja se nalazi u beskonačnosti. Bolji osjećaj za ovaj sustav bi dobili animacijom koju nažalost ne možemo prikazati u ovom radu, no tako bi se zorno moglo vidjeti kako se pogled mijenja ovisno o promijeni koordinata na kojima se nalazi kamera/promatrač.

### 5.3.2 Vizualizacija akrecijskog diska oko crne rupe

Dosad smo postavili sustav za kojeg se pretpostavlja da jedini izvor fotona dolazi iz beskonačnosti. Tako smo izostavili bilo kakvo postojanje materije u blizini crne rupe, no to ne mora biti slučaj. U stvarnosti crne rupe (i dalje) su okružene materijom koja polako spiralno upada u njih. S vremenom će, kad sva materija koja ih okružuje padne unutar crnih rupa, naša pretpostavka o sustavu biti točna. Dosadašnja promatranja svemira upućuju na postojanje akrecijskih diskova koji okružuju crnu rupu, u kojem se materija užasno brzo giba te u takvim područjima vladaju ogromne temperature. Relativno nedavno su dobivene prve slike daleke crne rupe u središtu galaksije Messier 87 što je prikazano na slici 5.17.

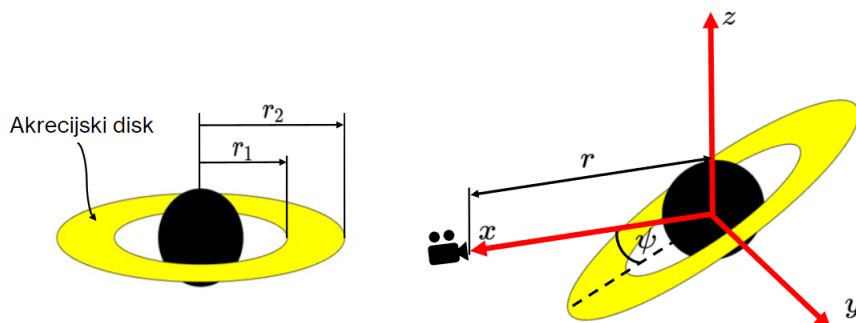


Slika 5.17: Slika<sup>5</sup>super masivne crne rupe u središtu galaksije Messier 87 dobivene detekcijom sinhrotronske radijacije s pomoću Event Horizon Telescope-a (EHT).

Žuto crvenom na slici 5.17 su označena područja sa istaknutom sinhrotronskom radijacijom. Do sinhrotronske radijacije dolazi pri okomitom gibanju nabijenih čestica s obzirom na vektor akceleracijskog polja koje je u ovom slučaju gravitacijsko. U samom središtu vidimo sjenu crne rupe (tamni krug). Temeljem ovog ćemo postaviti sustav s

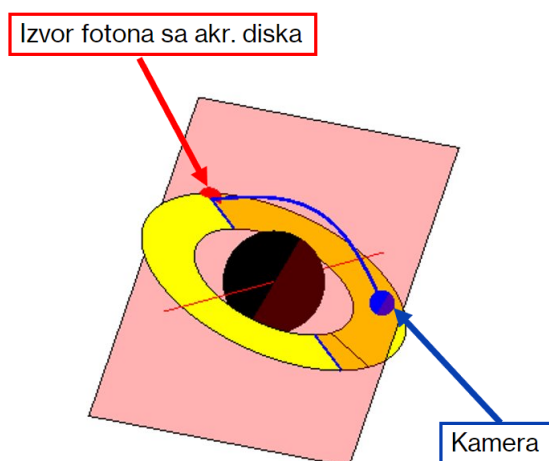
<sup>5</sup>Slika je preuzeta sa: <https://www.eso.org/public/images/eso1907a/>

crnom rupom i akrecijskim diskom koji je predstavljen kao kružni vijenac oko crne rupe.



Slika 5.18: Prikaz sustava crne rupe sa akrecijskim diskom.

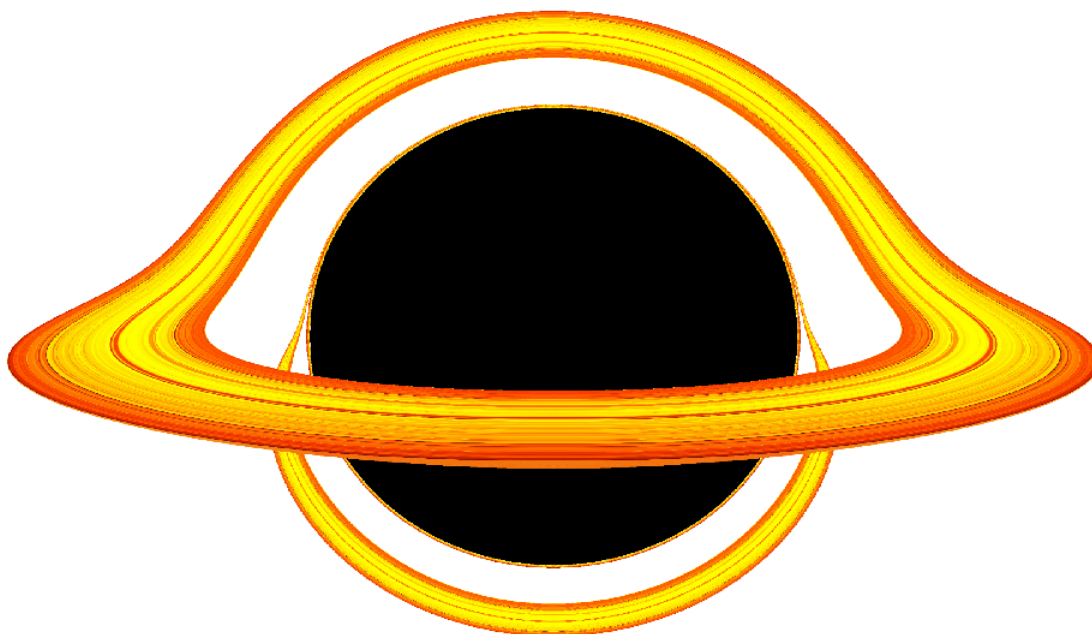
Prateći sliku 5.18 postavljamo pomoćni pravokutni koordinatni sustav za prostor, kojeg možemo definirati preko Schwarzschildovog koordinatnog sustava uzimajući samo prostorne koordinate. Dakle prebacujemo se iz sfernog u pravokutni sustav. U samim jednadžbama za putanju fotona ćemo i dalje koristiti Schwarzschildov sustav, pa pravokutni samo definiramo kako bi preveli koordinate diska u Schwarzschildove koordinate. Disk je definiran kao vijenac unutarnjeg radijusa  $r_1$  i vanjskog  $r_2$ . Dodatni parametar je zakret  $\psi$  oko  $y$  osi definiran na slici 5.18. Temeljem prijevoda diska u Schwarzschildov sustav, u naš rješavač diferencijalnih jednadžbi dodajemo dodatan uvjet koji ispituje je li foton došao sa diska, ili ne, temeljem koordinata na kojima se nalazio. Ako njegova putanja prolazi kroz disk onda je došao sa akrecijskog diska i prenosimo informaciju o boji sa slike diska na isti način kao što smo to radili i kod slike neba.



Slika 5.19: Primjer fotona koji je došao sa akrecijskog diska.

Na slici 5.19 je prikazan slučaj fotona koji izvire sa akrecijskog diska. Plava krivulja

prikazuje njegovu putanju, a crvena prozirna površina je ploha po kojoj se kretao foton (ploha gdje je definiran koordinatni sustav  $K$  za taj foton). Kako smo u simulacijama sveli rješavanje putanje fotona na prostorno dvodimenzijski problem onda shodno i uvjete svodimo na samo dvije prostorne komponente u sustavu  $K$ . Vidimo da će sjecišta akrecijskog diska i crvene plohe, gdje je definiran sustav  $K$ , biti dvije crte definirane polumjerima  $r_1$  i  $r_2$  te kutom  $\beta_{akr}$  što su ustvari dva kuta sa razlikom  $\pi$ . Ako se foton nalazio na intervalu  $r \in [r_1, r_2]$  te na kutu  $\beta_{akr}$  (unutar željenih tolerancija jer radimo numerički proračun) onda foton izvire sa akrecijskog diska. Definiranjem problema prelazimo na rješavanje te postavljamo sustav takav da vrijedi:  $r_c = 10r_s$ ,  $r_1 = 3r_s$ ,  $r_2 = 5r_s$ ,  $\psi = 0.15$  rad.

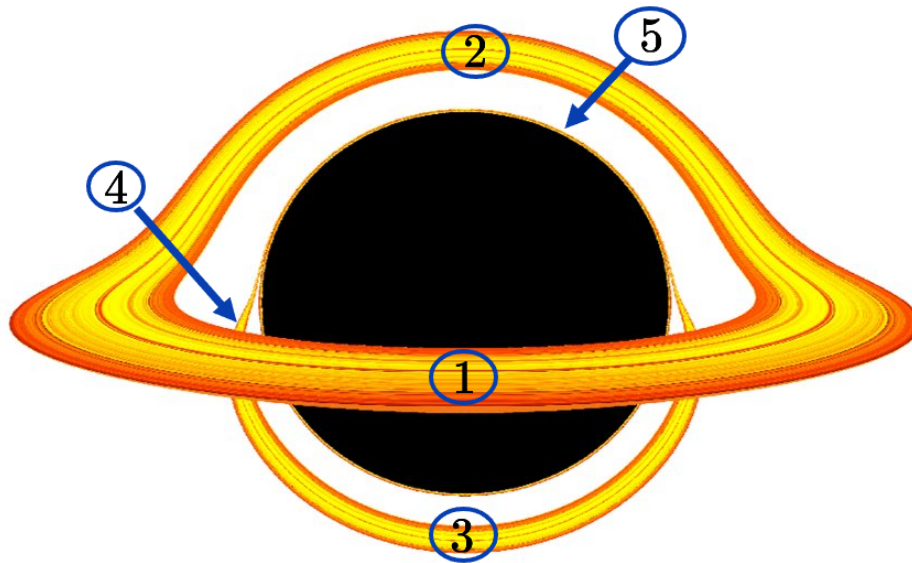


Slika 5.20: Prikaz simulacije sustava crne rupe sa akrecijskim diskom.

Slika prstena na slici 5.20 je nasumično složen niz žuto crvenih horizontalnih linija pokušavajući imitirati prsten užarene materije koji se rotira oko crne rupe. Izdvojili smo sjenu crne rupe i sliku akrecijskog diska, izostavljajući pozadinsku sliku neba, kako bi se поближе mogli fokusirati na sam disk. Kako i zašto se pojavljuje ovaj uzorak je teško za predočiti bez popratne animacije koju ne možemo staviti na papir, pa ćemo stoga

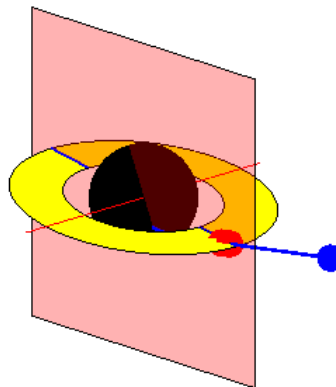


područje prikaza diska raščlaniti na pet područja kao na slici 5.21.



Slika 5.21: Podjela područja na prikazu akrecijskog diska.

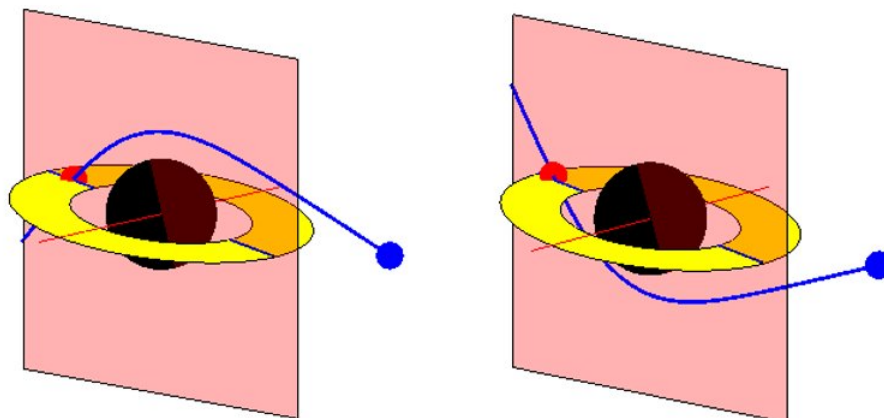
Počevši sa područjem 1, dobivamo prikaz kao direktni put fotona od prednje strane akrecijskog diska prema kameri, prikazano na slici 5.22



Slika 5.22: Putanje fotona koji se nalaze u 1. zoni prikaza akrecijskog diska.

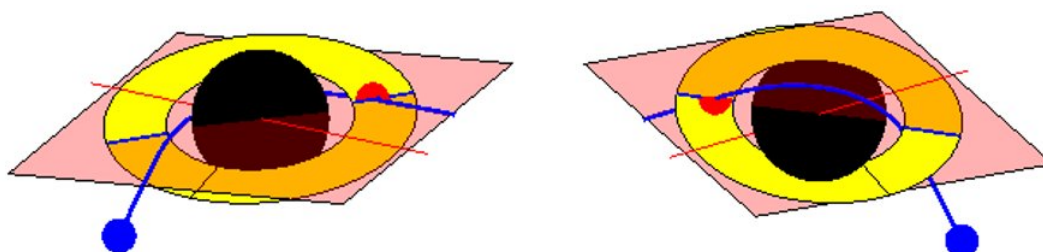
Prikaz na slici 5.22 je manje-više logičan. To područje predstavlja fotone koji direktno dolaze sa akrecijskog diska u vidni prostor kamere. Isto tako duž lijeve i desne strane prikaza diska očekujemo isto, no onda u jednom trenutku se čini kao da se disk savio i prešao preko gornje strane crne rupe. To područje označavamo sa brojem dva te za

njega vrijedi da su to fotoni koji izviru sa diska na drugoj strani crne rupe, no zbog jakog gravitacijskog polja se njihove putanje savijaju i ulaze u kameru.



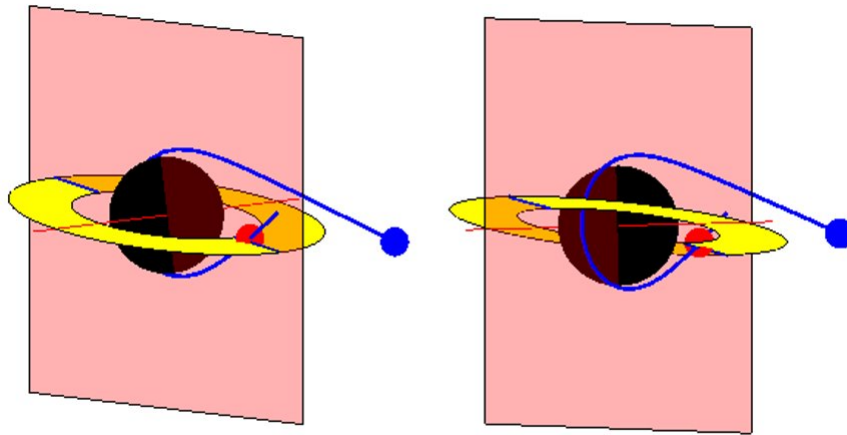
Slika 5.23: Putanje fotona koji se nalaze u 2. (lijevo) i u 3.(desno) zoni prikaza akrecijskog diska.

Na slici 5.23 su prikazani slučajevi za drugo i treće područje. Oba slučaja su slične prirode, no u drugom slučaju vidimo gornju plohu diska dok treće područje prikazuje disk od ispod.



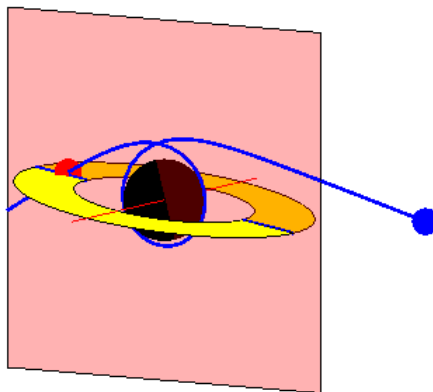
Slika 5.24: Putanje fotona koji se nalaze u 4. zoni prikaza akrecijskog diska.

Četvrto područje je vezano za fotone koji imaju karakterističnu putanju prikazanu na slici 5.24. Fotoni dolaze sa suprotne strane, obilaze crnu rupu sa unutarnje strane diska te ulaze u vidno polje kamere. Štoviše, prikaz je donje strane diska kao i u slučaju tri. Peto područje na slici 5.21 je teže primijetiti no nalazi se uz sam rub sjene crne rupe. Fotoni koji su došli iz tog područja su se zarotirali za jedan ili više puta oko crne rupe prije nego što su došli do kamere. Prvo prikazujemo najjednostavniji slučaj nepotpunog okreta oko crne rupe na slici 5.25.



Slika 5.25: Putanje fotona koji se nalaze u 5. zoni prikaza akrecijskog diska.

Slučaj prikazan na slici 5.25 je sličan slučaju vezanom za četvrtu zonu (prikazano na slici 5.24). Fotoni dolaze sa donje strane akrecijskog diska te se pod utjecajem gravitacije zakreću oko crne rupe i upadaju sa gornje strane vidnog polja kamere. Što nam se sve više približava pogled prema sjeni crne rupe, to ćemo vidjeti ponavljanje slike akrecijskog diska što odgovara različitim brojevima kruženja fotona oko same crne rupe.



Slika 5.26: Putanja fotona koji je došao sa akrecijskog diska te je napravio punu rotaciju oko crne rupe.

U ovom slučaju će foton doći sa gornje strane diska. Sve kompliciranijim putanjama će se izmjenjivati slike donje i gornje strane diska.

## 6 Zaključak

Razvoj računala je omogućio ogroman razvoj u području gravitacijske optike, a isto i napredak astronomije i astrofizike u cijelosti. Numeričkim rješavanjem kompliciranih izraza te, nastavno, primjerenim prikazom dobivenih rezultata, dobivamo posve nov način promatranja i predviđanja astronomskih pojava. Svakako da je samo promatranje dalekih svemirskih tijela i dalje primaran dokaz postavljenih modela, na kraju krajeva su ta promatranja i dovela do spoznaja o gravitaciji, no kako bi došli bliže, figurativno govoreći, simulacije su nam dosad jedino sredstvo da bi to ostvarili. Malo je za naglasiti kako bi mogućnost da pristupimo tako dalekim područjima svemira utjecala na naše spoznaje. Trenutnom tehnologijom jedva da možemo napustiti vlastiti planet, a kamoli proputovati naizgled beskonačna prostranstva vakuuma svemira. No da ne završimo u pesimističkom tonu. Simulacije nam pružaju posve novi pristup putovanju kroz prostor, premda virtualno, ako je dobro napravljeno može služiti kao zamjena stvarnosti.

Područje gravitacijske optike, pa tako i simulacije ostalih fizičkih pojava, se moraju i dalje razvijati. Takav razvoj zahtjeva ljude koji to guraju, pa napredak jedino može doći ako se sve veći broj ljudi počne zainteresirati u spomenuto područje. Simulacije datog rada se mogu još dalje unaprijediti uzimanjem složenijih rješenja Einsteinovih jednadžbi polja. Dodatno se mogu uzeti i sve relativističke pojave kao što je pomak u frekvenciji fotona. Osim za vizualizaciju crnih rupa, Einsteinov model gravitacije bi bio poželjan u simulacijama te tako i pretpostavkama o ranijem periodu postojanja našeg svemira (kako se formiraju zvijezde, crne rupe galaksije itd). To sve bi još dodatno trebalo biti poduprto novim spoznajama u fizici i astronomiji kako bi imali što točniji model onog što promatramo.

# Literatura

- [1] O. James, E. von Tunzelmann, P. Franklin, and K. S Thorne. Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie interstellar. *Classical and Quantum Gravity*, 32(6):065001, feb 2015.
- [2] V. Petkov. *Inertia and Gravitation: From Aristotle's Natural Motion to Geodesic Worldlines in Curved Spacetime*. Minkowski Institute Press, 2012.
- [3] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [4] A. Einstein and R.W. Lawson. *Relativity: The Special and General Theory*. H. Holt, 1921.
- [5] L. Ryder. *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [6] J.W. Robbin and D.A. Salamon. *Introduction to Differential Geometry*. Springer Studium Mathematik (Master). Springer Berlin Heidelberg, 2022.
- [7] M. Itskov. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [8] S. M. Carroll. Lecture notes on general relativity, 1997.
- [9] A. J S Hamilton and G. Polhemus. Stereoscopic visualization in curved spacetime: seeing deep inside a black hole. *New Journal of Physics*, 12(12):123027, dec 2010.
- [10] V. Perlick and O. Yu. Tsupko. Calculating black hole shadows: Review of analytical studies. *Physics Reports*, 947:1–39, 2022. Calculating black hole shadows: Review of analytical studies.
- [11] B. P. Singh and S. G. Ghosh. Shadow of schwarzschild-tangherlini black holes, 2017.
- [12] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008.