

# Računalna simulacija aktivnog hlađenja malog računala

---

**Berić, Luka**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:221591>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-16**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Luka Berić

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:  
Doc. dr. sc. Severino Krizmanić, dipl. ing.

Student:  
Luka Berić

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru na pruženoj pomoći pri izradi rada.

Zahvaljujem roditeljima za sve.

Luka Berić



|                                     |        |
|-------------------------------------|--------|
| Sveučilište u Zagrebu               |        |
| Fakultet strojarstva i brodogradnje |        |
| Datum                               | Prilog |
| Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1        |        |
| Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -           |        |

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Berić** JMBAG: **0035222186**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalna simulacija aktivnog hlađenja malog računala**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical simulation of single-board computer active cooling**

Opis zadatka:

Prilikom rada elektroničkog računala, cjelokupna snaga preuzeta iz strujnog izvora, u njegovim aktivnim komponentama disipira se putem topline u okoliš. Istodobno, kako bi se osigurao pouzdan rad, temperature pojedinih komponenti je potrebno održati unutar predviđenih temperaturnih intervala. Ovo se osigurava hlađenjem prisilnom ili prirodnom konvekcijom, te u posebnim slučajevima zasebnim sustavom hlađenja s rashladnom tekućinom i hladnjakom.

Radi tržišnih zahtjeva, poželjno je ostvariti što više računalne performanse, dok su mala računala zbog međusobne blizine aktivnih komponenti i malog kućišta više izložena mogućnosti pregrijavanja. Hlađenje slobodnom konvekcijom (tzv. "pasivno hlađenje") je često nedostavno, dok hlađenje prisilnom konvekcijom putem okolnog zraka dovodi do povećane razine buke i potrošnje energije.

U ovom radu potrebno je provesti računalnu simulaciju hlađenja malog računala (klase Arduino) rashladnom tekućinom i hladnjakom, koristeći metode računalne dinamike fluida. Pri izradi rada se preporučuje primjena slobodno dostupnog programskog paketa OpenFOAM koji se temelji na metodi konačnih volumena.

U sklopu rada potrebno je:

- pronaći geometrijski model računala i rashladnog sustava ili izraditi ga na temelju dostupne dokumentacije, te prema potrebi uvesti pojednostavljenja geometrije;
- obaviti sve postupke računalnog proračuna: prostorna diskretizacija geometrijskog modela, odabir i podešavanje numeričkog postupka, post-procesiranje rješenja;

Rad treba sadržavati:

- uvod;
- opis problema i metoda primijenjenih za njihovo rješavanje;
- odgovarajuće prikaze dobivenih rezultata i osvrt na rezultate;
- zaključke.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2022

Datum predaje rada:

1. rok: 20. 2. 2023.  
2. rok (izvanredni): 10. 7. 2023.  
3. rok: 18. 9. 2023.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 27. 2. – 3. 3. 2023.  
2. rok (izvanredni): 14. 7. 2023.  
3. rok: 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Severino Krizmanić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

**SADRŽAJ**

|  |             |
|--|-------------|
| <b>SADRŽAJ</b>   | <b>I</b>    |
| <b>POPIS SLIKA</b>   | <b>III</b>  |
| <b>POPIS TABLICA</b>   | <b>IV</b>   |
| <b>POPIS OZNAKA</b>  | <b>V</b>    |
| <b>SAŽETAK</b>   | <b>VIII</b> |
| <b>SUMMARY</b>   | <b>IX</b>   |
| <b>1. UVOD</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1. Fluid . . . . .   | 1           |
| 1.2. Mehanika fluida . . . . .                                 | 1           |
| 1.3. Matematički model . . . . .                               | 2           |
| 1.4. Rješavanje problema računalnom dinamikom fluida . . . . . | 4           |
| <b>2. DINAMIKA FLUIDA</b>                                      | <b>6</b>    |
| 2.1. Materijalna derivacija . . . . .                          | 6           |
| 2.2. Leibnizovo pravilo . . . . .                              | 7           |
| 2.3. Reynoldsov transportni teorem . . . . .                   | 9           |
| 2.4. Osnovni zakoni . . . . .                                  | 9           |
| 2.4.1. Zakon očuvanja mase . . . . .                           | 10          |
| 2.4.2. Zakon količine gibanja . . . . .                        | 11          |
| 2.4.3. Zakon očuvanja energije . . . . .                       | 12          |
| 2.5. Konstitutivne jednačbe . . . . .                          | 13          |
| 2.5.1. Newtonov zakon viskoznosti . . . . .                    | 13          |
| 2.5.2. Fourierov zakon provođenja topline . . . . .            | 13          |
| 2.5.3. Kalorička jednačba stanja . . . . .                     | 14          |
| 2.6. Konačni oblici osnovnih zakona . . . . .                  | 15          |
| 2.7. Opća skalarna jednačba transporta . . . . .               | 15          |
| <b>3. TURBULENCIJA</b>   | <b>16</b>   |
| 3.1. Statistički opis turbulencije . . . . .                   | 16          |
| 3.2. Reynoldsove jednačbe . . . . .                            | 18          |
| 3.3. Model turbulencije . . . . .                              | 18          |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. METODA KONAČNIH VOLUMENA</b>                              | <b>20</b> |
| 4.1. Diskretizacija opće skalarne jednačbe transporta . . . . . | 21        |
| 4.1.1. Izvor i ponor . . . . .                                  | 21        |
| 4.1.2. Gradijent . . . . .                                      | 21        |
| 4.1.3. Numeričke sheme . . . . .                                | 23        |
| 4.1.3.1. Shema centralnih razlika . . . . .                     | 23        |
| 4.1.3.2. Uzvodna shema . . . . .                                | 23        |
| 4.1.4. Konvekcija . . . . .                                     | 24        |
| 4.1.5. Difuzija . . . . .                                       | 24        |
| 4.2. Linearni sustav jednačbi . . . . .                         | 25        |
| <b>5. SIMULACIJA</b>  | <b>26</b> |
| 5.1. Predprocesor . . . . .                                     | 26        |
| 5.1.1. Geometrijski model i geometrijska mreža . . . . .        | 26        |
| 5.2. Procesor. . . . .  | 30        |
| 5.2.1. Rješavač. . . . .  | 30        |
| 5.2.2. Rubni uvjeti. . . . .                                    | 32        |
| 5.3. Postprocesor. . . . .                                      | 36        |
| 5.3.1. Početni rezultati. . . . .                               | 36        |
| 5.3.2. Poboljšani rezultati. . . . .                            | 39        |
| <b>6. ZAKLJUČAK</b>   | <b>42</b> |
| <b>LITERATURA</b>   | <b>43</b> |
| <b>PRILOZI</b>  | <b>45</b> |

**POPIS SLIKA**

|          |  |    |
|----------|--|----|
| Slika 1  | Grane mehanike fluida. . . . .   | 2  |
| Slika 2  | Dobivanje matematičkog modela. . . . .                                   | 3  |
| Slika 3  | Proces rješavanja problema računalnom dinamikom fluida. . . . .          | 5  |
| Slika 4  | Vremenski promjenjivo područje. . . . .                                  | 8  |
| Slika 5  | Materijalni volumen na koji se primjenjuju osnovni zakoni. . . . .       | 10 |
| Slika 6  | Pulsirajući karakter fizikalne veličine. . . . .                         | 16 |
| Slika 7  | Poliedar koji se koristi za diskretizaciju. . . . .                      | 20 |
| Slika 8  | Jednostavniji poliedar. . . . .  | 22 |
| Slika 9  | Shema centralnih razlika i uzvodna shema. . . . .                        | 23 |
| Slika 10 | Grafička kartica NVIDIA 8800 GTX [20]. . . . .                           | 26 |
| Slika 11 | Sklop grafičke kartice i vodenog bloka. . . . .                          | 27 |
| Slika 12 | Pojednostavljeni sklop. . . . .  | 27 |
| Slika 13 | Donja strana modificiranog vodenog bloka. . . . .                        | 28 |
| Slika 14 | Geometrijska mreža konačnih volumena. . . . .                            | 28 |
| Slika 15 | Donja strana mreže bloka. . . . .  | 29 |
| Slika 16 | Granični slojevi. . . . .  | 29 |
| Slika 17 | Stvorene zone. . . . .   | 30 |
| Slika 18 | Imenovane strane geometrije na koje se postavljaju rubni uvjeti. . . . . | 31 |
| Slika 19 | Temperature unutar procesora. . . . .                                    | 36 |
| Slika 20 | Temperaturno polje. . . . .  | 37 |
| Slika 21 | Strujnice. . . . .   | 38 |
| Slika 22 | Temperature unutar procesora za veće protoke. . . . .                    | 39 |
| Slika 23 | Temperature za protok 500 L/h. . . . .                                   | 40 |
| Slika 24 | Temperaturno polje za protok 450 L/h. . . . .                            | 41 |
| Slika 25 | Strujnice obojene temperaturom za protok 450 L/h. . . . .                | 41 |



**POPIS TABLICA**

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Tablica 1 | Rubni uvjeti za krutine . . . . .              | 33 |
| Tablica 2 | Rubni uvjeti za fluid. . . . .                 | 34 |
| Tablica 3 | Toplinski izvori. . . . .                      | 35 |
| Tablica 4 | Konačne temperature. . . . .                   | 36 |
| Tablica 5 | Usporedba temperatura. . . . .                 | 37 |
| Tablica 6 | Usporedba temperatura za veće protoke. . . . . | 40 |

## POPIS OZNAKA

## Latiničke oznake

| Oznaka                  | Opis   | Jedinica          |
|-------------------------|--|-------------------|
| $A_{ij}$                | Matrica koeficijenata  |                   |
| $A^k$                   | Površina $k$ -te strane $n$ stranog poliedra                         | $m^2$             |
| $b_i$                   | Vektor desne strane sustava  |                   |
| $c_p$                   | Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku                 | J/kgK             |
| $c_v$                   | Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu              | J/kgK             |
| $D_{ij}$                | Tenzor brzine deformacije  | 1/s               |
| $d_i^k$                 | Vektor koji spaja težišta susjednih volumena                         | m                 |
| $e$                     | Specifična ukupna energija   | J/kg              |
| $u$                     | Specifična unutarnja energija  | J/kg              |
| $\mathbb{F}$            | Proizvoljna fizikalna veličina                                       |                   |
| $\overline{\mathbb{F}}$ | Vremenski osrednjena vrijednost fizikalne veličine                   |                   |
| $f_i$                   | Specifična masena sila   | N/kg              |
| $\mathbb{F}'$           | Pulsirajući dio fizikalne veličine                                   |                   |
| $h$                     | Specifična entalpija   | J/kg              |
| $I$                     | Turbulentna intenzivnost   |                   |
| $k$                     | Kinetička energija turbulencije                                      | $m^2/s^2$         |
| $k$                     | Proizvoljna strana $n$ stranog poliedra                              |                   |
| $L$                     | Karakteristična duljina  | m                 |
| $m$                     | Masa   | kg                |
| $n$                     | Broj strana proizvoljnog poliedra                                    |                   |
| $n_i$                   | Jedinični vektor normale   |                   |
| $n_i^k$                 | Jedinični vektor vanjske normale $k$ -te strane $n$ stranog poliedra |                   |
| $p$                     | Statički tlak  | Pa                |
| $\bar{p}$               | Vremenski osrednjen tlak   | Pa                |
| $q_i$                   | Vektor gustoće toplinskog toka                                       | W/m <sup>2</sup>  |
| $q_V^k$                 | Protok kroz $k$ -tu stranu $n$ stranog poliedra                      | m <sup>3</sup> /s |

|             |   |          |
|-------------|---|----------|
| $S$         | Površina  | $m^2$    |
| $s_i^k$     | Vektor normale na $k$ -tu stranu $n$ stranog poliedra       | $m^2$    |
| $S_k$       | Površina proizvoljne strane $n$ stranog poliedra            | $m^2$    |
| $S_{KV}$    | Oplošje kontrolnog volumena                                 | $m^2$    |
| $S_M$       | Oplošje materijalnog volumena                               | $m^2$    |
| $S_\varphi$ | Izvorski član opće skalarne jednačbe transporta             |          |
| $T$         | Temperatura   | K        |
| $t$         | Vrijeme   | s        |
| $U$         | Brzina na ulazu u vodeni blok                               | m/s      |
| $u_i^k$     | Vektor brzine kroz $k$ -tu stranu $n$ stranog poliedra      | m/s      |
| $u_j$       | Brzina gibanja čestica na rubu područja $\Omega$            | m/s      |
| $V$         | Volumen   | $m^3$    |
| $v$         | Iznos vektora brzine čestice                                | m/s      |
| $v$         | Specifični volumen  | $m^3/kg$ |
| $v_i$       | Vektor brzine strujanja čestice                             | m/s      |
| $v'_i$      | Pulsirajući dio vektora brzine                              | m/s      |
| $\bar{v}_i$ | Vremenski osrednjen vektor brzine                           | m/s      |
| $V_{KV}$    | Kontrolni volumen   | $m^3$    |
| $V_M$       | Materijalni volumen   | $m^3$    |
| $x_i$       | Vektor položaja čestice                                     | m        |
| $y_j$       | Vektor položaja čestice u trenutku $t = 0$                  | m        |
| $x_i^k$     | Vektor položaja težišta $k$ -te strane $n$ stranog poliedra | m        |
| $x_i^N$     | Vektor položaja težista susjednog kontrolnog volumena       | m        |
| $x_i^P$     | Vektor položaja težista kontrolnog volumena                 | m        |
| $x_j$       | Vektor nepoznatih varijabli                                 |          |

### Grčke oznake

| Oznaka        | Opis                                       | Jedinica  |
|---------------|--|-----------|
| $\delta_{ij}$ | Kroneckerov delta simbol                   |           |
| $\epsilon$    | Disipacija kinetičke energije turbulencije | $m^2/s^3$ |

|                  |  |                   |
|------------------|--|-------------------|
| $\Gamma$         | Koeficijent difuzije   | kg/ms             |
| $\lambda$        | Toplinska provodnost   | W/mK              |
| $\mu$            | Dinamička viskoznost   | Pa s              |
| $\mu_t$          | Koeficijent turbulentne viskoznosti                                      | Pa s              |
| $\mu_V$          | Volumenska viskoznost  | Pa s              |
| $\nu$            | Kinematička viskoznost   | m <sup>2</sup> /s |
| $\Omega$         | Proizvoljno područje prostora  | m <sup>3</sup>    |
| $\Phi$           | Volumenska gustoća fizikalne veličine                                    |                   |
| $\varphi$        | Masena gustoća fizikalne veličine  |                   |
| $\varphi^k$      | Vrijednost fizikalne veličine u težistu $k$ -te strane $n$ -nog poliedra |                   |
| $\varphi^N$      | Vrijednost fizikalne veličine u težistu susjednog kontrolnog volumena    |                   |
| $\varphi^P$      | Vrijednost fizikalne veličine u težistu kontrolnog volumena              |                   |
| $\partial\Omega$ | Rub Proizvoljnog područja prostora                                       | m <sup>2</sup>    |
| $\rho$           | Gustoća fluida   | kg/m <sup>3</sup> |
| $\Sigma_{ij}$    | Simetrični tenzor viskoznih naprezanja                                   | Pa                |
| $\sigma_i$       | Vektor naprezanja  | Pa                |
| $\sigma_{ij}$    | Tenzor naprezanja  | Pa                |

## Bezdimenzijski brojevi

| Oznaka | Opis            |   |
|--------|-----------------|---|
| Kn     | Knudsenov broj  | 1 |
| M      | Machov broj     | 1 |
| Re     | Reynoldsov broj | 1 |

## SAŽETAK

U ovom radu su korišteni principi računalne dinamike fluida kako bi se opisao problem prijenosa topline između više različitih tvari koje su u međusobnom dodiru. Takav problem se na engleskom i u fizici naziva "conjugate heat transfer". Analizira se prijenos topline između grafičke kartice i vodenog bloka unutar kojeg struji voda koja će prisilnom konvekcijom hladiti procesor, memoriju i druge komponente. Cilj je provjeriti učinkovitost hlađenja geometrije [21] za grafičku karticu NVIDIA GTX 8800 te predložiti eventualne promjena tako da hlađenje bude bolje i da se postignu manje temperature na procesoru. Geometrijska mreža izrađena je koristeći programski paket *Salome*, a proračun metodom konačnih volumena je izvršen koristeći programski paket *OpenFOAM* u kojem je korišten  $k - \epsilon$  model turbulencije sa standardnim zidnim funkcijama. Zanimati će nas stacionarno rješenje.

Ključne riječi: računalna dinamika fluida, prijenos topline, konvekcija, vodeno hlađenje, grafička kartica.

## SUMMARY

In this work, principles of computational fluid dynamics were used to describe the problem of heat transfer between multiple different bodies in contact with each other. Such a problem in physics is referred to as "conjugate heat transfer". The heat transfer between a graphics card and a water block through which water flows to forcibly cool the processor, memory, and other components is analyzed. The goal is to assess the cooling efficiency of the geometry given by [21] for the NVIDIA GTX 8800 graphics card and propose potential changes to improve cooling and achieve lower temperatures on the processor. The geometric mesh was created using the software package *Salome* and the calculation was performed using the finite volume method with the *OpenFOAM* software, utilizing the  $k - \epsilon$  turbulence model with standard wall functions. We will be interested in the steady-state solution.

Keywords: computational fluid dynamics, heat transfer, convection, water cooled, graphics card.

# 1. UVOD

## 1.1. Fluid

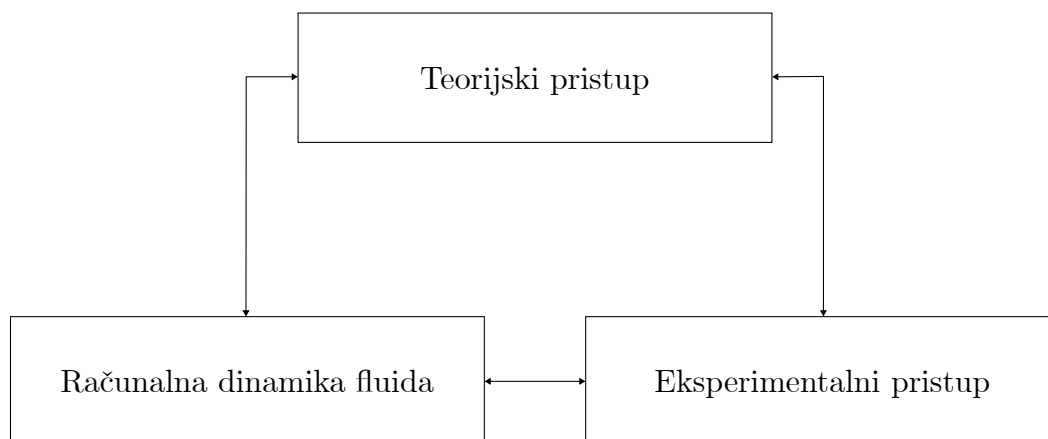
Fluid je tvar koja pod djelovanjem ma kako malog smičnog naprezanja započne strujati odnosno neprestano se deformirati, fluide možemo uglavnom podijeliti na kapljevine i plinove. Kapljevine su tvari koje se teže stlačujuči prilikom strujanja, to znači da se gustoća može smatrati konstantnom prilikom strujanja. Plinovi su tvari koje se lakše stlačuju prilikom strujanja, to znači da se gustoća ne može smatrati konstantnom prilikom strujanja. Kriterij koji definira dali će strujanje biti stlačivo ili nestačivo je Machov broj koji je definiran na sljedeći način

$$M = \frac{v}{c} = \frac{\text{brzina gibanja fluida}}{\text{brzina širenja zvuka u fluidu}}. \quad (1.1)$$

Granica je fleksibilna, ali standardno se uzima da ako je  $M > 0,3$  onda strujanje smatramo stlačivim [23].

## 1.2. Mehanika fluida

Mehanika fluida je grana fizike koja se bavi proučavanjem fluida u mirovanju, gibanju i pod djelovanjem sila. Stoga razlikujemo statiku, kinematiku i dinamiku fluida. Povijesno su se problemi rješavali teorijski i uglavnom eksperimentalno. Teorijski pristup se temelji na analitičkom rješavanju matematičkih modela strujanja fluida. Većina problema koji su povezani za strujanje fluida opisani su nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama. Takve jednačbe nemaju opće analitičko rješenje. To posebno vrijedi za turbulentno strujanje, koje se zbog stohastičke prirode ne može niti opisati analitički. Zato su se u prošlosti problemi mehanike fluida uglavnom rješavali eksperimentalnim pristupom. Eksperimentalnim pristupom dobiva se ograničeni broj informacija o nekoj pojavi, a to znači da iz jednog rezultata mjerenja ne možemo zaključivati o utjecaju pojedinih parametra, kao što se to može u slučaju analitičkog rješenja. Računalna dinamika fluida je najnoviji način rješavanja problema u mehanici fluida. Osnovna ideja je numeričko rješavanje matematičkih modela koji opisuju strujanje fluida. Svaka metoda rješavanja problema u mehanici fluida nadopunjuje ostale metode, za velike i bitne proračune je potrebno kombinirati sve tri metode tj. teorijskim pristupom dobijemo model koji diskretiziramo i riješimo metodama računalne dinamike fluida, to rješenje provjerimo eksperimentom i poboljšamo ako se rezultati ne poklapaju dovoljno dobro. Kako eksperiment može nadopuniti proračun dobiven numerički tako numerički proračun može poboljšati eksperiment [22]. Taj proces je prikazan na slici 1.



Slika 1. Grane mehanike fluida.

### 1.3. Matematički model

Fizikalni model predstavlja aproksimaciju stvarnih pojava koje se pokušavaju opisati. Matematički zapis fizikalnog modela se naziva matematičkim modelom. Matematički model je definiran sustavom parcijalnih diferencijalnih jednačbi zajedno sa aproksimacijama uvedenim fizikalnim modelom. Takve aproksimacije se također zovu hipotezama i one se uvode kako bih se pojednostavio matematički model, a da se ne izgubi preciznost njegova rješenja. Najčešće aproksimacije koje se uvode su:

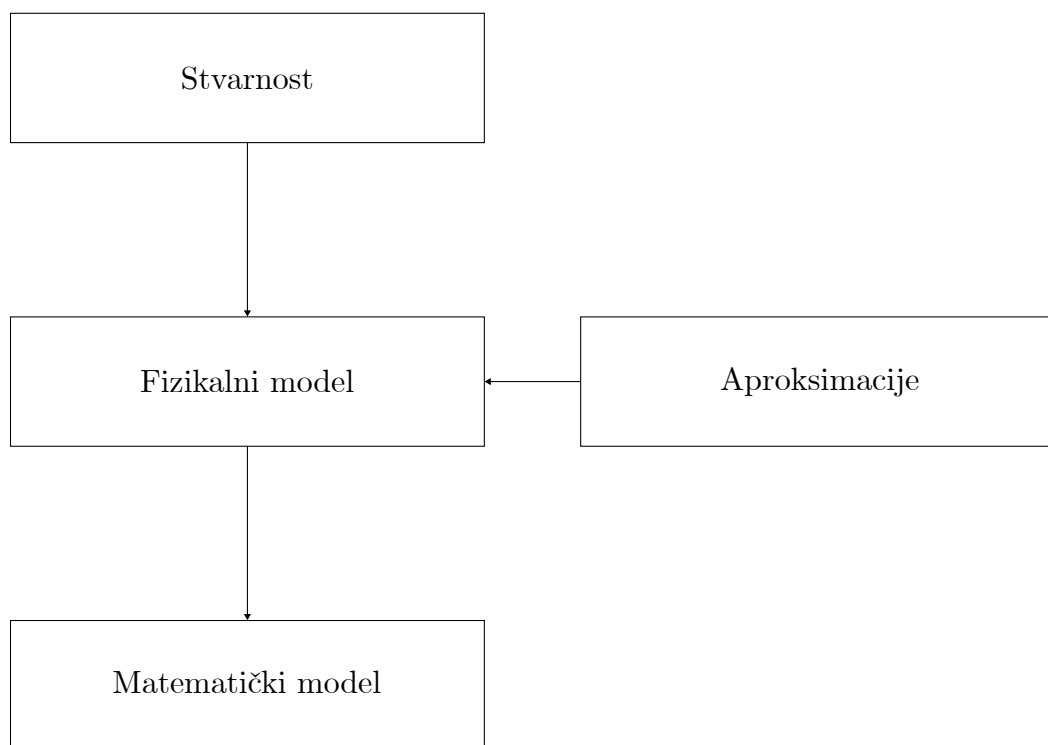
- ▷ Hipoteza kontinuuma
- ▷ Homogenost
- ▷ Izotropnost
- ▷ Stacionarnost

Najbitnija je hipoteza kontinuuma. Ona definira da je fluid tvar koja u potpunosti ispunjava prostor i zadržava sva svoja fizikalna svojstva i za slučaj smanjivanja volumena u točku. Čestica ima infitezimalni volumen koji označavamo sa  $dV$  i zauzima samo jednu točku prostora što istovremeno znači da se u jednoj točki prostora može nalaziti samo jedna čestica fluida. Uvjet primjenjivosti hipoteze kontinuuma daje Knudsenov broj koji je definiran na sljedeći način

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L} = \frac{\text{slobodna putanja molekula}}{\text{karakteristična duljina}}. \quad (1.2)$$



Slobodna putanja molekula je prosječna vrijednost puta koju molekula prijeđe između dva sudara, a karakteristična duljina je definirana geometrijom problema. Ako je  $Kn \ll 1$  možemo primijeniti hipotezu kontinuuma, a ako je  $Kn > 100$  onda možemo smatrati da su sudari molekula toliko rijetki da se može promatrati svaka molekula za sebe te ne možemo primijeniti hipotezu kontinuuma. Hipoteza kontinuuma je jako bitna jer omogućuje primjenu diferencijalnog i integralnog računa u mehanici fluida. Aproksimacija homogenosti znači da su fizikalne veličine iste u svim točkama prostora u kojem je problem definiran. Aproksimacija izotropnosti znači da su fizikalne veličine iste u svim smjerovima prostora u kojem je problem definiran. Aproksimacija stacionarnosti znači da se fizikalne veličine u problemu ne mijenjaju u odnosu na vrijeme, odnosno nisu funkcija vremena [22, 24, 25, 23]. Slika 2 prikazuje proces dobivanja matematičkog modela.



**Slika 2.** Dobivanje matematičkog modela.

#### 1.4. Rješavanje problema računalom dinamikom fluida

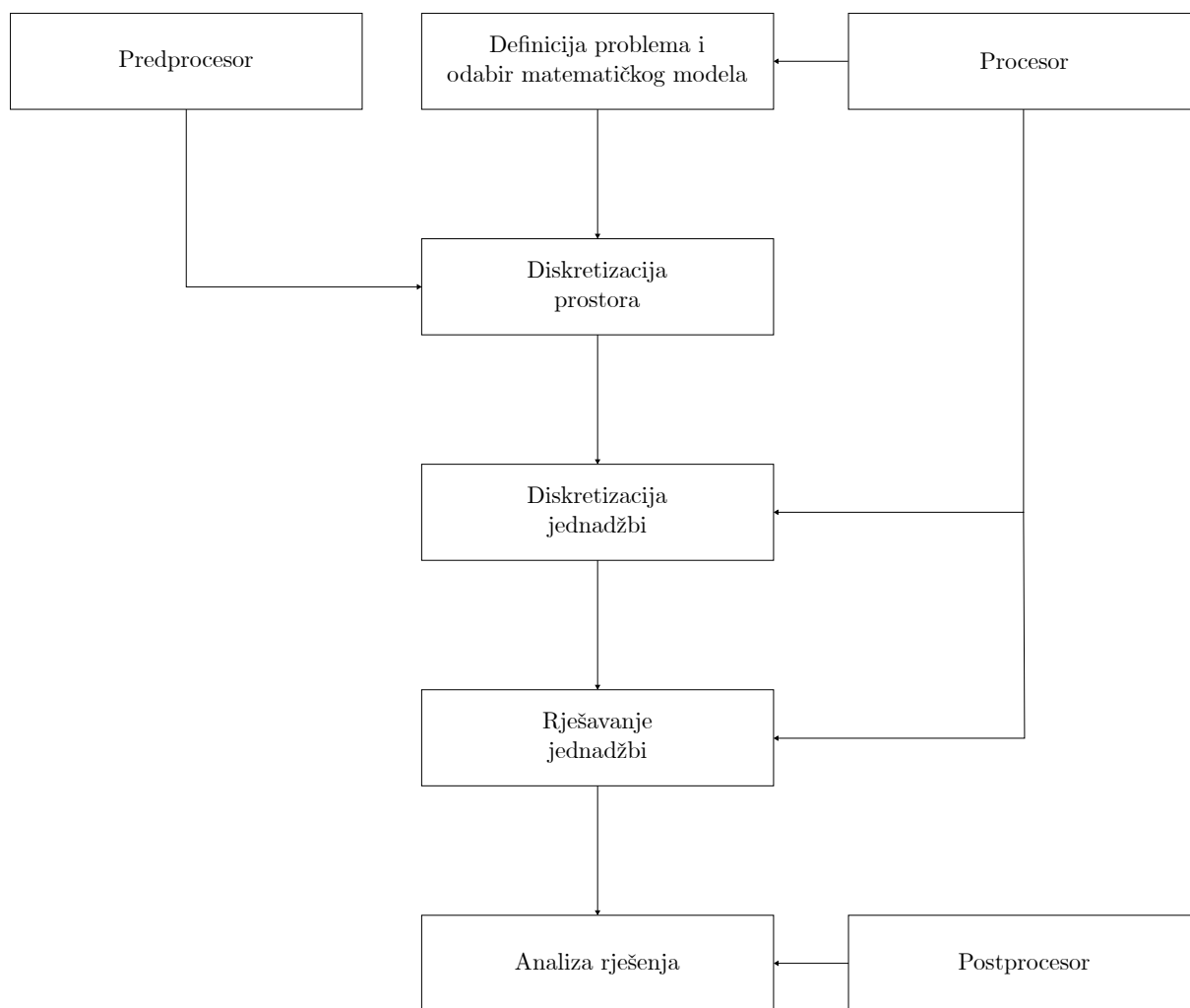
Postupak rješavanja problema računalom dinamikom fluida se može općenito podijeliti u tri glavna koraka

1. Predprocesor
2. Procesor
3. Postprocesor

U prvom koraku se definira problem i odabire se matematički model koji ga opisuje. Kada bi se sustav mogao integrirati i riješiti analitički bile bi nepoznate integracijske konstante odnosno funkcije, a takvih funkcija ima bezbroj. Nas zanimaju samo one funkcije koje definiraju rješenje našeg problema, a one se mogu odrediti iz rubnih i početnih uvjeta problema. Rubni i početni uvjeti daju specifičnost problemu i definiraju se na temelju prirode i geometrije problema. U drugom koraku se rješava model, taj korak se može rastaviti na tri koraka:

1. Diskretizacija prostora
2. Diskretizacija jednadžbi
3. Rješavanje jednadžbi

Diskretiziramo područje proračuna što znači da moramo podijeliti volumen u kojem će se računati fizikalna veličina na konačan broj manjih volumena. Fizikalne veličine koje nas zanimaju u problemu će se računati u težištu definiranih volumena. Rezultat takve geometrijske diskretizacije velikog volumena na manje volumene se naziva geometrijska mreža. Nakon što diskretiziramo područje proračuna vršimo diskretizaciju jednadžbi modela. Računalna dinamika fluida koristi metodu konačnih volumena za diskretizaciju prostora i metodu konačnih razlika za diskretizaciju vremena. Sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se procesom prostorne i vremenske diskretizacije reducira na sustav algebrarskih jednadžbi koje mogu biti linearne i nelinearne ovisno o tome dali je parcijalna diferencijalna jednadžba linearna ili nelinearna. Nelinearni sustav jednadžbi rješava se iterativnim postupkom npr. Newton-Raphsonovom metodom koji u sebi sadrži rješavanje sustava linearnih algebrarskih jednadžbi. Zadnji korak je riješiti dobiveni linearni sustav algebrarskih jednadžbi koristeći pravila linearne algebre. Kada se dobije rješenje slijedi njegova analiza koja uključuje dobivanje slikovitih prikaza polja koja se javljaju u modelu te dijagramski prikaz željenih polja [22]. Slika 3 prikazuje opisani proces rješavanja problema.



Slika 3. Proces rješavanja problema računalnom dinamikom fluida.

## 2. DINAMIKA FLUIDA

Kod matematičkog zapisa jednažbi ćemo koristiti indeksnu notaciju te Einsteinovo pravilo o zbrajanju po ponovljenim indeksima.

### 2.1. Materijalna derivacija

Kod proučavanja strujanja fluida postoje dva glavna matematička opisa:

1. Lagrangeov opis strujanja fluida
2. Eulerov opis strujanja fluida

Lagrangeov opis se temelji na proučavanju gibanja svake čestice nekog volumena u kojem se nalazi fluid. Za takav opis strujanja fluida je definiran volumen koji se u svakom trenutku sastoji od istih čestica fluida i naziva se materijalnim volumenom. Svaka čestica je u početnom vremenskom trenutku definirana svojim položajem u materijalnom volumenu, taj položaj je definiran jednadžbom gibanja kada je  $t = 0$  odnosno identitet čestice možemo definirati vektorom položaja  $y_j = x_j(t = 0)$ , stoga jednadžba gibanja proizvoljne čestice  $y_j$  unutar materijalnog volumena glasi:

$$x_i = x_i(y_j, t). \quad (2.1)$$

gdje je  $x_i$  indeksni zapis vektora položaja čestice  $y_j$  u vremenskom trenutku  $t$ . Proizvoljna ekstenzivna fizikalna veličina vezana za česticu fluida se može definirati na sličan način. Ako sa  $\mathbb{F}$  označimo proizvoljnu ekstenzivnu fizikalnu veličinu onda možemo pisati da je  $\mathbb{F}(y_j, t)$  vrijednost iste fizikalne veličine vezane za česticu  $y_j$  u vremenskom trenutku  $t$ . Brzinu promjene fizikalne veličine čestice možemo definirati jednostrukim vremenskim diferenciranjem [24]. Lagrangeov opis ima ograničenu primjenu jer nije praktično pratiti gibanje svake čestice fluida, češće korišteni opis strujanja fluida je Eulerov. Eulerov opis se temelji na poljima fizikalnih veličina. Promatramo iste točke prostora kroz koji će fluid strujati, takav prostor nazivamo kontrolnim volumenom [13]. Usvajanjem hipoteze kontinuuma možemo zaključiti da ako se u jednoj točki prostora nalazi samo jedna čestica fluida to znači da svaka točka kontrolnog volumena predstavlja vrijednost fizikalne veličine one čestice koja se u promatranom vremenskom trenutku nalazi u toj točki. Iz navedenog možemo zaključiti da će proizvoljna fizikalna veličina biti ovisna o prostoru i vremenu i možemo pisati da je  $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x_i, t)$ .

Brzinu promjene takve fizikalne veličine možemo definirati preko totalnog diferencijala na sljedeći način [19]

$$\begin{aligned}
 d\mathbb{F} &= \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial t} dt \\
 \Rightarrow \frac{d\mathbb{F}}{dt} &= \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial t} \\
 \Rightarrow \frac{D\mathbb{F}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jednadžba 2.2 se naziva materijalnom derivacijom fizikalne veličine  $\mathbb{F}$ . Vidimo da je brzina promjene fizikalne veličine koja je vezana za česticu fluida ovisna o brzini strujanja fluida i vremenu. Naime, fluid će svojim strujanjem prenositi fizikalnu veličinu kroz prostor brzinom strujanja fluida  $v_i$ , takav prijenos se naziva konvekcija.

## 2.2. Leibnizovo pravilo

Kada se izvode osnovni zakoni potrebno je poznavati brzinu promjene fizikalnog svojstva unutar proizvoljnog vremenski promjenjivog volumena. Budući da tražimo kako se fizikalna veličina mijenja unutar volumena korisno je definirati volumensku i masenu gustoću fizikalne veličine

$$\Phi = \frac{d\mathbb{F}}{dV} \tag{2.3}$$

$$\varphi = \frac{d\mathbb{F}}{dm}. \tag{2.4}$$

$\Phi$  predstavlja volumensku gustoću fizikalne veličine, a  $\varphi$  masenu gustoću fizikalne veličine odnosno specifično fizikalno svojstvo. Te dvije veličine su povezane gustoćom tvari tj.

$$\Phi = \rho\varphi. \tag{2.5}$$

Budući da smo definirali da je  $\mathbb{F}$  ekstenzivna veličina to znači da će  $\varphi$  biti intenzivna fizikalna veličina [22]. Brzinu promjene fizikalne veličine unutar proizvoljnog vremenski promjenjivog volumena možemo matematički napisati na sljedeći način

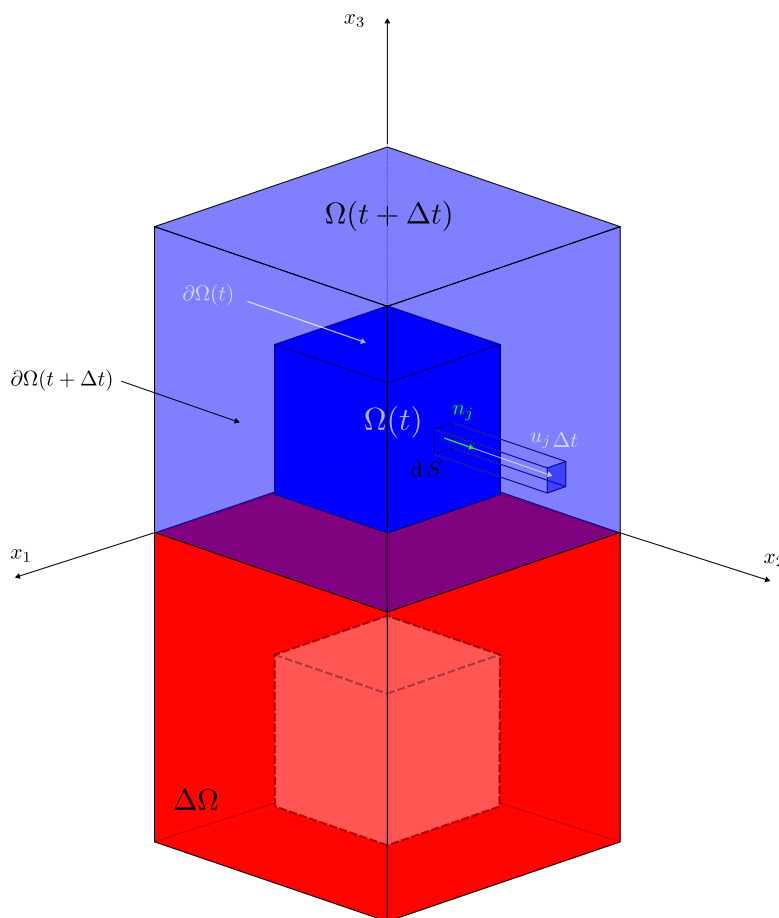
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Phi(x_i, t) dV. \tag{2.6}$$

$\Omega$  je proizvoljno područje prostora koje se mijenja se s vremenom. Izraz će biti diferencijabilan jer fizikalna veličina mora biti kontinuirano raspodjeljena po prostoru. Izraz sada možemo raspisati koristeći definiciju diferenciranja

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Phi(x_i, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t)} \Phi(x_i, t + \Delta t) dV - \int_{\Omega(t)} \Phi(x_i, t) dV}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Slika 4 prikazuje proizvoljno vremenski promjenjivo područje. Sa slike vidimo da se područje  $\Omega(t + \Delta t)$  može prikazati kao zbroj  $\Omega(t)$  i  $\Delta\Omega$  koji je na slici obojan u crveno. Integral po području integracije se može rastaviti na dva integrala po odvojenim područjima stoga možemo pisati

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Phi(x_i, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega(t)} [\Phi(x_i, t + \Delta t) - \Phi(x_i, t)] dV + \int_{\Delta\Omega} \Phi(x_i, t + \Delta t) dV}{\Delta t}. \quad (2.8)$$



Slika 4. Vremenski promjenjivo područje.

Primjetimo kako prvi član brojnika desne strane gornje jednadžbe predstavlja parcijalnu derivaciju volumenske gustoće s obzirom na vrijeme. Diferencijal volumena se može prikazati preko volumena paralelepipeda koji je definiran plohom  $dS$  i visinom strane  $u_j n_j \Delta t$  i jednak je  $dV = u_j n_j \Delta t dS$  gdje je  $u_j$  brzina gibanja čestica na rubu područja  $\Omega$ . Ako uvstimo taj volumen u gornju jednadžbu onda će volumenski integral prijeći na površinski pa konačno dobijemo Leibnizovo pravilo koje glasi [18]

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Phi dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \oint_{\partial \Omega(t)} \Phi u_j n_j dS. \quad (2.9)$$

$\partial \Omega$  je rub područja  $\Omega$  i ono se također mijenja s vremenom.

### 2.3. Reynoldsov transportni teorem

Ako primjenimo Leibnizovo pravilo na kontrolni volumen čije su granice fiksne onda možemo pisati

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \Phi dV = \int_{V_{KV}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV. \quad (2.10)$$

U trenutku poklapanja materijalnog i kontrolnog volumena brzina lokalne promjene je ista, kao i površinski integrali, koristeći Leibnizovo pravilo možemo pisati [24]

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \Phi dV = \int_{V_{KV}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \oint_{S_{KV}} \Phi v_j n_j dS. \quad (2.11)$$

Jednadžba 2.11 je poznata pod nazivom Reynoldsov transportni teorem.

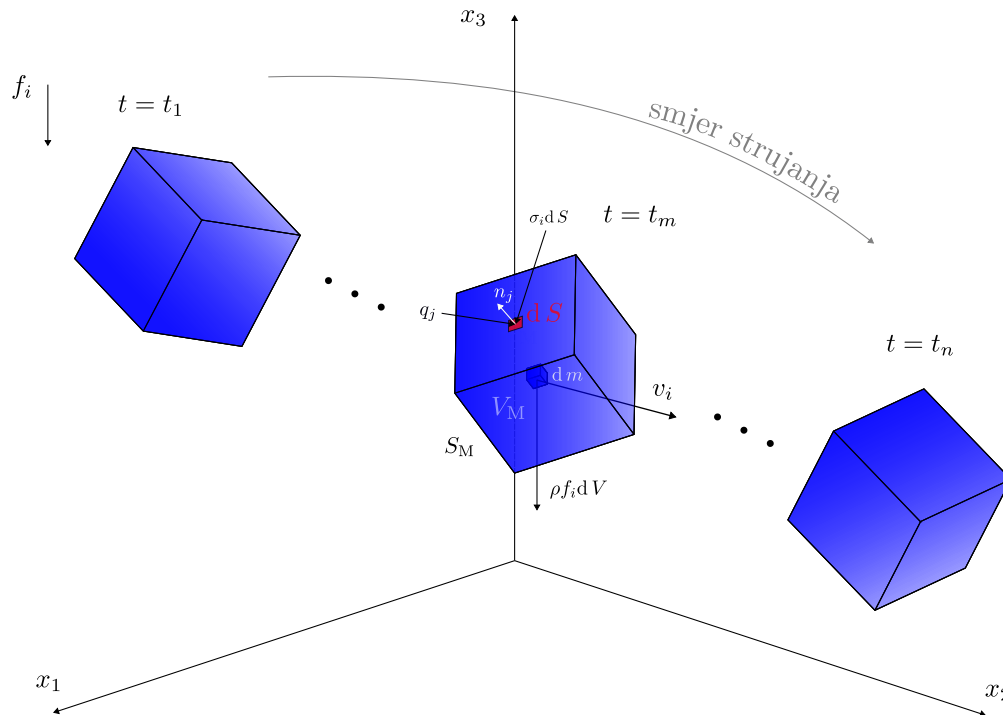
### 2.4. Osnovni zakoni

Svi problemi dinamike fluida su definirani osnovnim zakonima fizike:

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja (drugi Newtonov zakon)
3. Zakon očuvanja energije (prvi zakon termodinamike)
4. Drugi zakon termodinamike

postoji još i zakon očuvanja momenta količine gibanja, ali taj zakon će se reducirati na simetričnost tenzora naprežanja fluida pod pretpostavkom da u fluidu ne postoje momenti raspodjeljeni po površini fluida ili unutar fluida. Nama će biti bitna prva tri zakona, a četvrti je koristan u procjeni i validaciji fizikalnosti rješenja problema.

Svi navedeni zakoni su originalno definirani za materijalni volumen, koristeći Reynoldsov transportni teorem vršimo transformaciju zakona iz materijalnog u kontrolni volumen. Slika 5 prikazuje primjer strujanja materijalnog volumena na kojeg se primjenjuju osnovni zakoni.



Slika 5. Materijalni volumen na koji se primjenjuju osnovni zakoni.

#### 2.4.1. Zakon očuvanja mase

Zakon riječima glasi

**Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli.**

Taj zakon se može matematički napisati na sljedeći način [25]

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho dV = 0. \quad (2.12)$$

primjenom Reynoldsovog transportnog teorema možemo pisati

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_{KV}} \rho v_j n_j dS = 0. \quad (2.13)$$



Ako sada primjenimo Gaussov teorem možemo pisati

$$\int_{V_{KV}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (2.14)$$

Primjenom hipoteze kontinuuma gornji izraz mora vrijediti za bilo koji kontrolni volumen, pa čak i ako je taj kontrolni volumen čestica fluida sa volumenom  $dV$ . Podintegralna fukcija se ne mijenja unutar volumena kojeg definira čestica, imajući sve to na umu možemo pisati

$$\begin{aligned} \int_{V_{KV}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} \right) d(dV) &= 0 \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} \right) dV &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Gornja jednadžba je konzervativna diferencijalna forma zakon očuvanja mase. Ako je strujanje nestlačivo, što znači da je  $\rho = \text{konst.}$  gornja jednadžba se reducira na jednadžbu kontinuiteta

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.16)$$

#### 2.4.2. Zakon količine gibanja

Zakon riječima glasi

**Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je zbroju vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen.**

Taj zakon se može matematički napisati na sljedeći način [25]

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho v_i dV = \int_{V_M(t)} \rho f_i dV + \oint_{S_M(t)} \sigma_i dS. \quad (2.17)$$

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema i definicije vektora naprezanja preko tenzora naprezanja možemo pisati

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \oint_{S_{KV}} \rho v_i v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \oint_{S_{KV}} n_j \sigma_{ji} dS. \quad (2.18)$$

Primjenom Gaussovog teorema možemo pisati

$$\int_{V_{KV}} \left( \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_{KV}} \left( \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) dV. \quad (2.19)$$

Ako iskoristimo hipotezu kontinuuma možemo pisati

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (2.20)$$

Gornja jednačba je konzervativna diferencijalna forma zakona količine gibanja. Ona se može dalje raspisati ako poznajemo matematički model tenzora naprežanja  $\sigma_{ij}$ , a to će biti objašnjeno kasnije kada budu definirane konstitutivne jednačbe.

### 2.4.3. Zakon očuvanja energije

Zakon riječima glasi

**Brzina promjene zbroja kinetičke i unutrašnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom.**

Taj zakon se može matematički napisati na sljedeći način [25]

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho e dV = \int_{V_M(t)} \rho f_i v_i dV + \oint_{S_M(t)} \sigma_i v_i dS - \oint_{S_M(t)} q_i n_i dS. \quad (2.21)$$

Gdje je

$$e = \frac{v^2}{2} + u \quad (2.22)$$

sveukupna energija sadržana u materijalnom volumenu. Koristeći vezu između vektora i tenzora naprežanja, Gaussov teorem i Reynoldsov transportni teorem možemo pisati

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho e v_j)}{\partial x_j} dV = \int_{V_{KV}} \rho f_i v_i dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} dV - \int_{V_{KV}} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV. \quad (2.23)$$

Ako iskoristimo hipotezu kontinuuma možemo pisati

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (2.24)$$

Gornja jednačba je konzervativna diferencijalna forma zakona očuvanja energije.

## 2.5. Konstitutivne jednadžbe

### 2.5.1. Newtonov zakon viskoznosti

Newtonov zakon viskoznosti uspostavlja linearnu vezu između simetričnog tenzora viskoznih napreznja i tenzora brzine deformacije. Tenzor napreznja  $\sigma_{ij}$  možemo rastaviti na normalne i posmične komponente

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij}. \quad (2.25)$$

Negativno normalno napreznje je skalarna veličina i nazivamo ga tlak  $p$ ,  $\delta_{ij}$  je Kroneckerov delta simbol i  $\Sigma_{ij}$  je simetrični tenzor viskoznih napreznja koji se može modelirati sljedećim izrazom pod pretpostavkom izotropnosti fluida [25]

$$\Sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left( \mu_V - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = 2\mu D_{ij} + \left( \mu_V - \frac{2}{3} \mu \right) D_{kk} \delta_{ij}. \quad (2.26)$$

Veličine  $\mu$  i  $\mu_V$  su svojstva fluida i nazivamo ih viskoznost, točnije  $\mu$  je dinamička viskoznost fluida, a  $\mu_V$  je volumenska viskoznost. Gornji izraz se može pojednostaviti za naše potrebe, volumensku viskoznost možemo zanemariti jer ona ima veliki utjecaj u strujanjima sa velikim gradijentima gustoće fluida. Budući da je strujanje nestlačivo možemo primjeniti jednadžbu 2.16 pa se gornji izraz transformira u

$$\Sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.27)$$

### 2.5.2. Fourierov zakon provođenja topline

Fourierov zakon provođenja topline daje linearnu vezu između temperaturnog gradijenta i gustoće toplinskog toka preko toplinske provodnosti  $\lambda$  i govori da se topline prenosi u suprotnom smjeru temperaturnog gradijenta tj. od područja veće temperature na područje manje temperature što je u skladu sa Clausiusovom formulacijom drugog zakona termodinamike [15]. Taj zakon se može matematički napisati na sljedeći način

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (2.28)$$

### 2.5.3. Kalorička jednadžba stanja

Unutarnja energija i entalpija idealnih plinova i kapljevina su funkcije samo njihovih temperatura [14], tj.  $u = u(T)$  i  $h = h(T)$ , promjene unutarnje energije i entalpije idealnih plinova se računaju prema izrazima

$$du = c_v dT \quad (2.29)$$

$$dh = c_p dT. \quad (2.30)$$

Koeficijenti proporcionalnosti u gornjim jednadžbama se nazivaju specifičnim toplinskim kapacitetima pri konstantnom volumenu odnosno konstantnom tlaku i definirani su sljedećim izrazima [14]

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (2.31)$$

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p. \quad (2.32)$$

Gustoća odnosno specifični volumen kapljevina i krutina se ne mijenja značajno promjenom tlaka i temperature ( $dv \approx 0$ ) stoga su za kapljevine  $c_p = c_v = c$  pa se promjena unutanje energije računa prema sljedećem izrazu

$$du = c dT \quad (2.33)$$

dok se promjena entalpije računa preko njene definicije

$$h = u + pv. \quad (2.34)$$

gornji izraz se može diferencirati i u njega uvrstiti jednadžbu 2.33 pa dobijemo

$$\begin{aligned} dh &= du + p dv + v dp \\ \Rightarrow dh &= c dT + v dp. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Jednadžbe 2.33 i 2.35 se zovu kaloričkim jednadžbama stanja i one će igrati jako bitnu ulogu u računanju temperaturnog polja problema.

## 2.6. Konačni oblici osnovnih zakona

Ako konstitutivne jednadžbe primjenimo na već definirane oblike osnovnih zakona možemo napisati konačni oblik osnovnih zakona koji će biti koristan kod analize problema, on glasi

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.36)$$

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} dV = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV - \int_{V_{KV}} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_{V_{KV}} \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} dV \quad (2.37)$$

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho e v_j)}{\partial x_j} dV = \int_{V_{KV}} \rho f_i v_i dV - \int_{V_{KV}} \frac{\partial(p v_i)}{\partial x_i} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\Sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV. \quad (2.38)$$

Jednadžba 2.36 zajedno sa jednadžbom 2.37 su poznate pod nazivom nestlačive Navier–Stokesove jednadžbe.

## 2.7. Opća skalarna jednadžba transporta

Ako pogledamo jednadžbe 2.37 i 2.38 možemo uočiti pravilnost. Lijeve strane jednadžbi sadrže članove lokalne promjene i konvektivne promjene fizikalne veličine dok desne strane sadrže članove koji stvaraju odnosno oduzimaju fizikalnu veličinu radi vanjskih utjecaja sila odnosno snaga. Takve članove nazivamo izvorima i ponorima. Zadnji član svake jednadžbe opisuje promjenu fizikalne veličine radi difuzije pa ga zato nazivamo difuzijskim članom. Upravo radi takve pravilnosti možemo zaključiti da mora postojati jednadžba očuvanja koja vrijedi za bilo koju fizikalnu veličinu, takva jednadžba se zove opća skalarna jednadžba transporta i glasi [22]

Sveukupni protok fizikalnog  
svojstva kroz kontrolnu  
površinu.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho \varphi dV}_{\text{Brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar kontrolnog volumena.}} + \underbrace{\oint_{S_{KV}} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS}_{\text{Sveukupni protok fizikalnog svojstva kroz kontrolnu površinu.}} = \underbrace{\int_{V_{KV}} S_\varphi dV}_{\text{Brzina nastajanja ili nestajanja fizikalnog svojstva unutar kontrolnog volumena.}} \quad (2.39)$$

Brzina promjene sadržaja  
fizikalnog svojstva unutar  
kontrolnog volumena.

Brzina nastajanja ili  
nestajanja fizikalnog  
svojstva unutar kon-  
tronog volumena.

### 3. TURBULENCIJA

U prirodi uglavnom razlikujemo dvije različite konfiguracije strujanja

- ▷ Laminarno
- ▷ Turbulentno

Laminarno strujanje je strujanje u kojem susjedni slojevi fluida struje paralelno jedan prema drugome bez ikakvih poremećaja između susjednih slojeva. Turbulentno strujanje je strujanje koje je karakterizirano kaotičnim gibanjem i poprečnim miješanjem susjednih čestica fluida, posljedica takvog gibanja je pulsirajući karakter svih fizikalnih veličina u prostoru i vremenu. Laminarno strujanje se uglavnom javlja kod niskih vrijednosti Reynoldsova broj, a turbulentno kod visokih. Reynoldsov broj je definiran kao omjer inercijskih sila i viskoznih sila u strujanju i može se matematički zapisati na sljedeći način

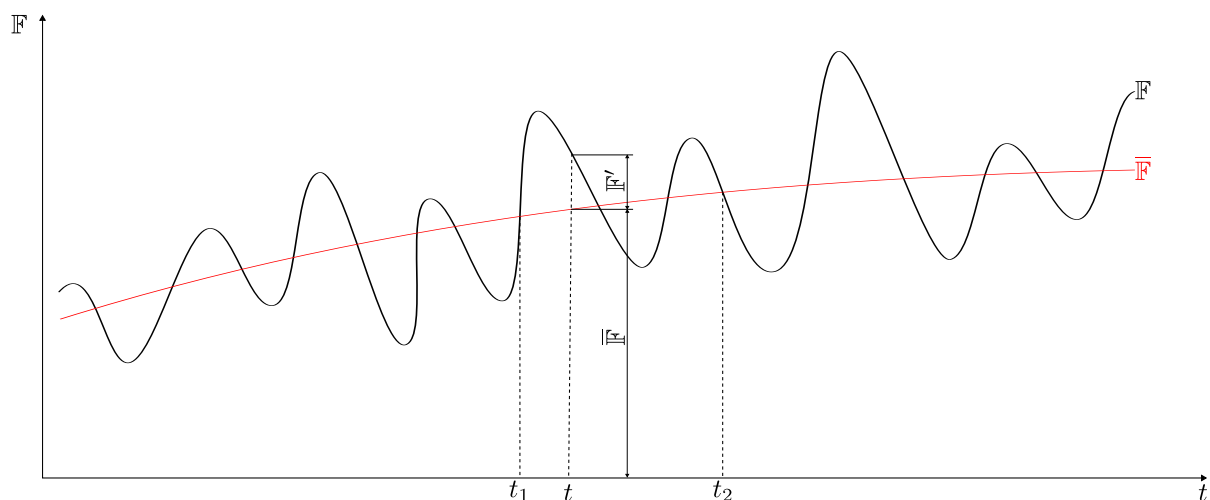
$$\text{Re} = \frac{\text{inercijske sile}}{\text{viskozne sile}} = \frac{vL}{\nu}. \quad (3.1)$$

gdje su  $v$  brzina strujanja,  $L$  karakteristična duljina koja je ovisna o geometriji problema i  $\nu$  kinematička viskoznost koja se definira kao

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.2)$$

#### 3.1. Statistički opis turbulencije

Turbulenciju nije moguće opisati analitički<sup>1</sup>, slika 6 prikazuje spomenuti karakter fizikalnih veličina u turbulentnom strujanju.



Slika 6. Pulsirajući karakter fizikalne veličine.

<sup>1</sup>Barem za sada

Sa slike možemo vidjeti da se u svakom trenutku u vremenu iznos fizikalne veličine može prikazati kao kombinacija osrednjenog dijela i pulsirajućeg dijela i to se matematički može zapisati ovako

$$\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}} + \mathbb{F}'. \quad (3.3)$$

Srednja vrijednost fizikalne veličine u vremenskom intervalu  $[t_1, t_2]$  se definira na sljedeći način

$$\overline{\mathbb{F}}(x_i, t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}(x_i, t) dt. \quad (3.4)$$

Gdje vremenski interval mora biti odabran tako da je  $\overline{\overline{\mathbb{F}}} = \overline{\mathbb{F}}$ , za tako odabrano područje vrijedi da je  $\overline{\mathbb{F}'} = 0$ . Koristeći definicije 3.3 i 3.4 i ako sa  $\mathbb{F}_1$  i  $\mathbb{F}_2$  označimo dvije različite fizikalne veličine možemo dobiti sljedeća pravila [22]

$$\overline{\frac{d\mathbb{F}}{dx_i}} = \frac{\partial \overline{\mathbb{F}}}{\partial x_i} \quad (3.5)$$

$$\overline{\frac{d\mathbb{F}}{dt}} = \frac{\partial \overline{\mathbb{F}}}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\overline{\overline{\mathbb{F}_1} \cdot \mathbb{F}'_2} = 0 \quad (3.7)$$

$$\overline{\overline{\mathbb{F}_1} \cdot \mathbb{F}_2} = \overline{\mathbb{F}_1} \cdot \overline{\mathbb{F}_2} \quad (3.8)$$

$$\overline{\mathbb{F}_1 \cdot \mathbb{F}_2} = \overline{\mathbb{F}_1} \cdot \overline{\mathbb{F}_2} + \overline{\mathbb{F}'_1 \cdot \mathbb{F}'_2}. \quad (3.9)$$

### 3.2. Reynoldsove jednadžbe

Ako primjenimo pravila 3.5 do 3.9 na jednadžbe 2.36 i 2.37 dobijemo sljedeće jednadžbe

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v'_i v'_j} \right]. \quad (3.11)$$

Gornje jednadžbe su poznate pod nazivom Reynoldsove ili RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) jednadžbe. Vidimo da se u svakoj jednadžbi javljaju osrednjene veličine osim zadnjeg člana jednadžbe količine gibanja  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$ . Taj član označuje turbulentnu difuziju količine gibanja, a budući da molekularna difuzija odgovara viskoznim naprezanjima  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  nazivamo turbulentnim ili Reynoldsovim naprezanjima i budući da ima dva slobodna indeksa to znači da je tenzorska veličina i može se matematički zapisati na sljedeći način [25]

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v'_1 v'_1} & -\overline{\rho v'_1 v'_2} & -\overline{\rho v'_1 v'_3} \\ -\overline{\rho v'_2 v'_1} & -\overline{\rho v'_2 v'_2} & -\overline{\rho v'_2 v'_3} \\ -\overline{\rho v'_3 v'_1} & -\overline{\rho v'_3 v'_2} & -\overline{\rho v'_3 v'_3} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Vidimo da je tenzor simetričan što znači da ima šest nepoznanica. Nemamo dovoljno jednadžbi pomoću kojih možemo jednoznačno riješiti šest nepoznatih komponenti tenzora. Metoda kojom se dobivaju korelacije potrebne za dobivanje Reynoldsovih naprezanja se naziva model turbulencije. Zadatak modela turbulencije je usklađivanje broja jednadžbi i broja nepoznatih polja, zaustavljajući se na određenoj korelaciji. Sve više korelacije modeliraju se pomoću nižih koje su obuhvaćene modelom turbulencije [25].

### 3.3. Model turbulencije

Modeli turbulencije dijele se s obzirom na red korelacije brzina za koju se rješava jednadžba 3.11 na modele:

- ▷ prvog,
- ▷ drugog i
- ▷ trećeg reda.

Modelima prvog reda, koji su najjednostavniji, modelira se dvojnja korelacija brzina, odnosno Reynoldsova naprezanja hipotezom Boussinesqa u obliku:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij}. \quad (3.13)$$



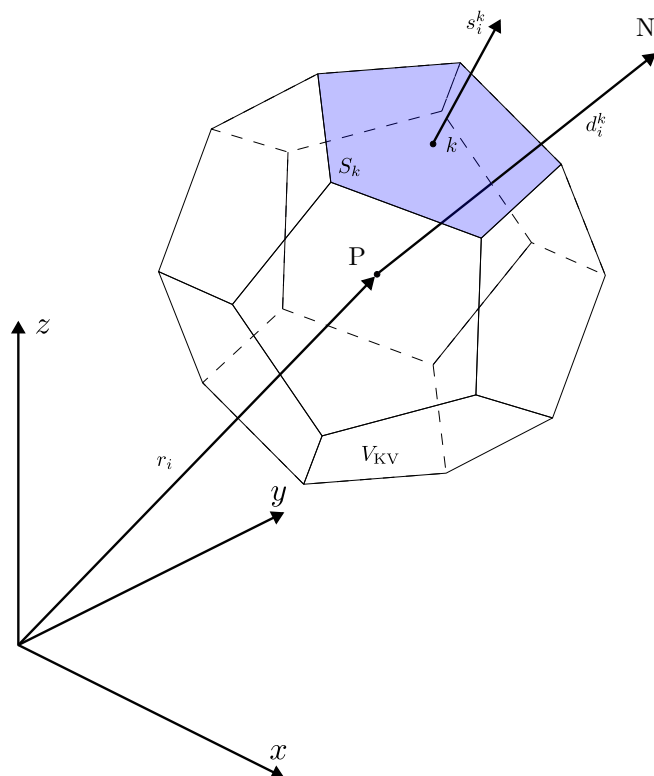
Gdje se  $\mu_t$  naziva koeficijentom turbulentne viskoznosti. Ono nije fizikalno svojstvo fluida već funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli,  $k = \frac{v'_i v'_i}{2}$  se naziva kinetička energija turbulencije i ona se dodaje u cilju zadovoljavanja gornje jednadžbe za slučaj kontrakcije indeksa. S obzirom na analogiju gornjeg izraza s Newtonovim zakonom viskoznosti, modeli koji se temelje na toj pretpostavci nazivaju se Newtonovskim modelima turbulencije [22]. Ako se hipoteza Boussinesq uvrsti u Reynoldsove jednadžbe dobijemo

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_j\bar{v}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho\bar{k}\right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Zadnji korak je modeliranje koeficijenta turbulentne viskoznosti u gornjoj jednadžbi. U radu će se koristiti  $k - \epsilon$  model turbulencije sa standardnim zidnim funkcijama za dobivanje koeficijenta turbulentne viskoznosti koji će biti potreban za dobivanje polja brzine i tlaka kapljevine gornjom jednadžbom.

## 4. METODA KONAČNIH VOLUMENA

Diskretizacija metodom konačnih volumena započinje sa jednažbom 2.39. Jednažba vrijedi općenito za bilo koji kontrolni volumen, slika 7 prikazuje proizvoljni poliedar kojeg ćemo koristiti za diskretizaciju pojedinih članova jednažbe.



Slika 7. Poliedar koji se koristi za diskretizaciju.

Težište poliedra je označen slovom P, a težište njegovog susjeda slovom N. Susjedi su definirani kao kontrolni volumeni koji su povezani sa promatranim kontrolnim volumenom preko zajedničkih strana. Kontrolni volumen može općenito imati  $n$  susjeda gdje  $n$  predstavlja broj strana poliedra. Masena gustoća fizikalne veličine će se računati u težištu kontrolnog volumena i izvod koji se koristi u ovom radu pretpostavlja da će se fizikalne veličine linearno mijenjati preko volumena što znači da možemo fizikalnu veličinu razviti u Taylorov red ostavivši samo prva dva člana što se matematički može zapisati na sljedeći način

$$\varphi(x_i) = \varphi^P + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^P (x_i - x_i^P). \quad (4.1)$$

Koristeći definirane pojmove možemo opisati diskretizaciju svakog člana opće skalarne jednažbe transporta, a to će biti konvektivni član, difuzijski član i izvorski član. Biti će korisno diskretizirati i gradijent fizikalne veličine. Član lokalne promjene nas neće zanimati jer je naš problem stacionaran.

## 4.1. Diskretizacija opće skalarne jednadžbe transporta

### 4.1.1. Izvor i ponor

Konstantni izvori i ponori se mogu jednostavno diskretizirati koristeći linearnost operatora integracije na sljedeći način

$$\int_{V_{KV}} S_\varphi dV = S_\varphi V_{KV}. \quad (4.2)$$

Ako izvorski ili ponorski član ima linearnu ovisnost sa fizikalnom veličinom  $S_\varphi = S\varphi$  gdje je  $S \in \mathbb{R}$  onda možemo diskretizaciju provesti na sljedeći način koristeći aproksimaciju 4.1 [17]

$$\begin{aligned} \int_{V_{KV}} S_\varphi dV &= S \int_{V_{KV}} \left[ \varphi^P + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^P (x_i - x_i^P) \right] dV \\ &= S\varphi^P V_{KV} + S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^P \int_{V_{KV}} (x_i - x_i^P) dV \\ &= S\varphi^P V_{KV} + S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^P \left[ \int_{V_{KV}} x_i dV - x_i^P V_{KV} \right] \\ &= S\varphi^P V_{KV} + S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^P [x_i^P V_{KV} - x_i^P V_{KV}] \\ &= S\varphi^P V_{KV}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

### 4.1.2. Gradijent

Gradijent fizikalne veličine se diskretizira koristeći Gaussov teorem

$$\int_{S_{KV}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \oint_{S_{KV}} \varphi n_i dS. \quad (4.4)$$

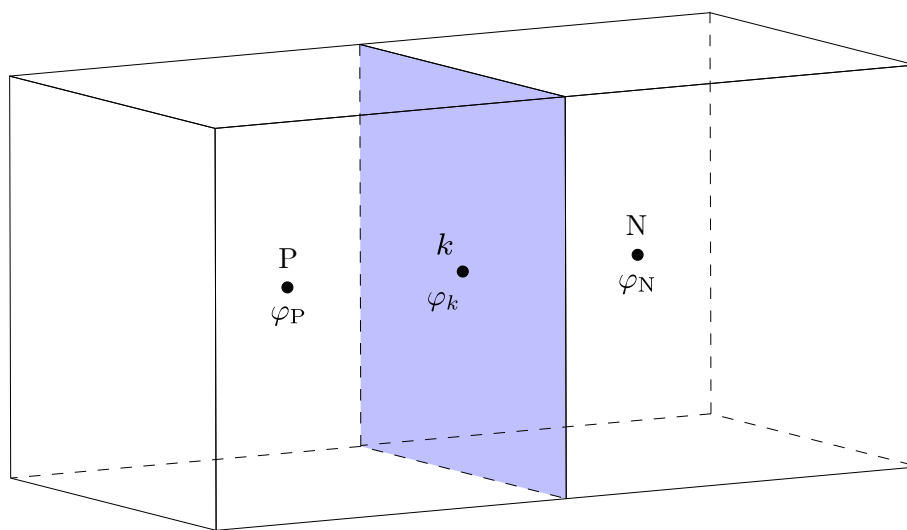
Ako poliedar ima  $n$  strana to znači da se kontrolna površina može rastaviti na linearnu kombinaciju površine svake strane poliedra pa možemo pisati da je

$$\oint_{S_{KV}} \varphi n_i dS = \sum_{k=1}^n \int_{S^k} \varphi n_i^k dS^k. \quad (4.5)$$

Budući da se fizikalna veličina mijenja linearno preko kontrolnog volumena to znači da integrale u gornjem izrazu možemo aproksimirati koristeći vrijednost fizikalne veličine u težištu strane [17]. To nam omogućuje da uklonimo integrale i da pojednostavimo izraz koji sada glasi

$$\sum_{k=1}^n \int_{S^k} \varphi n_i^k dS^k \approx \sum_{k=1}^n \varphi^k n_i^k S^k. \quad (4.6)$$

Sada moramo odrediti vrijednost fizikalne veličine u težištu stana kontrolnih površina. Slika 8 prikazuje jednostavniji poliedar preko kojeg možemo jasnije vidjeti kako dobiti  $\varphi^k$



**Slika 8. Jednostavniji poliedar.**

Potrebno je dobiti  $\varphi^k$  preko vrijednosti u glavnim čvorovima  $\varphi^P$  i  $\varphi^N$  interpolacijom. Metoda pomoću koje se dobiva  $\varphi^k$  se naziva shemom diferencije ili numeričkom shemom [22]. Najčešće korištene numeričke sheme su:

- ▷ Centralne razlike (Central Differencing)
- ▷ Uzvodna (Upwind Differencing)
- ▷ Linearno uzvodna (Linear Upwind)
- ▷ QUICK (Quadratic Upwind)

Shema centralnih razlika se koristi kod difuzijskog člana dok se uzvodna i linearno uzvodna shema koriste kod konvekcijskog člana. Nama će biti korisna shema centralnih razlika i uzvodna shema.

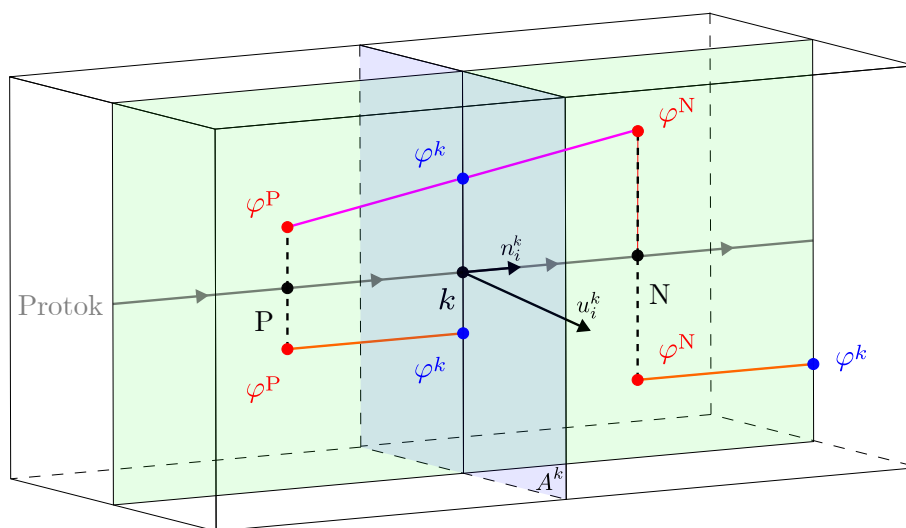
### 4.1.3. Numeričke sheme

#### 4.1.3.1. Shema centralnih razlika

Shema centralnih razlika koristi linearnu interpolaciju fizikalne veličine između težišta susjednih volumena koja se može zapisati na sljedeći način [1]

$$\varphi^k = \frac{\|x_i^k - x_i^P\|}{\|x_i^N - x_i^P\|} \varphi^N + \left(1 - \frac{\|x_i^k - x_i^P\|}{\|x_i^N - x_i^P\|}\right) \varphi^P. \quad (4.7)$$

Na slici 9 je rozom bojom prikazana shema centralnih razlika. Ova numerička shema je drugog reda točnosti i ima sklonost davanju nefizikalnog oscilirajućeg rješenja u blizini diskontinuiteta [22].



Slika 9. Shema centralnih razlika i uzvodna shema.

#### 4.1.3.2. Uzvodna shema

Uzvodna shema je ovisna o protoku kroz kontrolnu površinu koji je definiran na sljedeći način

$$q_V^k = A^k u_i^k n_i^k. \quad (4.8)$$

Iz gornje jednadžbe možemo definirati dali će fluid ulaziti ili izlaziti iz volumena sljedećim definicijama

$$q_V^k > 0 \Rightarrow \text{Fluid izlazi iz kontrolnog volumena}$$

$$q_V^k < 0 \Rightarrow \text{Fluid ulazi u kontrolni volumen.}$$

Sada možemo definirati koju vrijednost će  $\varphi^k$  poprimiti na sljedeći način [1]

$$\varphi^k = \begin{cases} \varphi^P, & q_V^k > 0 \\ \varphi^N, & q_V^k < 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Na slici 9 narančastom bojom je prikazana uzvodna shema. Ova numerička shema je samo prvog reda točnosti, ali je jako stabilna kod problema gdje konvektivni član dominira.

#### 4.1.4. Konvekcija

Konvektivni član se također može rastaviti na niz površinskih integrala koristeći Gaussov teorem

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\varphi u_j)}{\partial x_j} dV = \oint_{S_{KV}} \varphi u_j n_j dS. \quad (4.10)$$

Gornji izraz možemo pojednostaviti na isti način kao i gradijent pa na kraju dobijemo

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\varphi u_j)}{\partial x_j} dV = \sum_{i=1}^k q_V^k \varphi^k. \quad (4.11)$$

$\varphi^k$  se računa uzvodnom numeričkom shemom.

#### 4.1.5. Difuzija

Difuzijski član se može diskretizirati na isti način kao gradijent i konvekcija [17]

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dV = \sum_{k=1}^n \Gamma^k \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^k n_i^k S^k. \quad (4.12)$$

Koeficijent difuzije  $\Gamma^k$  se računa shemom centralnih razlika, a gradijent  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^k$  se računa u odnosu na poklapanje vektora normale na stranu  $k$  i vektora koji spaja težišta susjednih volumena kao što je prikazano na slici 7. Ako su vektori  $s_i^k$  i  $d_i^k$  kolinearni onda se skalarni produkt u gornjoj jednadžbi računa sljedećim izrazom [17]

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^k s_i^k = \|s_i^k\| \frac{\varphi^N - \varphi^P}{\|d_i^k\|}. \quad (4.13)$$

gdje je

$$s_i^k = \int_{S_k} n_i dS. \quad (4.14)$$

Jednadžba 4.13 predstavlja komponentu gradijenta u smjeru vektora  $d_i^k$ , a za neortogonalne mreže će biti potrebno definirati neortogonalne korektore [17].

## 4.2. Linearni sustav jednadžbi

Svi navedeni postupci diskretizacije vrijede za jedan konačni volumen. Prostor koji će se diskretirati će općenito biti načinjen od više konačnih volumena na koje primjenjujemo diskretizirane forme jednadžbi 2.36, 2.37 i 2.38. Broj jednadžbi problema će biti jednak broju kontrolnih volumena gdje te jednadžbe mogu biti linearne ili nelinearne. Nelinearne jednadžbe lineariziramo nekom numeričkom metodom npr. Newton-Raphson te na kraju dobijemo linearni sustav jednadžbi koji se koristeći pravila linearne algebre može indeksno zapisati na sljedeći način

$$A_{ij}x_j = b_i. \quad (4.15)$$

U gornjem izrazu  $A_{ij}$  predstavlja matricu koeficijenata,  $x_j$  vektor nepoznatih varijabli i  $b_i$  je vektor desne strane sustava koji sadrži poznate veličine. Matrica koeficijenata se popunjuje u skladu sa opisanim metodama diskretizacije, svaki član u općoj skalarnoj jednadžbi transporta će imati drukčiju doprinos matrici  $A_{ij}$  i vektoru  $b_i$ . Doprinos svakog člana je sljedeći:

### Izvori i ponori

- ▷ Konstantni izvori i ponori su dodani vektoru  $b_i$ .
- ▷ Izvori i ponori koji linearno ovise o fizikalnoj veličini se dodaju matrici koeficijenata  $A_{ij}$

### Konvekcija i difuzija

- ▷ Članovi se dodaju matrici koeficijanata  $A_{ij}$  i doprinose dijagonalno i van dijagonalno. Dijagonalni doprinos je posljedica promatranog konačnog volumena dok je van dijagonalan doprinos posljedica susjednih volumena, tako da će van dijagonalni doprinos biti to veći što je veći broj susjednih volumena.

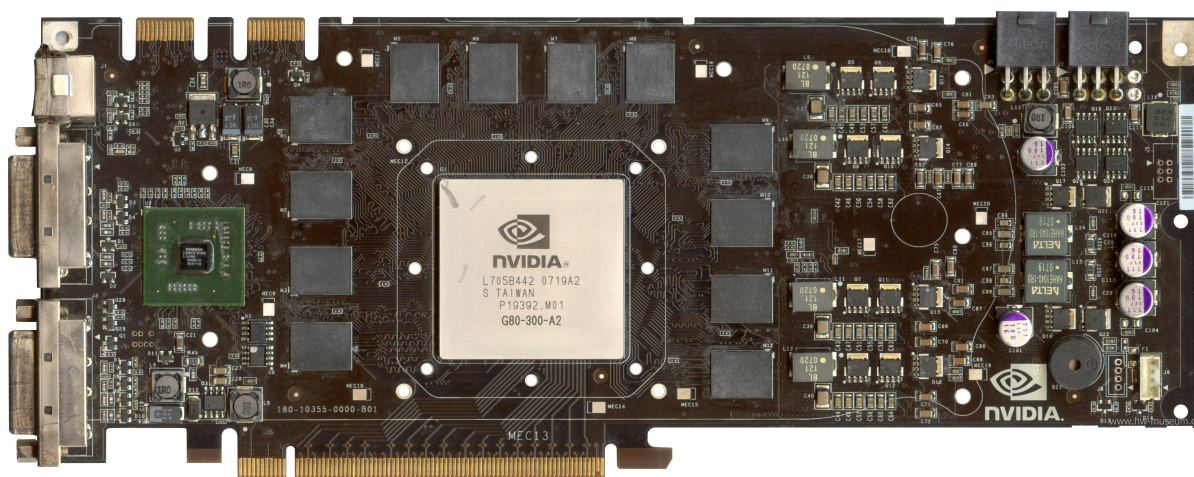
## 5. SIMULACIJA

Kao što je opisano u poglavlju 1.4 prvi korak kod rješavanja problema je predprocesor. Odabrani predprocesor u ovom radu je *Salome 9.11* kojim ćemo imenovati rubne uvjete definirane geometrije i izraditi geometrijsku mrežu konačnih volumena. Odabrani procesor je *OpenFOAM v2306* kojim ćemo riješiti matematički model zadanog problema prikladnim rješavačem. Odabrani postprocesor je *Paraview 5.11.1* njime ćemo dobiti polje temperature dijelova geometrije koji će nas zanimati. Nas će zanimati slučaj kada je grafička kartica maksimalno opterećena što iznosi 280 W [2]. Problem je stacionarne prirode stoga će sve fizikalne veličine konvergirati jednoj vrijednosti.

### 5.1. Predprocesor

#### 5.1.1. Geometrijski model i geometrijska mreža

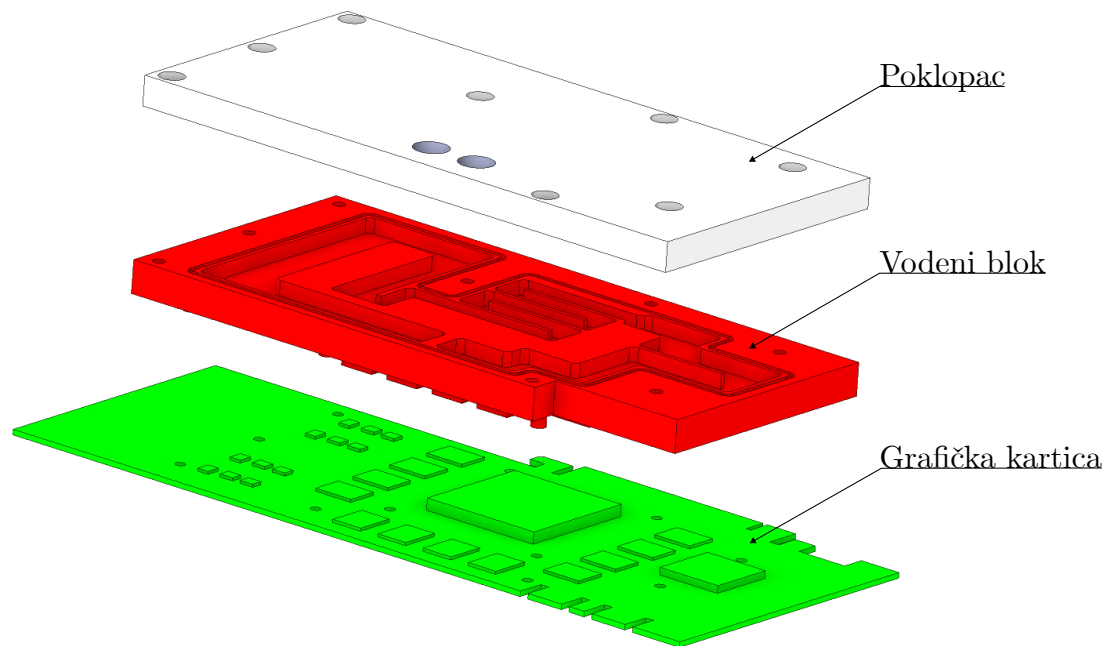
Slika 10 prikazuje grafičku karticu koju je potrebno hladiti, a slika 11 prikazuje sklop grafičke kartice i vodenog bloka [21] preko kojeg će se vršiti hlađenje.



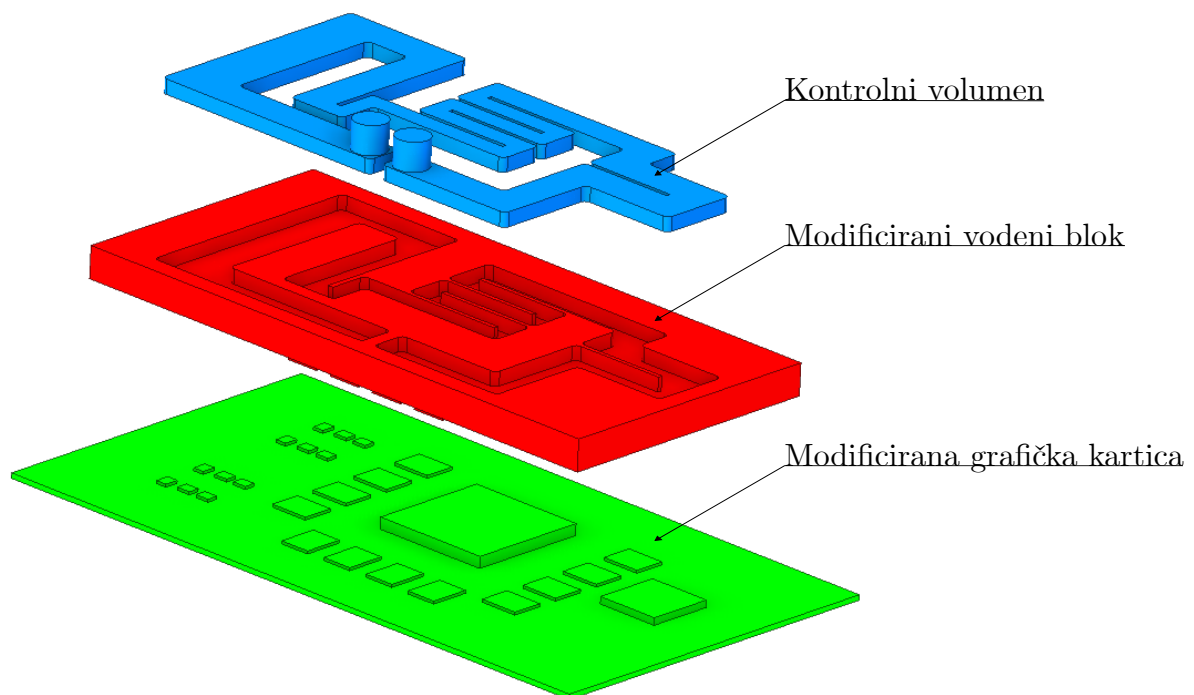
Slika 10. Grafička kartica NVIDIA 8800 GTX [20].

Za potrebe proračuna ćemo pojednostaviti geometriju, a to znači ukloniti dijelove koji su nepotrebni za proračun kao što su provrti i poklopac naime, poklopac vodenih blokova je najčešće izrađen od akrilika ili sličnih polimernih materijala te neće bitno utjecati na rezultate proračuna stoga ga možemo ukloniti i nadomjestiti ga rubnim uvjetom. Slika 12 prikazuje pojednostavljenu geometriju zajedno sa geometrijom kontrolnog volumena. Donja strana modificiranog vodenog bloka je prikazana na slici 13. Fluid će ulaziti u desni provrt poklopca, strujati kroz utore bloka i izlaziti kroz lijevi provrt poklopca što je prikazano plavom bojom na gornjoj slici. Geometrijska mreža je prikazana na slici 14. Načinjena je od 2 616 925 volumena od kojih je 1 520 050 tetraedara, a ostalo prizme. Prosječna ortogonalnost mreže je  $13^\circ$ , iako je mreža potpuno načinjena od tetraedarskih elemenata to nije znatno utjecalo na proračun.

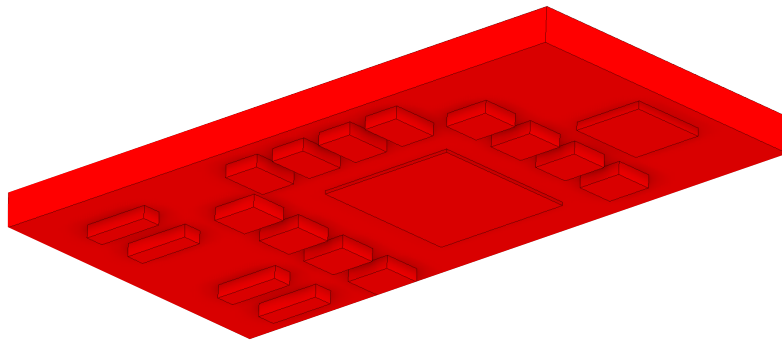




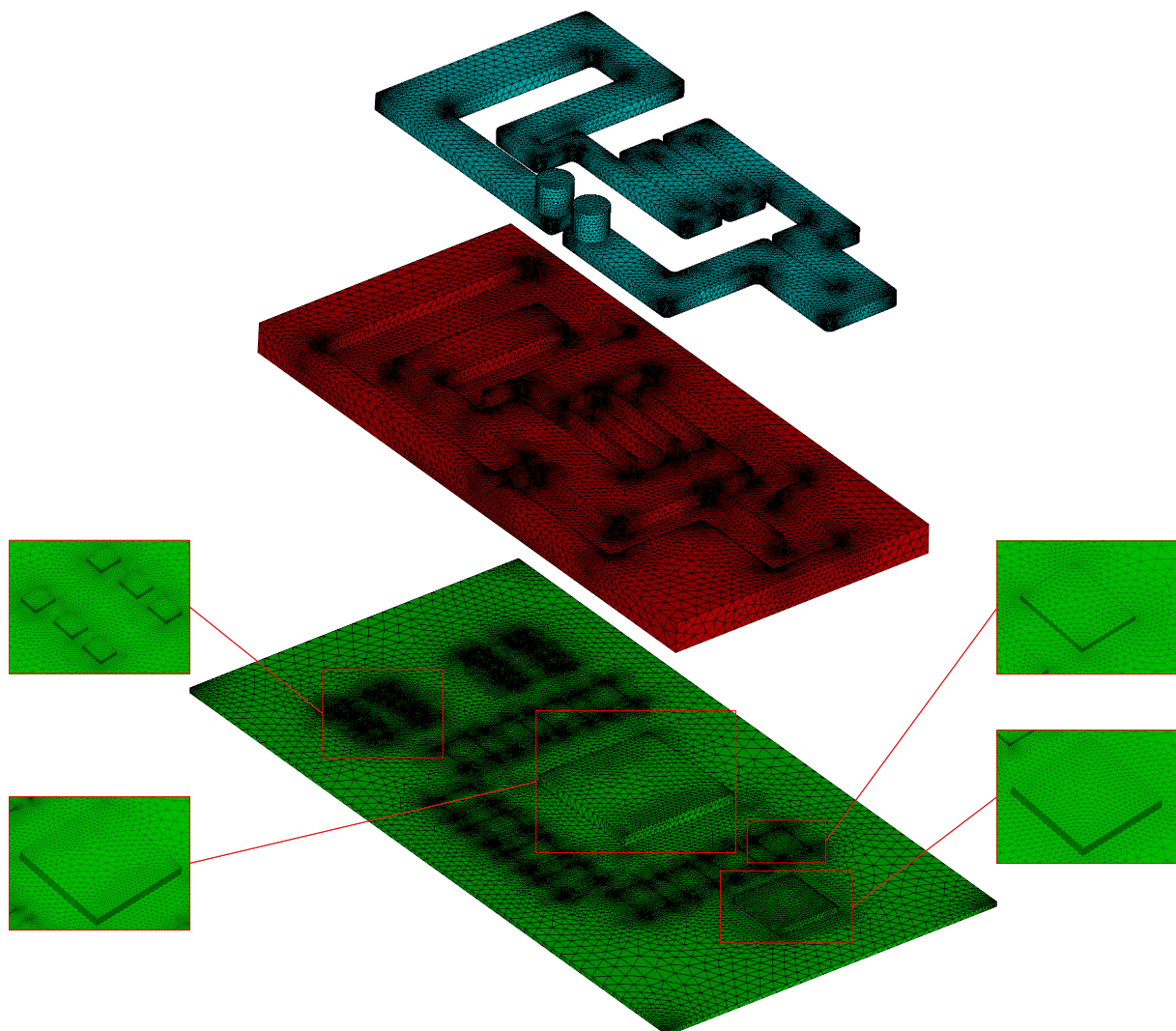
Slika 11. Sklop grafičke kartice i vodenog bloka.



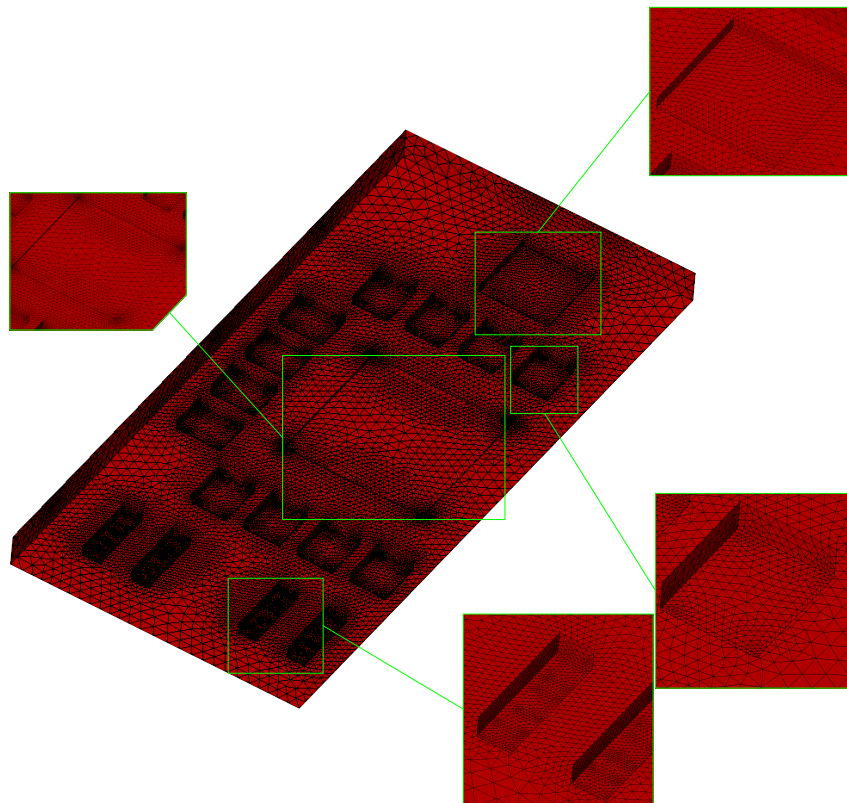
Slika 12. Pojednostavljeni sklop.



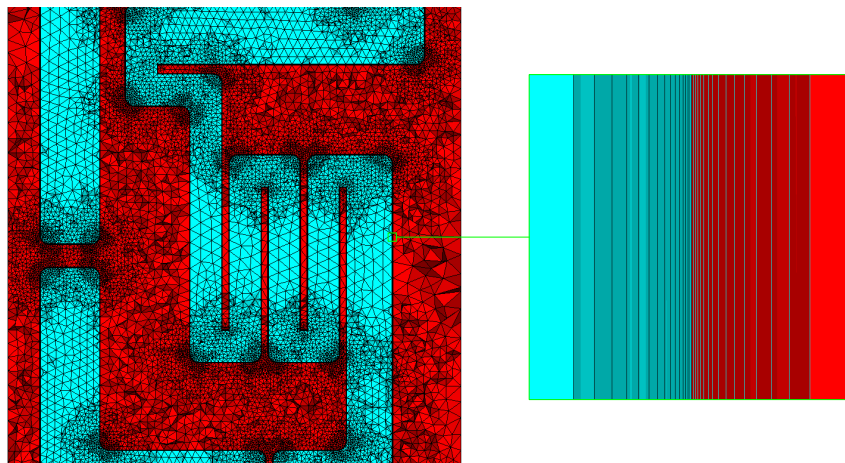
Slika 13. Donja strana modificiranog vodenog bloka.



Slika 14. Geometrijska mreža konačnih volumena.



Slika 15. Donja strana mreže bloka.



Slika 16. Granični slojevi.

Slika 15 prikazuje donju stranu mreže bloka, a slika 16 presjek bloka i detalj graničnih slojeva na strani fluida i bloka. Granični sloj je izrađen na temelju više iteracija proračuna. Za prvu procjenu ukupne debljine je korišten kalkulator [3], a ukupni broj slojeva i faktor povećanja su odabrani na temelju iskustvenih vrijednosti 10–20 slojeva i 1,2. Konačna ukupna debljina graničnog sloja je 0,00007mm.

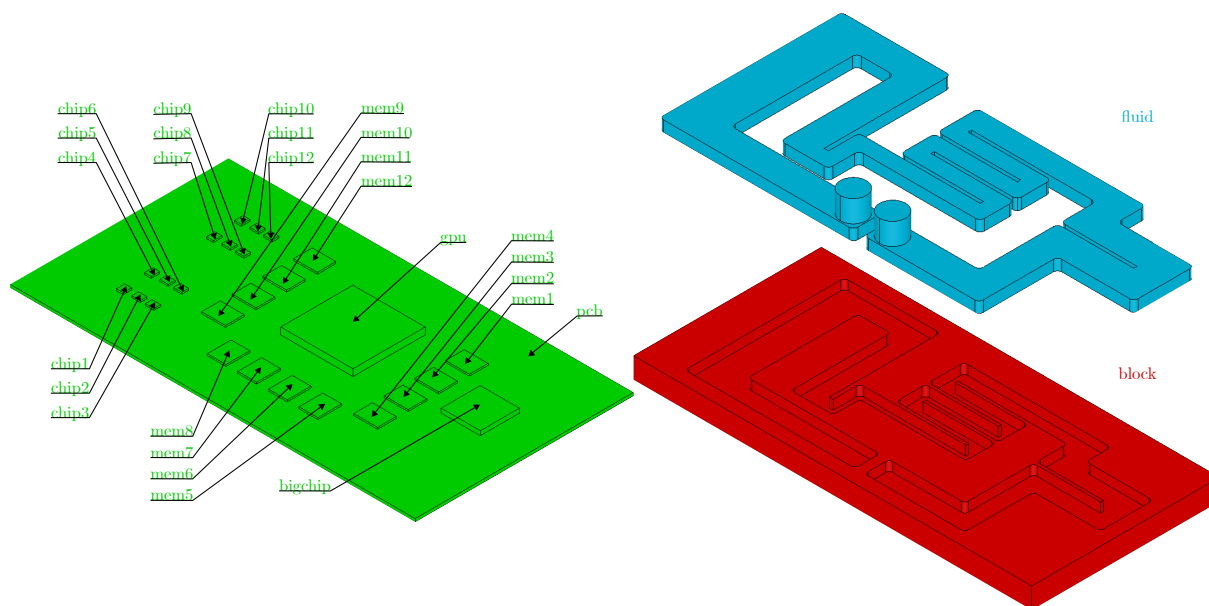
## 5.2. Procesor

### 5.2.1. Rješavač

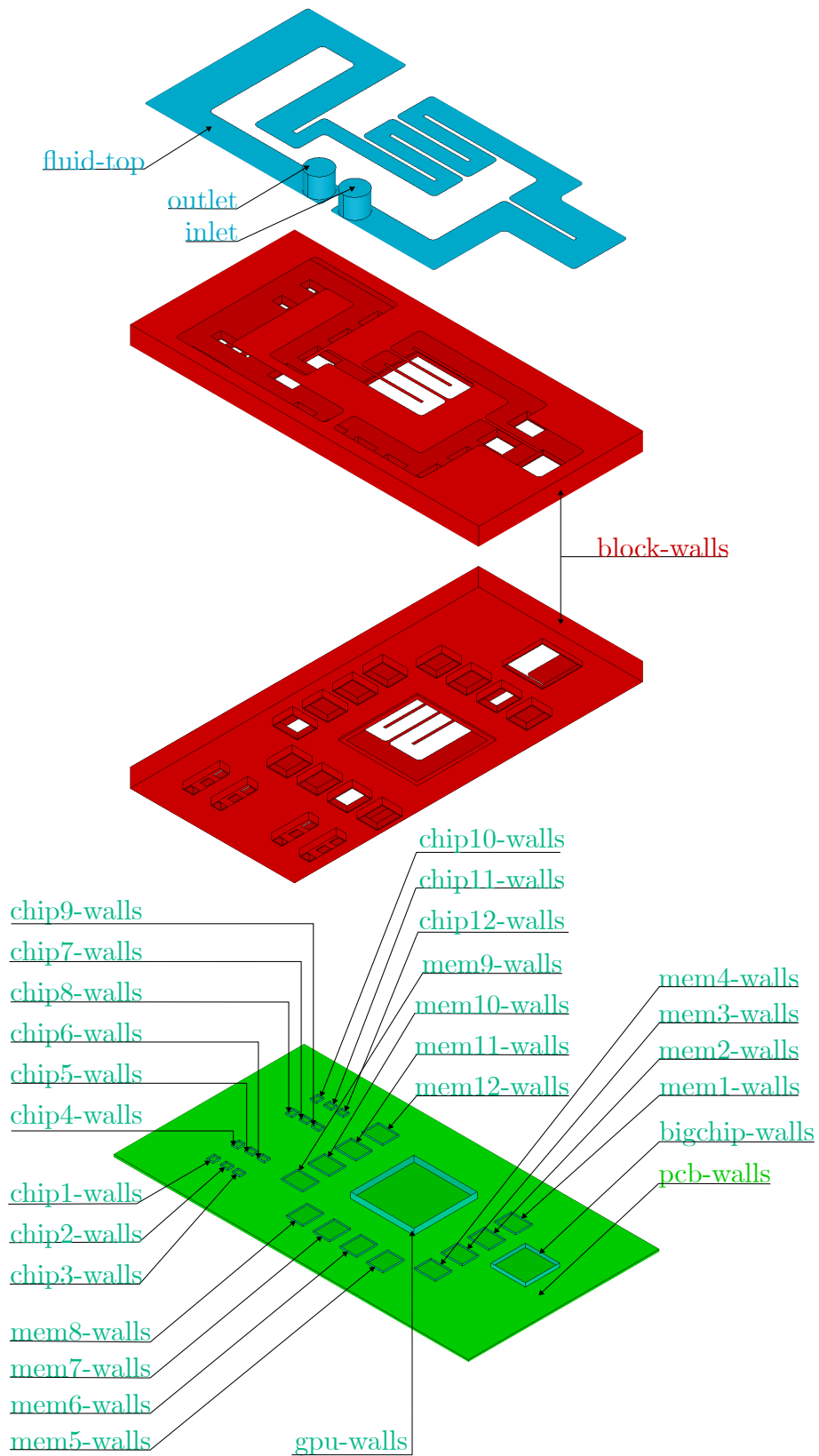
Kada imamo konačne volumene možemo prijeći na procesor i primjeniti metodu konačnih volumena kako bi dobili željena polja fizikalnih veličina. Problem prijenosa topline između različitih tvari koji su u međusobnom dodiru se na engleskom naziva **conjugate heat transfer**. Potrebno je riješavati jednadžbu 2.38 za krute tvari te jednadžbe 2.36, 2.37 i 2.38 za fluide. OpenFOAM sadrži rješavač pod nazivom `chtMultiRegionSimpleFoam` koji je opisan na sljedeći način [4]:

*Steady-state solver for buoyant, turbulent fluid flow and solid heat conduction with conjugate heat transfer between solid and fluid regions.*

Gornji opis je upravo ono što nama treba. Mrežu je potrebno rastaviti na različite komponente odnosno zone tako da rješavač može prepoznati različite materijale i koje jednadžbe treba rješavati, a to se radi sa komandom `splitMeshRegions -cellZones`. Komanda će rastaviti mrežu na temelju dodirni ploha različitih komponenti i napraviti će nove rubove koji poprimaju naziv `zona1_to_zona2`. Slika 17 prikazuje imena svih zona koje se stvore kada se komanda izvrši. Imena dijelova geometrije problema na koje će se postavljati rubni uvjeti su dani na slici 18, na slici nisu označene dodirne plohe ali one se mogu intuitivno vidjeti.



Slika 17. Stvorene zone.



Slika 18. Imenovane strane geometrije na koje se postavljaju rubni uvjeti.

### 5.2.2. Rubni uvjeti

Korišteni rubni uvjeti za krutine su dani u tablici 1, a za fluid u tablici 2. Temperatura i tlak koji se koriste za `fixedValue` i `calculated` rubne uvjete su 300 K i 101325 Pa. Svi se volumeni u nultom vremenskom trenutku nalaze na 300 K i 101325 Pa što *OpenFOAM* interpretira kao `internalField uniform 300` i `internalField uniform 101325`. Standardni protok kod vodenog hlađenja bilo kakve računalne komponente je 250 L/h. Početne vrijednosti  $k$  i  $\epsilon$  su računane prema formulama:

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2 \quad (5.1)$$

$$\epsilon = 0,09^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{0,07L}. \quad (5.2)$$

gdje su  $U$  brzina na ulazu u blok,  $I$  turbulentna intenzivnost koja za  $k - \epsilon$  model tipično iznosi 0,09 i  $L$  karakteristična duljina problema koja je odabrana da bude unutarnji promjer ulazne cijevi. Rubni uvjet `flowRateInletVelocity` za  $U$  se postavlja preko `volumetricFlowRate` i iznosi 0,00006944 m<sup>3</sup>/s i brzina fluida i svim volumenima u početnom trenutku je 0 m/s što se postavlja kao `internalField uniform (0 0 0)`. Za rubni uvjet `compressible: turbulentTemperatureRadCoupledMixed` je potrebno definirati iznos, polje koje se rješava na rubu i tip prijenosa topline (dali će biti krutina–krutina ili krutina–fluid), njen iznos je `uniform 300`, polje `Tnbr T` i tip prijenosa je `kappaMethod fluidThermo` za fluid i `kappaMethod solidThermo` za krutinu [5]. `internalField` za  $\alpha_t$  iznosi 0,5 kao i na rubovima `inlet` i `outlet`, a na rubovima `fluid_top` i `fluid_to_block` iznosi 0. Vrijednosti za  $k$  i  $\epsilon$  izračunate gornjim jednadžbama iznose 0,0023743 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> i 0,027157 m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup> tako da su `internalField`, `fixedValue` i `kqRWallFunction` za  $k$  0,0023743 i analogno za  $\epsilon$ . Preostaje još  $\nu_t$  čiji je `internalField` 0 i svi rubni uvjeti također poprimaju vrijednost 0. Materijal zona `chip1` do `chip12`, `mem1` do `mem12`, `gpu`, `bigchip` je silikon, zone `block` je bakar, zone `fluid` je voda i zone `pcb` je FR4. Vrijednosti svih fizikalnih veličina koje su potrebne za rješavanje jednadžbe transporta su očitane iz [16] za zone `chip1` do `chip12`, `mem1` do `mem12`, `gpu`, `bigchip`, `block` i `fluid`, a za `pcb` iz [6]. Te fizikalne veličine su definirane u datoteci `thermophysicalProperties` prema [7]. Jedna bitna stvar kod grafičkih kartica, ali i općenito za bilo kakav procesor je termalna pasta koja se stavlja na površinu kako bi prijenos topline bio bolji. Nismo trebali izrađivati dodatne modele za slojeve termalne paste zato što je ona uključena u rubni uvjet `compressible:turbulentTemperatureRadCoupledMixed` preko parametara `thicnessLayers` i `kappaLayers`.

Tablica 1. Rubni uvjeti za krutine

| Ine ruba                          | $p$        | $T$   |
|-----------------------------------|------------|---|
| pcb_walls                         | calculated | zeroGradient                                      |
| chip1_walls                       | calculated | zeroGradient                                      |
| chip2_walls                       | calculated | zeroGradient                                      |
| :                                 | :          | :   |
| chip12_walls                      | calculated | zeroGradient                                      |
| bigchip_walls                     | calculated | zeroGradient                                      |
| mem1_walls                        | calculated | zeroGradient                                      |
| mem2_walls                        | calculated | zeroGradient                                      |
| :                                 | :          | :   |
| mem12_walls                       | calculated | zeroGradient                                      |
| gpu_walls                         | calculated | zeroGradient                                      |
| block_walls                       | calculated | zeroGradient                                      |
| fluid_top                         | calculated | zeroGradient                                      |
| inlet                             | calculated | zeroGradient                                      |
| outlet                            | calculated | zeroGradient                                      |
| chip1_to_pcb=pcb_to_chip1         | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| chip1_to_block=block_to_chip1     | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| :                                 | :          | :   |
| chip12_to_pcb=pcb_to_chip12       | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| chip12_to_block=block_to_chip12   | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| bigchip_to_pcb=pcb_to_bigchip     | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| bigchip_to_block=block_to_bigchip | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| mem1_to_pcb=pcb_to_mem1           | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| mem1_to_block=block_to_mem1       | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| :                                 | :          | :   |
| mem12_to_pcb=pcb_to_mem12         | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| mem12_to_block=block_to_mem12     | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| gpu_to_pcb=pcb_to_gpu             | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| gpu_to_block=block_to_gpu         | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| block_to_fluid                    | calculated | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |

Tablica 2. Rubni uvjeti za fluid.

|                | $p$                   | $T$   |
|----------------|-----------------------|---|
| Ime ruba       |                       |   |
| inlet          | calculated            | fixedValue  |
| outlet         | calculated            | zeroGradient                                      |
| fluid_top      | calculated            | zeroGradient                                      |
| fluid_to_block | calculated            | compressible::turbulentTemperatureRadCoupledMixed |
| Ime ruba       | $U$                   | $\alpha_t$  |
| inlet          | flowRateInletVelocity | calculated  |
| outlet         | zeroGradient          | calculated  |
| fluid_top      | noSlip                | compressible:alphaWallFunction                    |
| fluid_to_block | noSlip                | compressible:alphaWallFunction                    |
| Ime ruba       | $\epsilon$            | $k$   |
| inlet          | fixedValue            | fixedValue  |
| outlet         | zeroGradient          | zeroGradient                                      |
| fluid_top      | epsilonWallFunction   | kqWallFunction                                    |
| fluid_to_block | epsilonWallFunction   | kqWallFunction                                    |
| Ime ruba       | $p_t$                 | $p_{tgh}$   |
| inlet          | calculated            | fixedFluxPressure                                 |
| outlet         | calculated            | fixedValue  |
| fluid_top      | nutWallFunction       | fixedFluxPressure                                 |
| fluid_to_block | nutWallFunction       | fixedFluxPressure                                 |



Preostaje samo još definirati toplinske izvore svake silikonske komponente na grafičkoj kartici. Analiza potrošnje snage iz [8] nam daje uvid u postotke potrošnje sveukupne snage grafičke kartice na svakoj komponenti i ako znamo volumene svake komponente možemo odrediti toplinu razvijenu po jedinici volumena što će biti toplinski izvor. Tablica 3 prikazuje snagu, volumen i toplinski izvor svake silikonske komponente na grafičkoj kartici. Svi toplinski izvori iz tablice se definiraju u datoteci `fvOptions` prema [9].

**Tablica 3. Toplinski izvori.**

| Ime zone | Volumen/mm <sup>3</sup> | Snaga/W | Toplinski izvor/W m <sup>-3</sup> |
|----------|-------------------------|---------|-----------------------------------|
| chip1    | 20                      | 0,5     | $25 \cdot 10^6$                   |
| ⋮        | ⋮                       | ⋮       | ⋮                                 |
| chip12   | 20                      | 0,5     | $25 \cdot 10^6$                   |
| mem1     | 154                     | 4       | $25,97 \cdot 10^6$                |
| ⋮        | ⋮                       | ⋮       | ⋮                                 |
| mem12    | 154                     | 4       | $25,97 \cdot 10^6$                |
| bigchip  | 1322,5                  | 42      | $32 \cdot 10^6$                   |
| gpu      | 7225                    | 184     | $25,47 \cdot 10^6$                |

### 5.3. Postprocesor

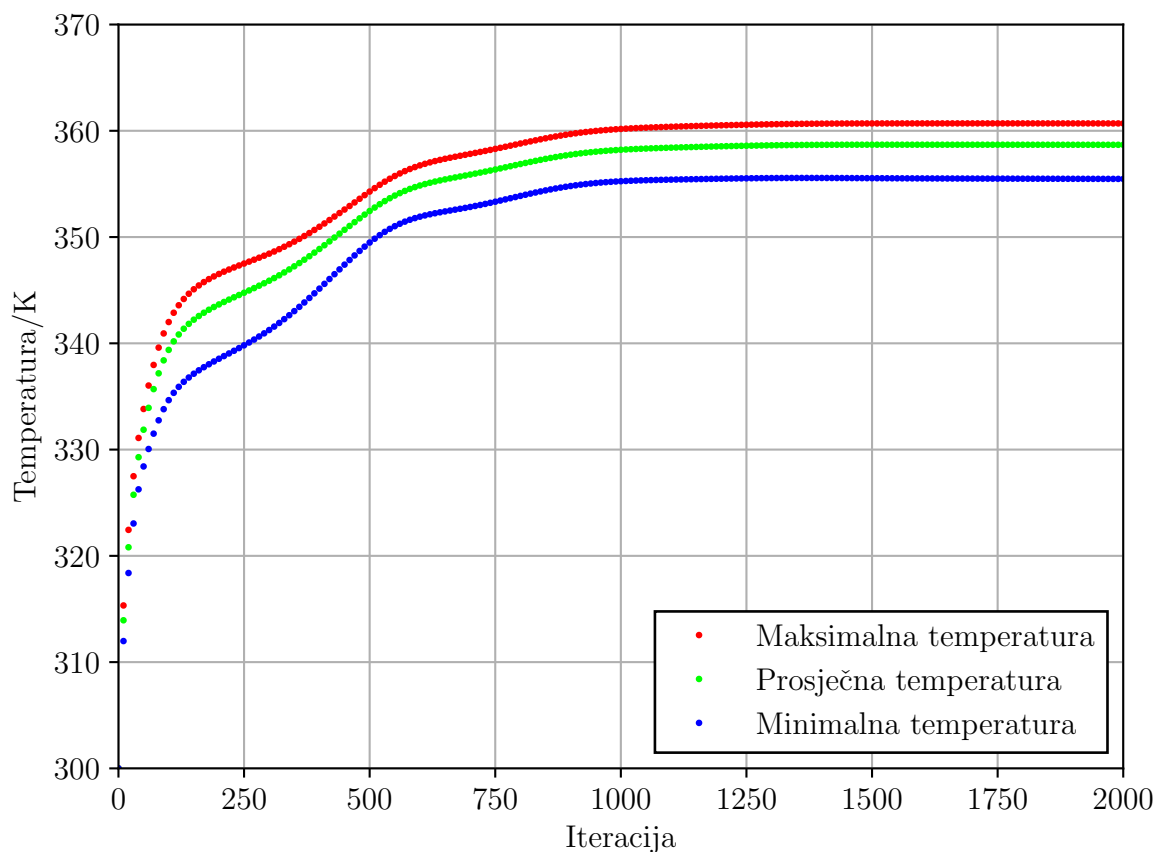
#### 5.3.1. Početni rezultati

Iz [10] znamo da se temperaturni senzori procesora grafičkih kartica nalaze unutar samog kalupa. Vrijednosti temperatura koje moramo post procesirati su one koje se nalaze unutar zone gpu. Simulaciju obavljamo sve dok se temperature u zoni gpu ne prestanu mijenjati na trećoj decimali što je za naš slučaj 2000 iteracija. Konačna maksimalna, prosječna i minimalna temperatura procesora su prikazane na tablici 4.

**Tablica 4. Konačne temperature.**

| Maksimalna temperatura/K | Prosječna temperatura/K | Minimalna temperatura/K |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 360,694                  | 358,681                 | 355,471                 |

Slika 19 prikazuje maksimalnu, prosječnu i minimalnu temperaturu u procesoru svakih 10 iteracija.



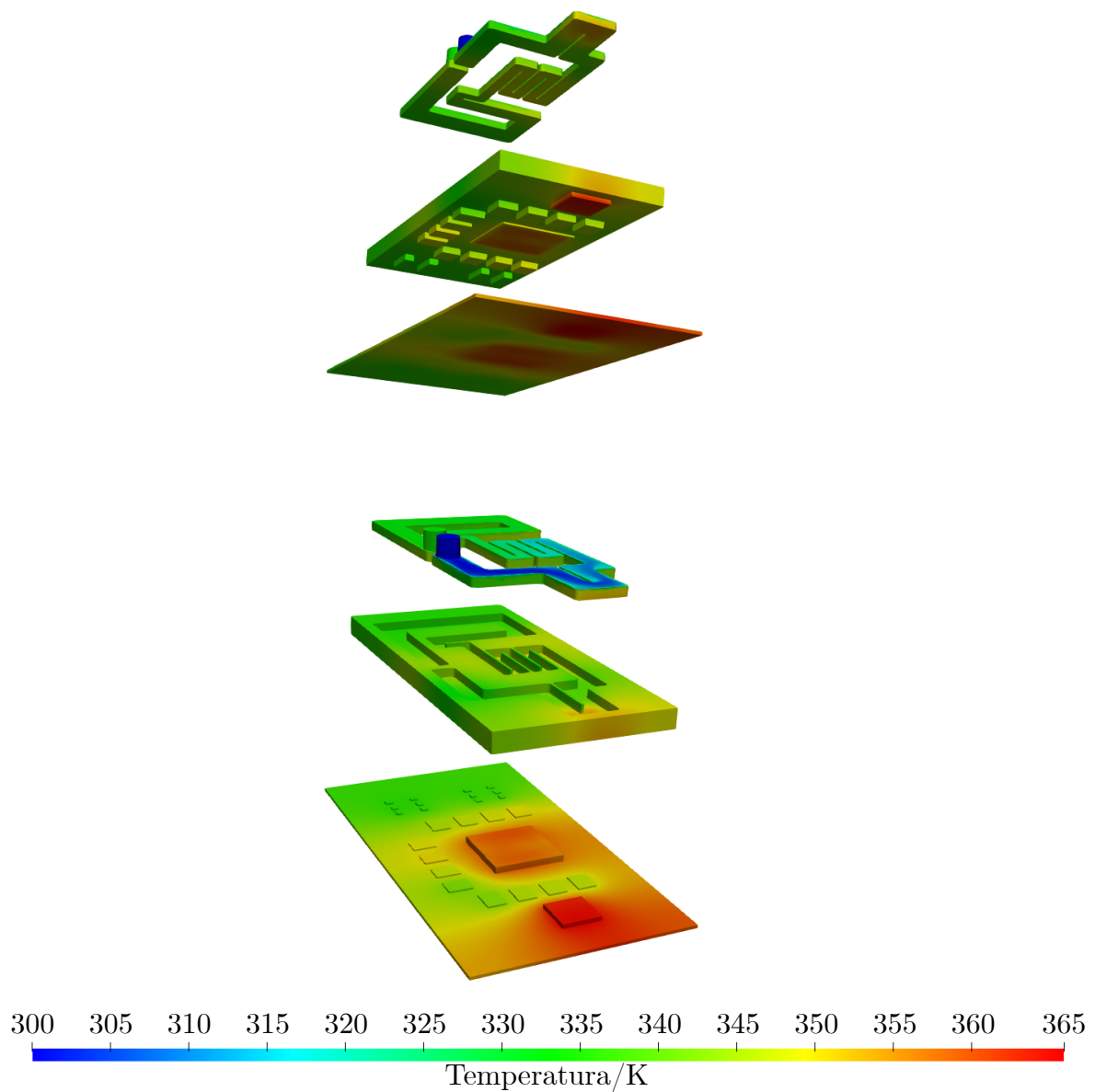
**Slika 19. Temperature unutar procesora.**

Sa slike vidimo da temperature konvergiraju, tablica 5 prikazuje usporedbu dobivene prosječne temperature u procesoru sa eksperimentalnim mjerenjem iz [11] u kojem se koristila ista grafička kartica, ali druga geometrija vodenog bloka.

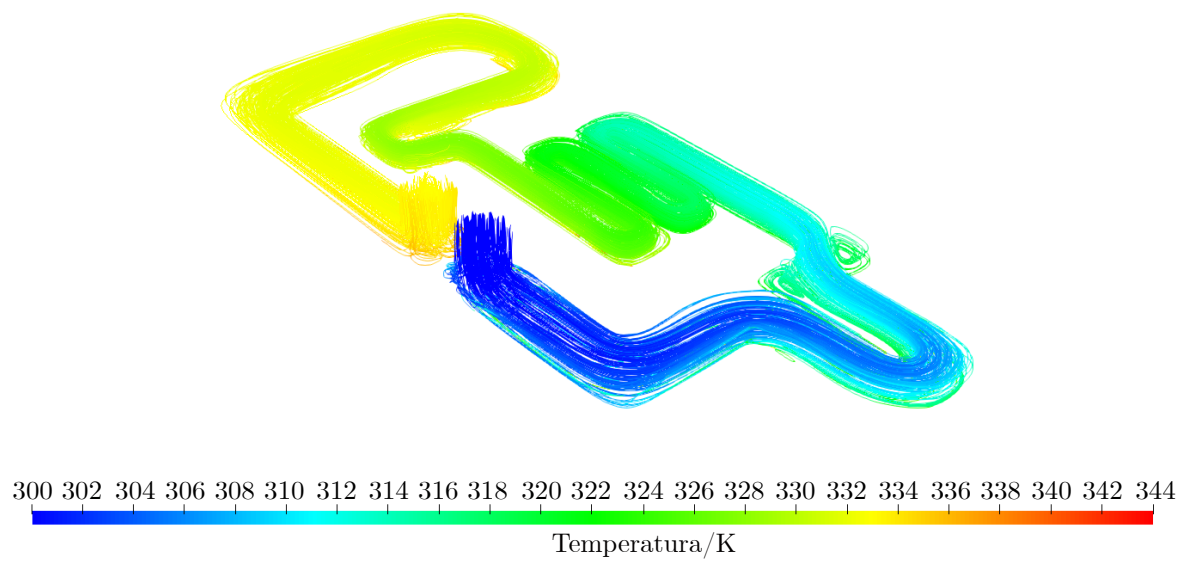
**Tablica 5. Usporedba temperatura.**

| Prosječna temperatura/°C | Izmjerena temperatura/°C | Relativno odstupanje |
|--------------------------|--------------------------|----------------------|
| 85.531                   | 63                       | 35,76%               |

Slika 20 prikazuje temperaturno polje svake zone u stacionarnom stanju, a slika 21 strujnice obojene iznosom temperature u stacionarnom stanju.



**Slika 20. Temperaturno polje.**

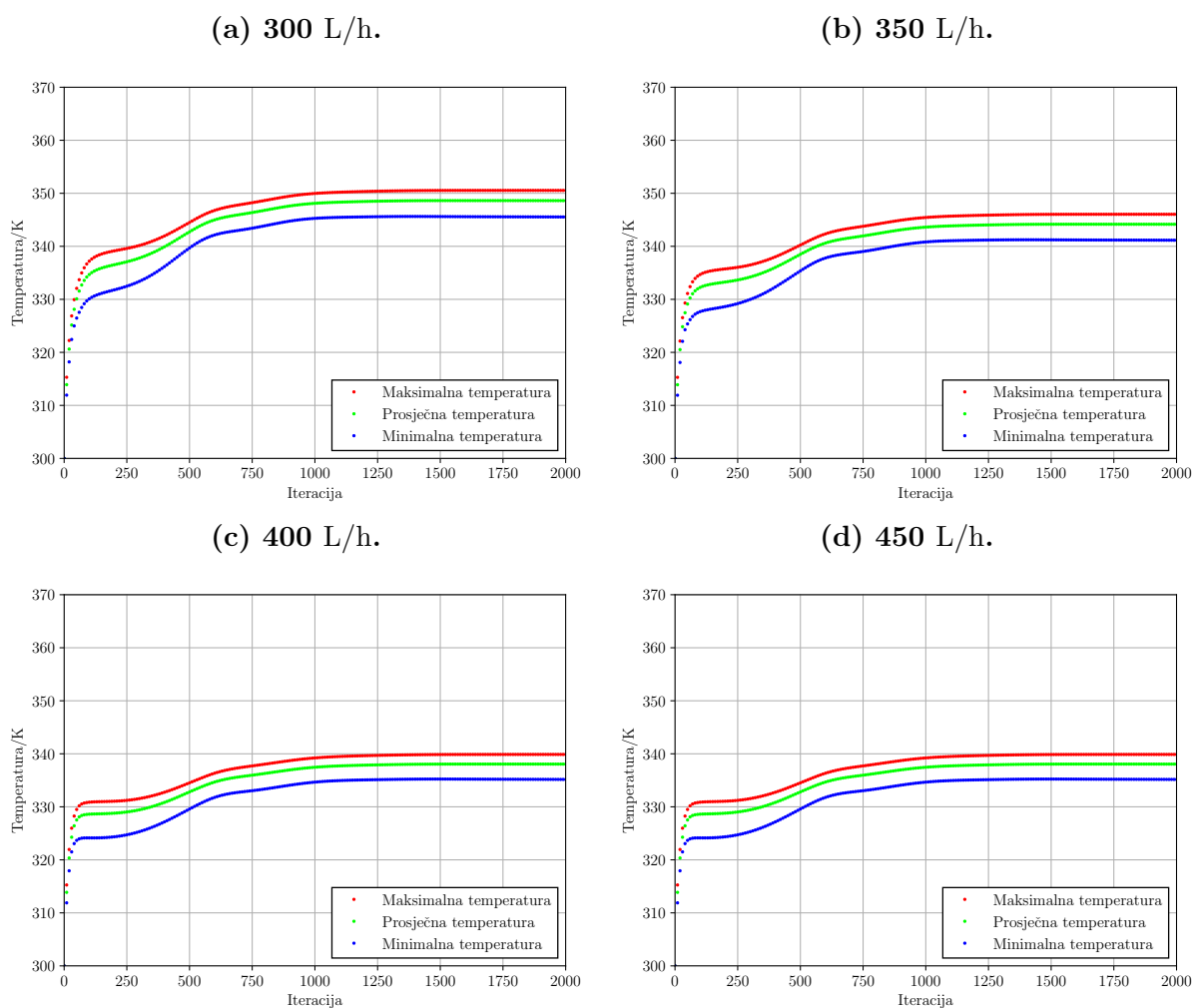


**Slika 21. Strujnice.**

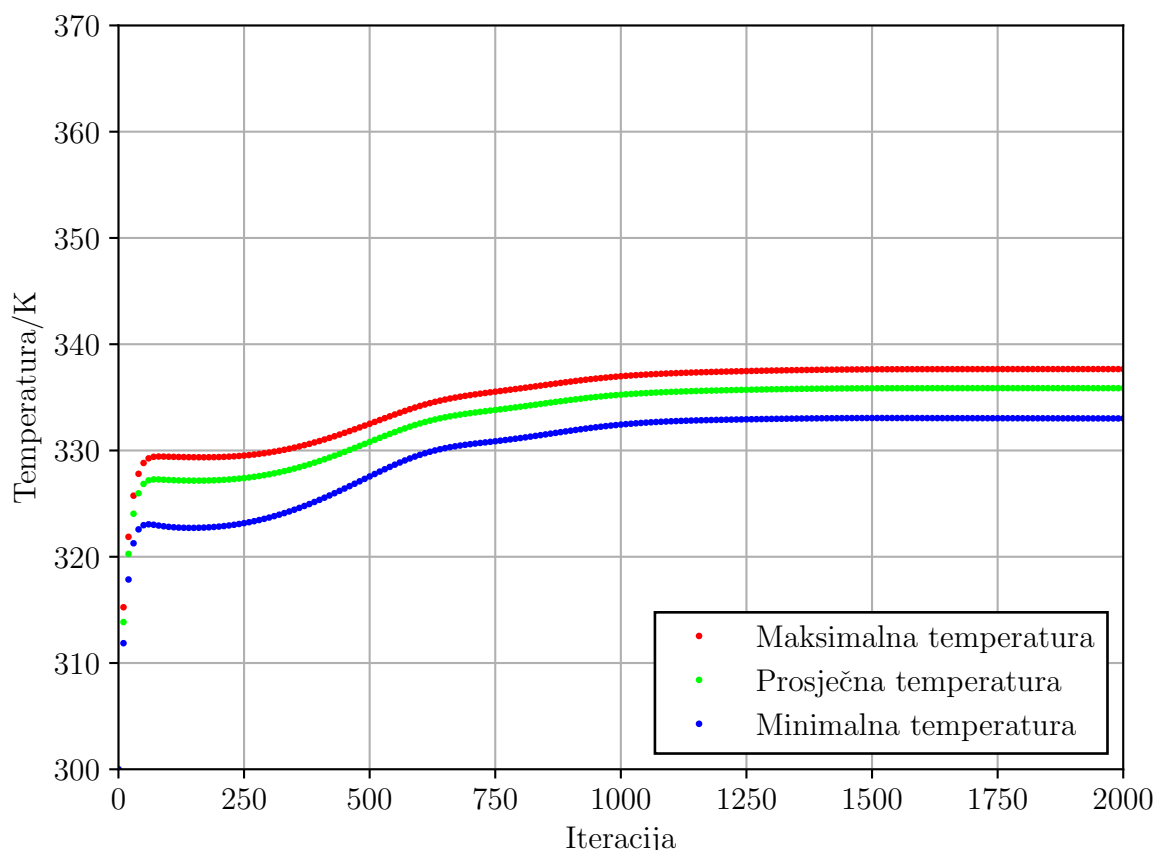
### 5.3.2. Poboljšani rezultati

Vidimo da je odstupanje između dobivene i izmjerene temperature značajna, to se može opravdati činjenicom da su geometrije vodenih blokova znatno različite. Broj rebara naše geometrije kod kojih će se prenositi toplina sa procesora na fluid je manja u usporedbi sa geometrijom koja se koristila za mjerenja. Jedno rješenje kako dobiti manju temperaturu je povećati protok vode kroz blok. Slike 22a, 22b, 22c, 22d i 23 prikazuju raspodjelu temperatura u procesoru ako povećavamo protok za 50 L/h za svaku sljedeću simulaciju do protoka 500 L/h.

Slika 22. Temperature unutar procesora za veće protoke.



Slika 23. Temperature za protok 500 L/h.

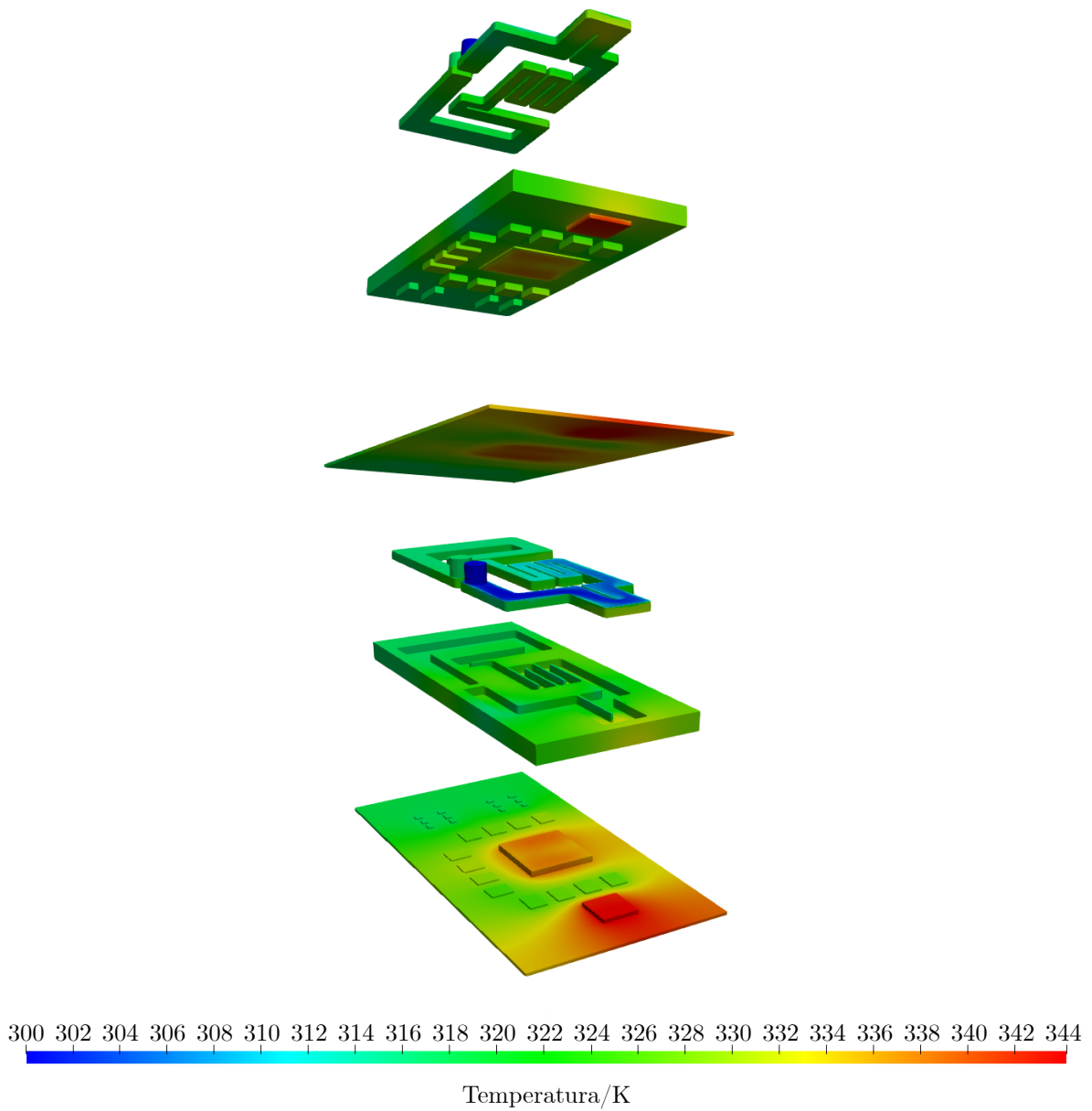


Tablica 6 prikazuje usporedbu temperatura na procesoru sa izmjerenom za slučajeve povećanih protoka.

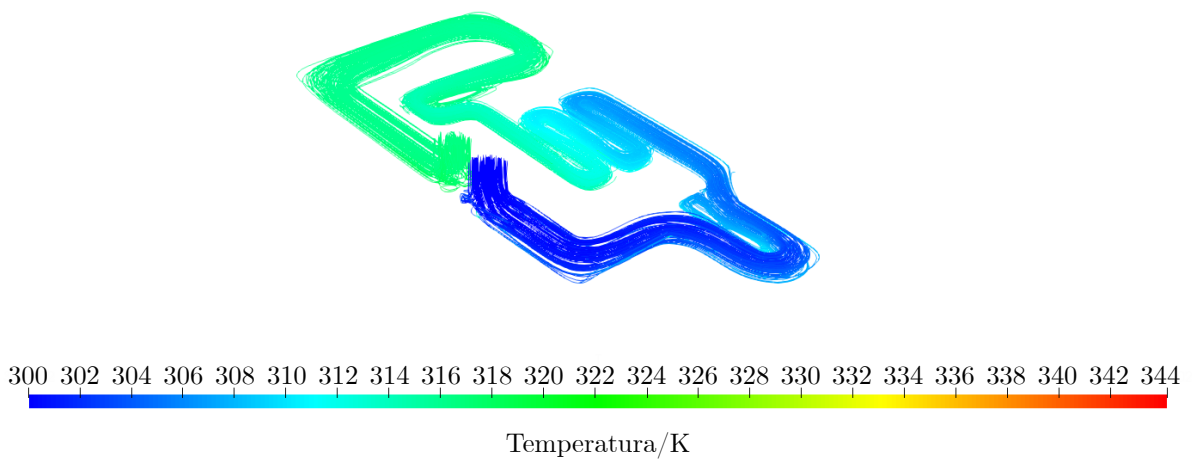
Tablica 6. Usporedba temperatura za veće protoke.

| Protok/L h <sup>-1</sup> | Prosječna temperatura/°C | Relativno odstupanje |
|--------------------------|--------------------------|----------------------|
| 300                      | 75,465                   | 19,78%               |
| 350                      | 71,004                   | 12,7%                |
| 400                      | 67,624                   | 7,34%                |
| 450                      | 64,905                   | 3,02%                |
| 500                      | 62,713                   | 0,45%                |

Relativna odstupanja opadaju što je i za očekivati jer povećavanjem protoka vode se povećava konvekcija. Vidimo da ako je protok kroz blok negdje između 400 L/h i 450 L/h onda je odstupanje negdje oko 5% što je za inženjerske svrhe dovoljno dobro. Ovo poboljšanje povećavanjem protoka vode kroz blok znači da moramo nabaviti veću i skuplju pumpu da bi osigurali barem iste rezultate bolje geometrije. Drugim riječima, žrtvujemo geometriju za protok. Slika 24 prikazuje temperaturno polje za protok 450 L/h, a slika 25 prikazuje strujnice za isti protok.



Slika 24. Temperaturno polje za protok 450 L/h.



Slika 25. Strujnice obojene temperaturom za protok 450 L/h.

## 6. ZAKLJUČAK

Radom je ustanovljeno da se radi neoptimizirane geomerije postižu veće temperature na procesoru nego što bi trebale biti. Preporuka je držati temperaturu procesora u intervalu 70-85 °C [12] može i manje, ali sigurno ne više. Budući da nismo mogli dobiti pouzdane rezultate standardnim protokom vode predložili smo rješenje da se poveća protok na 450 L/h ili na neku vrijednost blizu tog protoka jer je taj protok najmanje udaljen od 5% odstupanja dobiven simulacijama i zadovoljava spomenuti temperaturni interval. Nismo nužno morali povećati protok, drugo moguće rješenje je povećati broj rebara kako bi se postigao bolji prijenos topline. Najjednostavnije je povećati protok u odnosu na izradu nove geometrije jer su troškovi daleko manji. Jedan bitan razlog velikih temperatura početnih rezultata je neprecizna definicija toplinskih izvora naime, ne postoje točni podaci o tome koliko snage troši svaka komponenta naše grafičke kartice. Simulacija koristi aproksimacije snaga koje su dobivene mjerenjima na različitim grafičkim karticama. Bitno je još napomenuti da  $k - \epsilon$  model turbulencije ne daje najbolje rezultate kod problema prijenosa topline, bolji model bi bio  $k - \omega$  ili  $k - \omega$  SST jer oni ne koriste zidne funkcije za aproksimaciju veličina blizu zidova za razliku od  $k - \epsilon$  modela.



## LITERATURA

- [1] URL: <https://www.youtube.com/watch?v=JVE0fNkc540>.
- [2] URL: <https://www.anandtech.com/show/2119/7>.
- [3] URL: <https://www.cfd-online.com/Tools/yplus.php>.
- [4] URL: <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/man/chtMultiRegionSimpleFoam.html>.
- [5] URL: [https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/turbulentTemperatureRadCoupledMixedFvPatchScalarField\\_8H\\_source.html](https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/turbulentTemperatureRadCoupledMixedFvPatchScalarField_8H_source.html).
- [6] URL: <https://www.nwengineeringllc.com/article/fr4-thermal-properties-to-consider-during-design.php>.
- [7] URL: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/5-models-and-physical-properties/5.2-thermophysical-models>.
- [8] URL: <https://www.igorslab.de/en/350-watts-for-nvidias-new-top-of-the-line-geforce-rtx-3090-ampere-model-explained-chip-area-calculated-and-boards-compared/>.
- [9] URL: <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-fvoptions-sources-semi-implicit.html>.
- [10] URL: <https://www.techpowerup.com/forums/threads/hd-6950-location-of-temperature-sensors.159526/>.
- [11] URL: [https://bit-tech.net/reviews/tech/graphics/bfgtech\\_geforce\\_8800\\_gtx\\_watercooled/9/](https://bit-tech.net/reviews/tech/graphics/bfgtech_geforce_8800_gtx_watercooled/9/).
- [12] URL: <https://www.nvidia.com/en-us/geforce/forums/gaming-pcs/8/96782/what-the-recommended-gpu-temperature-range/>.
- [13] J. H. Ferziger i M. Perić. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Berlin: Springer, 2002.
- [14] A. Galović. **Termodinamika I**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [15] A. Galović. **Termodinamika II**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2019.
- [16] B. Halasz, A. Galović i I. Boras. **Toplinske tablice**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2020.
- [17] H. Jasak. **Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method With Applications to Fluid Flows**. 1996.
- [18] S. Krizmanić. **Uvod u inženjersko modeliranje predavanja**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2019.

- 
- [19] F. Moukalled, L. Mangani i M. Darwish. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab**. Springer International Publishing, 2015.
- [20] Hardware Museum. **Foxconn GeForce 8800 GTX OC**. 2017. URL: <http://hw-museum.cz/vga/300/foxconn-geforce-8800-gtx-oc>.
- [21] L. Pichler. **Watercooling GTX 8800 + 775**. 2018. URL: <https://grabcad.com/library/watercooling-gtx-8800-775-2>.
- [22] Z. Virag i I. Džijan. **Računalna dinamika fluida predavanja**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [23] Z. Virag i S. Krizmanić. **Dinamika plinova**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2021.
- [24] Z. Virag, M. Šavar i I. Džijan. **Mehanika fluida I predavanja**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2017.
- [25] Z. Virag, M. Šavar i I. Džijan. **Mehanika fluida II predavanja**. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2017.

## **PRILOZI**

I. CD-R disc