

Smanjenje koncentracije naprezanja na vratilu primjenom topološkog optimiranja

Temelj, Tomislav

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:413777>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-23**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Tomislav Temelj

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, mag. ing. mech.

Student:

Tomislav Temelj

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojem mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Lesičaru na pruženoj prilici za izradu diplomskog rada te pruženoj pomoći, korisnim savjetima i smjernicama tijekom izrade.

Zahvaljujem se mojoj obitelji na podršci i razumijevanju za vrijeme studiranja i izrade diplomskog rada.

Tomislav Temelj



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 23 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Tomislav Temelj** JMBAG: 0035213400

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Smanjenje koncentracije naprezanja na vratilu primjenom topološkog optimiranja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Reduction of the shaft stress concentration using topological optimization**

Opis zadatka:

Vratilo kao mehanički prijenosnik snage i gibanja je gotovo neizbježan element svakog industrijskog pogona ili stroja. Zbog konstrukcijskih razloga vratilo je promjenjivog promjera po duljini, zbog čega na mjestima promjene geometrije vratila uslijed opterećenja dolazi do koncentracija naprezanja koje direktno utječu na čvrstoću vratila. U ovom diplomskom radu razmatrat će se izlazno vratilo elektromotora snage 2,2 kW. Ulazne parametre vratila dogovoriti s mentorom.

Potrebno je:

1. Proučiti potrebnu literaturu vezanu uz proračun vratila, topološko optimiranje i metodu konačnih elemenata.
2. Odabrati materijal vratila, odrediti opterećenja koja djeluju na vratilo te dimenzionirati vratilo.
3. Metodom konačnih elemenata provjeriti naprezanja u vratilu. Posebnu pažnju obratiti na mjesta pojave koncentracije naprezanja.
4. Primjenom topološkog optimiranja smanjiti maksimalna naprezanja koja se javljaju na prijelazima geometrije vratila.

U numeričkim simulacijama vratilo diskretizirati tetraedarskim ili heksaedarskim konačnim elementima. Za provedbu numeričkih simulacija primijeniti komercijalni programski paket Abaqus. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

28. rujna 2023.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar

Datum predaje rada:

30. studenoga 2023.

Predvideni datumi obrane:

4. – 8. prosinca 2023.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. OPĆENITO O VRATILIMA	2
2.1. Podjela vratila	2
2.2. Materijali vratila.....	3
2.3. Ukratko o strojnim elementima.....	3
2.3.1. Zupčanici, remenice i lančanici	3
2.3.2. Spojke i kočnice	4
2.3.3. Ležajevi.....	5
2.3.4. Tarni prijenosnici	6
2.4. Spojevi glavine i vratila	7
2.4.1. Stezni spojevi	7
2.4.2. Klinovi i pera	7
2.4.3. Klinasti profil vratila.....	8
2.4.4. Zupčasti profil vratila.....	9
2.4.5. Poligoni profil vratila.....	10
2.5. Približan proračun vratila.....	11
3. METODA KONAČNIH ELEMENATA	12
3.1. Komercijalni alati za provođenje analiza pomoću metode konačnih elemenata	12
3.1.1. Komercijalni programski paket Abaqus	12
3.1.2. Konačni elementi u Abaqus-u.....	14
3.1.3. Dimenzije elemenata u alatu Abaqus.....	16
3.1.3.1. Jednodimenzijski elementi.....	16
3.1.3.2. Dvodimenzijski elementi	16
3.1.3.3. Trodimenzijski elementi	17
3.1.3.4. Cilindrični elementi	17
3.1.3.5. Osnosimetrični elementi	17
3.1.3.6. Osnosimetrični elementi s nelinearnim i nesimetričnim deformacijama.....	18
4. OPTIMIRANJE KONSTRUKCIJA.....	19
4.1. Strukturalna optimizacija (eng. <i>Structural optimization</i>)	19
4.1.1. Topološko optimiranje (eng. <i>Topology optimization</i>).....	20
4.1.2. Optimiranje oblika (eng. <i>Shape optimization</i>).....	21
4.1.3. Optimiranje dimenzija (eng. <i>size optimization</i>).....	22
4.1.4. Optimiranje u Abaqus-u (Abaqus Topology Optimization Module, ATOM)....	23
4.2. Opći matematički oblik problema strukturne optimizacije.....	23
5. ANALITIČKI PRORAČUN VRATILA.....	26
5.1. Definiranje ulaznih parametara	26
5.2. Određivanje opterećenja na vratilu	27
5.3. Određivanje naprežanja promjera idealnog vratila	35
5.4. Određivanje orijentacijskih dimenzija na vratilu	36
5.4.1. Presjek 1 – opterećen samo na uvijanje	36
5.4.2. Presjek 2 – opterećen na uvijanje i savijanje	36
5.4.3. Presjek 3 - opterećen na uvijanje i savijanje	36
5.4.4. Presjek 4 – opterećen na uvijanje i savijanje	37

5.4.5.	Presjek 5 – opterećen na uvijanje i savijanje	37
5.5.	Odabir izvedbenih dimenzija vratila	37
5.6.	Određivanje i kontrola sigurnosti u kritičnim presjecima.....	40
5.6.1.	Presjek 1	41
5.6.2.	Presjek 2.....	42
5.6.3.	Presjek 3.....	44
5.6.4.	Presjek 4.....	45
5.6.5.	Presjek 5.....	47
5.6.6.	Presjek 6.....	48
5.7.	Provjera progiba i nagiba	49
5.7.1.	Provjera na mjestu prijenosnog elementa u horizontalnoj ravnini.....	50
5.7.2.	Provjera na mjestu prijenosnog elementa u vertikalnoj ravnini.....	52
5.7.3.	Provjera uslijed težine G_s	54
5.8.	Provjera kuta uvijanja vratila	55
5.9.	Provjera fleksijske i torzijske kritične brzine vrtnje vratila	56
6.	NUMERIČKI PRORAČUN VRATILA	59
6.1.	Numerička verifikacija jednostavnog 3D modela cilindra s jednim stupnjem	59
6.2.	3D model vratila.....	62
6.3.	Rezultati numeričke analize	66
6.4.	Usporedba analitičkih i numeričkih rezultata	67
6.4.1.	Presjek 1	67
6.4.2.	Presjek 2.....	68
6.4.3.	Presjek 3.....	69
6.4.4.	Presjek 4.....	70
6.4.5.	Presjek 5.....	71
6.4.6.	Presjek 6.....	72
6.5.	Zaključak.....	73
7.	TOPOLOŠKO OPTIMIRANJE VRATILA.....	74
7.1.	Optimiranje numeričkog modela vratila	74
7.1.1.	Optimiranje prijelaza sa zaobljenjem.....	75
7.1.2.	Optimiranje prijelaza bez zaobljenjem	77
7.2.	Zaključak.....	79
8.	ZAKLJUČAK.....	80

POPIS SLIKA

Slika 1	Primjer vratila: a) ravnog, b) koljenastog [1]	2
Slika 2	Primjer vratila: a) savitljivog, b) teleskopskog [1]	3
Slika 3	Primjer: a) zupčanog prijenosnika (planetarni prijenosnik), b) remenskog prijenosnika i c) lančanog prijenosnika [3]	4
Slika 4	Lamelna spojka [3]	5
Slika 5	Valjni ležajevi	6
Slika 6	Skica tarenica u zahvatu	6
Slika 7	Stezni spoj [2]	7
Slika 8	Ekscentrično sjedanje glavine i vratila nakon uklinjenja u dvije (lijevo) i tri točke (desno) [2]	8
Slika 9	Oblici pera prema normi DIN 6885 [2]	8
Slika 10	Izgled profila klinastog vratila i glavine [2]	9
Slika 11	Unutrašnje (gornji presjek) i bočno (donji presjek) centriranje [2]	9
Slika 12	Trokutasti (gore) i evolventni (donja) profil ozubljenja [2]	10
Slika 13	Poligoni profili vratila: a) P3 profil i b) PC4 profil [2]	10
Slika 14	Skupine elemenata [6]	14
Slika 15	a) Linearni element s 8 čvorova (C3D8), b) Kvadratni element s 20 čvorova (C3D20) i c) Modificirani element drugog reda s 10 čvorova (C3D10M) [6]	15
Slika 16	Presjek osno simetričnog modela s prikazom konačnog elementa na presjeku [6]	17
Slika 17	Prikaz osnosimetričnih elementa s nelinearnim i nesimetričnim deformacijama s četiri Foruierova načina interpolacije: a) 1, b) 2, c) 3 i d) 4 [6]	18
Slika 18	Tri metode strukturalnog optimiranja: a) optimiranje dimenzija, b) optimiranje oblika i c) topološko optimiranje [10]	19
Slika 19	Topološki optimirana štapna konstrukcija: a) početna topologija i b) optimirana topologija konstrukcije [9]	20
Slika 20	Primjeri konstrukcija gdje je moguće upotrijebiti optimiranje oblika: a) konzola s nepoznatim dimenzijama i b) štapna konstrukcija s nepoznati površinama presjeka [9]	22
Slika 21	Nepoznata kontura konstrukcijskog dijela prikazana jednadžbom $f(x,y)$ [9]	22
Slika 22	Primjer optimizacije oblika [11]	22
Slika 23	Primjer optimizacije dimenzija [11]	23
Slika 24	Skica opterećenja vratila	27
Slika 25	Prostorni vektor sile F i njezine komponente	27
Slika 26	Horizontalna i vertikalna ravnina opterećenja vratila	28
Slika 27	Presjek 1	30
Slika 28	Presjek 2	31
Slika 29	Presjek 3	32
Slika 30	Dijagram poprečne sile Q_y , momenta savijanja M_z i momenta torzije	33
Slika 31	Dijagram poprečne sile Q_z , momenta savijanja M_y i uzdužne sile	34
Slika 32	Pretpostavljena izvedba vratila	35
Slika 33	Izvedba vratila	40
Slika 34	Faktor veličine strojnog dijela kod savijanja i uvijanja [16]	40
Slika 35	Faktor kvalitete obrade površine [16]	41
Slika 36	Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja vratila s utorom za pero [16]	41
Slika 37	Faktor zareznog djelovanja kod savijanja i promjene promjera [16]	42
Slika 38	Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja i promjene promjera [16]	43
Slika 39	Faktori zareznog djelovanja kod steznih spojeva [16]	44

Slika 40	Faktor zareznog djelovanja kod savijanja vratila s utorom za pero [16].....	48
Slika 41	Proračunska skica za progib u horizontalnoj ravnini na mjestu prijenosnog elementa.....	50
Slika 42	Proračunska skica za progib u vertikalnoj ravnini na mjestu prijenosnog elementa	52
Slika 43	Proračunska skica za progib na mjestu težine G_s	54
Slika 44	Skica za proračun kuta uvijanja vratila	56
Slika 45	Jednostavan model cilindra	59
Slika 46	Podjela površina jednostavnog modela	60
Slika 47	Postavljanje opterećenja i rubnih uvjeta na jednostavnom modelu	60
Slika 48	Mreža konačnih elemenata na jednostavnom elementu	61
Slika 49	Definiranje opterećenja	62
Slika 50	Definiranje torzije i aksijalne sile.....	62
Slika 51	Definiranje težina	63
Slika 52	Definiranje tlaka na ležajima.....	63
Slika 53	Odabir tipa rubnih uvjeta.....	64
Slika 54	Definiranje rubnih uvjeta.....	64
Slika 55	Mreže konačnih elemenata: a) 50320 elemenata, b) 95155 elemenata i c) 155914 elemenata.....	65
Slika 56	Raspodjela ekvivalentnog naprezanja prema von Misesu za mrežu od 50320 konačnih elemenata	66
Slika 57	Raspodjela ekvivalentnog naprezanja prema von Misesu za mrežu od 95155 konačnih elemenata	66
Slika 58	Raspodjela ekvivalentnog naprezanja prema von Misesu za mrežu od 155914 konačnih elemenata	67
Slika 59	Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 1	68
Slika 60	Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 2	69
Slika 61	Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 3	70
Slika 62	Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 4	71
Slika 63	Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 5	72
Slika 64	Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 6	73
Slika 65	Mjesto optimizacije za zadatak optimiranja	74
Slika 66	Naprezanje na mjestu prijelaza prije optimiranja.....	75
Slika 67	Naprezanje na mjestu prijelaza nakon 8 ciklusa optimiranja	76
Slika 68	Naprezanje na mjestu prijelaza nakon 18 ciklusa optimiranja	76
Slika 69	Oblik žljebova za izlaz alata prema DIN 509:2006 – oblik E [1]	77
Slika 70	Naprezanja na mjestu prijelaza prije optimiranja bez zaobljenja.....	77
Slika 71	Naprezanja na mjestu prijelaza nakon 8 ciklusa optimiranja	78
Slika 72	Naprezanja na mjestu prijelaza nakon 14 ciklusa optimiranja	78
Slika 73	Naprezanja na mjestu prijelaza nakon 18 ciklusa optimiranja	79

POPIS TABLICA

Tablica 1	Karakteristične veličine potrebne za proračun	26
Tablica 2	Dimenzije pera na promjeru d_1	38
Tablica 3	Karakteristike ležaja	38
Tablica 4	Dimenzije pera na promjeru d_5	39
Tablica 5	Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja na jednostavnom primjeru	61
Tablica 6	Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 1	67
Tablica 7	Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 2	68
Tablica 8	Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 3	69
Tablica 9	Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 4	70
Tablica 10	Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 5	71
Tablica 11	Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 6	72

POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE

EMVI-TT—12/2023

Izlazno vratilo

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	m ²	površina
b	m	širina pera
B	m	širina ležaja
b_1	-	faktor veličine strojnog dijela
b_2	-	faktor kvalitete obrade površine
C	N	dinamička nosivost ležaja
c_t	$\frac{N}{\text{rad}}$	torzijska krutost
C_0	N	statička nosivost ležaja
c_1	-	Faktor za odnose $D/d \neq 2,0$
c_2	-	Faktor za odnose $D/d \neq 1,4$
d	m	unutarnji promjer prstena ležaja
D	m	vanjski promjer prstena ležaja
d_a	m	minimalni promjer stupnja vratila
d_i^*	mm	orijentacijski promjer vratila
d_{ip}	m	promjer uvećan za visinu pera
d_{pe}	m	promjer pogonskog elementa
E	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	module elastičnosti
\mathbf{F}	N	matrica vektora sila
F	N	sila na pogonskom elementu
f_{Gs_st}	m	ukupni progib na mjestu gonjenog elementa
f_{AH}	m	progib u horizontalnoj ravnini na ležajnom mjestu A
f_{AV}	m	progib u vertikalnoj ravnini na ležajnom mjestu A
f_{BH}	m	progib u horizontalnoj ravnini na ležajnom mjestu B
f_{BV}	m	progib u horizontalnom smjeru na ležajnom mjestu B

f_{dop}	m	dopušteni progib
f_{Gs}	m	progib na mjestu gonjenog elementa
f_{pe}	m	ukupni stvarni progib na mjestu prijenosnog elementa
f_{peH}	m	ukupni progib na mjestu prijenosnog elementa u horizontalnoj ravnini
f_{peV}	m	ukupni progib na mjestu prijenosnog elementa u vertikalnoj ravnini
F_a	N	aksijalna sila
F_{AH}	N	horizontalan komponenta sile na ležajnom mjestu A
F_{AV}	N	vertikalna komponenta sile na ležajnom mjestu A
F_{Ba}	N	aksijalna sila na ležajnom mjestu B
F_{BH}	N	horizontalan komponenta sile na ležajnom mjestu B
F_{BV}	N	vertikalna komponenta sile na ležajnom mjestu B
f_i	-	ciljna funkcija
F_r	N	radijalna sila
F_t	N	tangencijalna sila
G	$\frac{N}{mm^2}$	modul smicanja
g	$\frac{m}{s^2}$	gravitacija
G_s	N	težina gonjenog elementa
G_z	N	težina pogonskog elementa
h	m	visina pera
i	-	prijenosni omjer
$I_{p,i}$	m^4	polarni moment tromosti
$I_{A,i}$	m^4	momenti tromosti presjeka vratila od ležajnog mjesta A
$I_{B,i}$	m^4	momenti tromosti presjeka vratila od ležajnog mjesta A
J_z	$kg\ m^2$	moment tromosti pogonskog elementa
J_s	$kg\ m^2$	moment inercije mase G_s

\mathbf{K}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	matrica krutosti
K	-	faktor uležištenja
K_A	-	pogonski faktor
L	m	ukupna duljina vratila opterećena na uvijanje
l_{Ai}	m	udaljenost od prijelaza s manjeg na veći promjer od rezultante sile u osloncu
l_{Bi}	m	udaljenost od prijelaza s manjeg na veći promjer od rezultante sile u osloncu
$l_{t,i}$	m	duljina pera
$M_{\text{red},i}$	Nm	reducirani moment
M_{fi}	Nm	moment savijanja po presjeku
M_{xi}	Nm	moment oko x osi
M_{yi}	Nm	moment oko y osi
M_{zi}	Nm	moment oko z osi
$n_{f,\text{krit.}}$	min^{-1}	fleksijska kritična brzina vrtnje
$n_{t,\text{krit.}}$	min^{-1}	torzijska kritična brzina vrtnje
n_1	min^{-1}	ulazna brzina vrtnje elektromotora
n_2	min^{-1}	izlazna brzina vrtnje elektromotora
N_{xi}	N	uzdužna sila na presjeku u smjeru x osi
P	W	snaga
p_{dop}	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	dopušteni tlak pera
Q_{yi}	N	poprečna sila u smjeru y osi
Q_{zi}	N	poprečna sila u smjeru z osi
R_m	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	vlačna čvrstoća
r_a	m	maksimalni radijus zaobljenja
R_a	μm	srednje odstupanje profila
R_{max}	μm	najveća visina neravnina

R_z	μm	srednja visina neravnina
S_{post_i}	-	postojeća sigurnost
S_{potr}	-	potrebna sigurnost vratila
T	Nm	moment uvijanja
T_i	Nm	moment uvijanja po presjeku
t_i	m	dubina na glavini za pera
\mathbf{u}	m	matrica vektora pomaka
w_i	-	težinski faktor
W_i	m^3	moment otpora
x_i	m	udaljenosti od presjeka
α_0	-	faktor čvrstoće materijala
α_{Gs}	rad	kut zamišljene osi vratila
α_H	rad	kut nagiba zamišljene osi vratila u horizontalnoj ravnini
α_V	rad	kut nagiba zamišljene osi vratila u vertikalnoj ravnini
β_{B_i}	rad	zamišljeni nagib na mjestu ležaja B
β_{Gs_i}	rad	zamišljeni nagib na mjestu gonjenog elementa
β_A	rad	ukupni stvarni kut nagiba na ležajnom mjestu A u vertikalnoj ravnini
β_{AH}	rad	nagib u horizontalnoj ravnini na ležajnom mjestu A
β_{AV}	rad	nagib u vertikalnoj ravnini na ležajnom mjestu A
β_B	rad	ukupni stvarni kut nagiba na ležajnom mjestu B u vertikalnoj ravnini
β_{BH}	rad	nagib u horizontalnoj ravnini na ležajnom mjestu B
β_{BV}	rad	nagib u vertikalnoj ravnini na ležajnom mjestu B
β_{Gs}	rad	stvarni nagib na mjestu gonjenog elementa
β_{kf}	-	faktor zareznog djelovanja kod savijanja
β_{kf2}	-	faktor zareznog djelovanja kod savijanja kod kojih se presjek mijenja u zavisnosti od R_m

β_{kt}	-	faktor zareznog djelovanja kod uvijanja
$\beta_{kt1,4}$	-	faktor zareznog djelovanja kod uvijanja kod kojih se presjek mijenja u zavisnosti od R_m ,
β_{LAH}	rad	stvarni kut nagiba na ležajnom mjestu A u horizontalnoj ravnini
β_{LAV}	rad	stvarni kut nagiba na ležajnom mjestu A u vertikalnoj ravnini
β_{LBH}	rad	stvarni kut nagiba na ležajnom mjestu B u horizontalnoj ravnini
β_{LBV}	rad	stvarni kut nagiba na ležajnom mjestu B u vertikalnoj ravnini
β_{Ldop}	rad	dopušteni nagib
μ	-	faktor trenja
ρ	m	radijus zakrivljenosti
$\sigma_{f,dop}$	$\frac{N}{mm^2}$	dopušteno naprezanje
$\sigma_{red,i}$	$\frac{N}{mm^2}$	reducirano naprezanje
σ_{fDN}	$\frac{N}{mm^2}$	trajna dinamička čvrstoća za čisto naizmjenično promjenljivo naprezanje na savijanje
τ_{tDN}	$\frac{N}{mm^2}$	trajna dinamička čvrstoća za čisto naizmjenično promjenljivo naprezanje na uvijanje
φ	rad	kut uvijanja
φ_{dop}	rad	dopušteni kut uvijanja

SAŽETAK

Vratila su jedan od najzastupljenijih strojnih elemenata u svakom industrijskom pogonu. Često su iz konstrukcijskih razloga izrađena sa stupnjevima, odnosno promjenjivog promjera po duljini. Zbog toga se na tim mjestima uslijed opterećenja javljaju koncentracije naprezanja koje utječu na čvrstoću vratila. Za određivanje koncentracije naprezanja u radu će biti primijenjene analitičke metode rješavanja. Uz primjenu analitičkih metoda, dobivene vrijednosti će biti uspoređene s rezultatima numeričkih simulacija. Također, uz numerički proračun vratila, topološkim optimiranjem će se smanjiti koncentracija naprezanja na vratilu.

U prvom dijelu ovog rada napraviti će se pregled literature vezan za vratila, metodu konačnih elemenata i topološko optimiranje. Također, biti će napravljen kratak pregled alata *Abaqus* i njegove dokumentacije.

Nakon pregleda literature, u drugom dijelu, slijedi analitički proračun za izlazno vratilo elektromotora. Elektromotor u sebi sadrži reduktor kojim se smanjuje izlazna brzina vratila. Vratilo na sebi sadrži dva ležaja, jedan prijenosni element i jedan element za odvod snage. Provjeriti će se čvrstoća, deformacije i kritične brzine vrtnje.

U trećem dijelu ovog rada napravljen je numerički proračun vratila i uspoređena su naprezanja dobivena numerički i analitički.

U zadnjem dijelu napravljena je topološku optimizacija vratila. Optimiran je prijelaz s manjeg na veći promjer. Napravljena su dva slučaja optimiranja. Prvi slučaj je optimiranje modela vratila koji na sebi već ima zaobljenja. Drugi slučaj optimiranja je s vratilom bez zaobljenja, odnosno prijelaza s manjeg na veći promjer.

Ključne riječi: Topološko optimiranje, metoda konačnih elemenata, vratilo, prijenos snage, numeričke metode.

SUMMARY

Shafts are one of the most abundant machine elements in any industrial plant. Often, for structural reasons, they are made with degrees, that is, variable diameters in length. Therefore, stress concentrations occur in these places due to the load, which affect the strength of the shaft. Analytical methods of solving will be applied to determine the stress concentration in the paper. With the use of analytical methods, the obtained values will be compared with the results of numerical simulations. Also, with numerical shaft calculation, topological optimization will reduce the stress concentration on the shaft.

In the first part of this paper, a review of the literature related to shafts, finite element method and topological optimization will be made. Also, a brief overview of *the Abaqus* tool and its documentation will be made.

After reviewing the literature, in the second part, follows the analytical calculation for the output shaft of the electric motor. The electric motor contains a reducer that reduces the output speed of the shaft. The shaft on it contains two bearings, one transmission element and one power drain element. Strength, deformation and critical rotational speeds will be checked.

In the third part of this paper, a numerical calculation of the shaft was made, and the stresses obtained numerically and analytically were compared.

In the last part, topological optimization of the shaft was made. The transition from a smaller to a larger diameter is optimized. Two cases of optimization have been made. The first case is the optimization of the shaft model that already has fillets on it. The second case of optimization is with a shaft without fillets or smooth transitions from a smaller to a larger diameter.

Key words: Topology optimization, finite element method, shaft, power transfer, numerical methods.

1. UVOD

Elektromotori su široko primijenjeni pogonski strojevi. Oni pretvaraju električnu energiju u mehanički rad. Dije se na elektromotore za istosmjernu struju i elektromotore za izmjeničnu struju. Istosmjerni motori imaju mogućnost kontinuirane promjene brzine vrtnje zbog čega se primjenjuje za pogon tračnih i nekih posebnih vozila kao što su automobili, elektromobili i slična prijevozna sredstva. Primjenjuju se i u brodogradnji, metalurgiji, uređajima za kućanske svrhe, termoelektranama, nuklearnim elektranama i mnoge druge primjene. U svakom od tih elektromotora potrebno je korištenje vratila kao strojnog dijela koji prenosi snagu. Tu snagu možemo iskoristiti na način koji nam je potreban, ovisno o primjeni, pomoću prijenosnih elemenata. Neki od mogućih elementa su zupčnici, remenice, tarenice, spojke ili bubnjevi za namatanje užadi. Elektromotor može u sklopu konstrukcije sadržavati reduktor. Reduktorom se smanjuje brzina vrtnje izlaznog vratila uz povećanje okretnog momenta. To povećanje okretnog momenta uzrokuje veće opterećenje vratila i samim time su potrebni i veći promjeri. Proračun vratila vrši se analitički ili numerički. U ovom radu upravo ćemo usporediti ta dva načina proračunavanja vratila na primjeru jednog izlaznog vratila elektromotora. Nakon toga ćemo napraviti topološku optimizaciju s ciljem smanjenja maksimalnih naprezanja na geometrijskim prijelazima vratila.

Topološka optimizacija najčešće se koristi u svrhu smanjenja mase odnosno za optimiranje topologije objekta. Time objekt zadržava svoja mehanička svojstva. Također, optimizacija se može koristiti i za smanjenje koncentracije naprezanja. Navedene optimizacije se provode komercijalnim alatima na računalu metodom konačnih elemenata. U ovom radu će se koristiti komercijalni alat *Abaqus*.

2. OPĆENITO O VRATILIMA

Vratila su gotovo neizbježni strojni elementi u svakom industrijskom pogonu ili stroju. Za razliku od osovina, ona obavezno rotiraju i prenose okretni moment, odnosno snagu. Također, gotovo uvijek na sebi imaju razne strojne elemente za prijenos snage. Neki od njih su navedeni u uvodu, kao na primjer zupčanici.

2.1. Podjela vratila

Vratila se dijele ovisno o njihovom položaju geometrijske osi, obliku i namjeni [1]. Ovisno o položaju geometrijske osi, vratila se dijele na:

- Ravna,
- koljenasta.



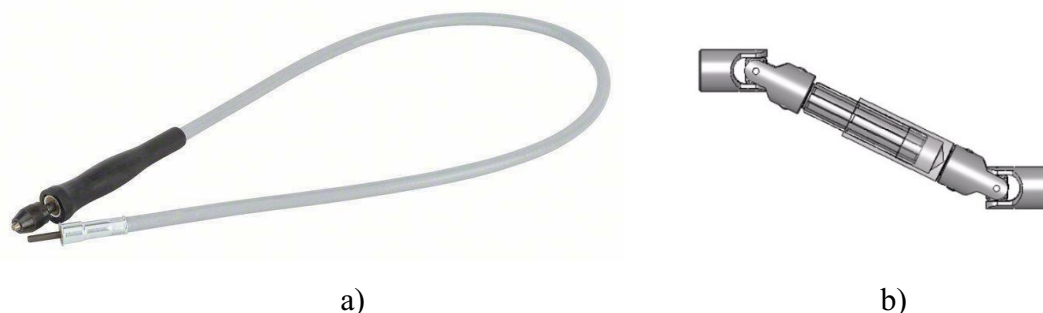
Slika 1 Primjer vratila: a) ravnog, b) koljenastog [1]

Ravna vratila se dalje dijele s obzirom na njihov oblik prema [1] na:

- stupnjevana i glatka,
- ožlijebljena i ozubljena,
- vratila izrađena zajedno sa strojnim elementom,
- vratila kružnog ili poligonskog poprečnog presjeka,
- puna i šuplja vratila.

Postoje i vratila koja se koriste u posebne svrhe kao što su savitljiva i teleskopska vratila. Savitljiva vratila se sastoje od višeslojne jezgre koja je postavljena u savitljivu čeličnu cijev. To im omogućava upotrebu na mjestima gdje nije moguć direktan spoj između elemenata koji rotiraju ili kada središnjice vratila mijenjaju svoj položaj u radu. Primjer korištenja savitljivih

vratila je u bušilicama ili mjerilima brzine vrtnje u automobilima. Teleskopska vratila su vratila koja imaju mogućnost promjene svoje dužine. Mogu se koristiti u slučaju kada središnjice osi vratila ne podudaraju.



Slika 2 Primjer vratila: a) savitljivog, b) teleskopskog [1]

Mjesta na vratilima na kojima dolazi ležaj ili nepomični dio konstrukcije nazivaju se rukavcima. Oni mogu biti cilindričnog, koničnog ili kuglastog oblika. Mogu se okretati ili mirovati pa ih onda dijelimo na pokretne i nepokretne rukavce.

2.2. Materijali vratila

Prema [1] i [2], najčešće se osovine i vratila izrađuju od konstrukcijskih čelika i čelika za strojogradnju kao što su S275JR, E295 ili E335. U slučaju većih zahtjeva mogu se koristiti i čelici za poboljšanje kao što su C35, C45E, 40Mn4, 34Cr4 i 41Cr4. Kod motornih vozila koriste se čelici za cementiranje kao što su 16MnCr5, 20MnCr5, 18CrNi8 i ostali slični čelici. Legirani čelici koriste se kod naizmjeničnog savijanja samo ako ne postoje zarezna djelovanja jer čelici s visokim mehaničkim svojstvima su osjetljiviji na njih [1]. Također, kod vozila koja koriste motor s unutarnjim izgaranje mogu imati koljenasto vratilo iz nodularnog lijeva koji ima kuglasti grafit kao na primjer NL600.

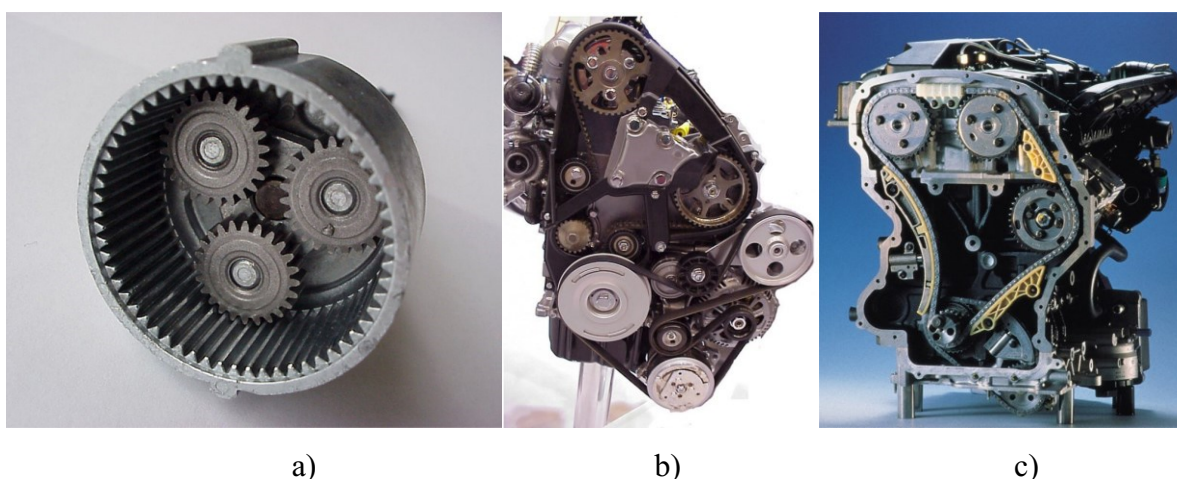
2.3. Ukratko o strojnim elementima

U ovom poglavlju kratko će biti opisani i prikazani elementi koji se mogu nalaziti na vratilima. Opis će biti općenit bez prikazivanja izraza ili izvoda.

2.3.1. Zupčanici, remenice i lančanici

Ukoliko se snaga prenosi s jednog vratila na drugo, tada se koriste zupčanici, remenice ili lančanici. To je korisno kod strojeva kod kojih se dobiva snaga u rotacijskom obliku odnosno

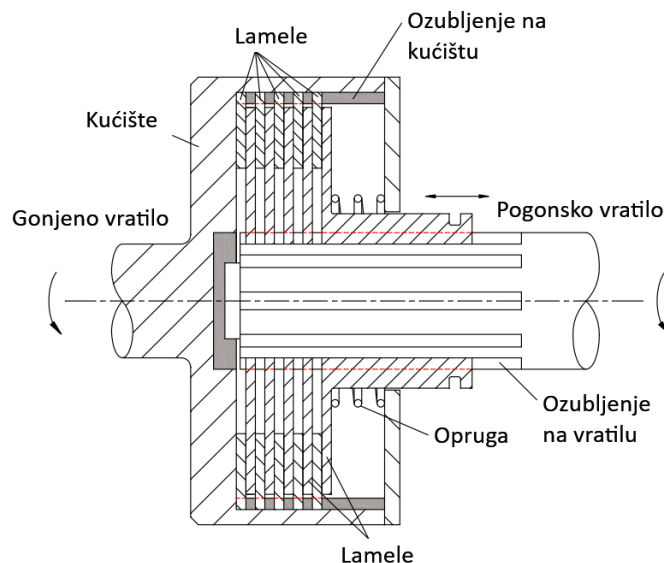
gdje stroj daje snagu tako da zakreće vratilo. Primjer takvog stroja je elektromotor. Ostali strojevi koji također daju snagu na takav način su motori s unutarnjim izgaranjem i plinske turbine [3]. Zupčanici, remenice i lančanici su potrebni kada je potrebno na izlazu iz stroja dobiti brzinu, samim time i okretni moment, koja je manja ili veća od one koju stroj sam po sebi daje. Na primjer, elektromotor koji daje brzinu vrtnje od 1500 okretaja po minuti, a gdje je potrebno na izlazu dobiti brzinu od 200 okretaja po minuti. Prijenosni omjer u tom slučaju odgovara omjeru brzine elektromotora i brzine na izlazu. Za manje udaljenosti vratila i kompaktniji dizajn konstrukcije koriste se zupčanici. Ako postoje veće udaljenosti između vratila onda je pogodno koristiti remenske ili lančane prijenosnike. Naravno, moguće je koristiti i kombinaciju tih strojnih elemenata.



Slika 3 Primjer prijenosnika: a) zupčanog (planetarni), b) remenskog i c) lančanog [3]

2.3.2. *Spojke i kočnice*

Spojke i kočnice koriste trenje za prijenos okretnog momenta na vratilo. Spojka daje mogućnost uključivanja ili isključivanja vratila iz rada dok kočnica služi za usporavanje odnosno zaustavljanje okretanja vratila. U praktičnom smislu spojke i kočnice mogu funkcionirati kao isti strojni element jer su im funkcionalnosti slične odnosno spojka se može koristiti kao kočnica ili obrnuto [3]. Poznati primjer korištenja njih je u automobilskoj industriji za pokretanje i kočenje vozila. Također, koriste se i u strojevima za proizvodnu industriju. Svrha spojki je da prenose konstantan okretni moment. Najčešće se postavljaju na izlazu pogonskog stroja. Mogu se koristiti i u svrhe isključivanja stroja iz pogona u slučaju nužde ili održavanja. U takvim slučajevima može se ugraditi i kočnica za brzo zaustavljanje vratila [3]. Jedan primjer spojke je lamelna spojka koja je prikazana na Slika 4.



Slika 4 Lamelna spojka [3]

2.3.3. Ležajevi

Ležajevi se dijele na klizne i valjne ležajeve. Pojam ležaj se općenito odnosi na sklop dva dijela koji imaju relativno gibanje u odnosu jedno na drugo [3]. Obično se koriste tamo gdje je potrebno linearno, rotacijsko, linearno-rotacijsko ili sferno gibanje dijelova. Razlikujemo radijalne i aksijalne ležajeve ovisno o smjeru prenošenja opterećenja. Ležaj može prenositi i radijalno i aksijalno opterećenje istovremeno i onda se on naziva radijalno-aksijalni ležaj. Klizni i valjni ležajevi koriste neku vrstu podmazivanja kako bi se smanjilo trenje i odvodila toplina. Podmazivanje im također povećava vijek trajanja jer smanjuje trošenje materijala. Valjni ležajevi imaju, između dva prstena, valjna tijela. Ta tijela omogućuju rotaciju između prstenova i izrađuju se u različitim oblicima. Vrste valjnih tijela koje postoje su kugla, valjak, stožac, bačvica i iglica. Ležajevi su standardizirani što znači da neovisno o proizvođaču, oznake ležaja i interpretacija oznaka su jednake što olakšava njihov izbor. Izbor se vrši ovisno o uvjetima koje treba zadovoljiti. Neki od njih su:

- opteretivost,
- brzina vrtnje,
- smještaj,
- veličinu,
- cijenu,
- bučnost,
- rastavlјivost,

- točnost vođenja.

Uvjeti se biraju ovisno o funkciji stroja i željenim karakteristikama. Primjer izgleda nekoliko vrsta ležaja nalazi se na Slika 5.



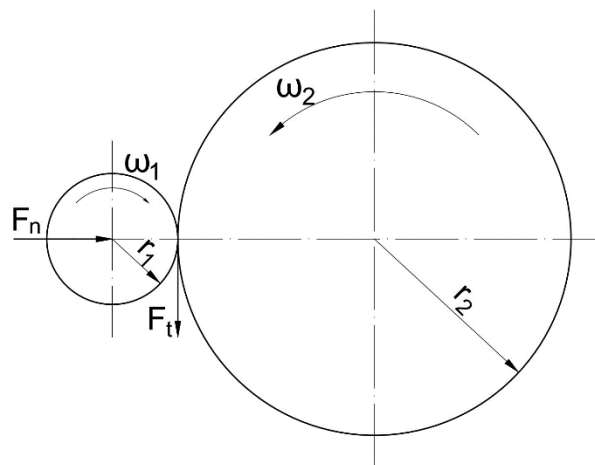
Slika 5 Valjni ležajevi

2.3.4. Tarni prijenosnici

Ovi prijenosnici gibanje i snagu prenose trenjem na vratila čije su osi međusobno paralelne, sijeku se ili su mimo smjerne. Prema [2] razlikuju se tarenice s:

- konstantnim prijenosnim omjerom,
- mogućnošću kontinuirane promjene prijenosnog omjera,
- mogućnošću reverziranja gibanja.

Osnovni izgled tarenica je dva valjka koja se dodiruju i trenjem prenose gibanje.



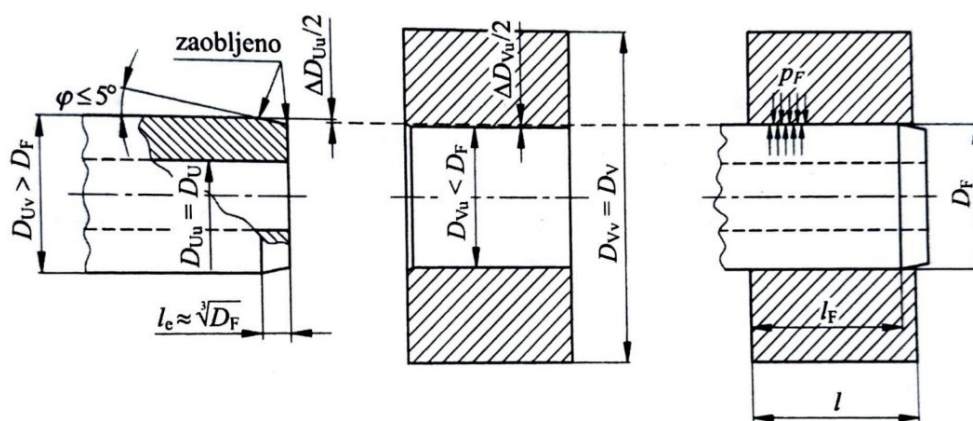
Slika 6 Skica tarenica u zahvatu

2.4. Spojevi glavine i vratila

Glavina je dio prijenosnog elementa koji dolazi na rukavac vratila. Za taj dio se prijenos okretnog momenta s vratila na glavinu vrši trenjem ili oblikom. Prijenos trenjem se ostvaruje pomoću steznog spoja dok se prijenos oblikom vrši preko uzdužnih klinova, pera, klinastim, zupčastim ili poligonim profilom vratila te koničnim spojevima.

2.4.1. Stezni spojevi

„Pod stezni spoj podrazumijeva se spoj dva dijela od kojih jedan ima vanjsku, a drugi istu unutarnju nazivnu mjeru, pri čemu se ostvaruje preklop (prisnost) između dijelova, najčešće glavine i rukavca“ [2]. Kako bi stezni spoj bio moguć mora rukavac imati nešto veću mjeru od glavine. Stezni spoj je moguće izvesti mehaničkim, toplinskim ili hidrauličkim navlačenjem glavine na rukavac. Slika 7 prikazuje ostvarivanje steznog spoja gdje je na lijevom dijelu prikazan rukavac, u sredini glavina i desno ostvareni stezni spoj s tlakom koji djeluje između dijelova.

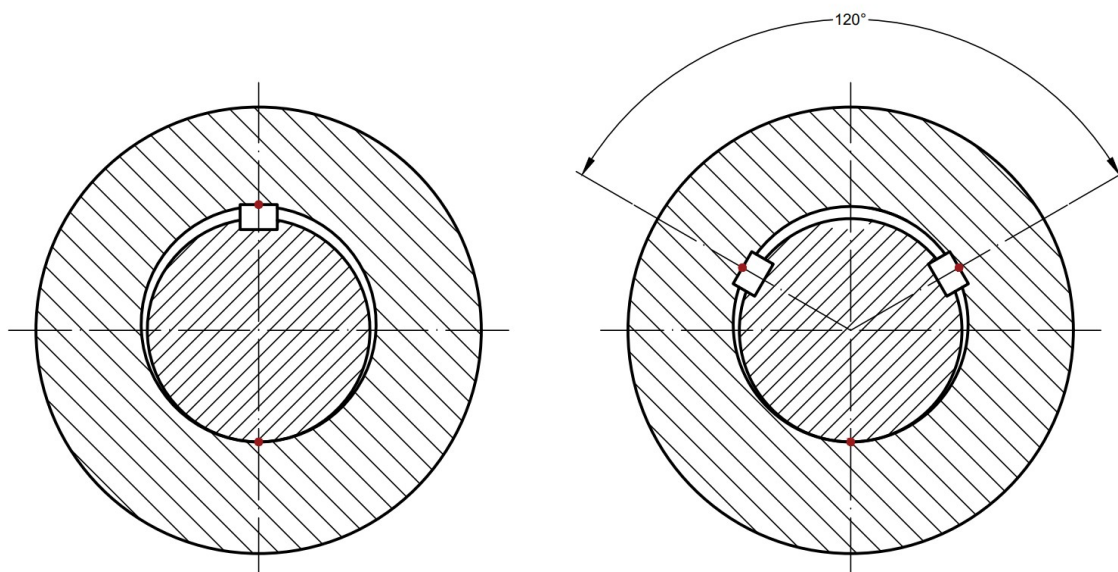


Slika 7 Stezni spoj [2]

Ovakvi spojevi su sigurni protiv vibracija i izdržljivi te se mogu primijeniti kod velikih udarnih i dinamičkih opterećenja. Prednost spoja su centrirani unutarnji i vanjski dio bez zračnosti [2].

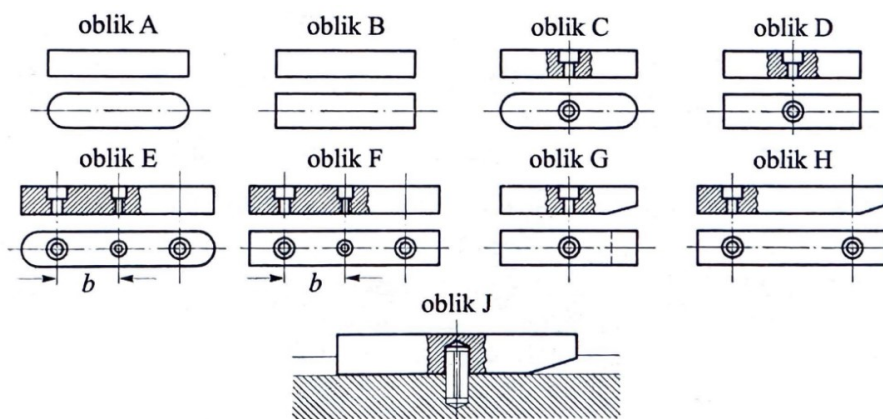
2.4.2. Klinovi i pera

Klinovi i pera povezuju glavinu i rukavac oblikom. Preko njih se prenosi okretni moment i oni imaju svoj utor na vratilu i glavini. Klin se zabija, zbog čega se utor deformira na oba mjesta. To dovodi do toga da dijelovi više nisu centrirani što prikazuje Slika 8.



Slika 8 Ekscentrično sjedanje glavine i vratila nakon uklinjenja u dvije (lijevo) i tri točke (desno) [2]

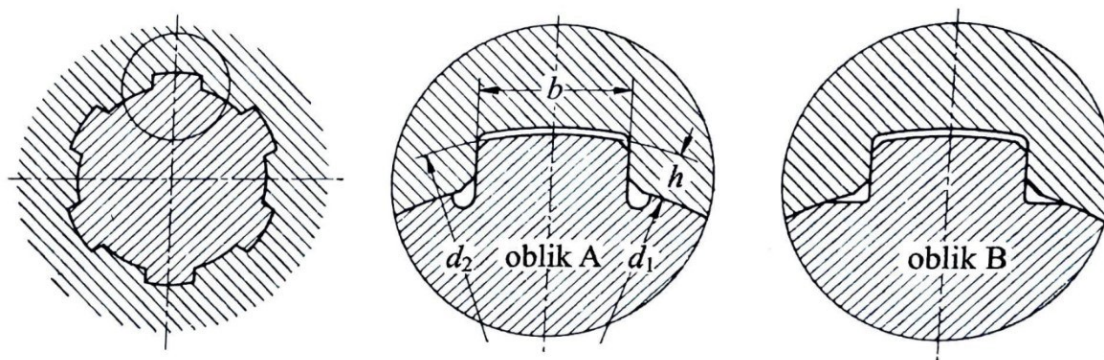
Postoje klinovi različitih izvedbi kao na primjer uložni, utjerni, klin s nosom, obli udubljeni, plosnati i slični. Pera, za razliku od klinova, imaju zračnost na glavini i čvrsti spoj na rukavcu. Zbog te zračnosti dijelovi ostaju centrirani. Standardna pera se prema normi DIN 6885 dijele po oblicima od A do J [2] i prikazana su na Slika 9.



Slika 9 Oblici pera prema normi DIN 6885 [2]

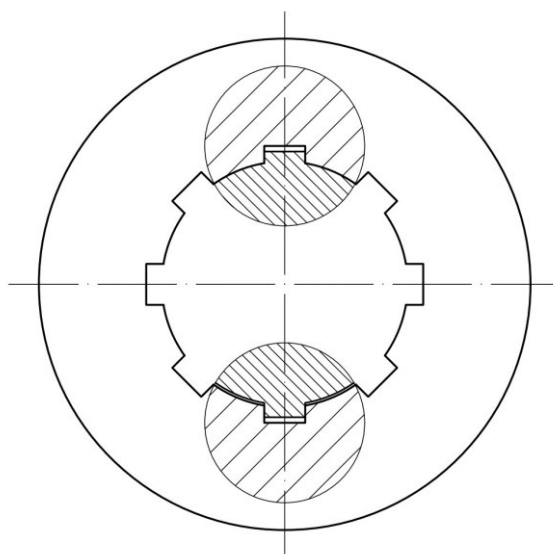
2.4.3. Klinasti profil vratila

Ovaj profil vratila po svojem opsegu ima parni broj visokih pera. Naziv klinasti je ostao iz prijašnje oznake gdje su se pera nazivala „klinovi bez nagiba“ [2]. Klinasta vratila se izvede u lakoj, srednjoj i teškoj izvedbi. Postoje dvije izvedbe odnosno oblika ovakvog tipa vratila koji su prikazani na Slika 10.



Slika 10 Izgled profila klinastog vratila i glavine [2]

Glavine se centriraju na dva načina. Prvi način je unutarnje centriranje. U tom načinu se promjer d_1 , sa Slika 10, dodiruje s glavinom. Ono se koristi isključivo za alatne strojeve [2]. Drugi način centriranja je bočno centriranje. U ovom centriranju se koriste bokovi visokih pera kao kontaktne površine između vratila i glavine. Oba načina mogu se vidjeti na Slika 11.

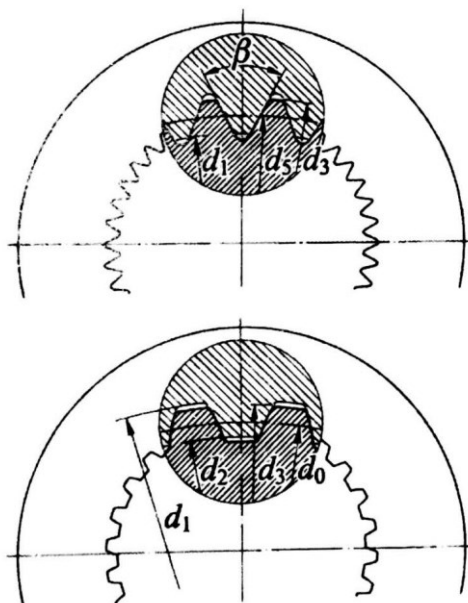


Slika 11 Unutrašnje (gornji presjek) i bočno (donji presjek) centriranje [2]

2.4.4. Zupčasti profil vratila

Vratila umjesto klinova mogu imati i zube. Koriste se dva profila zubi, trokutasti i evolventni prikazani na Slika 12. Iz razloga što po obodu vratila ima velik broj zubaca, pogodno je prenositi visoka udarna opterećenja [2]. Kod ovog profila vratila centriranje se često vrši kao bočno

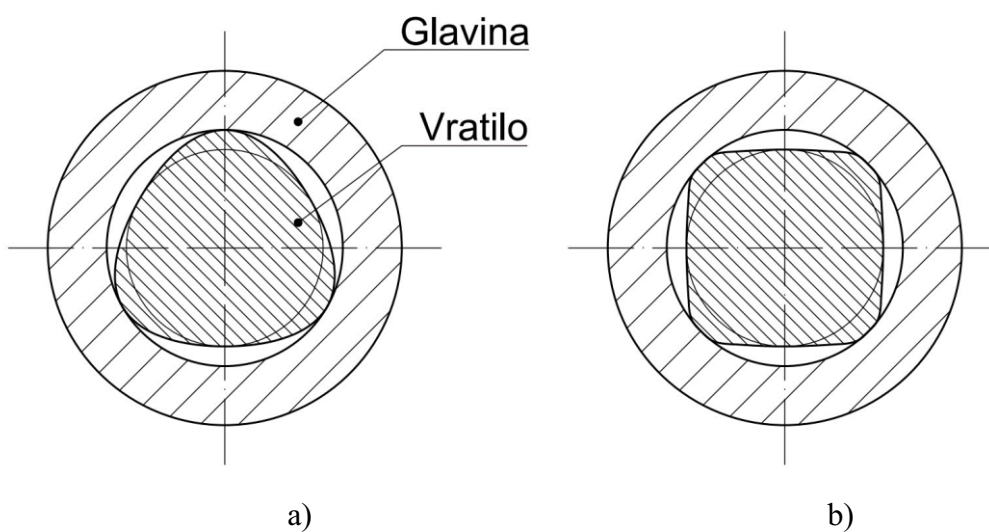
centriranje umjesto unutarnjeg iako su obje varijante moguće. Primjer korištenja ovakvog vratila je u lamelnim spojka.



Slika 12 Trokutasti (gore) i evolventni (donja) profil ozubljenja [2]

2.4.5. Poligoni profil vratila

Kod klinastih i zupčastih vratila okretni moment se prenosi preko izbočina koja se nalaze na vratilu dok poligoni oblik vratila prenosi svojim oblikom presjeka. Dva presjeka prikazani su na Slika 13.



Slika 13 Poligoni profili vratila: a) P3 profil i b) PC4 profil [2]

2.5. Približan proračun vratila

Analitički proračun vratila se može podijeliti u nekoliko koraka i to su:

- određivanje opterećenja na vratilu,
- određivanje naprezanja na vratilu,
- određivanje orijentacijskih dimenzija na vratilu,
- odabir izvedbenih dimenzija vratila,
- određivanje i kontrola sigurnosti u kritičnim presjecima,
- provjera progiba i nagiba,
- provjera kuta uvijanja vratila,
- provjera fleksijske i torzijske kritične brzine vrtnje vratila.

Svi navedeni koraci će biti napravljeni u ovom radu. Nakon toga će biti napravljena usporedba analitičkog rješenja s numeričkim. Na kraju će biti vratilo topološki optimirano s ciljem smanjenja koncentracije naprezanja na mjestima geometrijskih prijelaza.

3. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata je pristup koji se koristi za numeričko rješavanje problema u mehanici deformabilnih tijela. Temelji se na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Tu metodu je moguće koristiti za rješavanje statičkih ili dinamičkih problema. Rješavanje se provodi na diskretiziranom kontinuumu s međusobno povezanim elementima koji imaju konačan broj stupnjeva slobode gibanja umjesto na razmatranom kontinuumu koji ima beskonačan broj stupnjeva slobode gibanja. Elementi koji dijele kontinuum se nazivaju konačni elementi i skup njih čini mrežu konačnih elemenata. Elementi su međusobno povezani u točkama koje se nazivaju čvorovi. Za opisivanje stanja u elementima, kao što su polje pomaka, deformacije, naprezanja te ostalih veličina, koriste se interpolacijske funkcije. One moraju ispuniti odgovarajuće uvjete kako bi diskretizirani model što više približio ponašanju kontinuiranog sustava [4]. Točnija rješenja dobivaju se s većim brojem konačnih elemenata. Rezultati ovom metodom izračuna su približna zbog čega je potrebno paziti na pravilni odabir proračunskog modela i konačnih elemenata. Značajnu primjenu ove metode omogućio je razvoj računala gdje je danas moguće provesti analize na osobnim računalima. Analize se provode na nekom od komercijalno dostupnih programskih paketa za provođenje analiza.

3.1. Komercijalni programski paketi za provođenje analiza pomoću metode konačnih elemenata

Danas postoje različiti alati za provođenje analiza metodom konačnih elemenata. Neki od njih su *ANSYS*, *Patran*, *SimScale*, *Abaqus* te drugi komercijalno dostupni programski paketi. U ovom radu će biti ukratko opisan programski paket *Abaqus* s pregledom konačnih elemenata koji se koriste.

3.1.1. Komercijalni programski paket *Abaqus*

Programski paket *Abaqus* je alat za opću namjenu u analizi metodom konačnih elemenata [5]. Njegova opsežna biblioteka konačnih elemenata i materijala dopušta modeliranje gotovo svakog geometrijskog oblik. Osim metala, *Abaqus* ima mogućnost analize materijala kao što su guma, polimeri, beton, staklo, keramika, pjene te geotehnički materijali kao kamen i razne vrste tla [5]. Međutim, ovim programskim alatom moguće je provoditi i analize prijenosa topline, difuzije mase, akustike, piezoelektričnog učinka i elektrokemije istovremeno s analizom naprezanja i deformacija [5].

Prema [6], *Abaqus* sadrži četiri osnovna sustava koju uključuju:

- *Abaqus/Standard*,
- *Abaqus/Explicit*,
- *Abaqus/CAE*,
- *Abaqus/Viewer*.

Abaqus/Standard je pogodan za rješavanje statičkih i dinamičkih problema pri malim brzinama. To uključuje analize poput mehanike loma, prijenosa topline, akustike, vrednovanja brtvljenja pod tlakom te drugih sličnih analiza [7]. Mogu se proširiti mogućnosti ovog sustava pomoću kodiranja potprograma za materijale, konačne elemente, opterećenja i rubne uvjete. Također, *Abaqus/Standard* je povezan sa sustavom *Abaqus/Explicit* zbog čega je moguće započeti analizu u jednom od ta dva sustava i zatim nastaviti tu istu analizu u drugom sustavu. Na primjer, moguće je koristiti *Abaqus/Standard* za dio analize koji uključuje probleme koji su pogodniji za taj sustav dok istovremeno se provodi drugi dio analize u *Abaqus/Explicit* sustavu gdje su uključeni problemi pogodniji za njega [7].

Abaqus/Explicit je pogodan za provedbu analize kratkotrajnih tranzijentnih dinamičkih događaja. Primjeri takvih problema su testovi ispuštanja potrošačkih elektroničkih uređaja, testovi sudara automobila i balistički udari [8].

Abaqus/CAE je okružje koje daje jednostavno sučelje za kreiranje, podnošenje, praćenje i vrednovanje rezultata analize dobivenih u sustavima *Abaqus/Standard* i *Abaqus/Explicit*. *Abaqus/CAE* je podijeljen u module. Svaki modul definira jedan aspekt u procesu modeliranja. Na primjer, definiranje geometrije, materijalnih svojstava i generiranje mreže konačnih elemenata. Od modula do modula gradi se model iz kojeg *Abaqus/CAE* stvara ulaznu datoteku koja se podnosi na analizu u sustavima *Abaqus/Standard* i *Abaqus/Explicit*. Sustavi izvršavaju analizu te daju informacije sustavu *Abaqus/CAE* koji omogućava praćenje napretka analize i na kraju generira izlaznu datoteku s rezultatima analize. Na kraju se koristi modul za vizualizaciju za čitanje i prikaz izlaznih podataka te grafičkog pregleda rezultata analize [6].

Abaqus/Viewer pruža grafički prikaz modela i rezultata analize. On je integriran u modulu za vizualizaciju [6].

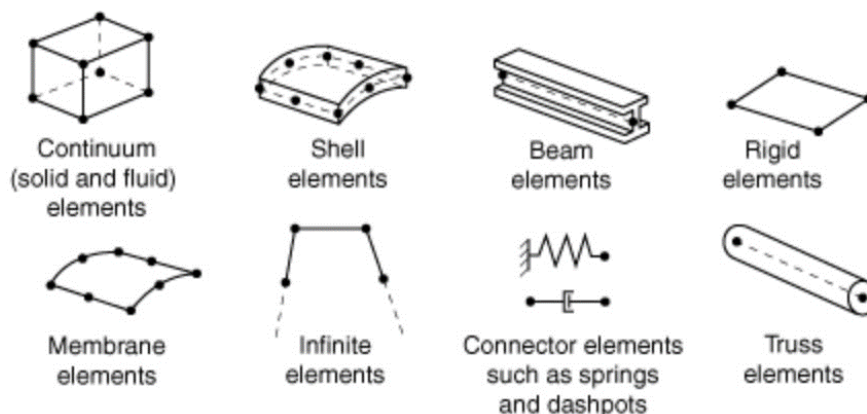
U ovom radu korišten je sustav *Abaqus/Standard*.

3.1.2. Konačni elementi u Abaqus-u

Unutar *Abaqus*-ove biblioteke elemenata oni su karakterizirani s pet aspekata:

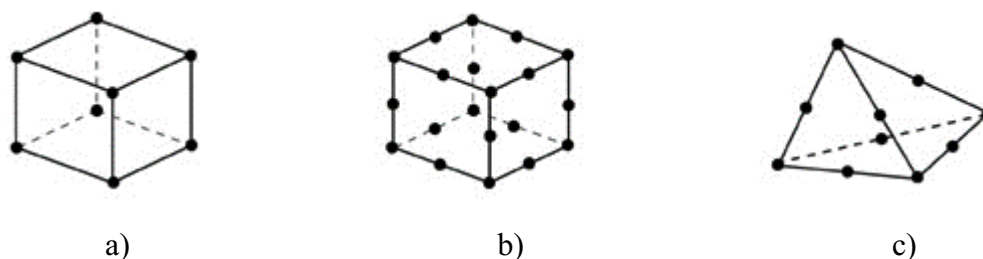
- skupina,
- stupnjevi slobode gibanja (povezano sa skupinom kojoj pripada element),
- broj čvorova,
- formulacija,
- integracija.

Ovisno o navedenim aspektima, elementi dobivaju jedinstveno ime kao što su primjerice elementi T2D2, C3D8, C3D10, C3D8R i slični nazivi. Na Slika 14 prikazane su najčešće skupine elemenata u alatu *Abaqus*. Te skupine se koriste za analizu naprezanja i analizu fluida. Osnovna razlika između skupina elemenata je tip geometrije koje svaka skupina posjeduje.



Slika 14 Skupine elemenata [6]

Vrijednosti stupnjeva slobode gibanja računaju se tokom analize. Oni su translacije kod analize naprezanja i deformacija, a rotacijski stupnjevi slobode gibanja se koriste za ljuskaste, cijevne i gredne elemente. Stupnjevi slobode gibanja se računaju u čvorovima elemenata dok se na dijelovima koji nisu na mjestima čvorova računaju interpolacijom pomoću vrijednosti dobivenih u čvorovima. Stupanj interpolacije određen je s brojem stupnjeva slobode elementa. Elementi koji imaju samo čvorove na krajevima koriste linearnu interpolaciju i zovu se elementi prvog reda ili linearni elementi [6]. Elementi s čvorovima na krajevima i na polovinama stranica koriste kvadratnu interpolaciju i zovu se elementi drugog reda ili kvadratni elementi. Modificirani trokutni i tetraedarski elementi koriste modificiranu interpolaciju drugog reda i nazivaju se modificirani elementi drugog reda. Primjeri i skice tih elemenata nalaze se na Slika 15.



Slika 15 a) Linearni element s 8 čvorova (C3D8), b) Kvadratni element s 20 čvorova (C3D20) i c) Modificirani element drugog reda s 10 čvorova (C3D10M) [6]

Može se vidjeti s primjera elemenata na Slika 15 da broj stupnjeva slobode gibanja je prikazan u imenu elementa. Primjerice element C3D8 ima 8 čvorova. Međutim, postoji iznimka za gredne elemente koji u sebi sadrže različit stupanj interpolacije. Primjer grednog elementa prvog reda bio bi B31 dok bi gredni element drugog reda imao oznaku B32. Također, na sličan način se označavaju osno simetrični ljuskasti i membranski elementi.

Aspekt formulacije se odnosi na matematički teoriju koja se koristi za definiranje ponašanja elemenata. U Lagrangeovom ili materijalnom ponašanju element se deformira s materijalom. Kod Eulerovog ili prostornog ponašanja elementi su fiksirani u prostoru dok se materijal deformira. Eulerovo ponašanje najčešće se koristi u analizama mehanike fluida [6]. *Abaqus/Explicit* koristi Eulerove elemente za analizu naprezanja i deformacija dok svi ostali elementi za analizu istog koriste Lagrangeovo ponašanje odnosno Lagrangeovu formulaciju. Svaki element u alatu *Abaqus* ima nekoliko različitih formulacija kako bi zadovoljio različita ponašanja materijala. *Abaqus/Standard* ima skupine elemenata koji imaju standardnu i alternativnu formulaciju. Alternativne formulacije su označene sa slovom na kraju naziva elementa. Na primjeru hibridne formulacije elementi imaju slovo H na kraju kao što su C3D8H ili B31H.

Zadnji aspekt odnosno integracija koristi numeričke metode za integriranje raznih veličina po volumenu svakog elementa [6]. Koristi se Gaussova numerička integracija, pri čemu se određuje ponašanje materijala u integracijskim točkama svakog elementa [6]. U programskom paketu *Abaqus* postoji mogućnost korištenja potpune ili reducirane integracije. Također, elementi koji koriste reduciranu integraciju imaju slovo R na kraju naziva elementa. Na primjer, element C3D8 uz korištenje reducirane integracije imati će oznaku C3D8R.

3.1.3. Tipovi elemenata u programskom paketu Abaqus

Konačni elementi mogu imati širok raspon dimenzija u prostoru i neki od njih su:

- jednodimenzijski elementi,
- dvodimenzijski elementi,
- trodimenzijski elementi,
- cilindrični elementi,
- osnosimetrični elementi,
- osnosimetrični elementi s nelinearnim i nesimetričnim deformacijama.

3.1.3.1. Jednodimenzijski elementi

Koriste se jedino u *Abaqus/Standard* sustavu za analizu prijenosa topline i akustike. Također, postoje i štapni elementi koji se mogu koristiti u dvodimenzijском i trodimenzijском prostoru za prijenos opterećenja po dužini elementa.

3.1.3.2. Dvodimenzijski elementi

Postoji nekoliko vrsta ovih tipova elemenata koji se mogu koristiti za analizu konstrukcija u ravninskom stanju deformacija i naprezanja. Elementi za ravninsko stanje naprezanja mogu se koristiti ako je debljina tijela malog iznosa u odnosu na njegovu duljinu i širinu. Naprezanja su funkcije koordinata u ravnini za dvodimenzionalne elemente i sva naprezanja izvan te ravnine, u smjeru normale i tangencijalna naprezanja u smjeru normale, su jednake nuli. U programskom paketu *Abaqus* elementi za ravninsko stanje naprezanja definiraju se u X - Y ravnini i sve ostale veličine su ograničene na tu ravninu kao na primjer zadavanje opterećenja i deformacije modela. Takav način modeliranja koristi se za tanka i ravna tijela. Elementi za ravninsko stanje deformacija mogu se koristiti kada su deformacije opterećenog tijela jedino funkcija koordinata u ravnini [6]. Također kao i kod ravninskog stanja naprezanja, veličine u smjeru normale su jednake nuli ali u ovom slučaju se to odnosi na deformacije. Definiranje modela vrši se također u ravnini X - Y i sva opterećenja se zadaju i ograničena su na tu ravninu. Deformacije su isto samo u toj ravnini. Općenito se ravninsko stanje deformacije koristi za tijela koja su puno deblja u odnosu na njezine ostale dimenzije. Ovaj tip elemenata se može koristiti, na primjer, za analizu štapova, brana ili zidova [6].

3.1.3.3. Trodimenzijski elementi

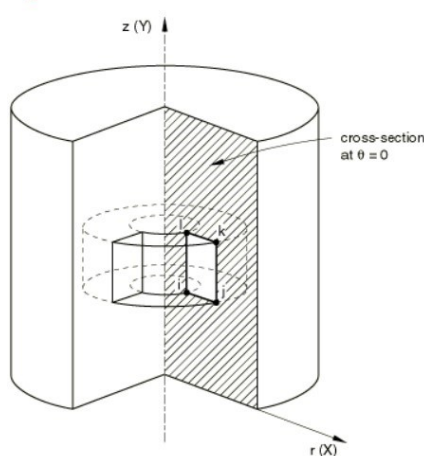
Ovi elementi se definiraju u globalnom koordinatnom sustavu X , Y i Z . Koriste se kada su geometrija i zadana opterećenja previše složeni za bilo koju drugu vrstu elemenata manjih prostornih dimenzija.

3.1.3.4. Cilindrični elementi

Ovi elementi su trodimenzijski elementi i definirani su kao takvi u globalnom koordinatnom sustavu. Koriste se za modeliranje tijela s kružnom ili osno simetričnom geometrijom koja je opterećena nesimetrično po osi. Za analizu s pomoću ove mreže uobičajeno je moguće koristiti grublju mrežu konačnih elemenata [6]. Međutim, ako postoje komponente opterećenja koje su značajno nesimetrične po osi onda se preporučuje korištenje gušće mreže konačnih elemenata ili korištenje standardnih elemenata kontinuuma [6].

3.1.3.5. Osnosimetrični elementi

Ovi elementi uobičajeno se koriste kod modeliranja osno simetričnih tijela koja su opterećena simetrično po središnjoj osi. Tijelo odnosno model se izrađuje funkcijom *revolve* koja rotira ravninu u kojoj je nacrtano pola presjeka tijela i zatim rotacijom oko središnje osi se dobije 3D osno simetrični model. Takav model moguće je opisati polarnim koordinatama s r , z i θ osima. Slika 16 prikazuje primjer presjeka modela pod kutom od $\theta = 0$ te s njegovim radijalnim i aksijalnim koordinatama. Kada je kut $\theta = 0$ onda se ravnina presjeka poklapa s globalnim Kartezijevim koordinatnim sustavom odnosno isto je kao presjek u X - Y ravnini.

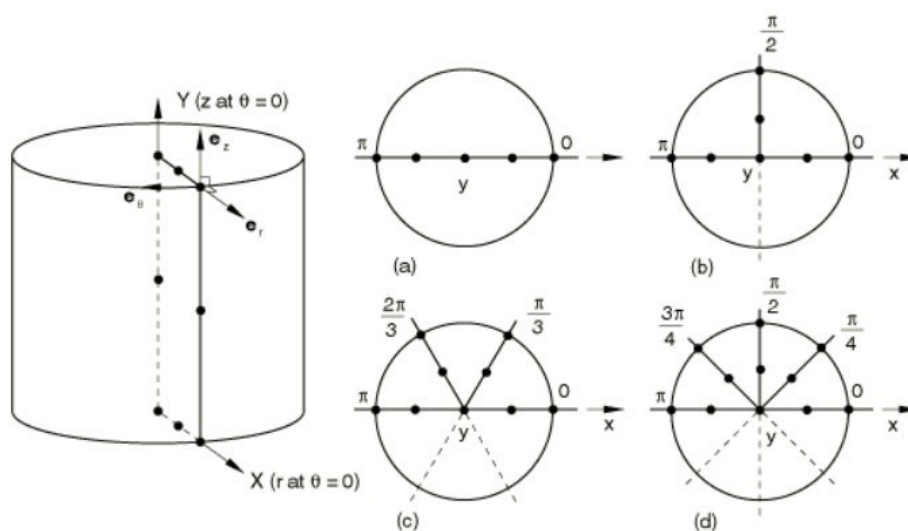


Slika 16 Presjek osno simetričnog modela s prikazom konačnog elementa na presjeku [6]

Čvorovi na Slika 16 označeni su s oznakama i, j, k i l i oni se nazivaju čvorni krugovi, pa volumen materijala vezan za konačni element predstavlja dio tijela nastao funkcijom *revolve*. Prema tome se opterećenje u čvorovima odnosno reaktivne sile integriraju po radijusu krivulje u obliku prstena. Nadalje, *Abaqus* ne definira rubne uvjete automatski na čvorovima koji su postavljeni na osi simetrije modela nego se oni definiraju u modulu za opterećenja i rubne uvjete.

3.1.3.6. Osnosimetrični elementi s nelinearnim i nesimetričnim deformacijama

Ovi elementi su namijenjeni za analizu linearnih i nelinearnih konstrukcija koje su prvotno osno simetrične, ali podvrgnuti su nelinearnim i nesimetričnim po osi deformacijama. Ovaj tip konačnih elemenata moguće je jedino koristiti u sustavu *Abaqus/Standard*. Koriste standardnu izoparametrijsku interpolaciju u r - z ravnini cilindričnog koordinatnog sustava s Fourierovom interpolacijom. Detaljnije o ovom moguće je pronaći u [6]. Slika 17 prikazuje jedan primjer osnosimetričnog elementa s nelinearnim i nesimetričnim deformacijama koji ima četiri različita Fourierova načina interpolacije s obzirom na θ .



Slika 17 Prikaz osnosimetričnih elemenata s nelinearnim i nesimetričnim deformacijama s četiri Fourierova načina interpolacije: a) 1, b) 2, c) 3 i d) 4 [6]

4. OPTIMIRANJE KONSTRUKCIJA

Konstrukcije je moguće strukturalno optimirati s ciljem raspodjele materijala na način da se dobije optimalan oblik geometrije za zadano opterećenje. Optimalan oblik geometrije ovisi od slučaja do slučaja odnosno ovisi o kojoj se konstrukciji ili konstrukcijskom dijelu radi i na koji način je opterećen.

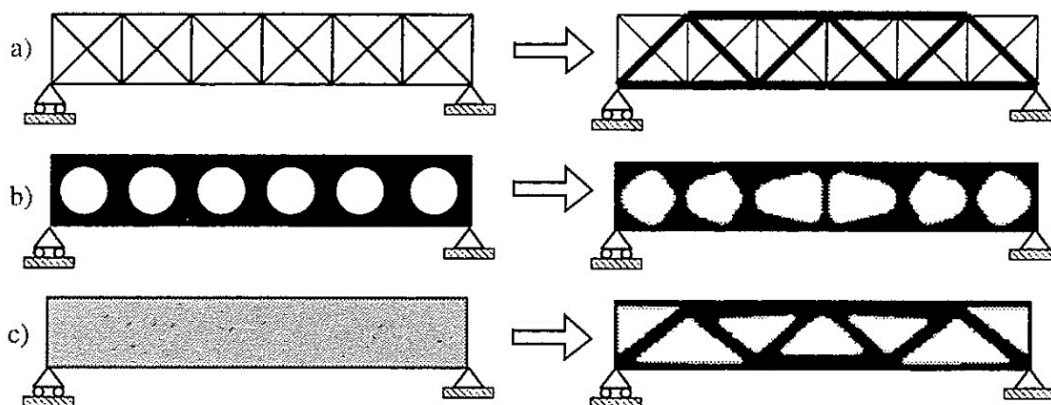
4.1. Strukturalna optimizacija (eng. *Structural optimization*)

Strukturalna optimizacije je proces određivanja optimalne distribucije materijala kako bi se sigurno prenosilo ili održalo zadano opterećenje [9]. To se postiže zadavanjem funkcije cilja optimizacije. Na primjer, funkcije ciljeva mogu biti smanjenje naprezanja, povećanje krutosti, smanjenje deformacija, promjena prirodne frekvencije i ostali slični ciljevi.

Postoje tri metode strukturalnog optimiranja:

- topološko optimiranje,
- optimiranje oblika,
- optimiranje dimenzija.

Svaka od njih rješava jedan od problema optimizacije i temelje se na metodi konačnih elemenata.

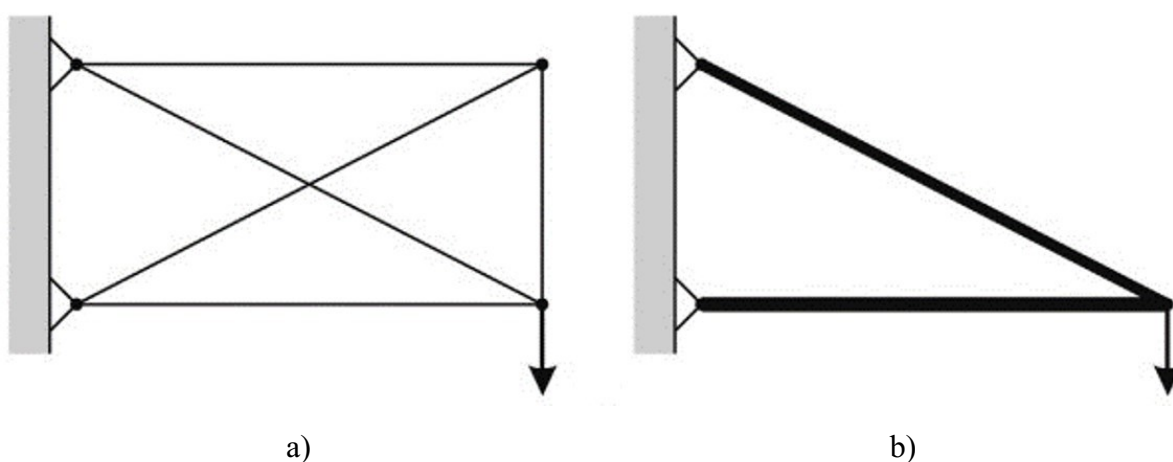


Slika 18 Tri metode strukturalnog optimiranja: a) optimiranje dimenzija, b) optimiranje oblika i c) topološko optimiranje [10]

Primjenu metoda prikazuje Slika 18 gdje je na lijevoj strani prikazan inicijalni problem i na desnoj strani rješenje problema.

4.1.1. Topološko optimiranje (eng. *Topology optimization*)

Topološko optimiranje je općenita forma strukturnog optimiranja [9]. Njome se određuje minimalna količina materijala za zadani način opterećenja. Time se može smanjiti težina dijelova što za posljedicu ima smanjene troškove proizvodnje. U diskretnim problemima gdje su primijenjeni npr., štapni elementi, topološka optimizacija postiže se tako da se presjek štapnog elementa bude jednak nuli. Taj slučaj je prikazan na Slika 19. Topologija za 2D elemente se može postići tako da debljina modela bude jednaka nuli. U 3D slučaju to se postiže tako da volumenske varijable odnosno varijable koje su definirani po jedinici volumena budu jednake nuli [9].



Slika 19 Topološki optimirana štapna konstrukcija: a) početna topologija i b) optimirana topologija konstrukcije [9]

Ovaj način optimiranja može pomoći ako konstruktor nije siguran kojeg oblika i veličine bi konstrukcija trebala biti. Postoje dvije glavne značajke topološke optimizacije prema [9]:

- elastično svojstvo materijala, kao funkcija gustoće, može varirati od mjesta do mjesta na modelu,
- materijal može biti trajno uklonjen iz konstrukcijskog rješenja.

Također, prema istoj literaturi metode topološke optimizacije mogu biti razvrstane u dvije kategorije i one su:

- metode kriterija optimalnosti,
- heurističke ili intuitivne metode.

Metode kriterija optimalnosti su indirektne metode optimizacije kojima je cilj zadovoljiti kriterije koji su vezani za ponašanje konstrukcije. Bazirani su na Kuhn-Tucker optimalnom

uvjetu [9]. Ovakve metode optimizacije su prikladne za probleme s velikim brojem varijabli i manjim brojem ograničenja [9]. Metode kriterija optimalnosti topologije su:

- homogenizacija,
- „čvrsti izotropni materijal s penalizacijom“ (eng: *Solid Isotropic Material with Penalization*, SIMP),
- *Level Set* metoda,
- Metoda rasta za štapne konstrukcije (eng. *Growth Method for Truss Structures*).

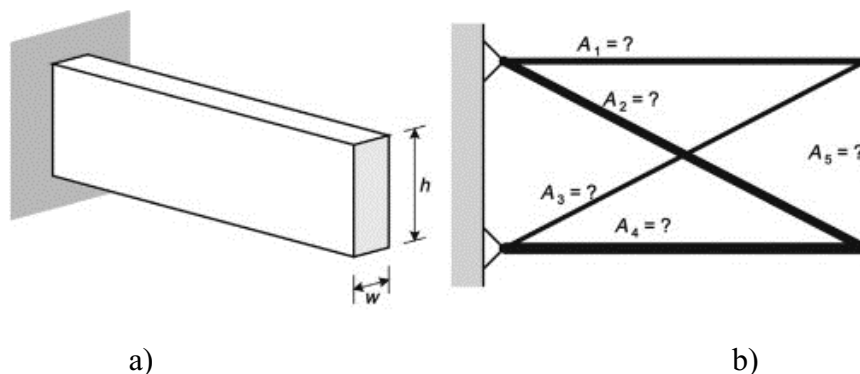
Druga kategorija su heurističke ili intuitivne metode i one su izvedene iz intuicije koja se dobije promatranjem inženjerskih procesa ili bioloških sustava. Takvim metodama nije moguće garantirati optimalnost, ali je moguće dobiti izvediva rješenja. Neke od takvih metoda prema [9] su:

- *Fully Stressed Design*
- Računalom podržana optimizacija (eng. *Computer-Aided Optimization*, CAO),
- *Soft Kill Option*
- *Evolutionary Structural Optimization* (ESO)
- *Bidirectional ESO* (BESO)
- *Sequential Element Rejection and Admission* (SERA)
- *Isolines/Isosurfaces Topology Design* (ITD)

Detaljnije o ovim metodama je moguće pronaći u [9] i ostalim radovima vezanih za tu temu.

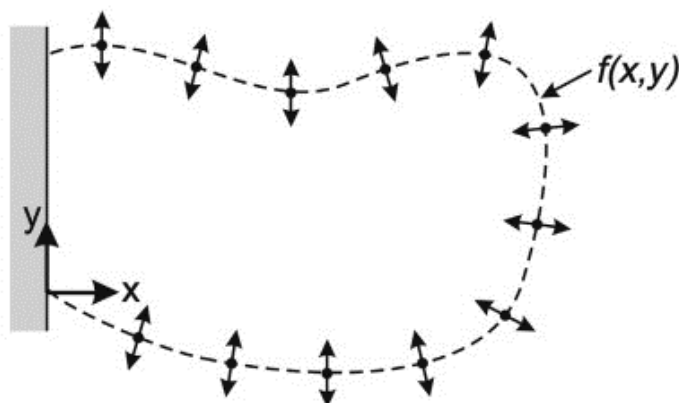
4.1.2. Optimiranje oblika (eng. *Shape optimization*)

Optimiranje oblika traži optimalan oblik konstrukcijskog dijela ovisno o željenoj varijabli koju je potrebno minimizirati kao što su na primjer naprezanja ili deformacije. U ovom radu ovaj način optimiranja će biti pogodan zato što je funkcija cilja smanjenje koncentracije naprezanja. U optimiranju oblika i optimiranju dimenzija moguće je manipulirati i oblikom i dimenzijama konstrukcije u obje metode strukturalne optimizacije.



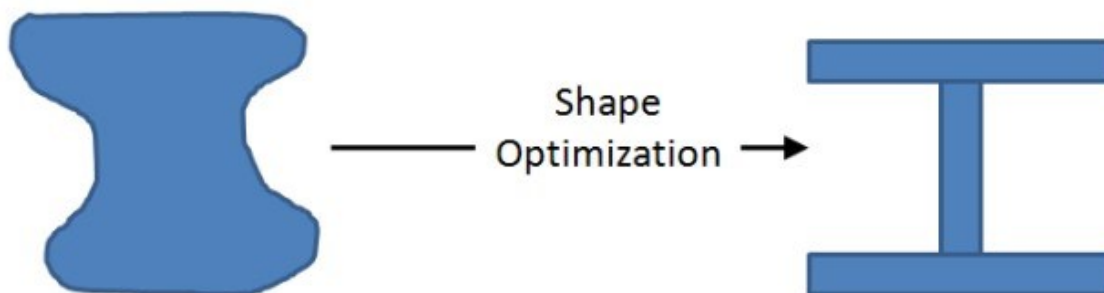
Slika 20 Primjeri konstrukcija gdje je moguće upotrijebiti optimiranje oblika: a) konzola s nepoznatim dimenzijama i b) štapna konstrukcija s nepoznati površinama presjeka [9]

Oblik ili kontura nekog dijela je nepoznanica u slučaju kada bi se koristila optimizacija oblika. Prikaz takvog problema je na Slika 21.



Slika 21 Nepoznata kontura konstrukcijskog dijela prikazana jednadžbom $f(x,y)$ [9]

Primjer jednog optimiranja oblika je prikazan na Slika 22 gdje je apstraktni presjek optimiziran u I-nosač.



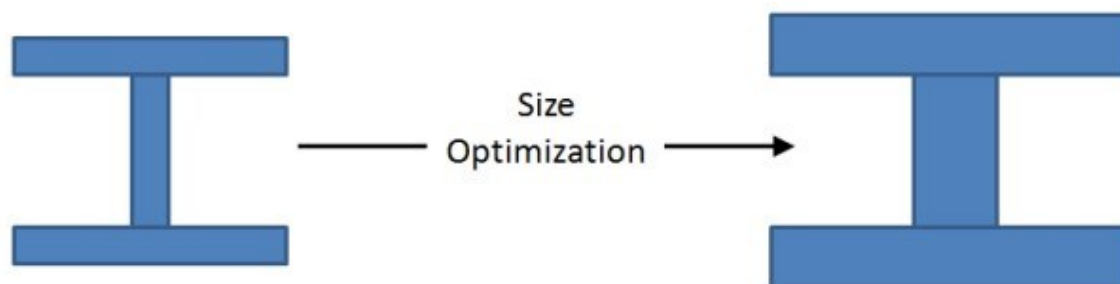
Slika 22 Primjer optimizacije oblika [11]

4.1.3. Optimiranje dimenzija (eng. size optimization)

Posljednji oblik optimiranja je optimiranje dimenzija. Cilj ovog optimiranja je na primjer pronaći optimalnu debljinu stijenke linearno-elastične ploče ili optimalan presjek opterećenog štapa [10]. Dva primjera ovog optimiranja su prikazani na Slika 20 a), gdje je konzolni nosač poznate duljine i položaja, ali nepoznatih dimenzija presjeka. Primjer na Slika 20 b) je rešetkasta konstrukcija gdje su opće dimenzije poznate, ali površine presjeka svakog štapa nisu.

Ovaj tip optimiranja može zadržati oblik i topologiju konstantom dok traži optimalan presjek.

Primjer toga prema [11] prikazan je na Slika 23.



Slika 23 Primjer optimizacije dimenzija [11]

4.1.4. Optimiranje u Abaqus-u (Abaqus Topology Optimization Module, ATOM)

Optimiranje u programskom paketu *Abaqus* sadrži sva tri spomenuta načina optimiranja. Oni su sadržani u modulu naziva ATOM. Topološka optimizacija u tom alatu započinje s početnim dizajnom, koji se pretpostavlja kao maksimalni fizički obuhvat komponente te određuje novu raspodjelu materijala mijenjanjem gustoće i krutosti elemenata u početnom dizajnu uz nastavak ispunjavanja uvjeta optimizacije. Optimizacija oblika započinje s modelom konačnih elemenata kojem je cilj minimizirati koncentracije naprezanja koristeći rezultate analize naprezanja. Koncentraciju naprezanja smanjuje tako da promjeni geometriju konstrukcije.

4.2. Opći matematički oblik problema strukturne optimizacije

Postoje dvije funkcije koje su uvijek prisutne u strukturnoj optimizaciji prema [13]:

- ciljna funkcija, f ,
- *design* varijabla, x ,
- varijabla stanja y .

Ciljna funkcija se koristi za klasifikaciju dizajna konstrukcije. Za svaki moguću dizajn funkcija f vraća broj koji označava koliko je on dobar. Najčešće se odabire funkcija f tako da ona predstavlja bolji rezultat, ako je manjeg iznosa. To se onda naziva problemom smanjivanja (eng. . *minimization problem*). Funkciji f može se definirati težina za varijable kao što su naprezanja ili cijena proizvodnje.

Design varijabla je funkcija ili vektor koji opisuje smjer dizajna i koji se može mijenjati tokom procesa optimizacije. Ona može predstavljati geometriju ili odabir materijala. Ako ona predstavlja geometriju onda ona može biti vezana za interpolaciju oblika ili površinu tijela.

Varijabla stanja je funkcija ili vektor za zadanu konstrukciju i *design* varijable koja predstavlja odgovor strukture. Za mehaničku konstrukciju taj odziv može biti deformacije, naprezanja, pomaci ili sile.

U općem slučaju forma strukturne optimizacije prema [13] je sljedeća:

$$(\text{SO}) \begin{cases} \text{smanji } f(x, y) \text{ u odnosu na } x \text{ i } y \\ \text{podložno } \begin{cases} \text{ograničenjima na } y \\ \text{ograničenjima na } x \\ \text{jednakosti ograničenja} \end{cases} \end{cases}$$

Primjer problema s nekoliko ciljnih funkcija je optimizacijski problem s višestrukim kriterijima ili vektorska optimizacija u kojem se želi smanjiti vrijednosti ciljnih funkcija.

$$\text{minimize}(f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_l(x, y)), \quad (1)$$

gdje je l broj ciljnih funkcija. Funkcija *minimize* za više ciljnih funkcija nije standardni problem optimiranja jer nisu sve ciljne funkcije najmanje za iste vrijednosti x i y . Međutim, onda je potrebno postići Paretovu optimalnost. Dizajn je Pareto optimalan ako ne postoji niti jedan drugi dizajn koji zadovoljava sve ciljne funkcije bolje od trenutne. Matematički je to zapisano na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f_i(x, y) &\leq f_i(x^*, y^*), \quad \text{za sve } i = 1, \dots, l, \\ f_i(x, y) &< f_i(x^*, y^*), \quad \text{za barem jedan } i \in \{1, \dots, l\}. \end{aligned}$$

Najčešći način za postizanje Paretove optimalnosti je na način da se formira skalarna ciljna funkcija definirana sljedećim izrazom:

$$\sum_{i=1}^l w_i f_i(x, y), \quad (2)$$

gdje je w_i veći od nula i naziva se težinski faktor. Suma svih tih faktora je jednaka jedinici. Promjenom težinskih faktora dobiva se različit Paretov optimum. Postoje tri tipa ograničenja u strukturnoj optimizacija prema [13] su:

- ograničenje ponašanja,
- *design* ograničenje,
- kombinacija ova dva ograničenja.

Ograničenja ponašanja su ograničenja na varijablu stanja y . Ona je inače zapisana u formi $g(y)$ gdje je g funkcija na primjer pomaka u određenom smjeru. *Design* ograničenje je ograničenje na varijablu x . Zadnje ograničenje je kombinacije ta dva. U linearnom diskretiziranom problemu ravnotežno ograničenje je matematički zapisano u obliku:

$$\mathbf{K}(x) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}(x), \quad (3)$$

gdje je $\mathbf{K}(x)$ matrica krutosti, \mathbf{u} matrica vektora pomaka i $\mathbf{F}(x)$ matrica vektora sila. Matica vektora pomaka igra ulogu varijabla stanja y . U problemu kontinuuma ravnotežno ograničenje će biti parcijalna diferencijalna jednačba. U dinamičkom problemu ravnotežno ograničenje je dinamičko ravnotežno ograničenje. Općenitiji izraz za tu varijablu je problem stanja (eng. *state problem*). U strukturnom optimiranju x i y su nezavisne varijable. Problem ravnoteže rješava se istovremeno s problemom optimiranja. Česta situacija je da problem stanja jedinstveno definira varijablu stanja y za zadani x . Detaljnije opisano na tu temu može se pronaći u [13].

5. ANALITIČKI PRORAČUN VRATILA

Analitički proračun vratila napravljen je za izlazno vratilo elektromotora s reduktorom. Prvo su definirani ulazni parametri potrebni za proračun vratila. Nakon toga je sa zadanim parametrima napravljen proračun po fazama definiranim u 2.5.

5.1. Definiranje ulaznih parametara

Zadani parametri prikazani su u Tablica 1.

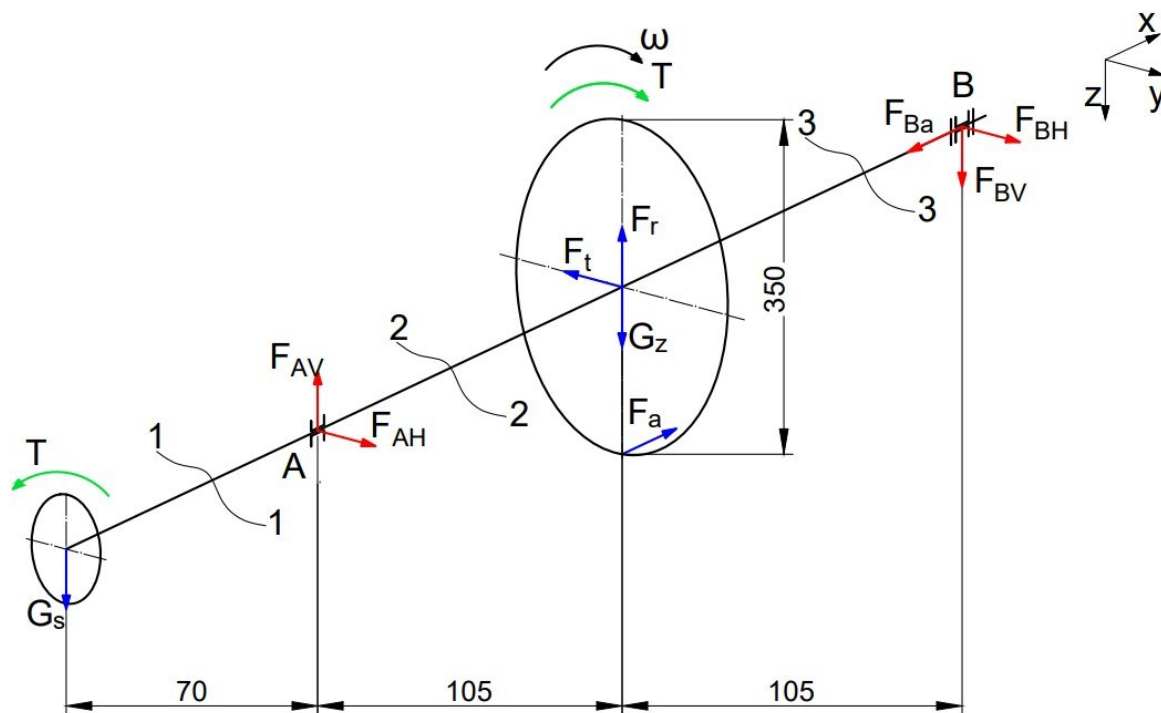
Tablica 1 Karakteristične veličine potrebne za proračun

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Snaga elektromotora	P	2200 W
Ulazna brzina elektromotora	n_1	1500 min ⁻¹
Izlazna brzina elektromotora	n_2	200 min ⁻¹
Prijenosni omjer	i	7,5
Promjer pogonskog elementa	d_{pe}	350 mm
Težina pogonskog elementa	G_z	300 N
Težina gonjenog elementa	G_s	100 N
Materijal vratila	E295	/
Obrada vratila	Fino tokareno	$R_a \leq 1,6 \mu\text{m}$
		$R_z \leq 6,3 \mu\text{m}$
		$R_{\text{max}} \leq 10 \mu\text{m}$
Obrada rukavca	Fino brušeno	$R_a \leq 0,4 \mu\text{m}$
		$R_z \leq 1,6 \mu\text{m}$
		$R_{\text{max}} \leq 2,5 \mu\text{m}$
Potrebna sigurnost	S_{potr}	1,5
Pogonski faktor	K_A	1
Momenti inercije mase G_s	J_s	0,013 kg · m ²
Torzijsko opterećenje	Dinamičko naizmjenično	/

Korištenjem zadanih parametara vratila može se započeti približan proračun kreiranjem skice vratila. Na skici vratila nalazite se duljine potrebne za proračun zajedno sa silama koje opterećuju vratilo.

5.2. Određivanje opterećenja na vratilu

Zadana je skica opterećenog vratila sa željenim dimenzijama na Slika 24.



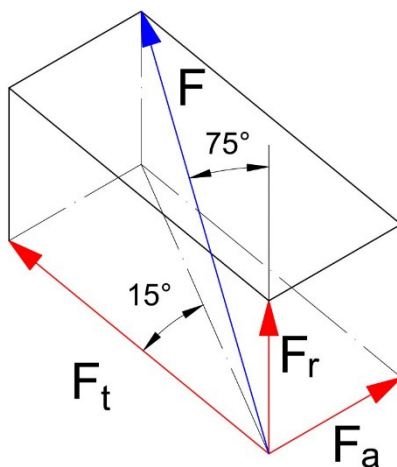
Slika 24 Skica opterećenja vratila

Zadane su težine elemenata koje iznose:

$$G_s = 100 \text{ N} - \text{težina na prepustu}, \quad (4)$$

$$G_z = 300 \text{ N} - \text{težina prijenosnog elementa}. \quad (5)$$

Također, zadana je sila F u prostoru koja djeluje na prijenosnom elementu prema Slika 25.



Slika 25 Prostorni vektor sile F i njezine komponente

Sa Slika 24 je moguće odrediti tangencijalnu silu koja djeluje na promjeru d_{pe} , zatim iz nje dobiti ostale komponente sile F prema Slika 25:

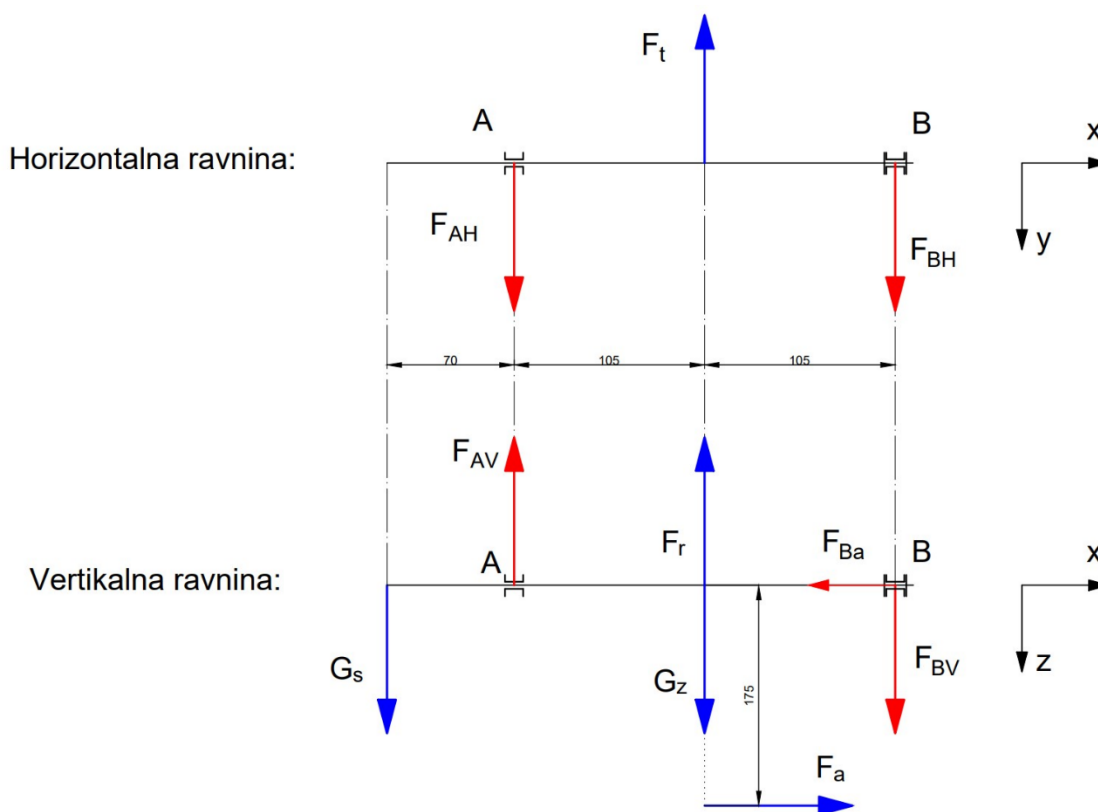
$$F_t = \frac{T}{d_{pe}} = 600 \text{ N}, \quad (6)$$

$$F_t = F \cdot \sin 75 \cos 15 \rightarrow F = \frac{F_t}{\sin 75 \cos 15} = 645 \text{ N}, \quad (7)$$

$$F_r = F \cdot \cos 75 = 165 \text{ N}, \quad (8)$$

$$F_a = F \cdot \sin 75 \cdot \sin 15 = 160 \text{ N}. \quad (9)$$

Poznavanjem veličina izračunatih u jednadžbama od (6) do (9) moguće je odrediti reakcije u osloncima.



Slika 26 Horizontalna i vertikalna ravnina opterećenja vratila

Reakcije u osloncima A i B određuju se korištenjem jednadžbi ravnoteže, prvo u horizontalnoj ravnini:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-F_t \cdot 105 + F_{BH} \cdot (105 + 105) = 0, \quad (10)$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-F_t \cdot 105 + F_{AH} \cdot (105 + 105) = 0. \quad (11)$$

Sređivanjem jednadžbi (10) i (11), zatim uvrštavanjem vrijednosti dobiju se reakcijske sile u horizontalnoj ravnini.

$$F_{AH} \cong 300 \text{ N}, \quad (12)$$

$$F_{BH} = F_{AH} \cong 300 \text{ N}. \quad (13)$$

Istim postupkom određuju se reakcije u vertikalnoj ravnini.

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$G_s \cdot 70 + F_a \cdot 175 + F_r \cdot 105 - F_{BV} \cdot (105 + 105) = 0, \quad (14)$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$G_s \cdot (70 + 105 + 105) + F_a \cdot 175 - F_{AV} \cdot (105 + 105) - F_r \cdot 105 + G_z \cdot 105 = 0, \quad (15)$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$-F_{Ba} + F_a = 0. \quad (16)$$

Kao i u horizontalnoj ravnini, sređivanjem jednadžbi (14) i (15), zatim uvrštavanjem vrijednosti dobiju se reakcijske sile u vertikalnoj ravnini.

$$F_{AV} \cong 335 \text{ N}, \quad (17)$$

$$F_{BV} \cong 100 \text{ N}, \quad (18)$$

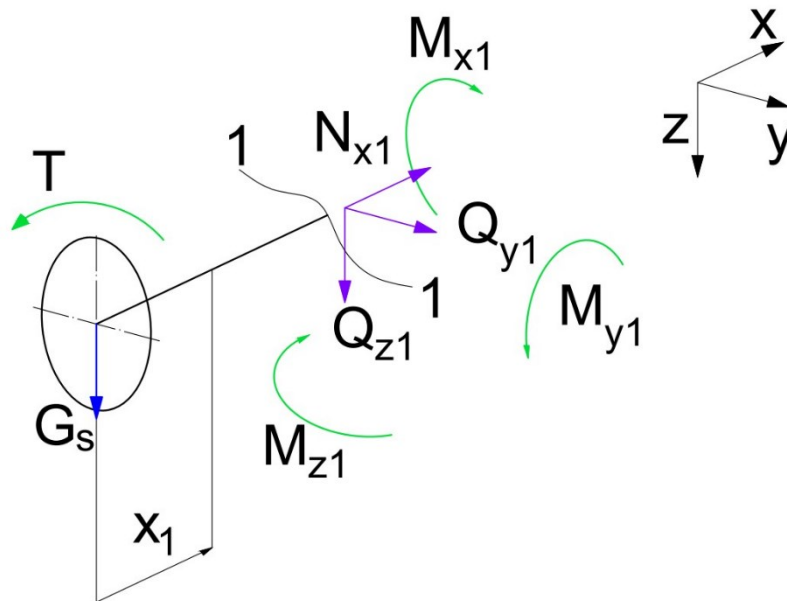
$$F_{Ba} = 160 \text{ N}. \quad (19)$$

Radikalne sile u osloncima iznose:

$$F_{Ar} = \sqrt{F_{AV}^2 + F_{AH}^2} \cong 450 \text{ N}, \quad (20)$$

$$F_{Br} = \sqrt{F_{BV}^2 + F_{BH}^2} \cong 320 \text{ N}. \quad (21)$$

Dalje je moguće proračunati dimenzije idealnog oblika vratila. Prije toga, potrebno je odrediti opterećenja po presjecima 1, 2 i 3 sa Slika 24.



Slika 27 Presjek 1

Presjek 1 ($0 \leq x_1 \leq 70$):

$$N_{x1} = 0 \text{ N}, \quad (22)$$

$$Q_{y1} = 0 \text{ N}, \quad (23)$$

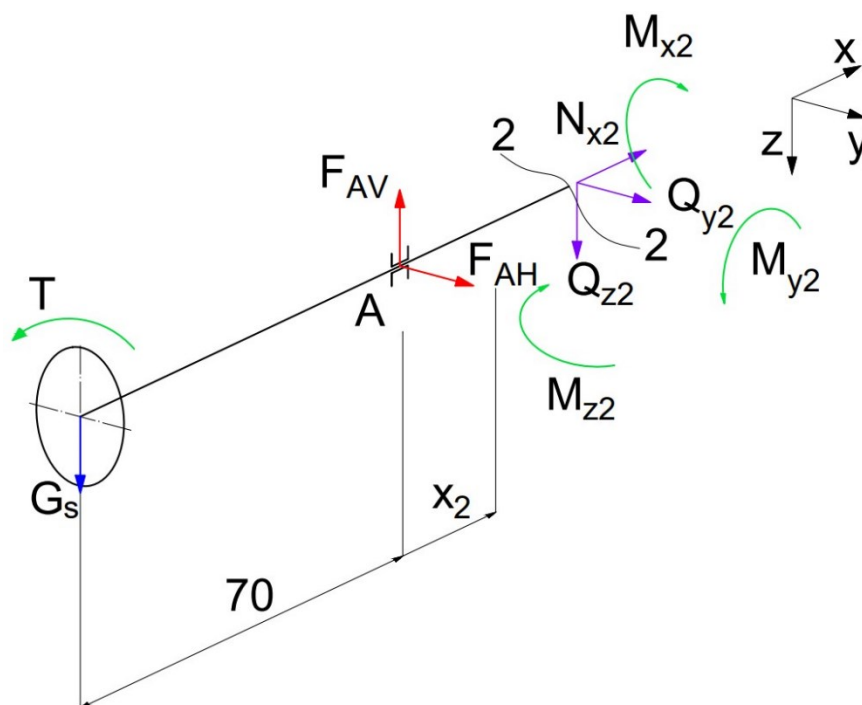
$$Q_{z1} = -G_s = -100 \text{ N}, \quad (24)$$

$$M_{x1} = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (25)$$

$$M_{y1} = -G_s \cdot x_1 = -100 \cdot x_1, \quad (26)$$

$$M_{z1} = 0 \text{ Nmm}. \quad (27)$$

Nakon određivanja unutarnjih sila i momenata na pozitivnom presjeku 1, na isti način se određuju unutarnje sile i momente na pozitivnom presjeku 2.



Slika 28 Presjek 2

Presjek 2 ($0 \leq x_2 \leq 105$):

$$N_{x2} = 0 \text{ N}, \quad (28)$$

$$Q_{y2} = -F_{AH} = -300 \text{ N}, \quad (29)$$

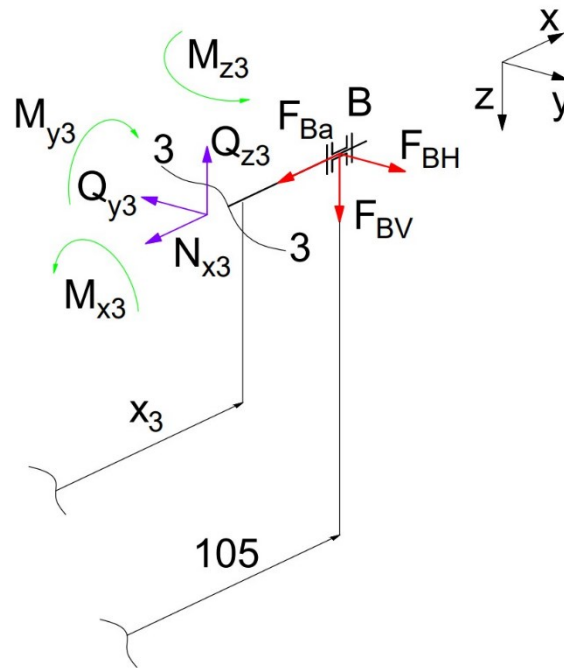
$$Q_{z2} = -G_s + F_{AV} = -100 + 335 = 235 \text{ N}, \quad (30)$$

$$M_{x2} = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (31)$$

$$M_{y2} = F_{AV} \cdot x_2 - G_s \cdot (x_2 + 70) = 335 \cdot x_2 - 100 \cdot (x_2 + 70), \quad (32)$$

$$M_{z2} = F_{AH} \cdot x_2 = 300 \cdot x_2. \quad (33)$$

Još je potrebno odrediti unutarnje sile i momente na presjeku 3.



Slika 29 Presjek 3

Presjek 3 ($0 \leq x_3 \leq 105$):

$$N_{x3} = -F_{Ba} = -160 \text{ N}, \quad (34)$$

$$Q_{y3} = F_{BH} = 300 \text{ N}, \quad (35)$$

$$Q_{z3} = F_{BV} = 100 \text{ N}, \quad (36)$$

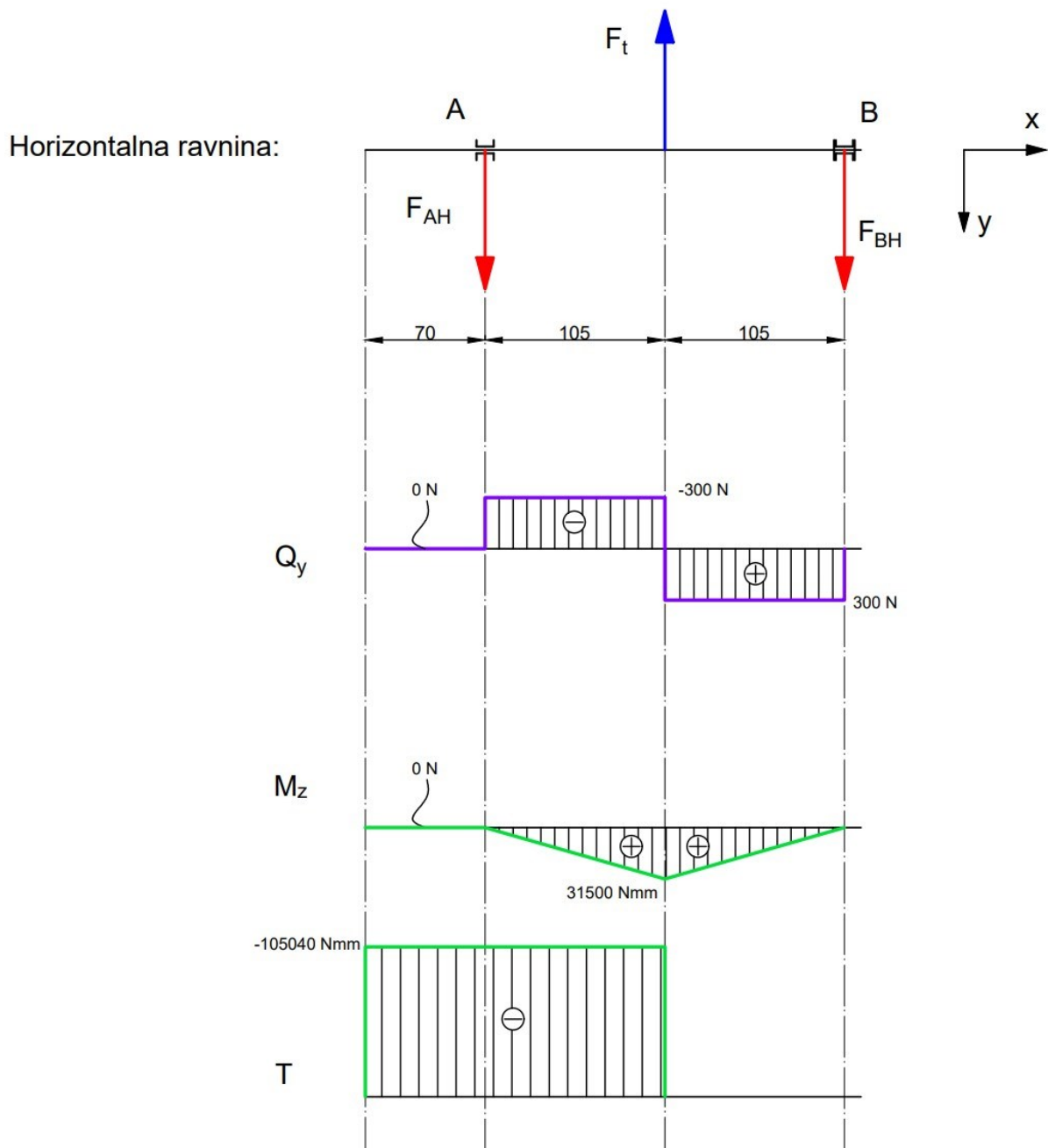
$$M_{x3} = 0 \text{ Nmm}, \quad (37)$$

$$M_{y3} = F_{BV} \cdot (105 - x_3) = -100 \cdot (105 - x_3), \quad (38)$$

$$M_{z3} = 300 \cdot (105 - x_3). \quad (39)$$

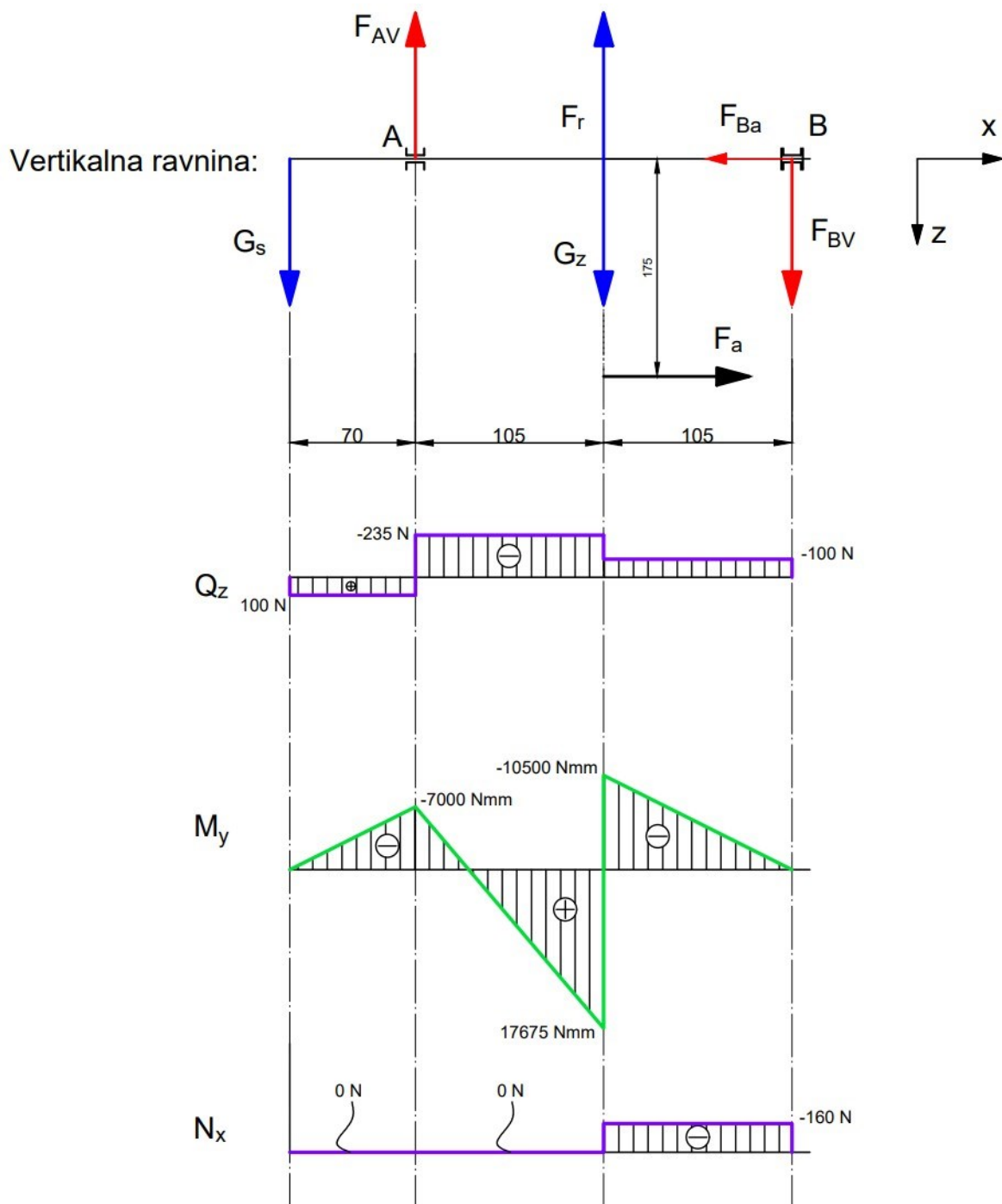
S određenim svim unutarnjim silama i momentima moguće je skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila i momenata po duljini vratila.

Dijagram poprečne sile i momenta savijanja u horizontalnoj ravnini nacrtan je na Slika 30.



Slika 30 Dijagram poprečne sile Q_y , momenta savijanja M_z i momenta torzije

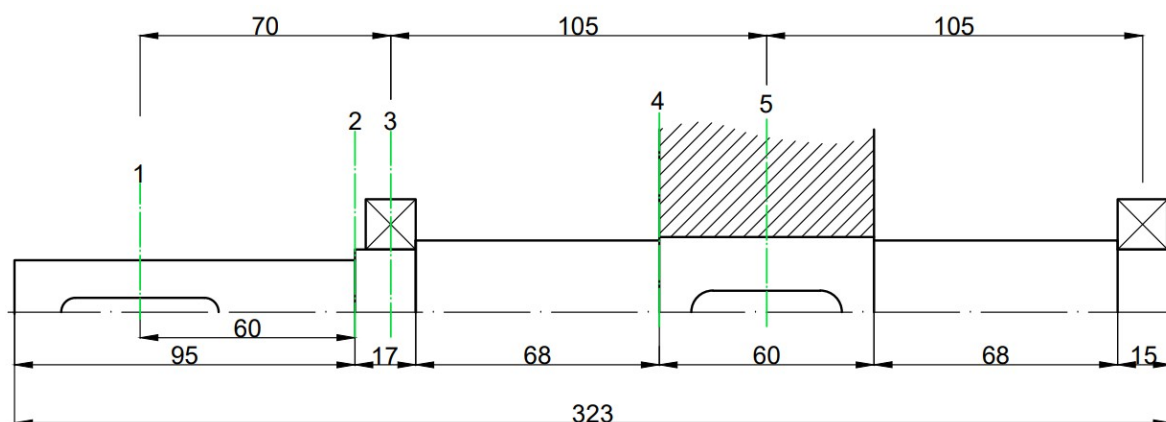
Dijagram poprečne sile i momenta savijanja u vertikalnoj ravnini nacrtan je na Slika 31.



Slika 31 Dijagram poprečne sile Q_z , momenta savijanja M_y i uzdužne sile

5.3. Određivanje naprezanja promjera idealnog vratila

Pretpostavljena izvedba vratila s obzirom na zadane dimenzije sa Slika 24 je dana na Slika 32. Promjeri idealnog vratila odrediti će se za 5 kritičnih presjeka.



Slika 32 Pretpostavljena izvedba vratila

Zbog toga što je uvijanje dominantno opterećenje na vratilu, uzeti su u obzir samo presjeci koji opterećeni na torziju i savijanje. Dimenzije presjeka koji nisu uzeti u obzir, bit će zrcaljeni sa suprotne strane. Ako presjeci opterećeni torzijski zadovolje uvjete čvrstoće, onda će presjeci koji su opterećeni samo savijanjem također zadovoljiti. Pošto je u ovom radu predmet razmatranja optimiranje, manje detalja će biti posvećeno konstrukcijskoj izvedbi samog vratila. Za proračun potrebne su nam sljedeće vrijednosti čvrstoće materijala E295 koji je odabran za izradu vratila:

$$\sigma_{fDN} = 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{- trajna dinamička čvrstoća za čisto naizmjenično promjenljivo naprezanje na savijanje,} \quad (40)$$

$$\tau_{tDN} = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{-trajna dinamička čvrstoća za čisto naizmjenično promjenljivo naprezanje na uvijanje,} \quad (41)$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{fDN}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tDN}} = 0,9897 \quad \text{-faktor čvrstoće materijala.} \quad (42)$$

Prema Haberhaueru i Bodensteinu za vratila vrijedi izraz da dopušteno naprezanje:

$$\sigma_{f,dop} \cong \frac{\sigma_{fDN}}{4} = \frac{240}{4} = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (43)$$

5.4. Određivanje orijentacijskih dimenzija na vratilu

Orijentacijski promjeri određuju se na način da se pretpostavi da je u svakom presjeku jednako naprezanje i iznosi $\sigma_{f,dop} = 60 \frac{N}{mm^2}$.

5.4.1. Presjek 1 – opterećen samo na uvijanje

Ovaj presjek opterećen je na uvijanje i orijentacijski promjer je moguće izračunati pomoću sljedećeg izraza:

$$d_1^* = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red1}}{\sigma_{f,dop}}} = 24,66 \text{ mm}, \quad (44)$$

$$M_{f1} = M_{y1}(0) = 0 \text{ Nmm}, \quad (45)$$

$$T_1 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (46)$$

$$M_{red1} = \sqrt{M_{f1}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_1)^2} = 90036 \text{ Nmm}. \quad (47)$$

5.4.2. Presjek 2 – opterećen na uvijanje i savijanje

Ovaj presjek opterećen je na uvijanje i savijanje te se orijentacijski promjer izračunava na isti način kao na presjeku 1 pomoću izraza:

$$d_2^* = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red2}}{\sigma_{f,dop}}} = 24,68 \text{ mm}, \quad (48)$$

$$M_{f2} = M_{y1}(60) = 6000 \text{ Nmm}, \quad (49)$$

$$T_2 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (50)$$

$$M_{red2} = \sqrt{M_{f2}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_2)^2} = 90236 \text{ Nmm}. \quad (51)$$

5.4.3. Presjek 3 - opterećen na uvijanje i savijanje

Ovaj presjek je također opterećen na uvijanje i savijanje te se orijentacijski promjer izračunava kao i do sada s izrazima:

$$d_3^* = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red3}}{\sigma_{f,dop}}} = 24,69 \text{ mm}, \quad (52)$$

$$M_{f3} = M_{y2}(70) = 7000 \text{ Nmm}, \quad (53)$$

$$T_3 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (54)$$

$$M_{red3} = \sqrt{M_{f3}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_3)^2} = 90308 \text{ Nmm}. \quad (55)$$

5.4.4. Presjek 4 – opterećen na uvijanje i savijanje

Ovaj presjek je također opterećen na uvijanje i savijanje te se orijentacijski promjer izračunava kao i do sada s izrazima:

$$d_4^* = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red4}}{\sigma_{f,dop}}} = 24,96 \text{ mm}, \quad (56)$$

$$M_{f4} = \sqrt{M_{y2}(75)^2 + M_{z2}(75)^2} = 24883 \text{ Nmm}, \quad (57)$$

$$T_4 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (58)$$

$$M_{red4} = \sqrt{M_{f4}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_4)^2} = 93406 \text{ Nmm}. \quad (59)$$

5.4.5. Presjek 5 – opterećen na uvijanje i savijanje

Ovaj presjek je također opterećen na uvijanje i savijanje te se orijentacijski promjer izračunava kao i do sada s izrazima:

$$d_5^* = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red5}}{\sigma_{f,dop}}} = 25,28 \text{ mm}, \quad (60)$$

$$M_{f5} = \sqrt{M_{y2}(105)^2 + M_{z2}(105)^2} = 36120 \text{ Nmm}, \quad (61)$$

$$T_4 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (62)$$

$$M_{red5} = \sqrt{M_{f4}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_4)^2} = 97006 \text{ Nmm}. \quad (63)$$

5.5. Odabir izvedbenih dimenzija vratila

Za prijenos snage koriste se pera zbog čega je potrebno povećati promjere na mjestima gdje se dovodi odnosno odvodi snaga. Provjera će biti napravljena za promjer d_1^* i nakon toga za d_5^* . Za promjer $d_1^* = 24,66 \text{ mm}$ vrijedi raspon dimenzija promjera iz [14] od 22)...30 i dimenzije tog pera su:

Tablica 2 Dimenzije pera na promjeru d_1

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Dubina na glavini za pera	t_1	4,1 mm
Širina pera	b	8 mm
Visina pera	h	7 mm

Minimalan potreban promjer je:

$$d_{1p} = d_1^* + t_1 = 28,76 \text{ mm.} \quad (64)$$

Dobiveni promjer s perom i dalje odgovara rasponu od 22)...30 zbog čega se može odabrati konačan promjer vratila unutar tog raspona. Odabran je promjer $d_1 = 30 \text{ mm}$.

Zbog ležaja odabran je sljedeći promjer stupnja vratila da je $d_2 = d_3 = 35 \text{ mm}$. Za ovaj promjer prema SKF kalkulatoru iz [15] odabran je jednostavni jednoredni kuglični ležaj 6007 koji ima dimenzije prikazane u Tablica 3.

Tablica 3 Karakteristike ležaja

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Unutarnji promjer	d	35 mm
Vanjski promjer	D	62 mm
Širina	B	14 mm
Minimalni promjer stupnja	d_a	min. 39,6 mm
Maksimalni radijus zaobljenja	r_a	max. 1 mm
Dinamička nosivost	C	16,8 kN
Statička nosivost	C_0	10,2 kN

Minimalni promjer za naslon ležaja je 39,6 mm zbog čega je sljedeći promjer stupanja odabran kao $d_4 = 40 \text{ mm}$. Na kraju je još potrebno povećati promjer za visinu pera na promjeru d_5 . Za njega promjer vrijedi isti raspon kao i za promjer d_1 .

Međutim, iz razloga što on mora biti veći od prethodnog stupnja odabran je veći promjer i on iznosi $d_5 = 42 \text{ mm}$. Za taj promjer odgovaraju dimenzije pera u rasponu promjera vratila od 38)...44 iz Tablica 4.

Tablica 4 Dimenzije pera na promjeru d_5

Naziv veličine	Oznaka	Vrijednost
Dubina na glavini za pera	t_1	4,9 mm
Širina pera	b	12 mm
Visina pera	h	9 mm

Konačan odabir promjera je:

$$d_1 = 30 \text{ mm}, \quad (65)$$

$$d_2 = d_3 = 35 \text{ mm}, \quad (66)$$

$$d_4 = 40 \text{ mm}, \quad (67)$$

$$d_5 = 42 \text{ mm}. \quad (68)$$

Još je nužno odrediti potrebne duljine pera na promjerima d_1 i d_5 .

Za d_1 uz vrijednosti za pera iz Tablica 2 i dopušteni tlak pera prema [2]:

$$p_{\text{dop}} = 70 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (69)$$

$$t = h - t_1 = 2,9 \text{ mm} \quad (70)$$

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{d_1} = 7003 \text{ N} \quad (71)$$

$$l_{t_1} \geq \frac{F_t}{t \cdot p_{\text{dop}}} = 34,49 \text{ mm} \rightarrow \text{Odabrano: } l_{t_1} = 36 \text{ mm} \quad (72)$$

Za d_5 uz vrijednosti za pera iz Tablica 4:

$$p_{\text{dop}} = 70 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (73)$$

$$t = h - t_1 = 3,1 \text{ mm} \quad (74)$$

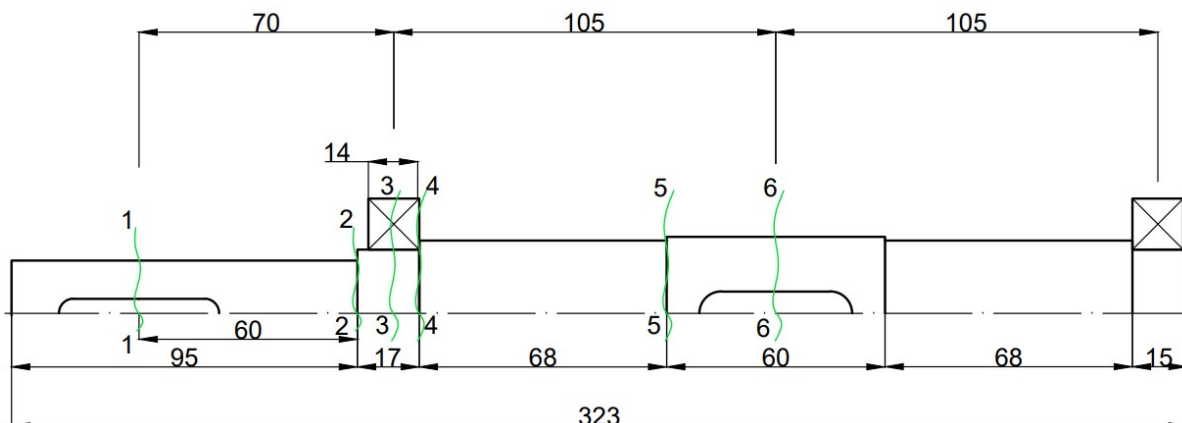
$$F_{t_5} = \frac{2 \cdot T_5}{d_5} = 5002 \text{ N} \quad (75)$$

$$l_{t_5} \geq \frac{F_t}{t \cdot p_{\text{dop}}} = 23,05 \text{ mm} \rightarrow \text{Odabrano: } l_{t_5} = 25 \text{ mm} \quad (76)$$

Iduće je potrebno napraviti kontrolni proračun vratila u kritičnim presjecima.

5.6. Određivanje i kontrola sigurnosti u kritičnim presjecima

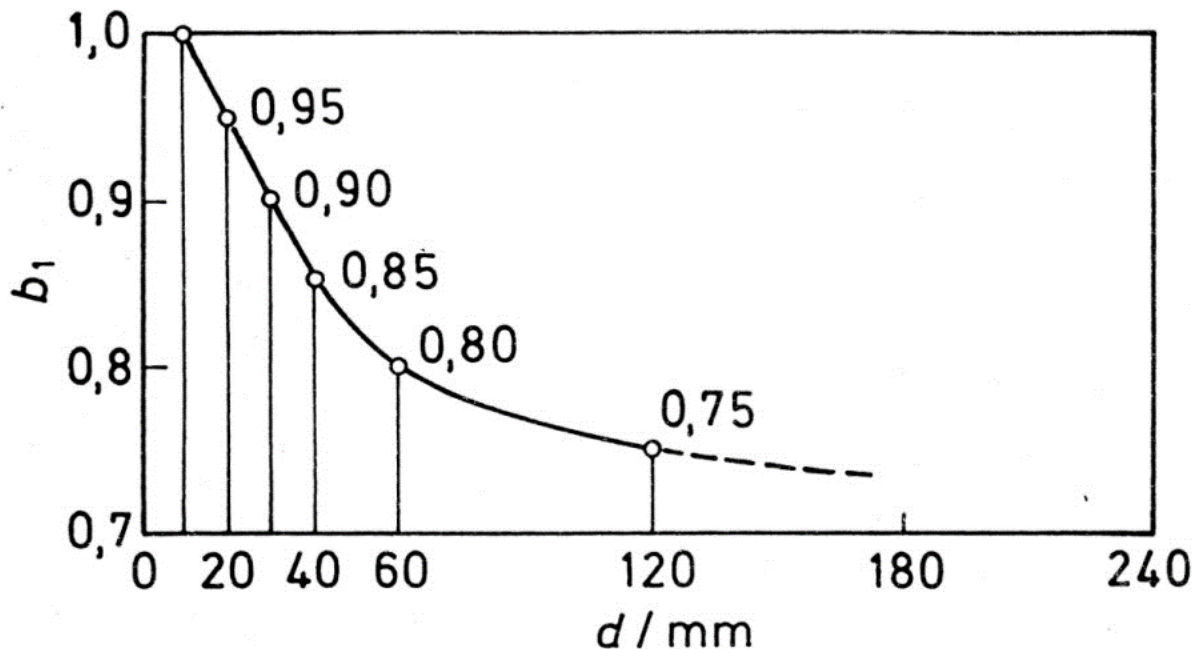
Napraviti ćemo provjeru na šest kritičnih presjeka na vratilu. Oni su označeni na Slika 33.



Slika 33 Izvedba vratila

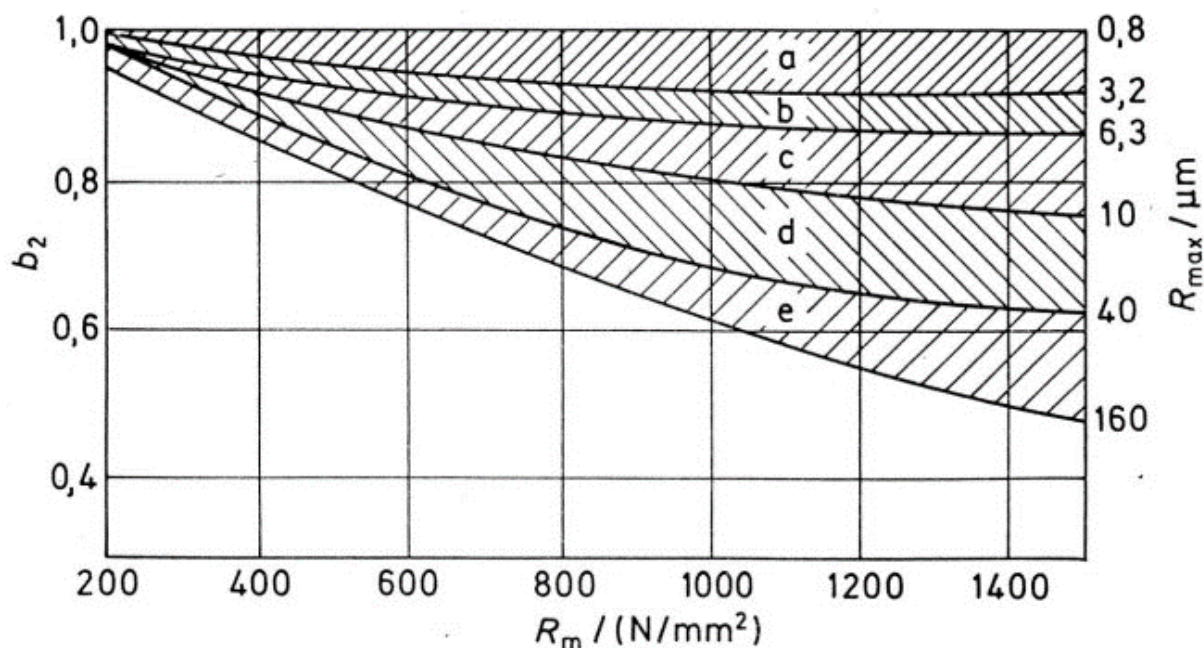
Za određivanje naprezanja na presjeci potrebni su faktori koji uzimaju razne utjecaje u obzir, kao što je utjecaj zreznog djelovanja s manjeg na veći stupanj ili faktor zreznog djelovanja na mjestima pera i ležaja i ostale slične faktore.

Jedan od tih faktora koji utječu na sigurnost vratila je faktor veličine strojnog dijela koji se određuje očitavanjem vrijednosti b_1 u ovisnosti o promjeru s dijagrama na Slika 34.



Slika 34 Faktor veličine strojnog dijela kod savijanja i uvijanja [16]

Drugo faktor je faktor kvalitete obrade površine vratila. On se također očitava s dijagrama u ovisnosti o vlačnoj čvrstoći materijala. U ovom slučaju vlačna čvrstoća iznosi $600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

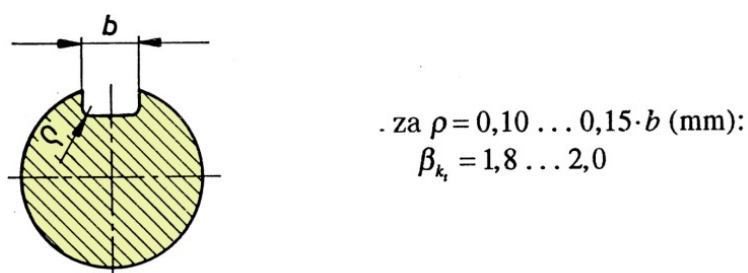


Slika 35 Faktor kvalitete obrade površine [16]

Za svaki presjek biti će potrebno očitati vrijednosti ova dva faktora.

5.6.1. Presjek 1

Na presjeku 1 nalazi se pero za koje se uzima faktor zareznog djelovanja. On je u ovom slučaju opterećen samo na uvijanje, zbog čega je potrebno uzeti u obzir samo faktor zareznog djelovanja kod uvijanja vratila s utorom za pero. Očitava se prema naputku iz [16], kao što je prikazano na Slika 36.



Slika 36 Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja vratila s utorom za pero [16]

Odabrana je vrijednost faktora zareznog djelovanja za radijus zakrivljenosti $\rho = 0,8$ mm i to je $\beta_{kt} = 1,8$.

Na presjeku 1 vrijedi opterećenje presjeka:

$$M_{f1} = M_{y1}(0) = 0 \text{ Nmm}, \quad (77)$$

$$T_1 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (78)$$

$$M_{\text{red}1} = \sqrt{(M_{f1} \cdot \beta_{kf})^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_1 \cdot \beta_{kt})^2} = 162055 \text{ Nmm}, \quad (79)$$

gdje je još potreban moment otpora:

$$W_1 = \frac{d_1^3 \cdot \pi}{32} = 2651 \text{ mm}^3. \quad (80)$$

Na kraju je moguće izračunati naprezanje i sigurnost na presjeku:

$$\sigma_{\text{red}1} = \frac{M_{\text{red}1}}{W_1} = 61,14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (81)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 i faktor kvalitete obrade površine vratila b_2 iznose:

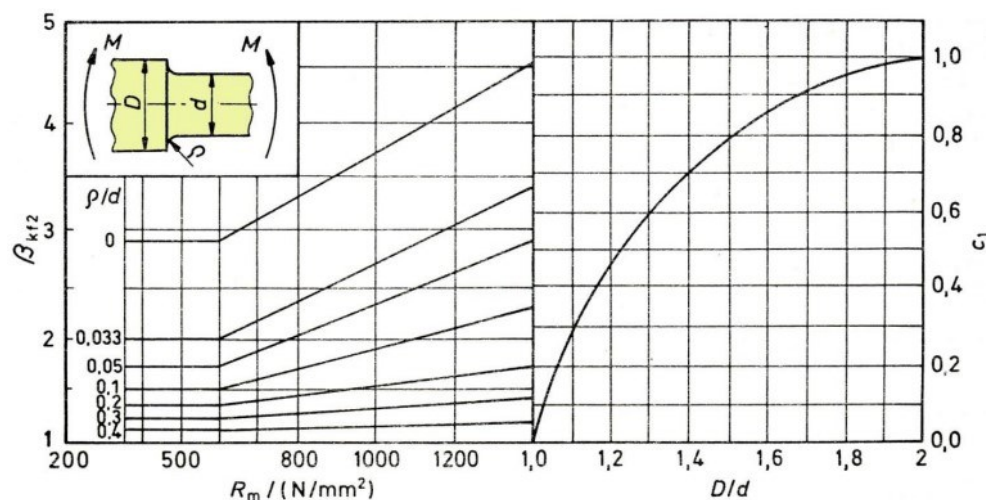
$$b_1(d_1 = 30) = 0,9, \quad (82)$$

$$b_2 \left(R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ i } R_{\text{max}} \leq 2,5 \mu\text{m} \right) = 0,95, \quad (83)$$

$$S_{\text{post}1} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{f,\text{dop}}}{\sigma_{\text{red}1}} = 3,36 > S_{\text{potr}} = 1,5 \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet.} \quad (84)$$

5.6.2. Presjek 2

Presjek 2 ima prijelaz s manjeg promjera na veći promjer zbog čega je potrebno odrediti faktore prema dijagramima sa Slika 37 i Slika 38.



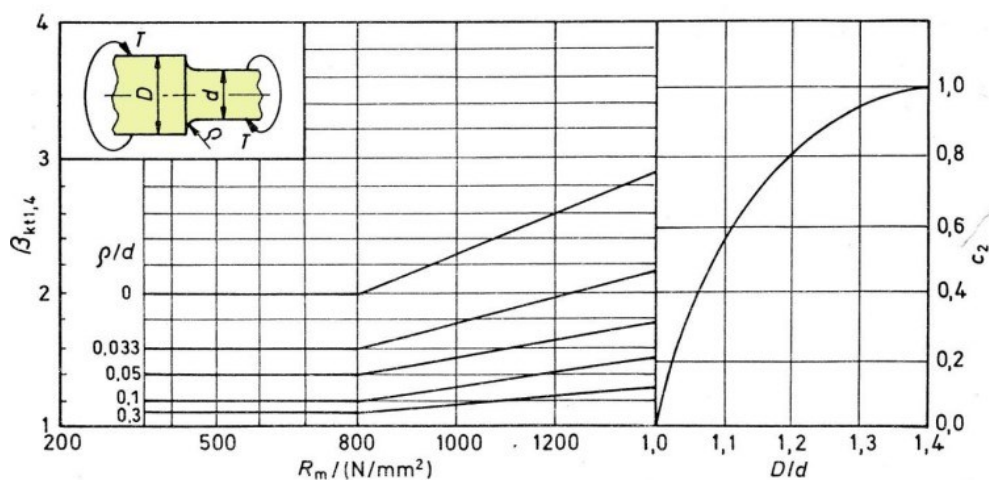
Slika 37 Faktor zareznog djelovanja kod savijanja i promjene promjera [16]

Iznos faktora zareznog djelovanja kod savijanja i promjene promjera za presjek 2 iznosi:

$$\frac{D}{d} = 1,17 \rightarrow c_1 \cong 0,4, \quad (85)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 600 \text{ i } \frac{\rho}{d} = 0,033 \right) = 2, \quad (86)$$

$$\beta_{kf} = 1 + c_1 \cdot (\beta_{kf2} - 1) = 1,4. \quad (87)$$



Slika 38 Faktor zareznog djelovanja kod uvijanja i promjene promjera [16]

Iznos faktora zareznog djelovanja kod uvijanja i promjene promjera za presjek 2 iznosi:

$$\frac{D}{d} = 1,17 \rightarrow c_2 \cong 0,78, \quad (88)$$

$$\beta_{kt1,4} \left(R_m = 600 \text{ i } \frac{\rho}{d} = 0,033 \right) = 1,6, \quad (89)$$

$$\beta_{kt} = 1 + c_2 \cdot (\beta_{kt1,4} - 1) = 1,47. \quad (90)$$

Na presjeku 2 vrijedi opterećenje presjeka:

$$M_{f2} = M_{y1}(60) = 6000 \text{ Nmm}, \quad (91)$$

$$T_2 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (92)$$

$$M_{red2} = \sqrt{(M_{f2} \cdot \beta_{kf})^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_2 \cdot \beta_{kt})^2} = 132611 \text{ Nmm}, \quad (93)$$

gdje je još potreban moment otpora:

$$W_2 = W_1 = \frac{d_1^3 \cdot \pi}{32} = 2651 \text{ mm}^3. \quad (94)$$

Na kraju je moguće izračunati naprezanje i sigurnost na presjeku:

$$\sigma_{\text{red}_2} = \frac{M_{\text{red}_2}}{W_2} = 50,02 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (95)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 i faktor kvalitete obrade površine vratila b_2 iznose:

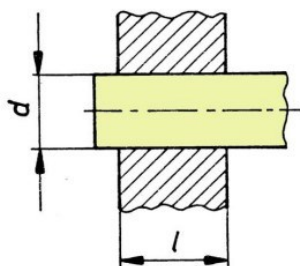
$$b_1(d_2 = 35) = 0,87, \quad (96)$$

$$b_2 \left(R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ i } R_{\text{max}} \leq 2,5 \mu\text{m} \right) = 0,95, \quad (97)$$

$$S_{\text{post}_2} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{\text{f,dop}}}{\sigma_{\text{red}_2}} = 4,02 > S_{\text{potr}} = 1,5 \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet.} \quad (98)$$

5.6.3. Presjek 3

Presjek 3 se nalazi na ležajnom mjestu zbog čega ćemo uzeti u obzir faktor zarezno djelovanja kod steznih spojeva prema Slika 39.



$$\beta_{k_f} = 2 \dots 2,5 \text{ za } l/d = 1,4$$

(snižanjem odnosa l/d snižuje se β_{k_f})

$$\beta_{k_t} = (0,6 \dots 0,7) \cdot \beta_{k_f}$$

Slika 39 Faktori zarezno djelovanja kod steznih spojeva [16]

Iznosi ovih faktora su:

$$\frac{l}{d} = \frac{B}{d_3} = 0,4 \rightarrow \text{omjer širine ležaja i unutarnjeg promjera ležaja,} \quad (99)$$

$$\beta_{kt} = 2, \quad (100)$$

$$\beta_{kt} = 0,6 \cdot \beta_{kt} = 1,2. \quad (101)$$

Zbog malog odnosa $\frac{l}{d}$ može se utjecaj zarezno djelovanja zanemariti u ovom slučaju.

Na presjeku 3 vrijedi opterećenje presjeka:

$$M_{f3} = M_{y2}(70) = 7000 \text{ Nmm}, \quad (102)$$

$$T_3 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (103)$$

$$M_{red3} = \sqrt{M_{f3}^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_3)^2} = 90308 \text{ Nmm}, \quad (104)$$

gdje je još potreban moment otpora:

$$W_3 = \frac{d_3^3 \cdot \pi}{32} = 4209 \text{ mm}^3. \quad (105)$$

Na kraju je moguće izračunati naprezanje i sigurnost na presjeku.

$$\sigma_{red_3} = \frac{M_{red3}}{W_3} = 21,45 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (106)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 i faktor kvalitete obrade površine vratila b_2 iznose:

$$b_1(d_3 = 35) = 0,87, \quad (107)$$

$$b_2 \left(R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ i } R_{max} \leq 2,5 \mu\text{m} \right) = 0,95, \quad (108)$$

$$S_{post_3} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{f,dop}}{\sigma_{red_2}} = 9,54 > S_{potr} = 1,5 \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet.} \quad (109)$$

5.6.4. Presjek 4

Presjek 4 je opet prijelaz odnosno stupanj vratila s manjeg na veći promjer. Faktore prijelaza s manjeg promjera na veći promjer određuje se prema dijagramima sa Slika 37 i Slika 38. Iznos faktora zareznog djelovanja kod savijanja i promjene promjera za presjek 4 iznosi:

$$\frac{D}{d} = 1,14 \rightarrow c_1 \cong 0,23, \quad (110)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 600 \text{ i } \frac{\rho}{d} = 0,029 \right) = 2,1, \quad (111)$$

$$\beta_{kf} = 1 + c_1 \cdot (\beta_{kf2} - 1) = 1,253. \quad (112)$$

Iznos faktora zareznog djelovanja kod uvijanja i promjene promjera za presjek 4 iznosi:

$$\frac{D}{d} = 1,14 \rightarrow c_2 \cong 0,74, \quad (113)$$

$$\beta_{kt1,4} \left(R_m = 600 \text{ i } \frac{\rho}{d} = 0,029 \right) = 1,7, \quad (114)$$

$$\beta_{kt} = 1 + c_2 \cdot (\beta_{kt1,4} - 1) = 1,518. \quad (115)$$

Na presjeku 4 vrijedi opterećenje presjeka:

$$M_{f4} = \sqrt{M_{y2}(7)^2 + M_{z2}(7)^2} = 5752 \text{ Nmm}, \quad (116)$$

$$T_4 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (117)$$

$$M_{red4} = \sqrt{(M_{f4} \cdot \beta_{kf})^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_4 \cdot \beta_{kt})^2} = 136856 \text{ Nmm}. \quad (118)$$

Potreban je još moment otpora za manji promjer:

$$W_4 = W_3 = 4209 \text{ mm}^3. \quad (119)$$

Na kraju je moguće izračunati naprezanje i sigurnost na presjeku.

$$\sigma_{red_4} = \frac{M_{red4}}{W_4} = 32,57 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (120)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 i faktor kvalitete obrade površine vratila b_2 iznose:

$$b_1(d_4 = 40) = 0,85, \quad (121)$$

$$b_2 \left(R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ i } R_{max} \leq 2,5 \mu\text{m} \right) = 0,95, \quad (122)$$

$$S_{post_4} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{f,dop}}{\sigma_{red_2}} = 5,95 > S_{potr} = 1,5 \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet}. \quad (123)$$

5.6.5. Presjek 5

Presjek 5 ima prijelaz s manjeg na veći promjer. Faktori prijelaza su ponovo određeni prema dijagramima sa Slika 37 i Slika 38. Iznos faktora zareznog djelovanja kod savijanja i promjene promjera za presjek 5 iznosi:

$$\frac{D}{d} = 1,05 \rightarrow c_1 \cong 0,15, \quad (124)$$

$$\beta_{kf2} \left(R_m = 600 \text{ i } \frac{\rho}{d} = 0,025 \right) = 2,3, \quad (125)$$

$$\beta_{kf} = 1 + c_1 \cdot (\beta_{kf2} - 1) = 1,195. \quad (126)$$

Iznos faktora zareznog djelovanja kod uvijanja i promjene promjera za presjek 5 iznosi:

$$\frac{D}{d} = 1,05 \rightarrow c_2 \cong 0,4, \quad (127)$$

$$\beta_{kt1,4} \left(R_m = 600 \text{ i } \frac{\rho}{d} = 0,025 \right) = 1,8, \quad (128)$$

$$\beta_{kt} = 1 + c_2 \cdot (\beta_{kt1,4} - 1) = 1,32. \quad (129)$$

Na presjeku 5 vrijedi opterećenje presjeka:

$$M_{f5} = \sqrt{M_{y2}(75)^2 + M_{z2}(75)^2} = 24883 \text{ Nmm}, \quad (130)$$

$$T_5 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (131)$$

$$M_{red5} = \sqrt{(M_{f5} \cdot \beta_{kf})^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_5 \cdot \beta_{kt})^2} = 122504 \text{ Nmm}. \quad (132)$$

Potreban je još moment otpora za manji promjer:

$$W_5 = \frac{d_4^3 \cdot \pi}{32} = 6283 \text{ mm}^3. \quad (133)$$

Na kraju izračunavamo naprežanje i sigurnost na presjeku.

$$\sigma_{red,5} = \frac{M_{red5}}{W_5} = 19,50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (134)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 i faktor kvalitete obrade površine vratila b_2 iznose:

$$b_1(d_5 = 42) = 0,83, \quad (135)$$

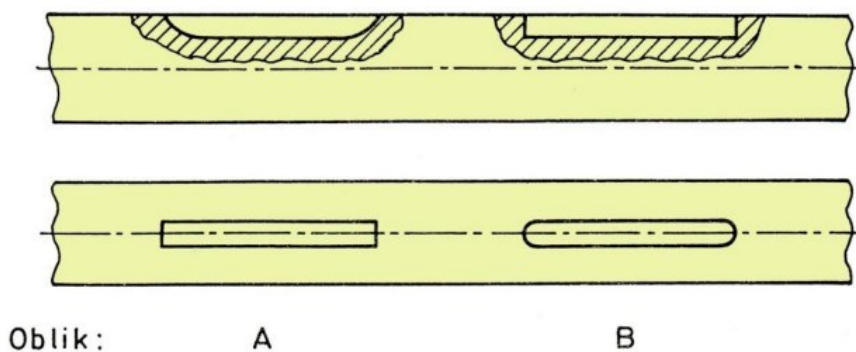
$$b_2 \left(R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ i } R_{\text{max}} \leq 10 \mu\text{m} \right) = 0,95, \quad (136)$$

$$S_{\text{post}_5} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{f,\text{dop}}}{\sigma_{\text{red}_2}} = 8,99 > S_{\text{potr}} = 1,5 \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet.} \quad (137)$$

5.6.6. Presjek 6

Presjek 6 ima utor za pero i opterećen je na uvijanje i savijanje zbog čega je potrebno uzeti u obzir faktor zareznog djelovanja kod uvijanja i savijanja vratila s takvim utorom. Faktor zareznog djelovanja uvijanja uzima se sa Slika 36, dok se faktor zareznog djelovanja savijanja uzima sa Slika 40.

Oblik	Prekidna čvrstoća R_m [N/mm ²]					
	300	400	500	600	700	800
A	1,4	1,45	1,5	1,55	1,58	1,62
B	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1



Slika 40 Faktor zareznog djelovanja kod savijanja vratila s utorom za pero [16]

Odabrana je vrijednost faktora zareznog djelovanja kod uvijanja za radijus zakrivljenosti $\rho = 1,2 \text{ mm}$ i to je $\beta_{kt} = 1,8$.

Za oblik utora pera odabran je oblik B i za vlačnu čvrstoću materijala od $R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Faktor zareznog djelovanja savijanja kod vratila s utorom za pero iznosi $\beta_{kf} = 1,9$.

Na presjeku 6 vrijedi opterećenje presjeka:

$$M_{f6} = \sqrt{M_{y2}(105)^2 + M_{z2}(105)^2} = 36120 \text{ Nmm}, \quad (138)$$

$$T_6 = T = 105040 \text{ Nmm}, \quad (139)$$

$$M_{red6} = \sqrt{(M_{f6} \cdot \beta_{kf})^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T_6 \cdot \beta_{kt})^2} = 175988 \text{ Nmm}. \quad (140)$$

Potreban je još moment otpora za manji promjer:

$$W_6 = \frac{d_5^3 \cdot \pi}{32} = 7274 \text{ mm}^3. \quad (141)$$

Na kraju se izračunava naprezanje i sigurnost na presjeku.

$$\sigma_{red_6} = \frac{M_{red6}}{W_6} = 24,19 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (142)$$

Faktor veličine strojnog dijela b_1 i faktor kvalitete obrade površine vratila b_2 iznose:

$$b_1(d_5 = 42) = 0,83, \quad (143)$$

$$b_2 \left(R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ i } R_{max} \leq 2,5 \mu\text{m} \right) = 0,88, \quad (144)$$

$$S_{post_6} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_{f,dop}}{\sigma_{red_2}} = 7,82 > S_{potr} = 1,5 \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet}. \quad (145)$$

5.7. Provjera progiba i nagiba

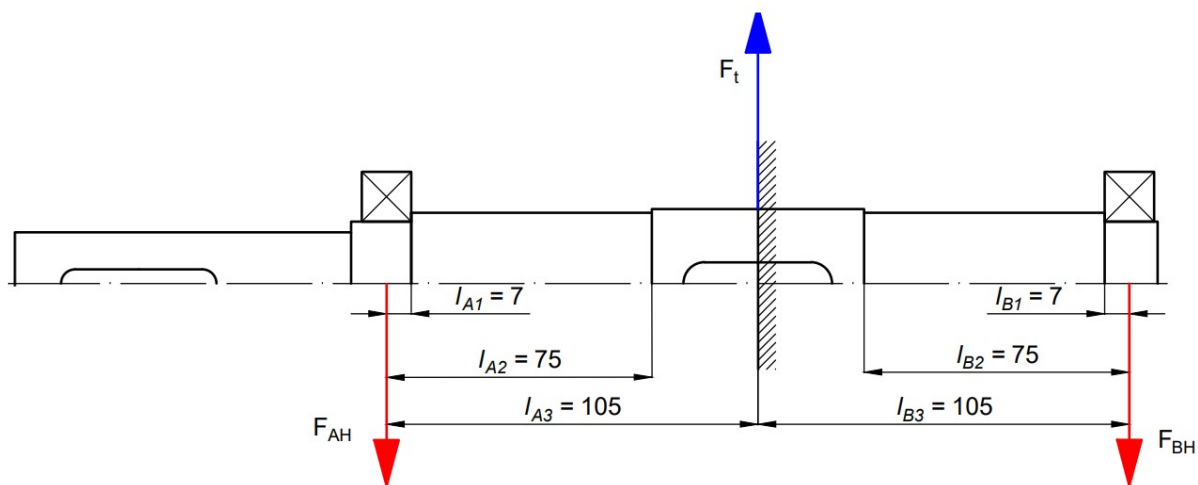
Za provjeru progiba i nagiba postoje dva slučaja. U jedan slučaju je zamišljeni progib uslijed rezultante sila na mjestu prijenosnog elementa, a u drugom slučaju je zamišljeni progib uslijed težine G_S na prepustu. Dopušteni progib i nagib prema [16] su:

$$f_{dop} = 0,0646 \text{ mm i } \beta_{Ldop} = 1 \dots 35 \cdot 10^{-3} \text{ rad}. \quad (146)$$

Izračunate progibe i nagibe potrebno je usporediti s dopuštenim progibom i nagibom.

5.7.1. Provjera na mjestu prijenosnog elementa u horizontalnoj ravnini

Na mjestu prijenosnog elementa potrebno je izračunati progibe u dvije ravnine. Progib u horizontalnoj ravnini se računa pomoću Slika 41.



Slika 41 Proračunska skica za progib u horizontalnoj ravnini na mjestu prijenosnog elementa

Zamišljeni progib na ležajnom mjestu A izračunava se prema sljedećem izrazu:

$$f_{AH} = \frac{F_{AH}}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{A1}^3}{I_{A1}} + \frac{l_{A2}^3 - l_{A1}^3}{I_{A2}} + \frac{l_{A3}^3 - l_{A2}^3}{I_{A3}} \right), \quad (147)$$

dok se zamišljeni progib na ležajnom mjestu B izračunava prema izrazu:

$$f_{BH} = \frac{F_{BH}}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{B1}^3}{I_{B1}} + \frac{l_{B2}^3 - l_{B1}^3}{I_{B2}} + \frac{l_{B3}^3 - l_{B2}^3}{I_{A3}} \right), \quad (148)$$

gdje su:

- F_{AH} i F_{BH} – rezultante sila u osloncu A i B,
- E – modul elastičnosti,
- l_A i l_B – udaljenost od prijelaza s manjeg na veći promjer od rezultante sile u osloncu,
- I_A i I_B – momenti tromosti presjeka vratila, $\frac{d^4 \cdot \pi}{64}$.

Uvrštavanjem vrijednosti dobiju se zamišljeni progibi na mjestima oslonaca A i B.

$$f_{AH} = 0,0039 \text{ mm}, \quad (149)$$

$$f_{BH} = 0,0039 \text{ mm}, \quad (150)$$

ukupni progib na tom mjestu prijenosnog elementa iznosi:

$$f_{peH} = f_{AH} - l_{A3} \cdot \frac{(f_{AH} - f_{BH})}{l_{A3} + l_{B3}} = 0,0039 \text{ mm}. \quad (151)$$

Zamišljeni nagibi se računaju na sličan način pomoću izraza:

$$\beta_{AH} = \frac{F_{AH}}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{A1}^2}{I_{A1}} + \frac{l_{A2}^2 - l_{A1}^2}{I_{A2}} + \frac{l_{A3}^2 - l_{A2}^2}{I_{A3}} \right) = 3,22 \cdot 10^{-5} \text{ rad}, \quad (152)$$

$$\beta_{BH} = \frac{F_{BH}}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{B1}^2}{I_{B1}} + \frac{l_{B2}^2 - l_{B1}^2}{I_{B2}} + \frac{l_{B3}^2 - l_{B2}^2}{I_{B3}} \right) = 5,74 \cdot 10^{-5} \text{ rad}. \quad (153)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila jednak je:

$$\alpha_H \approx \tan \alpha_H = \frac{f_{AH} - f_{BH}}{l_{A3} + l_{B3}} = 0 \text{ rad}. \quad (154)$$

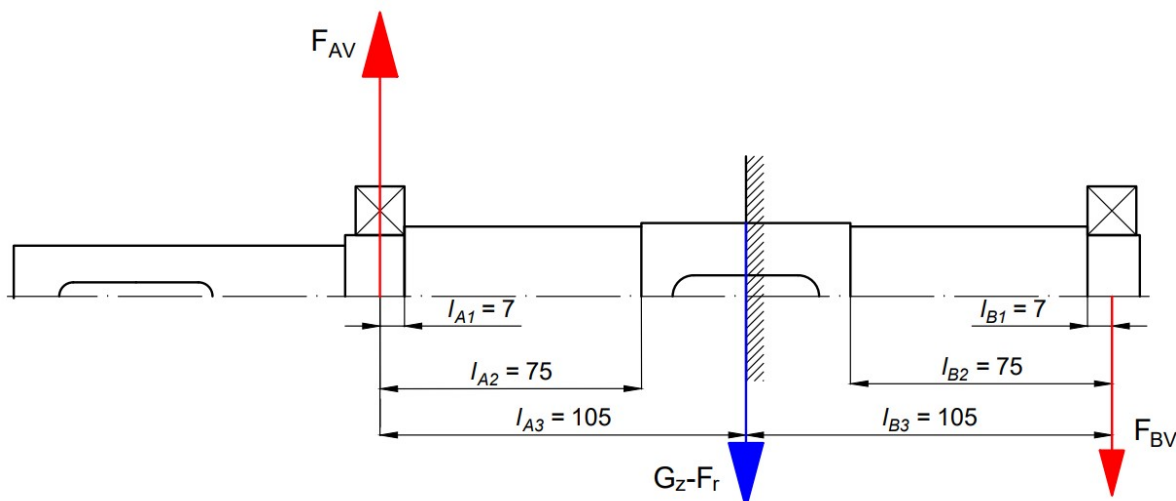
Stvarni kutovi nagiba elastične linije u horizontalnoj ravnini su jednaki:

$$\beta_{LAH} \approx \beta_{AH} - \alpha_H = 3,22 \cdot 10^{-5} \text{ rad}, \quad (155)$$

$$\beta_{LBH} \approx \beta_{BH} - \alpha_H = 5,74 \cdot 10^{-5} \text{ rad}. \quad (156)$$

5.7.2. Provjera na mjestu prijenosnog elementa u vertikalnoj ravnini

Za proračun progiba koristimo se istim izrazima kao i u horizontalnoj ravnini, ali s opterećenjem prema Slika 42.



Slika 42 Proračunska skica za progib u vertikalnoj ravnini na mjestu prijenosnog elementa

Prema tome, zamišljeni progib na ležajnom mjestu A izračunava se prema sljedećem izrazu i on iznosi:

$$f_{AV} = \frac{F_{AV}}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{A1}^3}{I_{A1}} + \frac{l_{A2}^3 - l_{A1}^3}{I_{A2}} + \frac{l_{A3}^3 - l_{A2}^3}{I_{A3}} \right) = 0,0043 \text{ mm}, \quad (157)$$

dok se zamišljeni progib na ležajnom mjestu B izračunava prema i on iznosi:

$$f_{BV} = \frac{F_{BV}}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{B1}^3}{I_{B1}} + \frac{l_{B2}^3 - l_{B1}^3}{I_{B2}} + \frac{l_{B3}^3 - l_{B2}^3}{I_{A3}} \right) = 0,0013 \text{ mm}. \quad (158)$$

Ukupni progib na tom mjestu prijenosnog elementa iznosi:

$$f_{peV} = f_{AV} - l_{A3} \cdot \frac{(f_{AV} + f_{BV})}{l_{A3} + l_{B3}} = 0,0015 \text{ mm}. \quad (159)$$

Zamišljeni nagibi u vertikalnoj ravnini izračunavaju se prema:

$$\beta_{AV} = \frac{F_{AV}}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{A1}^2}{I_{A1}} + \frac{l_{A2}^2 - l_{A1}^2}{I_{A2}} + \frac{l_{A3}^2 - l_{A2}^2}{I_{A3}} \right) = 6,41 \cdot 10^{-5} \text{ rad}, \quad (160)$$

$$\beta_{BV} = \frac{F_{BV}}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{B1}^2}{I_{B1}} + \frac{l_{B2}^2 - l_{B1}^2}{I_{B2}} + \frac{l_{B3}^2 - l_{B2}^2}{I_{B3}} \right) = 1,91 \cdot 10^{-5} \text{ rad}. \quad (161)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila u vertikalnoj osi jednak je:

$$\alpha_V \approx \tan \alpha_V = \frac{f_{AV} - f_{BV}}{l_{A3} + l_{B3}} = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ rad}. \quad (162)$$

Stvarni kutovi nagiba elastične linije u horizontalnoj ravnini su jednaki:

$$\beta_{LAV} \approx \beta_{AV} - \alpha_V = 4,96 \cdot 10^{-5} \text{ rad}, \quad (163)$$

$$\beta_{LBV} \approx \beta_{BV} - \alpha_V = 3,37 \cdot 10^{-5} \text{ rad}. \quad (164)$$

Ukupni progib na mjestu prijenosnog elementa iznosi:

$$f_{pe} = \sqrt{f_{peH}^2 + f_{peV}^2} = 0,0042 \text{ mm} < f_{dop} = 0,0646 \text{ mm} \quad (165)$$

→ Zadovoljava uvjet .

Ukupni nagibi na mjestima ležajeva iznose:

$$\beta_A = \sqrt{\beta_{LAH}^2 + \beta_{LAV}^2} = 5,91 \cdot 10^{-5} \text{ rad} < \beta_{Ldop} = 1 \dots 35 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \rightarrow \quad (166)$$

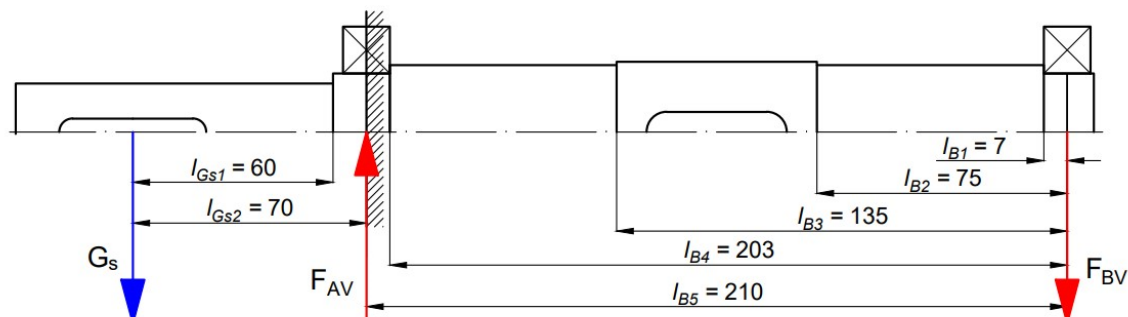
Zadovoljava uvjet .

$$\beta_B = \sqrt{\beta_{LBH}^2 + \beta_{LBV}^2} = 6,66 \cdot 10^{-5} \text{ rad} < \beta_{Ldop} = 1 \dots 35 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \rightarrow \quad (167)$$

Zadovoljava uvjet .

5.7.3. Provjera uslijed težine G_s

U slučaju izračunavanja progiba vratila uslijed težine zamišlja se da je uklještenje na osloncu A i zatim se vratilo deformira silom G_s na jednom kraju i silom F_B na drugom kraju.



Slika 43 Proračunska skica za progib na mjestu težine G_s

Koristimo izraze (147) i (148) za izračunavanje progiba.

$$f_{G_s} = \frac{G_s}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{G_s1}^3}{I_{G_s1}} + \frac{l_{G_s2}^3 - l_{G_s1}^3}{I_{G_s2}} \right) = 0,0011 \text{ mm}, \quad (168)$$

dok se zamišljeni progib na ležajnom mjestu B izračunava prema:

$$f_{B_V} = \frac{F_{B_V}}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{B1}^3}{I_{B1}} + \frac{l_{B2}^3 - l_{B1}^3}{I_{B2}} + \frac{l_{B3}^3 - l_{B2}^3}{I_{A3}} + \frac{l_{B4}^3 - l_{B3}^3}{I_{A4}} + \frac{l_{B5}^3 - l_{B4}^3}{I_{A5}} \right) = 0,012. \quad (169)$$

Ukupni progib na mjestu težine iznosi:

$$f_{G_s, \text{st}} = f_{G_s} + l_{G_s2} \cdot \frac{f_{B_V}}{l_{B5}} = 0,051 \text{ mm} < f_{\text{dop}} = 0,0646 \text{ mm} \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet.} \quad (170)$$

Zamišljeni nagibi jednaki su:

$$\beta_{G_s, i} = \frac{G_s}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{G_s1}^2}{I_{G_s1}} + \frac{l_{G_s2}^2 - l_{G_s1}^2}{I_{G_s2}} \right) = 2,58 \cdot 10^{-5} \text{ rad}, \quad (171)$$

$$\beta_{B,i} = \frac{F_{BV}}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_{B1}^2}{I_{B1}} + \frac{l_{B2}^2 - l_{B1}^2}{I_{B2}} + \frac{l_{B3}^2 - l_{B2}^2}{I_{A3}} + \frac{l_{B4}^2 - l_{B3}^2}{I_{A4}} + \frac{l_{B5}^2 - l_{B4}^2}{I_{A5}} \right) = 8,33 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (172)$$

Kut nagiba zamišljene osi vratila jednak je:

$$\alpha_{Gs} \approx \tan \alpha_{Gs} = \frac{f_{BV}}{l_{A3} + l_{B3}} = 5,73 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (173)$$

Stvarni kutovi nagiba elastične linije u horizontalnoj ravnini su jednaki:

$$\beta_A \approx \alpha_{Gs} = 5,73 \cdot 10^{-5} \text{ rad} < \beta_{Ldop} = 1 \dots 35 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet,} \quad (174)$$

$$\beta_B \approx \beta_{B_i} - \alpha_{Gs} = 9,23 \cdot 10^{-6} \text{ rad} < \beta_{Ldop} = 1 \dots 35 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet,} \quad (175)$$

$$\beta_{Gs} \approx \beta_{Gs_i} + \alpha_{Gs} = 8,31 \cdot 10^{-5} \text{ rad} < \beta_{Ldop} = 1 \dots 35 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ \rightarrow \text{Zadovoljava uvjet.} \quad (176)$$

Svi izračunati progibi i nagibi nalaze se ispod dopuštenih vrijednosti što zadovoljava uvjet. Dalje je potrebno provjeriti kut uvijanja vratila.

5.8. Provjera kuta uvijanja vratila

Djelovanje momenta torzije T na vratilu kao posljedicu daje kut uvijanja. Ako je taj kut velik onda može doći do neželjenih vibracija. Kut uvijanja računa se prema izrazu:

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \frac{T_i \cdot l_i}{I_{p,i}}, \quad (177)$$

gdje je:

- G – modul smicanja materijala vratila (za čelik je približno $81000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$),
- T_i – modul elastičnosti,
- l_i – duljina odsječka vratila opterećenog na uvijanje,
- $I_{p,i}$ – polarni moment inercije odsječka vratila, $\frac{d^4 \cdot \pi}{32}$.

Dopušteni kut uvijanja prema [16] iznosi:

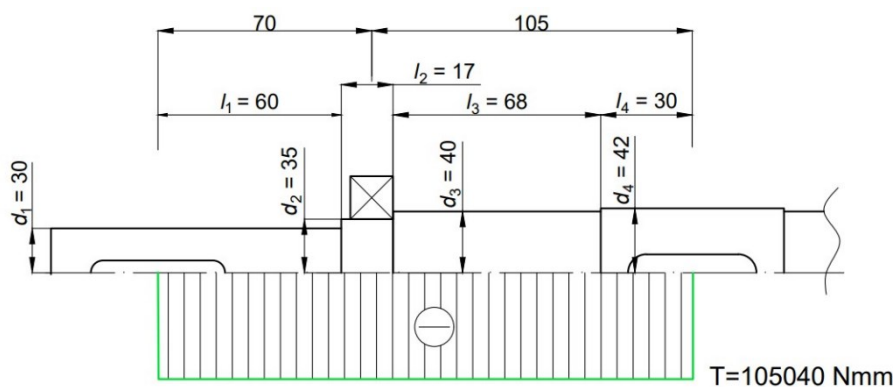
$$\frac{\varphi}{L} = 0,00025 \dots 0,0005 \frac{^\circ}{\text{mm}}, \quad (178)$$

gdje je:

- L – ukupna duljina vratila opterećena na uvijanje.

U ovom radu, prema 44, za duljinu $L = 185$ mm dopušteni kut uvijanja iznosi:

$$\varphi_{\text{dop}} = 0,04625 \dots 0,0925 \text{ } ^\circ. \quad (179)$$



Slika 44 Skica za proračun kuta uvijanja vratila

Kut uvijanja iznosi:

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{T \cdot l_1}{I_{p,1}} + \frac{T \cdot l_2}{I_{p,2}} + \frac{T \cdot l_3}{I_{p,3}} + \frac{T \cdot l_4}{I_{p,4}} \right) = 0,062^\circ. \quad (180)$$

Kut uvijanja se nalazi unutar granica dopuštenih vrijednosti zbog čega je uvjet zadovoljen.

5.9. Provjera fleksijske i torzijske kritične brzine vrtnje vratila

Kritična brzina vrtnje provjerava se iz razloga da ne dođe do rezonancije odnosno da se kutna brzina vrtnje ne poklopi s vlastitom kružnom frekvencijom sustava. Kritična fleksijska brzina izračunava se s izrazom:

$$n_{f,krit.} = \frac{K}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{f_{pe} + f_{Gs,st}}}, \quad (181)$$

gdje je:

- K – faktor uležištenja vratila, u našem slučaju iznosi 0,9.

Za rad u nadkritičnom području mora biti zadovoljen uvjet $n \geq 1,3 \cdot n_{f,krit.}$. Fleksijska kritična brzina iznosi:

$$n_{f,krit.} = 1,91 \text{ s}^{-1} = 114,57 \text{ min}^{-1}, \quad (182)$$

$$n = 200 \text{ min}^{-1} \geq 1,3 \cdot n_{f,krit.} = 148,94 \text{ min}^{-1} \rightarrow \text{Uvjet zadovoljen.} \quad (183)$$

Torzijska kritična brzine vrtnje računa se pomoću izraza:

$$n_{t,krit.} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{c_t \cdot \left(\frac{1}{J_s} + \frac{1}{J_z} \right)}. \quad (184)$$

Torzijska krutost stupnjevanog vratila računa se iz izraza:

$$c_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{I_{p,i}}}, \quad (185)$$

gdje je:

- l_i – duljina odsječka vratila opterećenog na uvijanje,
- $I_{p,i}$ – polarni moment inercije odsječka vratila, $\frac{d^4 \cdot \pi}{32}$.

Torzijska krutost iznosi:

$$c_t = 65393 \frac{\text{N}}{\text{rad}}. \quad (186)$$

Moment tromosti mase G_z računa se kao:

$$J_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_z}{g} \cdot \left(\frac{d_{pe}}{2} \right)^2 = 0,47 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (187)$$

Za rad u podkritičnom području mora biti zadovoljen uvjet $n \leq 0,8 \cdot n_{t,krit.}$. Torzijska kritična brzina iznosi:

$$n_{t,krit.} = 21711,51 \text{ min}^{-1}, \quad (188)$$

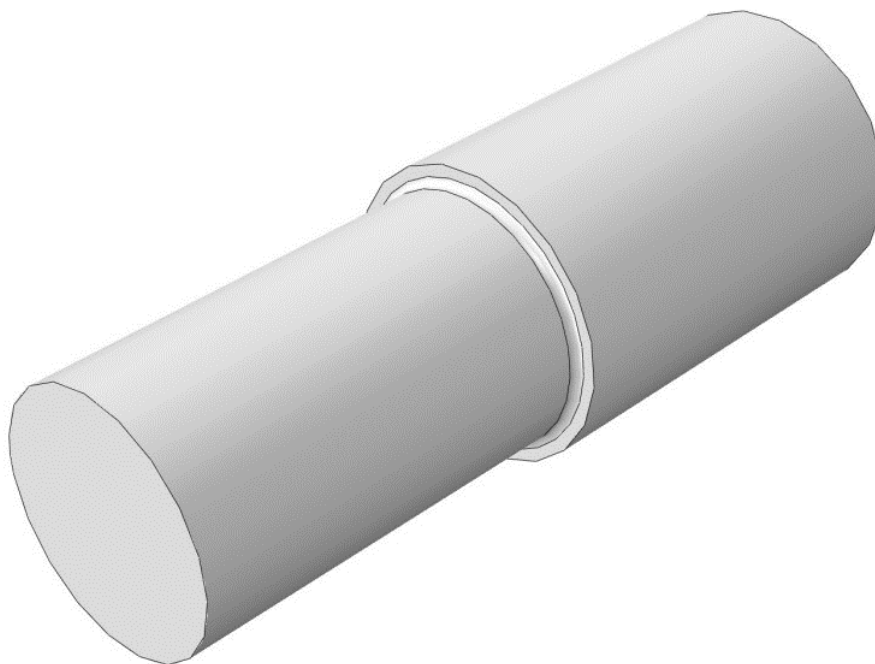
$$n = 200 \text{ min}^{-1} n \leq 0,8 \cdot n_{t,krit.} = 17369,21 \text{ min}^{-1} \rightarrow \text{Uvjet zadovoljen.} \quad (189)$$

6. NUMERIČKI PRORAČUN VRATILA

U ovom poglavlju opisan je numerički proračun vratila. Prvo je prikazan jedan jednostavan model kako bi se provjerio da način zadavanja opterećenja i ostalih značajki u programskom paketu *Abaqus* funkcionira.

6.1. Numerička verifikacija jednostavnog 3D modela cilindra s jednim stupnjem

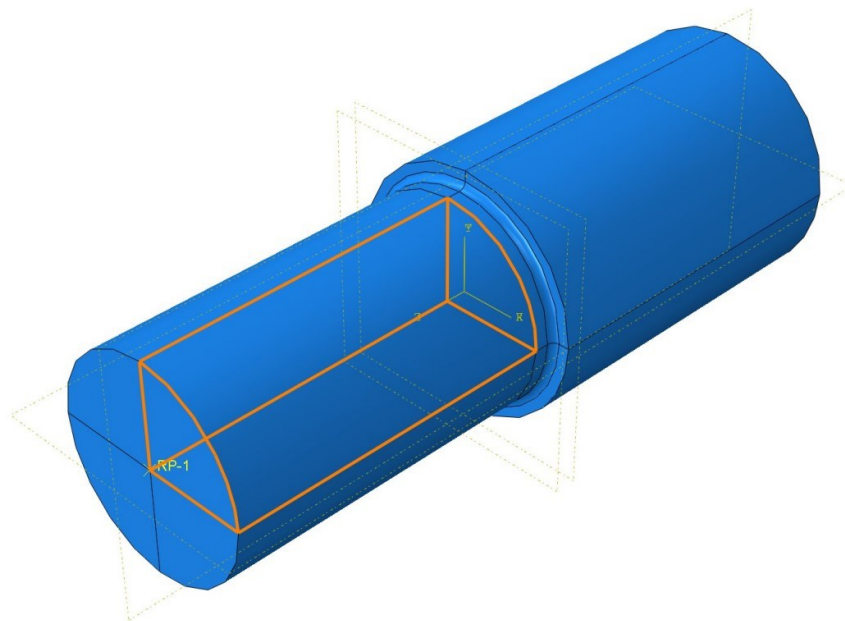
Za validaciju napravljen je jedan jednostavan 3D model na kojem će se provjeriti analitičke vrijednosti s numeričkim vrijednostima kako bi se pokazalo da metoda koja će se koristiti za numerički proračun vratila vrijedi i daje ispravne rezultate. Pretpostavlja se da je materijal isti kao i za vratilo te da je zaobljenje između prijelaza 1 mm. Promjer manjeg dijela je 30 mm dok je promjer većeg 35 mm.



Slika 45 Jednostavan model cilindra

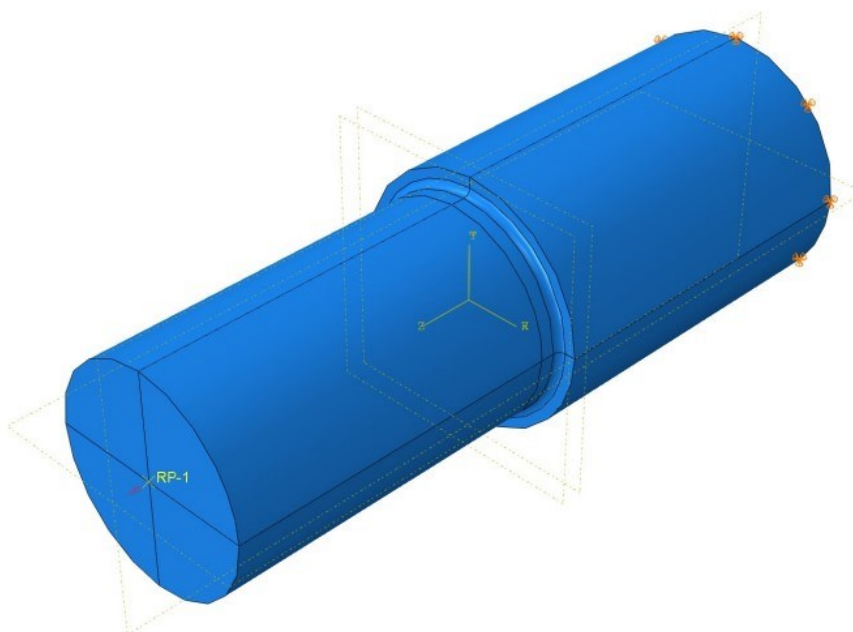
Iako nema momenta savijanja proračun će se napraviti prema von Mises-u kako bi se jednostavnije mogle usporediti vrijednosti. Moment torzije je jednak kao kod vratila i iznosi 105040 Nmm.

Model je podijeljen na manje dijelove zbog bolje diskretizacije. Postavljena je referentna točka pomoću koje je nametnuo kinematičko ograničenje *coupling* za raspodjelu momenta po površini.



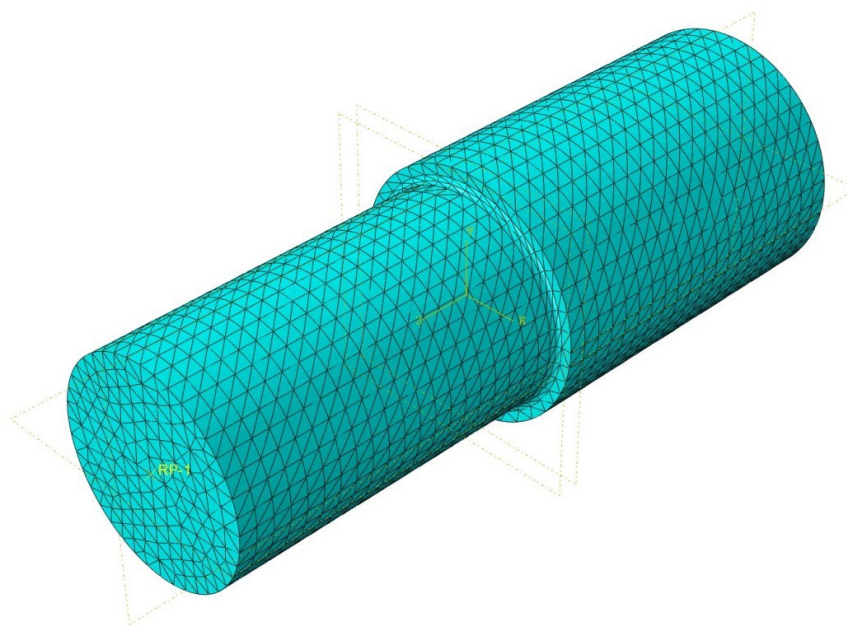
Slika 46 Podjela površina jednostavnog modela

Nakon toga postavljen je cilindrični koordinatni sustav na istom mjestu kao i globalni koordinatni sustav. U odnosu na njega su zadana sva opterećenja i rubni uvjeti.



Slika 47 Postavljanje opterećenja i rubnih uvjeta na jednostavnom modelu

Moment uvijanja je postavljen u referentnoj točki RP1, a za rubne uvijete odabran je *pinned* odnosno svi pomaci su stavljeni da budu jednaki nuli.



Slika 48 Mreža konačnih elemenata na jednostavnom elementu

Korišteni su tetraedarski konačni elementi C3D10 sa slobodnom kontrolom mreže. Mreža sadrži 37740 konačnih elemenata.

Tablica 5 Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja na jednostavnom primjeru

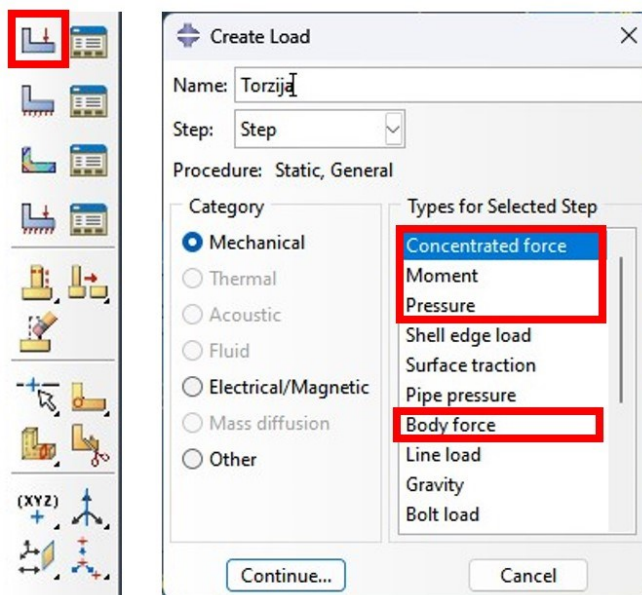
Mjesto	Analitički	Numerički	Relativna greška
Prijelaz s većeg na manji promjer	$\sigma_{\text{red}} = 49,92 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\sigma_{\text{red}} = 50,83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	1,823%
Nominalno na manjem promjeru	$\sigma_{\text{red}} = 33,96 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\sigma_{\text{red}} = 33,61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	1,031%
Nominalno na većem promjeru	$\sigma_{\text{red}} = 21,39 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\sigma_{\text{red}} = 21,31 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	0,374%

Iz Tablica 5 vidi se da je točnost rješenja zadovoljavajuća. Time je pokazano da način modeliranja koji ćemo koristiti rezultira dobrim rješenjima. Analogni postupak će se provesti na vratilu.

6.2. 3D model vratila

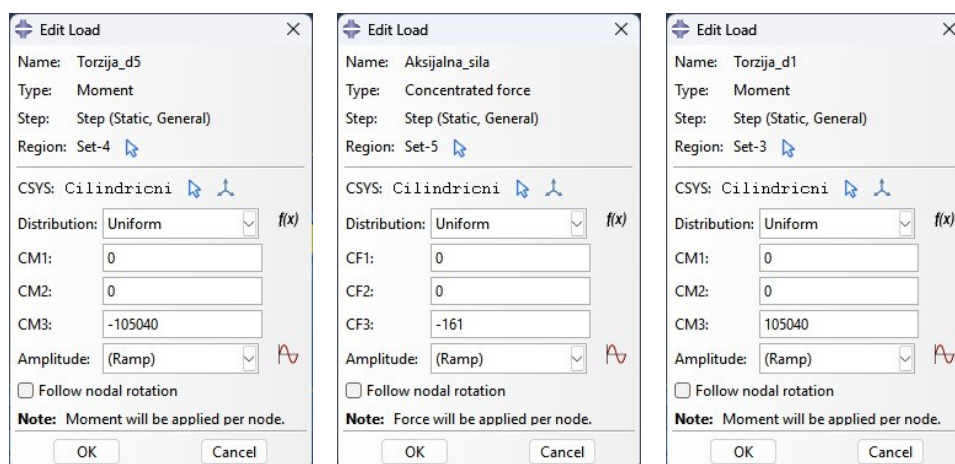
Postupak na jednostavnom modelu potrebno je ponoviti na vratilu. Model vratila izrađen je u alatu *SolidWorks* koji je zatim u obliku .STEP datoteke prebačen u *Abaqus*.

U nastavku su prikazana opterećenja i rubni uvjeti na vratilu.

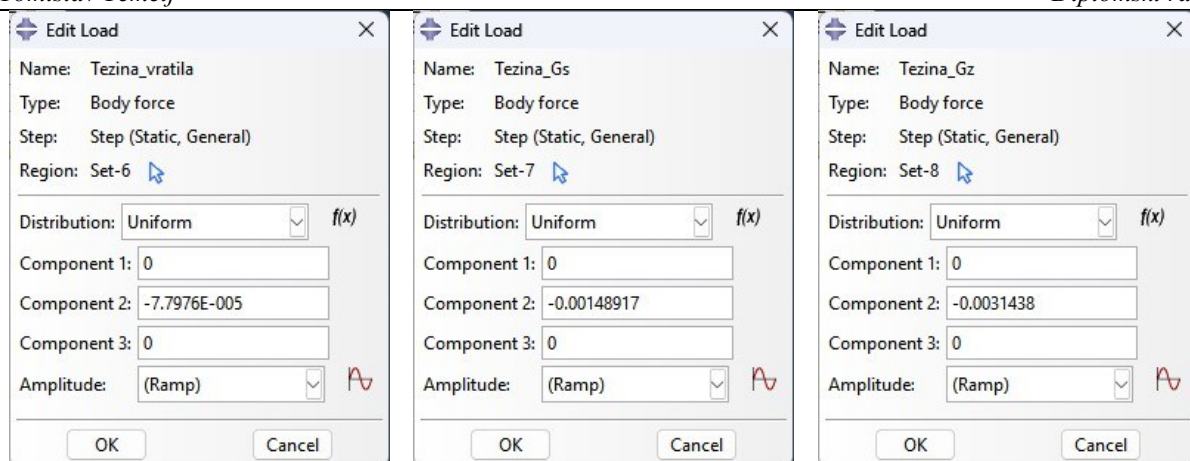


Slika 49 Definiranje opterećenja

U prozoru na Slika 49 crvenim pravokutnicima označena su sva opterećenja koja će biti potrebno koristiti. Koncentrirana sila je za aksijalnu silu, *moment* za torziju, *pressure* za djelovanje tlakova na ležajnim mjestima zbog steznog spoja i *body force* za težine elemenata i vratila. Ovdje je potrebno pripaziti na definiranje težina jer su one u *Abaqusu* za 3D modele definirane po jedinici volumena.

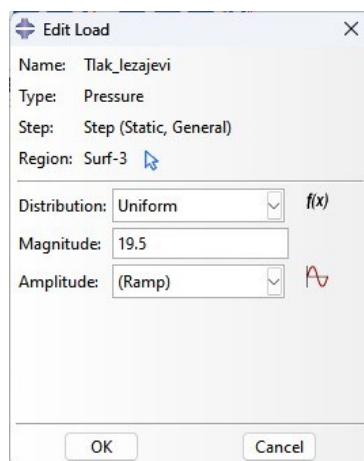


Slika 50 Definiranje torzije i aksijalne sile



Slika 51 Definiranje težina

Težina vratila je izračunata u alatu *SolidWorks* na način da je uzeta masa i volumen iz značajke *mass property*.

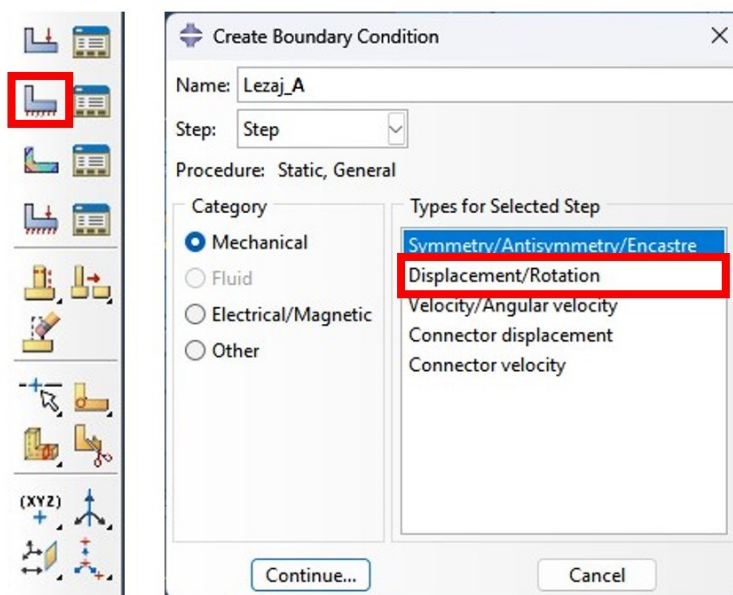


Slika 52 Definiranje tlaka na ležajima

Na kraju je još definiran tlak u ležajevima koji je uzet preko najveće tangencijalne sile koja se može prenijeti steznim spojem. Tangencijalna sila je u steznom spoju sila trenja koja ima normalu koja djeluje na površinu. Dijeljenjem normalne sile s površinom na kojoj su ležajevi dobije se iznos tlaka koji opterećuje vratilo. Faktor trenja je pretpostavljen da iznosi 0,2.

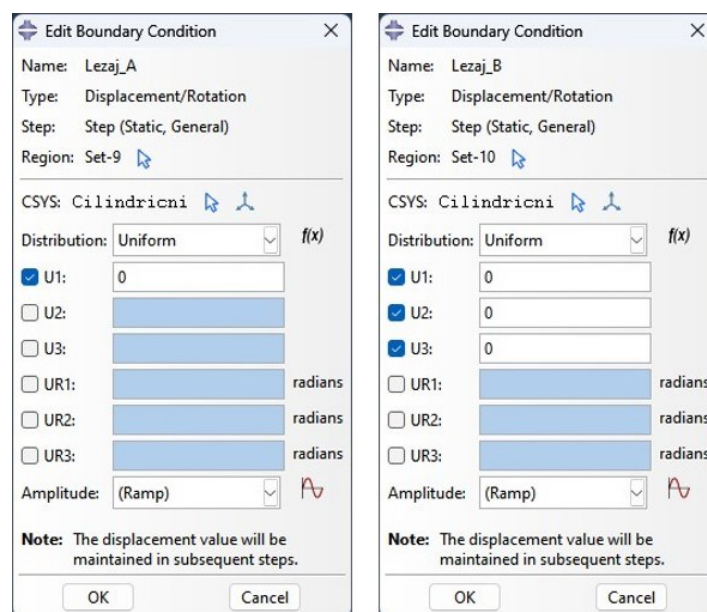
$$p = \frac{F_N}{A} = \frac{F_t}{A \cdot \mu} = \frac{600}{35 \cdot \pi \cdot 14 \cdot 0,2} = 19,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (190)$$

Potrebno je još definirati rubne uvjete pomoću funkcije *create boundary condition*.



Slika 53 Odabir tipa rubnih uvjeta

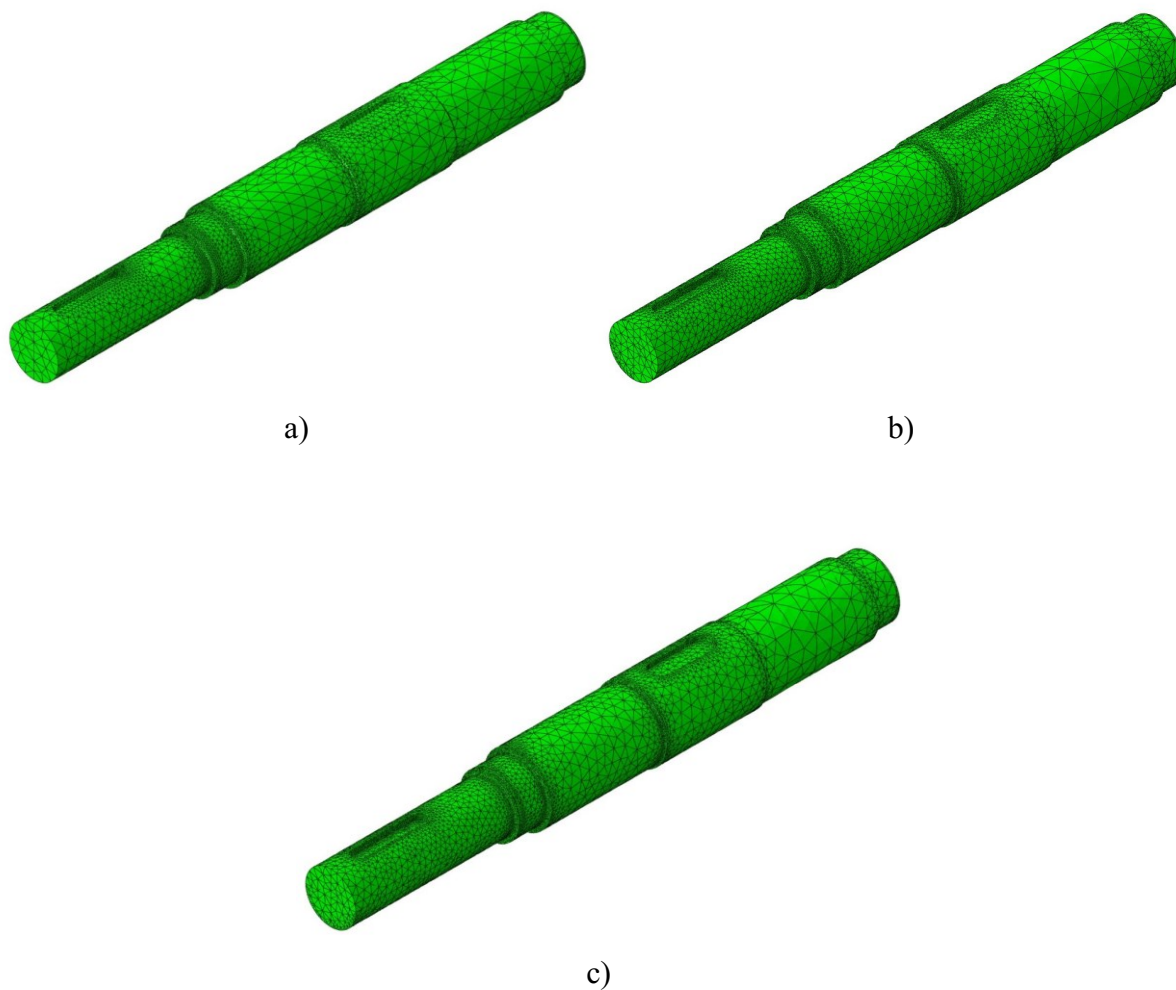
Rubni uvjeti definirani su na mjestima ležajeva. Ležajno mjesto A je slobodno ležajno mjesto odnosno prenosi se samo radijalna sila, zbog čega je rubni uvjet definiran tako da nema širenja u radijalnom smjeru ali ima pomaka u uzdužnom smjeru. Ležajno mjesto B je čvrsto ležajno mjesto gdje su ograničeni svi pomaci.



Slika 54 Definiranje rubnih uvjeta

Nakon definiranja rubnih uvjeta potrebno je definirati mrežu konačnih elemenata.

Generirane su tri mreže konačnih elemenata.

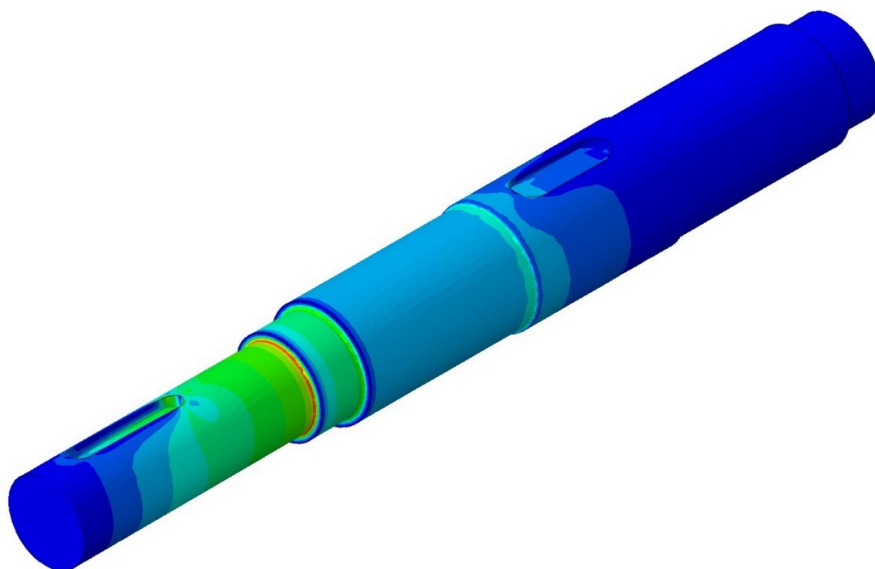


Slika 55 Mreže konačnih elemenata: a) 50320 elemenata, b) 95155 elemenata i c) 155914 elemenata

Za usporedbu analitičkog i numeričkog proračuna koristiti će se sve tri mreže gdje se treba vidjeti konvergencija rješenja.

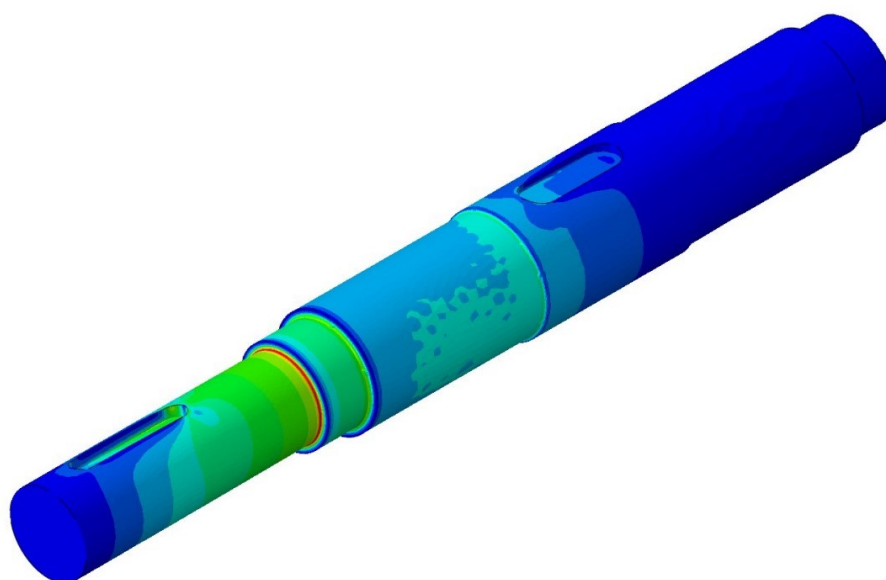
6.3. Rezultati numeričke analize

U nastavku je prikazana usporedba analitičkih vrijednosti s numeričkim vrijednostima napreznja prema von Misesu. Raspodjela napreznja za mrežu od 50320 konačnih elemenata i prikazana je na Slika 56.



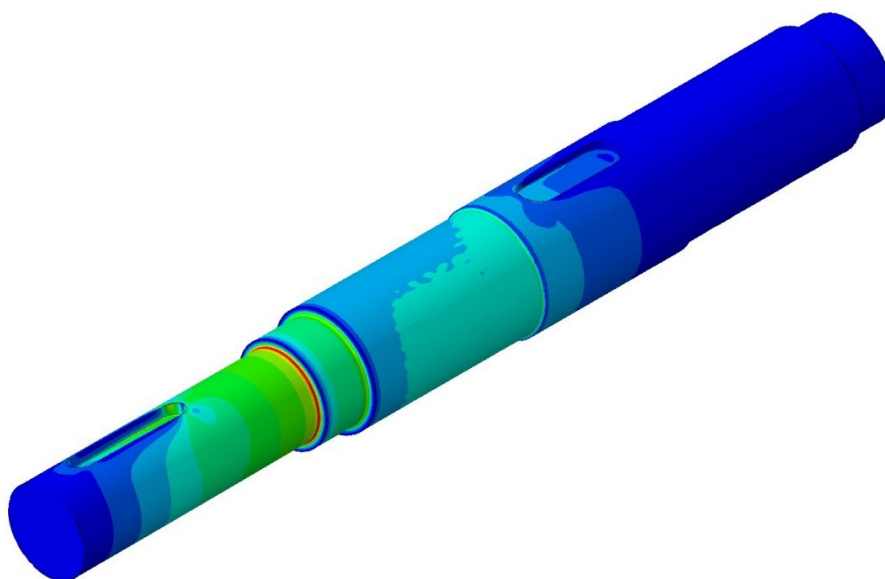
Slika 56 Raspodjela ekvivalentnog napreznja prema von Misesu za mrežu od 50320 konačnih elemenata

Za mrežu od 95155 konačnih elemenata i prikazana je na Slika 57.



Slika 57 Raspodjela ekvivalentnog napreznja prema von Misesu za mrežu od 95155 konačnih elemenata

Za mrežu od 155914 konačnih elemenata i prikazana je na Slika 58.



Slika 58 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja prema von Misesu za mrežu od 155914 konačnih elemenata

6.4. Usporedba analitičkih i numeričkih rezultata

Radi bolje preglednosti rezultati su uspoređeni po svakom presjeku zasebno. Napravljen je grafički prikaz konvergencije rješenja s povećanjem broja konačnih elemenata.

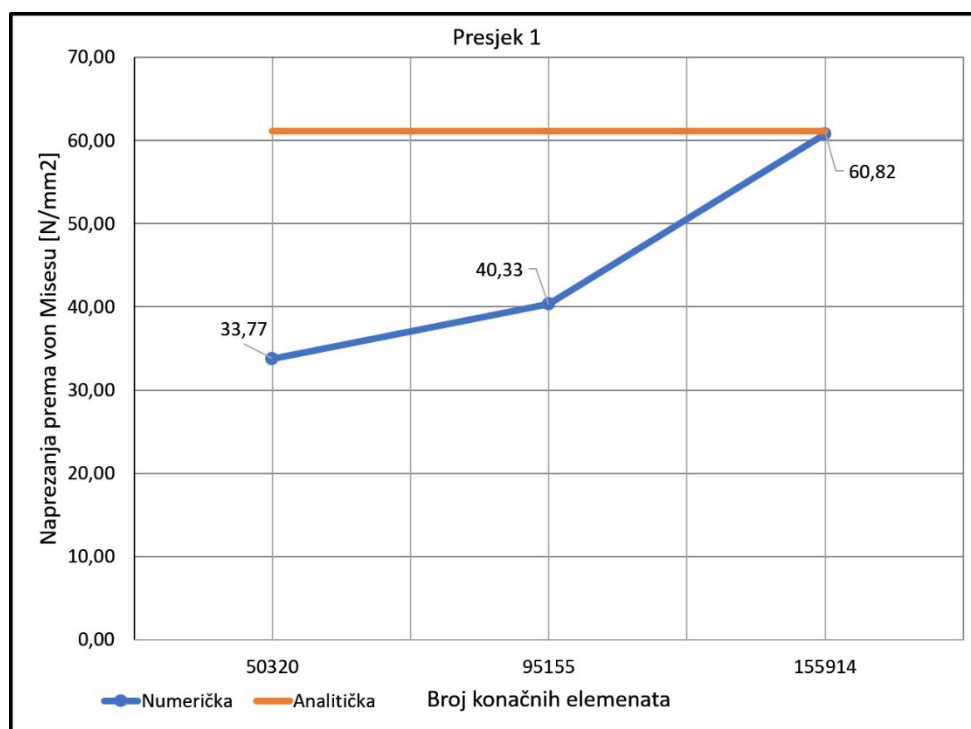
6.4.1. Presjek 1

Konvergencija rješenja na presjeku 1 prikazana je Tablica 6.

Tablica 6 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 1

Broj konačnih elemenata	Numeričke vrijednosti naprezanja $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$	Analitička vrijednost naprezanja $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$	Relativna greška
50320	33,77	61,14	44,766%
95155	40,33		34,037%
155914	60,82		0,523%

Prema podacima iz Tablica 6 kreiran je dijagram konvergencije numeričkog rješenja u odnosu na rješenje dobiveno analitičkim proračunom. Vidi se da rješenje konvergira s povećanjem broja elemenata.



Slika 59 Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 1

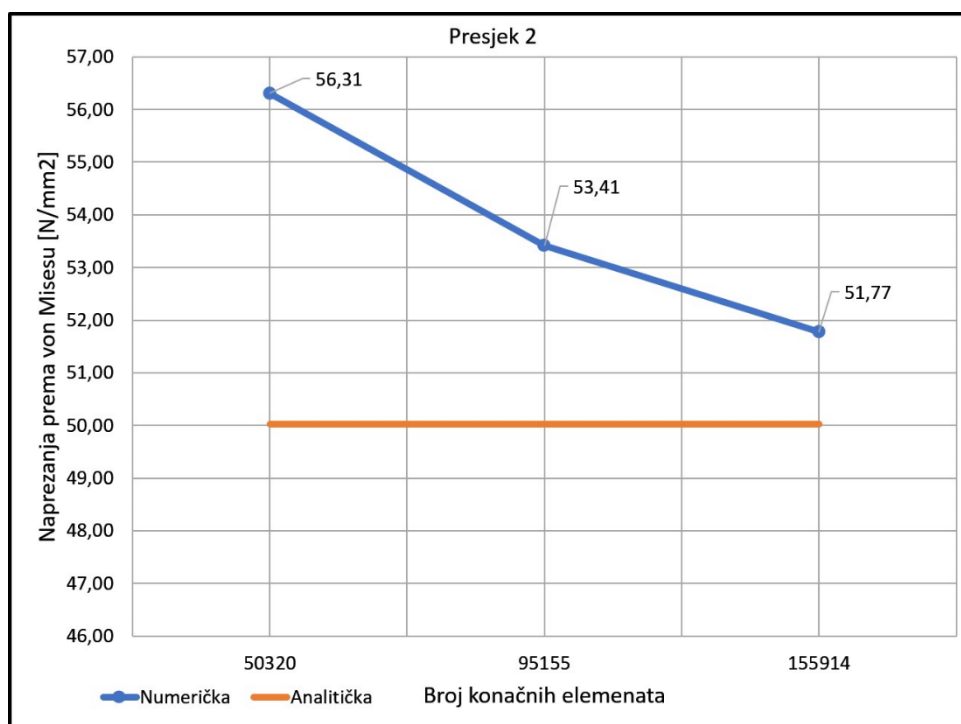
6.4.2. Presjek 2

Konvergencija rješenja na presjeku 2 prikazana je Tablica 7.

Tablica 7 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 2

Broj konačnih elemenata	Numeričke vrijednosti naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Analitička vrijednost naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Relativna greška
50320	56,31	50,02	12,575%
95155	53,41		6,777%
155914	51,77		3,499%

Prema podacima iz Tablica 7 kreiran je dijagram konvergencije numeričkog rješenja u odnosu na rješenje dobiveno analitičkim proračunom. Vidi se da rješenje konvergira s povećanjem broja elemenata.



Slika 60 Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 2

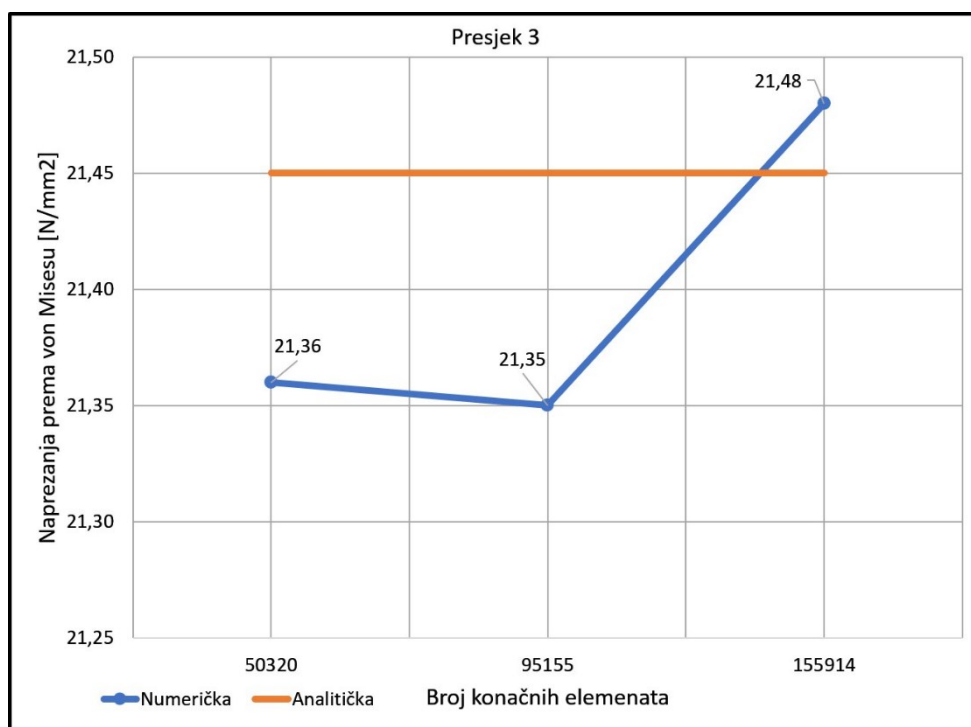
6.4.3. Presjek 3

Konvergencija rješenja na presjeku 3 prikazana je Tablica 8.

Tablica 8 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 3

Broj konačnih elemenata	Numeričke vrijednosti naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Analitička vrijednost naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Relativna greška
50320	21,36	21,45	0,420%
95155	21,35		0,466%
155914	21,48		0,140%

Prema podacima iz Tablica 8 kreiran je dijagram konvergencije numeričkog rješenja u odnosu na rješenje dobiveno analitičkim proračunom. Vidi se da rješenje konvergira već s manjim brojem konačnih elemenata.



Slika 61 Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 3

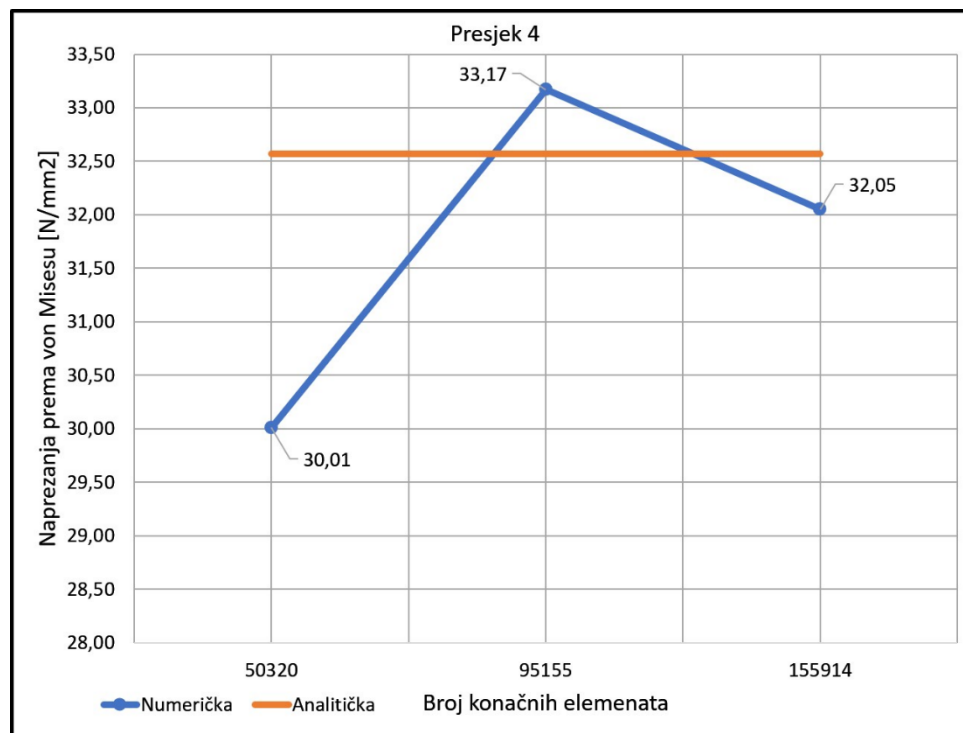
6.4.4. Presjek 4

Konvergencija rješenja na presjeku 4 prikazana je Tablica 9.

Tablica 9 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 4

Broj konačnih elemenata	Numeričke vrijednosti naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Analitička vrijednost naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Relativna greška
50320	30,01	32,57	7,860%
95155	33,17		1,842%
155914	32,05		1,597%

Prema podacima iz Tablica 9 kreiran je dijagram konvergencije numeričkog rješenja u odnosu na rješenje dobiveno analitičkim proračunom. Vidi se da rješenje konvergira s povećanjem broja elemenata.



Slika 62 Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 4

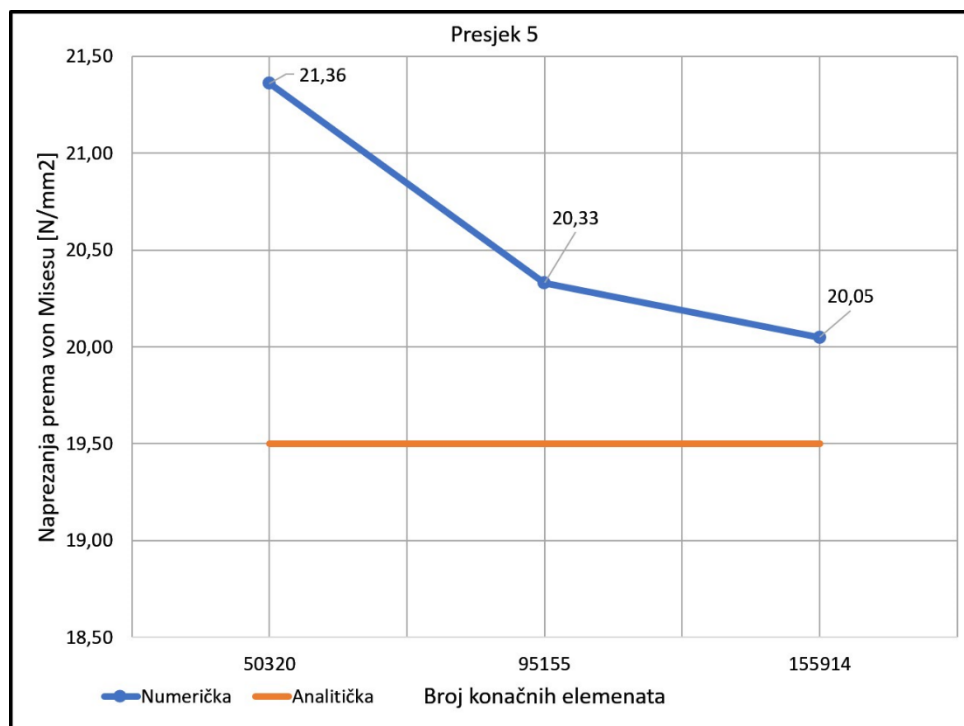
6.4.5. Presjek 5

Konvergencija rješenja na presjeku 5 prikazana je Tablica 10.

Tablica 10 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 5

Broj konačnih elemenata	Numeričke vrijednosti naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Analitička vrijednost naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Relativna greška
50320	21,36	19,5	9,538%
95155	20,33		4,256%
155914	20,05		2,821%

Prema podacima iz Tablica 10 kreiran je dijagram konvergencije numeričkog rješenja u odnosu na rješenje dobiveno analitičkim proračunom. Vidi se da rješenje konvergira s povećanjem broja elemenata. Vjerojatno bi numeričko rješenje bilo bliže analitičkom rješenju kada bi se povećao broj konačnih elemenata na presjeku 5.



Slika 63 Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 5

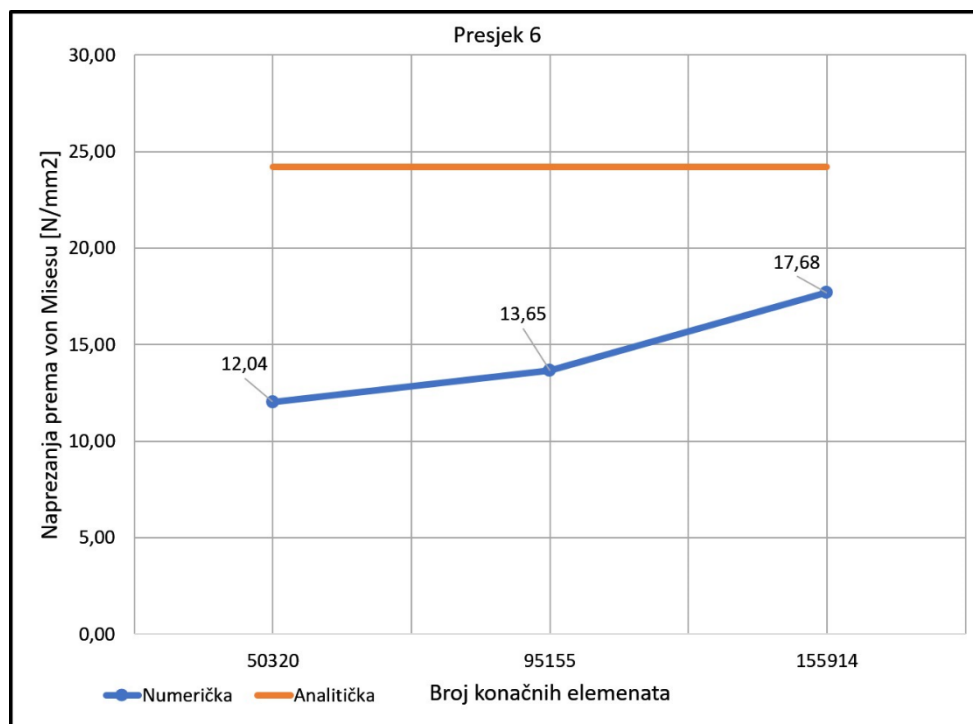
6.4.6. Presjek 6

Konvergencija rješenja na presjeku 6 prikazana je Tablica 11.

Tablica 11 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za presjek 6

Broj konačnih elemenata	Numeričke vrijednosti naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Analitička vrijednost naprezanja $\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	Relativna greška
50320	12,04	24,19	50,227%
95155	13,65		43,572%
155914	17,68		26,912%

Prema podacima iz Tablica 11 kreiran je graf konvergencije numeričkog rješenja u odnosu na rješenje dobiveno analitičkim proračunom. Vidi se da rješenje konvergira, ali su relativne greške i dalje visoke. One bi se trebale smanjivati povećanjem broja konačnih elemenata na tom presjeku.



Slika 64 Grafička usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za presjek 6

6.5. Zaključak

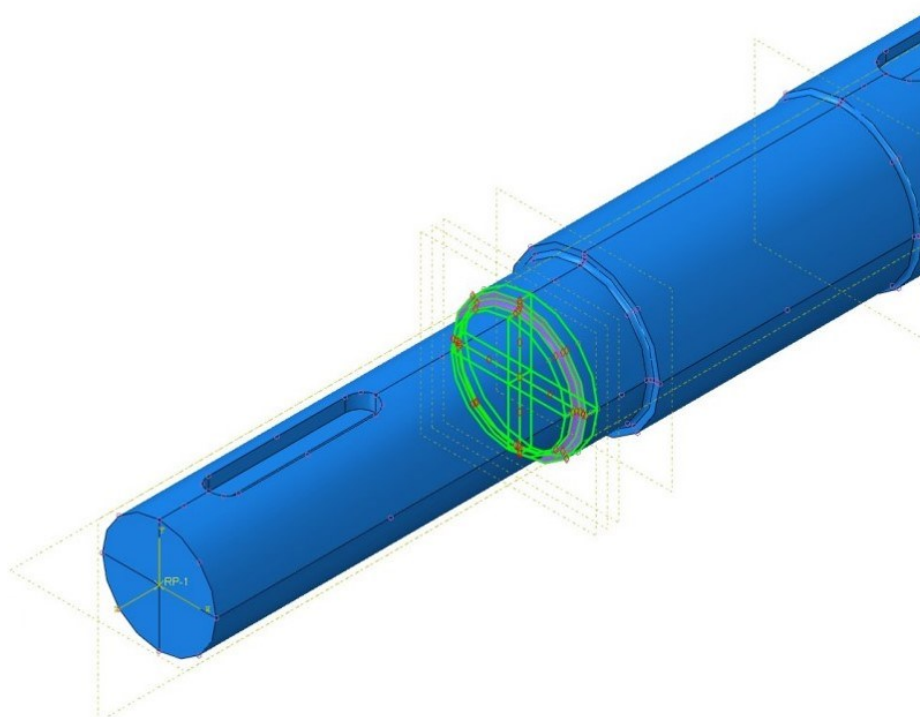
Iz rezultata je vidljivo da su naprezanja konvergirala. Jedino veće nepodudaranje se javlja u presjeku 6. Usporedbom ostalih numeričkih rješenja u odnosu na analitička rješenja vidimo da imaju relativne greške u granici od $\pm 3\%$ što je zadovoljavajuće.

7. TOPOLOŠKO OPTIMIRANJE VRATILA

Topološko optimiranje, točnije, optimiranje oblika će se koristiti na prijelazu s najmanjeg stupnja vratila na sljedeći veći stupanj vratila, kako bi se smanjila naprezanja. Najveće naprezanje je na mjestu pera na najmanjem promjeru ali taj dio ne smijemo mijenjati jer pero ne bi više bilo odgovarajućih dimenzija. Prijelaz s većeg na manji promjer ima nekoliko standardnih rješenja. U ovom radu cilj je smanjiti koncentraciju naprezanja na tom dijelu numerički.

7.1. Optimiranje numeričkog modela vratila

Optimiranje u *Abaqus*-u se provodi u modulu *optimization*. Odabrani promjer za optimiranje prikazan je na Slika 65.



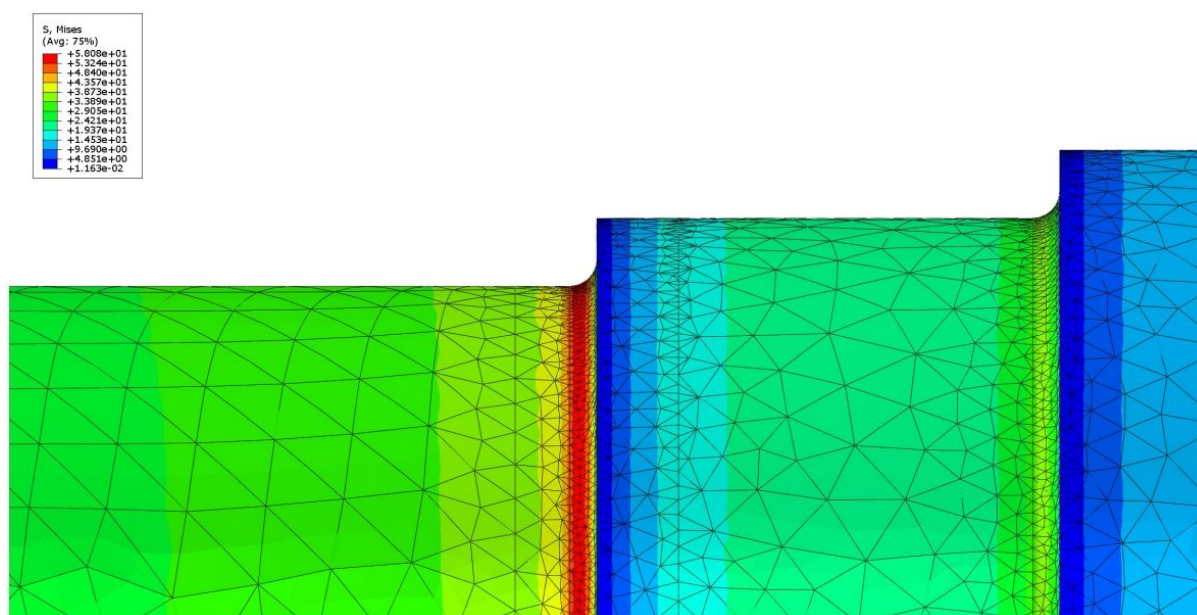
Slika 65 Mjesto optimizacije za zadatak optimiranja

Kao *design* varijable odabrani su *Stress - Mises hypothesis* i gustoća energije deformiranja odnosno *Strain energy density*. Smanjenjem energije deformiranja trebala bi se smanjiti i naprezanja. Kao ciljne funkcije odabrane su obje varijable iz prethodnog odabira. Uz to, zadano je geometrijsko ograničenje *turn control*. Time je zadano da se optimirani model izrađuje na tokarilici.

U prvom slučaju optimiranja vratilo ima zaobljenja na prijelazu. Drugi slučaj kada vratilo nema zaobljenja odnosno prijelaz je pod pravim kutom.

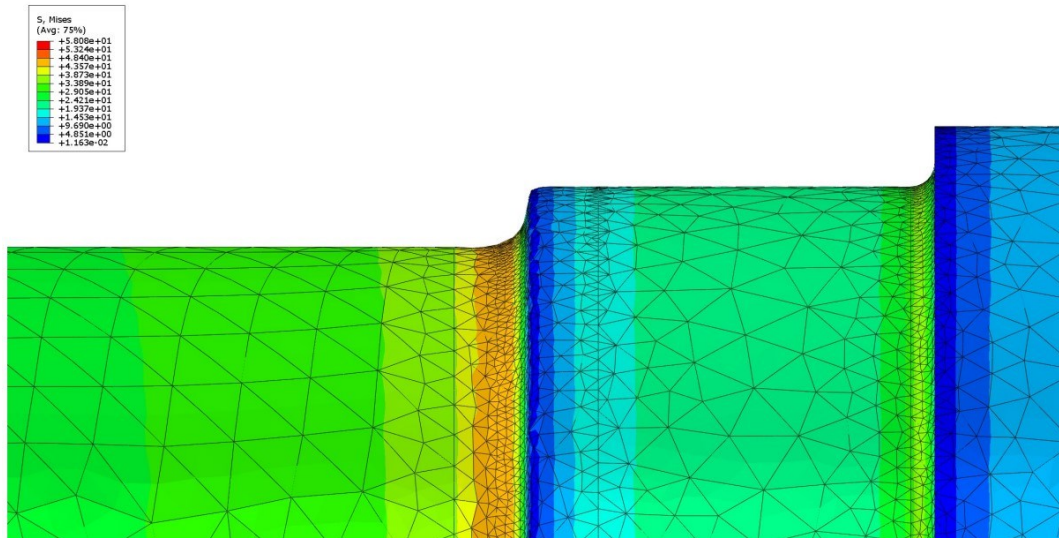
7.1.1. Optimiranje prijelaza sa zaobljenjem

Prvi slučaj optimiranja je kada na modelu vratila već postoje zaobljenja na prijelazima. Naprezanje na tom prijelazu prije optimiranja iznosi $51,77 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Presjek u tom slučaju izgleda kao na Slika 66.



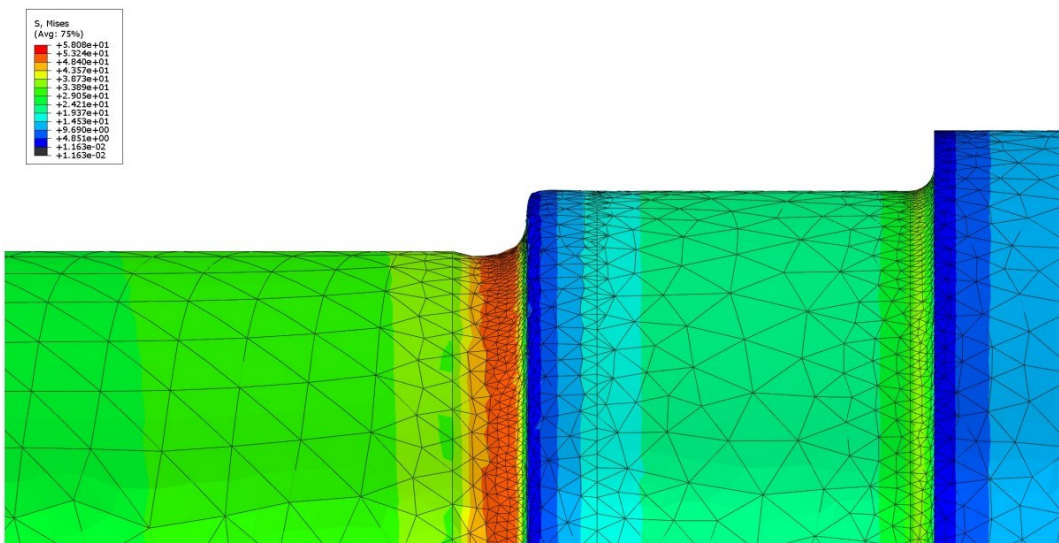
Slika 66 Naprezanje na mjestu prijelaza prije optimiranja

Odrađena je optimizacija s 20 ciklusa. Na Slika 67 je prikazan 8. ciklus optimizacije gdje se vidi da su se naprezanja smanjila. Očitavanjem naprezanja u integracijskim točkama dobiva se maksimalno naprezanje na mjestu prijelaza $44,57 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. To je smanjenje naprezanja za 13,91 % što je značajan iznos.



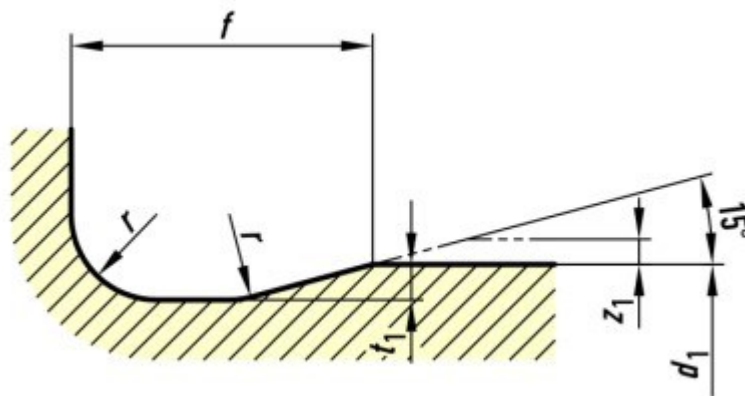
Slika 67 Naprežanje na mjestu prijelaza nakon 8 ciklusa optimiranja

Na Slika 68 je prikazan 18. ciklus optimizacije gdje se vidi da su se naprežanja nisu značajno smanjila. Očitavanjem naprežanja u integracijskim točkama dobiva se da je naprežanje na mjestu prijelaza iznosa $48,89 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. To je smanjenje naprežanja za 5,56 %.



Slika 68 Naprežanje na mjestu prijelaza nakon 18 ciklusa optimiranja

Optimizacija sa Slika 68 prikazuje sličan oblik žlijeba kao oblik E iz norme DIN 509:2006. Prikaz žlijeba vidi se na Slika 69.

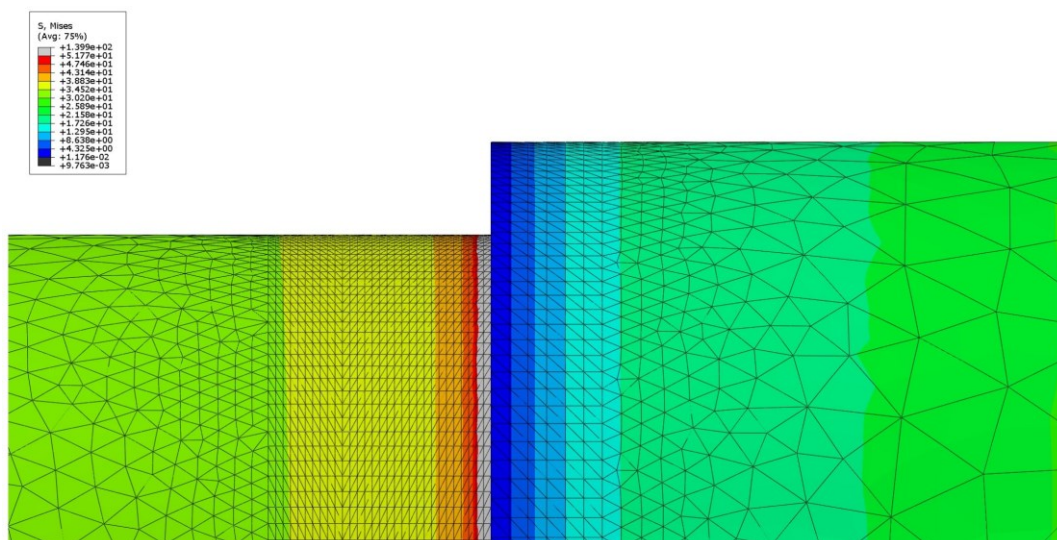


Slika 69 Oblik žljebova za izlaz alata prema DIN 509:2006 – oblik E [1]

U sljedećem slučaju optimira se prijelaz bez zaobljenja. Time se dopušta programskom paketu *Abaqus* da odredi kakav prijelaz treba biti između manjeg i većeg promjera.

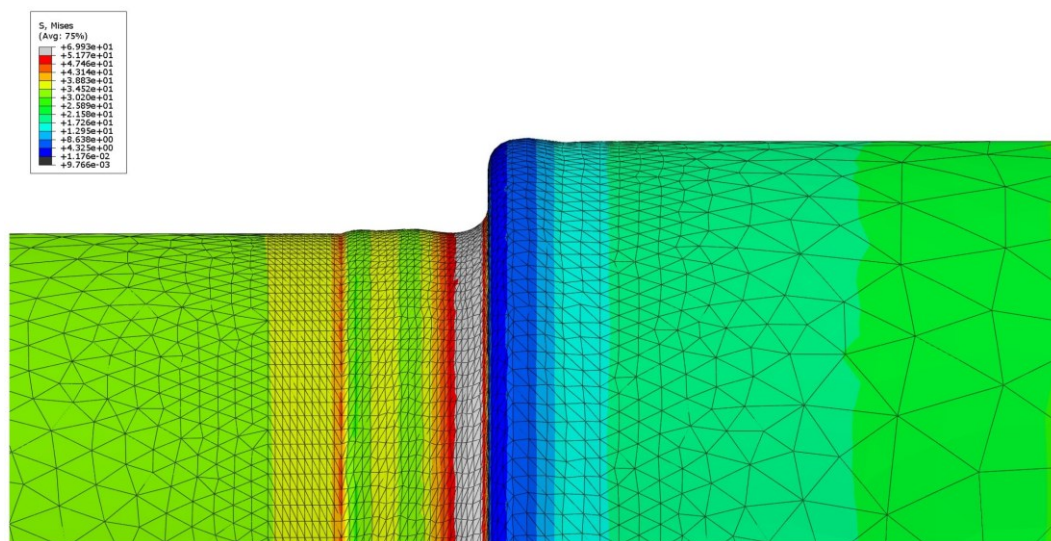
7.1.2. Optimiranje prijelaza bez zaobljenjem

Naprezanje na prijelazu bez zaobljenja numerički iznosi $80,03 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. To naprezanje je veće za 35,31 % od naprezanja gdje je na prijelazu zaobljenje od 1 mm. Međutim, uspoređuje se naprezanje dobiveno optimiranjem s naprezanjem iznosa $51,77 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, zbog toga se nakon optimiranja očekuje glatki prijelaz s manjeg na veći promjer čime će i koncentracija naprezanja biti smanjena.



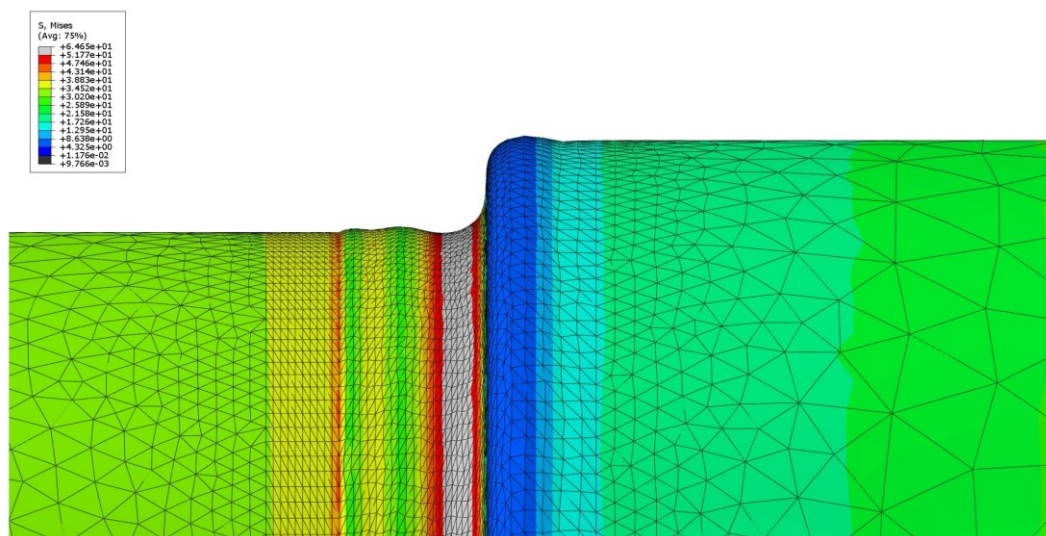
Slika 70 Naprezanja na mjestu prijelaza prije optimiranja bez zaobljenja

Odrađeno je optimiranje s 18 ciklusa za slučaj bez zaobljenja. Na Slika 71 je prikazan 8. ciklus optimizacije gdje se vidi da proces optimiranja u ovom slučaju nije smanjio naprezanja na prijelazu. Očitavanjem naprezanja u integracijskim točkama dobiva se maksimalno naprezanje na mjestu prijelaza $53,05 \frac{N}{mm^2}$. Naprezanje je veće za 2,41 % što nije zadovoljavajuće rješenje. Uz to optimiranje mijenja geometriju na način koji se ne bi mogao koristiti u praksi zbog povećanja promjera. Zanemarivanjem tog povećanja optimiranje daje oblik zaobljenja slično onome iz prvog slučaja bez optimiranja, zbog čega su i naprezanja približno jednaka.



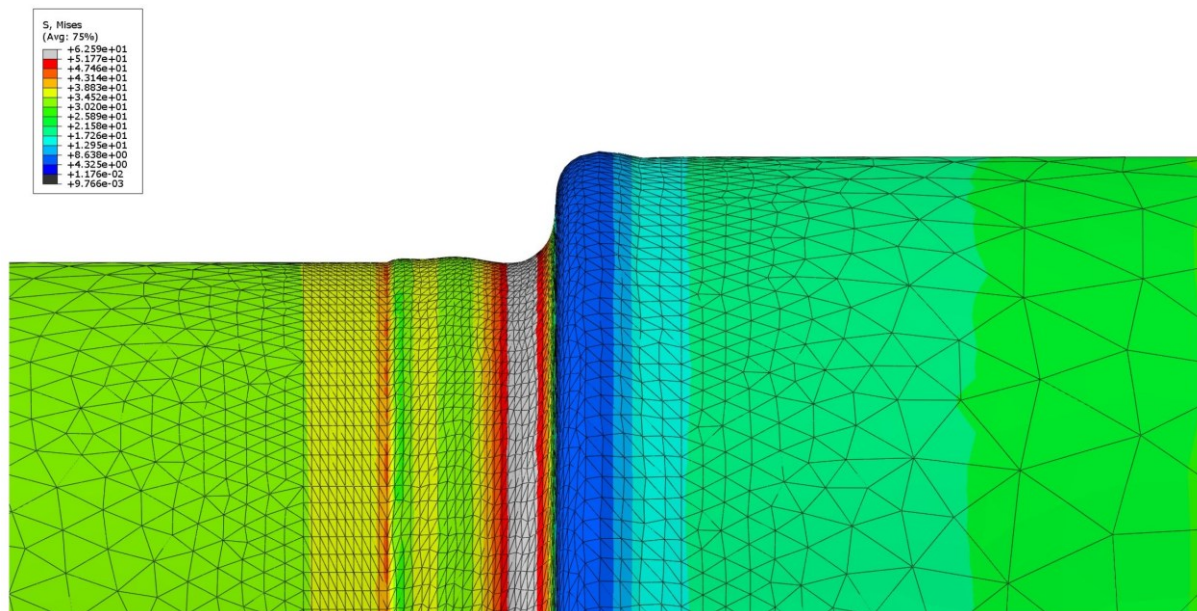
Slika 71 Naprezanja na mjestu prijelaza nakon 8 ciklusa optimiranja

U 14. ciklusu naprezanja se nisu smanjila i oblik geometrije je neznatno promijenjen. Najveće naprezanje tada iznosi $53,05 \frac{N}{mm^2}$. Naprezanje u 14. ciklusu prikazano je na Slika 72.



Slika 72 Naprezanja na mjestu prijelaza nakon 14 ciklusa optimiranja

U 18. ciklusu napreznja se ponovno nisu smanjila. Zaobljenje na prijelazu se neznatno povećalo. Najveće napreznje u tom ciklusu iznosi $54,58 \frac{N}{mm^2}$. Napreznje u 14. ciklusu prikazano je na Slika 73.



Slika 73 Napreznja na mjestu prijelaza nakon 18 ciklusa optimiranja

Oblik dobiven optimiranjem u 18. ciklusu ponovno je nalik obliku E po DIN normi ako se zanemari ostatak modela.

7.2. Zaključak

Optimiranje oblika za slučaj s unaprijed definiranim zaobljenjem rezultiralo je povećanjem tog zaobljenja u 8. ciklusu optimiranja. Kasnijim ciklusima optimiranja oblik geometrije je nalik obliku E prema DIN 509:2006. U drugom slučaju optimiranja prijelaz je u ranijim ciklusima optimizacije geometrijski oblikovan slično prvom slučaju gdje su napreznja približno istog iznosa. Kasniji ciklusi daju oblik geometrije sličan obliku E kao u prvom slučaju.

8. ZAKLJUČAK

U ovom radu na primjeru vratila provedeno je topološko optimiranje s ciljem smanjenja koncentracije na prijelazu geometrije. Na početku rada je dan detaljni konstrukcijski opis vratila, primjene vratila u praksi i ostalo. Zatim je opisana metoda konačnih elemenata i programski paket *Abaqus*, koji je u radu korišten za provedbu numeričkih simulacija. Detaljno je opisan postupak optimiranja geometrije. Kod proračuna vratila, prvo je proveden analitički proračun vratila. Vratilo na sebi ima strojne elemente, stoga je stupnjevano. Za oslanjanje vratila su odabrani jednostavni jednoredni kuglični ležajevi. Pošto ležajevi imaju zadani naslon na vratilu, time je određen idući promjer stupnja vratila. Promjer idućeg stupnja odabran je ponovno radi lakše montaže strojnog elementa. Stupnjevanjem vratila odnosno povećavanjem promjera povećava se i faktor sigurnosti vratila, koji je vidljiv u proračunu. Izračunati faktori sigurnosti pokazuju da je moguće odabrati manje promjere vratila. Izračunom kuta uvijanja koji je blizu gornje granice dopuštenih vrijednosti pokazano je da se duljina može smanjiti jer bi se onda i kut uvijanja smanjio. Ujedno, smanjenjem duljine vratila smanjili bi se progibi i nagibi. Provjerom kritične brzine vrtnje utvrđeno je da neće doći do rezonancije. Nakon toga je napravljen numerički model vratila te je provedena usporedba numeričkih rezultata s analitičkim vrijednostima. Provjera je napravljena po presjecima vratila, gdje je gotovo svaki presjek u numeričkoj analizi bio u rasponu od $\pm 3\%$ što je prihvatljivo za inženjerske svrhe. Presjek 6 je imao značajna odstupanja numeričkog rješenja od analitičkog zbog rijetke mreže konačnih elemenata na tom mjestu. Također, pokazana je konvergencija rješenja s povećanjem broja elemenata na mjestima koncentracija naprezanja.

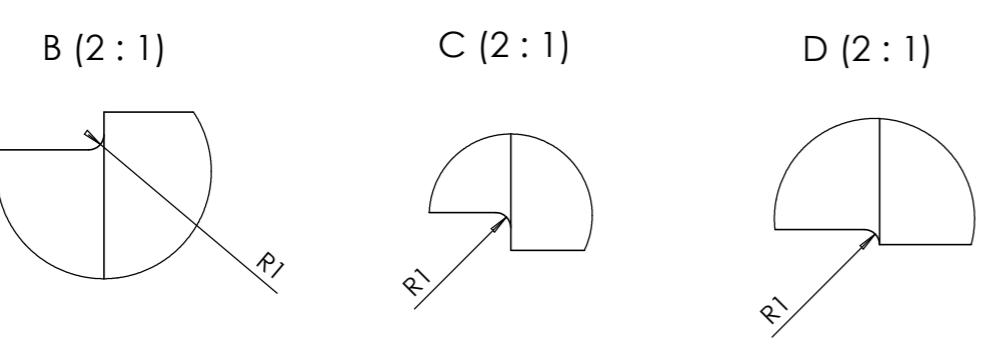
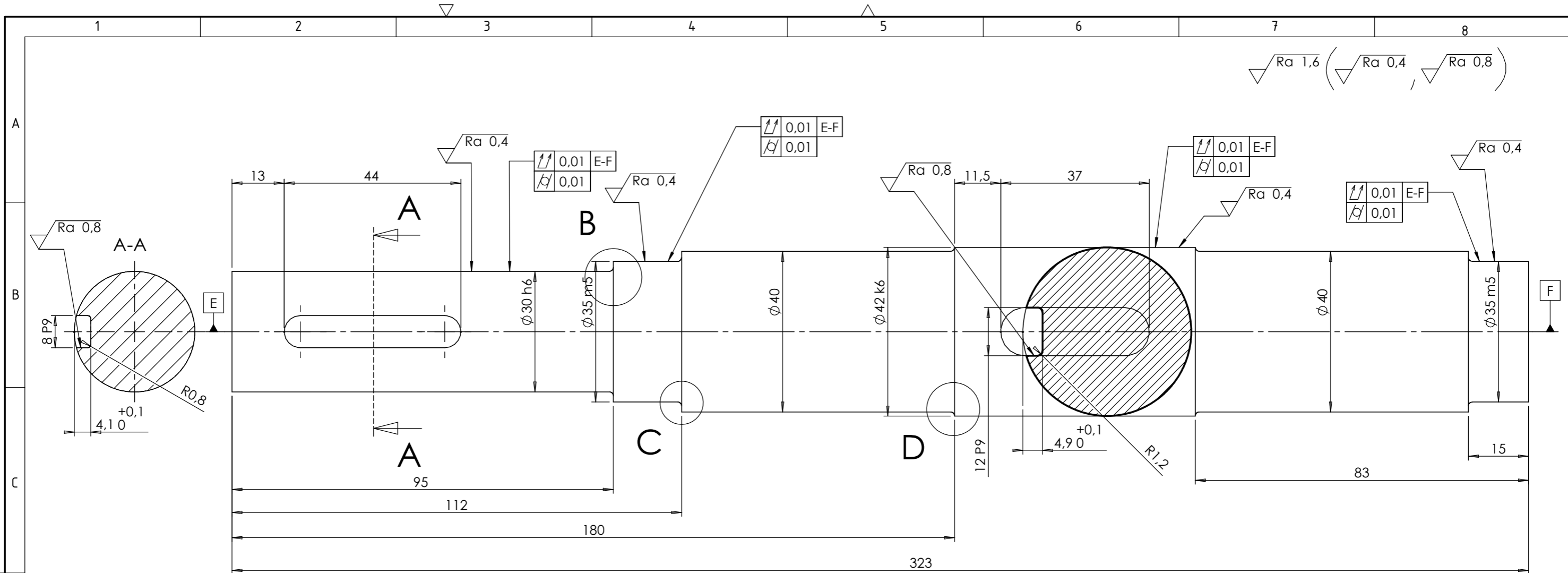
Optimiranje je provedeno na mjestu prijelaza s manjeg na veći promjer gdje je najveća koncentracija naprezanja. Usporedbom rezultata prije i nakon optimiranja može se vidjeti da je moguće smanjiti naprezanja za približno 14%. To je značajan pad vrijednosti naprezanja. Naprezanja u 18. ciklusu su se smanjila za približno 5% iako se promjer smanjio na tom mjestu. Prijelaz u tom slučaju slični na već postojeće rješenje oblika E prema DIN 509:2006 čime se pokazalo da su već postojeća konstrukcijska rješenja dobra. Optimiranjem vratila bez početnog zaobljenja na mjestu prijelaza daje sličan oblik geometrije koji je izabran u analitičkom. To se vidi u rezultatima naprezanja na mjestu prijelaza koja su približno jednakog iznosa. Daljnjim optimiranjem algoritam u drugom slučaju daje nepraktične oblike. Zanimljivo je da optimalan oblik prijelaza bio bi jednostavno zaobljenje.

LITERATURA

- [1] Vučković, K.: Vratila, podloge uz predavanja, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2019.
- [2] Decker, K. H.: Elementi strojeva, Tehnička knjiga, Zagreb, 2006.
- [3] Childs, P.: *Mechanical Design Engineering Handbook*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2019.
- [4] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Biblioteka Tehnička mehanika, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [5] Abaqus, *Finite element analysis for mechanical engineering and civil engineering*, „Why Abaqus?“, [Online]. Dostupno: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>
- [6] Abaqus 6.14 Online Documentation, Dassault Systèmes, 2014.
- [7] Abaqus, *Simulation of static and low speed dynamic events*, „Abaqus/Standard“, [Online]. Dostupno: [Abaqus/Standard - Simulation of static and low speed dynamic events \(3ds.com\)](#)
- [8] Abaqus, *Simulation of non-linear and transient dynamic events*, „Abaqus/Explicit“, [Online]. Dostupno: [Abaqus/Explicit - Simulation of non-linear and transient dynamic events \(3ds.com\)](#)
- [9] Querin O. M., Victoria M., Alonso C., Ansola R., Martí P.: *Topology Design Methods for Structural Optimization*, Academic Press Elsevier, London, 2017.
- [10] M. P. Bendsøe and O. Sigmund: *Topology optimization: Theory, methods and applications*, Springer, Heidelberg, Germany, 2009.
- [11] Khan U.: *An Introduction to Structural Optimization*, University of Toronto
- [12] Abaqus, *Abaqus Topology Optimization Module (ATOM)*, [Online]. Dostupno: <https://www.3ds.com/fileadmin/PRODUCTS-SERVICES/SIMULIA/RESOURCES/SIMULIA-Abaqus-Topology-Optimization-Module.pdf>
- [13] Christensen P. W., Klarbring A.: *An Introduction to Structural Optimization*, Springer, Linköping, 2009.
- [14] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb, 1988.
- [15] SKF, *Bearing select*, [Online]. Dostupno: <https://www.skfbearingselect.com/#/type-arrangement/own-arrangement>
- [16] Horvat Z. i suradnici, Vratilo (proračun), FSB, Zagreb

PRILOZI

I. Tehnička dokumentacija



Napomena:

- Sve oštre bridove skositi na 1x45°
- Sva nekotirana zaobljenja napraviti kao R1

Projektirao	Datum	Ime i prezime	Potpis	
Razradio		Tomislav Temelj		
Crtao		Tomislav Temelj		
Pregledao				
Mentor		Tomislav Lesičar		

ISO TOLERANCIJE	
8 P9	-0,015 -0,051
12 P9	-0,018 -0,061
Ø 30 h6	0 -0,013
Ø 35 m5	+0,020 +0,009
Ø 42 k6	+0,018 +0,002

Objekt:		Objekt broj:	
Napomena:		R. N. broj:	
Materijal:	E295	Masa:	2,8 kg
Mjerilo originala:	1:1	Naziv:	Izlazno vratilo
Crtež broj:		EMVI-TT-12/2023	Pozicija:
			1
			Format: A3
			Listova: 1
			List: 1

