

# Procjena brzine skretanja i kuta bočnog klizanja vozila primjenom Kalmanova filtra

---

**Bašić, Mate**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:692457>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-18**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mate Bašić

ZAGREB, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

PROCJENA BRZINE SKRETANJA I KUTA BOČNOG KLIZANJA VOZILA  
PRIMJENOM KALMANOVA FILTRA

Mentor:  
doc. dr. sc. Mario Hrgetić

Student:  
Mate Bašić

ZAGREB, 2022.

## Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvalio bih se najprije puno svojoj obitelji, radi podrške na svim razinama tijekom cijelog preddiplomskog studija. Velike hvale idu i profesorima Fakulteta za sav trud oko mogega obrazovanja, te posebno mentoru na strpljivosti kod otvaranja prozora u područje Kalmanovih filtara. Također zahvaljujem i fakultetskoj košarkaškoj ekipi i treneru Zvoni na mnogo dobrih trenutaka na terenu i van njega. Osim toga, htio bih zahvaliti i kolegama iz *AVL*-a na prenešenim iskustvima kroz studentski rad, te kolegama iz *FSB Racing Team*-a na suradnji i podijeljenom znanju, a posebno Marinu Pavlakoviću sa kojime sam proveo mnoge sate raspravljajući o temama vezanim za dinamiku vozila. Na kraju, hvala i starijim kolegama sa faksa koji su svojim savjetima olakšali čitav ovaj preddiplomski put, a ponajviše Luki Jeličiću koji je bio i ostao prijatelj kakvog bi svatko poželio.

Zagreb, rujan 2022.

Mate Bašić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Mate Bašić** JMBAG: **0035214749**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Procjena brzine skretanja i kuta bočnog klizanja vozila primjenom Kalmanova filtra**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Estimation of yaw rate and sideslip angle of the vehicle by using Kalman filter**

Opis zadatka:

U suvremena vozila ugrađuje se niz sustava aktivnog upravljanja dinamikom vozila s ciljem povećanja sigurnosti i udobnosti vožnje. Ovi sustavi zahtijevaju informacije o varijablama stanja i parametrima dinamike vozila poput brzine skretanja, kuta bočnog klizanja i kuta valjanja, inercije i mase vozila, statičkih karakteristika guma, te informacije o uvjetima na cesti. Neke od ovih varijabli mogu se izravno mjeriti, dok je druge potrebno procijeniti na temelju dostupnih mjerenja i odgovarajućih modela kinematike ili dinamike vozila. U radu je potrebno:

- opisati modele kinematike i dinamike vozila te različite konfiguracije senzora koji se koriste u naprednim sustavima aktivnog upravljanja bočnom dinamikom vozila;
- usporediti točnost modela reduciranog reda u odnosu na puni, referentni model dinamike vozila korištenjem programskih alata za simulaciju dinamike vozila (Matlab Simulink i AVL VSM);
- razraditi sustav procjene (estimatora) brzine skretanja i kuta bočnog klizanja vozila zasnovan na primjeni Kalmanova filtra te podesiti njegove parametre;
- temeljem simulacijskih rezultata, analizirati kvalitetu procjene kuta bočnog klizanja i brzine skretanja za različite vozne scenarije, u slučaju varijacija parametara modela i pogrešaka mjerenja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
 2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
 3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
 2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
 3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Mario Hrgetić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

# Sadržaj

Sadržaj	iv
Popis slika	vi
Popis oznaka	ix
Sažetak	xi
Summary	xii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Podjela estimatora . . . . .	1
1.2. Estimacija stanja vozila temeljena na modelu . . . . .	2
1.3. Modeliranje interakcije između gume i podloge . . . . .	2
1.3.1. Bočni kut klizanja . . . . .	4
1.3.2. Uzdužno klizanje . . . . .	5
1.3.3. Slobodni parametri . . . . .	5
1.3.4. <i>Magic Formula</i> . . . . .	6
<b>2. Modeli vozila</b>	<b>10</b>
2.1. Bicikl model dinamike vozila . . . . .	10
2.2. Planarni dvotračni model . . . . .	16
2.3. Trodimenzionalan kinematski model . . . . .	23
2.3.1. Os valjanja vozila . . . . .	24

2.3.2.	Definicija koordinatnog sustava . . . . .	28
2.3.3.	Vektor kutne brzine i kutne akceleracije . . . . .	30
2.3.4.	Akceleracija točke na tijelu . . . . .	31
2.4.	Model visoke vjernosti . . . . .	34
2.5.	Konfiguracije senzora . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Usporedba referentog i reduciranog modela</b>	<b>36</b>
3.1.	Referentni model . . . . .	36
3.2.	Kinematski model namijenjen upravljanju . . . . .	38
3.3.	Dinamički bicikl model . . . . .	43
<b>4.</b>	<b>Kalmanov filter</b>	<b>49</b>
4.1.	Osnovne jednačbe . . . . .	49
4.1.1.	Estimacija uzdužne brzine vozila . . . . .	51
4.2.	Kinematski model vozila . . . . .	53
4.2.1.	Osmotrivost . . . . .	53
4.2.2.	Vozni ciklusi za analizu estimatora . . . . .	54
4.3.	Analiza performansi . . . . .	56
4.3.1.	Netočni početni uvjeti . . . . .	56
4.4.	Modifikacije . . . . .	60
4.4.1.	Prag komplementaran brzini skretanja vozila . . . . .	61
4.4.2.	Paralelni filter . . . . .	62
4.4.3.	Dodavanje šuma i posmaka . . . . .	63
4.5.	Proširenje vektora stanja i vektora mjerenja . . . . .	67
4.6.	Kompenzacija kuta valjanja . . . . .	72
4.7.	Kompenzacija mjernog posmaka sa senzora . . . . .	77
4.8.	Konačne performanse filtra . . . . .	78
<b>5.</b>	<b>Zaključak</b>	<b>81</b>
	<b>Literatura</b>	<b>83</b>

# Popis slika

1.1	Pristupi estimaciji [1]	2
1.2	Primjer fizikalnog modela gume iz [3]	3
1.3	Slika postava za testiranje gume	4
1.4	Ilustracija kuta bočnog klizanja gume	4
1.5	Bočni kut nagiba gume	6
1.6	Primjer eksperimentalnih rezultata za uzdužnu silu gume iz [3]	7
1.7	Tipična MF krivulja iscrtana preko mjerenja bočne sile iz [3]	7
1.8	Bočna krutost gume na dvije karakteristične krivulje	8
1.9	Shematski prikaz linearizacije gume iz [8]	9
2.1	Bicikl model iz [8]	11
2.2	Koordinatni sustavi u bicikl modelu iz [8]	12
2.3	Kvalitativan prikaz karakteristike osovine i njene linearizacije iz [3]	15
2.4	Koordinatni sustav i varijable stanja u dvotračnom modelu	16
2.5	Vektori brzine kotača prema podlozi	17
2.6	Statički kut usmjerenosti kotača	18
2.7	Ackermannova geometrija upravljanja	18
2.8	Izračun kuteva klizanja pojedinih guma po dvotračnom modelu	19
2.9	Usporedba dva načina računanja bočnog kuta klizanja guma iz [7]	20
2.10	Sile na vozilo u koordinatnom sustavu vezanom za kotač	22
2.11	Sile na vozilo u koordinatnom sustavu vezanom na vozilo	23
2.12	Os valjanja vozila	24



2.13	Centri valjanja ilustrirani u [14] . . . . .	25
2.14	Centar valjanja ilustriran u [9] . . . . .	25
2.15	Pružno vozilo kao približan kinematski ekvivalent za valjanje ilustriran u [9] . . . . .	27
2.16	Ilustracija centra poniranja . . . . .	27
2.17	Rastav sila koje djeluju na vozilo u centru valjanja osovine iz [3] . . . . .	28
2.18	Redoslijed rotacija koordinatnog sustava vezanog za vozilo u odnosu na inercijski iz [3] . . . . .	29
2.19	Definicija pozicije VIP točke u bočnom pogledu . . . . .	31
2.20	VIP točka u prednjem pogledu . . . . .	32
2.21	Razlika vektora usmjerenosti i brzine vozila iz GPS mjerenja . . . . .	35
3.1	Karakteristika gume na modeliranom vozilu . . . . .	37
3.2	Koordinatni sustav u programu VSM . . . . .	38
3.3	Procjena relativnog odnosa članova u vanplanarnoj korekciji . . . . .	39
3.4	Usporedba punog i kinematskog modela na CRC proceduri ( $R = 15\text{m}$ ) . . . . .	40
3.5	Usporedba punog i kinematskog modela na CRC proceduri ( $R = 30\text{m}$ ) . . . . .	41
3.6	Usporedba punog i kinematskog modela na CRC proceduri ( $R = 50\text{m}$ ) . . . . .	41
3.7	Usporedba punog i kinematskog modela na DLC proceduri . . . . .	42
3.8	Usporedba punog i kinematskog modela u uvjetima kombinirane dinamike . . . . .	42
3.9	Usporedba referentnog i bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 15\text{m}$ ) . . . . .	44
3.10	Usporedba referentnog i bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 30\text{m}$ ) . . . . .	44
3.11	Usporedba referentnog i bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 50\text{m}$ ) . . . . .	45
3.12	Usporedba referentnog i bicikl modela na DLC proceduri . . . . .	45
3.13	Usporedba referentnog i bicikl modela u uvjetima kombinirane dinamike . . . . .	46
3.14	Granice primjenjivosti lineariziranog bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 15\text{m}$ ) . . . . .	47
3.15	Granice primjenjivosti lineariziranog bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 30\text{m}$ ) . . . . .	47
3.16	Granice primjenjivosti lineariziranog bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 50\text{m}$ ) . . . . .	48
4.1	Utjecaj matrica šuma procesa i šuma mjerenja . . . . .	51
4.2	Shema algoritma za procjenu uzdužne brzine iz [21] . . . . .	52

4.3	Greška procjene uzdužne brzine iz [21]	52
4.4	Definicija DLC procedure	54
4.5	Definicija procedure kombinirane dinamike	55
4.6	Referetne performanse sa idealnim signalima	56
4.7	Netočni početni uvjeti uz $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1)$	57
4.8	Netočni početni uvjeti uz $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 1)$	58
4.9	Netočni početni uvjeti uz $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 10)$	58
4.10	Netočni početni uvjeti uz $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 10)$	59
4.11	Netočni početni uvjeti i varijacije R uz $\mathbf{Q} = \text{diag}(0.1, 1)$	60
4.12	Prva modifikacija sa pragovima na mjerenja $r$ i $v_x$	61
4.13	Estimirana derivacija bočne brzine $v_y$	62
4.14	Implementacija dvostrukog filtra sa netočnim početnim uvjetima	63
4.15	Dvostruki filter sa šumom	64
4.16	Drugačiji odabir pragova za ravnu vožnju	65
4.17	Dodavanje posmaka na mjerene signale	66
4.18	Performanse proširenog filtra na DLC proceduri	68
4.19	Greška procjene bočnog kuta klizanja na DLC proceduri	69
4.20	Greška procjene kuta klizanja na proceduri kombinirane dinamike	69
4.21	Performanse proširenog filtra na proceduri kombinirane dinamike	70
4.22	Performanse proširenog filtra na proceduri kombinirane dinamike sa dodanim posmakom na mjerenim signalima	71
4.23	Greška u signalu bočnog ubrzanja sa senzora u odnosu na referencu	72
4.24	Performanse filtra sa nekorigiranim mjerenjem bočne akceleracije	73
4.25	Greška filtra sa nekorigiranim mjerenjem bočne akceleracije	74
4.26	Usporedba utjecaja pojedinih komponenti na netočnost signala bočne akceleracije sa akcelerometra	74
4.27	Usporedba iznosa valjanja iz simulacije i izračuna pomoću statičkog gradijenta valjanja	75
4.28	Performanse filtra sa korigiranim mjerenjem bočne akceleracije	76
4.29	Greška filtra sa korigiranim mjerenjem bočne akceleracije	77
4.30	Princip kompenzacije statičkog posmaka na sensorima	78
4.31	Konačne performanse filtra na DLC proceduri	79
4.32	Konačnog filtra na DLC proceduri	80

# Popis oznaka

$\alpha$	Kut bočnog klizanja gume [°]
$\alpha_{F,R}$	Bočni kut klizanja osovine [°]
$\beta$	Kut bočnog klizanja vozila [°]
$\beta_{err}$	Greška estimacije bočnog kuta klizanja [°]
$\Omega$	Vektor kutne brzine vozila [rad/s]
$\delta$	Kut zakreta kotača u odnosu na uzdužnu os [°]
$\gamma$	Kut nagiba vertikalne osi kotača prema podlozi [°]
$\hat{\beta}_{ij}$	Kut između vektora brzine pojedinog kotača i uzdužne osi vozila [°]
$\mathbf{F}$	matrica sustava u zapisu Kalmanovog filtra
$\mathbf{G}$	matrica ulaza u zapisu Kalmanovog filtra
$\mathbf{H}$	matrica mjerenja u zapisu Kalmanovog filtra
$\mathbf{O}_b$	Matrica osmotrivosti procesa
$\mathbf{u}$	vektor ulaznih varijabli u zapisu Kalmanovog filtra
$\mathbf{x}$	vektor varijabli stanja sustava u zapisu Kalmanovog filtra
$\mathbf{y}$	vektor izlaznih varijabli u zapisu Kalmanovog filtra
$\Omega_w$	Kutna brzina vrtnje kotača [rad/s]
$\Phi$	Kut valjanja vozila [rad]
$\Phi_{ay}$	Gradijent valjanja [°/g bočnog ubrzanja ]
$\psi$	Kut zakreta vozila oko vertikalne osi u odnosu na mirujućí koordinatni sustav [rad]
$\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i$	Jedinični vektori u koordinatnim sustavima kod izvoda kinematskog modela
$\mathbf{Q}$	Matrica šuma procesa u Kalmanovom filtru

$\mathbf{R}$	Matrica šuma mjerenja u Kalmanovom filtru
$\Theta$	Kut poniranja vozila [rad]
$a_{1,2}$	Udaljenosti osovina od težišta vozila [m]
$a_{x,y,z}$	Akceleracija točke na vozilu u smjeru osi koordinatnog sustava vezanog za vozilo
$B$	Faktor krutosti u MF [-]
$C$	Faktor oblika u MF [-]
$C'_\alpha$	Bočna krutost gume [N/°]
$C_\alpha$	Bočna krutost osovine [N/°]
$D$	Višna vrijednost sile u MF [-]
$E$	Faktor zakrivljenosti u MF [-]
$F_{x,yF,R}$	Sila prednje i stražnje osovine na vozilo u smjeru osi koordinatnog sustava vezanog za vozilo [N]
$F_{X,Y}$	Sila na vozilo u smjeru osi inercijskog koordinatnog sustava [N]
$F_{x,y}$	Sila na vozilo u smjeru osi koordinatnog sustava vezanog za vozilo [N]
$g$	Ubrzanje sile teže [m/s <sup>2</sup> ]
$J_z$	Moment inercije oko vertikalne osi vozila koja prolazi kroz težište [kgm <sup>2</sup> ]
$m$	Masa vozila [kg]
$M_Z$	Moment planarnih sila na vozilo oko njegovog težišta [Nm]
$p, q, r$	Komponente vektora kutne brzine vozila u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo [rad/s]
$R_e$	Efektivni radijus slobodnokotrljajućeg kotača [m]
$S_x$	Uzdužno klizanje gume [-]
$t_{1,2}$	Međusovinski trag kotača po osovini [m]
$v_x$	Uzdužna komponenta brzine težišta vozila [m/s]
$v_y$	Bočna komponenta brzine težišta vozila [m/s]
$V_{ax}$	Brzina kretanja osovine kotača u odnosu na podlogu [m/s]
$X, Y$	Pozicija težišta vozila na osima inercijskog koordinatnog sustava [m]
$X_{i,j}$	Uzdužne sile pojedinog kotača u koordinatnom sustavu vozila [N]
$Y_{i,j}$	Poprečne sile pojedinog kotača u koordinatnom sustavu vozila [N]
$a_{y,meas}$	Signal bočnog ubrzanja sa vozila [m/s <sup>2</sup> ]

# Sažetak

U ovome radu najprije su predstavljene osnovni pristupi modeliranju vozila, te su uvedeni i jednadžbama opisani planarni dvotračni i bicikl model, kao temeljni modeli vozila namijenjenih upravljanju. Nakon toga je pokazana gradacija u razinama modeliranja kroz složeniji trodimenzionalni model gibanja vozila, do kratkog opisa modela sa 14 varijabli stanja iz komercijalnog programskog paketa *AVL VSM*. Također su ukratko opisane konfiguracije senzora korištenih za estimaciju varijabli stanja bočne dinamike vozila, s naglaskom na bočni kut klizanja vozila.

U drugom dijelu je iskorišten planarni kinematski model vozila kako bi se Kalmanov filtar upotrijebio za procjenu bočnog kuta klizanja, te su pokazane neke nadogradnje i analizirane performanse koristeći podatke dobivene simulacijom u profesionalnom programskom paketu predstavljenom u prvom dijelu rada.

**Ključne riječi:** bicikl model, kinematski model vozila, brzina skretanja, kut bočnog klizanja vozila, Kalmanov filtar

# Summary

In this thesis, at first basic approaches to vehicle modelling are presented. Next, bicycle and double-track models are described, as a fundamental control-oriented vehicle models. Gradation in modelling complexity is shown through tridimensional vehicle kinematic model all the way to the 14 degree-of-freedom model used in commercial software package *AVL VSM*. Also, sensor configurations for lateral vehicle dynamics state variables estimation are briefly presented, with the emphasis on the vehicle sideslip angle estimation.

In the second part planar kinematical vehicle model is deployed in Kalman filter synthesis. The basic form of filter together with its upgrades was used to estimate the vehicle sideslip angle, and its performance was analyzed using the data of vehicle model from the previously introduced professional software.

**Keywords:** bicycle model, kinematic vehicle model, yaw rate, vehicle sideslip angle, Kalman filter

# 1 | Uvod

U suvremene automobile ugrađuje se niz sustava aktivnog upravljanja dinamikom vozila s ciljem poboljšanja performansi, ali i sigurnosti vožnje. Kako bi svojim djelovanjem mogao regulirati varijable stanja vozila prema željama vozača, svaki takav sustav zahtjeva poznavanje ključnih varijabli, poput npr. uzdužne i bočne brzine vozila, brzina vrtnje kotača, brzine zakretanja vozila oko vertikalne osi, kut valjanja itd. Neke varijable stanja mogu se relativno jednostavno i jeftino izravno mjeriti, kao npr. brzina vrtnje kotača koja se mjeri pomoću Hallova senzora, dok su za neke druge potrebni senzori koji nisu komercijalno isplativi, poput optičkih senzora bočnog kuta klizanja vozila. Stoga se često pribjegava algoritmima za estimaciju onih varijabli koje nisu lako mjerljive, kako bi se iz dostupnih mjerenje i modela kinematike ili dinamike vozila mogle dobiti što pouzdanije procjene.

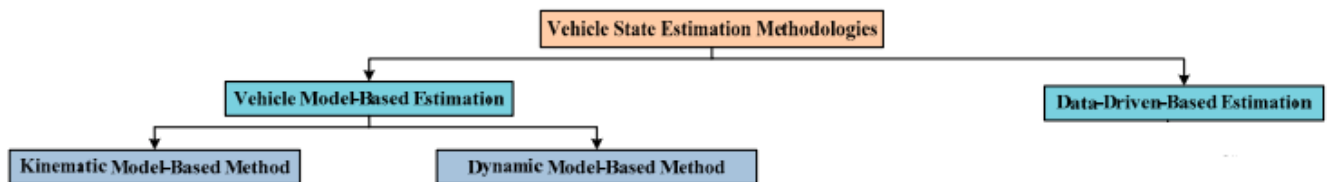
## 1.1. Podjela estimatora

Prema [1], postoje dvije glavne kategorije estimatora varijabli stanja gibanja vozila, prema kriteriju je li potrebno modelirati dinamiku odnosno kinematiku vozila ili ne. Jedan od pristupa estiamciji stanja vozila bez da se ono modelira (engl. *data-driven estimation approach*) uzima pretpostavku da je određena varijabla stanja nelinearna funkcija ograničenog broja drugih mjerljivih varijabli, te se na velikom skupu ulazno izlaznih podataka trenira neuronske mreže koja kasnije u primjeni daje procjenu željenih varijabli stanja [2]. Budući da performanse takvog estimatora uvelike ovise o dostupnom setu mjerenja za treniranje mreže, prema [2] robusnija rješenja češće spadaju u drugu

kategoriju, a to je estimacija stanja temeljena na modelu vozila (engl. *model-based estimation*).

## 1.2. Estimacija stanja vozila temeljena na modelu

Estimacija varijabli stanja vozila temeljena na modelu može se dalje klasificirati u dvije podvrste. Prvoj pripadaju kinematski estimatori varijabli stanja gibanja, odnosno definiraju se kinematske jednadžbe koje povezuju estimirane veličine sa mjerjenima (engl. *kinematic model-based estimation*). Iako jednostavniji, takvi estimatori pokazuju dobre rezultate za tranzijentne manevre vožnje, ali nisu toliko precizni kod estimacije stacionarnih manevara [1]. Drugoj grupi pripadaju estimatori temeljeni na dinamičkim modelima vozila (engl. *dynamic model-based estimators*). Oni modeliraju sile koje djeluju na vozilo, te iz toga na temelju klasičnih dinamičkih Newton-Eulerovih jednadžbi gibanja predviđaju trajektoriju promjene stanja vozila. Glavna poteškoća u modeliranju dinamike vozila općenito, pa tako i kod ovog pristupa estimaciji je karakterizacija sila na mjestu kontakta gume i podloge (engl. *contact patch*). Rezultirajuća mentalna mapa koju tvore pristupi estimaciji varijabli stanja vozila prikazana je na slici 1.1.



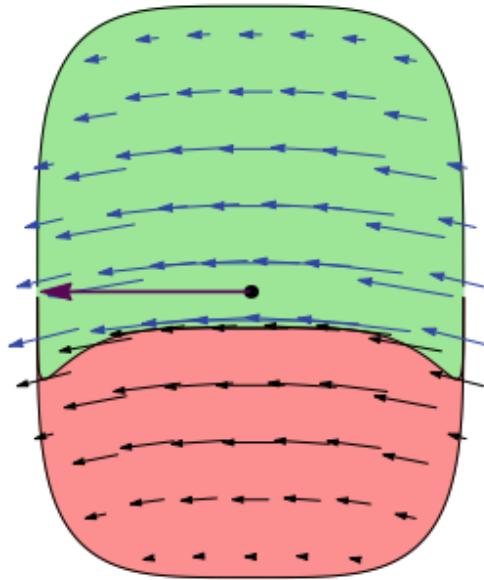
Slika 1.1: Pristupi estimaciji [1]

## 1.3. Modeliranje interakcije između gume i podloge

Interakcija između gume i podloge može se također fizikalno modelirati, pomoću modela četkica (engl. *brush tire model*), kao npr. u [3], gdje se preko polja brzina vrhova četkica računa polje raspodjele njihove deformacije u tangencijalnom smjeru. Nadalje se u tom pristupu modelira maksimalna tangencijalna deformacija vrhova četkica prije klizanja, te područja njihova prijanjanja i klizanja (prikazane crveno i zeleno na slici



1.2). Iz toga se izračunava polje tangencijalnih naprezanja, prikazano malim strelicama na slici 1.2, te se na kraju integracijom preko cijelog područja dodira gume i podloge dolazi do rezultantne sile, prikazane velikom ljubičastom strelicom na slici 1.2.



Slika 1.2: Primjer fizikalnog modela gume iz [3]

Već se iz ovog kratkog opisa može naslutiti kompliciranost i računalna zahtjevnost fizikalnog pristupa modeliranju gume, koja ju čini nepraktičnom za primjene u *online* aplikacijama kao što je estimacija stanja, pa stoga i pregledna literatura [1] [4] pokazuje puno manju zastupljenost takvih modela u istraživanju. Drugi puno češći pristup je matematičko modeliranje gume, od kojih je najpopularniji tzv. *Pacejka* model gume. Ime dolazi od idejnog začetnika, prof. Hansa B. Pacejke koji je smislio tzv. *čarobnu formulu* (engl. *Magic Formula* ili skraćeno MF) (1.3), koja se temelji na trigonometrijskim antisimetričnim funkcijama koje se koriste za korelaciju podataka sa mjerenjima sila između gume i podloge (slika 1.3).

Da bi se ona opisala, treba uvesti nezavisne varijable koje se koriste kod testiranja guma kao sa slike 1.3, odnosno kod matematičkog modeliranja gume. Kod testova bočnih sila gume to je bočni kut klizanja gume  $\alpha$ , a za uzdužne sile uzdužno klizanje  $S_x$ . Glavni cilj takvih testiranja jest identifikacije parametara matematičkih modela gume, kako bi se dobili vjerni modeli koji će kasnije u modelima vozila opisivati njegovu interakciju sa

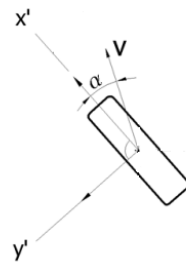
podlogom.



Slika 1.3: Slika postava za testiranje gume

### 1.3.1. Bočni kut klizanja

Za potrebe modeliranja bočne gume uvodi se ranije spomenuti bočni kut klizanja gume  $\alpha$  (engl. *tire sideslip angle*), koji predstavlja kut između smjera brzine koju područje kontakta gume sa podlogom ima relativno na podlogu i usmjerenosti kotača, prikazan na slici 1.4, te definiran u (1.1).



Slika 1.4: Ilustracija kuta bočnog klizanja gume

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_{y'}}{V_{x'}} \quad (1.1)$$

### 1.3.2. Uzdužno klizanje

Nezavisna varijabla za testove uzdužnih sila je tzv. uzdužno klizanje gume  $S_x$ , (engl. *slip ratio* ili *Wheel slip*). Prema [5], postoje različite definicije te veličine, ali najčešće korištene uključuju omjer brzine kotača koji se kotrlja bez izmjene sile sa podlogom i trenutne brzine kojom kotač prelazi preko podloge. Prema [5], definicija od organizacije SAE (*Society of Automotive Engineers*) oznake J670 glasi:

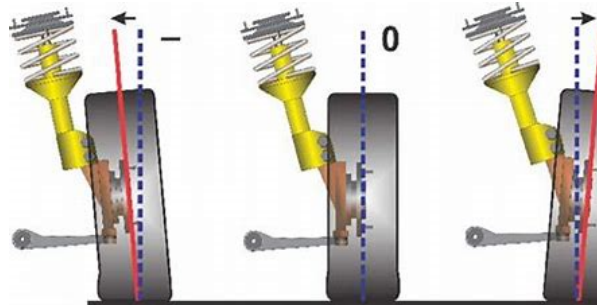
$$S_x = \frac{\Omega_w R_e}{V_{ax} \cos \alpha} - 1 \quad (1.2)$$

gdje je:

- $S_x$  uzdužno klizanje gume,
- $\Omega$  kutna brzina kotača,
- $\alpha$  bočni kut klizanja gume,
- $V_{ax}$  brzina gibanja osovine kotača u odnosu na podlogu,
- $R_e$  efektivni radijus slobodnokotrljajućeg kotača.

### 1.3.3. Slobodni parametri

Slobodni parametri koji se najčešće zadaju prilikom testiranja guma su vertikalna sila koja djeluje između gume i podloge, te tipično za bočne testovi kut nagiba gume prema podlozi  $\gamma$  (engl. *camber angle*) [3], shematski prikazan na slici 1.5. Podešavanje ovog kuta se koristi radi povećanja bočnog kapaciteta gume nauštrb malo smanjenih uzdužnih performansi [6], te se u pravilu naginje prema vozilu, odnosno u negativne kuteve prema slici 1.5. Prema [7], takvo naginjanje efektivno rezultira u blagom pomaku krivulje bočne karakteristike prema gore, odnosno u većim bočnim silama za iste kuteve klizanja.



Slika 1.5: Bočni kut nagiba gume

### 1.3.4. *Magic Formula*

Najpoznatiji matematički model koji opisuje uzdužne i bočne sile u kontaktu gume i podloge opisan je Pacejkinom tzv. *Magic* formulom [3] koja glasi:

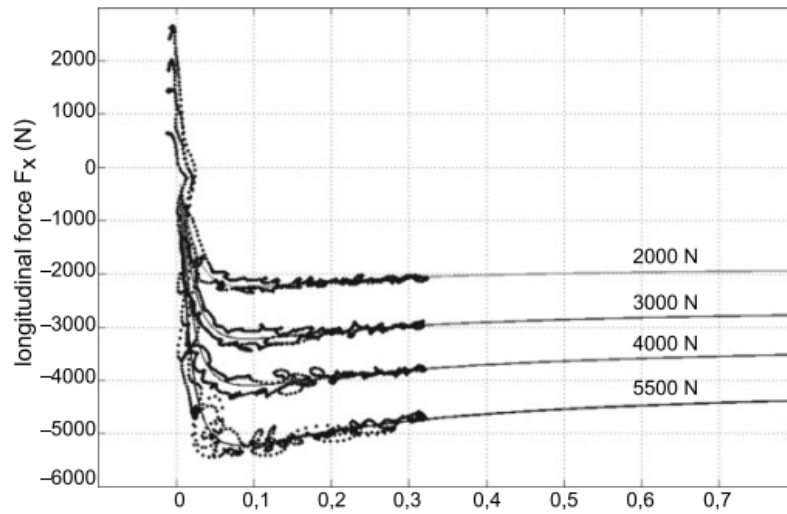
$$y(x) = D \sin\{C \arctan[Bx - E(Bx - \arctan(Bx))]\} \quad (1.3)$$

gdje su uobičajeni nazivi za faktore:

- $B$  - faktor krutosti
- $C$  - faktor oblika
- $D$  - vršna vrijednost funkcije
- $E$  - faktor zakrivljenosti

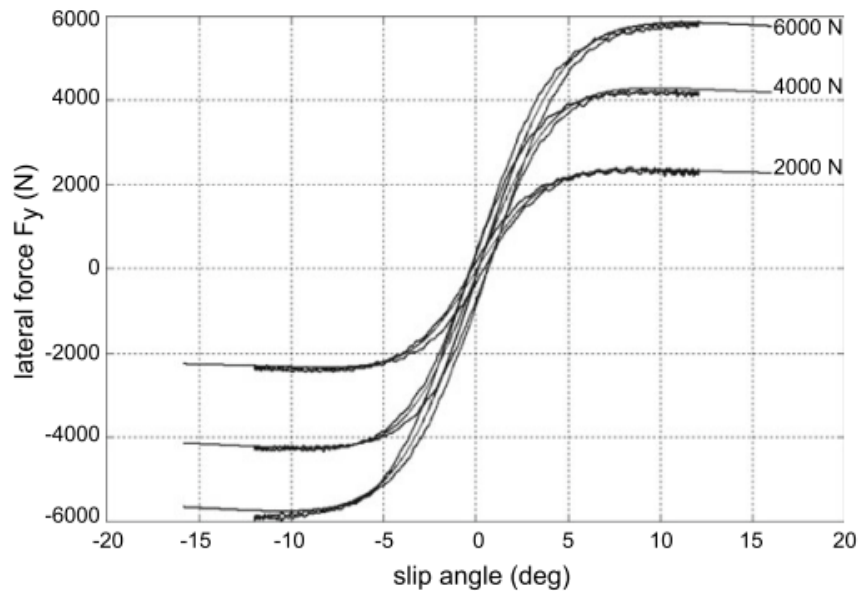
Ovdje  $y$  može biti uzdužna  $F_x$  ili bočna sila gume  $F_y$ , a  $x$  prema tome bočni kut klizanja  $\alpha$  ili uzdužno klizanje  $S_x$ .

Primjer mjerenja uzdužne sile na gumu prikazan je na slici 1.6, na kojima se može vidjeti da se najveće vrijednosti uzdužne sile na raznim vertikalnim silama pojavljuju na vrijednostima klizanja između otprilike 0,08 do 0,10, što naravno ovisi o korištenoj definiciji uzdužnog klizanja. Upravo je držanje brzine vrtnje kotača u tom području najboljih performansi gume zadatak algoritama aktivnog upravljanja uzdužnom dinamikom vozila, kao što su ABS (engl. *Anti Brake-Lock System*) i TCS (engl. *Traction Control System*).



Slika 1.6: Primjer eksperimentalnih rezultata za uzdužnu silu gume iz [3]

Tipičan izgled krivulje dobivene MF formulom prikazan zajedno sa mjerenjima bočne sile za tri različita iznosa vertikalne sile je u [3] prikazan sa 1.7. Grafove mjerene bočne sile iscrtane kao funkcije kuta klizanja nazivamo još i karakteristične krivulje.

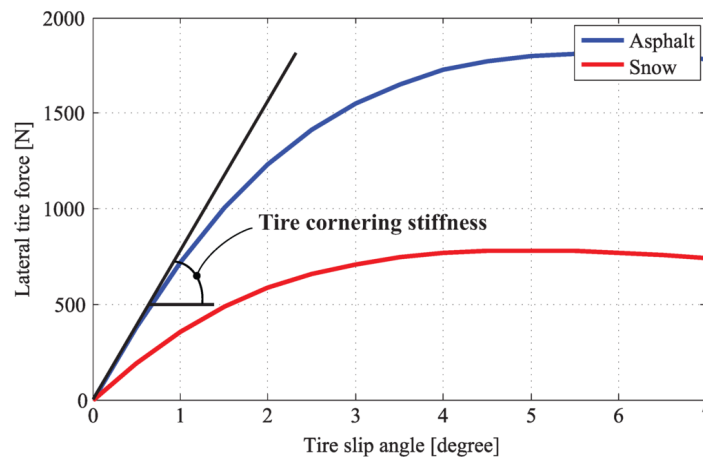


Slika 1.7: Tipična MF krivulja iscrtana preko mjerenja bočne sile iz [3]

Jedno općenito svojstvo automobilske gume koje se može vidjeti i na 1.7 jest tzv. osjetljivost gume na opterećenje (engl. *tire load sensitivity*). Naime, pogleda li se omjer maksimalne bočne sile sa pripadajućom vertikalnom silom, vidi se da je taj omjer veći, što je vertikalna sila na gumu manja. Na slici 1.7, za test sa vertikalnom silom od  $2000N$  je maksimalna postiziva bočna sila preko  $2000N$ , dok je za vertikalnu silu od  $6000N$  ona malo ispod  $6000N$ . Iako ključan za namještanje balansa ovjesa automobila, u jednostavnim modelima vozila se taj efekt često i zanemaruje, te se pretpostavlja da je maksimalna bočna sila proporcionalna vertikalnoj [8] [7] [9]. Karakteristika gume bitna za dinamiku vozila, pogotovo u režimu malih bočnih ubrzanja, jest bočna krutost gume (engl. *slip stiffness* ili *tire cornering stiffness*), prikazana na slici 1.8, definirana kao nagib karakteristične krivulje gume u ishodištu (2.8). Slika 1.7 pokazuje kako sa povećanjem normalne sile u pravilu raste i bočna krutost gume.

$$C'_\alpha(F_z) = - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right|_{F_x=0} \quad (1.4)$$

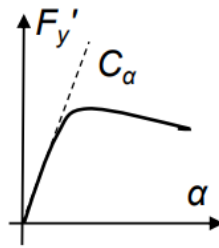
Slika 1.8 kvalitativno pokazuje i kako se u slučaju niskog koeficijenta trenja podloge (snijeg) ne smanjuje samo maksimalna bočna sila prijanjanja nego i bočna krutost gume.



Slika 1.8: Bočna krutost gume na dvije karakteristične krivulje

Često se u jednostavnim modelima vozila namijenjenim upravljanju koristi linerano pojednostavljenje karakteristične krivulje gume, na način da se bočna sila računa jednostavno kao umnožak bočne krutosti i kuta klizanja [5] [8], kvalitativno prikazano

crtkanom linijom na 1.9. Slika 1.7 najbolje prikazuje kako je ta pretpostavka dobra do malih iznosa kuteva bočnog klizanja, te također da njeno područje primjenjivosti ovisi o iznosu normalne sile, makar se radilo i o istoj gumi. Međutim, najčešće tijekom vožnje amplitude promjene vertikalne sile nisu tako izražene kao na slici 1.7, te se zbog toga uzima i da je područje primjenjivosti linearnog modela gume neovisno o  $F_z$ .



Slika 1.9: Shematski prikaz linearizacije gume iz [8]

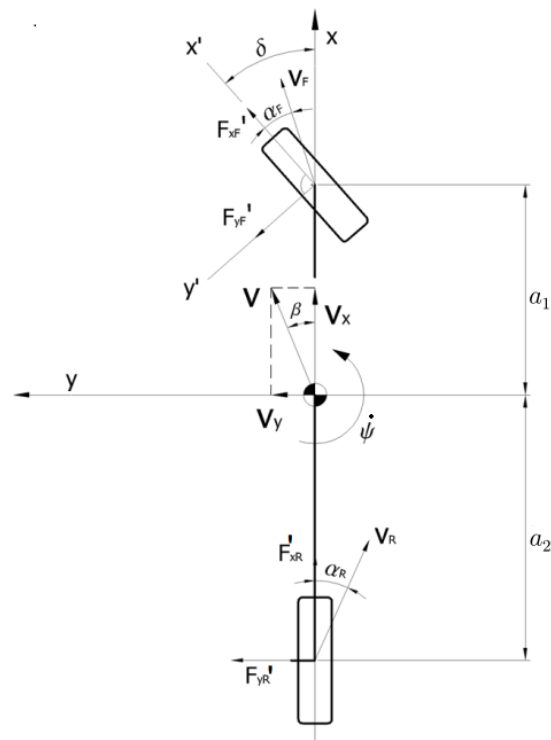
## 2 Modeli vozila

U prethodnom poglavlju dan je pregled vrsta estimatora varijabli stanja vozila, te su uvedeni neki parametri i varijable koje se koriste specifično za modeliranje vozila. U ovom poglavlju detaljnije su predstavljeni pojedini kinematski i dinamički modeli vozila koji se koriste u estimaciji njegovih varijabli stanja, kao i konfiguracije senzora koje se koriste u naprednim sustavima aktivnog upravljanja bočnom dinamikom vozila.

### 2.1. Bicikl model dinamike vozila

Najčešće korišteni i ujedno najjednostavniji model dinamike vozila jest tzv. bicikl model (engl. *bicycle model*), prikazan na slici 2.1. Upravo je zbog svoje jednostavnosti vrlo čest u upotrebi za modele namijenjene upravljanju [8]. Temeljna pretpostavka bicikl modela jest da se par guma na osovini može zamijeniti jednom gumom koja kliže prividnim bočnim kutom klizanja, ovdje zvanim *bočnim kutom klizanja osovine*, na slici 2.1 označenim sa  $\alpha_F$  i  $\alpha_R$ . Nužna pretpostavka koja se time čini jest da je  $v_x \gg |\dot{\psi}t_i|$ , gdje je  $t_i$  trag kotača na pojedinoj osovini, odnosno da možemo zanemariti komponentu uzdužne brzine kotača koja dolazi od rotacije vozila oko vertikalne osi, u odnosu na uzdužnu komponentu brzine težišta vozila [3]. Isto tako, u pravilu se zanemaruje valjanje i poniranje šasijske, te se pretpostavlja da je njeno gibanje planarno.

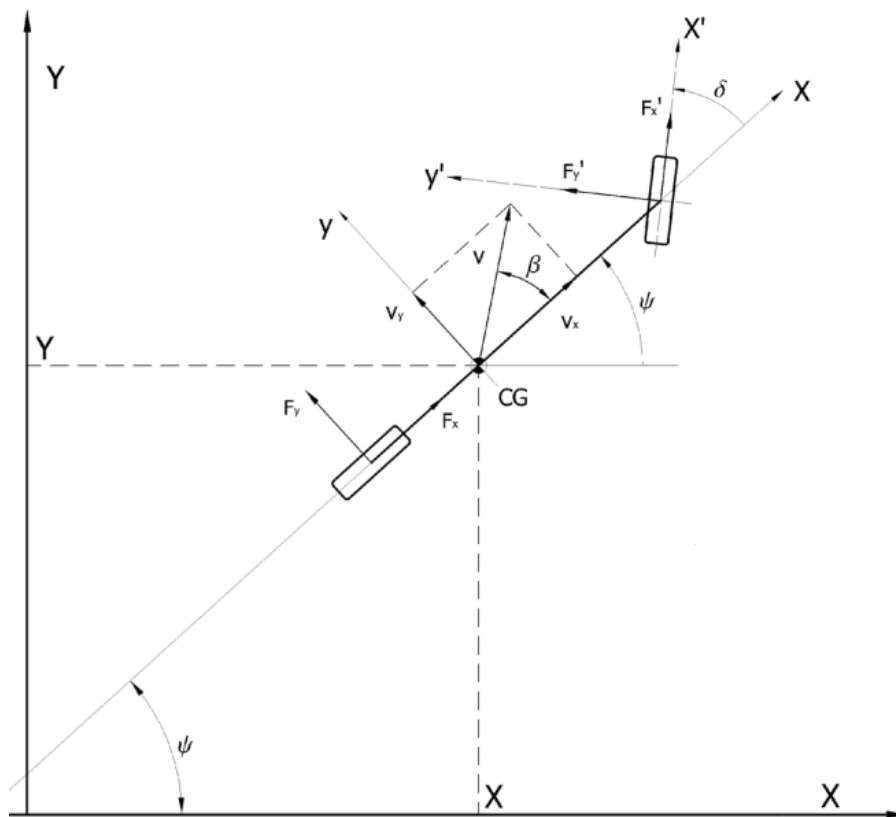




Slika 2.1: Bicikl model iz [8]

Kako bi se postavile jednačbe gibanja takvog modela, najprije treba definirati koordinatne sustave. Tri su karakteristična koordinatna sustava [8], prikazana na slici 2.2:

- Mirujući, vezan za zemlju, odnosno inercijski koordinatni sustav, X-Y
- Koordinatni sustav vozila, x-y
- Koordinatni sustav skretanog kotača x'-y'



Slika 2.2: Koordinatni sustavi u bicikl modelu iz [8]

Inercijski koordinatni sustav X-Y je onaj u kojem vrijedi 2. Newtonov zakon, te se u njemu mogu postaviti jednadžbe gibanja (2.1). Potrebno je naglasiti da momentna jednadžba u ovom jednostavnom obliku vrijedi samo ako se za ishodište koordinatnog sustava odabere težište, uz već uvedenu pretpostavku planarnog gibanja [10].

$$\begin{aligned}
 F_X &= m\ddot{X} \\
 F_Y &= m\ddot{Y} \\
 M_Z &= J_z\ddot{\psi}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gdje su:

- $F_{X,Y}$  sile na vozilo su mjeru osi inercijskog koordinatnog sustava,
- $m$  masa vozila
- $J_z$  moment inercije oko vertikalne osi vozila koja prolazi kroz težište,

- $X, Y$ , koordinate ishodišta koordinatnog sustava vezanog za vozilo (tj. težišta vozila) u mirujućem koordinatnom sustavu, prikazane na 2.2
- $\psi$  kut orijentacije vozila, odnosno orijentacije koordinatnog sustava vezanog za vozilo u inercijskom koordinatnom sustavu

U dinamici vozila se za ovaj kut zakreta vozila oko vertikalne osi  $\psi$  često koristi engleski naziv *yaw*, odnosno *yaw angle*. Najčešće se sile izračunavaju u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo, te se onda prije unošenja u dinamičke jednadžbe moraju transformirati u inercijski koordinatni sustav. Budući da se pretpostavlja planarno gibanje vozila, koordinatni sustav vezan za vozilo je u odnosu na inercijski koordinatni sustav zakrenut za *yaw* kut  $\psi$ , pa transformacijske jednadžbe izgledaju:

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Isto vrijedi i za vektor brzine:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

gdje su  $v_x$  i  $v_y$  komponente brzina težišta vozila u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo, zorno prikazane na slici 2.2. Bitan izraz koji povezuje ove dvije komponente brzine vozila jest bočni kut klizanja vozila  $\beta$  (engl. *vehicle sideslip angle*), koji se definira kao kut između vektora brzine vozila i njegove uzdužne osi, također prikazane na 2.2. Jednadžba koja ga definira stoga je sljedeća:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} \quad (2.4)$$

Za nastavak izvoda modela, deriviranjem i sređivanjem izraza (2.3) dobivamo sljedeće:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x - \dot{\psi} v_y \\ \dot{v}_y + \dot{\psi} v_x \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Kombiniranjem prva dva izraza iz (2.1), te izraza (2.2) i (2.5), uz prepisivanje momente jednadžbe iz (2.1), dobivamo dinamičke jednadžbe planarnog gibanja vozila. Valja primijetiti da u ovom izvodu nisu nigdje korištena pojednostavljena striktno vezana za bicikl model, te će iste jednadžbe vrijediti i za planarno gibanje dvotračnog modela,

detaljnije predstavljenog kasnije. Konačne jednadžbe izgledaju stoga:

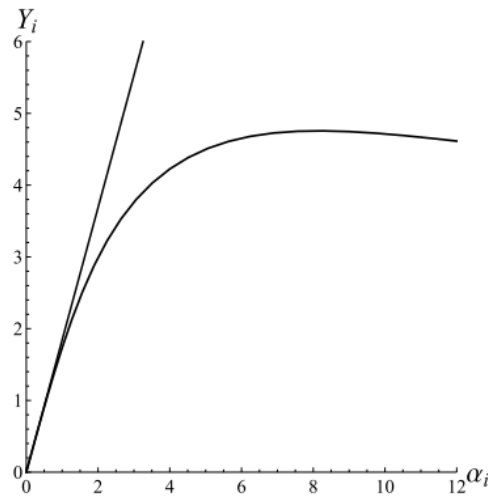
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} &= m \begin{bmatrix} \dot{v}_x - \dot{\psi}v_y \\ \dot{v}_y + \dot{\psi}v_x \end{bmatrix} \\ M_z &= J_z \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdje su gdje su  $F_x$ ,  $F_y$  i  $M_z$  definirani sa sumom sila po osima koordinatnog sustava vezanog za vozilo, odnosno sumom momenata oko težišta:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xF} + F_{xR} \\ F_y &= F_{yF} + F_{yR} \\ M_z &= F_{yF}a_1 - F_{yR}a_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Valja istaknuti da su u planarnom gibanju  $Z$  os inercijskog koordinatnog sustava i  $z$  os koordinatnog sustava vezanog za vozilo istovjetne, tako da su momentne jednadžbe u (2.1) i (2.6) ekvivalentne.

Ovaj jednostavni model vozila često se koristi za modeliranje lateralne dinamike, te se onda utjecaj uzdužnih sila uopće ne promatra [5] [4], pogotovo jer pretpostavkom sažimanja guma po osovinama nestaju krakovi na kojima bi uzdužne sile radile moment oko vertikalne osi. Ista pretpostavka o zanemarivanju uzdužnih sila može biti i izrečena na način da se se promatra vozilo sa skoro konstantnom uzdužnom brzinom [3] [5], te da su zbog toga uzdužne sile zanemarive. Nadalje, kako bismo izračunali bočne sile koje stvara pojedina osovina, potrebno je primijeniti neki model gume. U [3] je detaljno prikazan izvod kako je moguće razraditi bicikl model bez da se uzima pretpostavka da oba kotača na osovini imaju jednako bočno klizanje, koristeći model u kojem su bočne sile po osovini linearne funkcije bočnog ubrzanja. Iz toga se pokazuje da se sila na vozilo koju generira pojedina osovina može modelirati koristeći tzv. *karakteristiku osovine* (engl. *axle characteristic*), prikazanu na 2.3, koja će ovisiti o bočnom kutu klizanja osovine, analogno tome kako bočna sila jedne gume ovisi o kutu klizanja te gume. Međutim, u modelima namijenjenim upravljanju može se koristiti upravo pretpostavka jednakih kuteva klizanja na oba kotača, te lineariziran model gume (slika 1.9), tako da će i rezultirajuća karakteristika biti pravac sa nagibom dvostruko strmijim nego za pojedinu gumu, kao na 2.3.



Slika 2.3: Kvalitativan prikaz karakteristike osovine i njene linearizacije iz [3]

Time dobivamo kompletno linearan bicikl model, a ovisnost bočne sile o klizanju osovine jest:

$$F_{y,i} = C_{\alpha} \alpha_i \quad (2.8)$$

gdje je  $i = 1$  stoji za prednju osovinu, a  $i = 2$  za stražnju osovinu.

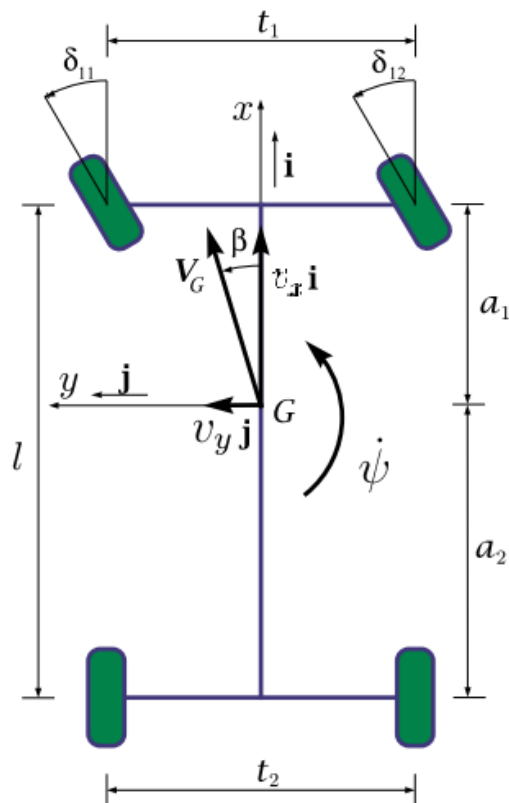
Još jedna prednost bicikl modela jest da jednadžbom 2.9 relativno lagano dobiju geometrijski odnosi između klizanja osovine i komponenti translacijske brzine te kutne brzine skretanja vozila, koje u ovom modelu predstavljaju 3 varijable stanja,  $v_x$ ,  $v_y$  i  $\dot{\psi}$ . Ovdje je implicitno uzeta pretpostavka da se stražnji kotači ne zakreću, ali lako se jednadžbe prošire i za taj slučaj. U 2.9 veličine  $a_{1,2}$  predstavljaju udaljenosti osovina od težišta vozila, a  $\delta$  kut zakreta kotača, kao što je prikazano na slici 2.1.

$$\begin{aligned} \alpha_F &= \tan^{-1} \frac{v_y + a_1 \dot{\psi}}{v_x} - \delta \\ \alpha_R &= \tan^{-1} \frac{v_y - a_2 \dot{\psi}}{v_x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Iz izračunatih sila se primjenom jednadžbi (2.6) mogu dobiti derivacije 3 izabrane varijable stanja, koje se onda mogu integrirati, time određujući kinematiku vozila u idućem trenutku, iz koje se onda preko geometrijskih relacija (2.9) izračunavaju bočni kutevi klizanja osovina, pa iz njih sile, i tako rekurzivno u krug dalje.

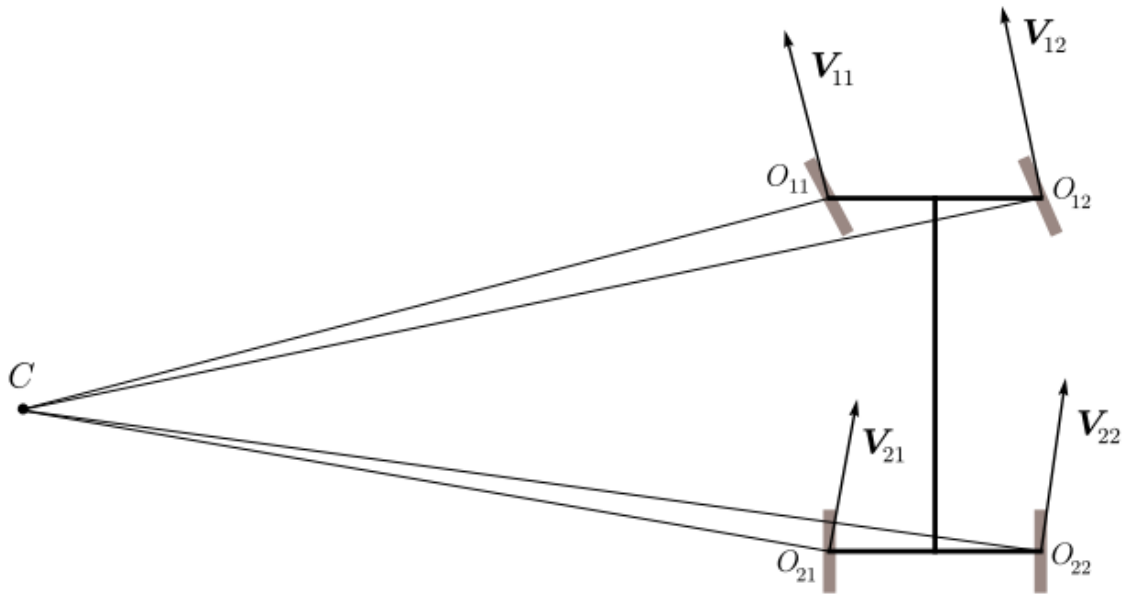
## 2.2. Planarni dvotračni model

Korak dalje prema generalizaciji kod modeliranja vozila jest razdvajanje kotača iz bicikl modela nazad na dva po osovini, time dobivajući dvotračni model (engl. *double track model*). Budući da se još uvijek pretpostavlja planarno gibanje šasijske, jednadžbe gibanja (2.6) vrijede i za ovaj model, no kinematske jednadžbe za izračunavanja bočnog klizanja guma će sada biti malo složenije. Koordinatni sustav vezan za vozilo se u suštini ne mora mijenjati u odnosu na onaj u bicikl modelu sa slike 2.4, te je korisno i definirati jedinične vektore u njemu:  $\mathbf{i}$  u smjeru  $x$ -osi,  $\mathbf{j}$  u smjeru  $y$ -osi, te  $\mathbf{k}$  u smjeru  $z$ -osi, kao na slici 2.4. Zbog planarne pretpostavke model i dalje ima 3 stupnja slobode gibanja, pa su i dalje potrebne samo tri varijable stanja da bismo opisali gibanje šasijske. To i dalje mogu biti  $v_x$ ,  $v_y$  i  $\dot{\psi}$ , također prikazani na 2.4. Pretpostavka planarnog gibanja također i omogućuje da brzinu svake točke na vozilu prikažemo kao posljedicu rotacije oko trenutnog pola brzina, kao što se može vidjeti i na slici 2.5.



Slika 2.4: Koordinatni sustav i varijable stanja u dvotračnom modelu

Kako bismo izračunali kuteve klizanja pojedinih guma, potrebno je dobiti iznos i smjer brzine kotača prema podlozi (2.10), prikazane na slikama 2.5 i 2.8, gdje se može i vidjeti da su za širine tragova kotača odabrane oznake  $t_{1,2}$ .

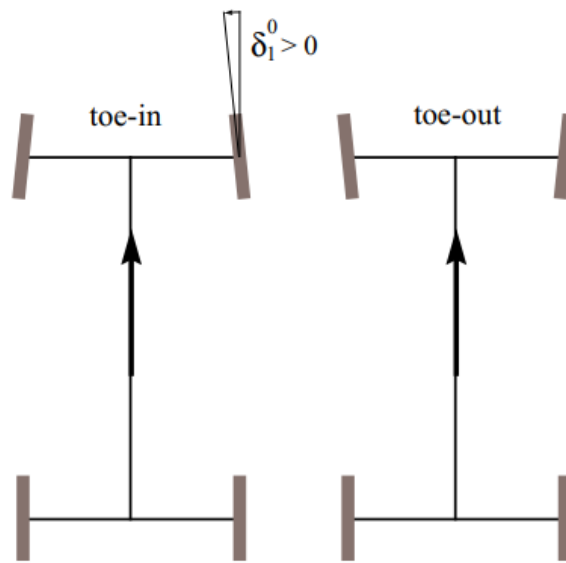


Slika 2.5: Vektori brzine kotača prema podlozi

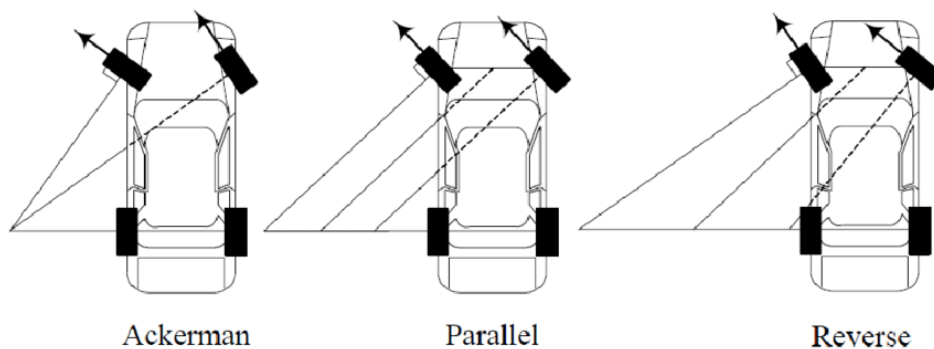
$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{11} &= \left( v_x - \frac{\dot{\psi} t_1}{2} \right) \mathbf{i} + (v_y + \dot{\psi} a_1) \mathbf{j} \\
 \mathbf{V}_{12} &= \left( v_x + \frac{\dot{\psi} t_1}{2} \right) \mathbf{i} + (v_y + \dot{\psi} a_1) \mathbf{j} \\
 \mathbf{V}_{21} &= \left( v_x - \frac{\dot{\psi} t_2}{2} \right) \mathbf{i} + (v_y - \dot{\psi} a_2) \mathbf{j} \\
 \mathbf{V}_{22} &= \left( v_x + \frac{\dot{\psi} t_2}{2} \right) \mathbf{i} + (v_y - \dot{\psi} a_2) \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Osim toga, za razliku od bicikl modela, u dvotračnom se modelu moguće je kut zakreta pojedinog kotača opisati detaljnije. Najprije se može definirati *statički kut usmjerenosti kotača*, engl. *toe*, gdje je razlikujemo *toe-in* i *toe-out* statičku konfiguraciju, prikazanu na slici 2.6. Tu se ne radi o velikim kutevima nego desetinama stupnja, ali kada se uzme u obzir strmi nagib bočne karakteristike gume na prvom dijelu krivulje, jasno

je zašto mogu biti bitni kod preciznog modeliranja. Prema iskustvenom savjetu iz [5], desetina stupnja kuta statičke usmjerenosti kotača znači koliko i jedan stupanj bočnog nagiba gume sa slike 1.5. Nadalje, ono što detaljniji dvotračni modeli također mogu uzeti u obzir, a bicikl model ne može [3], jest dinamički *toe*, odnosno odstupanje od paralelnog zakreta kotača koje se mijenja kako se mijenja zakret upravljača, zvano još i *Ackermannovom geometrijom upravljanja*, prikazanom na slici 2.7.



Slika 2.6: Statički kut usmjerenosti kotača

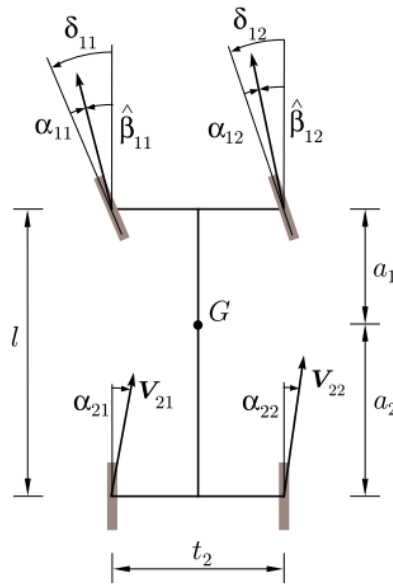


Slika 2.7: Ackermannova geometrija upravljanja

Time su kompletirane sve komponente koje utječu na kut zakreta pojedinog kotača



$\delta_{i,j}$ . Također, uz pretpostavku krutog sustava upravljanja, sve su spomenute komponente, pa onda i ukupni zakret kotača, funkcija samo zakreta upravljača, tako da se i u detaljnijim modelima iz toga podatka može dobiti zakret svakog pojedinog kotača. Međutim, budući da tako precizno modeliranje kuta zakreta kotača ima smisla jedino kod naprednih i numerički zahtjevnijih modela gume, u modelima namijenjenim upravljanju najčešće se zanemaruju sve komponente osim paralelnog zakreta kotača [11].



Slika 2.8: Izračun kuteva klizanja pojedinih guma po dvotračnom modelu

Kao međuvarijablu u izračunu kuteva klizanja pojedinih guma, može se uzeti kut  $\hat{\beta}_{i,j}$  koji vektor brzine kotača  $\mathbf{V}_{i,j}$  zatvara sa uzdužnom osi vozila, kao na slici 2.8, koji dobivamo primijenjujući  $\tan^{-1}$  na omjer komponenti vektora  $\mathbf{V}_{i,j}$  iz (2.10), prema:

$$\begin{aligned}
 \tan \hat{\beta}_{11} &= \frac{v_y + \dot{\psi} a_1}{v_x - \dot{\psi} t_1/2} \\
 \tan \hat{\beta}_{12} &= \frac{v_y + \dot{\psi} a_1}{v_x + \dot{\psi} t_1/2} \\
 \tan \hat{\beta}_{21} &= \frac{v_y - \dot{\psi} a_2}{v_x - \dot{\psi} t_2/2} \\
 \tan \hat{\beta}_{22} &= \frac{v_y - \dot{\psi} a_2}{v_x + \dot{\psi} t_2/2}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

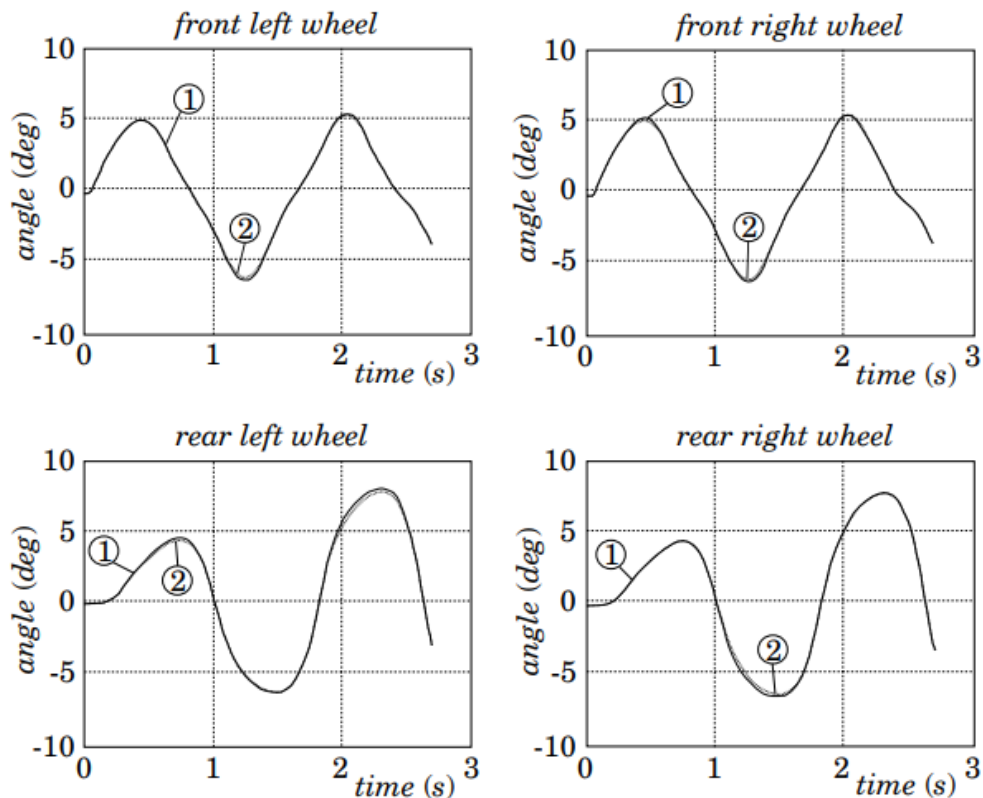
Nakon toga, kut klizanja prednjih kotača se lagano dobiva sa slike 2.8 kao:

$$\alpha_{1j} = \hat{\beta}_{1j} - \delta_{1j} \quad (2.12)$$

dok je kut klizanja stražnjih kotača uz pretpostavku izostanka mehanizma njihovog zakretanja samo:

$$\alpha_{2j} = \hat{\beta}_{2j} \quad (2.13)$$

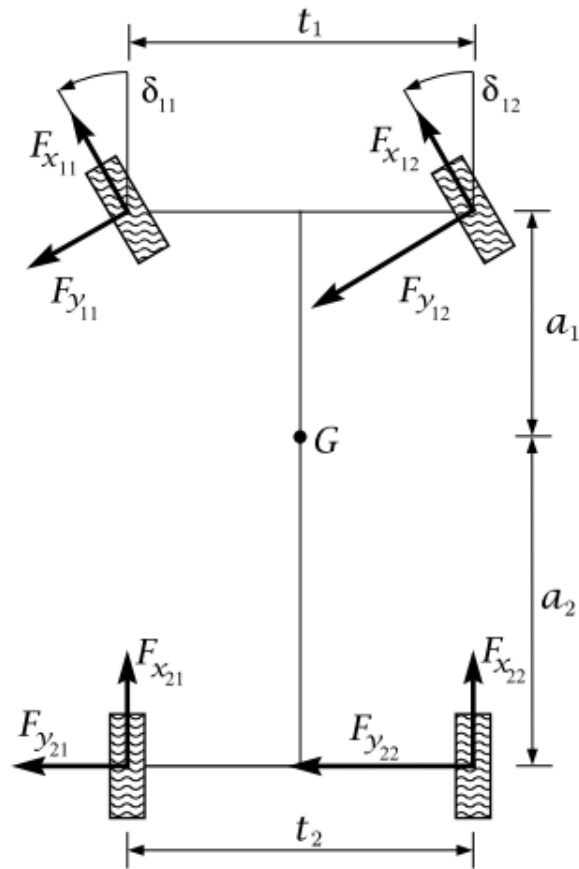
Zanimljivo je primijetiti da se način računa kuta klizanja gume prikazanog jednadžbama (2.10), (2.11), (2.12) i (2.13) ne razlikuje puno u nekim situacijama od izračuna korištenjem bicikl modela (2.9), kao što je pokazano na slici 2.9 iz [7]. Graf označen sa ① označava korištenje izračuna pomoću dvotračnog modela, dok onaj sa ② označava korištenje bicikl modela, izračunano tijekom slalom vožnje na brzini od cca 70 km/h, a razlike među grafovima se praktički ne vide.



Slika 2.9: Usporedba dva načina računanja bočnog kuta klizanja guma iz [7]

Nakon izračuna bočnog klizanja, izračun uzdužnog klizanja  $S_x$  se može izvršiti koristeći dinamički model kotača, odnosno sumu momenata oko osi kotača [8] [11], prema kojem je brzina vrtnje svakog kotača jedna nova varijabla stanja, za koju su isto potrebne uzdužne sile dobiveme iz uzdužnog klizanja iz prethodnog vremenskog koraka. Osim uzdužnog i bočnog klizanja, složeniji modeli gume uzimaju kao parametar i kut nagiba gume prema podlozi  $\gamma$ , koji je u modelima namijenjenim upravljanju često zanemaren [11] [8], no negdje se i za njega smišljaju jednostavne korekcije [7]. Utjecajniji parametar od nagiba gume jest iznos vertikalne sile  $F_z$  koja djeluje na pojedine kotače. Upravo je manipulacija vertikalnim silama, odnosno utjecajem prijenosa težine na njih ultimativni zadatak ovjesa svakog automobila, bilo radi performansi, bilo radi komfora. U nekim jednostavnim upravljačkim modelima se za izračun sile na gumi uzima samo statički iznos vertikalne sile kao konstantan čak i za dvotračne modele [11] [12], dok se kod detaljnijih modela i prijenos težine uzima u obzir, npr. jednostavnim kvazistacionarnim formulama koje ovise samo o iznosu bočnog, odnosno uzdužnog ubrzanja vozila [7]. Sumarno, modeli gume izračunavaju uzdužne i bočne sile uzimajući u obzir najčešće ne više od 4 varijable kod složenijih modela  $F_{x,y} = f(\alpha, S_x, F_z, \gamma)$  čak i kod modela namijenjenim simulacijama visoke vjernosti [13], [3]. Međutim, modeli namijenjeni upravljanju to češće svode na dvije  $F_{x,y} = f(\alpha, S_x)$  ili tri varijable  $F_{x,y} = f(\alpha, S_x, F_z)$ , nekad čak i dodatno pojednostavljajući raspoređujući izračun uzdužnih od bočnih sila [7] [11].

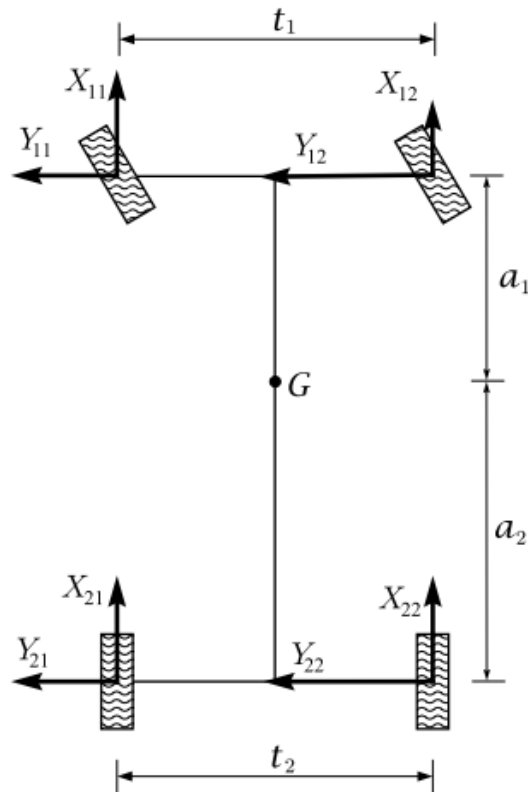
Jednom nakon što su uzdužne i bočne sile izračunate u koordinatnom sustavu vezanom za kotač kao na slici 2.10, potrebno ih je pomoću jednadžbi geometrijskih odnosa (2.14) preračunati u koordinatni sustav vozila.



Slika 2.10: Sile na vozilo u koordinatnom sustavu vezanom za kotač

$$\begin{aligned} X_{ij} &= F_{x_{ij}} \cos(\delta_{ij}) - F_{y_{ij}} \sin(\delta_{ij}) \\ Y_{ij} &= F_{x_{ij}} \sin(\delta_{ij}) + F_{y_{ij}} \cos(\delta_{ij}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ovdje su te sile pojedine gume na vozilo u koordinatnom sustavu vozila prikazane sa  $X_{ij}$  i  $Y_{ij}$ , te se iz njih mogu dobiti rezultantne sile po osima  $x$  i  $y$  te moment oko osi  $z$  raspisane u (2.15), koji predstavljaju ulaze u jednadžbe gibanja (2.6).



Slika 2.11: Sile na vozilo u koordinatnom sustavu vezanom na vozilo

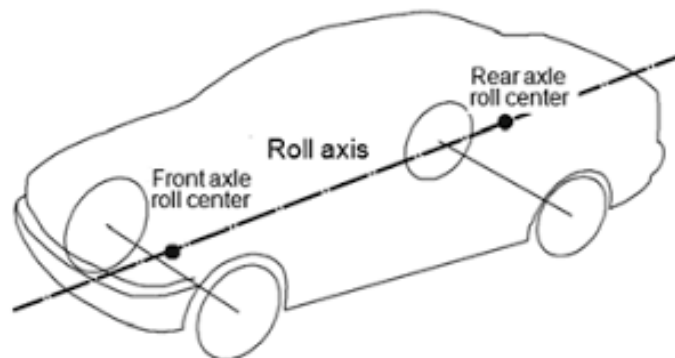
$$\begin{aligned}
 F_x &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_{ij} \\
 F_y &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Y_{ij} \\
 M_z &= \sum_{j=1}^2 Y_{1j} a_1 - \sum_{j=1}^2 Y_{2j} a_2 + \sum_{i=1}^2 X_{i2} \frac{t_i}{2} - \sum_{i=1}^2 X_{i1} \frac{t_i}{2}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

### 2.3. Trodimenzionalan kinematski model

Sljedeći korak u modeliranju vozila jest otpuštanje pretpostavke o planarnom gibanju vozila, odnosno prelazak u trodimenzionalan problem uključivanjem valjanja i eventualno poniranja šasije.

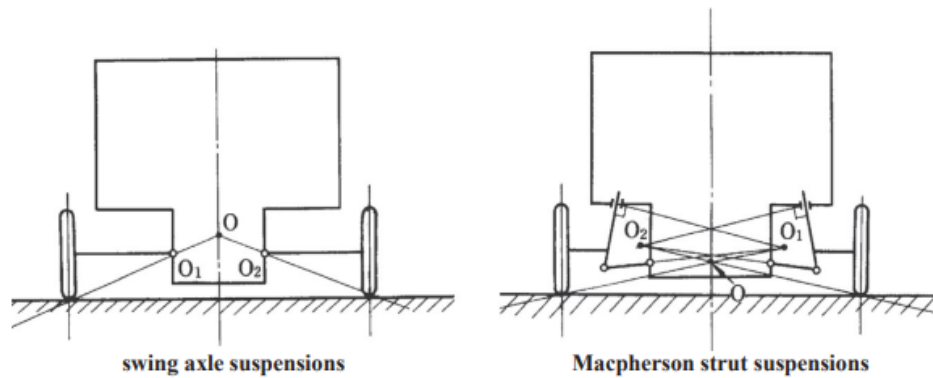
### 2.3.1. Os valjanja vozila

Kod promatranja valjanja šasijske treba najprije uvesti koncept osi valjanja vozila (engl. *roll axis*), vrlo raširen u literaturi o dinamici vozila, iako ne i bez kritika [3] [9]. Dvije su glavne definicije: prva kaže da je os valjanja jednostavno os oko koje se šasija valja [14] [15]. Druga definicija kaže da ona predstavlja os po kojoj djelovanje vanjske sile na šasiju ne uzrokuje njeno valjanje [5] [3]. Kod obje definicije geometrijski se ova os dobiva istim postupkom, spajanjem dviju točki u prostoru koje su definirane geometrijama prednjeg i stražnjeg ovjesa, zvane centri valjanja (engl. *roll center*) [14] [15].

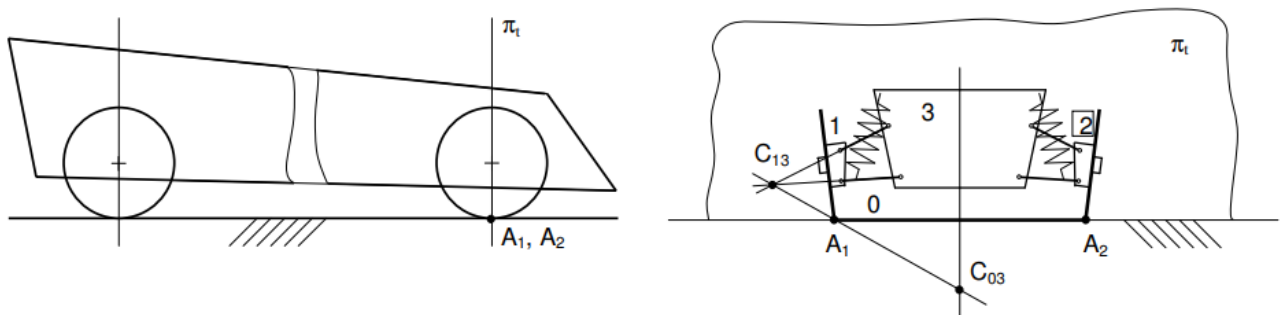


Slika 2.12: Os valjanja vozila

Kod određivanja centra valjanja razmatra se skica ovjesa u prednjem pogledu, te se iz geometrije ovjesa određuje trenutni pol brzina između ovješene mase (šasijske) i neovješene mase (sklopa kotača), na slici 2.13 prikazanih sa  $O_1$  i  $O_2$ . Spanjem tih točaka sa točkama dodira pripadajućeg kotača i podloge, dobiju se dva pravca, te se u njihovom sjecištu nalazi centar valjanja pripadajuće osovine. Budući da se procedura odnosi na statički položaj šasijske, dva spomenuta pravca su simetrična, te se može iskoristiti samo jedan od njih, a centar se valjanja onda nalazi na njegovu sjecištu sa osi simetrije ovjesa u prednjem pogledu, kao na slici 2.14.



Slika 2.13: Centri valjanja ilustrirani u [14]



Slika 2.14: Centar valjanja ilustriran u [9]

U literaturi [5] [14] [6] se često ne navodi zbog čega bi se vozilo valjalo oko te osi, i uz koje pretpostavke. Također, kao što je razrađeno u [9], u pravilu se ne definira niti referentni koordinatni sustav s obzirom na koje se tijelo valja. U slučaju da se uzme sustav vezan za podlogu, relativno gibanje šasije nije samo rotacija oko jedne osi, nego je općenito zavojno gibanje [16] [9], tako da taj pristup nije egzaktna, kao što nema smisla niti vezati koordinatni sustav u kojem promatramo valjanje uz šasiju, jer se šasija ne giba relativno na samu sebe.

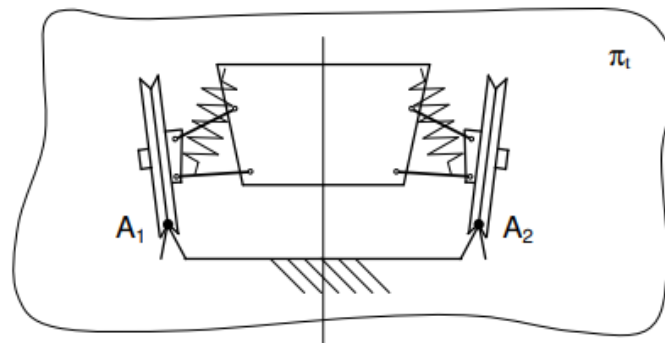
Kako je navedeno u [9], moguće je iz postupka dobivanja centra valjanja, odnosno osi valjanja, izvući zaključke o pretpostavkama u pozadini:

- kotači se smatraju krutim tijelima (također navedeno u [15])

- poniranje automobila je zanemareno, tako da poprečna ravnina  $\pi_t$  sa skice 2.14 ostaje vertikalna
- kinematika gibanja ovjesa u odnosu na šasiju se smatra planarnom, gdje je ravnina gibanja ravnina  $\pi_t$  (također navedeno u [3])
- trag kotača na pojedinoj osovini, dužina  $A_1A_2$  na skici 2.14 smatra se konstatnom (također navedeno u [3])
- zakrenutost kotača od uzdužne osi se zanemaruje, tako da točka dodira između kotača i podloge također leži na ravnini  $\pi_t$ , prikazano na slici 2.14
- kotači ne kližu bočno, pa je točka dodira između kotača i podloge ujedno i pol brzina između ta dva tijela, prikazano na slici 2.15

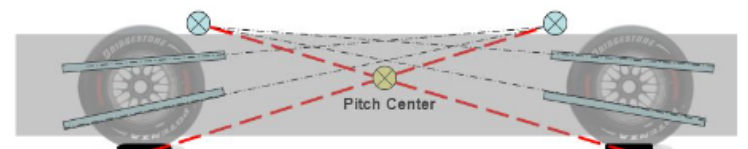
Uzevši u obzir te pretpostavke, ovjes pojedine osovine svodi se na planarni kinematski problem, kod kojeg postoje ukupno četiri kruta tijela u međusobnom gibanju: podloga, dva kotača i šasija - označene indeksima redom od 0 do 3 na slici 2.14. Zbog toga se može primijeniti Aronhold-Kennedyjev teorem, koji kaže da za tri tijela koja se međusobno planarno gibaju, tri relativna pola brzina između njih leže na istom pravcu [17]. Odnosno, budući da su polovi brzine između kotača i šasije  $C_{13}$ , te između kotača i podloge  $A_1$  i  $A_2$  sa slike 2.14 već definirani, zadana su dva pravca na kojem se mora nalaziti pol između šasije i podloge, te je rješenje na njihovom sjecištu, prikazano na slici 2.13. Zanimljivo je primijetiti da gore navedene pretpostavke navode na ideju da se kinematika valjanja vozila na cesti može približno opisati kinematikom pružnog vozila sa istim ovjesom, kao što je ilustrirano na slici 2.15.





Slika 2.15: Průžno vozilo kao približan kinematski ekvivalent za valjanje ilustriran u [9]

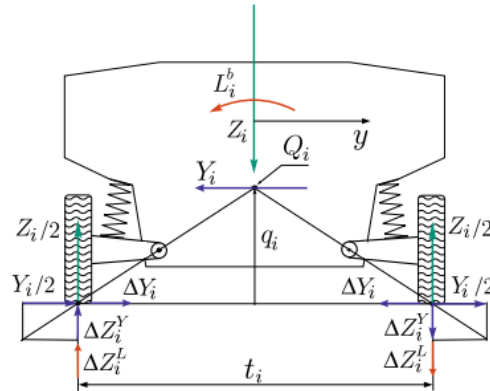
Također, uz analogne pretpostavke o planarnom gibanju, fiksnom međuosovinskom tragu te relativnom mirovanju automobila u odnosu na podlogu u uzdužnom smjeru, mogao bi se dobiti i centar poniranja (engl. *pitch centre*) u bočnom pogledu. Može se ustvrditi da je zbog praktično neprimijenjive pretpostavke o relativnom mirovanju podloge i šasije u uzdužnom smjeru besmisleno govoriti o kinematskom centru poniranja šasije izvedenom na ovaj način.



Slika 2.16: Ilustracija centra poniranja

Međutim, i centar valjanja i centar poniranja mogu biti točke sprezanja sila između ovješene i neovješene mase i bez pretpostavke o relativnom mirovanju između kotača i podloge [5], zbog čega se negdje i os valjanja preimenuje u "os ne-valjanja" (izravan prijevod sa engl. *no-roll axis*) [3] [9]. Upravo se o tome radi u na početku potpoglavlja spomenutoj drugoj definiciji osi valjanja. Pod terminom točka sprezanja sila se podrazumijeva da se vanjska sila može pomoću teorema o paralelnom pomaku sila reducirati na tu točku centra valjanja, te iz nje rastaviti na sile koje se na podlogu ne prenose kroz opruge [3], kako je ilustrirano na slici 2.17. Time će jedino moment nastao prethod-

nom redukcijom sile prenositi se na kotače kroz opruge i uzrokovati valjanje bolida. Za modele vozila namijenjene upravljanju kod kojih se želi modelirati valjanje i prema hodu ovjesa korigirati očitavanja sa akcelerometra, ovo može predstavljati značajnu informaciju.



Slika 2.17: Rastav sila koje djeluju na vozilo u centru valjanja osovine iz [3]

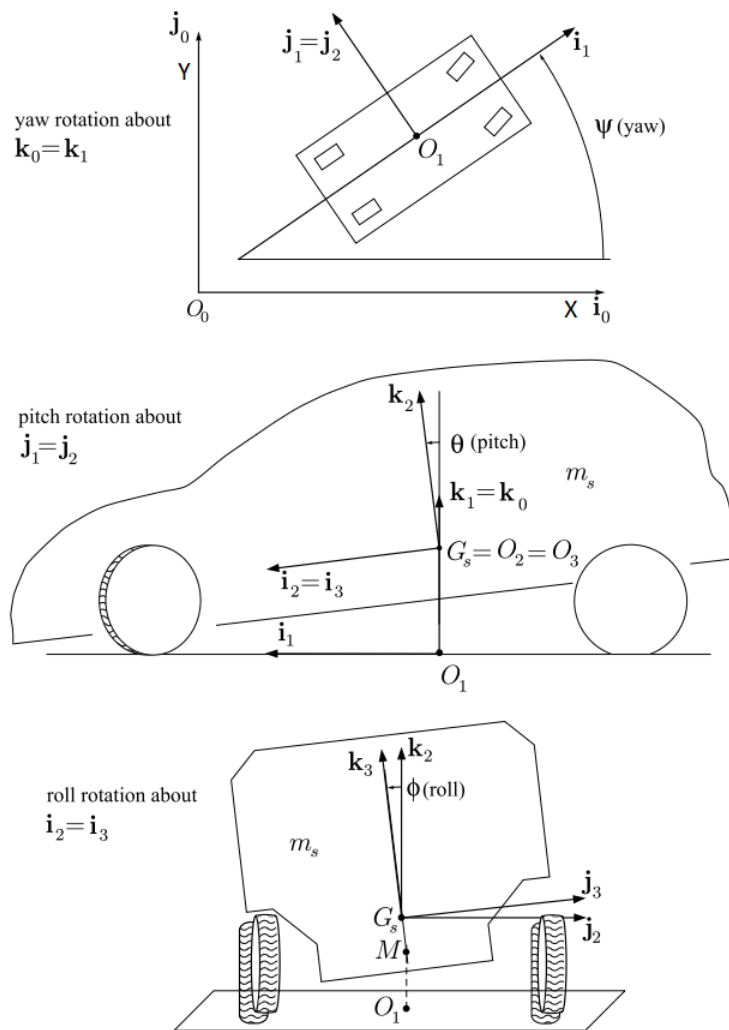
### 2.3.2. Definicija koordinatnog sustava

Budući da se u ovome modelu napušta pretpostavka planarnog gibanja vozila, potrebno je ponovno definirati odnos između inercijskog koordinatnog sustava i onog vezanog za vozilo. Zbog činjenice da rotacije za konačne iznose kuteva nisu komutativne [10] [3], mora se odrediti redoslijed rotacija kojime će se od inercijskog sustava doći do onoga koji je vezanog za vozilo, te time opisivati njegovu poziciju u prostoru. Izabrani redoslijed je ovdje isti kao i u [3]: zakret oko vertikalne osi za kut  $\psi \rightarrow$  zakret oko poprečne osi za kut  $\Theta \rightarrow$  zakret oko uzdužne osi za kut  $\Phi$ , ili na engleskom *yaw*  $\rightarrow$  *pitch*  $\rightarrow$  *roll*, kao što je prikazan na 2.18. Za dinamiku vozila je karakteristično da su kutevi  $\Phi$  i  $\Theta$  u pravilu mali, pa se može koristiti pojednostavljenje:

$$\begin{aligned} \cos\Theta &\approx 1 \\ \sin\Theta &\approx \Theta \\ \cos\Phi &\approx 1 \\ \sin\Phi &\approx \Phi \end{aligned} \tag{2.16}$$

Također se uvode i jedinični vektori svakog od koordinatnih sustava u međukoracima, jer je transformacija svakog novog sustava u odnosu na prethodni definirana kao rotacija oko

jedne osi prethodnog koordinatnog sustava. Tako su za potrebe ovog modela jedinični vektori inercijskog sustava  $\mathbf{i}_0$ ,  $\mathbf{j}_0$  i  $\mathbf{k}_0$ , nakon rotacije za *yaw* kut  $\mathbf{i}_1$  i  $\mathbf{j}_1$  i  $\mathbf{k}_1$ , a nakon izlaska iz planarnog gibanja zakretom za *pitch* kut  $\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{j}_2$  i  $\mathbf{k}_2$  te konačno u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo  $\mathbf{i}_3$  i  $\mathbf{j}_3$  i  $\mathbf{k}_3$ , kao što je prikazano na slici 2.18. Precizno definiranje koordinatnih sustava bitno je za matematički dosljedan skraćeni izvod modela, detaljno prikazan u [3].



Slika 2.18: Redosljed rotacija koordinatnog sustava vezanog za vozilo u odnosu na inercijski iz [3]

### 2.3.3. Vektor kutne brzine i kutne akceleracije

Kod planarnog gibanja je vektor kutne brzine imao cijelo vrijeme istu orijentaciju okomito na ravninu podloge, a sada on prelazi u puni vektor  $\Omega$ , koji sa novopostavljenim koordinatnim osima glasi [3]:

$$\Omega = \dot{\phi}\mathbf{i}_2(\psi, \theta) + \dot{\theta}\mathbf{j}_1(\psi) + \dot{\psi}\mathbf{k}_0 \quad (2.17)$$

Budući da su žiroskopi kruto vezani na šasiju, potrebno je vektor kutnih brzina izraziti preko komponenti u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo:

$$\Omega = p\mathbf{i}_3 + q\mathbf{j}_3 + r\mathbf{k}_3 \quad (2.18)$$

Nakon primjena matrica rotacije, poštujući redosljed definiran ranije, dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ r &= \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.19)$$

Uzimajući u obzir pojednostvaljenja zbog malih kuteva valjanja i poniranja definiranih u (2.16), dobiva se:

$$\begin{aligned} p &\simeq \dot{\phi} - \dot{\psi}\theta \\ q &\simeq \dot{\theta} + \dot{\psi}\phi \\ r &\simeq \dot{\psi} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Derivacija jediničnih vektora jednaka je vektorskom množenju sa lijeva kutnom brzinom, jer nemaju priraste po duljini [10]. Stoga se može definirati i vektor kutne akceleracije pomoću (2.21):

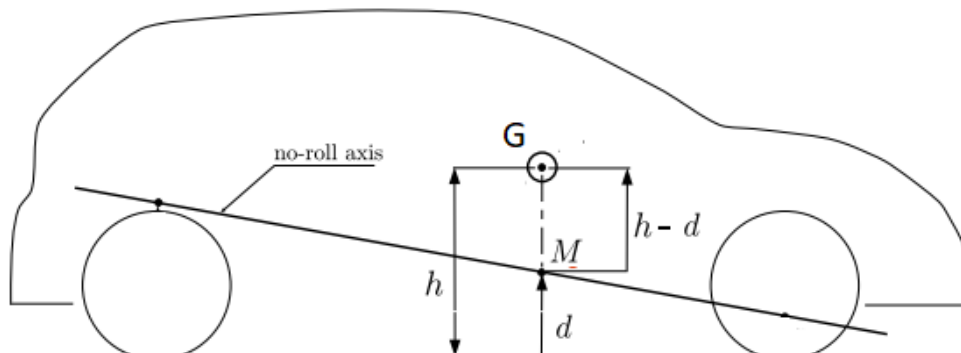
$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \dot{p}\mathbf{i}_3 + \dot{q}\mathbf{j}_3 + \dot{r}\mathbf{k}_3 + \Omega \times \Omega \\ &= \dot{p}\mathbf{i}_3 + \dot{q}\mathbf{j}_3 + \dot{r}\mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdje je u drugom redu primjenjen identitet da je svaki vektor vektorski pomnožen sam sa sobom jednak nuli. Da bi se dobili konačni izrazi za komponente, preostaje još derivirati (2.20):

$$\begin{aligned} \dot{p} &\simeq \ddot{\phi} - \ddot{\psi}\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \\ \dot{q} &\simeq \ddot{\theta} + \ddot{\psi}\phi + \dot{\psi}\dot{\phi} \\ \dot{r} &\simeq \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.3.4. Akceleracija točke na tijelu

Chalesov teorem govori kako je moguće općenito gibanje krutog tijela prikazati kao translaciju točke i sferno gibanje oko te točke [10]. Ako želimo zadržati pretpostavku o trodimenzionalnom gibanju šasijske, te iskoristiti upravo dobiveni vektor kutne brzine, potrebna nam je točka koja će opisivati planarno gibanje vozila, te na čije gibanje valjanje i poniranje šasijske neće utjecati [3]. Premda ne egzaktnim matematičkim, nego više grafičkim načinom, u [3] se pokazuje da bi upravo točka koja se nalazi na osi valjanja u statičkoj konfiguraciji ovjesa mogla poslužiti toj svrsi. Točnije, definirana je kao točka na šasijski koja koincidira sa probodištem osi valjanja i vertikalne poprečne ravnine koja sadrži težište ovješene mase - odnosno točka na osi valjanja točno ispod težišta (slike 2.19 i 2.20). U [3] se ova točka naziva VIP točka (engl. *Vehicle Invariant Point*) i označena je sa  $M$ , te sa visinom od podloge  $d$ , pa je ista nomenklatura upotrebljavana i ovdje.

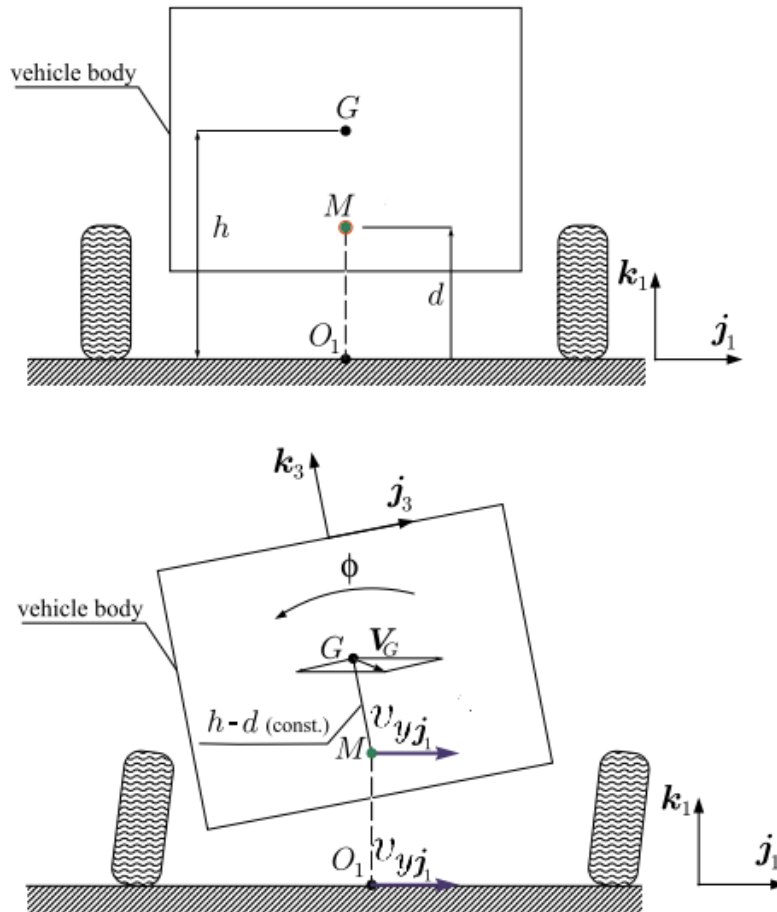


Slika 2.19: Definicija pozicije VIP točke u bočnom pogledu

Na slici 2.20 ilustriran je značaj te točke - dok kutna brzina valjanja utječe na trenutnu brzinu, pa onda i akceleraciju težišta, za VIP točku se pretpostavlja da će njena bočna komponenta brzine davati točniju informaciju o bočnoj komponenti brzine "planarnog vozila", bez utjecaja valjanja i poniranja. Budući da brzina ovako pretpostavljene VIP točke daje bolju informaciju o bočnim i uzdužnim brzinama kotača, estimacija njenog bočnog kuta klizanja bi u praksi mogla biti korisnija od bočnog kuta klizanja težišta vozila. Stoga sada VIP točka nasljeđuje sve kinematske jednadžbe koje su u planarnom

gibanju dodijeljene težištu, pa je tako njena brzina (analogno kao na slici 2.4):

$$\mathbf{V}_M = u\mathbf{i}_1 + v\mathbf{j}_1 \quad (2.23)$$



Slika 2.20: VIP točka u prednjem pogledu

Akceleracije VIP točke je onda ista kao i akceleracija težišta u (2.6):

$$\mathbf{a}_M = (\dot{u} - v\dot{\psi})\mathbf{i}_1 + (\dot{v} + u\dot{\psi})\mathbf{j}_1 \quad (2.24)$$

Nakon uvođenja pretpostavke VIP točke na ovaj način, može se i akceleracija bilo koje točke na šasiji (npr. težišta ili akcelerometra) prikazati preko standardne formule za složeno gibanje sastavljeno od translacije i sfernog gibanja [10] [3]. Stoga je izraz za

ubrzanje težišta, ukoliko je  $MG$  vektor od VIP točke  $M$  do težišta  $G$ , kao na slici 2.20:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_M + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times MG + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times MG) \quad (2.25)$$

Gledajući sliku 2.20, može se vidjeti odmah da je vektor  $MG$  jednak:

$$MG = (h - d)\mathbf{k}_3 \quad (2.26)$$

Uvrštavajući u (2.25) jednadžbe (2.26), (2.24), (2.20) i (2.21), dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G = & (v_x - v_y\dot{\psi})\mathbf{i}_1 + (v_y + v_x\dot{\psi})\mathbf{j}_1 \\ & + (h - d)[-p\mathbf{j}_3 + q\mathbf{i}_3] \\ & + (h - d)\left[r(p\mathbf{i}_3 + q\mathbf{j}_3) - (p^2 + q^2)\mathbf{k}_3\right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Kako bi se svi članovi iz (2.27) prikazali u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo, potrebno je naći kako se jedinični vektori  $\mathbf{i}_1$  i  $\mathbf{j}_1$  transformiraju u  $\mathbf{i}_3$  i  $\mathbf{j}_3$ . Uz pretpostavku malih kuteva (2.16), dobiva se sljedeće:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Theta \\ \Phi\Theta & 1 & \Phi \\ \Theta & -\Phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Pretpostavka malih kuteva valjanja i poniranja omogućuje zanemarenje člana  $\Phi\Theta \approx 0$ , pa se pomoću rezultirajuće matrice transformacije može  $\mathbf{a}_M$ , odnosno prva dva člana iz 2.27, izraziti također u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo. Konačno se stoga dobiva sljedeći izraz za akceleraciju težišta, izražen preko komponenti u koordinatnom sustavu vezanom za vozilo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G = & a_x\mathbf{i}_3 + a_y\mathbf{j}_3 + a_z\mathbf{k}_3 \\ a_x\mathbf{i}_3 + a_y\mathbf{j}_3 + a_z\mathbf{k}_3 = & (v_x - v_y\dot{\psi})\mathbf{i}_3 + (v_y + v_x\dot{\psi})\mathbf{j}_3 + (\Theta v_x - \Theta v_y\dot{\psi} - \Phi v_y + \Phi v_x\dot{\psi})\mathbf{k}_3 \\ & + (h - d)[-p\mathbf{j}_3 + q\mathbf{i}_3] \\ & + (h - d)\left[r(p\mathbf{i}_3 + q\mathbf{j}_3) - (p^2 + q^2)\mathbf{k}_3\right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Analogan postupak može se primijeniti i za dobivanje izraza za akceleraciju točke na šasiji gdje će se nalaziti akcelerometar.

S druge strane, ovaj model u jednadžbama sadrži kutne akceleracije kao varijable, koje se ne mjere izravno [3]. To znači da bi se za njihovo izračunavanje za *online* modele namijenjene upravljanju morala primijeniti numerička derivacija žiroskopskih signala kutnih brzina, što je svakako nepoželjno radi pojačavanja visokofrekventnog šuma u signalima.

## 2.4. Model visoke vjernosti

U programskim paketima za simulaciju dinamike vozila pokušava se što detaljnije i točnije opisati dinamika vozila. Za razliku od modela namijenjenih upravljanju, njihova primjena nije izvršavanje u realnom vremenu radi estimacije varijabli stanja vozila, nego *offline* računalne simulacije, radi dobivanja što boljeg uvida u dinamičko ponašanje vozila tijekom raznih faza njegova razvoja. Stoga se za takve modele vozila koristi naziv modeli visoke vjernosti (engl. *high fidelity models*), te se u njih učitava odvojeno ovješena i neovješena masa, puni tenzor tromosoti, nelinearna kinematika ovjesa, detaljni modeli gume, detaljni modeli aerodinamike vozila itd. Oni također simuliraju i sva tranzijentna stanja vozila, za razliku od onih namijenjenih upravljanju koji mogu biti i kvazistacionarni [11]. Jedan od takvih komercijalnih programskih paketa je i *AVL VSM*, koji će se u ovom radu koristiti kao referenca za validaciju modela namijenjenog upravljanju.

## 2.5. Konfiguracije senzora

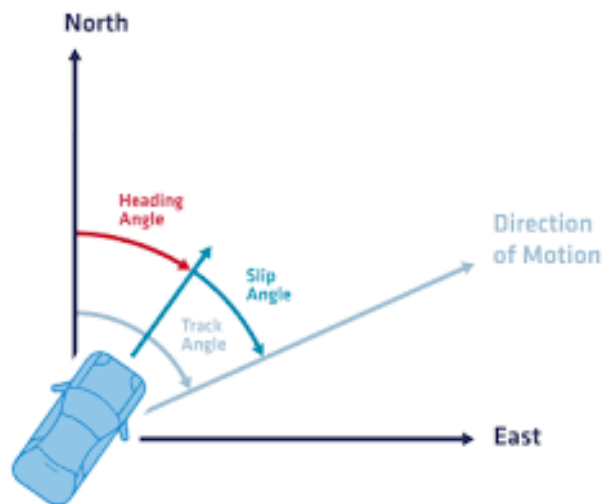
Kao što je spomenuto u uvodnom poglavlju, suvremena vozila opremljena su nizom senzora čija se mjerenja koriste u algoritmima za estimaciju varijabli stanja vozila. Za implementaciju danas standardnih algoritama kao što su sustav protiv blokiranja kotača (engl. *ABS - Anti Brake-Lock System*) ili sustav za kontrolu stailnosti vozila (engl. *ESC - Electronic Stability Control*), koriste se mjerenja brzine vrtnje kotača, zakreta upravljača, bočne akceleracije i brzine skretanja vozila. U naprednijim sustava estimacije stanja vozila mogu se koristiti mjerenja akceleracije i kutne brzine za sve tri osi, kao i geolokacijska mjerenja pozicije (engl. *GPS - Global Positioning System*). U radovima [1] i [4] dan je detaljan pregled mogućnosti kombinacija korištenih algoritama i konfiguracija senzora kod estimacije varijabli stanja gibanja vozila.

Za estimaciju brzine skretanja se osim gore navedenih senzora koriste još i senzor uzdužnog ubrzanja, te u nekim primjenama i brzina i orijentacija sa GPS-a [4]. Kod procjene kuta bočnog klizanja vozila  $\beta$ , osim spomenutih senzora koriste se nekad i senzori hoda kotača, te senzori momenta kod motora ugrađenih u kotače [4]. Prema [1], vidljivo je da su kod primjene filtara za procjenu bočnog kuta klizanja najčešće mjerene veličine akceleracije i kutne brzine vozila. Generalno za estimaciju kuta  $\beta$  razlikujemo



dva smjera u pristupima:

- procjena bočne brzine vozila integracijom korigirane bočne akceleracije
- procjena razlike kuteva usmjerenosti i brzine vozila u koordinatnom sustavu vezanom za Zemlju, pomoću geolokacijskih mjerenja, kao na slici 2.21



Slika 2.21: Razlika vektora usmjerenosti i brzine vozila iz GPS mjerenja

Ovaj rad je temeljen na prvom pristupu, uz dostupna mjerenja sa inercijalne mjerne jedinice (engl. IMU - *Inertial Measurement Unit*), odnosno akceleracija u smjeru tri osi i kutnih brzina oko 3 osi. Stoga se i estimacija brzine skretanja temelji na korekciji posmaka izmjerene brzine vrtnje oko vertikalne osi šasije, a za procjenu kuta bočnog klizanja implementiran je Kalmanov filter. Budući da je glavna tema rada bočna dinamika vozila, prethodna procjena uzdužne brzine također je smatrana ulaznim podatkom u algoritam.

# 3 Usporedba referentnog i reduciranog modela

U prethodnom poglavlju napravljen je pregled nekoliko načina modeliranja vozila, od onih koji jednostavnije opisuju njegovu dinamiku do kompliciranijih. Modeli vozila namijenjeni upravljanju za potrebe estimacije stanja u pravilu pojednostavljaju njegovu dinamiku [4] [1], radi mogućnosti izračunavanja u realnom vremenu, kao i zbog robusnijeg rezultata estimacije.

Kako bi se procijenio utjecaj pojednostavljenja koje uvodimo reduciranjem modela, u ovom poglavlju je ukratko predstavljen puni model, kao i dva reducirana modela, te su uspoređeni odzivi na neke standardne pobude. Odabrani ciklusi vožnje za validaciju su:

- kruženje na zavoju konstantnog radijusa u iznosima od 15m 30m i 50m (engl. CRC - *Constant Radius Cornering*).
- sinusna pobuda zakretom upravljača, zvan i test dvostruke promjene trake (engl. DLC - *Double Lane Change*) pri brzini od 45 km/h
- ciklus kombinirane uzdužne i bočne dinamike, u vidu vožnje po testnoj stazi zavoja promjenjivih radijusa

## 3.1. Referetni model

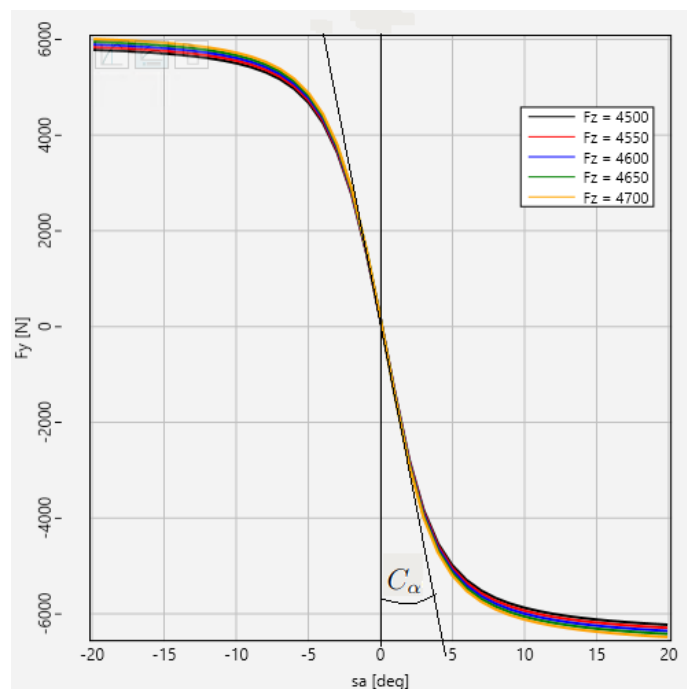
U AVL-ovom programskom paketu komercijalnog naziva VSM moguće je modelirati vozilo sa ukupno 14 stupnjeva slobode:

- 6 stupnjeva slobode dolazi od gibanja šasijske, dakle uzima se u obzir i dinamika valjanja i poniranja

- 4 stupnja slobode dolaze od dinamičkog modela brzine vrtnje kotača za izračunavanje uzdužnih sila
- 4 stupnja slobode dolaze od vertikalne dinamike neovješene mase, čije je relativno gibanje na šasiju opisano nelinearnim mapama

Za model gume je korištena MF formula proširenog oblika osim stanja kombiniranog klizanja opisuje i utjecaj bočnog nagiba kotača [13], krivuljama iz kojih se grafički može odrediti približna bočna krutost, kao na slici 3.1. Model može dati i numeričke iznose gradijenta prikazane krivulje u ishodištu za vertikalne sile koja odgovaraju statičkima, te oni iznose:

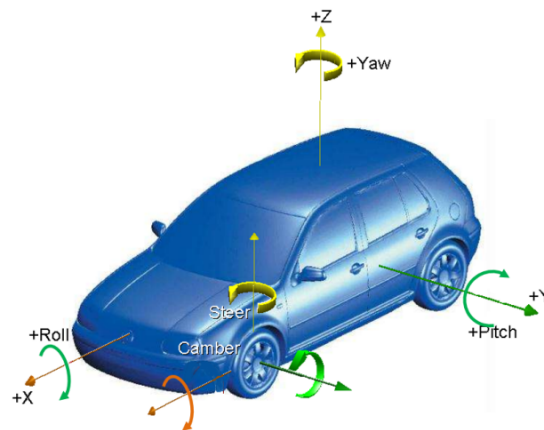
$$\begin{aligned} C'_{\alpha F} &= -1550N/o \\ C'_{\alpha R} &= -2600N/o \end{aligned} \quad (3.1)$$



Slika 3.1: Karakteristika gume na modeliranom vozilu

Prilično velika razlika u statičkim krutostima proizlazi iz dva razloga. Najprije modelirano vozilo na stražnjoj osovini ima šire gume, koje imaju veće iznose bočne krutosti. Drugo, vozilo je dosta teško (2150 kg), te ima uzdužnu raspodjelu mase u omjeru 56%

prema iza, što znači da su statičke vertikalne sile na stražnjoj osovini značajno veće od onih naprijed. Od ostalih relevantnih podataka modela vozila, valja spomenuti i međuosovisnki razmak od 2.7m, kao i moment tromosti šasijske oko vertikalne osi u iznosu od 2500 kgm<sup>2</sup>. Također valja napomenuti da je koordinatni sustav vezan na kotač, kao i onaj cijelog vozila (slika 3.2) definiran konzistentno u odnosu na koordinatne sustave uvedene kod bicikl modela prikazane na slici 2.2. Potvrdu toga može se vidjeti i na vrijednostima bočnih krutosti guma, koje su negativne, budući da pozitivno definirano bočno klizanje kotača daje silu u negativnom smjeru poprečne osi vozila, kao i na slici 2.1.



Slika 3.2: Koordinatni sustav u programu VSM

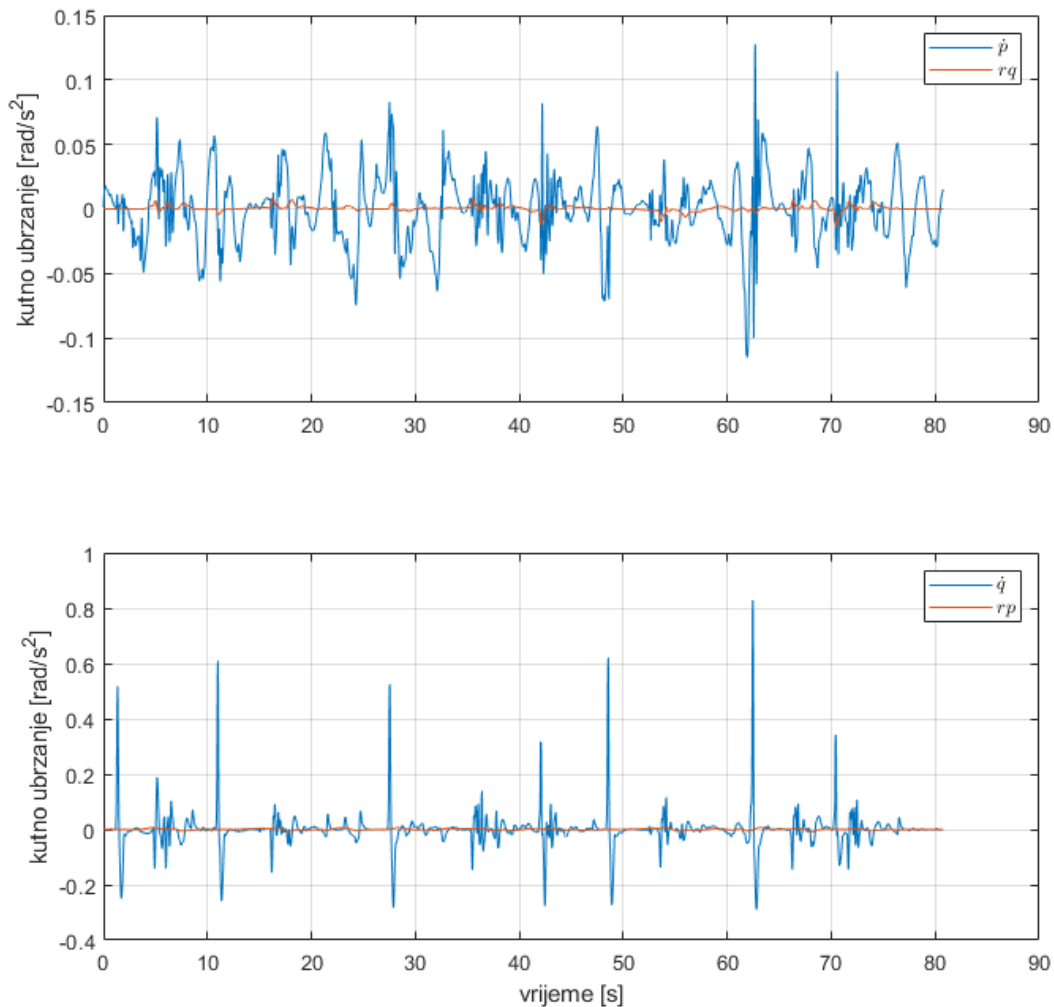
## 3.2. Kinematski model namijenjen upravljanju

Kako bismo iz modela razvijenog u potpoglavlju 2.3. razvili pregledniji sustav jednadžbi, potrebno je zadnju vektorsku jednadžbu iz (2.29) raspisati po komponentama, čime se uz primjenu  $r \approx \dot{\psi}$  iz 2.20 dobiva:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_x &= a_x + v_y r - (\dot{q} + rp)(h - d) \\
 \dot{v}_y &= a_y - v_x r + (\dot{p} - rq)(h - d) \\
 (\Theta v_x - \Theta v_y \dot{\psi} - \Phi v_y + \Phi v_x \dot{\psi}) &= a_z + (p^2 + q^2)(h - d)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Budući da su za estimaciju bočnog kuta klizanja vozila bitne  $v_x$  i  $v_y$ , treća jednadžba iz (3.2) odmah se zanemaruje, jer se u njoj komponente brzine vozila, kao i njihove

derivacije, množe sa dosta malim i također ne izravno mjerenima kutevima valjanja i poniranja, što nije poželjno iz perspektive numeričkog rješavanja. Stoga ostaju samo prve dvije jednačbe, za koje se može vidjeti da izgledaju analogno kao i jednačbe gibanja za planarno gibanje iz (2.6), uz zadnje članove koji se ovdje nazivaju *vanplanarnom korekcijom*, budući da sadrže kutna ubrzanja i kutne brzine valjanja i poniranja  $\dot{p}, p, \dot{q}, q$ . Kako bi se odredio utjecaj tih članova, najprije je provedena analiza njihovih međusobnih odnosa tijekom uvjeta kombinirane dinamike, prikazana na slici 3.3.



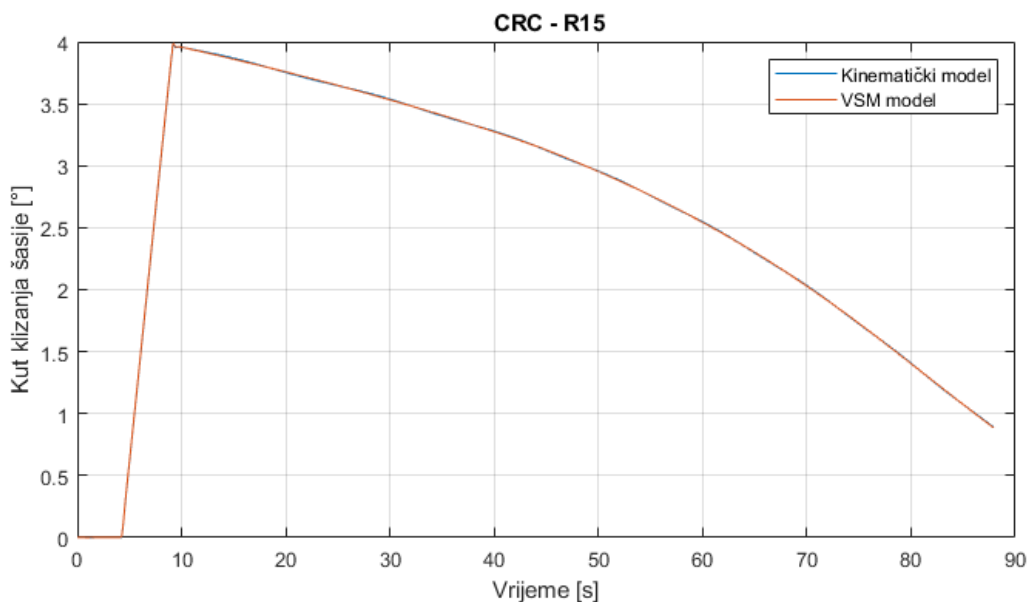
Slika 3.3: Procjena relativnog odnosa članova u vanplanarnoj korekciji

Iz ovih grafova može se jasno vidjeti da je član sa kutnom akceleracijom značajno utjecajni od člana koji množi dvije kutne brzine na ukupni iznos vanplanarne korekcije. Kako je ranije već spomenuto, članovi sa derivacijama kutnih brzina su nepoželjni u modelima namijenjenima upravljanju, a budući da je njihov iznos dominantan u tom zadnjem korekcijskom članu u jednadžbama (3.2), u nastavku su kompletne vanplanarne korekcije zanemarene. Stoga ostaju jednadžbe:

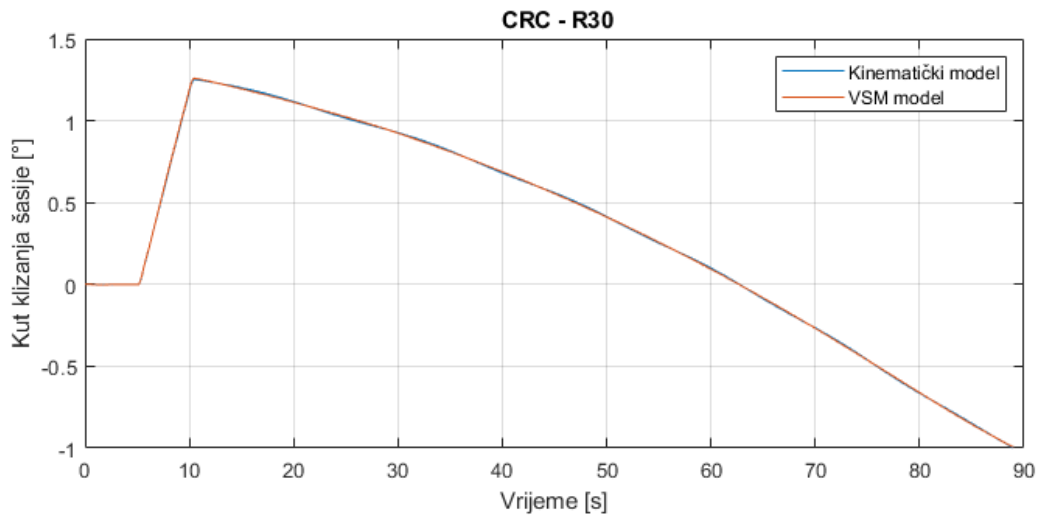
$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= a_x + v_y r \\ \dot{v}_y &= a_y - v_x r \end{aligned} \quad (3.3)$$

Valja primijetiti da je time izvorno trodimenzionalni opis gibanja šasije u reduciranom modelu sveden na planarni kako bi se izbjeglo numeričko deriviranje, što opravdava činjenicu da se u literaturi često odmah polazi od planarnog modela [1] [4] [2].

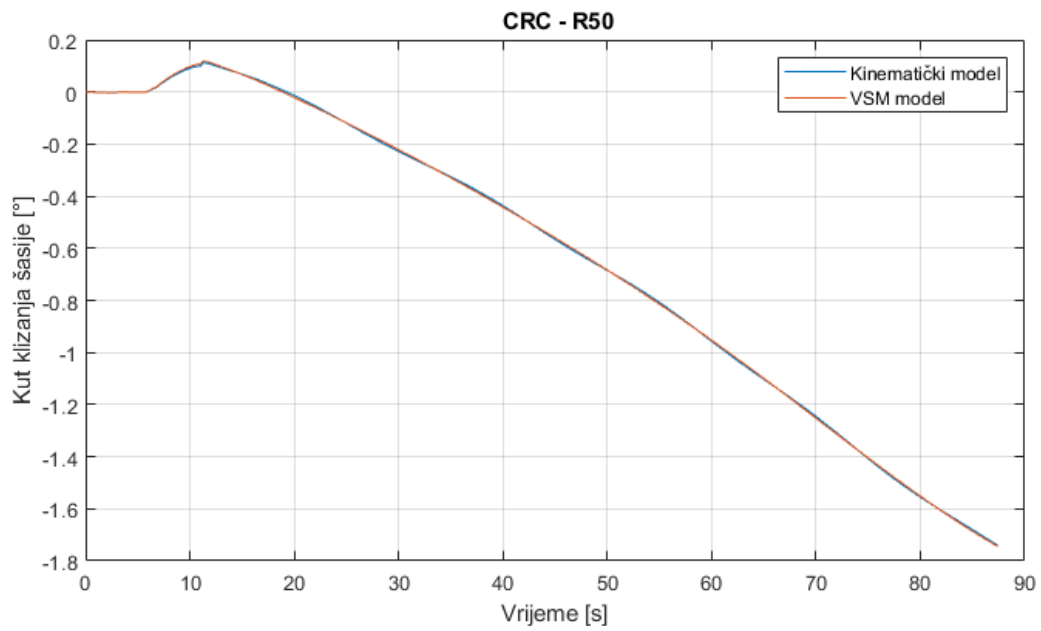
Za validaciju kinematskog modela po voznim ciklusima simulirani će se podaci uzdužne i bočne akceleracije te brzine zakreta oko vertikalne osi dovesti kao ulazne veličine u jednadžbe (3.3), implementirane u *Simulink* programskom paketu. Za ranije spomenute cikluse vožnje dobiju se sljedeće usporedbe:



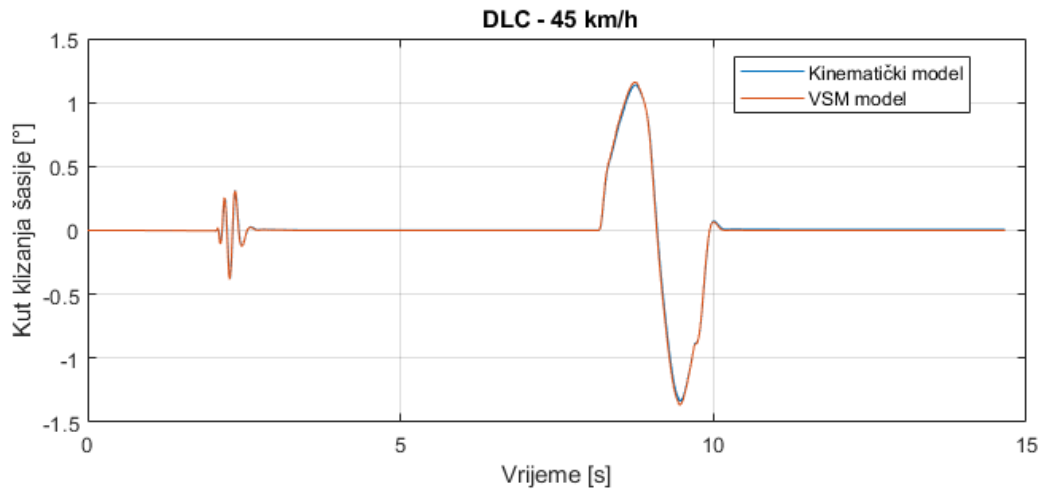
Slika 3.4: Usporedba punog i kinematskog modela na CRC proceduri ( $R = 15\text{m}$ )



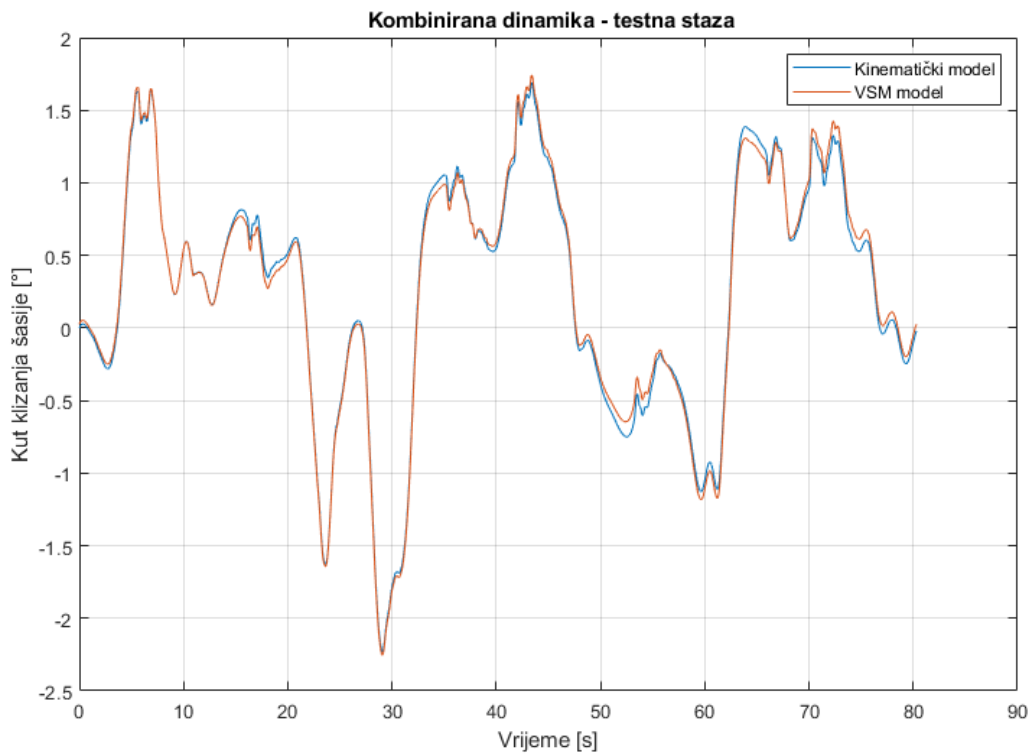
Slika 3.5: Usporedba punog i kinematskog modela na CRC proceduri ( $R = 30\text{m}$ )



Slika 3.6: Usporedba punog i kinematskog modela na CRC proceduri ( $R = 50\text{m}$ )



Slika 3.7: Usporedba punog i kinematskog modela na DLC proceduri



Slika 3.8: Usporedba punog i kinematskog modela u uvjetima kombinirane dinamike



Uz idealne signale akceleracija vozila, u usporedbi sa referentnim modelom kinematski model daje praktički iste vrijednosti, pogotovo u stacionarnom stanju, te su mala odstupanja prisutna samo kod kombiniranih dinamika poniranja i valjanja, prikazana na slici 3.8. Ovakvo poklapanje sugerira da puni model ima vrlo slične jednadžbe za izračun bočnog kuta klizanja vozila u pozadini, koje se od jednostavnog kinematskog modela razlikuju samo uz prisutno poniranje šasijske. Također, ova usporedba upućuje da je u estimaciji stanja temeljenoj na kinematskom modelu glavni naglasak na sprječavanju posmaka zbog integracije (engl. *drift*), kao i na korekcijama mjerenja sa akcelerometra i žiroskopa.

### 3.3. Dinamički bicikl model

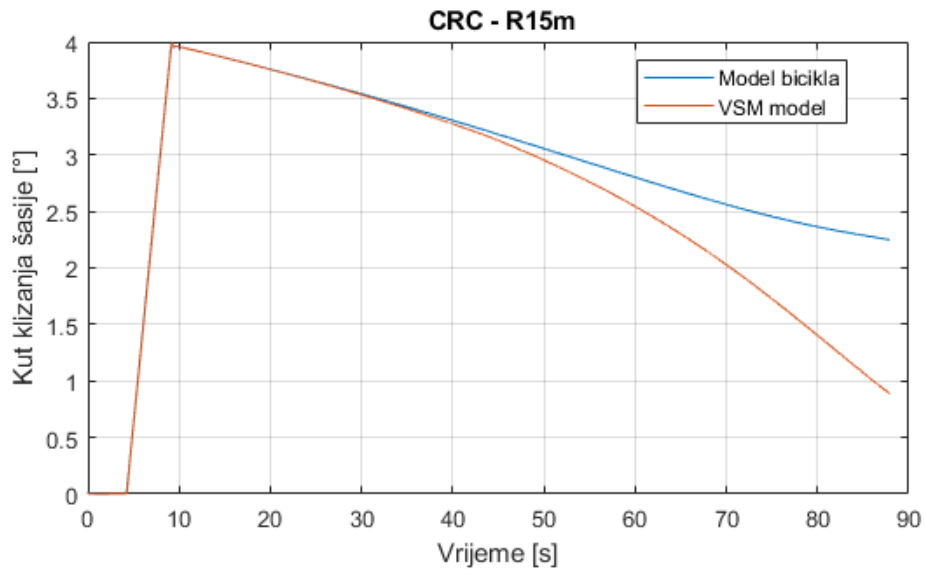
Bicikl model generalno opisuju tri dinamičke jednadžbe iz (2.6), koje su najprije uređene da budu u eksplicitnoj formi, pogodnoj za implementaciju u *Simulinku*:

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= \frac{F_x}{m} + \dot{\psi}v_y \\ \dot{v}_y &= \frac{F_y}{m} - \dot{\psi}v_x \\ \ddot{\psi} &= \frac{M_z}{J_z}\end{aligned}\tag{3.4}$$

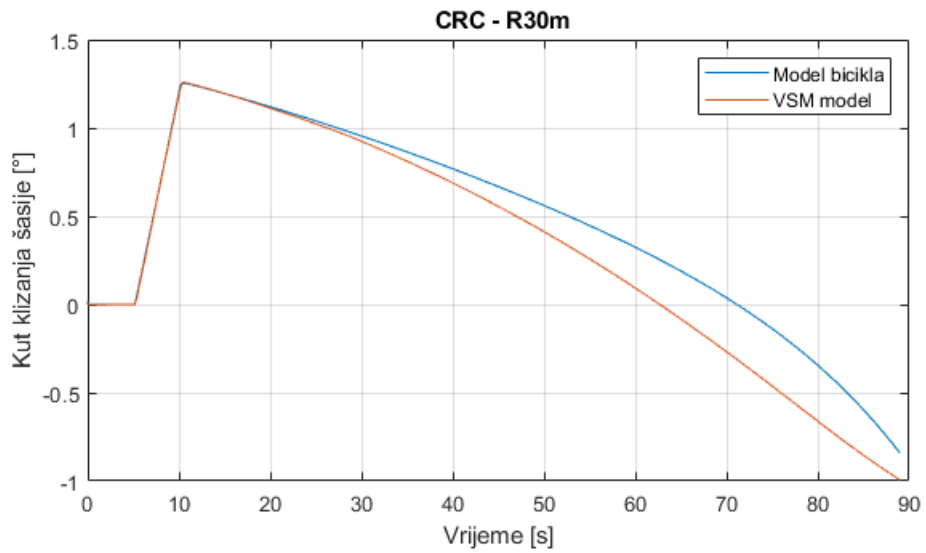
gdje su  $F_x$ ,  $F_y$  i  $M_z$  definirani prema (2.7) ulazi u ove jednadžbe. Kao što je već spomenuto, uzdužna brzina vozila se u ovom radu smatra prethodno estimiranom veličinom, što eliminira potrebu za rješavanjem prve jednadžbe iz (3.4), te ostaju samo druga i treća. Da bi se njih riješilo, prema (2.7) potrebne su bočne sile po osovina  $F_{yF}$  i  $F_{yR}$ , koje se dobivaju korištenjem spomenute pretpostavke linearne karakteristike osovine sa dvostruko većim nagibom od bočne krutosti gume.

$$\begin{aligned}C_{\alpha F} &= -1550 * 2 = -3100 N/^\circ \\ C_{\alpha R} &= -2600 * 2 = -5200 N/^\circ\end{aligned}\tag{3.5}$$

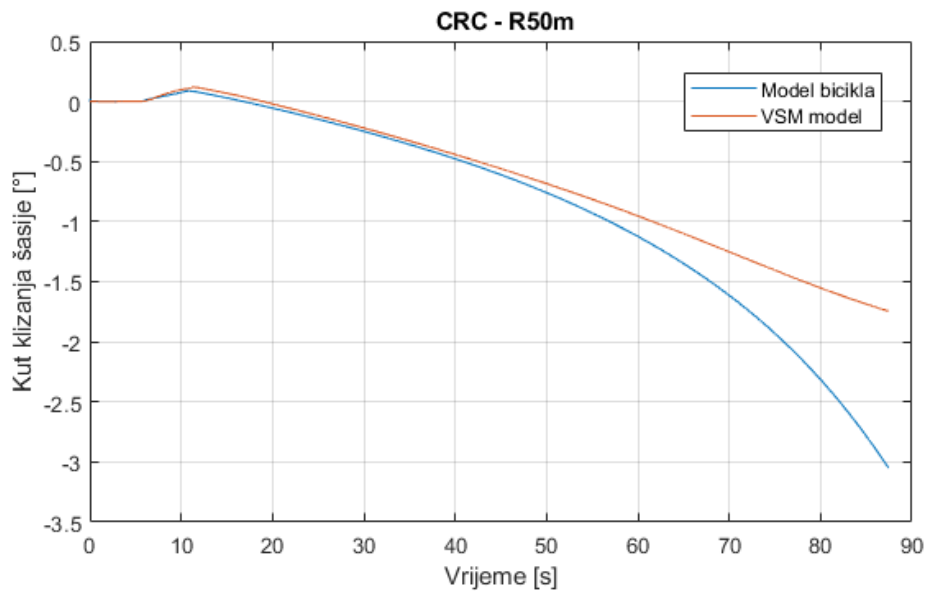
Za izračun kuta klizanja osovine iskorištene su geometrijske relacije iz (2.9), te su stoga za ovakav bicikl model jedino uzdužna brzina i kut zakreta kotača potrebni kao ulazi dobiveni iz simulacija referentnog modela. Uz cikluse vožnje iste kao i kod kinematskog modela, dobiju se sljedeći grafovi:



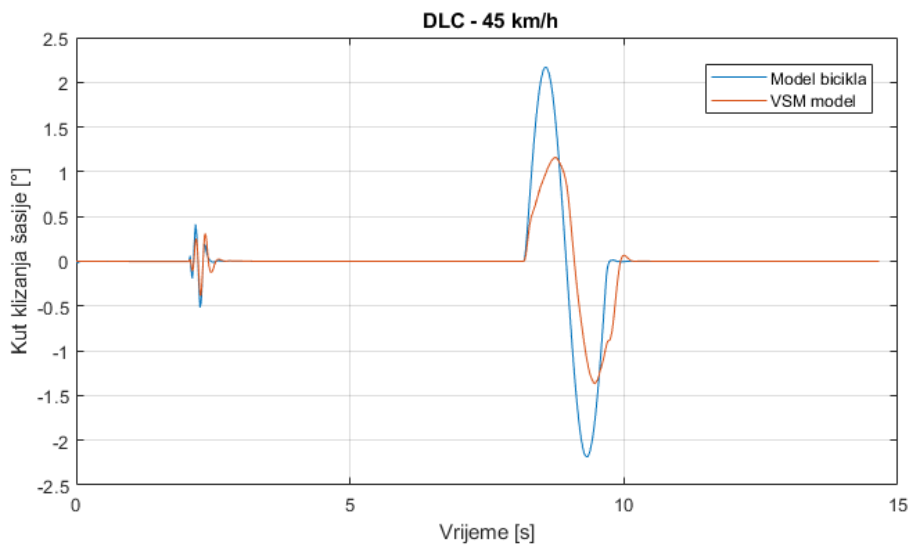
Slika 3.9: Usporedba referentnog i bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 15\text{m}$ )



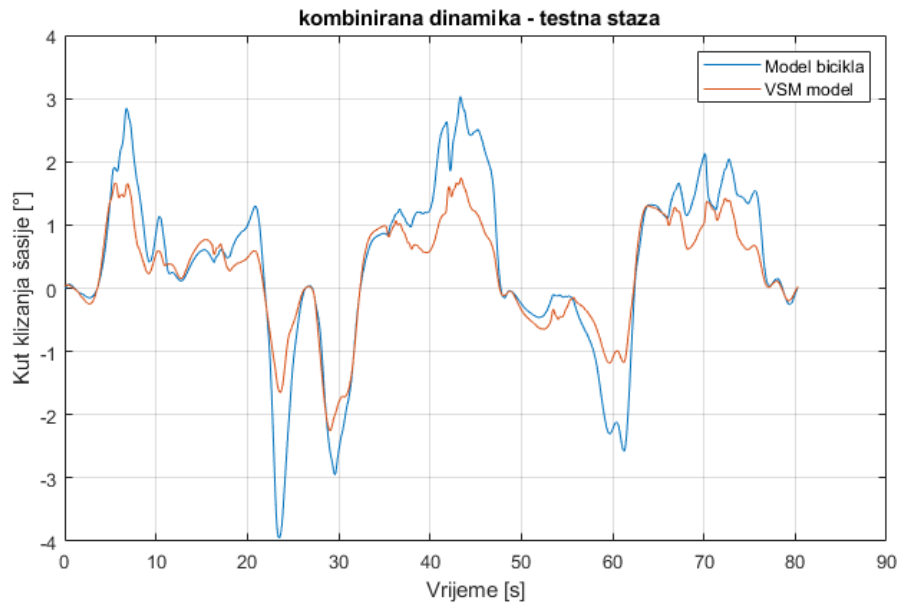
Slika 3.10: Usporedba referentnog i bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 30\text{m}$ )



Slika 3.11: Usporedba referentnog i bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 50\text{m}$ )

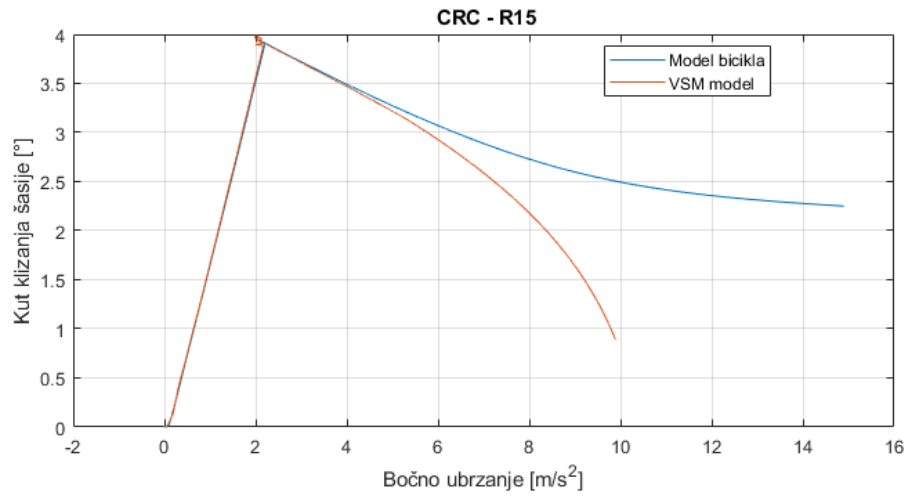


Slika 3.12: Usporedba referentnog i bicikl modela na DLC proceduri

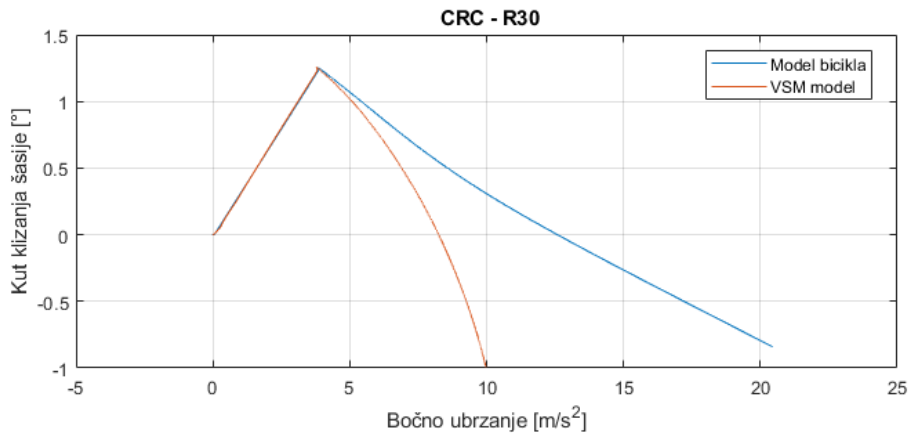


Slika 3.13: Usporedba referentnog i bicikl modela u uvjetima kombinirane dinamike

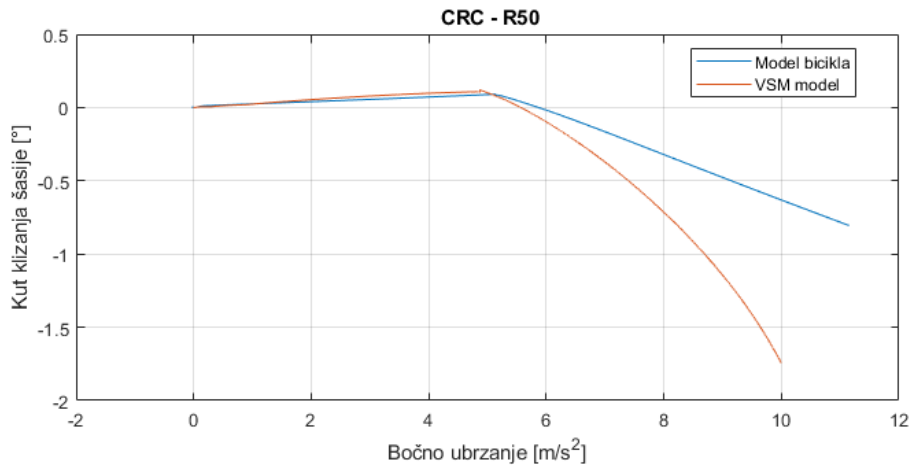
Iz danih grafova može se vidjeti da lineariziran model daje dobre rezultate u pogledu kuteva klizanja šasije na početku CRC procedure, odnosno dok uzdužna brzina vozila nije velika, pa onda nisu ni bočna akceleracija, ni kutevi klizanja guma još veliki (slike 3.9, 3.10, 3.11). Isto tako, veći kutevi klizanja guma kod manevara sa malo izraženijom dinamikom kao što je DLC, otpočetak uzrokuju lošije rezultate pretpostavke linearizirane krivulje gume, slika 3.12. Najlošiji rezultati su kod kombinirane dinamike, gdje lineariziran model redovito daje prevelike bočne kuteve klizanja vozila, slično kao i na DLC proceduri. Kako bi se bolje mogla procijeniti granica primjene lineariziranog modela, grafovi CRC procedura mogu se iscrtati sa bočnim ubrzanjem kao neovisnom varijablom, te se onda dobiva sljedeće:



Slika 3.14: Granice primjenjivosti lineariziranog bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 15m$ )



Slika 3.15: Granice primjenjivosti lineariziranog bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 30m$ )



Slika 3.16: Granice primjenjivosti lineariziranog bicikl modela na CRC proceduri ( $R = 50\text{m}$ )

Na sva tri grafa može se vidjeti da do iznosa bočnih akceleracija od otprilike 4 do 5  $\text{m/s}^2$  linearizirani model daje dosta dobre rezultate po pitanju bočnog kuta klizanja vozila u usporedbi sa referencom iz *VSM*-a, a da nakon toga greške značajno rastu. Također, može se primijetiti kako i zbog nepostojanja zasićenja na lineariziranoj krivulji gume, iznosi bočnih ubrzanja vozila mogu ići do nerealno visokih vrijednosti, slika 3.15. Ova kratka usporedba reduciranih modela daje naslutiti da kinematski model ima više potencijala za sintezu algoritma za estimaciju varijabli stanja bočne dinamike vozila. S druge strane, daljnji se dijelovi rada temelje na njemu, te se pokazuje kako je u osnovnoj formi takav model dosta osjetljiv na nesavršeno mjerene ulaze.

# 4 | Kalmanov filter

## 4.1. Osnovne jednadžbe

Kalmanov filter je rekurzivni algoritam za procjenu varijabli stanja linearnih sustava čija su mjerenja često nepotpuna i zašumljena [18]. Razvijen je od strane matematičara Rudolpha E. Kalmana, koji je svoju verziju algoritma objavio 1960. godine, do danas nije izgubio na značaju te primjenu nalazi u raznim tehničkim sustavima [19]. U osnovnoj formi ovaj filter namijenjen je za procjenu stanja linearnih, vremenski promjenjivih stohastičkih sustava [18], koje se u kontinuiranoj domeni mogu prikazati preko prostora stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Za primjene na digitalnim računalima, potrebno je ovaj zapis pomoću prostora stanja zapisati u diskretnoj domeni, čime dobivamo polazišne jednadžbe za Kalmanov filter [18]:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{F}(k-1)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}(k-1)\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}\tag{4.2}$$

gdje je:

- $\mathbf{x}$  vektor varijabli stanja sustava,
- $\mathbf{y}$  vektor izlaznih varijabli,
- $\mathbf{u}$  vektor ulaznih varijabli,
- $\mathbf{w}$  vektor procesnog šuma,

- $\mathbf{v}$  vektor šuma mjerenja,
- $\mathbf{F}$  matrica sustava,
- $\mathbf{G}$  matrica ulaza,
- $\mathbf{H}$  matrica mjerenja,

te indeks  $k$  predstavlja korak uzorkovanja [20] [18]. Vektori  $\mathbf{w}$  i  $\mathbf{v}$  se tipično ne pojavljuju u jednadžbama kojima modeliramo sustav, već služe za implicitno modeliranje nesigurnosti modela procesa, odnosno šuma u mjerenjima [20].

Kalmanov filtar se generalno sastoji od dva koraka, gdje prvi zovemo prediktivnim, a drugi korekcijskim. Rezultat prediktivnog koraka su apriorne procjene varijabli vektora stanja i matrice kovarijance pogreške estimacije. U korekcijskom koraku algoritam dobiva informaciju o novim mjerenjima te prema njima vrši korekciju apriorno dobivenih veličina, te se njegov rezultat naziva aposteriorna procjena [19]. Da bi algoritam krenuo sa svojim rekurzivnim radom, potrebno je zadati početne uvjete za elemente vektora stanja, kao i inicijalnu kovarijacijsku matricu  $\mathbf{P}_0$ , koja odražava nesigurnosti početnih uvjeta [19]. Nakon što se formirao prikladan sustav jednadžbi i uz zadane početne uvjete, Kalmanov filtar najprije radi predikciju vektora stanja na temelju trenutnog, prema:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (4.3)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  *a-priori* estimat vektora stanja, a  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  *a-posteriori* estimacija vektora stanja iz prethodnog koraka. Nakon toga, izračunava se *a-priori* matrica kovarijanci pogreške procjene pomoću:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (4.4)$$

gdje je  $\mathbf{Q}$  matrica kovarijanci procesnog šuma. Nakon toga se na temelju predviđene kovarijacijske matrice izračunava matrica Kalmanovih pojačanja  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (4.5)$$

gdje  $\mathbf{R}$  predstavlja matricu kovarijanci šuma mjerenja. Pomoću matrice Kalmanovih pojačanja se na kraju korigira vektor *a-priori* estimata varijabli stanja definiran u (4.3) prema jednadžbi:

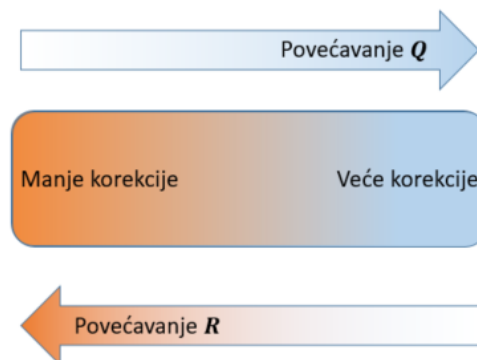
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \quad (4.6)$$



gdje  $\mathbf{z}_k$  predstavlja vektor mjerenja. Slično se onda i ažurira matrica kovarijanci pogrešaka estimacije varijabli stanja sa:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (4.7)$$

te se cijeli postupak ponavlja, koristeći samo informacije iz prethodnog i trenutnog koraka. Matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  se koriste kao kalibracijski parametri koji utječu na konačan rad estimatora, kao što je ilustrirano na slici 4.1. Na njih se može gledati kao na svojevrzne težinske faktore pouzdanosti, odnosno nepouzdanosti jednažbi stanja i mjerenja. Stoga, veće vrijednosti u  $\mathbf{Q}$  matrici odgovaraju većoj nepouzdanosti jednažbi modela, odnosno veću korekciju prema mjerenjima pri svakom koraku. Nasuprot tome, veće vrijednosti u  $\mathbf{R}$  matrici sugeriraju obratno, odnosno veću nesigurnost mjerenja, pa stoga i manje korekcije modelom predviđenog stanja (tj. *a-priori* estimata varijabli stanja).

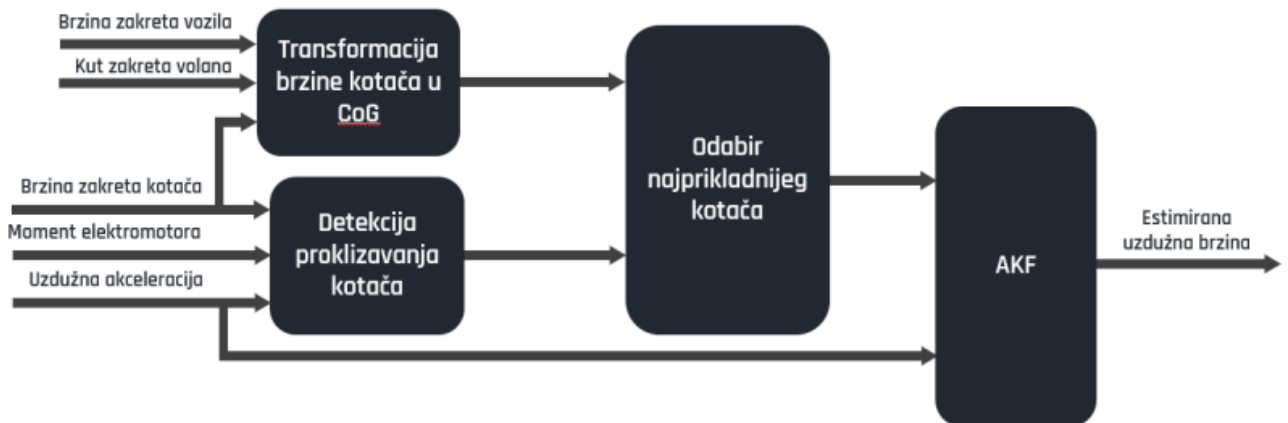


Slika 4.1: Utjecaj matrica šuma procesa i šuma mjerenja

#### 4.1.1. Estimacija uzdužne brzine vozila

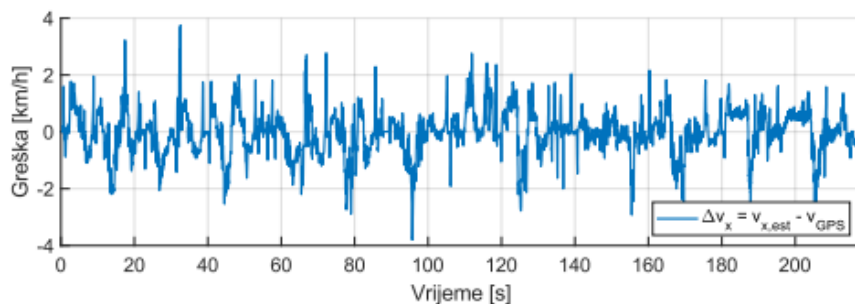
Na temelju osnovne forme Kalmanovog filtra nastale su razne podverzije, kao što su za nelinearne probleme prošireni Kalmanov filter (EKF, engl. *Extended Kalman filter*), ili Kalmanov filter sa adaptivnim parametrima (AKF, engl. *Adaptive Kalman filter*). Primjer potonjeg AKF-a je filter za procjenu uzdužne brzine vozila razrađen u [21], čiji se izlaz smatra mjerenom, odnosno predestimiranom veličinom za algoritam za estimaciju varijabli stanja bočne dinamike vozila razrađenim u ovom radu. Skica filtra razrađenog u [21] dana je na slici 4.2. Ukratko, ideja algoritma je detektirati najprikladniji kotač za procjenu uzdužne brzine, te pomoću senzora uzdužne akceleracije implementirati

adaptivni Kalmanov filtar koji onda daje procjenu brzine vozila. U radu [21] se također navodi da se uz dopuštene nešto veće razine šuma estimata uzdužne brzine (odnosno manjeg stupnja prigušenja filtra) može dobiti manja greška izlazne procjene, što je bitna informacija za filtar razrađen u ovom radu.



Slika 4.2: Shema algoritma za procjenu uzdužne brzine iz [21]

Na slici 4.3 prikazan je podatak o odstupanju estimacije gore prikazanim algoritmom implemeniranim na vozilo *Formula Student* električnog bolida, u odnosu na referencu dobivenu signalom GPS-a, dobiven za ciklus vožnje po testnoj stazi sa brzinama između 0 i 80 km/h. Može se vidjeti da je većinu vremena na tom uzorku signal unutar  $\pm 2$  km/h od reference, što je korisno za znati u kontekstu određivanja matrice šuma mjerenja kod estimacije varijabli stanja bočne dinamike.



Slika 4.3: Greška procjene uzdužne brzine iz [21]

## 4.2. Kinematski model vozila

U nastavku rada analiziran je Kalmanov filtar za procjenu bočnog kuta klizanja temeljen na kinematskom modelu vozila razrađenom u prethodnim poglavljima. Ako se u jednadžbama (3.3) za varijable stanja proglaše komponente brzine vozila  $v_x$  i  $v_y$ , a za mjerenu veličinu predestimirana  $v_x$ , može se model procesa (4.1) zapisati:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & r(t) \\ -r(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} \\ v_x(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ukoliko se ove jednadžbe prema postupku iz [22] prebace u vremenski diskretnu formu za implementaciju filtra, dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & r(k-1)\Delta t \\ -r(k-1)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(k-1) \\ v_y(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x(k-1) \\ a_y(k-1) \end{bmatrix} \\ v_x(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Uz pretpostavku izostanka optičkog senzora bočnog kuta klizanja, bočna komponenta brzine nije izravno mjerljiva, pa je stoga ideja ovako formuliranog filtra da se njena *a-priori* procjena korigira prema prethodno estimiranoj uzdužnoj brzini.

### 4.2.1. Osmotrivost

Kako bi se provjerila izvedivost ovako formuliranog estimatora, valja provjeriti osmotrivost diskretnog procesa, koja se vrši pomoću izračuna matrice osmotrivosti  $\mathbf{O}_b$ . Prema [18], ona se definira kao:

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{HF} & \dots & \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

gdje su  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{H}$  matrice sustava i izlaza, a  $n$  je red sustava, odnosno u ovom slučaju  $n = 2$ . Kriterij osmotrivosti onda glasi da rang matrice osmotrivosti mora biti jednak redu sustava, odnosno  $\text{rank}(\mathbf{O}_b) = n$ . Za proces definiran jednadžbama (4.9), dobiva

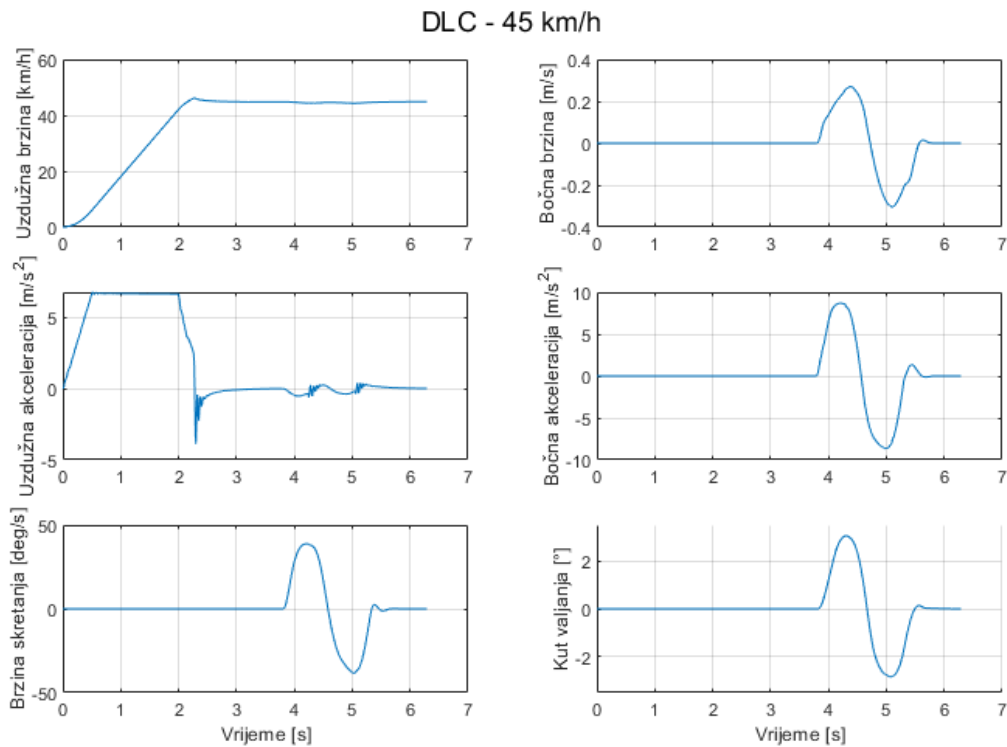
se sljedeća matrica osmotrivosti:

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & r(k-1)\Delta t \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Može se pokazati da je ovo matrica ranga 2 samo u slučaju ako je  $r \neq 0$ , što će imati svoje implikacije, kako je pokazano u analizi kasnije.

### 4.2.2. Vozni ciklusi za analizu estimatora

Budući da je DLC referentan ciklus za pobuđivanje lateralne dinamike vozila, on je korišten i u ovom radu za analizu performansi estimatora kuta bočnog klizanja. Slično kao i u 3. poglavlju kod usporedbe modela vozila, manevar će biti simuliran za brzinu od 45 km/h, a sve relevantane veličine su prikazane na slici 4.4.

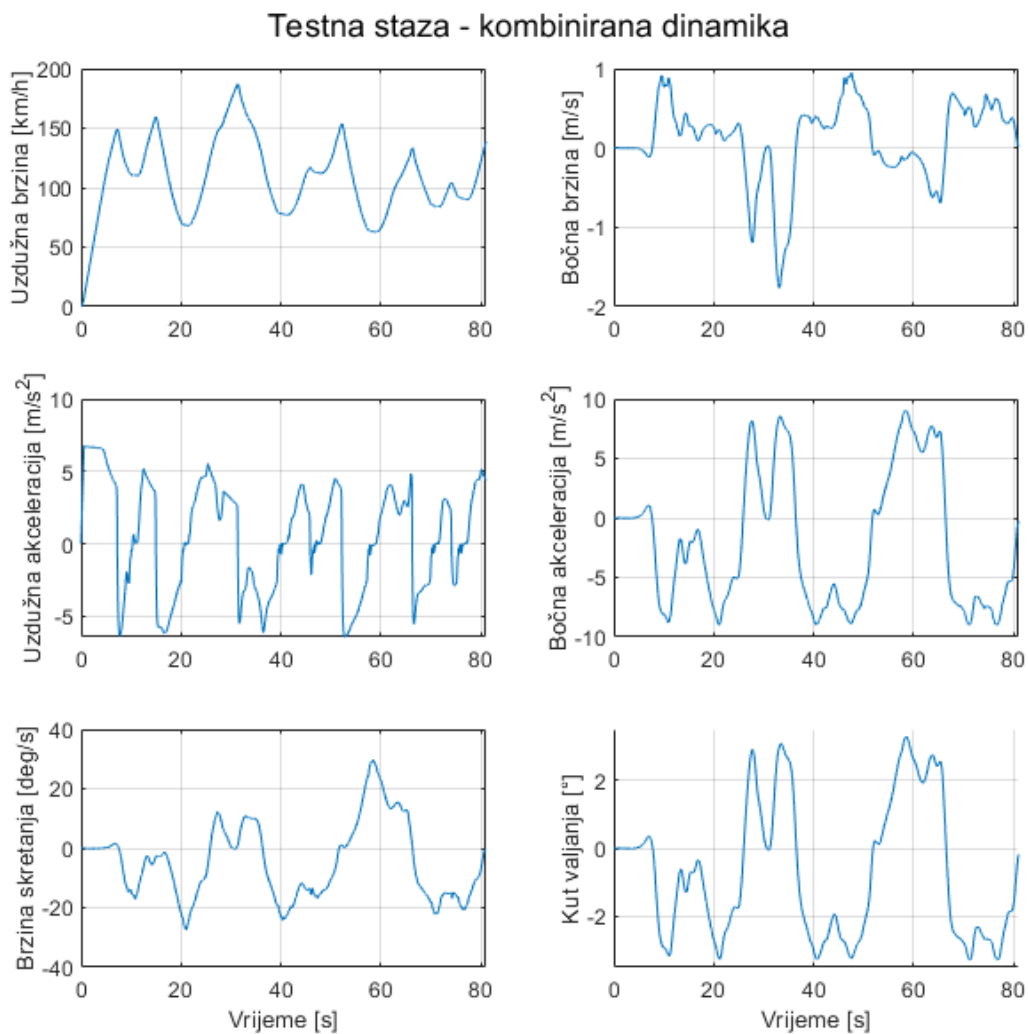


Slika 4.4: Definicija DLC procedure

Na gornjem lijevom grafu sa slike 4.4 najbolje se vidi da procedura počinje iz mirovanja, odnosno  $v_x = 0$  i  $v_y = 0$ . Zašumljenost signala uzdužne akceleracije dolazi

od modela vozača koji regulira pedale gasa i kočnice, te čija se pojačanja isto mogu po potrebi korigirati.

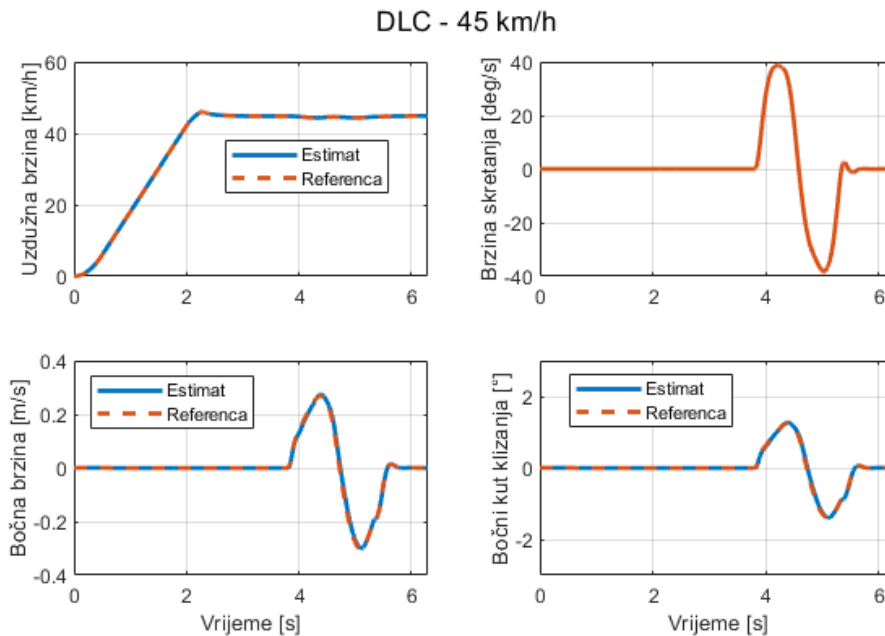
Nakon što performanse filtra budu zadovoljavajuće na setu podataka iz simulacije DLC procedure, kao dodatan test analizirat će se njegovo ponašanje na podacima iz simulacije agresivne vožnje po testnoj stazi u uvjetima kombinirane uzdužne i bočne dinamike, definirane slikom 4.5.



Slika 4.5: Definicija procedure kombinirane dinamike

### 4.3. Analiza performansi

Kao referencu za daljnju analizu rada estimatora prvo treba pokazati rezultate sa idealnim signalima te ispravnim početnim uvjetima i jediničnim vrijednostima u  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  matricama šuma, kada se u *Matlab* skripti implementiraju predstavljene jednačbe filtera (4.9).



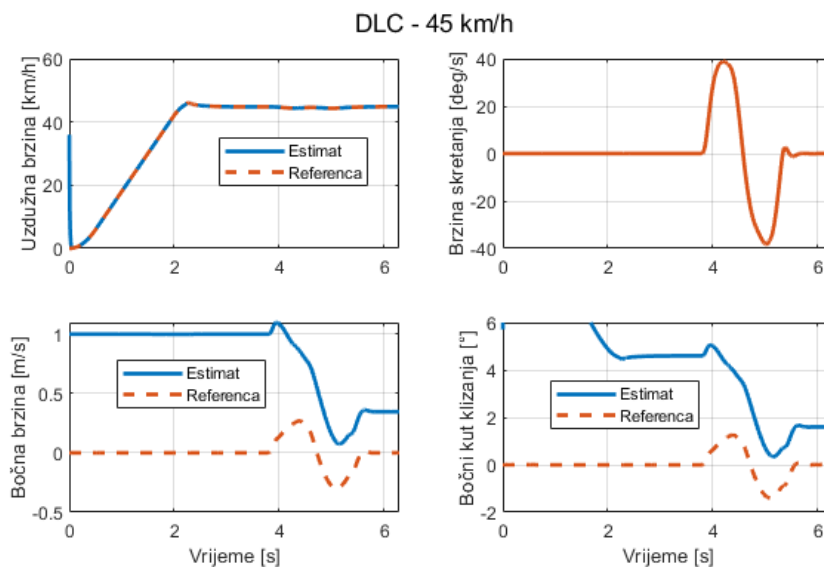
Slika 4.6: Referetne performanse sa idealnim signalima

Na slici 4.6 može se vidjeti kako uz točno predestimiranu uzdužnu brzinu, i idealne senzore brzine brzine skretanja, kao i bočne i uzdužne akceleracije, ovakav estimator radi idealno, analogno kao što je i kinematski model u 3. poglavlju za simulirane ulazne signale dao praktički idealna poklapanja po pitanju bočnog kuta klizanja.

#### 4.3.1. Netočni početni uvjeti

Prvi korak u analizi performansi estimatora jest ispitivanje utjecaja početnih uvjeta uz razne vrijednosti elemenata kovarijacijskih matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ . Odabrani početni uvjeti za elemente vektora stanja su  $v_x = 10$  m/s i  $v_y = 1$  m/s. Uz varijacije matrice kovarijanci procesnog šuma  $\mathbf{Q}$ , rezultati su prikazani na slikama 4.7, 4.8, 4.9 i 4.10. Odmah se

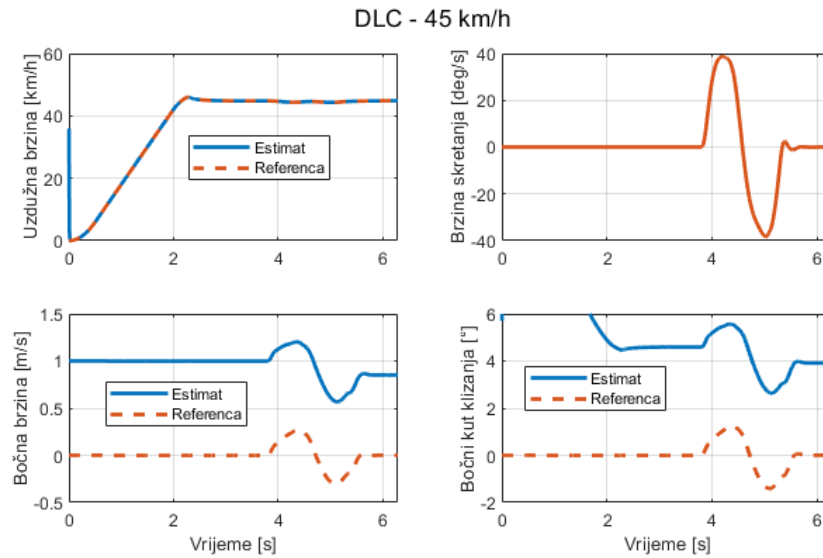
može uočiti spominjana osjetljivost ovako formuliranog filtra za estimaciju kuta bočnog klizanja, budući da su performanse nezadovoljavajuće. Razlog tome leži u ranije spomenutoj osmotrivosti modela gibanja vozila, odnosno neosmotrivosti procesa kada je  $r \approx 0$ . Naime, budući da je na ravnom dijelu ciklusa prije promjene trake brzina skretanja  $r$  praktički nula, matrica sustava se  $\mathbf{F}$  je jednaka jediničnoj matrici, te budući da je  $a_y = 0$ , dobije se da je  $v_y(k) = v_y(k - 1)$ .



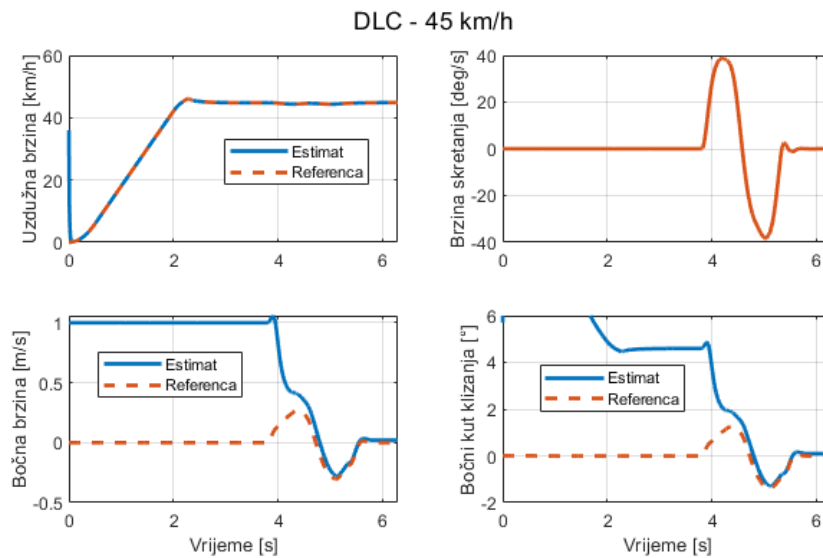
Slika 4.7: Netočni početni uvjeti uz  $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1)$

Drugim riječima, u situaciji kada nije pobuđena bočna dinamika, estimator ne može detektirati da estimirana bočna brzina ima posmak jednak njenom početnom uvjetu. Tek nakon pobuđivanja bočne dinamike i promjene kutne brzine skretanja, počinju se vidjeti učinci različitih podešenja  $\mathbf{Q}$  matrice. Može se odmah zamijetiti da relativni odnos  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  matrice ne igra ulogu, budući da su odzivi identični kod jedinične  $\mathbf{Q}$  matrice i one skalirane sa 10 (slike 4.7 i 4.10). Dakle bitni su samo odnosi elemenata unutar  $\mathbf{Q}$  matrice, gdje prvi dijagonalni element odgovara procesnom šumu vezanom za  $v_x$ , a drugi vezanom za  $v_y$ . Razlog tome leži u činjenici da je tijekom pobude bočne dinamike uzdužna brzina konstantna. Stoga filtar nema razloga mijenjati vrijednost te varijable stanja te odlučivati kojoj će više vjerovati, jer jednostavno i model i mjerenje govore da je ona praktički istog iznosa kao u prethodnom koraku. Tako da najutjecajniji parametar ostaje drugi element u  $\mathbf{Q}$  kovarijacijskoj matrici koji je vezan za drugu jednažbu u

modelu procesa, odnosno za derivaciju bočne brzine. Utjecaj prvog elementa  $\mathbf{Q}$  matrice nije i dalje u potpunosti zanemariv, budući da je on vezan na prvu jednadžbu modela, u kojoj se također nalazi  $v_y$  kao varijabla stanja, pa zato ni odzivi na slikama 4.7 i 4.8 nisu identični.

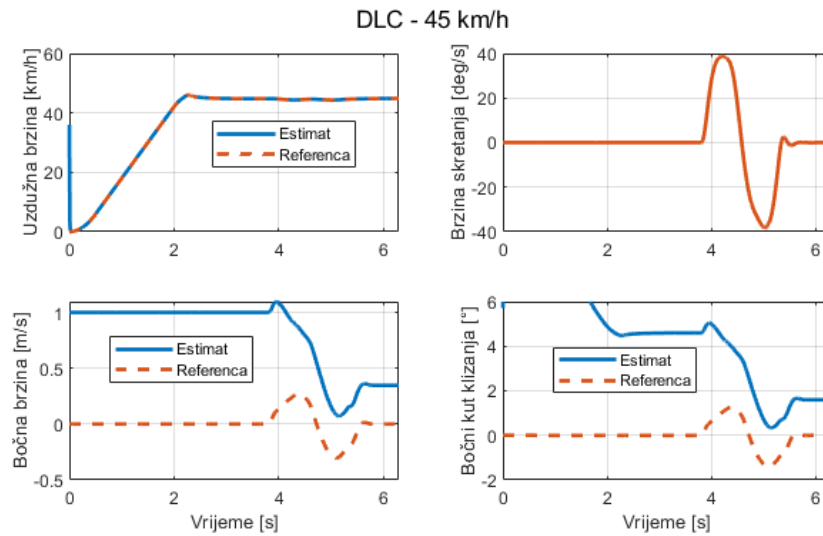


Slika 4.8: Netočni početni uvjeti uz  $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 1)$

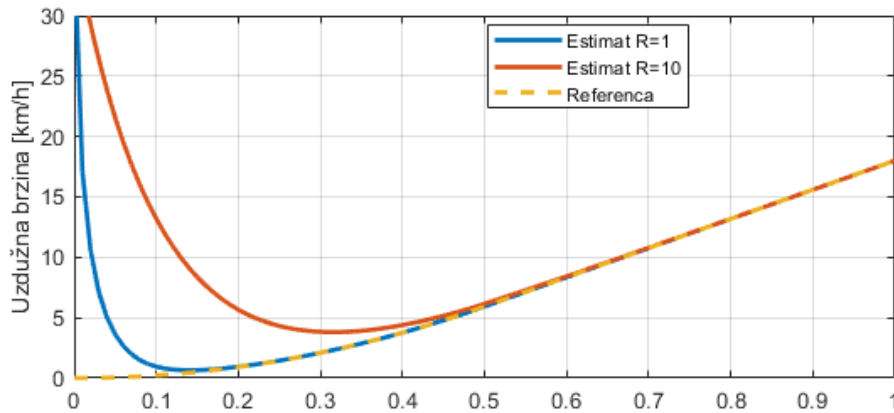


Slika 4.9: Netočni početni uvjeti uz  $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 10)$



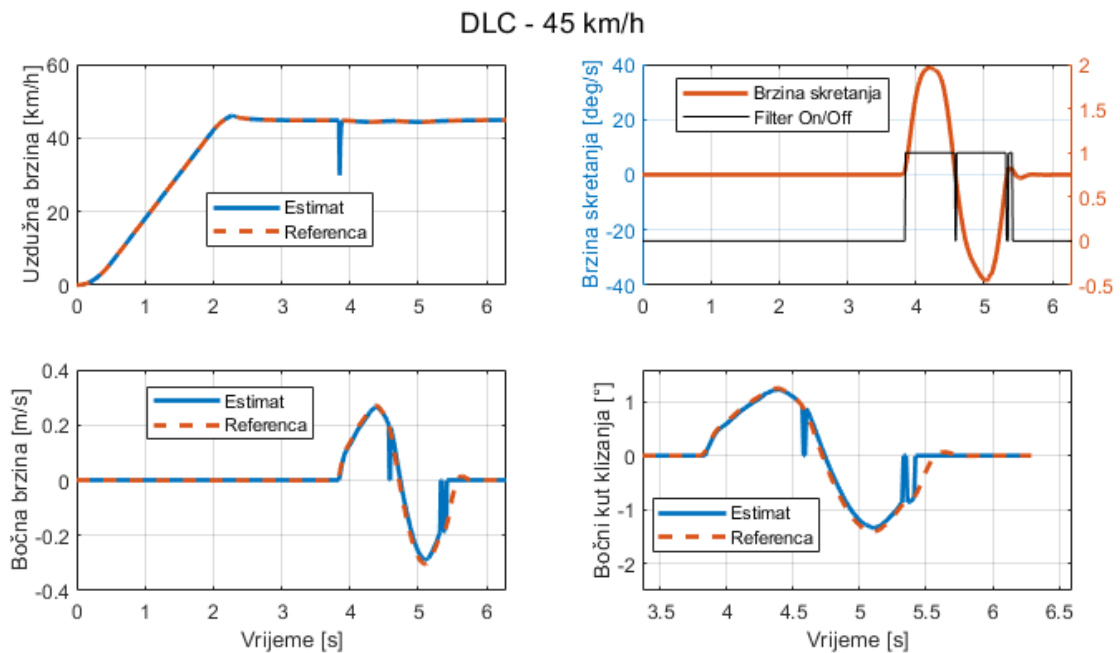
Slika 4.10: Netočni početni uvjeti uz  $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 10)$ 

U drugu ruku, u svim slučajevima se vidi kako  $v_x$  vrlo brzo konvergira k referenci. Razlog tomu jest činjenica da predestimirana uzdužna brzina predstavlja izravno mjerenje te varijable. Stoga je zanimljivo analizirati kako utječe podešenje  $\mathbf{R}$  matrice na točnost estimacije. Postavljanjem  $\mathbf{Q}$  matrice na  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , odnosno forsiranjem filtra da jako vjeruje vrijednosti  $v_x$  iz modela, pa tako i njenoj početnoj vrijednosti, dobivaju se konvergencije prikazane na 4.11.  $\mathbf{R}$  matrica se varira, a budući da u modelu postoji samo jedno mjerenje  $v_x$ , ona se reducira na skalar. Slika 4.11 prikazuje kako uz veću vrijednost pretpostavljenog šuma mjerenja, odnosno nepreciznosti prethodno estimirane vrijednosti  $v_x$ , vrijeme konvergencije estimiranih varijabli stanja k referentnim vrijednostima povećava. Valja naglasiti da je u ovakvoj situaciji od apsolutnog iznosa pojedinih elemenata matrica kovarijanci bitniji omjer između varijance mjerenja i pripadajućih elemenata u matrici procesnog šuma  $\mathbf{Q}$ . Drugim riječima, relativnim povećavanjem varijance varijable stanja omogućava se veće fleksibilnost filtru da korigira njene vrijednosti prema mjerenjima.

Slika 4.11: Netočni početni uvjeti i varijacije R uz  $\mathbf{Q} = \text{diag}(0.1, 1)$ 

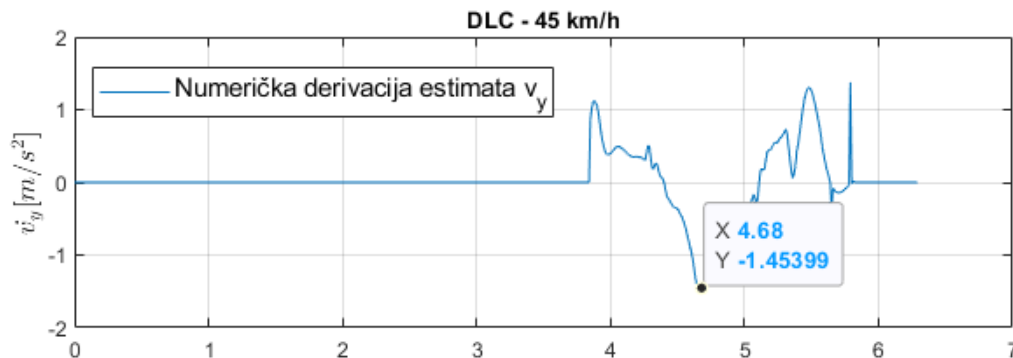
## 4.4. Modifikacije

Kao prvo rješenje za problem neosmotrivosti u slučaju slabo pobuđene bočne dinamike vozila nameće se ideja da se u uvjetima ravne vožnje, odnosno kada je brzina skretanja manja od nekog praga, filter jednostavno isključi, a bočna brzina da se proglašuje jednakom nuli. Drugi praktičan uvjet za uključivanje filtra može biti da je uzdužna brzina veća od nekog praga (npr. 2 m/s), budući da je procjena dinamičkih veličina nepouzdana, ali i nepotrebna na malim brzinama. Implementirajući takvu jednostavnu modifikaciju uz točno zadane početne uvjete dobiju se performanse filtra prikazane na slici 4.12. Na prvi pogled izgleda kao da je problem jednostavno otklonjen. Međutim, u trenutku prijelaza iz pozitivnih u negativne brzine skretanja, njena apsolutna vrijednost padne ispod vrijednosti proizvoljno zadanog praga od  $2^\circ/\text{s}$  te se filter isključi, prikazano na grafu gore desno na 4.12. To znači da u tom trenutku, usred izrazito dinamičkog manevra, estimator bočnu brzinu, odnosno bočni kut klizanja proglašava jednakim nuli, što bi svakako imalo negativne implikacije pri primjeni na vozilu sa realnim signalima, kao što je prikazano kasnije.

Slika 4.12: Prva modifikacija sa pragovima na mjerenja  $r$  i  $v_x$ 

#### 4.4.1. Prag komplementaran brzini skretanja vozila

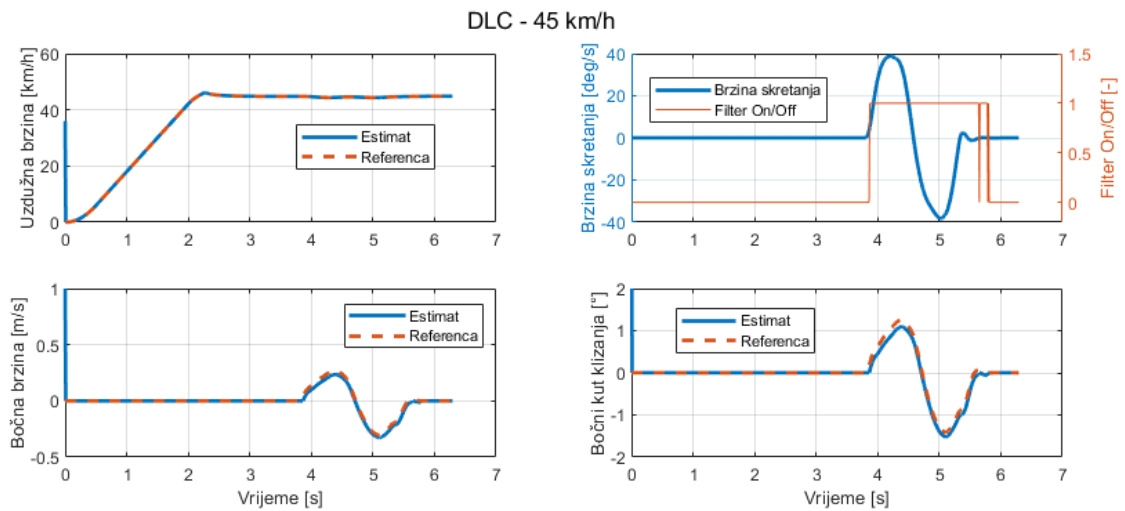
Kako bi se doskočilo tom problemu, moguće rješenje je tražiti derivaciju kutne brzine  $\dot{r}$  te onda zahtjevati deaktivaciju filtra kada je  $r \approx 0$  i  $\dot{r} \approx 0$ . Problem kod tog pristupa jest opet numeričko deriviranje izravno mjerenog signala, koje bi onda utjecalo na paljenje i gašenje filtra, što sigurno nije poželjno sa strane robusnosti zbog visokofrekventnih šumova. Stoga se čini potrebnim tražiti derivaciju neke varijable koja se estimira unutar filtra, jer će se time derivirati prethodno filtrirani signal, te da ujedno ta veličina bude različita od nule u trenutku promjene smjera brzine skretanja, što je u korištenoj DLC proceduri negdje u vremenskom trenutku  $t \approx 4,7$  s. U ovom radu je stoga odabrana derivacija bočne brzine  $v_y$  koja će se koristiti kao komplement brzini skretanja  $r$  kod utvrđivanja uvjeta ravne vožnje. Na slici 4.13 može se vidjeti kako je za  $t = 4,68$  s,  $v_y$  dobivena numeričkom derivacijom estimiranog signala dosta daleko od nule, gledano relativno na ostale vrijednosti tog signala, te bi stoga mogla poslužiti kao komplement brzini skretanja kod detekcije ravne vožnje.

Slika 4.13: Estimirana derivacija bočne brzine  $v_y$ 

Međutim, ukoliko se filtar jednostavno drži ugašenim dok  $r$  i  $v_y$  ne dođu iznad pragova, varijable stanja u filteru će stajati zamrznute na vrijednostima prije gašenja. Druga poteškoća jest što se i  $v_y$  ne estimira nego proglašava nulom, tako da samo uvjet kutne brzine skretanja efektivno može proglasiti kraj uvjeta ravne vožnje. Jednom kada onda  $r$  prijeđe prag i upali filtar, on kreće od vrijednosti varijabli vektora stanja prije gašenja, što može uzrokovati greške. Na primjer, vozilo nakon zavoja dođe na ravnicu i filter se ugasi, te zadnja spremljena estimirana uzdužna brzina ostane ona na izlasku iz zavoja. U sljedećem manevru koji pobuđuje lateralnu dinamiku i ponovno pali filtar, predestimirana uzdužna brzina puno je veća, te stoga pojačanja u Kalmanovoj matrici mogu rasti na prevelike razine, time narušavajući kvalitetu estimacije bočnog kuta klizanja.

#### 4.4.2. Paralelni filtar

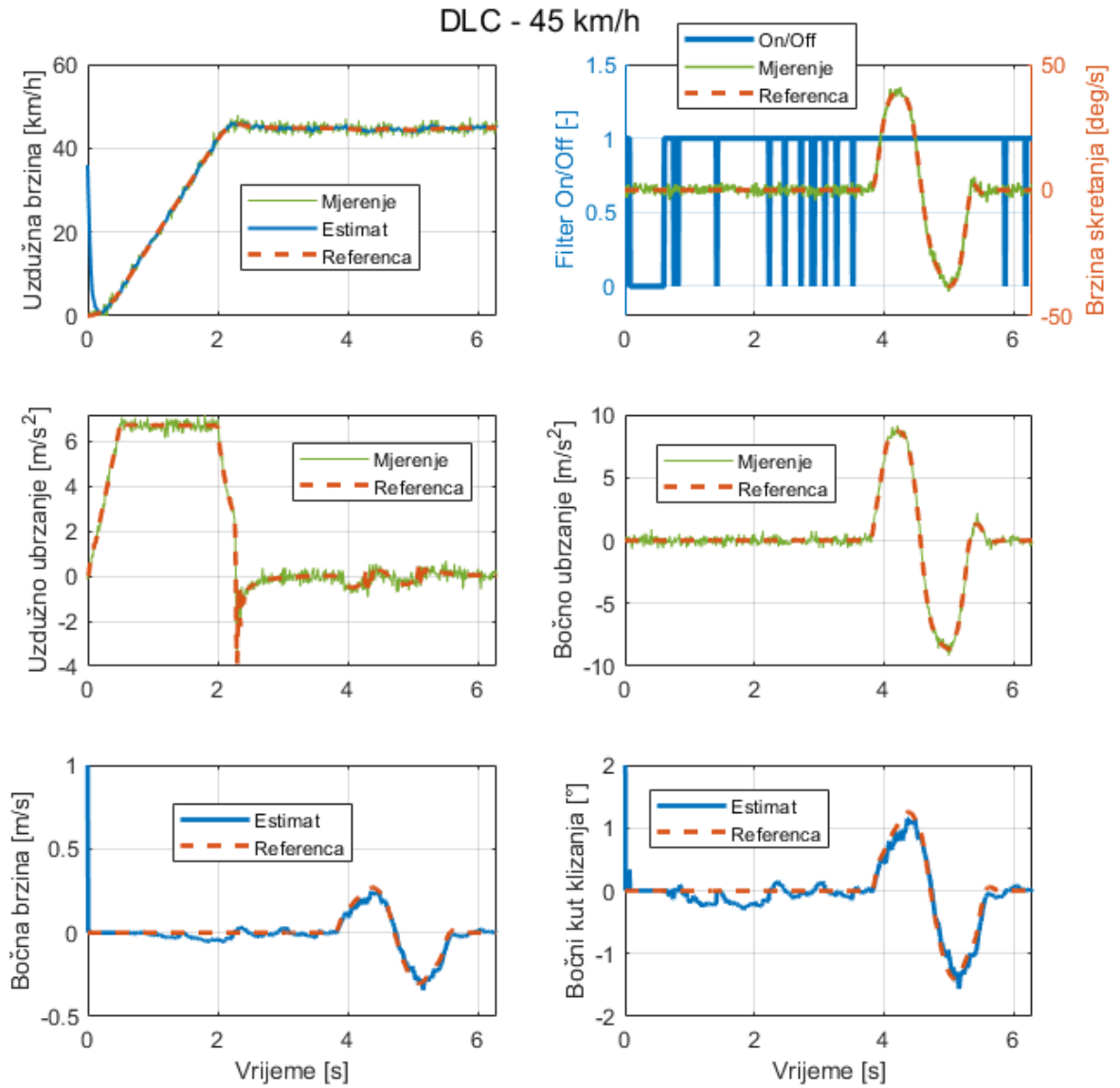
Kako bi se to onemogućilo, u ovom radu je implementiran paralelni filtar sa istom strukturom, koji iste varijable stanja ( $v_x$  i  $v_y$ ) ažurira i tijekom proglašene ravne vožnje. Na taj način se odvajaju matrice pojačanja tijekom ravne i zavojite vožnje, te uzdužna brzina biva konstatno estimirana, bilo od jednog, bilo od drugog filtra. Njegove performanse sa idealnim signalima i netočnim početnim uvjetima na DLC proceduri su prikazane na slici 4.14, gdje se vidi da je u tim uvjetima estimacija zadovoljavajuća.



Slika 4.14: Implementacija dvostrukog filtra sa netočnim početnim uvjetima

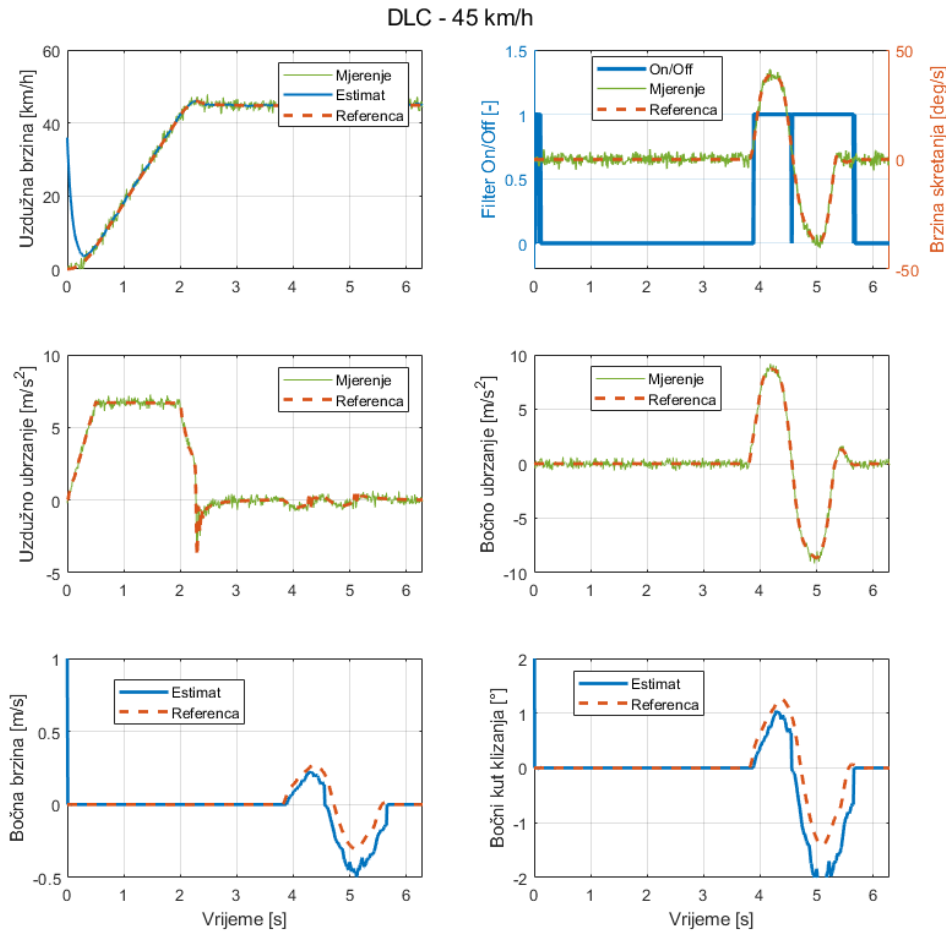
### 4.4.3. Dodavanje šuma i posmaka

Ukoliko se pomoću *randn* naredbe u *Matlabu* za generiranje šuma na sve mjerene signale iz simulacije doda pripadajući šum, te novodobivene signale proglašiti realnim mjerenjima, bočni kut klizanja se i dalje može ovim filtrom prilično dobro estimirati, kao što je prikazano na 4.15. Valja napomenuti da manipulacijom pragova za ravnu vožnju po varijablama  $r$  i  $v_y$  možemo značajno utjecati na ponašanje filtra. Na slici 4.15 se vidi kako je kod odabira podešenja pragova za uključenje/isključenje estimacije  $v_y$  prioritet dan kontinuiranom radu filtra u dinamičkim manevrima, nauštrb češćeg paljenja i gašenja procjene bočne brzine za vrijeme ravne vožnje, što smanjuje kvalitetu estimacije u tom periodu. Svaki puta kada se u ravnom dijelu zbog šuma u signalu  $r$  filtar "upali" i krene estimirati bočnu brzinu, događa se integracija šuma sa  $a_y$  te estimacija pomalo divergira od referemce, dok ju "gašenje" filtra ne pritegne nazad u nulu.



Slika 4.15: Dvostruki filtar sa šumom

Ukoliko bi se birali veći pragovi za ravnu vožnju, moglo bi se dogoditi suprotno, kao što je prikazano na 4.16.

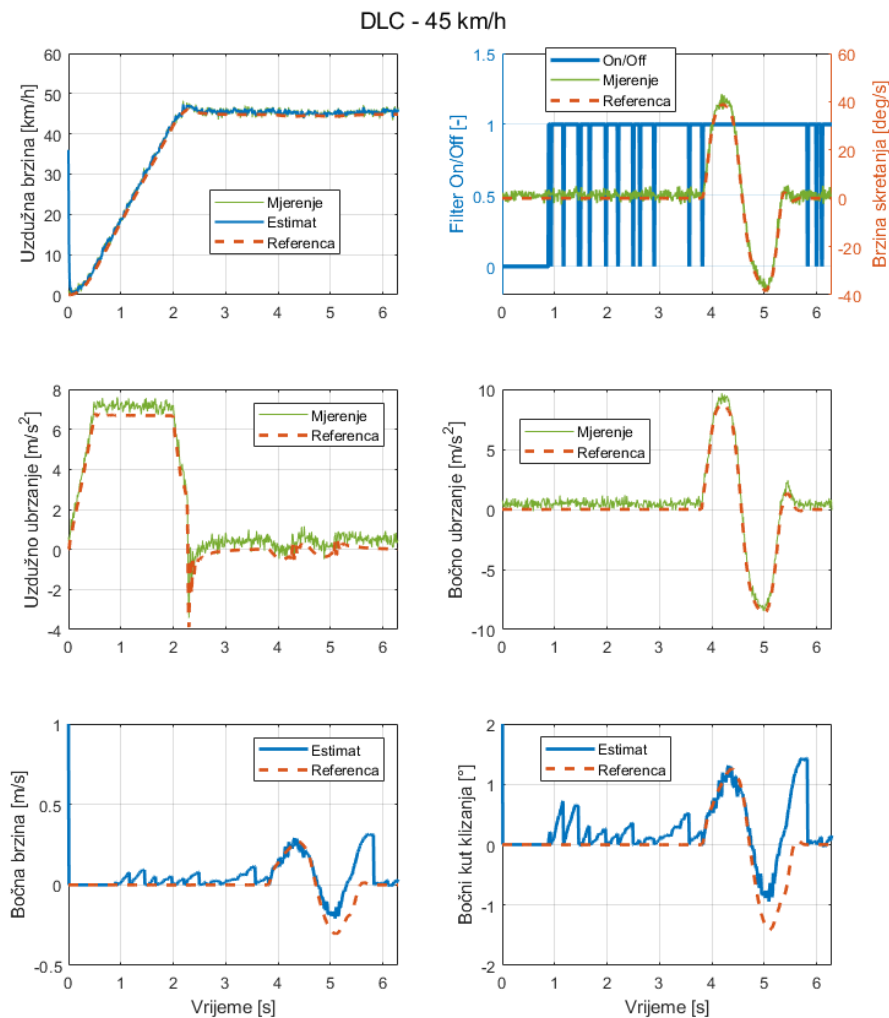


Slika 4.16: Drugačiji odabir pragova za ravnu vožnju

Ovdje se može vidjeti da estimator čvrsto drži nulu za estimiranu  $v_y$  za vrijeme ravne vožnje, no zato usred dinamičkog manevra proglaši bočnu brzinu jednaku nulom, te pritom nastala greška utječe negativno na estimaciju do kraja dinamičkog dijela ciklusa. Razlog tomu jest da novonastala velika greška između iznosa jedne varijable stanja u dva susjedna koraka uzrokuje porast vrijednosti elemenata matrice kovarijanci pogrešaka procjene  $\mathbf{P}$ , koja nema utjecaj samo na taj korak diskretizacije, nego i na sljedeće, budući da se  $\mathbf{P}$  matrice također računaju rekurzivno na temelju svojih prethodnih vrijednosti.

Nadalje, ukoliko se mjerenim signalima doda i posmak u mjerenju (engl. *offset*), perfor-

manse estimatora i dalje padaju, kao što je prikazano na slici 4.17. Vidi se kako tijekom ravne vožnje posmak u kombinaciji sa šumom u signalu brzine skretanja stalno pale estimaciju bočne brzine, time integrirajući grešku koja se onda smanjenjem  $r$  (ili  $v_y$ ) ispod pripadajućeg praga opet pritegne u nulu. Također, može se vidjeti kako kombinirani utjecaj posmaka brzine skretanja i bočne akceleracije utječe na sve lošiju estimaciju, na način da što dulje traje dinamički manevar, to se više greške integrira, te je estimat lošiji.



Slika 4.17: Dodavanje posmaka na mjerene signale



## 4.5. Proširenje vektora stanja i vektora mjerenja

Kao sljedeći korak za povećanje robusnosti postojećeg filtra nameće se mogućnost proširenja vektora mjerenja virtualnim mjerenjem derivacije bočne brzine  $\dot{v}_y$ , koristeći istu jednadžbu pomoću koje je formuliran filter:

$$\dot{v}_y = a_y - v_x r \quad (4.12)$$

Svi članovi sa desne strane jednakosti su mjerene veličine ukoliko je vozilo opremeljeno IMU senzorom te se  $v_x$  smatra predestimiranom veličinom. Proglašavanjem  $\dot{v}_y$  također varijablom stanja, originalne jednadžbe (4.8) koje opisuju sustav u kontinuiranoj domeni mogu se proširiti na sljedeći način:

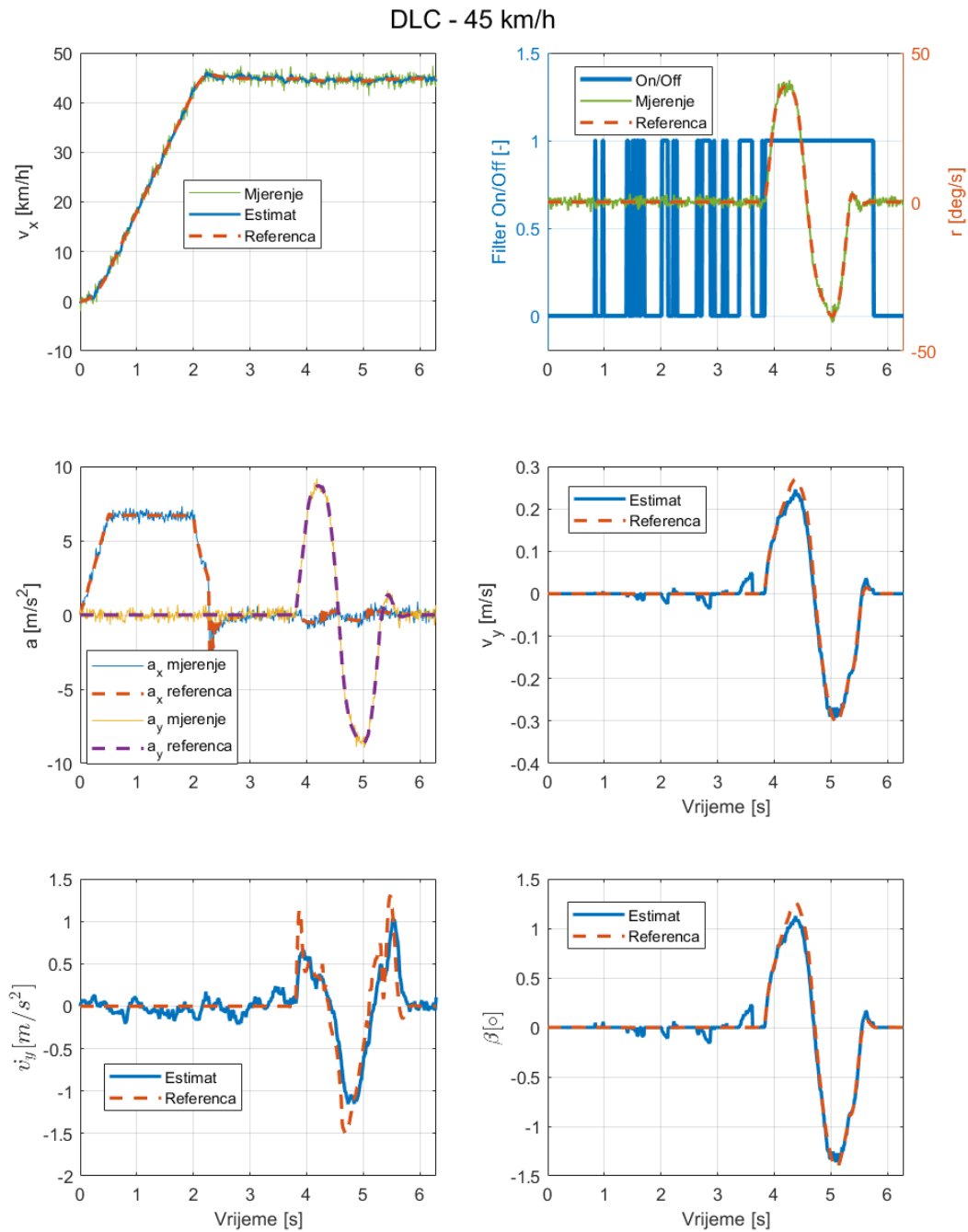
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \ddot{v}_y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & r(t) & 0 \\ -r(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Odnosno, analogno transformaciji opisanoj raniji iz jednadžbi (4.8) u (4.9) prelaskom u diskretan zapis pogodan za implementaciju Kalmanova filtra dobiva se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \\ \dot{v}_y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & r(k-1)\Delta t & 0 \\ -r(k-1)\Delta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(k-1) \\ v_y(k-1) \\ \dot{v}_y(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x(k-1) \\ a_y(k-1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_x(k) \\ \dot{v}_y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \\ \dot{v}_y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

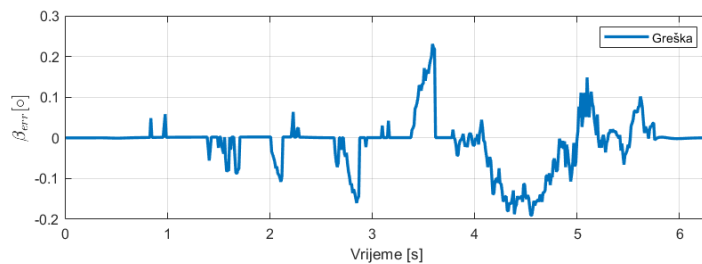
Valja primijetiti da je u ovako formuliranom modelu varijabla  $\dot{v}_y$  proglašena varijablom koja je u svakom koraku konstantna, odnosno jednaka prethodnoj vrijednosti. Uzimajući u obzir da Kalmanov filter pretpostavlja stohastičku raspodjelu greške, estimacija njene derivacije  $\ddot{v}_y$  će se nasumično mijenjati, pa se u engleskoj terminologiji koristi naziv *random walk* varijabla. Provede li se analiza osmotrivosti pomoću postupka definiranog u potpoglavlju 4.2.1., dobiva se identičan rezultat kao i kod inicijalne verzije, odnosno

da je sustav osmotriv uz uvjet  $r \neq 0$ . Uz korekcije po pitanju kalibracijskih parametara, kao što su  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  matrice kovarijanci i pragova za detekciju ravne vožnje, sa zašumljenim signalima mjerenja na DLC proceduri dobivamo sljedeće rezultate:



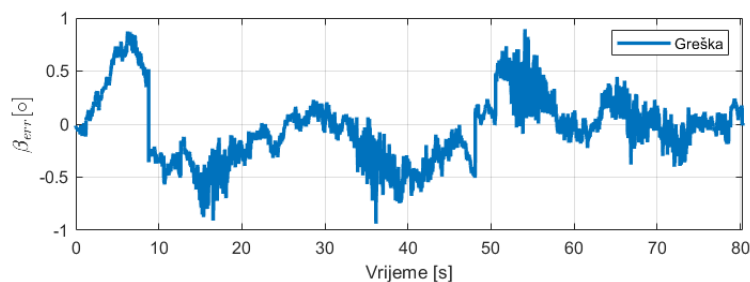
Slika 4.18: Performanse proširenog filtra na DLC proceduri

Vizualno 4.18 pokazuje dobre rezultate estimacije bočnog kuta klizanja, te se na slici 4.19 može vidjeti da je greška procjene bočnog kuta klizanja unutar  $\pm 0,25$  stupnjeva. Kao i kod ranijih analiza, pri namještanju pragova za detekciju ravne vožnje primarni je cilj da ju filtar ne detektira usred dinamičke procedure. Razlika u odnosu na situaciju kada  $v_y$  nije bila varijabla stanja jest što sada Kalmanov algoritam i nju filtrira, dok se u prethodnoj verziji ona računala numeričkom diferencijacijom iz trenutnog i prethodnog koraka estimacije. Stoga sada i njen estimat može biti bolji, te se onda značajno smanjuje i šansa da će algoritam tijekom dinamičnog manevra proglasiti ravnu vožnju, uz ishod da je estimirana bočna brzina jednala nuli. Na taj način dodatno se poboljšava i robusnost filtra, što je veoma bitno za konkretnu primjenu na vozilu.

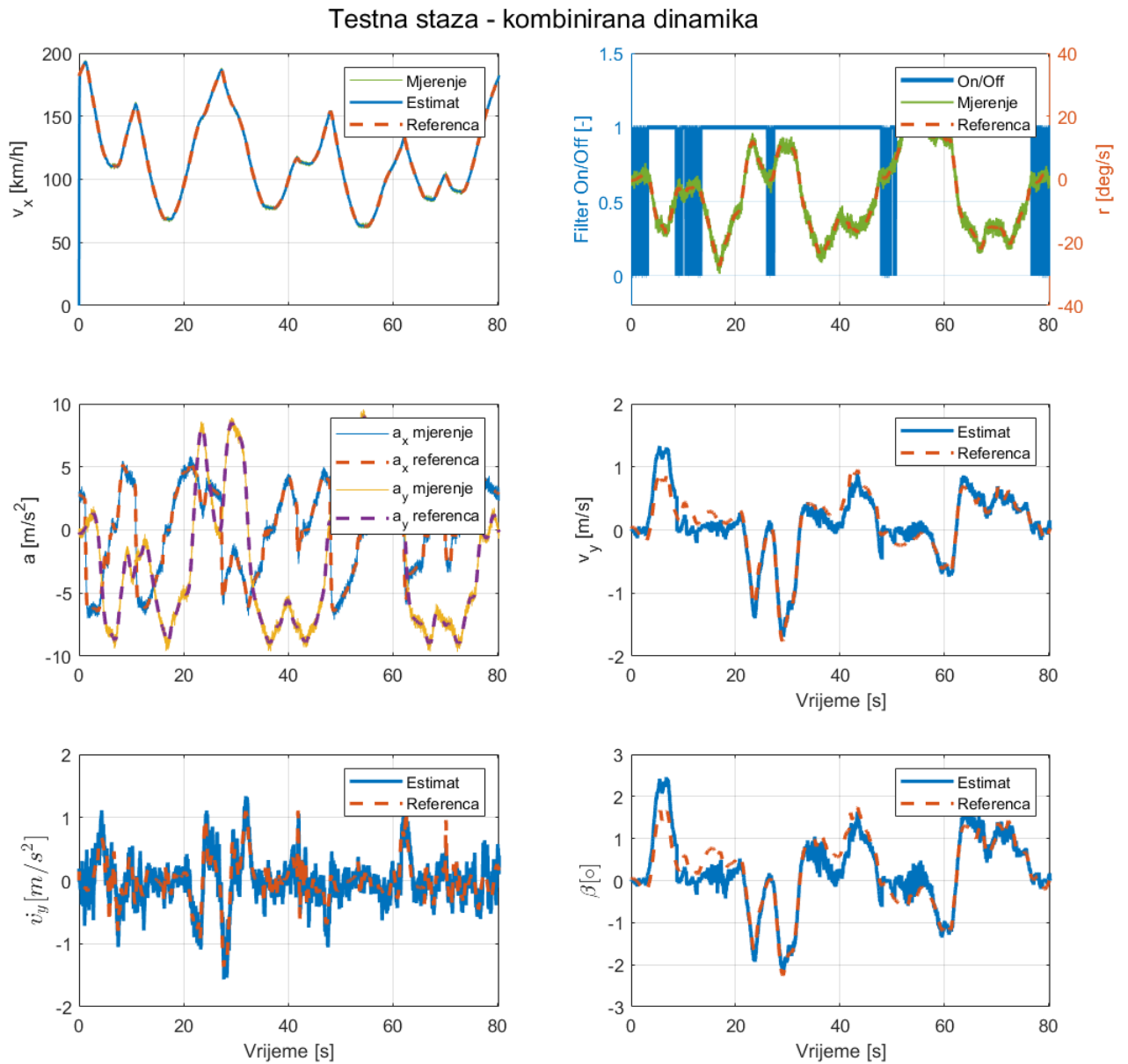


Slika 4.19: Greška procjene bočnog kuta klizanja na DLC proceduri

Uz iste parametre, te jednake iznose šumova gledano relativno na njihovu amplitudu, performanse filtra na proceduri kombinirane dinamike sa slike 4.5 prikazane su na slici 4.21. Iako je ključan signal kutne brzine skretanja vozila dosta zašumljen, estimator uspijeva pratiti referencu bočnog kuta klizanja, a greška procjene je unutar  $\pm 1$  stupnja, kao što je prikazano na slici 4.20.

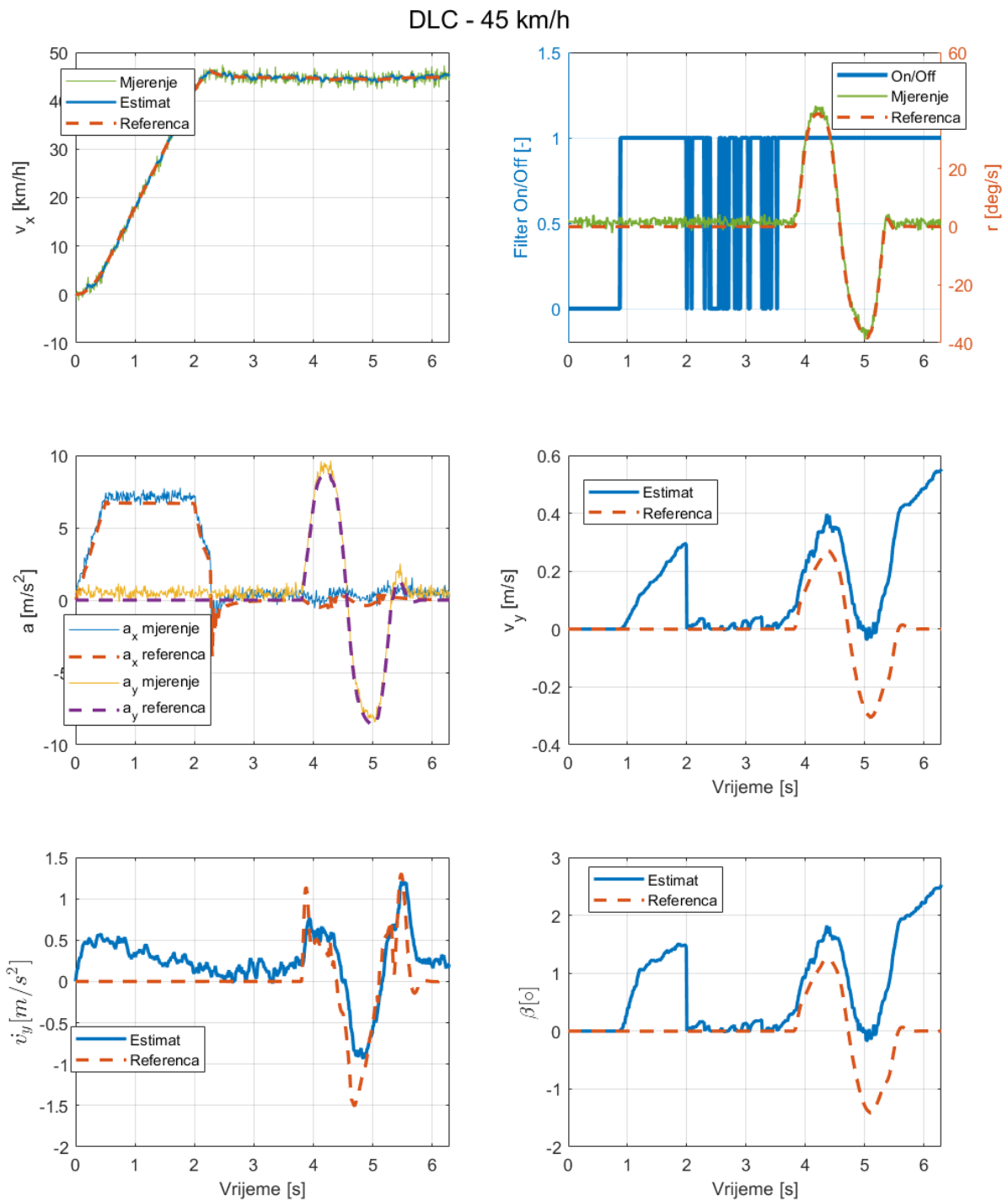


Slika 4.20: Greška procjene kuta klizanja na proceduri kombinirane dinamike



Slika 4.21: Performanse proširenog filtra na proceduri kombinirane dinamike

S druge strane, ukoliko se mjerenim signalima, odnosno brzini skretanja i akceleracijama, osim šuma doda i stanoviti mjerni posmak, performanse filtre se opet značajno pogoršavaju, kao što je prikazano na slici 4.22. Slično kao i kod inicijalne verzije filtra, zbog integracije greške sa senzora bočne akceleracije, procjena bočne brzine, pa onda i kuta klizanja vozila divergira.



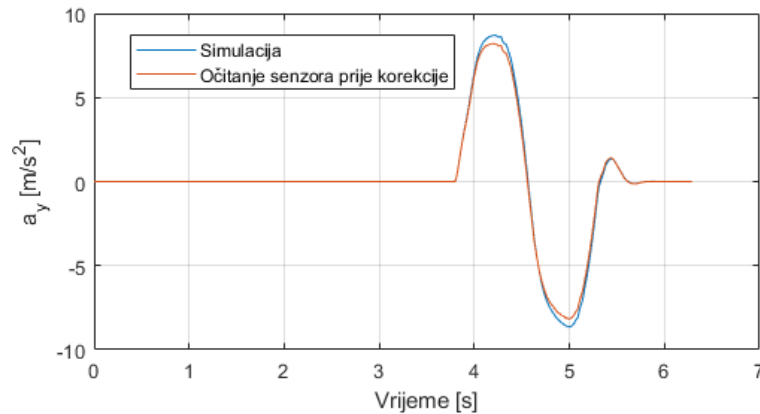
Slika 4.22: Performanse proširenog filtra na proceduri kombinirane dinamike sa dodanim posmakom na mjerenim siganlima

## 4.6. Kompenzacija kuta valjanja

Sljedeća bitna stvar koju treba uzeti u razmatranje jest razlika između signala iz simulacije i onog sa vozila. Kutna brzina skretanja i bočno ubrzanje su ključni signali za estimaciju varijabli stanja bočne dinamike vozila. Prema (2.20), za kutnu brzinu skretanja se zbog pretpostavke malih kuteva valjanja i poniranja može reći da je signal sa žiroskopa očitao u koordinatnom sustavu vozila približno jednak kutnoj brzini oko  $Z$  osi inercijskog koordinatnog sustava. S druge strane, signal bočnog ubrzanja sa akcelerometra na vozilu se može razlikovati za značajniji iznos od onoga u simulaciji, jer zbog valjanja ne detektira samo komponentu bočne akceleracije, već i komponentu gravitacijskog ubrzanja. Ukoliko je  $\Phi$  kut valjanja,  $a_y$  točno bočno ubrzanje iz referentne simulacije, a  $a_{y,meas}$  mjerni signal lateralnog akcelerometra instaliranog na vozilu, te  $g$  ubrzanje sile teže, uz koordinatni sustav kao na slici 3.2, može se pretpostaviti sljedeća veza:

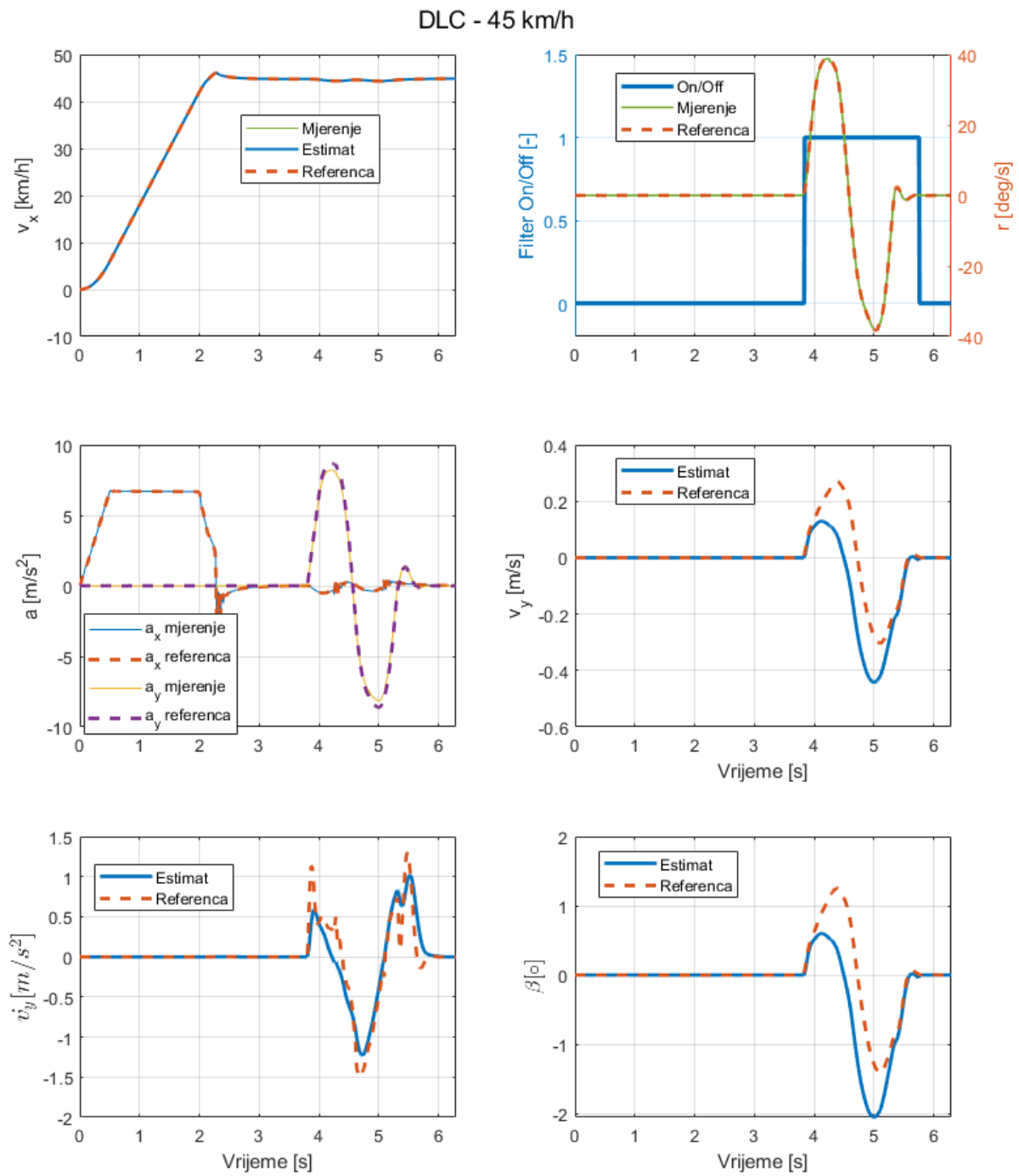
$$\begin{aligned} a_{y,meas} &= a_y \cos\Phi - g \sin\Phi \\ a_{y,meas} &= a_y - (1 - \cos\Phi)a_{y,sim} - g \sin\Phi \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ukoliko se razlika između mjerenog i stvarnog ubrzanja iz (4.15) prikaže grafički na slici 4.23, može se vidjeti da ona nije zanemariva.

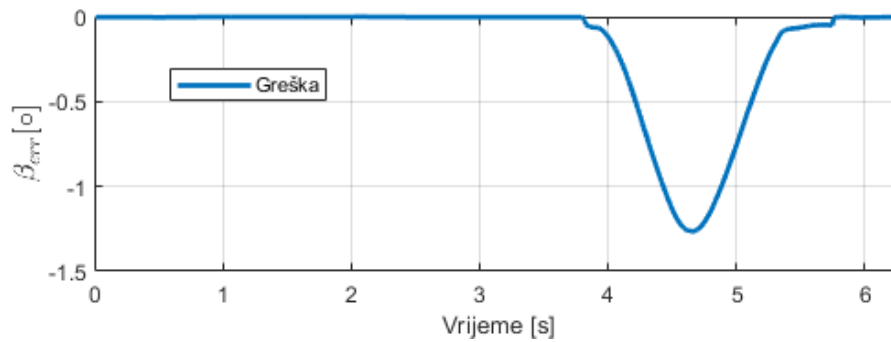


Slika 4.23: Greška u signalu bočnog ubrzanja sa senzora u odnosu na referencu

Ukoliko se takvo mjerenje bočnog ubrzanja unese u razrađeni filtar, njegove performansi na DLC proceduri i sa nezašumljenim signalima značajno opadaju, kao što je prikazano na slikama 4.24 i 4.25

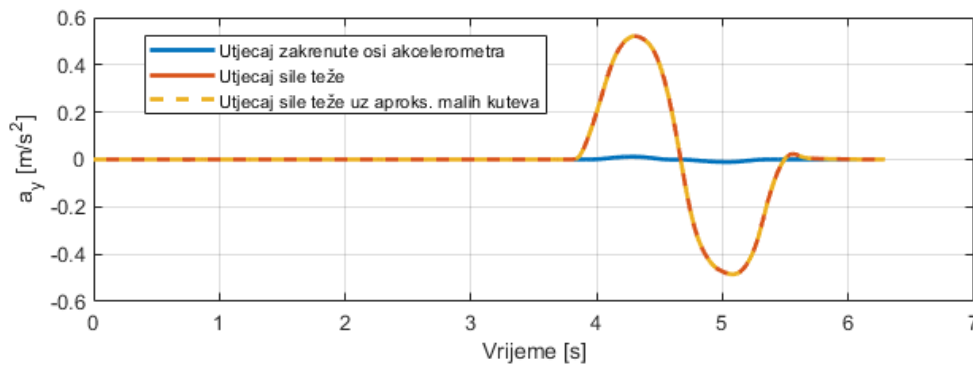


Slika 4.24: Performanse filtra sa nekorigiranim mjerenjem bočne akceleracije



Slika 4.25: Greška filtra sa nekorigiranim mjerenjem bočne akceleracije

Kako bi se odredio relativan utjecaj članova sa desne strane druge jednadžbe u (4.15) koji utječu na netočnost mjerenja, njihovi iznosi tijekom DLC procedure prikazani su na slici 4.26:



Slika 4.26: Usporedba utjecaja pojedinih komponenti na netočnost signala bočne akceleracije sa akcelerometra

Može se primijetiti da je utjecaj zakreta osi akcelerometra puno manji od utjecaja snimanja komponente sile teže. Isto tako se vidi da pretpostavka malih kuteva  $\sin\Phi \approx \Phi$ , ne unosi značajniju grešku za gravitacijsku komponentu, te se izraz (4.15) može pojednostaviti u:

$$a_{y,meas} \approx a_y - g\Phi \quad (4.16)$$

$$a_y \approx a_{y,meas} + g\Phi$$

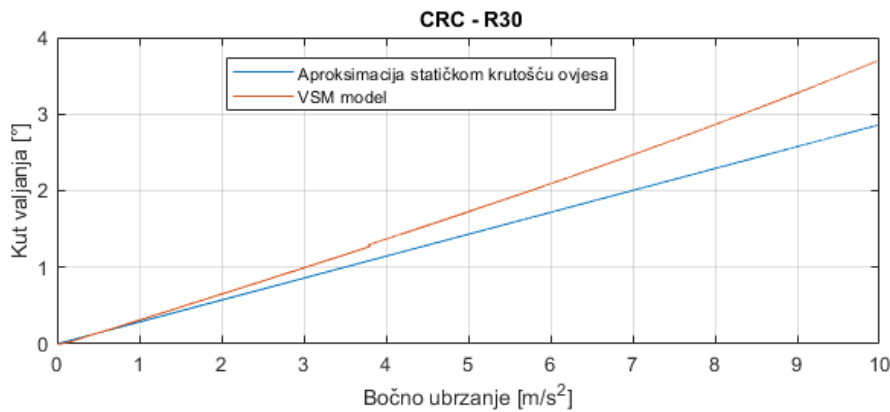
Kako bi se bez gubitka linearnosti modela kompenziralo mjerenje na vozilu sa kutem valjanja  $\Phi \neq 0$ , može se iz podataka o geometriji i ovjesu vozila, prema pojednostavljenoj



proceduri iz [5] izračunati gradijent valjanja  $\Phi_{ay}$ , time dobivajući iznos:

$$\Phi_{ay}/g = 2,81^\circ/g = 0,049rad/g \quad (4.17)$$

Usporedba tako dobivenog iznosa valjanja sa onim iz simulacije na CRC proceduri prikazana je na 4.27. U kontekstu modela namijenjenih upravljanju, linearno aproksimiran gradijent valjanja može biti jedan od kalibracijskih parametara za pojedino vozilo [2].



Slika 4.27: Usporedba iznosa valjanja iz simulacije i izračuna pomoću statičkog gradijenta valjanja

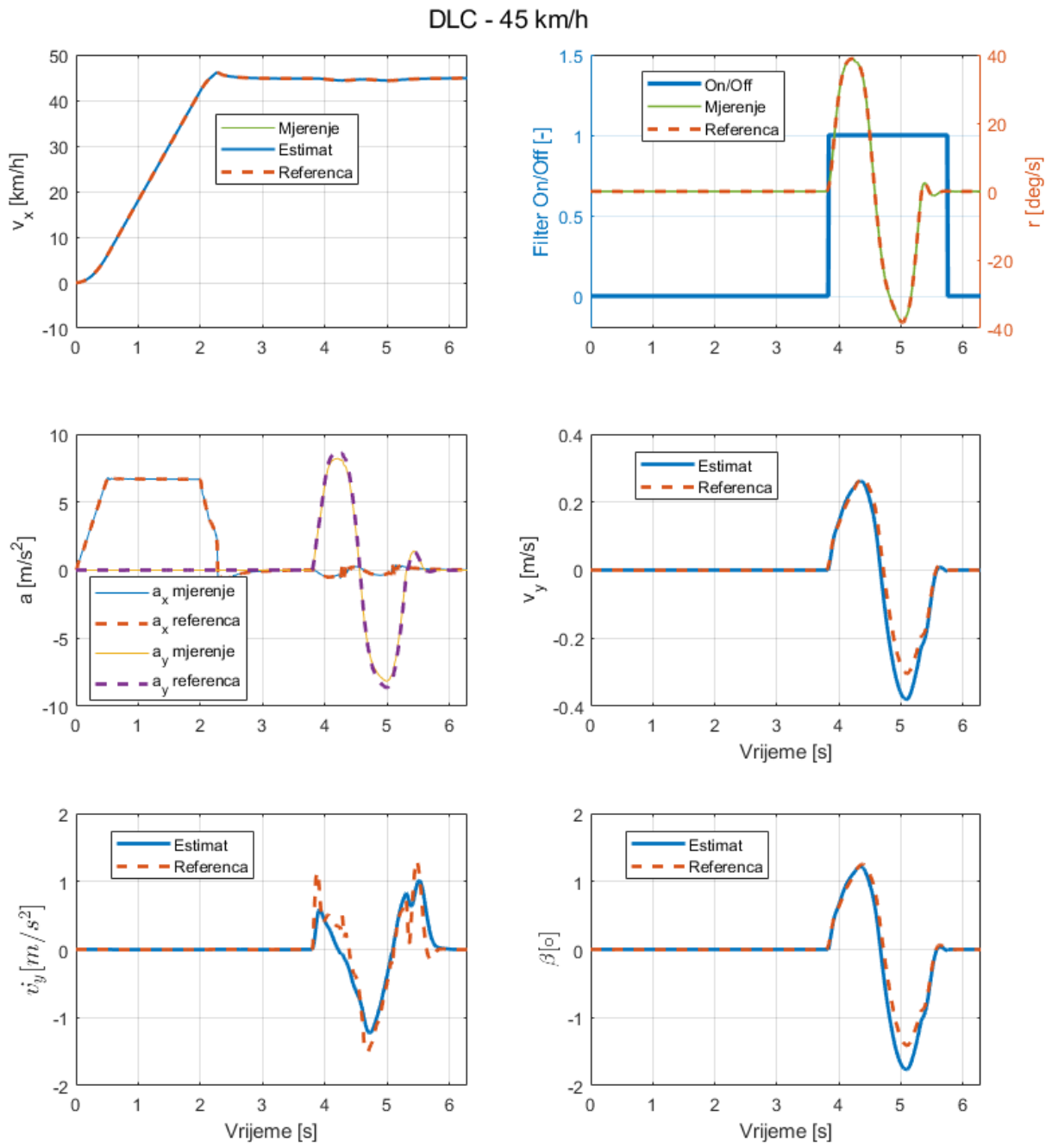
Ukoliko se onda iznos kuta valjanja iz jednadžbe (4.16) raspiše preko aproksimacije gradijentom te uvrsti iznos iz (4.17), dobiva se:

$$\begin{aligned} a_y &\approx a_{y,meas} + g\Phi_{ay}a_y \\ a_y &\approx a_{y,meas} + 0,049a_y \end{aligned} \quad (4.18)$$

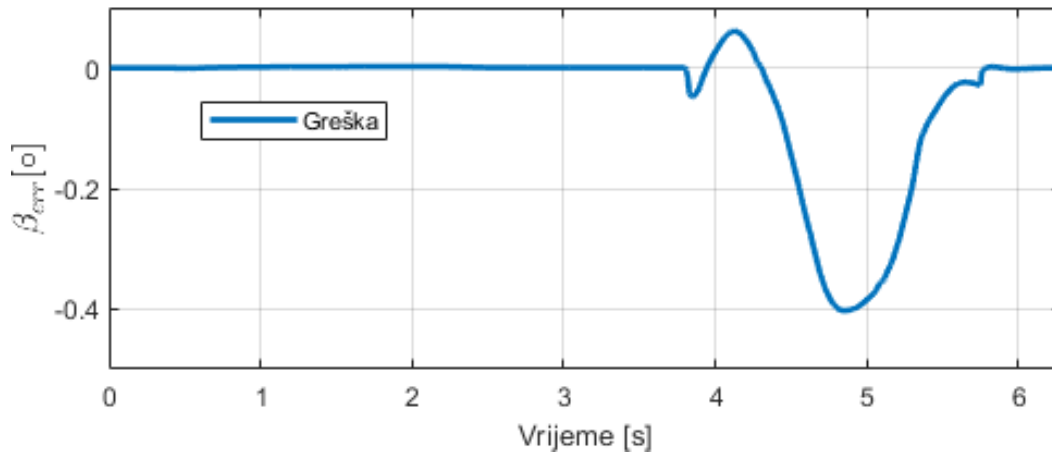
što nakon jednostavne matematičke manipulacije daje:

$$a_y \approx 1,0515a_{y,meas} \quad (4.19)$$

Nakon što se na taj način jednostavna korekcija implementira u filtar, performanse se značajno poboljšavaju, kao što je prikazano na slici 4.28. Slika 4.29 pokazuje da je sa idealno nezašumljenim signalima greška na DLC proceduri ispod  $\pm 0,5$  stupnja. Za bolju kompenzacije kuta valjanja potrebno bi bilo opisivati njegovu dinamiku naprednijim modelima koji su izvan dosega ovog rada.



Slika 4.28: Performanse filtra sa korigiranim mjerenjem bočne akceleracije



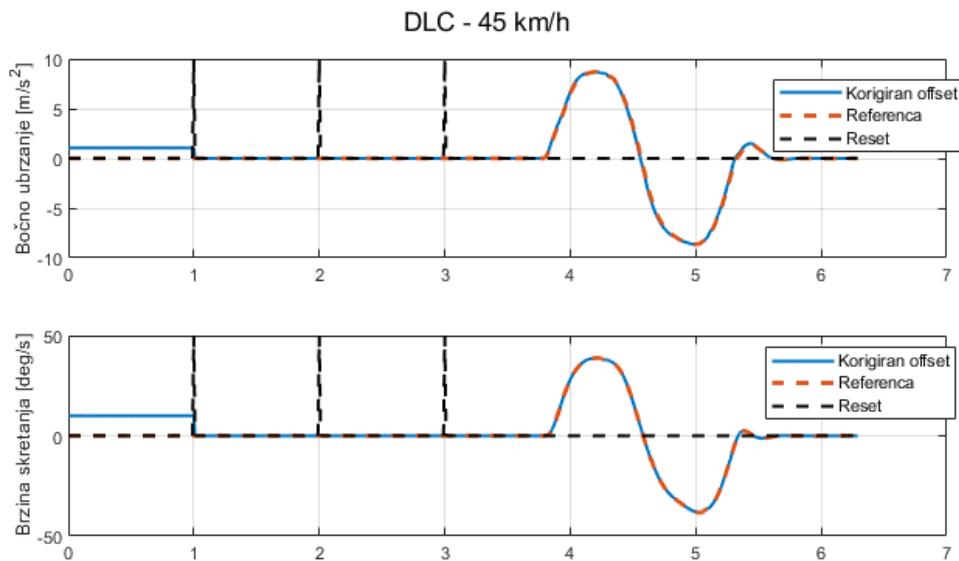
Slika 4.29: Greška filtra sa korigiranim mjerenjem bočne akceleracije

## 4.7. Kompenzacija mjernog posmaka sa senzora

Sljedeća greška mjerenih signala koju je potrebno kompenzirati jest statički posmak (engl. *offset*). On može proizlaziti iz električke greške senzora, ali i iz nagiba ceste ili jednostavno nepravilnosti sa osima vozila zbog nesavršene montaže. U ovom radu nije razmatran posmak zbog nagiba ceste koji se može mijenjati sa vremenom, nego samo onaj konstantan tijekom cijelih voznih procedura. Također, budući da je idejna konfiguracija razrađenog filtra sadrži prethodnu estimaciju uzdužne brzine koja rješava posmak signala uzdužne akceleracije, razmatrat će se posmaci na signalima ključnima za estimaciju varijabli stanja bočne dinamike vozila: kutna brzina skretanja  $r$  i bočno ubrzanje  $a_y$ .

Kao najefikasnije rješenje naprije pada na pamet iskoristiti detekciju ravne vožnje iskoristenu za proglašavanje estimirane bočne brzine jednakom nuli. Međutim, budući da je tamo iskorišten signal kutne brzine skretanja kao izravan pokazatelj ravne vožnje, nema smisla za detekciju posmaka koristiti isti signal čiji se posmak želi kompenzirati. Stoga su u ovom radu iskorišteni signali brzine okretanja kotača. Također, budući da je statički posmak senzora po definiciji (približno) konstantan, moguće je postaviti kriterije za detekciju ravne vožnje puno konzervativnije od onih kod estimacije bočne brzine. Stoga je u ovom radu uzet kriterij da razlike brzine vrtnje kotača po pojedinoj osovini moraju biti manje od praga tijekom 100 sukcesivnih koraka, što odgovara vremenu od

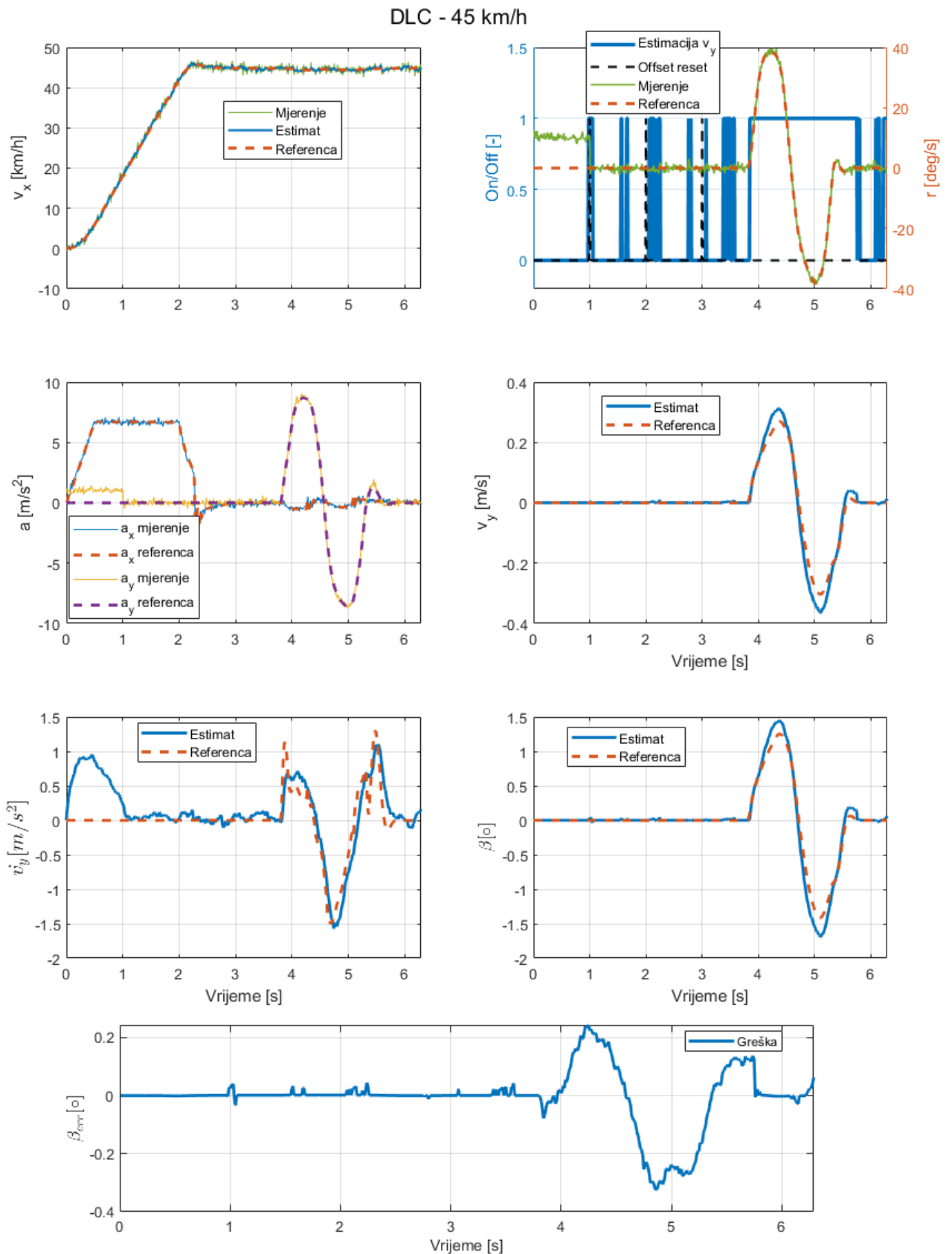
jedne sekunde. Kako bi se prilikom izračuna posmaka na sensorima uzeo u obzir i šum, iznos očitani sa senzora se zbraja i uprosječuje tijekom čitavog vremenskog perioda detektirane ravne vožnje. Na kraju perioda rane vožnje se uprosječeni signal onda proziva posmakom i oduzima od mjenenog signala za sve kasnije vremenske korake, kao što je za DLC proceduru prikazano na slici 4.30.



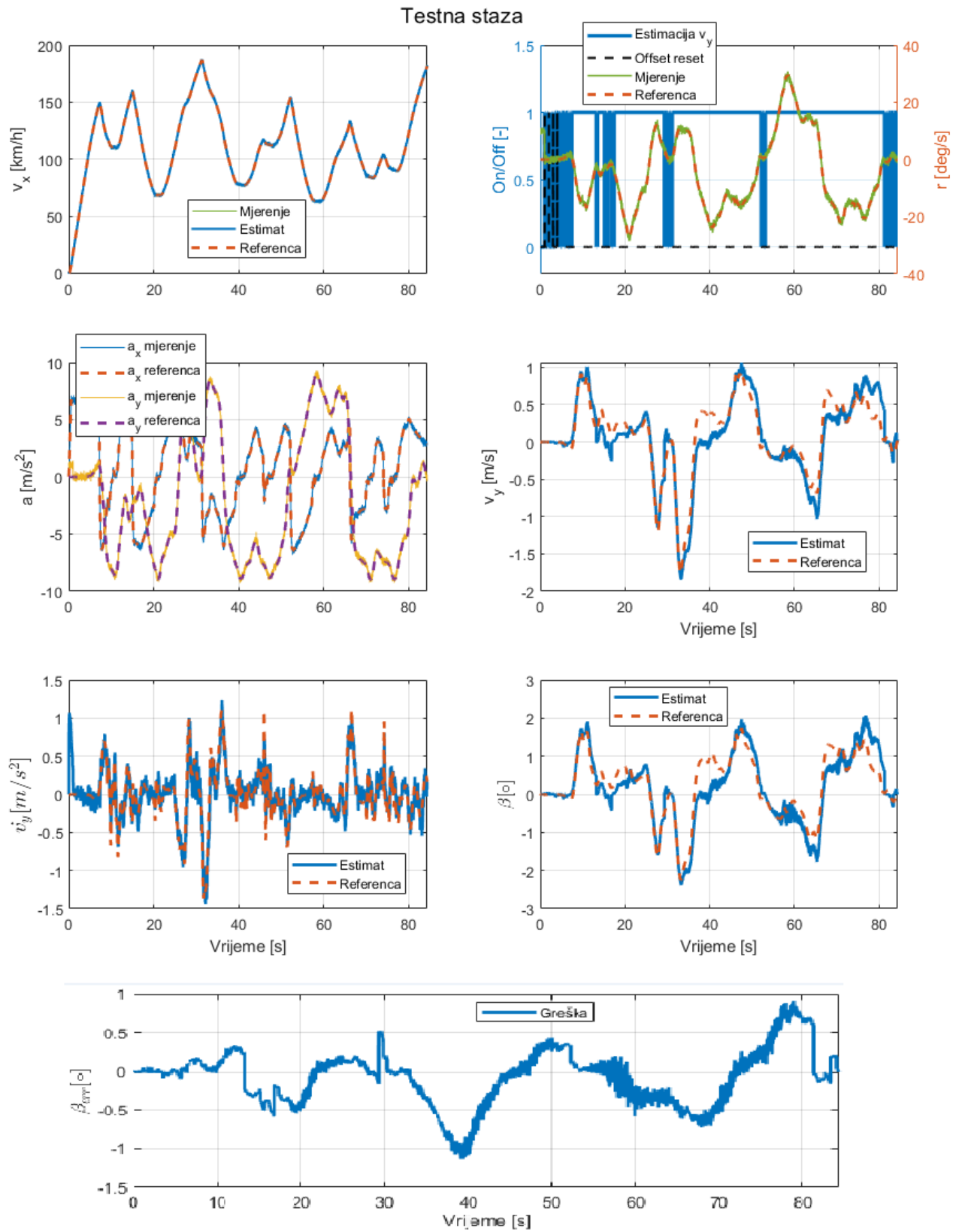
Slika 4.30: Princip kompenzacije statičkog posmaka na sensorima

## 4.8. Konačne performanse filtra

Ukoliko se u prethodnim potpoglavljima razrađeni filter doda i kompenzacija valjanja vozila, kao i zašumljeni signali sa statičkim posmakom, dobiju se konačni rezultati procjene kuta bočnog klizanja vozila. Slika 4.31 pokazuje da za vrijeme kratkotrajnih pobuda bočne dinamike vozila filter radi vrlo dobro, te daje rezultate estimacije unutar  $\pm 0,35$  stupnja od referentnog punog modela. Performanse filtra su slabije u uvjetima duljih pobuda bočne dinamike bez izraženih ravnih dijelova, kao što je zavojita testna staza (slika 4.32). Graf dolje lijevo na istoj slici pokazuje kako je derivacija bočne brzine prilično dobro estimirana, ali tijekom duljih zavojitih sektora se i mala greška zbog integracije nakupi, rezultirajući u većoj grešci estimacije od  $\pm 1$  stupnja.



Slika 4.31: Konačne performanse filtra na DLC proceduri



Slika 4.32: Konačnog filtra na DLC proceduri

## 5 | Zaključak

Kod estimacije varijabli stanja vozila razlikuju se dva pristupa, ovisno modelira li se njegova kinematika ili dinamika ili ne. Nadalje, u pristupu kod kojeg se vozilo modelira mogu se kinematskim modelima uspostavljati veze između varijabli stanja gibanja, a mogu se i korištenjem dinamičkih modela opisivati uzroci gibanja vozila. Dominantan izvor sila na vozilo dolazi od podloge kroz gume, te upravo opis te interakcije predstavlja najveće izazove kod dinamičkih modela vozila namijenjenih upravljanju. Kod potpuno lineariziranih dinamičkih modela vozila pretpostavlja se linerana veza između bočnog kuta klizanja gume i bočne sile koju ona izvršava na vozilo.

Nakon što su u prvom poglavlju klasificirani gore spomenuti pristupi modeliranju, u drugom poglavlju su detaljnije opisani bicikl model i planarni dvotračni model vozila, skupa sa svim izrazima potrebnim za sintezu pojedinog modela u simulacijskom okruženju. Nadalje, predstavljen je trodimenzionalan model gibanja šasije, te je zaključeno da je za njegove primjene potrebno imati podatak o kutnim ubrzanjima šasije, što je iz perspektive modela namijenjenog upravljanju nepoželjno zbog numeričke derivacije i naglašavanja visokofrekventnog šuma. Također, ukratko je predstavljen i puni model vozila u programu *AVL VSM* koji je kasnije korišten kao referenca za usporedbu reduciranih modela te analizu rada Kalmanova filtra. Isto tako, u drugom poglavlju diskutirane su konfiguracije senzora korištenih za estimaciju varijabli stanja gibanja vozila, te su shodno tome opisana dva pristupa procjeni kuta bočnog klizanja vozila.

U trećem poglavlju su prethodno izvedeni linearizirani bicikl model te kinematski model implementirani u programskom paketu *Matlab Simulink*, te su s obzirom na referentni puni model vozila u programskom paketu *VSM* uspoređeni njihovi odzivi na pobude

lateralne dinamike kroz definirane cikluse vožnje.

Naposljetku, u četvrtom poglavlju opisan je rad Kalmanova filtra, te je sintetiziran filter za estimaciju bočnog kuta klizanja temeljen na planarnom kinematskom modelu vozila. Nakon analize osmotrivosti tako formuliranog filtra, ispitane su njegove performanse sa simulacijskim ulaznim podacima. Također, radi povećanja robusnosti inicijalno formuliranog filtra razrađene su njegove nadogradnje u vidu dodavanja paralelnog seta matrica pojačanja i kovarijanci pogreške estimiranja za rad u uvjetima detektirane ravne vožnje, te su osmišljeni načini za kompenzaciju valjanja vozila te šuma i posmaka mjerenja.

Uzevši sve navedene efekte u obzir, pokazano je da ovakav filter može dati rezultate sa greškom od  $\pm 0,35$  stupnjeva za kraće lateralne pobude, odnosno otprilike  $\pm 1$  stupanj za dulje pobude bočne dinamike, u vidu duljih perioda zavojite vožnje na simuliranoj testnoj stazi.



# Literatura

- [1] Xianjian Jin; Guodong Yin; Nan Chen. Advanced estimation techniques for vehicle system dynamic state: A survey. *Sensors*, 2019.
- [2] Donald Selmanaj; Matteo Corno; Giulio Panzani; Sergio M. Savaresi. Vehicle sideslip estimation: A kinematic based approach. *Control Engineering Practice* 67, 2017.
- [3] Massimo Giuglianni. *The Science of Vehicle Dynamics*. Springer Verlag, second edition, 2018.
- [4] Hongyan Guo; Dongpu Cao; Hong Chen; Chen Lv; Huaji Wang and Siqu Yang. Vehicle dynamic state estimation: state of the art schemes and perspectives. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, Vol. 5, No. 2, 2018.
- [5] William F. Milliken; Douglas L. Milliken. *Race Car Vehicle Dynamics*. SAE International, 1995.
- [6] Carroll Smith. *Tune to Win*. Aero Publishers Inc, 1978.
- [7] Uwe Kiencke; Lars Nielsen. *Automotive Control Systems*. Springer Verlag, second edition, 2005.
- [8] Joško Deur. *Automobilski mehatronički sustav - podloge za predavanja*, 2020.
- [9] Carlo Innocenti. Questioning the notions of roll center and roll axis for car suspensions. Technical report, University of Modena and Reggio Emilia, 2007.

- [10] Stjepan Jecić. *Mehanika II*. Tehnička knjiga d.d., 1995.
- [11] Spahija; Švec; Matuško; Ileš. Successive linearization based predictive vehicle torque vectoring. *2019 International Conference on Electrical Drives and Power Electronics*, 2019.
- [12] Anil Kunnappillil Madhusudhanan. *Lateral vehicle dynamics control and vehicle state estimation: A tyre force measurement based approach*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2016.
- [13] AVL. Avl-vsm manual, 2019.
- [14] Masato Abe. *Vehicle Handling Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2009.
- [15] J.R. Ellis. *Vehicle Dynamics*. London Business Books Limited, 1969.
- [16] C.H. Suh. Suspension analysis with instant screw axis theory. *Society of Automotive Engineers Inc.*, 1991.
- [17] Mirko Husnjak. Teorija mehanizama, bilješke sa predavanja, 2001.
- [18] Mario Hrgetić. *Vehicle Dynamics State Estimation Based On Sensor Fusion By Adaptive Kalman Filter*. PhD thesis, Faculty of Electrical Engineering and Computing, 2015.
- [19] Igor Velčić Mihael Alapić. Izvod jednadžbi diskretnog kalmanovog filtera. *Osječki matematički list 18*, 2018.
- [20] Keaton Holappa Matthew B. Rhudy, Roger A. Salguero. A kalman filtering tutorial for undergraduate students. *International Journal of Computer Science and Engineering Survey (IJCSES) Vol.8, No.1*, 2017.
- [21] Filip Kolarić. Estimacija uzdužne brzine vozila korištenjem adaptivnog kalmanovog filtera, 2022.
- [22] Danijel Pavković. *Automotive powertrain state estimation with control applications*. PhD thesis, Department of Robotics and Automation of Manufacturing Systems, University of Zagreb, 2007.