

# Programski paket za optimalno upravljanje linearnim dinamičkim sustavima temeljem podataka

---

**Arandia-Krešić, Srećko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:287502>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-18**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Srećko Arandia-Krešić**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Andrej Jokić

Student:

Srećko Arandia-Krešić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se prof. dr. sc. Andreju Jokiću na pomoći, korisnim savjetima, pristupačnosti i temeljitim pregledima, čiji su zaključci svakako oplemenili rad.

Srećko A.K.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	602-04/21-6/1
Ur. broj:	15-1703-21

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **SREĆKO ARANDIA-KREŠIĆ** Mat. br.: 0035204901

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Programski paket za optimalno upravljanje linearnim dinamičkim sustavima temeljem podataka**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Software package for optimal data-based control of linear dynamical systems**

Opis zadatka:

Kako tehnički sustavi postaju sve kompleksniji, a podatci o radu sustava sve dostupniji u velikim količinama (zbog razvoja senzora, elektronike i informacijsko-komunikacijskih tehnologija), danas je sve više istraživanja u području automatske regulacije usmjereno k razvoju teorije upravljanja dinamičkim sustavima izravno na temelju podataka (eng. data-based control). Kad se govori o podacima, ovdje se misli o mjerenjima ulaznih i pripadajućih izlaznih signala u sustavu. Cilj ovakvog inovativnog pristupa upravljanju je zaobilazanje potrebe za matematičkim modelom dinamike sustava, kojeg tipično čini skup diferencijalnih jednačini te koji je početna točka za sintezu regulatora u klasičnim pristupima upravljanju (eng. model-based control). Osnovni cilj ovog rada je kreirati programski paket u MATLAB-u za upravljanje linearnim dinamičkim sustavima temeljem podataka.

U radu je potrebno ostvariti sljedeće:

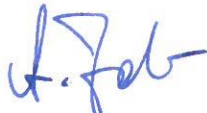
1. Iz pregleda literature ukratko prikazati osnovne ideje pristupa upravljanju na temelju podataka koji za predikciju ponašanja sustava koriste tzv. Willemsovu fundamentalnu lemu (Jan Willems et al. „A note on persistency of excitation“, Systems and Control Letters, 2005.).
2. U MATLAB-u napisati programski paket za optimalno prediktivno upravljanje temeljeno na podacima, a koji koristi Willemsovu fundamentalnu lemu kao alat za predikciju.
3. Na odabranim primjerima ilustrirati efikasnost ove metode upravljanja te je usporediti s rezultatima optimalnog modelskog prediktivnog upravljanja na istim sustavima. Podatke potrebne za upravljanje potrebno je dobiti simulacijama na modelu sustava. Prilikom uspoređivanja, potrebno je ispitati utjecaj vanjskih poremećaja na ponašanje sustava u zatvorenom upravljačkom krugu.
4. Razvijeni programski paket treba predati u elektronskom obliku uz dokumentaciju za njegovo korištenje.

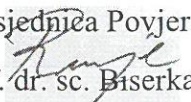
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
30. rujna 2021.

Rok predaje rada:  
2. prosinca 2021.

Predviđeni datum obrane:  
13. prosinca do 17. prosinca 2021.

Zadatak zadao:   
prof. dr. sc. Andrej Jokić

Predsjednica Povjerenstva:  
  
prof. dr. sc. Biserka Runje

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA I KRATICA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. O kontekstu problema .....	1
1.2. O literaturi .....	3
1.3. O strukturi rada .....	4
2. MODELSKO PREDIKTIVNO UPRAVLJANJE.....	6
3. BIHEVIORALNI PRISTUP DINAMIČKIH SUSTAVA .....	10
3.1. Teorija sustava bihevioralnog pristupa .....	10
3.2. Diskretna domena .....	11
3.3. Kontinuirana domena .....	13
3.4. Dinamički sustavi u bihevioralnom pristupu .....	13
3.4.1. Mjerljivost.....	15
3.4.2. Upravljivost.....	16
3.4.3. Prostor stanja.....	18
4. FUNDAMENTALNA LEMA.....	19
4.1. Invarijantne konstante LTI sustava .....	19
4.2. Anihilatori ponašanja .....	20
4.3. Fundamentalna lemma .....	21
5. SINTEZA DATA-BASE ALGORITMA .....	22
5.1. Simulacija dinamičkog sustava temeljena na podacima.....	22
5.1.1. Primjeri simulacija podacima .....	23
5.1.1.1. Estimacija stanja napunjenosti (SoC) litij ionske baterije .....	23
5.1.1.2. Simulacija elastično spregnutog sustava.....	26
5.2. Prediktivno upravljanje (DeePC algoritam).....	27
5.2.1. Nominalni DeePC – fiksni horizont .....	27
5.2.2. DeePC algoritam u zatvorenoj petlji .....	29
5.2.3. DeePC-MPC usporedba .....	31
5.3. Stacionarna točnost .....	32
5.3.1. Primjer stacionarne točnosti – sustav za bušenje .....	34
5.4. Robusnost.....	38
5.4.1. O robusnosti MPC-a .....	38
5.4.2. Robusnost DeePC-a .....	38
5.4.2.1. Implementacija preko Page matrice.....	45
6. PROGRAMSKI PAKET .....	47
7. ZAKLJUČAK.....	49
7.1. Zaključak rada.....	49

---

7.2. Buduća razmatranja.....	50
8. PRILOZI.....	51
8.1. Računalni paket.....	51
8.1.1. Ulaz u algoritam.....	51
8.1.2. Optimizacija.....	51
8.2. Kôd.....	53
8.2.1. Launcher .....	53
8.2.2. DeePC .....	55
8.2.3. RobDeePC.....	57
8.3. Modeli .....	60
8.3.1. Model baterije .....	60
8.3.2. Model sustava elastično spregnutih masa .....	60
8.3.3. Model bušećeg sustava .....	61
LITERATURA.....	62

**POPIS SLIKA**

Slika 1. Upravlјivost sustava.....	17
Slika 2. Aksiomi stanja.....	18
Slika 3 Strujni krug baterije [12].....	24
Slika 4 Ulazni i izlazni podatci za kreiranje Hankelove matrice .....	24
Slika 5. Estimacija napunjenosti baterije za režim punjenja .....	25
Slika 6 Estimacija napunjenosti baterije za režim pražnjenja .....	25
Slika 7 Elastično spregnuti sustav 3 mase.....	26
Slika 8 Simulacija elastično spregnutog sustava 3 mase.....	26
Slika 9 DeePC algoritam u zatvorenoj petlji .....	30
Slika 10 MPC-DeePC usporedba .....	31
Slika 11 MPC-DeePC usporedba odziva na poremećaj .....	32
Slika 12 Model sustava za bušenje iz [13] .....	34
Slika 13 Inicijalni podatci i rezultati simulacije bušećeg sustava .....	35
Slika 14 Rezultati simulacije bušećeg sustava kod pojave momenta tereta.....	36
Slika 15 Rezultati simulacije bušećeg sustava kod pojave momenta tereta i šuma .....	37
Slika 16 Usporedba robusnog i nominalnog DeePC-a.....	43
Slika 17 Odziv Robusnog DeePC-a kod izraženog šuma .....	44
Slika 18 Filtracija Page matricom .....	46
Slika 19 Simulink model baterijskog sustava .....	60
Slika 20 Simulink linearni model baterije.....	60



**POPIS TABLICA**

Tablica 1 Parametri simulacije nominalnog DeePC-a .....	30
Tablica 2 Amplitude šuma za simulaciju regulacije brzine vrtnje sustava za bušenje.....	36
Tablica 3 Težinski parametri Robusnog DeePC-a .....	43
Tablica 4 Parametri elastično spregnutog sustava 3 mase .....	60
Tablica 5 Parametri modela bušećeg sustava .....	61

## POPIS OZNAKA I KRATICA

Oznaka	Opis
$A$	Matrica sustava
$B$	Matrica ulaza
$C$	Matrica izlaza
$D$	Matrica prijenosa ulaza na izlaz
$\bullet$	Proizvoljni izraz
$\mathfrak{B}$	Ponašanje sustava
$\mathfrak{B}_{full}$	Potpuno ponašanje sustava
$w$	Manifestne varijable
$x_p$	Latentne varijable
$x$	Vektor stanja
$\ell_k$	Diskretni Lagrangian arbitrarne funkcije cilja
$\mathbf{p}$	Izlazna kardinalnost
$\mathbf{m}$	Ulazna kardinalnost
$\mathbf{n}$	Kardinalnost stanja
$L$	Minimalni lag ker. rep sustava
$O_T$	Matrica mjerljivosti s lagom $T$
$H(\tau)$	Impulsni odziv
$\lambda_{max}(\bullet)$	Najveća svojstvena vrijednost (matrice) $\bullet$
$\lambda_{min}(\bullet)$	Najmanja svojstvena vrijednost (matrice) $\bullet$
$\Sigma_{LTI}$	Skup potpunih LTI sustava
$\wedge$	Konkatenacija (povezanost)
$\prec$	„manje od“ prema konusu pozitivno semidef. matrica
$\preceq$	„manje ili jednako“ prema konusu pozitivno semidef. matrica
$ \bullet $	Apsolutna vrijednost $\bullet$
$\ \bullet\ $	Općenita norma
$\ \bullet\ _1$	$p_1$ vektorska norma
$\ \bullet\ _2$	$p_2$ vektorska norma (Euklidska norma)
$\ \bullet\ _\infty$	$p_\infty$ vektorska norma (beskonačna norma)
$\bullet^*$	Optimalni $\bullet$
$\otimes$	Kroneckerov produkt
$\mathcal{X}$	Skup dopuštenih stanja
$\mathcal{U}$	Skup dopuštenih ulaza
$\mathcal{Y}$	Skup dopuštenih izlaza
$\mathcal{D}$	Skup nesigurnosti ili poremećaja
$\mathbb{S}_+$	Skup pozitivno semidefinitnih matrica
$\mathbb{S}_{++}$	Skup pozitivno definitnih matrica

$\mathbb{Z}_+$	Skup ne-negativnih brojeva
$\mathbb{Z}_{++}$	Skup pozitivnih brojeva
$\mathbb{R}_+$	Skup realnih pozitivnih brojeva
$\mathbb{C}$	Skup konveksnih brojeva
$\mathcal{L}_2$	Skup Lebesgue integrabilnih funkcija prema 2. normi
$\mathcal{C}$	Skup konveksnih skupova
$\mathcal{C}_f$	Skup konveksnih funkcija
$\mathbb{R}^{* \times *}[\xi]$	Skup matričnih polinoma s varijablom $\xi$
$\mathbb{R}^*[\xi]$	Skup vektorskih polinoma s varijablom $\xi$
$\mathbb{T}$	Skup nezavisnih varijabli
$\Leftrightarrow$	Obostrana implikacija
$\text{colspan}(\bullet)$	RRazapinjući vektorski prostor stupava (matrice) $\bullet$
$\mathcal{H}_L(\bullet)$	Hankelova matrica ranga $L$
$\mathcal{P}$	Page matrica
$\Sigma$	Dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti
$\text{dom}(\bullet)$	Domena (funkcije) $\bullet$
$\text{rank}(\bullet)$	Rang (matrice) $\bullet$
$\text{diag}(\bullet)$	Dijagonalna matrica s (vektorom) $\bullet$ kao dijagonalom
$\text{eig}(\bullet)$	Vektor svojstvenih vrijednosti (matrice) $\bullet$
$\text{col}(\bullet)$	Stupčani vektor s elementima $\bullet$
$\text{leftker}(\bullet)$	Lijevi kernel
$A \rightarrow B$	Funkcija iz <i>prostora</i> $A$ u <i>prostor</i> $B$
$A \rightarrow B$	<i>Varijabla</i> $A$ teži <i>varijabli</i> $B$
OP	Optimizacijski problem
LTI	Vremenski invarijantan sustav (eng. <i>Linear-time-invariant</i> )
PS	Prostor stanja
Ker. rep.	Kernel reprezentacija

---

**SAŽETAK**

Rad će prvotno predstaviti bihevioralni pristup teoriji upravljanja, kao polazišnu točku „data-based“ sinteze na temelju tzv. fundamentalne leme. Kao jedan od modernijih primjena bit će naglašeno optimalno prediktivno upravljanje na temelju podataka, kao alternativa klasičnom Modelskom prediktivnom upravljanju (eng. *Model Predictive Control* - MPC). Na većem broju primjera će se pokazati sažetost identifikacije sustava na temelju fundamentalne leme, te će se na bazi simulacija usporediti s istom temeljenom na modelu.

Sekundarno, razvit će se algoritam koji za proizvoljni diskretni linearni vremenski-invarijantni sustav u prostoru stanja, za proizvoljnu referentnu trajektoriju, korak diskretizacije i težinske parametre, na temelju *offline* podataka generira vektorski prostor svih mogućih trajektorija sustava, te *online* identificira inicijalno stanja poznavanjem prethodnih izlaza, nakon kojeg slijedi generiranje optimalne trajektorije na pomičnom horizontu - *DeePC* (eng. *Data-enabled predictive control*) algoritam. Dodatno, u navedeni algoritam bit će integrirano i robusno djelovanje, na temelju regularizacijskih varijabli u funkciji cilja (robustifikacija), s namjerom da se obuhvate i nesigurnosti u identificiranom modelu, primjerice zbog utjecaja šuma. Pokazat će se i uvjeti na garanciju performansi takvog robusnog djelovanja.

Ključne riječi: *bihevioralni pristup, fundamentalna lema, podatci, Modelsko prediktivno upravljanje, DeePC, robustifikacija, nesigurnost*

## SUMMARY

The thesis will firstly present behavioral approach to control theory, as a beginning setpoint for data-based synthesis based on fundamental lemma. As one of the more modern approaches, the emphasis will be on predictive optimal control based on data, as an alternative to Model predictive control (MPC). The simplicity of system identification based on fundamental lemma will be shown on more examples, and the comparison with model-based identification will be made.

Secondly, the thesis shall develop an algorithm that, for a given arbitrary controllable linear time-invariant (LTI) discrete system in state space, reference trajectory and tuning parameters, generates the span of vector space of all possible system trajectories of a system based on offline data, identifies an initial state based on online measurements, and produces an optimal trajectory on finite horizon – DeePC (Data-enabled predictive control). Additionally, a robust control based on regularization variables in cost function (robustification) will be integrated into the algorithm, with a goal of covering the uncertainty in identified model, for example caused by noise. The performance guarantees for such robust control will be given.

*Key words: behavioural approach, fundamental lemma, data, Model predictive control, DeePC (Data-enabled predictive control), robustification, uncertainty*

# 1. UVOD

## 1.1. O kontekstu problema

Suvremena teorija upravljanja može se podijeliti na upravljanje temeljeno na modelu, te ono na temelju podataka. Konkretnije, pod potonjim se smatraju *ulazno-izlazni* podatci sustava. Iako su nedostaci sekundarnog pristupa dobro poznati, on ima i značajne prednosti, što je motiviralo pozamašan broj suvremenih metoda [21], ne zanemarujući pri tome u praksi najčešći oblik „*bezmodelske*“ regulacije – PID regulatore. Glavna prednost pristupa pomoću podataka je sama činjenica da sinteza regulatora neće ovisiti o modelu sustava. Nadalje, ta činjenica se prenosi na tezu da svi zahtjevi regulacije (stabilnost, stacionarna točnost itd.) neće biti pod utjecajem modela. Gornji zaključci klasificirani su kao *prednosti* zbog najmanje 2 temeljna zahtjeva koja pristup temeljen na modelu često nije u stanju ispuniti: *i*) model je nedostupan za konvencionalnu interpretaciju jednostavnim fizikalnim zakonitostima, *ii*) model je prevelikog reda (ili prekompleksan) za uobičajenu sintezu regulatora. Navedeni „nedostaci“ vrijede i za dobro poznate, ali u okolini rijetke, linearne vremenski-invarijantne (LTI) sustave. Općeprihvaćena je teza da su LTI sustavi zbog svojih karakteristika i primjenjivosti relativno dobro obrađeni.

Ipak, iako je unutarnja dinamika sustava zanemarena direktnom identifikacijom iz podataka, izloženost vanjskim poremećajima ili ograničenjima mjerenja (šum) i dalje motiviraju potrebu za *robustnim* upravljanjem. Štoviše, ta će potreba dobiti na značaju.

U pokušaju da teoriju sustava, pa i upravljanja postave u zajednički kontekst, pojedini su autori nametnuli tzv. *bihevioralni* pristup analizi sustava [8]. Ponovno, kao i u konvencionalnoj formi, LTI sustavi nametnuli su se kao središnja tema, prvenstveno zbog potrebe da se dotadašnja pozamašna i literaturom bogata znanja interpretiraju u sada novim okvirima. Ako se sagleda specifičnije, a u ranije nametnutom kontekstu, jedan od plodova njihove analize je famozna *fundamentalna lema*, koja je kao matematički teorem ponudila osnovu za identifikaciju i upravljanje sustavima na temelju podataka. Doista, teorem je prepoznao uvjete koji su određivali vektorski prostor svih mogućih trajektorija sustava. Sukladno tome, prepoznavanjem pripadajućih linearnih kombinacija postalo je moguće identificirati i izvršiti predikciju buduće

trajektorije sustava za proizvoljnu pobudu. Sljedeći korak bio bi uključiti neki oblik optimizacije nad identifikacijom i simulacijom.

Ograničenje beskonačnog horizonta svelo je (uz uvođenje diskretnih sustava) beskonačno dimenzionalnu optimizaciju nad domenom funkcionala na ograničenu optimizaciju (uz nedostatak garancije stabilnosti u zatvorenoj petlji na granici horizonta), a ograničivši se tek na LTI sustave optimizacijski problemi (OP-i) su postali općenito konveksni i time lako rješivi dostupnim i efikasnim alatima. Prediktivno upravljanje na temelju modela, tzv. MPC (eng. *Model Predictive Control*) općeprihvaćena je i dobro poznata metoda „*online*“ optimalnog i prediktivnog upravljanja. Poznato je da daje relativno zadovoljavajuće rezultate i za blago nelinearne sustave te ograničenja na upravljačke varijable, stanja ili izlaze sustava [14]. Kako ime i sugerira, uvjet sinteze je poznavanje modela sustava, a ako on inicijalno nije poznat, na raspolaganju su sve metode identifikacije i adaptacije.

Kao interpretacija MPC upravljanja, a kao produžetak analize diskretnih LTI sustava jest pristup na temelju podataka, općenito ulaznih i izlaznih - tzv. *DeePC* upravljanje (eng. *Data-enabled Predictive Control*). Nije slučajno da se takva razmatranja pojavljuju paralelno sa sve intenzivnijim metodama prikupljanja podataka, čime ona postaju lako pristupačna i mnogobrojna.

Logično i opravdano pitanje nakon prezentacije *DeePC* algoritma jest odgovor na šum u inicijalnim „*offline*“ podacima (tzv. Hankelova matrica) ili mjerenim podacima pri *online* upravljanju, na vanjske poremećaje, te na moguće nelinearnosti u sustavu. Prema tome se nameće pitanje mogućnosti robusnog upravljanja, odnosno tzv. „robustifikacije“ (eng. *robustification*) regulatora, usko povezane s uvođenjem penala na kompleksnost problema (tzv. regularizacija). Kao odgovor na takve potrebe javlja se veliki broj tehnika, uglavnom temeljenih na prethodnim analizama MPC upravljanja, a garancije djelovanja se također ostvaruju od prije poznatim metodama (Ljapunovljeva analiza) [14]. S obzirom na integraciju robusne optimizacije s robusnom statistikom, tematika je usko povezala teoriju upravljanja sa standardnim problemima koji se vežu uz analizu podataka, pa i strojno učenje.

Kako se *DeePC* algoritam temelji na fundamentalnoj lemi, upravljanje je prirodni nastavak prethodnih metode podprostora (eng. *subspace methods*) [22] (čak je i motivirano njima). Štoviše, pokazano je da su u determinističkom slučaju odziv identičan.

Naravno, iako je *DeePC* „vruća“ tema u zajednici, na što upućuju godine izdanja referentne literature, ona je tek jedna od *data-based* metoda, pored primjerice: na temelju dohvatljivosti (eng. *reachability*), regulatora stanja (i LQR), tzv. *system-level synthesis*, i tako dalje.

## 1.2. O literaturi

Dobri „uvodni“ radovi J. C. Willemsa u bihevioralni pristup dani su u [2], [6] i [8], gdje su prezentirani opći motivi bihevioralnog pristupa te je na primjerima predstavljena metodologija sinteze regulatora kao matematičkih podsustava koji opisuju interakciju upravljanih i manifestnih varijabli. [8] pri tome na vrlo cjelovit način ističe matematičku pozadinu reprezentacija dinamičkih sustava te njihov odnos prema upravljivosti, mjerljivosti, kompaktnosti i dalje. C. D. Uvodi bi svakako trebali prethoditi glavnom teoremu rada, u [1]. Mayerova knjiga [3] nudi sva potrebna preliminarna znanja (i mnogo više) linearne algebre. Nominalni DeePC algoritam, s pokušajem regularizacije, bez garancija performansi dani su u [4], a u [5] su suštinski, gotovo edukativnog karaktera prikazali suštinu praktične primjene fundamentalne leme. Vrlo široki spektar tema obrađen je u knjizi [7] I. Markovskog, J. C. Willemsa, S. V. Huffela i B. D. Moora. Naglašena je jer pruža vrlo cjelovitu analizu statičnih i dinamičkih problema modeliranja, iako jednim dijelom sadržaja izlazi iz okvira koje nameće ovaj rad. Budući da se DeePC upravljanje nameće kao noviji i „egzotičniji“ oblik upravljanja, za garanciju eksponencijalne stabilnosti ravnotežnih točaka u zatvorenoj petlji potrebne su dodatne pretpostavke. Prve garancije na performanse DeePC upravljanja ponuđene u [9], koje se svode na terminalna ograničenja u optimizacijskom problemu (dobro poznato iz MPC upravljanja). Dodatno, pokazana je rekurzivna fizibilnost te praktično eksponencijalna stabilnost (uz zadovoljavanje ograničenja) u slučaju šuma odnosno nesigurnosti – robusni regulator. Drugi pristup za dobivanje robusnosti, i to na šum u *offline* podacima, te na nelinearnosti modela pokazana je u [10] na modelu kvadkoptera, a postignuta je regularizacijom netočnih“ varijabli u OP-u. Za razvoj intuicije, te kao primjer vrlo bogat rad je [11], gdje se osim implementacije na vrlo velikom sustavu (minimalne realizacije reda 228) dodana i nelinearnost i šum u signalu, te je na posljertku OP formuliran i kao tzv. „*minimax*“ OP. Dodatno, napravljena je usporedba prigušenja oscilacija preko Hankelove i Page matrice.

Radovi [12] i [13] poslužili su kao motivacija za odabrane modele u primjerima DeePC upravljanja, te za usporedbu s konvencionalnim metodama.

U dobro poznatoj knjizi J. B. Rawlingsa, D. Q. Maynea, M. M. Diehla [14] su na cjelovit način obuhvaćena temeljna znanja o konvencionalnom MPC upravljanju, od matematičkih razmatranja do uobičajenih zahtjeva teorije upravljanja, metodama za nelinearno upravljanje. Objašnjena su proširenja (s naglaskom na robusnost) od velikog značaja za rad, budući da se poboljšanja nominalnog prediktivnog upravljanja *na temelju podataka* temelje upravo na razmatranjima *model-based* prediktivnog upravljanja dostupnima u knjizi. U priložima se ističe



i 8. poglavlje posvećeno numeričkoj optimizaciji, s obzirom da sličnog „uvoda“ neće biti u ovom radu, kao i općenito o numeričkoj pozadini standardnih alata. U [15] se kao alternativa Hankelovoj matrici predstavila Page matrica, koja će se u kasnijim radovima implementirati u robusnim varijantama DeePC upravljanja. Posebno se naglašava rad [16], gdje je predstavljen koncept regulatora stanja temeljenog na podacima. [17] i [18] su praktične primjene DeePC upravljanja na konkretnim električnim sustavima. Više o spomenutoj konveksnoj optimizaciji ponuđeno je u već uobičajenom i cjelovitom radu [19] S. Boyda i L. Vandenberghe. U [20] je preporučeno *minimax* prediktivno upravljanje, te su matematički rigorozno garantirali rješivost OP-a s obzirom na različite strukture nesigurnosti, te na elegantan način napravljena usporedba korištenja različitih normi u regularizaciji funkcije cilja. U [21] je dano generalno „survey“ istraživanje između podatkovnog i modelskog upravljanja, te se preporuča za generalni dojam o upravljanju pomoću podataka. U [22] je predočena veza između DeePC upravljanja i prediktivnog upravljanja na temelju potprostora. Postojanje Ljapunovljeve (IOSS) funkcije, koju se zatim povezuje s asimptotskom stabilnosti diskretnog sustava, opravdala se u [23]. Zaključci će se koristiti za dokaz stabilnosti, odnosno stacionarne točnosti. U [24] je uspješno generirana trajektorija za proizvoljni nelinearni sustav, povezivanjem zaključka iz [1] sa specifičnim oblikom nesigurnosti i strukturom sustava (Hammersteinov i Wienerov sustav). U [25] se praktično primijenio zaključak slučan [20] za garanciju rješivosti proširenog robusnog DeePC upravljanja. Zanimljiv rad [26] sveo je indirektni pristup identifikacije pomoću podataka (temeljen na identifikaciji modela) na direktni pristup (identifikacija direktno iz podataka) pomoću regularizacijskih varijabli u funkciji cilja. U radu [27], općenito je matematički rigorozno postavljena poveznica između regularizacije funkcije cilja i rješavanja problema robusne optimizacije (robustifikacija), što će i u ovom radu imati reperkusije na rješivost optimizacijskih problema. Osim regularizacije, u [28] je razvijeno i tzv. distribucijski robusno upravljanje na temelju podataka, gdje je predstavljena i probabilistička garancija performansi nad skupom mogućih sustava, određenih pri inicijalnom skupljanju podataka, osiguravajući pritom robusnost prema šumu i slabijim nelinearnostima.

### 1.3. O strukturi rada

Rad je podijeljen prema sljedećem. Nakon 1., uvodnog poglavlja, u 2. se razmatraju preliminarna znanja o MPC upravljanju, definiraju se ključne veličine korištene u radu, te se pojašnjava korištena notacija. U 3. poglavlju predstavlja se bihevioralni pristup, nužan za motivaciju fundamentalne leme. 4. poglavlje konačno predstavlja samu fundamentalnu lemu, s definicijama koje uključuje. U 5. poglavlju se uvodi algoritam optimalnog prediktivnog

upravljanja, koji prethodi klasičnoj simulaciji za proizvoljni ulaz. Cijeli odjeljak posvećen je robusnosti. U 6. poglavlju se predstavlja i pojašnjava razvijeni računalni paket. U 7. poglavlju se razmatranja zaključuju, te se „u grubo“ daju ideje za moguća buduća razmatranja. Na samom kraju izdvojeni su prilozi, od koji se naglašava sam kôd.

## 2. MODELSKO PREDIKTIVNO UPRAVLJANJE

U ovom „preliminarnom“ poglavlju obradit će se Modelsko prediktivno upravljanje (eng. *Model Predictive Control*, MPC). Dodatno, definirat će se temeljni rezultati i utvrdit notacija rada.

Neka je zadan skup diferencijskih jednadžbi oblika

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad (2.1)$$

$$y(k) = g(x(k), u(k)), \quad (2.2)$$

$x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ , te neka je zadano početno stanje  $x(0)$ . Općenito optimalno upravljanje na pomičnom horizontu u diskretnoj domeni pronalazi optimalni signal (vektor)  $u = \text{col}(u(0), \dots, u(N-1))$ ,  $k = 0 \dots (N-1)$ ,  $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  takav da na pomičnom  $t$ -tom horizontu duljine  $N$  funkcija cilja oblika

$$J_t(x(0), u) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k + V_f(x(N)), \quad (2.3)$$

$\ell_k = \ell_k(x(k), u(k))$ , bude minimalna, a jednakosti (2.1) i (2.2) zadovoljene. Općenito, s vektorom  $v(k)$  će biti označen  $(k+1)$  član vektora  $v = \text{col}(v(0), \dots, v(N-1))$ , uz  $k = 0 \dots (N-1)$ , s obzirom da će prvi član redovito biti u  $k = 0$ .

Izraz  $V_f(x(N), u(N))$  odgovara tzv. terminalnoj penalizaciji, za slučaj kada terminalna točka nije određena.

*Definicija 2.1, Konveksni skup.* Skup  $C$  je konveksan ako i samo ako svaka dužina koja povezuje bilo koje dvije točke skupa  $A$  cijela (svakom svojom točkom) pripada skupu  $A$ , odnosno za  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $x_1, x_2 \in C$  mora vrijediti  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$ . Skup  $C$  je konveksan ako i samo ako je  $C \subseteq \mathcal{C}$ .

*Definicija 2.2, Kompaktni skup.* Skup metričnog prostora je kompaktna ako je zatvoren, odnosno ako mu se svi limesi skupa nalaze u skupu (skup sadrži vlastitu granicu), te ako je ograničen, odnosno udaljenost (po metrici prostora) bilo koje dvije točke skupa je ograničena.

Kako bi se izbjegle buduće „krnje“ definicije, ovdje se uvodi pretpostavka koja će vrijediti općenito za sve promatrane skupove u nastavku rada.

*Pretpostavka 2.1.* Svi skupovi mogućih konfiguracija sustava  $\mathcal{X}$  i ulaza  $\mathcal{U}$ , te poremećaja  $\mathcal{D}$  su konveksni, i kompaktni, nemaju praznu unutrašnjost, te sadrže ishodište.

*Definicija 2.3, Konveksna funkcija.* Funkcija  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna ako i samo ako joj je  $\text{dom}(f(x))$  konveksni skup prema Definiciji 2.1 i ako za  $0 \leq \theta \leq 1$  vrijedi

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2), \forall (x_1, x_2) \neq 0, \quad (2.4)$$

Dodatno, ako je nejednakost (2.4), tzv. Jensenova nejednakost, zadovoljena, epigraf<sup>1</sup> funkcije mora biti konveksan skup, te u kontinuiranom slučaju Hessian<sup>2</sup> mora biti  $\geq 0$ . Poznato je da konveksne funkcije posjeduju jedan lokalni minimum koji je ujedno i globalni.

*Definicija 2.4, Pozitivno definitna matrica.* Matrica  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je pozitivno definitna ako i samo ako kvadratna funkcija  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava

$$f(x) = x^T \mathbf{P} x > 0, \forall x \neq 0, \quad (2.5)$$

$$x^T \mathbf{P} x \geq 0, x = 0. \quad (2.6)$$

Ako je umjesto (2.5) i (2.6) zadovoljeno  $f(x) = x^T \mathbf{P} x \geq 0, \forall x$ , matrica je pozitivno semidefinitna. Matrica  $\mathbf{P}$  je pozitivno (semi)definitna ako i samo ako je  $\mathbf{P} \succ 0$  ( $\mathbf{P} \succeq 0$ ).

Može se pokazati da su svi članovi vektora  $\text{eig}(\mathbf{P})$  tada veći ili jednaki nuli. Vrijedi  $f(x) \in \mathcal{C}_f$ .

*Teorem 2.1, Suma kvadratnih funkcija.* Neka je u vektorskom prostoru zadano  $n$  pozitivno definitnih kvadratnih funkcija. Njihova suma je također pozitivno definitna kvadratna funkcija.

Prema tome, s obzirom da je pozitivno definitna kvadratna funkcija konveksna, njihova suma će također biti  $\in \mathcal{C}_f$

*Definicija 2.5, Konveksni optimizacijski problem.* Optimizacijski problem

$$\text{minimiziraj: } f(x),$$

$$\text{tako da vrijedi: } x \in C,$$

$C \subseteq \text{dom}(f(x))$  je konveksan ako i samo ako je funkcija cilja  $f(x)$  konveksna prema Definiciji 2.3, i to nad konveksnim skupom, odnosno OP je konveksan ako je  $f(x) \in \mathcal{C}_f$  i  $C \in \mathcal{C}$ .

Kako bi se osiguralo jedinstveno rješenje,  $\ell_k$  iz (2.3) se odabire kao kvadratnu funkciju, odnosno konkretnije, za „težinske“ parametre odabire se  $\mathbf{P} \succeq 0: \ell_k = [x(k)^T \quad u(k)^T] \mathbf{P} [x(k)^T \quad u(k)^T]^T$ , odnosno  $\ell_k \in \mathcal{C}_f$ . U pravilu  $\mathbf{P} = \text{diag}([\mathbf{Q} \quad \mathbf{R}])$ ,  $\mathbf{Q} \succeq 0$ ,  $\mathbf{R} \succ 0$ . Ako se za  $V_f(x(N))$  također odabere  $V_f(x(N)) = x(N)^T \mathbf{P}_f x(N)$ ,  $\mathbf{P}_f \succeq 0$ , vrijedi  $J_t(x(0), u) \in \mathcal{C}_f$ .

<sup>1</sup> Epigraf funkcije  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je skup  $\{(x, y) | y \geq f(x), \forall x \in \text{dom}(f(x))\}$

<sup>2</sup> Hessian je definiran kao „operator“ tj. kvadratna matrica parcijalnih derivacija drugog reda po varijablama.

Ako  $\exists\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}: f(x(k), u(k)) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \quad \forall k$ , za  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , dinamika sustava je „linearna“, i tada vrijedi  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ , a. Ako je dodatno  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$ , zadovoljeni su uvjeti *Definicije 2.5* i problem pripada klasi konveksnih OP-a. Ako su  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , konstantni po  $k$ , sustav je „vremenski-invarijantan“, odnosno radi se o LTI sustavu oblika

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k), \quad (2.7)$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k), \quad (2.8)$$

za  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

Ako pri tome za upravljive<sup>3</sup>  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , uz  $N \rightarrow \infty$  (beskonačni horizont), rekurzivna vrijednosna funkcija

$$V_k = \ell_k + V_{k+1}(x(k+1), u(k+1)), \quad (2.9)$$

raste „minimalno“ za svaki  $k$  kako  $k \rightarrow 0$  iz  $V_f(x(N)) = 0$ , trajektorija je optimalna, te konfiguracija sustava  $x(k) \rightarrow 0$ , odnosno sustav asimptotski teži nuli. Radi se o dobro poznatoj relaciji asimptotske stabilnosti i Bellmanovog smanjivanja vrijednosne funkcije u terminalno stanje, u ovom slučaju do ishodišta  $x(N) = 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Za LTI sustave, optimalno se rješenje dobiva diskretnom Algebarskom Riccatijevom jednadžbom i rezultira dobro poznatim linearnim zakonom upravljanja.

MPC upravljanje bavi se upravo LTI sustavima oblika (2.7)-(2.8), ali problem rješava u stvarnom vremenu, za konačni horizont, za  $\ell_k = (y(k) - r(k))^T \mathbf{Q}(y(k) - r(k)) + u^T(k) \mathbf{R}u(k)$ , gdje je  $r = \text{col}(r(0), r(1) \dots r(N-1))$  vektor referentne trajektorije.

Kako je  $r$  poznat, penalizacija terminalnog stanja gubi smisao, pa je  $V_f(x(N))$  iz (2.3) jednak nuli. Osim toga, zbog pomičnog ograničenog horizonta gubi se i garancija stabilnosti. Tako se dolazi do MPC algoritma za praćenje trajektorije  $r$ .

### MPC

Input:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, r, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$

1. minimiziraj:  $J_t = \sum_{k=0}^{N-1} (y(k) - r(k))^T \mathbf{Q}(y(k) - r(k)) + u^T(k) \mathbf{R}u(k)$ ,

tako da:

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k), \quad y \in \mathcal{Y}, \quad u \in \mathcal{U},$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k),$$

---

<sup>3</sup> Sustav u PS reprezentaciji  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  je upravljiv ako je matrica „upravljivosti“  $[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$  punog ranga ( $n$ ) za  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Upravljivost će biti drukčije definirana u bihevioralnom kontekstu.

2. primjeni  $h \leq (N - 1)$  prvih vrijednosti  $u$ ,
3. postavi  $t = t + h$ ,
4. vrati se na broj 1.

Kako algoritam zahtjeva poznavanje matrica  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , upravljanje se temelji na modelu. S obzirom na funkciju cilja i ograničenja, OP MPC-a spada u kvadratne, tj. konveksne optimizacijske probleme, koji su generalno lako rješivi suvremenim rješavačima.

Nadalje se uvode dodatne definicije koje će imati značaj i u interpretaciji prediktivnog upravljanja podacima.

*Definicija 2.6, Asimptotska stabilnost.* Neka je zadan vektor stanja diskretnog sustava u trenutku  $k$ ,  $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n | x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k)$ ,  $y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k)$ . Neka je rješenje dinamikom za početno stanje  $x(0)$  opisano funkcijom  $\tilde{x}(x(0), k): \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ako  $\exists f_{KL}(|x(0)|, k)$  takva da za neku (bilo koju) vrijednost  $k$ ,  $f_{KL}(\bullet, k)$  strogo raste, a za neki (bilo koji)  $x(0)$ ,  $f_{KL}(|x(0)|, \bullet)$  ne raste i  $f_{KL}(|x(0)|, k) \rightarrow 0$  ako  $k \rightarrow \infty$ , sustav je asimptotski stabilan ako i samo ako vrijedi

$$f_{KL}(|x(0)|, k) \geq \tilde{x}(x(0), k), \forall k \quad (2.10)$$

Intuitivno, za  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ , sustav je globalno asimptotski stabilan. Skup  $\mathcal{X}$  se zbog asimptotskog svojstva tada naziva područje privlačenja (eng. *region of attraction*).

*Definicija 2.7, Ljapunovljeva funkcija.* Ljapunovljeva funkcija je funkcija  $V(x): \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi da za strogo rastuće i neograničene funkcije  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$ , te za pozitivno definitnu funkciju  $f_3(x)$ ,

$$f_1(x(k)) \leq V(x(k)) \leq f_2(x(k)), \forall x \quad (2.11)$$

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq -f_3(x(k)), \forall x \quad (2.12)$$

*Teorem 2.2.* Ako za  $x(0) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  i pripadajući  $\tilde{x}(x(0), k)$  postoji Ljapunovljeva funkcija, sustav je asimptotski stabilan. Ako za funkcije  $f_i(x)$  iz Definicije 5.3 vrijedi  $f_i(x) = a_i |x|^{b_i}$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}_{++}$ ,  $i = 1 \dots 3$ , sustav je eksponencijalno stabilan s područjem privlačenja  $\mathcal{X}$ .

Nije svaki MPC problem rješiv pod postavljenim ograničenjima i za definirano početno stanje. Za probleme koji su rješivi u zatvorenoj petlji pod uvjetom da postoji rješenje u početnom trenutku  $x(0)$  kaže se da su *rekurzivno izvedivi* (rekurzivno fizibilni).

### 3. BIHEVIORALNI PRISTUP DINAMIČKIH SUSTAVA

U nastavku će se predstaviti osnovni principi koji se vežu uz bihevioralni pristup teoriji dinamičkih sustava i teoriji upravljanja.

Glavna odrednica bihevioralnog pristupa je u prirodi opisivanja dinamičkih sustava koja se temelji na njegovom *ponašanju*, od kojeg tada proizlaze postojeće reprezentacije sustava. Tek iz tako izvedenih reprezentacija, moguće je opisati dotična *svojstva* sustava (npr. upravljivost i mjerljivost), što za posljedicu ima prirodni tijek derivacije svojstava kao posljedice *ponašanja*, a ne konkretne *reprezentacije* tog sustava.

Sekundarno, bihevioralni pristup prirodnije obuhvaća dinamičke sustave ne svodeći ih direktno na „operatore“ koje pod djelovanjem određenih *ulaza* određuju uz poznatu memoriju (početne uvjete) jedinstven *izlaz*, već određuju sustav upravo vlastitim dinamičkim jednadžbama kao ekskluzivskim uvjetima nad svim mogućim rješenjima. Treba se naglasiti, kako je to dobro naglašeno i u literaturi, da bihevioralni pristup nije zamjena konvencionalnoj teoriji upravljanja, već kao proširenje koje nastoji upotpuniti, ili poopćiti poznate koncepte upravljanja.

#### 3.1. Teorija sustava bihevioralnog pristupa

Neka je zadan skup  $\mathcal{U}$ , svih dopuštenih trajektorija nekog dinamičkog sustava, odnosno signalni prostor odgovarajućih dimenzija. Dinamički sustav određen je njegovim ponašanjem, koje suzuje  $\mathcal{U}$  na one trajektorije koje su *moguće* za promatrani dinamički sustav, pa je on u bihevioralnom pristupu određen kombinacijom  $(\mathcal{U}, \mathfrak{B})$ . Time je primjerice definiran i proizvoljni statički sustav.

Ako je primjerice pod pritiskom  $p$  zadan volumen  $V$  idealnog plina plinske konstante  $R$  s  $N$  čestica plina pri temperaturi  $T$ , sustav može biti određen s kombinacijom  $(\mathcal{U}, \mathfrak{B})$ , takvom da je  $\mathfrak{B} = \{p, V, T | pV = NRT\} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Primjerice, neka je zadano tijelo površine  $m^2$ , temperature  $T$  i Stefan-Boltzmanove konstante  $\sigma$ . Tada je sustav koji opisuje zračenje tijela definiran s  $(\mathcal{U}, \mathfrak{B})$ , gdje je  $\mathfrak{B} = \{Q, T, \sigma\} \in \mathcal{U}$  takav da je  $Q = T^4 \sigma$ . I ovdje se radi o statičnim sustavima, kako je ponašanje opisano algebarskim, a ne diferencijalnim jednadžbama.

Prema navedenom, jedna od važnih karakteristika bihevioralnog pristupa je da sustavu ne treba *a priori* definirati ulaze i izlaze, što je slučaj u konvencionalnim pristupima (npr. težinskom funkcijom ili prostorom stanja).

Za opis *dinamičkih* sustava, uvodi se prostor nezavisnih varijabli  $\mathbb{T}$ , kojem za svaku vrijednost postoji mapiranje  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{W}$ , gdje  $\mathbb{W}$  predstavlja prostor svih mogućih signala odgovarajućih dimenzija. Radi jednostavnosti i usklađenosti s literaturom će se prostor takvih funkcija označavati s  $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ . Dakle,  $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$  predstavlja prostor svih mogućih trajektorija proizvoljnog sustava (slično  $\mathcal{U}$  u statičnom slučaju, uz previd značenja „trajektorija“).

*Definicija 3.1, Ponašanje  $\mathfrak{B}$ .* Neka je zadan  $\mathbb{W} = \mathbb{R}^w$  i skup nezavisnih varijabli  $\mathbb{T}$ . Ponašanje sustava  $\mathfrak{B}$  je podskup  $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$  takav da vrijedi

$$\mathfrak{B} := \{w \in \mathbb{W} | R(\xi)w = 0\}, \quad (3.1)$$

gdje je  $R(\xi) \in \mathbb{R}^{p \times w}[\xi]$  matricni polinom u varijabli  $\xi$ , oblika  $R(\xi) = R_0 + \dots + R_{L-1}\xi^{L-1}$  za matrice  $R_0 \dots R_{L-1} \in \mathbb{R}^{p \times w}$ . Može se pokazati, što će biti pomnije obrađeno u sljedećim odjeljcima, da je takvim polinomom moguće generalno obuhvatiti reprezentacije dinamičkih sustava.

Prema tome, općenito je ponašanje skup mapa od  $\mathbb{T}$  u  $\mathbb{W}$ , ili  $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ .

### 3.2. Diskretna domena

U ovom odjeljku će se bolje obraditi struktura ponašanja, s obzirom na definiciju (3.1). Za početak, predstavlja se generalizirani zapis dinamike proizvoljnog sustava, u obliku matricnog polinoma s varijablom  $\xi$ ,

$$R(\xi) = R_0 + \dots + R_{L-1}\xi^{L-1}, \quad (3.2)$$

za matrice  $R_0 \dots R_{L-1} \in \mathbb{R}^{p \times w}$ .

Neka  $w(k)$  predstavlja vektor ulaznih i izlaznih varijabli u pojedinom diskretnom trenutku  $k$ . Primjerice, neka je kao operator matricnog polinoma zadan operator pomaka (tzv. „*shift*“ operator -  $\sigma$ ), definiran s  $\sigma w(k) := w(k+1)$ , i neka su matrice koeficijenata zapisane kao

$$R_i := \begin{bmatrix} R_i^{11} & \dots & R_i^{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_i^{p1} & \dots & R_i^{pw} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Razmatra se definicija (3.1). Ako se odabere trajektorija  $w = \text{col}(u, y) \in \mathbb{R}^w$ , s ulazom  $u$  i izlazom  $y$ , dobiva se, prema (3.2), za  $R(\sigma)w = 0$

$$R(\sigma) := R_0 + \dots + R_{L-1}\sigma^{L-1} = 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} R_0^{11} & \dots & R_0^{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^{p1} & \dots & R_0^{pw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1(0) \\ \vdots \\ w^w(0) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} R_{L-1}^{11} & \dots & R_{L-1}^{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{L-1}^{p1} & \dots & R_{L-1}^{pw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1(L-1) \\ \vdots \\ w^w(L-1) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.5)$$



što daje

$$\left( \begin{bmatrix} R_0^{11} & \dots & R_0^{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^{p1} & \dots & R_0^{pw} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} R_{L-1}^{11}\sigma^{L-1} & \dots & R_{L-1}^{1w}\sigma^{L-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{L-1}^{p1}\sigma^{L-1} & \dots & R_{L-1}^{pw}\sigma^{L-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w^1(0) \\ \vdots \\ w^w(0) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

Svođenjem izraza (3.6) na jednu matricu, dobiva se

$$\begin{bmatrix} R_0^{11} + \dots + R_{L-1}^{11} & \dots & R_0^{1w} + \dots + R_{L-1}^{1w}\sigma^{L-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^{p1} + \dots + R_{L-1}^{p1} & \dots & R_0^{pw} + \dots + R_{L-1}^{pw}\sigma^{L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1(0) \\ \vdots \\ w^w(0) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.7)$$

što eksplicitno predstavlja strukturu matričnog polinoma  $R(\sigma) \in \mathbb{R}^{p \times w}[\xi]$  kao matricu, kojoj su svi članovi polinomi, maksimalnog reda  $(L - 1)$ . Ipak, od posebnog je interesa i sljedeći raspis. Iz (3.5) slijedi

$$\begin{bmatrix} R_0^{11}w^1(0) + \dots + R_0^{1w}w^w(0) \\ \vdots \\ R_0^{p1}w^1(0) + \dots + R_0^{pw}w^w(0) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} R_{L-1}^{11}w^1(L-1) + \dots + R_{L-1}^{1w}w^w(L-1) \\ \vdots \\ R_{L-1}^{p1}w^1(L-1) + \dots + R_{L-1}^{pw}w^w(L-1) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.8)$$

Jednostavnom preformulacijom (3.8) dobiva se oblik

$$\begin{bmatrix} [R_0^{11} \dots R_0^{1w}] \begin{bmatrix} w^1(0) \\ \vdots \\ w^w(0) \end{bmatrix} + \dots + [R_{L-1}^{11} \dots R_{L-1}^{1w}] \begin{bmatrix} w^1(L-1) \\ \vdots \\ w^w(L-1) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ [R_0^{p1} \dots R_0^{pw}] \begin{bmatrix} w^1(0) \\ \vdots \\ w^w(0) \end{bmatrix} + \dots + [R_{L-1}^{p1} \dots R_{L-1}^{pw}] \begin{bmatrix} w^1(L-1) \\ \vdots \\ w^w(L-1) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Može se zapisati

$$\begin{bmatrix} R_0^{11} & \dots & R_0^{1w} & R_1^{11} & \dots & R_1^{1w} & \dots & R_{L-1}^{11} & \dots & R_{L-1}^{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^{p1} & \dots & R_0^{pw} & R_1^{p1} & \dots & R_1^{pw} & \dots & R_{L-1}^{p1} & \dots & R_{L-1}^{pw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1(0) \\ \vdots \\ w^w(0) \\ \vdots \\ w^1(L-1) \\ \vdots \\ w^w(L-1) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.10)$$

gdje koeficijenti  $R(\sigma)$  u odnosu na matrični polinom u (3.6) sada utjelovljen kao matrica bez  $\sigma$  operatora. Odvajanje parametara od trajektorije bit će od interesa za kasnija razmatranja. Vektor  $w$  u (3.10) tako se nalazi u nulprostoru transformacije, odnosno uz fleksibilnu notaciju  $R(\sigma)$  i  $w$  zadovoljeno je

$$w \in \ker(R(\sigma)), \quad (3.11)$$

gdje je  $\ker(f(x)) := \{x | f(x) = 0\}$ , odnosno za linearno mapiranje proizvoljnom matricom  $A$ ,  $\ker(A) := \{x | Ax = 0\}$ .

S obzirom da će se sustavom algebarskih jednadžbi jasno staviti u odnos ulazne i izlazne vrijednosti sustava u pojedinim vremenskim trenucima  $k = 0 \dots (L - 1)$ , gornjim zapisom može se, uz određene uvjete detaljno opisane u sljedećim odjeljcima, potpuno vjerodostojno opisati diskretni LTI sustav opisan diferencijskim jednadžbama.

### 3.3. Kontinuirana domena

Ako se za operator u (3.2) uzme diferencijalni operator po nekoj od nezavisnih varijabli  $t \in \mathbb{T}$ , dobiva se matrični polinom

$$R(t) := R_0 + \dots + R_{L-1} \frac{d^{L-1}}{dt}, \quad (3.12)$$

te se slično dedukciji iz potpoglavlja 3.2. dolazi do izraza

$$\begin{bmatrix} R_0^{11} & \dots & R_0^{1w} & R_1^{11} & \dots & R_1^{1w} & \dots & R_{L-1}^{11} & \dots & R_{L-1}^{1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^{p1} & \dots & R_0^{pw} & R_1^{p1} & \dots & R_1^{pw} & \dots & R_{L-1}^{p1} & \dots & R_{L-1}^{pw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^w \\ \vdots \\ \frac{d^{L-1}}{dt} w^1 \\ \vdots \\ \frac{d^{L-1}}{dt} w^w \end{bmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Zaključuje se da gornji izraz predstavlja generalizaciju običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi. Prebacivanjem diferencijalnog operatora u matricu s matričnim koeficijentima dobiva se, identično prethodnom poglavlju,  $R(\sigma)w = 0$ .

Napominje se da  $R(\xi)$  nije jedinstven za određeni npr. diskretni dinamički sustav, iz najmanje 2 razloga. Trivijalni razlog je što pripadajuća matrica parametara, ekvivalentna zapisu u (3.9) može imati redundantne retke<sup>4</sup>. Drugi razlog je moguće postojanje matrice  $U | \ker(UR(\sigma)) = \ker(R(\sigma))$ . Od većeg je interesa prvi razlog, a direktno je povezan s „minimalnosti“ reprezentacije. U nastavku se konačno uvode „dinamički“ sustavi.

### 3.4. Dinamički sustavi u bihevioralnom pristupu

Poglavlje započinje definicijom dinamičkih sustava.

*Definicija 3.2. Dinamički sustav. Neka je zadan prostor signala  $\mathbb{W}$  i nezavisnih varijabli  $\mathbb{T}$  koji definiraju  $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ . Dinamički sustav određen je kombinacijom  $\Sigma(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$ ,  $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ .*

<sup>4</sup> Pod „redundantnim redcima“ se smatra da matrica nije punog ranga, gdje je rang broj linearno nezavisnih vektora, odnosno dimenzija razapinjućeg prostora matrice.

Gornja definicija obuhvaća više mogućih nezavisnih varijabli, kontinuirane i diskretne domene, diferencijalne ili diferencijske jednadžbe i slične varijacije, a uz kraća proširenja [8], mogu se obuhvatiti i parcijalne diferencijalne jednadžbe, tj. *širenja* energije.

U ovom radu naglasak je na *diskretnim* dinamičkim sustavima, gdje je  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ , prostor signala  $\mathbb{W} = \mathbb{R}^w$ , a  $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_+}$ , pa iz (3.1) proizlazi da je  $\mathfrak{B} = \ker(R(\sigma))$  što motivira naziv *jezgrena* ili *kernel reprezentacija* (u nastavku ker. rep.). Nadalje, rad će se ograničiti na „*linearne*“ sustave, kao podskupe vektorskog prostora<sup>5</sup>.

*Definicija 3.3, Linearni sustav.*  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  je *linearan* ako je  $\mathbb{R}^w$  vektorski prostor i  $\mathfrak{B}$  je linearni podprostor od  $\mathbb{R}^w$  po polju  $R(\xi)$  takav da  $\mathfrak{B}$  zadovoljava (3.1).

Uz manji gubitak općenitosti<sup>6</sup>, razmatrat će se isključivo *potpuni* linearni dinamički sustavi.

*Definicija 3.4, Potpuni sustav.* Sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  je *potpun* ako i samo ako za  $t_1 \leq t_2$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+$  vrijedi

$$w_{(t_1, t_2)} \in \mathfrak{B}_{(t_1, t_2)} \Rightarrow w \in \mathfrak{B}, t_1 \leq t_2, (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.14)$$

Gdje se s indeksom  $(t_1, t_2)$  obuhvaća trajektorija od trenutka  $t_1$  do  $t_2$ . Ako je interval  $(t_1, t_2)$  diskretiziran na  $L$  jednakih vremenskih trenutaka, naziva ga se  $L$ -potpunim. Svaki  $L$ -potpuni linearni sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  moguće je opisati diferencijskom jednadžbom s  $L$  vremenskih pomaka. Dakle, s ograničenim brojem podataka moguće je klasificirati trajektoriju  $L$ -potpunog sustava kao dio ponašanja  $\mathfrak{B}$ , što znači da je svaki sustav opisan diferencijskim jednadžbama ujedno potpun.

Zbog svojeg značaja za rad, u nastavku će se skup potpunih LTI sustava označavati sa  $\Sigma_{LTI}$ . Također, sustavi će biti elementi  $\Sigma_{LTI}$  osim ako nije naglašeno suprotno.

*Definicija 3.5, Vremenski invarijantni sustav.*  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  je *vremenski invarijantan* ako i samo ako vrijedi

$$\sigma\mathfrak{B}(w) \subseteq \mathfrak{B}(w), \quad (3.15)$$

gdje je  $\sigma$  tzv. „*shift*“ operator:  $\sigma\mathfrak{B}(w) = \{\sigma w | w \in \mathfrak{B}(w)\}$ ,  $\sigma w(t) = w(t + 1)$ ,  $t \in \mathbb{Z}_+$ .

Dakle, ako nakon vremenskog pomaka skup  $\sigma\mathfrak{B}(w)$  razapinje podskup  $\mathfrak{B}(w)$ , odnosno dade ga se opisati istim baznim vektorima, sustav je vremenski invarijantan.

<sup>5</sup> Ako se razmotri generalno svojstvo linearnih sustava, za  $f(x): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ ,  $f(sx) = sf(x)$ ,  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$  aksiomi vektorskog prostora po polju mapa  $f(x)$  obuhvaćaju upravo linearne sustave, kako mora vrijediti adicija  $V \times V \rightarrow V$  i multiplikacija skalarom  $S \times V \rightarrow V$ .

<sup>6</sup> U pojedinim razmatranjima kao Ljapunovljeva stabilnost, analiza u frekvencijskim domenama ili  $\mathcal{L}_2$  funkcijskim prostorima, potrebno je uzeti u obzir dinamiku u beskonačnostima, pa su potrebna druga ograničenja (vidi npr. [8], poglavlje XI.3).

Kako će  $w$  sadržavati i ulaze i izlaze, očito će ovakva formulacija potpunosti i vremenske invarijantnosti nadomjestiti tzv. pozitivnu invarijantnost i invarijantnost izlaza ([14]) koja osigurava da sustav „ne pobjegne“ iz dinamike koju propisuje vlastita reprezentacija. U nastavku se povezuje polinomna matrica  $R(\sigma)$  s definiranim svojstvima.

*Teorem 3.1, Ekvivalentnost. Sljedeće teze su ekvivalentne*

- i. Sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  je linearan, vremenski invarijantan i potpun
- ii. Ponašanje  $\mathfrak{B}$  je linearno, shift-invarijantno i zatvoreno u topološkoj konvergenciji<sup>7</sup>
- iii. Postoji polinomna matrica  $R(\sigma) \in \mathbb{R}^{\bullet \times w} | \mathfrak{B} = \ker(R(\sigma))$ .

Značaj teorema je prvenstveno u garanciji postojanja  $R(\sigma)$  koja određuje ponašanje, jer će, kako će se pokazati u nastavku, dualna matrica (koja će sadržavati tzv. *anihilatore*) istovjetno određivati ponašanje  $\mathfrak{B}$ . Ipak, do takvog zaključka nedostaju najmanje 2 koncepta – mjerljivost i upravljivost.

### 3.4.1. Mjerljivost

Temeljni zahtjev sustava je sposobnost obzervacije odnosno mjerljivost istoga. Dobro je poznato da je pojam usko povezan rangom matrice mjerljivosti<sup>8</sup>. Mjerljivost u okviru bihevioralnog pristupa imat će krucijalnu ulogu u prediktivnom upravljanju.

Razmatra se ponašanje sustava  $\mathfrak{B}$  takav da vrijedi  $\sigma x = Ax + Bu$ , za  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , u diskretnoj domeni. Ako se definira dotični izlaz  $y(k) = Cx + Du$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , dobro je poznato ([14]) općenito rješenje dinamike  $y(k) = CA^k x(1) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) + Du(j)$ . U matričnom zapisu prema tome vrijedi

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} x(1) + \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ CB & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ CA^{T-2}B & \cdots & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(T) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

ili kraće,

$$y = \mathbf{O}_T(A, C)x(1) + \mathbf{J}(H)u \quad (3.17)$$

<sup>7</sup> Pod zatvorenost u topološkoj konvergenciji se podrazumijeva „pointwise“ konvergencija, odnosno za  $\forall k$  vrijedi  $\mathfrak{B} \ni w(k) \rightarrow w_{lim} \Leftrightarrow w_{lim} \in \mathfrak{B}$ .

<sup>8</sup> Matrica mjerljivosti predstavljena je s  $\text{col}(C, \dots, CA^{T-1})$ . Standardna definicija nalaže da je sustav u PS-u mjerljiv ako je matrica mjerljivosti punog ranga ( $n$ ).

za početno stanje  $x(1) \in \mathbb{R}^n$ , što predstavlja svojevrsnu diskretnu verziju konvolucijskog integrala uz impulsni odziv  $\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{B}$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, T-1$ , dok je  $\mathbf{O}_T(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  standardna matrica mjerljivosti.

Neka je s  $l_0 \in \mathbb{Z}_+$  označen najmanji prirodni broj za koji je matrica  $\mathbf{O}_{l_0}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  ranga  $n$ , odnosno tzv. „lag“ matrice  $\mathbf{O}$  je  $l_0$ . Dakle, ako je vremenski prozor  $T \geq l_0$ , matrica mjerljivosti je po definiciji veća od reda sustava, te postoji jedinstveni  $x(1)$ . Iz prethodnog proizlazi teorem u nastavku.

*Teorem 3.2, Mjerljivost.* Neka je zadan LTI sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  reda  $n$  u PS-u s ponašanjem  $\mathfrak{B} | \sigma x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$  i izlazom  $y(k) = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$ , za  $k \leq T$ ,  $k, T \in \mathbb{Z}_+$ . Neka je zadana inicijalna trajektorija u odijeljenoj formi  $w_{ini} = \text{col}(u_{ini}, y_{ini}) \in \mathfrak{B}_{T_{ini}}$  za  $T_{ini} \in \mathbb{Z}_+$  i nova trajektorija  $w_N | w_{ini} \wedge w_N \in \mathfrak{B}_{T_{ini}+N}$  za  $N \in \mathbb{Z}_+$ . Ako je  $T_{ini} \geq l_0$ , tada postoji jedinstveni  $x_{ini} \in \mathbb{R}^n$ , a izlaz je određen s

$$y = \mathbf{O}_T(\mathbf{A}, \mathbf{C})x_{ini} + \mathbf{J}(\mathbf{H})u. \quad (3.18)$$

Dakle neformalno, funkcija  $f(w_{ini}): w_{ini} \rightarrow x_{ini}$  je injektivna za  $\forall w_{ini} \in \mathfrak{B}_{T_{ini}}$ . Simbol „ $\wedge$ “ predstavlja općenitu konkatenaciju, određenu s

$$w_1 \wedge_{t_0} w_2 = \begin{cases} w_1(t), & t < t_0 \\ w_2(t), & t > t_0 \end{cases}, (w_1, w_2) \in \mathfrak{B} \quad (3.19)$$

Drugim riječima, za dovoljno veliki broj podataka  $T_{ini}$ ,  $x_{ini}$  je jedinstven, te je moguće iz ulaza  $u$  odrediti novu trajektoriju  $y$ . Gornji teorem koristit će se kao uvjet mjerljivosti u sintezi regulatora „data-based“ pristupom, obzirom da će se moći ostvariti jedinstveno inicijalno stanje nužno za predikciju izlaza na temelju određenog ulaza.

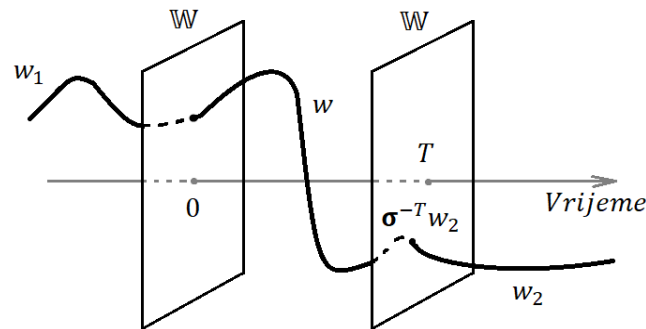
### 3.4.2. Upravlјivost

Upravlјivost se definira kroz postojanje određenog ulaznog signala  $u$  koji u konačnom vremenu  $t | t_1 \leq t \leq t_2 \leq \infty$  sustav iz bilo kojeg stanja  $x(t_1)$  dovede u traženo stanje,  $x(t_2)$ . Navedena „definicija“ elegantno se prenosi u PS, pa je poznato da je sustav „upravlјiv“ ako i samo ako je rang pripadajuće matrice upravlјivosti jednak redu sustava u PS-u (Hautus, 1972 [14]).

Ipak, takva teza nužno nas veže uz reprezentaciju sustava. U bihevioralnom kontekstu, upravlјivost se definira na sljedeći način.

*Definicija 3.6, Upravlјivost.* LTI sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  je upravlјiv ako i samo ako za bilo koje  $w_1 \in \mathfrak{B}$  i  $w_2 \in \mathfrak{B} \exists T: T \in \mathbb{Z}_+$  i  $w \in \mathfrak{B}: w(t) = w_1$  za  $t < 0$  i  $w(t) = w_2(t - T)$ , za  $t > 0$ .

Drugim riječima, sustav je upravljiv ako su dvije trajektorije, primjerice  $w_1$  koju bi sustav prirodno pratio, te  $w_2$  koju želimo da prati, međusobno povezive (u smislu konkatencije) za neko konačno vrijeme  $T$  (slika 1).



Slika 1. Upravlјivost sustava

Nadalje, ako se za  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B}) \in \Sigma_{LTI}$  zamisli linearno mapiranje  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times w}: \mathbb{R}^w \rightarrow \mathbb{R}^p$ , mapa za svaku ulaznu trajektoriju izbacuje vektor u  $\mathbb{R}^p$ , ako se podrazumijeva da je  $\mathbf{R}(\sigma)$  punog retčanog ranga. U oprečnom slučaju, postoje redundantni redci, pa  $\mathbf{R}(\sigma)$  razapinje izlazni prostor koji ne odgovara  $p$ , odnosno postoje nedohvatljivi izlazi, što onemogućuje konkatenciju u nekom vremenu  $T \in \mathbb{Z}_+$ . Definicije 3.6. Može se reći da se sustav “homogeniziralo”. Upravo homogeni sustav je potpuno neupravljiv, jer niti jedan podskup<sup>9</sup>  $\mathbf{R}(\sigma)$  homogenog sustava nije upravljiv. Ukratko, tangentsno na Teorem 3.1 nastavlja se sljedeći.

*Teorem 3.3, Ekvivalentnost upravljanja. Sljedeće su teze ekvivalente*

- i. Sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$  je upravljiv.
- ii.  $\exists$  matični polinom  $\mathbf{R}(\sigma)$  takav da je punog retčanog ranga.

Ostavljaju se dvije napomene. Primjećuje se veza između broja izlaza sustava u PS-u,  $p$  i broja redaka matičnog polinoma s  $\mathbf{R}(\sigma)$  -  $p$ . Ta će se veza formalizirati u sljedećim poglavljima.

Dodatno, pokazat će se da je gornji uvjet upravljivosti (puni rang  $\mathbf{R}(\sigma)$ ) jedan od pretpostavki za dokazivanje fundamentalne leme, temeljne za rad.

<sup>9</sup> Općenito se sve ker. rep. utjelovljene matičnim polinomom  $\mathbf{R}(\sigma)$  mogu faktorizirati na upravljivi i pseudohomogeni dio,  $\mathbf{R}(\sigma) = \mathbf{F}\mathbf{R}'$  gdje je  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{* \times *}[\xi]$  nesingularna matrica.

### 3.4.3. Prostor stanja

U nastavku će se razmotriti na koji je način bihevioralnim pristupom moguće obuhvatiti prostor stanja (PS). Ipak, s tim u cilju biti će potrebno proširiti dosadašnje spoznaje ponašanja na novi oblik varijabli, iz jednostavnog razloga što je dosadašnja „trajektorija“ uključivala samo ulaze i izlaze. Primjerice, uobičajeno PID upravljanje po mjerenom izlazu moglo je ulaznom varijablom regulirati 2 stanja sustava i interno stanje regulatora (obuhvaćeno integratorom), pa je relevantan tek ulazni i izlazni signal. Moderna teorija upravljanja često zahtijeva uključivanje većeg broja varijabli procesa od onog koji uključuje regulacija. Tzv. regulacija *stanja* kasnije je mogla obuhvatiti sve polove procesa, ali je bilo potrebno znati sva stanja istoga. Pristup je vrlo intuitivan - na dosadašnje ulazne i izlazne podatke nadodat će se nove varijable, poznate kao *latentne* ([6], [7], [8]), u odnosu na do sada relevantne *manifestne* varijable utjelovljene vektorom  $w$ . Takvim latentnim varijablama  $x_\ell \in \mathbb{L}$  moguće je obuhvatiti *potpuno* ponašanje sustava, odnosno do sada opisano ponašanje ( $\mathfrak{B}$ ) je inducirano novim *potpunim*,

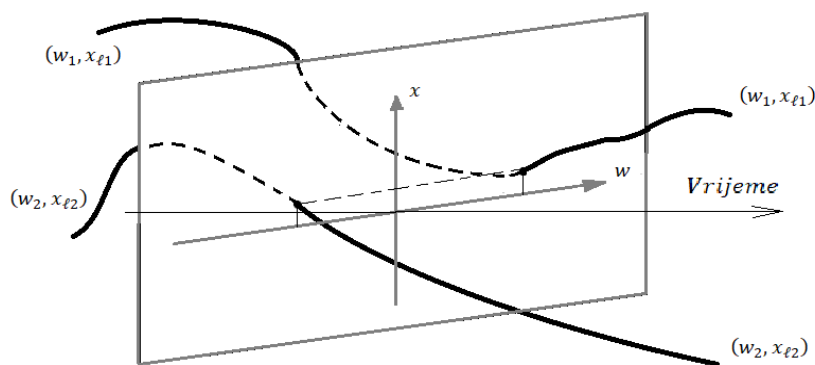
$$\mathfrak{B} = \{w | \exists x_\ell: [w \quad x_\ell]^T \subseteq \mathfrak{B}_{full}\}, \quad (3.20)$$

pa je određen i potpuni sustav

$$(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathbb{L}, \mathfrak{B}_{full}). \quad (3.21)$$

Sada se mogu definirati i *varijable stanja*, kao one latentne varijable za koje  $\mathfrak{B}_{full}$  zadovoljava tzv. *aksiome stanja* [8], odnosno, za  $x_{\ell_1}(t_0) = x_{\ell_2}(t_0)$  vrijedi

$$((w_1, x_{\ell_1}), (w_2, x_{\ell_2})) \in \mathfrak{B}_{full} \wedge_{t_0} (w_2, x_{\ell_2}) \in \mathfrak{B}_{full}. \quad (3.22)$$



**Slika 2. Aksiomi stanja**

Aksiomi stanja govore da će, znajući prošlu trajektoriju sustava,  $(w_1, x_{\ell_1})$ , u trenutku  $t_0$  su moguće samo one trajektorije u kojima je  $x_{\ell_1}(t_0) = x_{\ell_2}(t_0)$ . Dodatno se napominje, najmanja dimenzija  $x_{\ell_1}$  i  $x_{\ell_2}$  odgovarat će redu sustava, što će kasnije biti definirano kao tzv. kardinalnost stanja.

## 4. FUNDAMENTALNA LEMA

Namjera ovog poglavlja je predstaviti fundamentalnu lemu, koju će se u kasnijim poglavljima iskoristiti za sintezu algoritma za prediktivno upravljanje.

### 4.1. Invarijantne konstante LTI sustava

Neka je zadan  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B}) \subseteq \Sigma_{LTI}$  s reprezentacijom u obliku (3.4), raspisane sukladno (4.1), kako slijedi,

$$R(\sigma)w = R_0w + \dots + R_{L-1}\sigma^{L-1}w = 0, R_i \in \mathbb{R}^{p \times w}. \quad (4.1)$$

Ako se pretpostavi  $R_{L-1} \neq 0$ , najveći stupanj matičnog polinoma je  $L = L$  i naziva se *lag* jezgrene reprezentacije (ker. rep.), a kako je  $w$  vektor, polinomni redci sustava  $p$  jednadžbi bit će reda  $L$  ili manjeg. Specifično, s  $\mathbf{L}(\mathfrak{B}): \Sigma_{LTI} \rightarrow \mathbb{Z}_+$  se označava *najmanji lag* svih ker. rep. zadanog sustava.

Ako se ponovo razmotri polinom (4.1), može se primijetiti da vrijedi  $R(\sigma): (\mathbb{R}^w)^{\mathbb{Z}_+} \rightarrow (\mathbb{R}^p)^{\mathbb{Z}_+}$ , pa se na „izlazu“ polinoma pojavljuje vektor  $\mathbb{R}^p$ . Za slučaj minimalne jezgrene reprezentacije, konstantu  $\mathbf{p}(\mathfrak{B}): \Sigma_{LTI} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathbf{p}(\mathfrak{B}) = p$  poistovjećuje se s brojem izlaza i naziva se *kardinalnost izlaza*.

Zbroj lagova  $\sum_{i=1}^p L_i$  pripadajućih polinoma u (4.1) označava se s  $n$  i predstavlja dimenziju stanja. Specifično, najmanja dimenzija stanja (*kardinalnost stanja* ( $\mathbf{n}(\mathfrak{B})$ )) odgovara redu sustava. Radi se upravo o minimalnom broju varijabli stanja iz odjeljka 3.3.3. o prostoru stanja. Za sustav s ponašanjem  $\mathfrak{B}$  uvijek postoji ker. rep. za koju je kardinalnost izlaza  $\mathbf{p}(\mathfrak{B})$  minimalna po svim mogućim ker. rep. i naziva se *minimalna kernel reprezentacija* te za nju vrijedi da je polinomna matrica  $R(\sigma)$  punog ranga.

Dodatno, ker. rep. za koju su  $L = \mathbf{L}(\mathfrak{B})$ ,  $p = \mathbf{p}(\mathfrak{B})$  i  $n = \mathbf{n}(\mathfrak{B})$  naziva se *najkraća kernel reprezentacija*. Prema definiciji, najkraća ker. rep. je ujedno i minimalna.

Nadalje, tzv. *ulazna kardinalnost*  $\mathbf{m}(\mathfrak{B})$  predstavlja  $m$ -dimenzionalni vektor ponašanja  $\mathfrak{B}$ , za kojeg vrijedi  $w := \mathbf{m}(\mathfrak{B}) + \mathbf{p}(\mathfrak{B})$ , te koji je slobodan u  $\mathfrak{B}$ . Za  $m$  dimenzionalni vektor  $u$  se kaže da je *slobodan* u  $\mathfrak{B}$  ako je njime moguće permutirati  $w = (u, y)$  na način da postoji  $y$  takav da je nakon permutacije vrijedi  $w \in \mathfrak{B}$ . Općenito,  $m = \mathbf{m}(\mathfrak{B})$  tako označava broj ulaza u sustav.

Ponovno se može primijetiti da gornje invarijantne konstante ne ovise o diskretnom ili kontinuiranom zapisu, odnosno o odgovoru na pitanje predstavlja li  $w$  trajektoriju ili tek



trenutak u trajektoriji. Dodatno, intuitivno je jasno da će gornje vrijednosti biti u direktnoj vezi s uvjetima zadovoljavajuće identifikacije sustava. U nastavku će se zbog jednostavnosti izostaviti argument ( $\mathfrak{B}$ ) kod konstanti, budući da se podrazumijeva.

## 4.2. Anihilatori ponašanja

Neka je za  $w \in \mathfrak{B}_T$  zadana tzv. *Hankelova* matrica, karakteristične strukture

$$\mathcal{H}_L(w) := \begin{bmatrix} w(1) & \cdots & w(T-L+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(L) & \cdots & w(T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{wL \times (T-L+1)}. \quad (4.2)$$

Primjećuje se da je svaki stupac (kao i redak) gornje matrice i sam element ponašanja sustava. Prema tome, za svaki  $\mathbb{R}^{wL} \ni w \in \mathfrak{B}_L$  vrijedi prema definiciji ponašanja  $\mathbf{R}(\sigma)w_L = 0$ ,  $w_L := w|w \in \mathfrak{B}_L$ . Nadalje, ako se definira skup *anihilatora*  $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathbb{R}^{1 \times w}[\xi]$  s *anihilatorima*  $n \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}} | n^T \mathfrak{B} = 0$ , jasno je da će anihilatori ponašanja  $\mathfrak{B}_L$  biti usko povezani s redovima matičnog polinoma  $\mathbf{R}(\sigma)$ , s obzirom da je jezgra pripadajuće matrice svaki  $w_L$ . Konkretno, postoji skup  $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}^{L-1} \subseteq \mathbb{R}^{1 \times w}[\xi]$  s elementima  $n \in \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}^{L-1}$  takvima da je svaki element  $[n_0 \ n_1 \sigma \ \dots \ n_{L-1} \sigma^{L-1}] | n_i^T w = 0$  manji ili jednak  $(L-1)$  za  $\forall w \in \mathfrak{B}_L$ ,  $i = 1 \dots L-1$ . Takav zapis korespondira s članovima matrice  $\mathbf{R}(\sigma)$ -polinomima po  $\sigma$ . Općenito nam nisu poznati elementi matrice  $\mathbf{R}(\sigma)$ . Međutim u okvirima rada se podrazumijeva sposobnost prikupljanja podataka koji formiraju Hankelovu matricu, pa se postavlja ključno pitanje: kada će matrica  $\mathcal{H}_L(w)$  biti takva da obuhvati sve anihilatore,  $\forall w \in \mathfrak{B}_L$ ?

Alternativa je da obzervirana trajektorija u  $\mathcal{H}_L(w)$  može posjedovati skup vektora u *leftker*( $\mathcal{H}_L(w)$ ) koji ne pripada anihilatorima ponašanja sustava  $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}_L}$ , odnosno da trajektorija na sada rigorozno opisan način ne određuje ponašanje sustava s  $L$  diskretnih koraka. Ako navedeno ipak nije slučaj i Hankelova matrica je egzaktno odredila sustav, Willems je pokazao ([1]) da je mapa  $f: \mathfrak{B}_L \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}^{L-1}$  uz određene uvjete bijektivna za sve  $w \in \mathfrak{B}_L$  sustava  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B}_L) \subseteq \Sigma_{LTI}$ , pa je identifikacija sustava moguća.

Zapravo, pokazat će se da se gornje pitanje svodi na dobro poznati zahtjev u teoriji identifikacije, da je za dobro određen sustav potrebno osigurati dovoljno bogatu pobudu, koja će osigurati da svi modovi gibanja dinamičkog sustava budu prisutni u promatranim trajektorijama (u promatranom ponašanju) sustava. Štoviše, uvjet obuhvaćanja anihilatora je direktno povezan s linearnom nezavisnosti vektora matrice  $\mathcal{H}_L(w)$ . Točnije, potrebno je razapeti prostor svih mogućih trajektorija  $w \in \mathfrak{B}_L$ .

### 4.3. Fundamentalna lemma

Za dobro određivanje sustava iz njegovih izlaza bilo potrebno pobuditi ga na specifičan način, kojim bi iz njega dobili dovoljno bogatu informaciju koja će u potpunosti odrediti promatrani sustav. Takav uvjet je utjelovljen tzv. „perzistentnosi“ pobude ([1]).

*Definicija 4.1, Perzistentnost pobude.* Sustav s ulaznom kardinalnosti  $m = \mathbf{m}$  je perzistentno pobuđen reda  $L$  ako je rang Hankelove matrice  $\text{rank}(\mathcal{H}(u)) = mL$  gdje je  $u \in \mathbb{R}^{mT}$  slobodan u  $\mathfrak{B}_T$ .

$$\text{rank}(\mathcal{H}(u)) = mL. \quad (4.3)$$

Takve Hankelove matrice koje ispunjavaju (4.3) će se u nastavku označavati s  $\mathcal{H}(u) := \mathcal{H}_L(u)$ .

*Teorem 4.1, Fundamentalna lema.* Razmatra se upravljivi sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B}) \in \Sigma_{LTI}$  s ulazom  $u|u(k) \in \mathbb{R}^m$  za  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $m = \mathbf{m}(\mathfrak{B})$ . Neka je zadan vektor ponašanja  $w = \text{col}(u, y) \in \mathfrak{B}_T$  za  $T \in \mathbb{Z}_+$ . Neka je ulaz perzistentno pobudan reda  $L + n$  za  $n = \mathbf{n}(\mathfrak{B})$ . Tada vrijedi  $\text{colspan}(\mathcal{H}_L(w)) = \mathfrak{B}_L$ .

Gornji teorem nudi dovoljan uvjet na komponentu signala  $w$ , najčešće ulaznu, da Hankelova matrica  $\mathcal{H}_L(w)$  svojim vektorima razapinje prostor svih mogućih trajektorija upravljivog  $\Sigma_{LTI}$  sustava duljine  $L$ . Iz toga proizlazi da će svaka moguća trajektorija sustava biti određena linearnom kombinacijom stupčanih vektora matrice  $\mathcal{H}_L(w)$ , pa za  $g \in \mathbb{R}^{T-L+1}$  vrijedi

$$\mathcal{H}_L(w)g \in \mathfrak{B}_L, \quad (4.4)$$

odnosno  $w \in \mathfrak{B}_L$  ako i samo ako  $\exists g \in \mathbb{R}^{T-L+1}$  takav da vrijedi (4.4). Dodatno, povećavanjem skupa podataka  $T$  uz uvjet perzistentnosti znači da će svaki novi stupac biti vektor linearno zavisao o prethodnim. Također, budući da je  $\text{rank}(\mathcal{H}_{L+n}(u)) = Lm + n$ , potreban broj podataka je  $T \geq (m + 1)(L + n - 1)$ .

Može se zaključiti da će Willemsova fundamentalna lema biti dostatna za potpunu identifikaciju sustava, te je kao takva temeljni alat u analizi diskretnih sustava na temelju podataka. Manja je, ipak, opaska da nam dimenzija minimalne realizacije sustava,  $\mathbf{n}(\mathfrak{B})$ , u pravilu nije poznata, s obzirom da se pretpostavlja da model sustava nije jednostavno dokučiv. Međutim, u praksi bi ionako osigurali dovoljno veliki skup podataka kojim bi jednostavno kompenzirali red sustava.

## 5. SINTEZA DATA-BASE ALGORITMA

U sljedećem poglavlju pokazat će se sinteza regulatora kojim će se osigurati praćenje referentne trajektorije proizvoljnog LTI sustava. Pokazat će se da uvjet fundamentalne leme može poslužiti kao ograničenje ekvivalentno standardnim reprezentacijama sustava, što je okosnica bihevioralnog pristupa (iz univerzuma mogućih dinamika određuju se fizikalno moguće, sukladno ponašanju sustava). Prvi zadatak razmatra standardni probleme klasične simulacije [5].

### 5.1. Simulacija dinamičkog sustava temeljena na podatcima

Pod pojmom „simulacija“ se smatra određivanje odziva sustava za proizvoljni ulaz. U nastavku će se podatke  $w_d$  (koju će se nazivati *inicijalni podatci*) uzeti kao poznate budući da se smatra da su lako dostupni nasumičnom pobudom sustava. Indeksom „*ini*“ referirat će se na „inicijalnu“ *trajektoriju* do trenutka  $T_{ini}$ , koju treba razlikovati od inicijalnih *podataka*  $w_d$ , iako je jasno da su oba vektora „trajektorije“.

Zadana je trajektorija inicijalnih podataka  $w_d = col(u_d, y_d) \in \mathbb{R}^{wT}$ ,  $w_d \in \mathfrak{B}_T$  pripadajućeg sustava  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$ , takav da je signal  $u_d \in \mathbb{R}^{mT}$  perzistentno pobudan reda  $L + n$ . Potrebno je odrediti odziv sustava  $y \in \mathbb{R}^{pN}$ ,  $N \leq T - T_{ini}$  na novi ulazni signal  $u \in \mathbb{R}^{mN}$  nakon što je trajektorijom  $w_{ini} \in \mathfrak{B}_{T_{ini}} | w_{ini} = col(u_{ini}, y_{ini}) \in \mathbb{R}^{wT_{ini}}$ ,  $w_{ini} \wedge w \in \mathfrak{B}_{T_{ini}+N}$  definirano jedinstveno početno stanje  $x_{ini}$ . Ovdje se trenutno pretpostavlja nedostatak bilo kakvog oblik nesigurnosti u signalu  $u$  vidu šuma. Signali kompromitirani šumovima će se razmatrati u kasnijim podpoglavljima.

Nakon osiguravanja perzistentnosti pobude, formira se Hankelova matrica  $\mathcal{H}(w_d)$ , te je sigurno da postoji linearna kombinacija koja zadovoljava  $\mathcal{H}(w_d)g = col(w_{ini}, w)$ , gdje je  $s$   $w$  označen vektor nametnutog ulaza koji formira estimirani izlaz  $y$ ,  $w = col(w(0) \dots w(N-1))$ ,  $w(k) = col(u(k), y(k))$ ,  $k = 0 \dots (N-1)$ . Particijom Hankelove matrice u nastavku,

$$\mathcal{H}(w_d) = \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \\ U_f \\ Y_f \end{bmatrix} : U_p := \begin{bmatrix} u_d(1) \\ \vdots \\ u_d(T_{ini}) \end{bmatrix}, Y_p := \begin{bmatrix} y_d(1) \\ \vdots \\ y_d(T_{ini}) \end{bmatrix}, U_f := \begin{bmatrix} u_f(1) \\ \vdots \\ u_f(N) \end{bmatrix}, Y_f := \begin{bmatrix} y_f(1) \\ \vdots \\ y_f(N) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

gdje inicijali „*p*“ i „*f*“ označavaju prošlo (eng. *past*) odnosno buduće (eng. *future*) vrijeme, moguće je estimaciju podijeliti na dvije razine. Iz izraza

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{U}_f \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} \\ u \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

moгуće je rješavanjem algebarskih jednađzbi doći do vektora  $\mathbf{g}$ . Nakon toga, u sekundarnom koraku se rješavanjem  $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_f \mathbf{g}$  dolazi do izlaza uzrokovanog ulazom  $u$ . Sada je očita jednostavnost i sažetost postupka, ali ostaje vidjeti kolika je sličnost simulirane trajektorije od one „prave“, koju će se simulirati modelima u PS-u. Za rad je prirodno sustavu algebarskih jednađzbi (5.2) pristupiti iz „optimizacijskog“ konteksta, pa će se za rješavanje koristiti MATLAB-ova funkcija `linprog()`, koja univerzalno rješava probleme linearnog programiranja (LP). Konkretno, funkcija će pronaći „minimalni“  $\mathbf{g}$  koji zadovoljava (5.2).

### 5.1.1. Primjeri simulacija podacima

Sljedeći odjeljci pokazat će na praktičnim primjerima, čiji su podatci simulirani PS modelima ostavljenima u prilogu, simulaciju pomoću podataka sukladno prethodnom odjeljku. Svrha primjera je prije svega da se potvrdi egzaktnost estimacije.

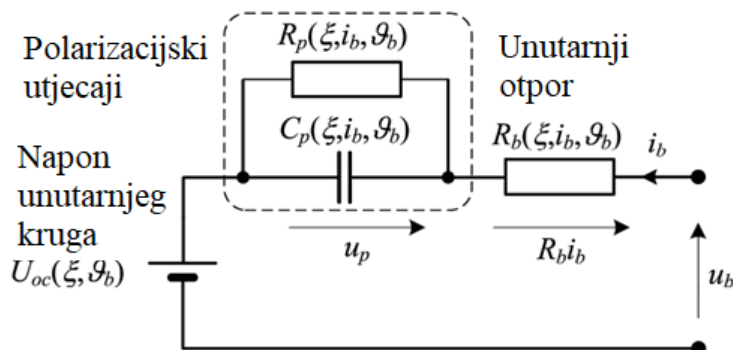
#### 5.1.1.1. Estimacija stanja napunjenosti (SoC) litij ionske baterije

Neka je zadan ulazni i izlazni skup podataka litij ionske baterije, gdje ulazni signal predstavlja ulaznu jakost struje, a izlazni stanje napunjenosti baterije.

$$\mathbf{w}_d = \begin{bmatrix} w_d(1) \\ \vdots \\ w_d(T) \end{bmatrix}, \mathbf{w}_d(k) = \begin{bmatrix} u_d(k) \\ y_d(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_b(k) \\ \xi_{SoC}(k) \end{bmatrix}, k = 1 \dots T. \quad (5.3)$$

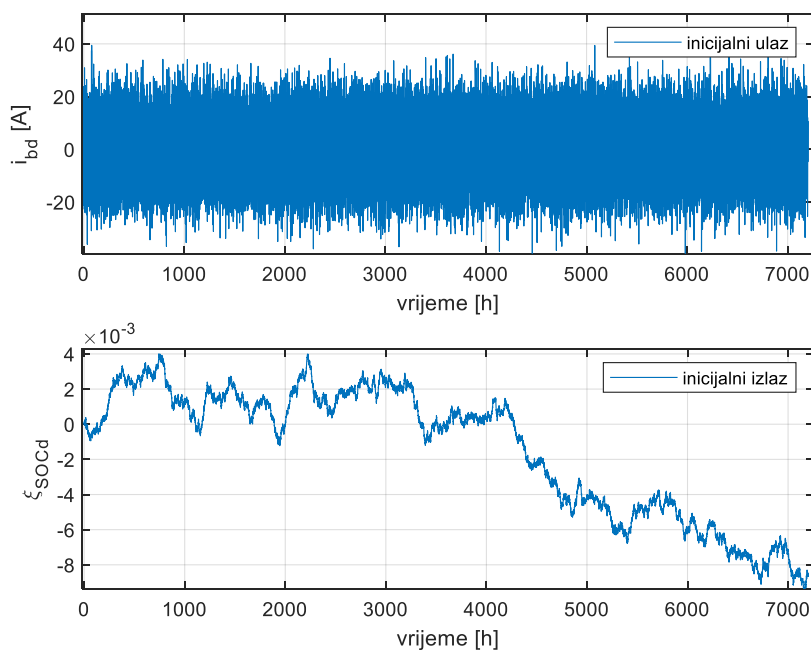
Potrebno je za budući signal ulazne struje odrediti estimirano stanje napunjenosti baterije. Kao „stvarni“ model, i motivacija za ovo poglavlje predstavlja se LTI sustav opisan u [12], gdje je estimirano stanje napunjenosti dobro poznatim Kalmanovim filtrom (optimalnim estimatorom). Iako linearan, sustav nipošto nije trivijalan za modeliranje, kako se radi o velikom broju teško mjerljivih utjecaja. Štoviše, kako je u [12] i navedeno, preporučljivo je obuhvaćanje vremenske varijantnosti parametara nekim oblikom adaptivnog regulatora. Model baterije temelji se na strujnom krugu prema slici 3, a generiranje podataka izvelo se *Simulink* modelom u alatu MATLAB (prilog, odjeljak 8.3.1).

Gornji sustav spada u skup SISO sustava, pa je  $\mathbf{m} = \mathbf{p} = 1$ .



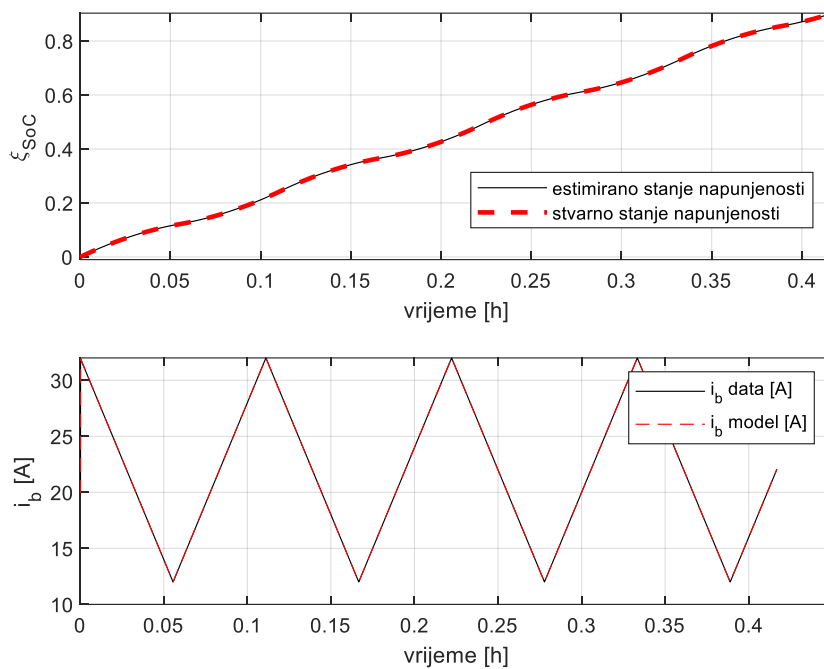
Slika 3 Strujni krug baterije [12]

Za generiranje inicijalnog skupa podataka dovoljno je sustav pobuditi šumom, za kojeg je sigurno da će kreirati linearno nezavisne ulaze, a time i osigurati perzistentnost pobude. Slika 4 pokazuje interpolaciju vrijednosti inicijalnih („offline“) podataka.



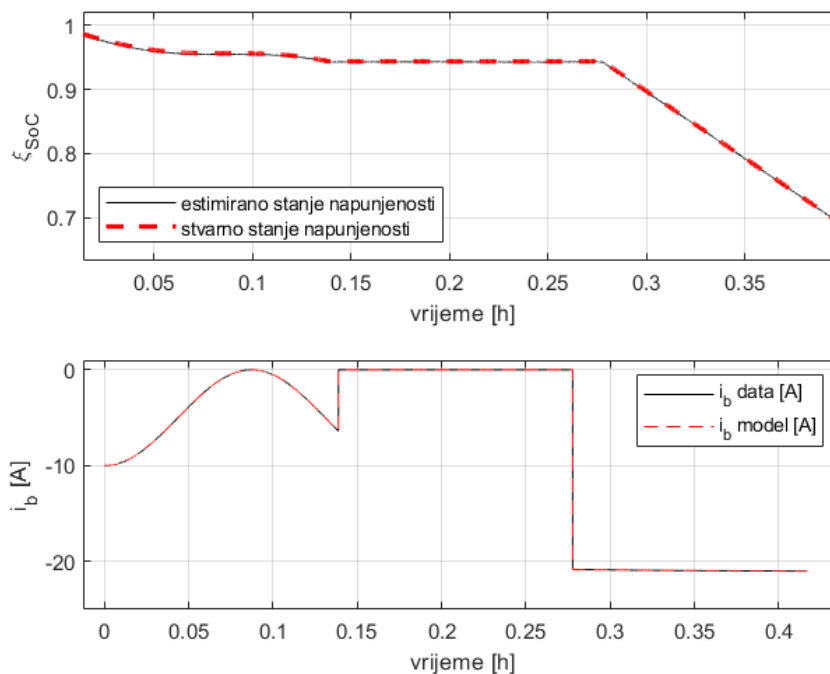
Slika 4 Ulazni i izlazni podatci za kreiranje Hankelove matrice

Nakon generiranja Hankelove matrice sukladno početku ovog odjeljka, rješavanjem algebarskih jednadžbi (5.2) i određivanjem izlaza  $y = Y_f g$  generira se trajektorija prema slici 5. Ulazni signal je trokutast, i pozitivan, što znači da će stanje napunjenosti rasti po vremenu.



**Slika 5. Estimacija napunjenosti baterije za režim punjenja**

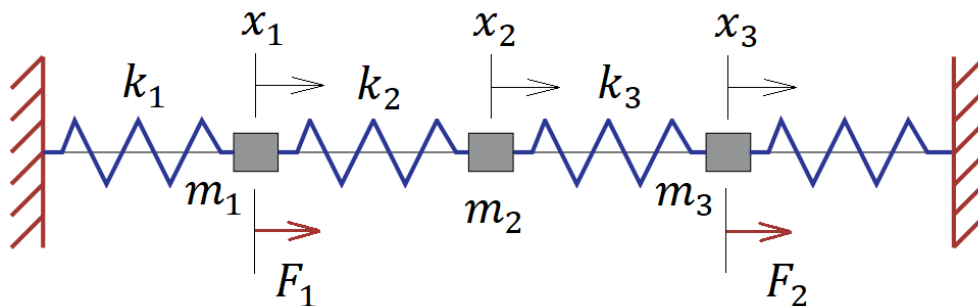
Za identične ulaze jakosti struje očito se dobivaju u principu identične estimacije napunjenosti. Slično se može pokazati i za proizvoljne režime pražnjenja baterije, odnosno za suprotan smjer jakosti struje  $i_b$ .



**Slika 6 Estimacija napunjenosti baterije za režim pražnjenja**

### 5.1.1.2. Simulacija elastično spregnutog sustava

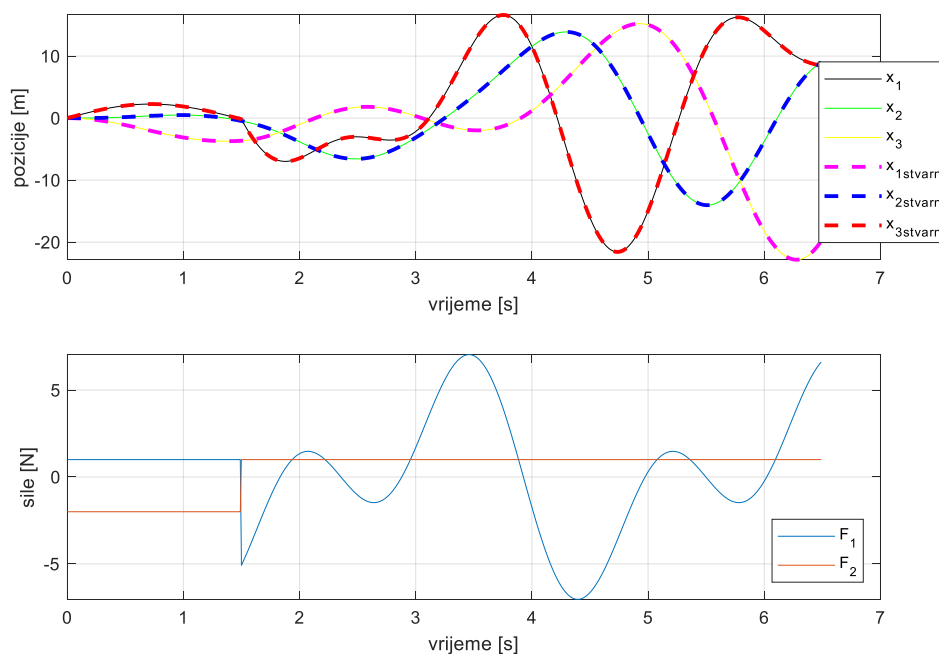
Neka je zadan skup podataka koji opisuje ulazne sile na elastično spregnuti sustav sukladno slici 7, dok se za izlazni signal uzimaju pozicije utega,  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$ .



Slika 7 Elastično spregnuti sustav 3 mase

Neka je zadana inicijalna trajektorija dostupna mjerenju, te se za budući poznati ulaz nastoji simulirati izlazno stanje sustava. Namjerno se radi o MIMO sustavu, za koji vrijedi  $\mathbf{m} = 2$ ,  $\mathbf{p} = 3$ , a sustav je „nepoznatog“ 6. reda,  $\mathbf{n} = 6$ .

Za postizanje granične stabilnosti zanemario se bilo kakav oblik disipacije u vidu prigušenja. Prema tome, ne postoji Ljapunovljeva funkcija koja bi potvrdila asimptotsku stabilnost ovakvog homogenog sustava. Gornji sustav protezat će se kroz nastavak rada.



Slika 8 Simulacija elastično spregnutog sustava 3 mase

Kako bi se dočarala točnost metode, namjerno je nakon inicijalnog vremena  $T_{ini} \cdot dis$ , gdje je  $dis$  vrijeme diskretizacije, promijenjen ulazni vektor, tako da se nakon identifikacije trenutne konfiguracije sustava estimira potpuno „neodređena“ trajektorija. Sukladno slici, očito je da je Hankelova matrica egzaktno definirala dinamiku sustava, bez ikakvih informacija o unutarnjoj dinamici, i to samo uporabom ulaznih i izlaznih podataka. Sljedeći korak je konačna implementacija razmatranih mehanizama, u nadi za sintezom prediktivnog upravljanja.

## 5.2. Prediktivno upravljanje (DeePC algoritam)

U prošlom poglavlju pokazalo se da se, uz određene uvjete, egzaktno moglo simulirati odziv (ponašanje) sustava, i to isključivo na temelju ulazno-izlaznih podataka. Utvrdila se mogućnost predikcije trajektorije sustava pobuđenog proizvoljnim ulaznim signalom. U ovom poglavlju će se razmatranja proširiti na numeričku optimizaciju, što je temelj za optimalno prediktivno upravljanje. Konkretno, u odjeljku u nastavku provest će se nominalni DeePC algoritam za fiksni horizont, što je u determinističnom slučaju, uz predstavljenu točnu predikciju, ekvivalentno DeePC upravljanju u otvorenoj petlji.

### 5.2.1. Nominalni DeePC – fiksni horizont

Na početku se predstavlja funkcija cilja

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (y(k) - r(k))^T \mathbf{Q} (y(k) - r(k)) + u^T(k) \mathbf{R} u(k), \quad (5.4)$$

za  $\mathbf{Q} \in \mathbb{S}_+$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbb{S}_{++}$ , te vektor referentne trajektorije  $r = \text{col}(r(0) \dots r(N-1)) \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}N}$ . Zadan je sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{\mathbf{w}}, \mathfrak{B})$ , kojim se pobudom perzistentnosti  $\leq (L + \mathbf{n})$  došlo do inicijalnih podataka :  $w_d = \text{col}(u_d, y_d) \in \mathbb{R}^{\mathbf{w}T}$ ,  $w_d \in \mathfrak{B}_T$ . Potrebno je provesti algoritam koji za konačni horizont određuje optimalni ulazni vektor  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{m}N}$  s obzirom na funkciju cilja (5.4), nakon što zadana inicijalna trajektorija sustava  $w_{ini} = \text{col}(u_{ini}, y_{ini}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{w}T_{ini}}$ ,  $w_{ini} \in \mathfrak{B}_{T_{ini}}$  odredi jedinstveno početno stanje  $x_{ini}$ , i to takvu da osigura praćenje proizvoljne trajektorije  $r$  takve da  $w_{ini} \wedge w_r \in \mathfrak{B}_{T_{ini}+N}$ .

Slično odjeljku 5.1.1. sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^{\mathbf{w}}, \mathfrak{B})$  je pobuđen na način da je zadovoljen uvjet perzistentnosti pobude, odnosno, za  $w_d = \text{col}(u_d, y_d)$  vrijedi

$$\text{rank}(\mathcal{H}(u_d)) \geq \mathbf{m}L + \mathbf{n}. \quad (5.5)$$

Ponovo, komponente vektora  $w_d$  sortiraju se u Hankelovu matricu



$$\mathcal{H}(w_d) = \begin{bmatrix} w_d(1) & w_d(2) & \dots & w_d(T-L+1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_d(L) & w_d(L+1) & \dots & w_d(T) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Budući da vrijedi (5.5), sukladno *Teoremu 4.1*,  $\text{colspan}(\mathcal{H}_L(w)) = \mathfrak{B}_L$ . Ponovno se razmatra preformulacija matrice  $\mathcal{H}(w_d)$ ,

$$\mathcal{H}(w_d) = \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \\ U_f \\ Y_f \end{bmatrix}; \mathbf{U}_p := \begin{bmatrix} u_d(1) \\ \vdots \\ u_d(T_{ini}) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_p := \begin{bmatrix} y_d(1) \\ \vdots \\ y_d(T_{ini}) \end{bmatrix}, \mathbf{U}_f := \begin{bmatrix} u_f(1) \\ \vdots \\ u_f(N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_f := \begin{bmatrix} y_f(1) \\ \vdots \\ y_f(N) \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

na način da se osigura dovoljno duga inicijalna trajektorija za određivanje jedinstvenog početnog stanja  $x_{ini}$ . Ovdje se naglašava da reprezentacija

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} \\ u \\ y \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

potpuno određuje ponašanje  $\mathfrak{B}_{T_{ini}+N}$ , te se kao takva može poslužiti kao ograničenje jednakosti u optimizacijskom problemu, slično diskretnom zapisu PS-u.

Primjerice, neka je zadana funkcija cilja (5.4) s pozitivno (semi)definitnim težinskim matricama  $\mathbf{Q} \in \mathbb{S}_+$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbb{S}_{++}$ . Uz tako odabrane težinske parametre, jasno je da je funkcija cilja kvadratna, odnosno pozitivno definitna, dakle konveksna,  $J \in \mathcal{C}_f$  sukladno razmatranjima 2. poglavlja.

Predstavlja se inicijalni optimizacijski problem

$$\begin{aligned} &\text{minimiziraj po } g: \quad (5.4) \\ &\text{tako da vrijedi:} \quad (5.8), u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}, y(k) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Također sukladno 2. poglavlju rada, ovakav problem ekvivalentan je problemu MPC upravljanja ([14]), pa se može postaviti pitanje u kakvom su odnosu rješenja promatranih upravljačkih problema, (5.11) za konveksne skupove  $(\mathcal{U}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{C}$ .

MPC OP	DeePC OP	
minimiziraj: (5.4)	minimiziraj: (5.4)	(5.10)
tako da vrijedi: $x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k)$	tako da vrijedi: (5.8)	
$u(k) \in \mathcal{U}, y(k) \in \mathcal{Y}$	$u(k) \in \mathcal{U}, y(k) \in \mathcal{Y}$	

Cjelovita usporedba dva algoritma provest će se u sljedećim potpoglavljima, nakon zatvaranja petlje.

Jasno je da će računalna kompleksnost rasti s povećanjem horizonta  $N$ . Osim toga, veliki će značaj biti i u koraku diskretizacije, budući da će i on u konačnici utjecati na duljinu trajanja horizonta. Utvrdilo se da je funkcija cilja konveksna. Osim toga, kako su ograničenja politopična, i ona predstavljaju konveksni skup, pa promatrani problemi spadaju u domenu kvadratnog programiranja, odnosno konveksnih optimizacijskih problema, te će se za njihovo rješavanje koristiti `quadprog()` alat s istoimenim rješavačem integriranim u MATLAB alat. Funkcija se koristi interior-point-convex algoritmom za rješavanje problema kvadratnog programiranja.

### 5.2.2. DeePC algoritam u zatvorenoj petlji

Nakon definiranja problema za fiksni horizont, o ovom odjeljku se petlja zatvara, te se problem svodi na pomični horizont duljine  $N$ . Neka su zadani inicijalni podatci  $w_d = \text{col}(u_d, y_d)$  nekog linearnog sustava koje se, uz pretpostavku perzistentnosti pobude reda  $L + \mathbf{n}$ , identično prethodnim odjeljcima, strukturiralo u Hankelovu matricu  $\mathcal{H}(w_d)$ , s pripadajućim podmatricama  $(\mathbf{U}_p, \mathbf{Y}_p, \mathbf{U}_f, \mathbf{Y}_f)$ , identično (5.7). Dodatno, neka particirane podmatrice  $(\mathbf{U}_p, \mathbf{Y}_p)$  odgovaraju inicijalnoj trajektoriji dovoljne duljine na način da je zadovoljen uvjet „obzervabilnosti“ iz odjeljka 3.4.1.. Konačno se predstavlja nominalni DeePC algoritam. Neka je sa  $t$  označen trenutni vremenski trenutak, odnosno početak horizonta, poznata je trajektorija  $r(k)$ , te su strukturirane sve matrice iz (5.7).

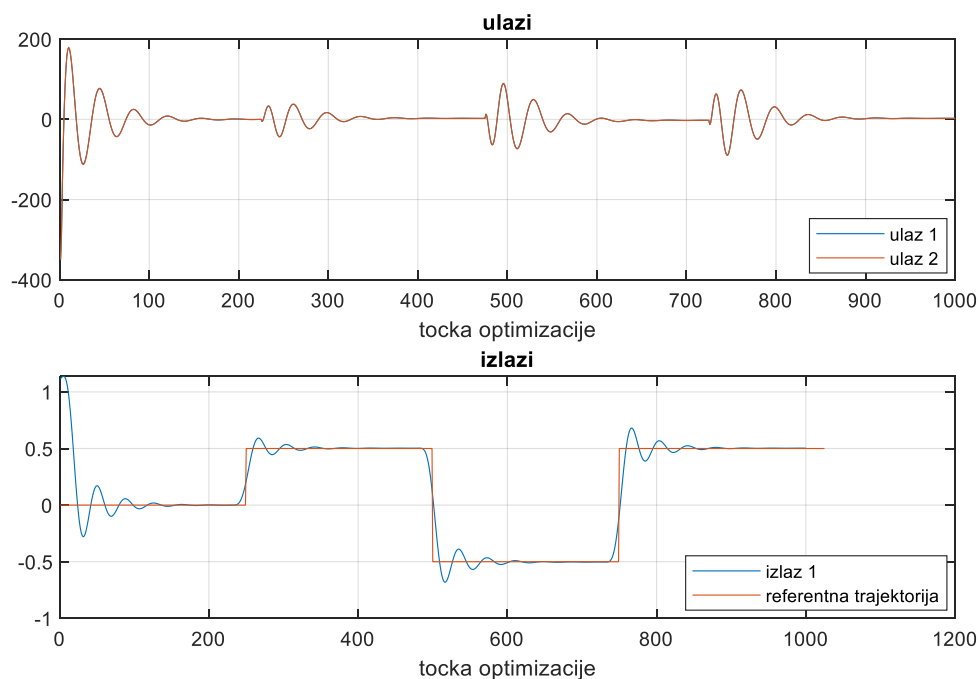
#### DeePC

Unesi:  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, r(k), \mathcal{U}, \mathbf{Y}$

1. riješi DeePC OP iz (5.9)
2. izračunaj  $u = \mathbf{U}_f g$  (5.11)
3. primjeni  $h \leq (N - 1)$  prvih vrijednosti  $u$
4. ažuriraj vektor inicijalnih podataka, te postavi  $t = t + h$
5. vrati se na broj 1.

U ovom će radu primijenjena sekvenca odgovarati upravo koraku diskretizacije, odnosno vrijedi  $h = 1$ . S  $n_{hor}$  će se označavati broj horizonata.

Gornji algoritam primijenilo se na praćenje trajektorije sustava elastično spregnute tri mase danom na slici 7, s identičnim parametrima kao u simulaciji odjeljka 5.1.1.2, tj. tablici 4 u prilogima. Rezultati simulacije pokazani su slikom 9, za odabrane parametre simulacije prema tablici 1. Na apscisi se pod „točka optimizacije“ smatra diskretni „trenutak“ nad kojim se vrši optimizacija. Razlika 2 točke optimizacije odgovara koraku diskretizacije.



**Slika 9 DeePC algoritam u zatvorenoj petlji**

Sustav se identificiralo uz  $T = 192$ ,  $T_{ini} = 12$ , te korak diskretizacije  $disc = 0.01$ . Naravno, većim penalizacijom izlaza u odnosu na penalizaciju ulaza moglo se postići i bolje praćenje referentne trajektorije, iz veće upravljačke signale.

**Tablica 1 Parametri simulacije nominalnog DeePC-a**

$Q = 5000$
$R = 0.01$
$N = 25$
$n_{hor} = 1000$

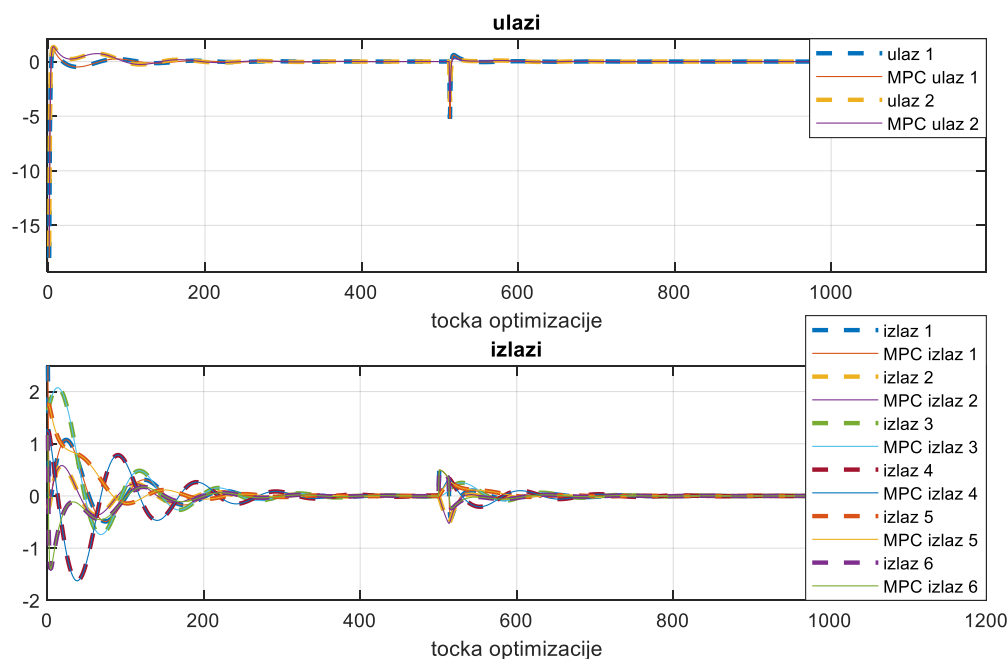
Očito će upravljanje osigurati praćenje trajektorije, iako je zbog prijenosa upravljačkog signala kroz elastični sustav, do mase čiju poziciju reguliramo, vidljivo oscilatorno ponašanje. Upravljačke varijable praktički su se poklopile zbog simetričnosti.

### 5.2.3. DeePC-MPC usporedba

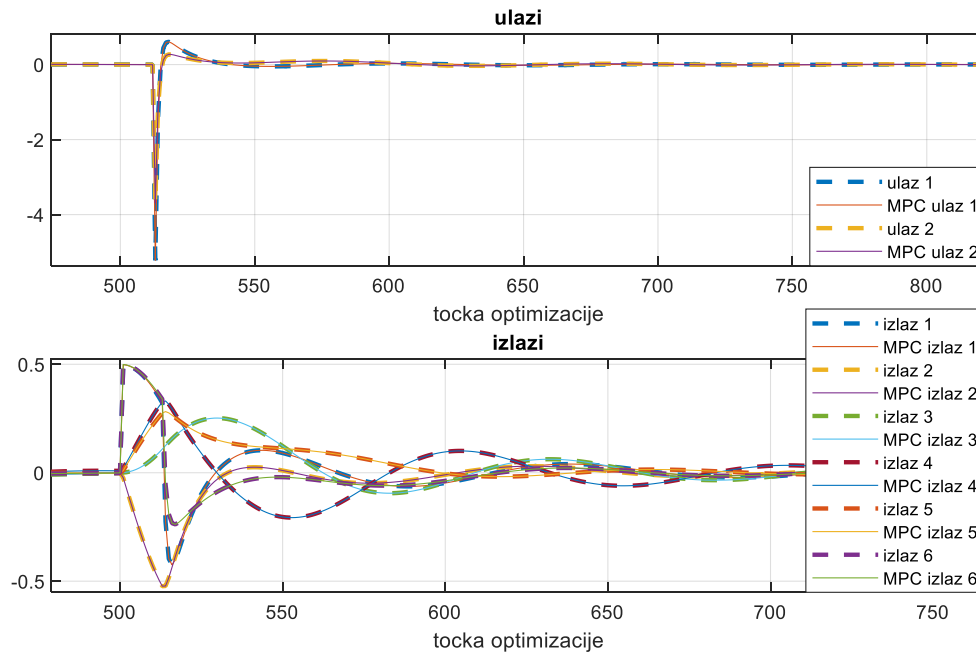
S obzirom na identičnu funkciju cilja, te predočenu egzaktnost u identifikaciji modela, postavlja se pitanje u kojem su odnosu MPC i DeePC upravljanje. U ovom odjeljku pokazat će se na modelu u prostoru stanja, da se uz određene uvjete postižu identični odzivi prediktivnog upravljanja na temelju podataka i onog temeljenog na ulazno-izlaznim podacima, kako je do sada pokazano.

Neka je zadan prošireni MDS sustav tri spregnute mase, prema slici 7. Kao izlaz sustava, uzeta su sva stanja sustava, kako bi penalizacija bila ekvivalentna MPC upravljanju nad vektorom stanja, dok aktuatori (ulazni signali) ponovno djeluju na dvije rubne mase.

Odzivi sustava u zatvorenoj petlji, zajedno s pripadajućim ulazima dani su slikom 10, za parametre sukladno tablici u spomenutom prilogu.



Slika 10 MPC-DeePC usporedba



**Slika 11 MPC-DeePC usporedba odziva na poremećaj**

Može se zaključiti da, uz identičnu identifikaciju stanja, što je pokazano u odjeljku 5.1.1.2., optimizacijski problemi iznjedrili su identične upravljačke signale, koji su se projicirali na identične izlaze, čak i pod djelovanjem unesenog poremećaja u 500. točki optimizacije. Prema tome, uz  $w_d = \text{col}(u_d, y_d) | w_d \in \mathfrak{B}_T$ ,  $w_{ini} = \text{col}(u_{ini}, y_{ini}) | w_{ini} \in \mathfrak{B}_{T_{ini}}, T_{ini} \geq l_0$ , te  $u_d | \text{rank}(\mathcal{H}(u_d)) \geq Lm + n$ , MPC i DeePC daju identične rezultate u zatvorenoj petlji. S obzirom da je rješenje dva OP-a očito identično, može se lako pokazati da bi i predikcijska trajektorija u svakom horizontu bila identična.

### 5.3. Stacionarna točnost

Stacionarna točnost, ili općenito stabilnost u zatvorenoj petlji, dobro je poznati problem optimalnog upravljanja na pomičnom horizontu, s obzirom da svaka optimalna trajektorija ne implicira stabilnost [14]. Definicija stabilnosti, sukladno 2. poglavlju (slično je pokazano u [9] i [14]), motivirana je općenitom definicijom iz Ljapunovljeve direktne metode, s naglaskom na analizi diskretnih sustava.

Općenito u praksi postoje 2 pristupa garanciji stacionarne točnosti – postaviti ograničenje na minimalnu duljinu horizonta (vidi [14], poglavlje 2.6.), ili, što će biti naglašeno u ovom radu, postaviti terminalno ograničenje na terminalno stanje.

Ravnotežna točka diskretnog kvazi-homogenog sustava zadovoljava  $x(k+1) - x(k) = 0$ , te je za LTI sustave ona sigurno stabilna (vidi [14], dodatak B.2). U kontekstu ovog rada, vrijedi sljedeća definicija.

*Definicija 5.1, Stacionarna točka.* Za stacionarni ulazno-izlazni par  $(u_s, y_s) \in \mathbb{R}^{m+p}$  kaže se da je u ravnoteži ako je niz u trajektoriji  $(u(k), y(k)) = (u_s, y_s)$  za  $k \in [k_1, k_2] | k_2 - k_1 = \mathbf{n}$ .

Naravno, uvjet veličine gornjeg intervala direktno je određen razmatranjima u poglavlju 3.4.1. o mjerljivosti. Prema tome, ravnoteža stacionarnog stanja na kraju horizonta može se jednostavno nametnuti dodatnim ograničenjem optimizacijskog problema, dodavši *terminalni* uvjet slično (5.12).

$$\text{minimiziraj: (5.4)}$$

$$\text{tako da vrijedi: (5.8), } u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}, y(k) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C} \quad (5.12)$$

$$\begin{bmatrix} u_{(N-\mathbf{n}, N-1)} \\ y_{(N-\mathbf{n}, N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ y_s \end{bmatrix}$$

U terminalnom ograničenju,  $s$  indeksom je označeno zadnjih  $\mathbf{n}$  vrijednosti. Bez takvih ograničenja, MPC problem definiran kao u (5.11), moguće je i destabilizirati u zatvorenoj petlji. Drugi pristup stacionarnoj točnosti bio bi ograničenje duljine horizonta s donje strane.

Ipak, u praksi se za mehaničke sustave zahtijeva asimptotska, ili čak eksponencijalna stabilnost. Gornja ograničenja garantiraju tek da će funkcija cilja s pomičnim horizontima ostati ograničena u konveksnoj domeni  $\mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  za upravljanje u otvorenom krugu.

Kako je pokazano u [9], koji generalno predstavlja prve pokušaje garancije nad performansama DeePC algoritma, uz uvjet perzistentnosti pobude reda  $L + 2\mathbf{n}$ , za sustav  $\Sigma(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$ , pri OP (5.12), ako se pretpostavi da je optimalna  $J^*$  ograničena u skupu inicijalnih stanja za koje je OP rješiv, postoji Ljapunovljeva funkcija koja garantira eksponencijalnu stabilnost stacionarnog stanja  $x_s$  određenog s  $\begin{bmatrix} u_s \\ y_s \end{bmatrix}$  trajektorije  $w \in \mathfrak{B}_{L+\mathbf{n}}$ . Dodatna perzistentnost u [9] uzrokovana je uvjetom dovoljno određenog stanja sustava u stacionarnoj točki (*Definicija 5.1*), zbog produljenja trajektorije na  $L + \mathbf{n}$ .

Primjerice, ako se pretpostavi rješivost OP-a, stanje sustava na kraju predikcijskog horizonta, za koje se pretpostavlja da je optimalno, je u ravnotežnoj točki, odnosno vrijedi

$$J_{t+1} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{t+1}^T(k) \mathbf{Q} x_{t+1}(k) + u_{t+1}^T(k) \mathbf{R} u_{t+1}(k) = \sum_{k=1}^{N-1} x_t^{*T}(k) \mathbf{Q} x_t^*(k) + u_t^{*T}(k) \mathbf{R} u_t^*(k), \quad (5.13)$$

$$= J_t^* - \left( x_t^{*T}(0) \mathbf{Q} x_t^*(0) + u_t^{*T}(0) \mathbf{R} u_t^*(0) \right), \quad (5.14)$$

što znači da vrijedi  $J_{t+1} \leq J_t^* - (x_t^{*T}(0)Qx_t^*(0) + u_t^{*T}(0)Ru_t^*(0))$ , odnosno postoji IOSS (eng. *Input-Output to State Stability*)([14], [22]) Ljapunovljeva funkcija  $W = x^T Px$  takva da vrijedi  $W(x(k+1)) - W(x(k)) \leq -\frac{1}{2}\|x\|_{\ell_2}^2 + c_1\|u\|_{\ell_2}^2 + c_2\|y\|_{\ell_2}^2$  za  $\forall(x, y, u) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^{n_{pm}}$  i odgovarajuće  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ . Ako se uzme kandidacijska Ljapunovljeva funkcija  $V(x) = \gamma W(x) + J_t^*$  za neki  $\gamma > 0$ , te se pretpostavi da je  $J_t^*$  ograničen s gornje strane s  $J_t^* \leq c_3\|x\|_{\ell_2}^2$  za  $\forall x \in \mathcal{X}$ , vrijedi

$$V(x) = J_t^* + \gamma W(x) \leq (c_3 + \gamma \lambda_{\max}(P))\|x\|_{\ell_2}^2, \quad (5.15)$$

odnosno Ljapunovljeva funkcija je ograničena s gornje strane. Nadalje, ako se za  $\gamma$  uzme

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}}{\max(c_1, c_2)} > 0, \quad (5.16)$$

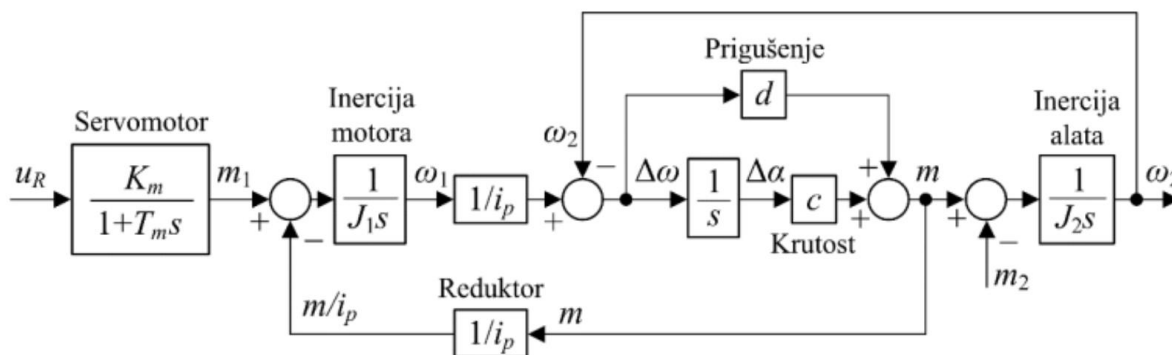
dobiva se da je razlika Ljapunovljeve funkcije po horizontima

$$V_{t+1}(x) - V_t(x) = J_{t+1}^* + \gamma W_{t+1}(x) - J_t^* - \gamma W_t(x) \leq \frac{\gamma}{2}\|x_t\|_{\ell_2}^2, \quad (5.17)$$

što sukladno definiciji Ljapunovljeve funkcije (2. poglavlje, *Definicija 2.7*) i *Teoremu 2.2* znači da sustav asimptotski trne stacionarnom stanju. Potrebno je napomenuti da zbog terminalnog ograničenja treba osigurati dovoljno dugi horizont, kako bi OP bio rješiv u inicijalnom stanju.

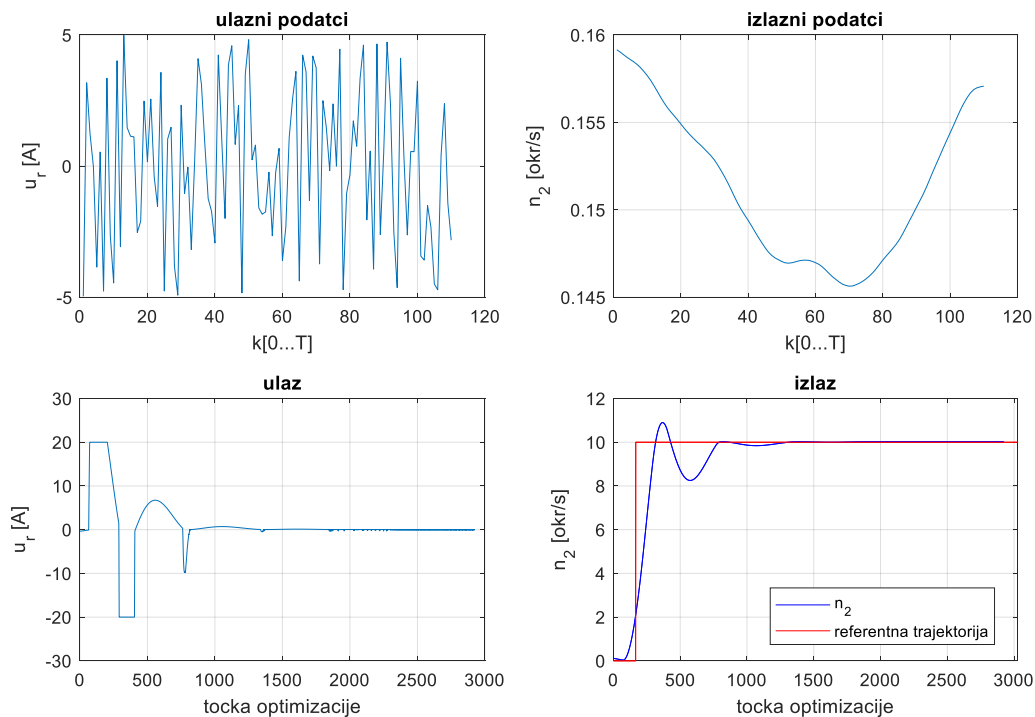
### 5.3.1. Primjer stacionarne točnosti – sustav za bušenje

Neka je zadan sustav za bušenje čiji je model prikazan na slici 12. Potrebno je, uz zanemarivanje opterećenja u vidu signala  $m_2$  na slici 12, osigurati optimalnu regulaciju brzine vrtnje motora ( $n_2$ ) uz zagantiranu eksponencijalnu stabilnost stacionarnog stanja. Ponovno se radi o SISO sustavu.



Slika 12 Model sustava za bušenje iz [13]

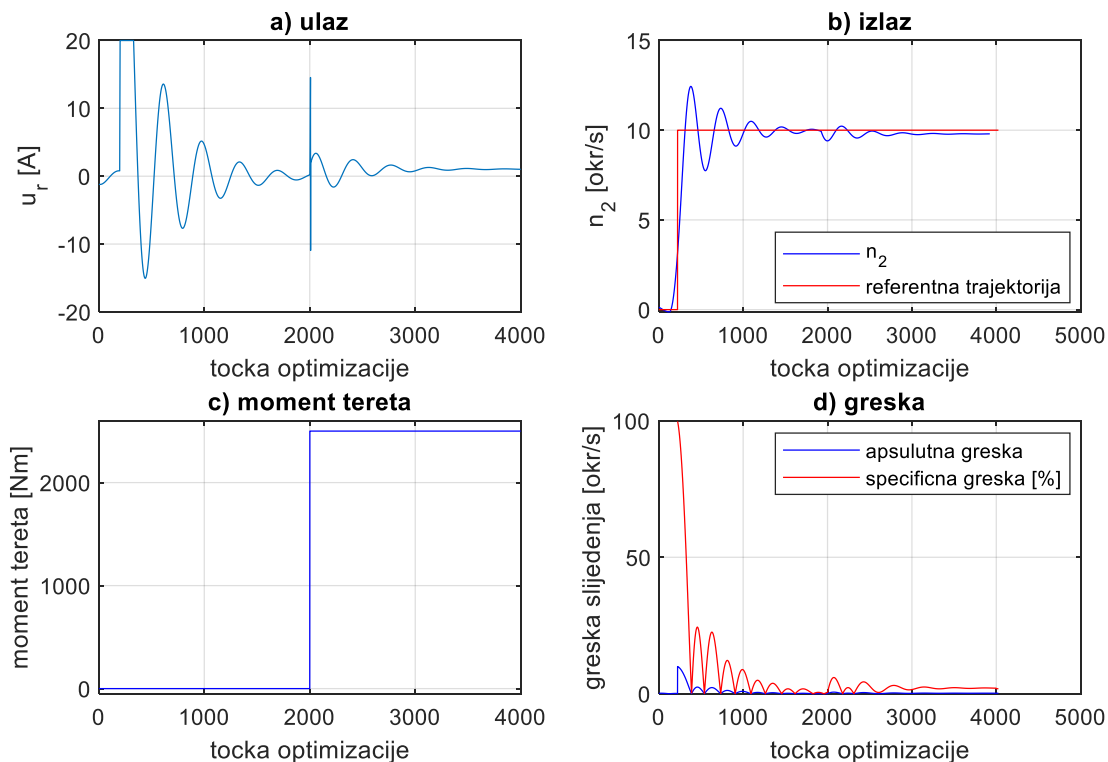
Vrijednosti parametara koje definiraju dinamički model dani su u tablici 5 u priložima. Nakon generiranja dovoljno bogatog ulazno-izlaznog skupa podataka (slika 13) i definiranja inicijalne trajektorije (koja nije iscrtana zbog jednostavnosti), rješava se OP (5.12). Ulazni signal, ulazna jakost struje servomotora, ograničena je na 20 ampera. Odziv sustava prikazan je na slici 13.



Slika 13 Inicijalni podatci i rezultati simulacije bušćeg sustava

Očito je stacionarno stanje postignuto, uz povećani prebačaj broja okretaja, među ostalim uzrokovan i manjim prigušenjem vratila, odnosno velikom inercijom druge mase. Veći nedostatak gornjih uvjeta, koji se zaobišao činjenicom da nad brojem okretaja ne postoji opterećenje (čak ni u vidu trenja) jest činjenica da ulazno izlazni signali stacionarnog stanja nisu jasno određeni za stacionarna stanja koja nisu 0, s obzirom da model sustava nije definiran. Primjerice, da se u 2000. točki optimizacije (nakon vremena  $2000 \text{ disc} = 10\text{s}$ ) nad drugom rotirajućom masom postavilo povećano opterećenje  $m_t = 2500\text{Nm}$ , sukladno slici 14, nominalno upravljanje bez ograničenja bilo bi stacionarno netočno, a signal nužan za kompenzaciju poremećaja bio bi teško određiv. Prema tome, uobičajena spoznaja da *closed-loop* upravljanje nije niti potrebno za sustave bez nekog oblika nesigurnosti ili poremećaja [14], prenijet će se i na DeePC upravljanje.



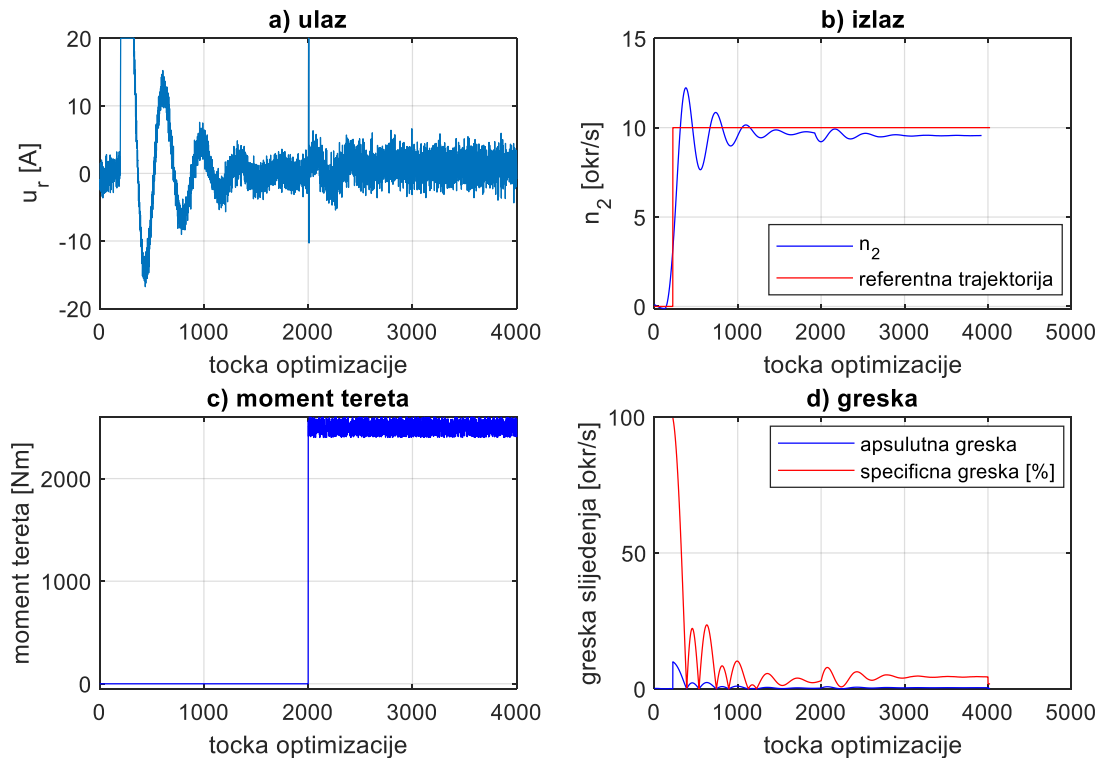


**Slika 14** Rezultati simulacije bušćeg sustava kod pojave momenta tereta

Problem postaje dodatno otežan uvođenjem, za sustav opravdanim, nesigurnosti u poremećaj (primjerice radi nehomogenosti bušenog materijala) ili mjerene podatke, zbog nesavršenosti mjerenja. Uneseni šum je ravnomjerne distribucije, amplitude prema tablici 2.

**Tablica 2** Amplitude šuma za simulaciju regulacije brzine vrtnje sustava za bušenje

<u>Šum</u>	<u>Amplituda</u>
Moment tereta	200N
Upravljačka varijabla	$10^{-8}A$
Mjerena varijabla	$10^{-3} [okr/s]$



**Slika 15** Rezultati simulacije bušćeg sustava kod pojave momenta tereta i šuma

Prvo, algoritam je slučaj bez šuma riješio sve horizonte za 18.5594 sekundi, dok je vrijeme simulacije sa šumom 294.2895 sekundi. Ako se zanemari manji dio računalnog opterećenja na rješavanje simulacije, a broj točaka optimizacije je 4000, za svaki horizont je utrošeno 0.0736 sekundi. Prema tome, ako se napomene da je vrijeme diskretizacije 0.005 sekundi, a na sustav djelujemo svaki korak ( $h = 1$ ), zaključuje se da uspješna implementacija algoritma za nametnuti šum nije moguća s računalnom snagom rabljenog računala. Također, iako mjerenje u simulaciji je napregnuto šumom, inicijalni podaci Hankelove matrice bili su idealni, što nije često u praksi. Na poslijetku, opaža se pojava tzv. *chattering*-a ulaznog signala struje.

Općenito se na temelju simulacija zaključuje da je DeePC upravljanje vrlo nepovoljno reagira na pojavu šuma, što je ilustrirano u ovom primjeru. Sva navedena problematika motivirala je istraživače da uvedu robusno djelovanje do sada opisanom algoritmu.

Za rješavanje nemodeliranog poremećaja oblika kako je to pokazano u ovom primjeru, mogu se iskoristiti sve poznate metode u MPC upravljanju, od kojeg se naglašavaju 3: *i*) modelirati poremećaj *ii*) mjerenjem i identificiranim modelom estimirati poremećaj *iii*) odabrati ulazni signal koji smanjuje utjecaj poremećaja [14].

## 5.4. Robusnost

Optimalno upravljanje već je dugo vremena isprepletano s robusnim. Posebno je to naglašeno primjerice kod tzv. dinamičkog programiranja (eng. *dynamical programming*, DP), a dobro su poznate metode optimalnog robusnog upravljanja (npr.  $H_2$ ,  $H_\infty$ ).

U nastavku će se razmotriti pojedine metode prilagodbe algoritma na nesigurnosti, bilo da su izazvana nepoznatim vanjskim poremećajima, ili oblikom nesigurnosti signala. Dobro je poznato da je problem robusnosti u općenitom smislu daleko od trivijalnog, a analize su se razgranale na veliki broj matematički zahtjevnih alata. Primjerice, uvođenje šuma u OP uvest će problem u novu granu optimizacije – linearno stohastičko programiranje (koje je u ovom kontekstu usko povezano s tzv. *robusnom statistikom*, odnosno *robusnom optimizacijom* [27]), a nedostatak određenosti poremećaja dovest će u pitanje njegovu dohvatljivost (eng. *feasibility*) ([20]). Štoviše, kod DeePC upravljanja nesigurnost djeluje na još „fundamentalnijoj“ razini, o čemu više riječi u sljedećim odjeljcima.

### 5.4.1. O robusnosti MPC-a

Možebitno je najprirodniji tijek analize robusnosti dobro započeti istom analizom nominalnog MPC-a. Bez uvođenja nesigurnosti, MPC problem je determinističan, i uz pripadajuće preduvjete optimalni ulazni signal poklapa se s onim koje za identično stanje daje zakon upravljanja DP-a, a u principu bi i upravljanje u otvorenoj petlji bilo zadovoljavajuće ako sustav nije nestabilan. U drugu ruku, poremećaj bi u bilo kojem trenutku mogao učiniti OP nerješivim, a pad vrijednosne funkcije nije osiguran, tako da je rekurzivna izvedivost teško dokaziva. Teza bi se mogla proširiti na bilo koji oblik nesigurnosti, osobito ako se ona prenosi na stanje sustava, koje se u tom slučaju treba estimirati, unoseći istovremeno dodatne nesigurnosti u kalkulacije.

### 5.4.2. Robusnost DeePC-a

Najveći nedostatak do sada razmatranog DeePC algoritma je činjenica da se mjereni signali u praksi ne pojavljuju u čistom obliku, već općenito posjeduju neki oblik šuma. Uzrok šuma najčešće su nesavršenosti sustava koje u principu nije moguće opisati modelom, šum nastao upravljačkim signalima, ili su sama posljedica mjerenja. Posljedica šuma je također dvojaka, s obzirom da se pohranjivanje informacija u procesu upravljanja obavlja na dvije razine – kod prikupljanja podataka  $y_d$ , ili kod „*real-time*“ mjerenja  $y_{ini}$ . Pritom, osim što Hankelova matrica  $\mathcal{H}(w_d)$  više ne razapinje prostor ponašanja  $\mathfrak{B}_T | w_d \in \mathfrak{B}_T$  sustava  $\sum(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^w, \mathfrak{B})$ , pa je

i većina vektora stupaca u  $\mathcal{H}(w_d)$  linearno nezavisna, također je i inicijalno stanje  $y_{ini}$ , kao i predikcija trajektorije, po definiciji netočno određeno. Dakle, može se posumnjati u primjenjivost algoritma u praktičnim problemima.

Ipak, brojni primjeri u praksi pronalaze rješenja za praktične probleme signala kontaminiranih šumom. Standardni pristupi su regularizacije funkcije cilja ([4], [10], [11], [17], [20], [22], [26]), gdje se uvodi nove tzv. „slack“ optimizacijske varijable koje omogućuje fleksibilnost linearnih ograničenja, odnosno ekvivalentno kršenje ograničenja nominalnog DeePC algoritma. Takve regularizacije bit će, dakle, svojevrsno „vaganje“ između striktnosti ograničenja i njihovoj prilagodljivosti širem spektru vrijednosti, što je ekvivalentno uvođenju robusnog djelovanja u upravljanje [27]. Osim toga, razvijeno je i tzv. distribucijski robusno upravljanje na temelju podataka [28], gdje je predstavljena i probabilistička garancija performansi nad skupom mogućih sustava, određenih pri inicijalnom skupljanju podataka, osiguravajući pritom robusnost prema šumu i slabijim nelinearnostima.

Ovaj će se rad ipak fokusirati na regularizaciju, budući da je sinteza takvih regulatora prirodni nastavak dosadašnjih razmatranja, a i radi se o najčešće korištenom mehanizmu robustifikacije. Pristup se temelji na proširivanju funkcije cilja penaliziranim normama.

Pod normom se smatra funkcija  $\|\cdot\|: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  nad vektorskim prostorom  $\mathbb{V}$  koja za općenite  $v, v_1, v_2 \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $s \in \mathbb{R}$  ispunjava sljedeće zakonitosti: i)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ , ii)  $\|sv\| = s\|v\|$ , iii)  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ . Od posebnog su interesa  $p$  norme, koje se u slučaju *vektorskih* normi u radu označene s  $\|\cdot\|_p$ ,  $\|\cdot\|_p := (\sum_{k=0}^{n-1} |v(k)|^p)^{1/p}$  od kojih se ističu dobro poznati slučajevi  $p = 1, 2, \infty$ .

Primjerice, ako se za funkciju cilja

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (y(k) - r(k))^T \mathbf{Q} (y(k) - r(k)) + u^T(k) \mathbf{R} u(k) + \lambda_y \|\sigma_y\|_2^2 + \lambda_u \|\sigma_u\|_2^2, \quad (5.18)$$

definiraju ograničenja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} \\ u \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

gdje su  $\lambda_y$  i  $\lambda_u \in \mathbb{R}_+$  regularizacijski parametri, moguće je u velikoj mjeri osigurati robusnije upravljanje. Pri tome,  $\lambda_y$  mora biti dovoljno velik da zadovolji uvjet inicijalne trajektorije, budući da bi premala penalizacija ostavila optimizaciji previše prostora na izlazne podatke, i

inicijalno stanje opet ne bi bilo dobro određeno. U principu će upravo  $\lambda_y$  imati najveći značaj za uspješno upravljanje, kako  $\sigma_u$  u često nije od tolike važnosti kao  $\sigma_y$ , zbog toga što je šum na upravljačkoj varijabli znatno manji u praksi. Ne postoji općeprihvaćeni odabir regularizacijskih varijabli. Za primjer, inicijalno je u [4] postavljena prva norma,  $\|\sigma_y\|_1$ , ili je dodana penalizacija optimizacijske varijable  $\lambda_g \|g\|_1$  koje su u kombinaciji na iznenađujućoj razini osigurali upravljanje nelinearnim sustavom. Penalizacija vektora  $g$  intuitivno će smanjiti utjecaj šuma, kako manje vrijednosti vektora direktno množe Hankelovu matricu kontaminiranu šumom. U [20] su opsežnim matematičkim razmatranjima dokazane garancije nad performansama i izvedivosti regularizacijskih algoritama za slučaj prve i druge norme nad varijablama, i to za minimax OP. Minimax je od ključnog značaja jer pronalazi optimalni ulazni signal za slučaj „najgore“ moguće pretpostavljene nesigurnosti. Napominje se dodatno da su i odabrane dodane funkcije također konveksne kao i inicijalna funkcija cilja, tako da će, sukladno činjenici da je zbroj konveksnih funkcija također konveksan, i ultimativna regularizirana funkcija cilja biti konveksna.

Uvodi se konačna funkcija cilja, s pripadajućim ograničenjima,

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (y(k) - r(k))^T \mathbf{Q} (y(k) - r(k)) + u^T(k) \mathbf{R} u(k) + h(g, \sigma_y, \sigma_u), \quad (5.20)$$

Za poznate matrice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{S}_+$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbb{S}_{++}$

$$h(g, \sigma_y, \sigma_u) = \lambda_g \|g\|_2^2 + \lambda_y \|\sigma_y\|_2^2 + \lambda_u \|\sigma_u\|_2^2. \quad (5.21)$$

Kako je pokazano u [20], gornju funkciju cilja moguće je zapisati u obliku

$$\|\mathbf{A}(d)g - b(d)\|_2^2 + \lambda_g \|g\|_2^2, \quad (5.22)$$

gdje su matrice kako slijedi,

$$\mathbf{A}(d) = \mathbf{A}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^{(j)} d_j; \quad b(d) = b^{(0)} + \sum_{j=1}^{n_d} b_j d_j \in \mathbb{R}^{\mathbf{w}L \times T-L+1}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{A}^{(0)} = \text{col} \left( \sqrt{\lambda_u} \hat{\mathbf{U}}_p, \sqrt{\lambda_y} \hat{\mathbf{Y}}_p + \sqrt{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{U}}_f + \sqrt{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Y}}_f \right) \in \mathbb{R}^{\mathbf{w}L \times T-L+1}, \quad (5.24)$$

$$b^{(0)} = \text{col} \left( \sqrt{\lambda_u} \hat{u}_{ini}, \sqrt{\lambda_y} \hat{y}_{ini}, 0, \mathbf{Q}r \right) \in \mathbb{R}^{\mathbf{w}L}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{A}^{(j)} = \text{col} \left( \sqrt{\lambda_u} \mathbf{U}_p^{(j)}, \sqrt{\lambda_y} \mathbf{Y}_p^{(j)} + \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{U}_f^{(j)} + \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{Y}_f^{(j)} \right) \in \mathbb{R}^{\mathbf{w}L \times T-L+1}, \quad (5.26)$$

$$b^{(j)} = \text{col} \left( \sqrt{\lambda_u} \hat{\mathbf{U}}_p, \sqrt{\lambda_y} \hat{\mathbf{Y}}_p + \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{U}_f + \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{Y}_f \right) \in \mathbb{R}^{wL}, \quad (5.27)$$

gdje je, u skladu s dimenzijama podmatrica  $L = T_{ini} + N$ . Primjećuje se da je gornji problem sada tzv. regularizirani problem najmanjeg kvadrata (eng. *regularized least squares, RLS*)[19], uz dodatak nesigurnosti u oba vektora.

Konačno, neka na sustav djeluje nestrukturirana nesigurnost  $d \in \mathcal{D}$  skupa koji zadovoljava *Pretpostavku 2.1*. Dodatno, neka za dotični skup vrijedi ograničenje  $\mathcal{D} \|d\|_\infty \leq d_{max} \in \mathbb{R}^{n_d}$ , gdje je  $d_{max}$  nepoznat, a  $n_d$  dimenzija skupa. Neka je s  $\hat{\bullet}$  označena pripadajuća vrijednost mjerene varijable  $\bullet$ , s integriranim šumom, dok je potpuno „čisti“ skup podataka označen s  $\bar{\bullet}$ .

*Pretpostavka 5.1. Nesigurnost  $d \in \mathcal{D}$  djeluje linearno na podmatrice Hankelove matrice  $\mathbf{U}_p$ ,  $\mathbf{Y}_p$ ,  $\mathbf{U}_f$ ,  $\mathbf{Y}_f$ , kao i na vektore inicijalne trajektorije  $u_{ini}$ ,  $y_{ini}$  odnosno vrijedi*

$$a(d) = \hat{a} + \sum_{j=1}^{n_d} a^{(j)} d_j, \quad (5.28)$$

Gdje je  $a$  zamijenjen redom s  $\mathbf{U}_p$ ,  $\mathbf{Y}_p$ ,  $\mathbf{U}_f$ ,  $\mathbf{Y}_f$ .

Potrebno je, dakle, naći optimalni  $(u, y, g, \sigma_u, \sigma_y)$  za sve  $d \in \mathcal{D}$ .

Napominje se da, za razliku od determinističnog pristupa pri dokazivanju stacionarne točnosti u odjeljku 5.3.1, nakon unošenja nesigurnosti takva razmatranja više neće vrijediti, budući da ostvarena vrijednosna funkcija neće odgovarati izračunatoj „optimalnoj“. Zbog toga je naglasak stavljen na „ostvarenu“ (u smislu stvarnu, realiziranu) funkciju cilja, oblika

$$J_{ost} = (y_{ost} - r)^T \mathbf{Q} (y_{ost} - r) + u_{ost}^T \mathbf{R} u_{ost}. \quad (5.29)$$

Dodatno, zbog nesigurnosti u izlaznim podacima, generalno ne vrijedi  $u_{ost} = \bar{\mathbf{U}}_f g^*$ ,  $y_{ost} = \bar{\mathbf{Y}}_f g^*$ , već postoji neka razlika  $\|u_{ost} - \bar{\mathbf{U}}_f g^*\|_2 \leq \eta_p$ , te istovjetno za izlaz. Uvodi se za analizu ključna pretpostavka.

*Pretpostavka 5.2. Postoji  $\bar{d} \in \mathcal{D}$  za koji će vrijednosti Hankelove matrice biti ekvivalentne šumom ne iskvarenim matricama, odnosno, za  $a = \mathbf{U}_p, \mathbf{Y}_p, \mathbf{U}_f, \mathbf{Y}_f$  redom, vrijedi*

$$\exists \bar{d} \in \mathcal{D} | a(\bar{d}) = \bar{a}. \quad (5.30)$$

*Pretpostavka 5.2* osigurava da je negdje unutar  $\mathcal{D}$  nesigurnost koja odgovara idealnim podacima (bez nesigurnosti). Ključni teorem za performanse robusnosti dan je u [20].

*Teorem 5.1.* Ako skup  $\mathcal{D}$  zadovoljava *Pretpostavku 5.2*, postoje  $(\lambda_u, \lambda_g)$  takvi da realizirana funkcija cilja zadovoljava

$$2\sqrt{J_{opt}} + \eta_p \left( \sqrt{2} I_{mN}^T \mathbf{R} I_{mN} + \mathbf{J}(\mathbf{H})^T \mathbf{Q} \mathbf{J}(\mathbf{H}) \right) \geq \sqrt{J_{ost}}, \quad (5.31)$$

gdje je  $\mathbf{J}(\mathbf{H})$  matrica s impulsnim odzivom, definirana u (3.17).

Ako je teorem zadovoljen, očito je realizirana funkcija cilja ograničena s gornje strane, što znači da trajektorija ostaje ograničena.

Nakon preformulacije izrazom (5.22), nesigurnost se može interpretirati u obliku  $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \Delta_A, b = b^{(0)} + \Delta_b)$ , gdje vrijedi  $\mathcal{D} := \{(\Delta_A, \Delta_b) \mid \|\Delta_A \Delta_b\|_F \leq \rho_u\}$ , a s  $\|\mathbf{A}\|_F := \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b |A_{ij}|$  je označena Frobeniusova norma matrice  $\mathbf{A}$  gdje je  $A_{ij}$  član na  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu matrice. Sukladno (5.23)-(5.27), jasne su vrijednosti  $\Delta_A$  i  $\Delta_b$ .

Posljednji teorem, dokazan u [20], konačno povezuje problem robusne optimizacije sa zadanim rješivim OP-om.

*Teorem 5.2.* Optimalni  $g^* \neq 0$  koji minimizira (5.20) ujedno je rješenje i minimax OP-a

$$\min_g \max_{d \in \mathcal{D}} \left\| (\mathbf{A}^{(0)} + \Delta_A) g - (b^{(0)} + \Delta_b) \right\|_2. \quad (5.32)$$

Dodatno,  $\mathbb{R} \ni \rho_u \geq 0$  stalno raste i određen je s

$$\rho_u = \begin{cases} \frac{\lambda_g \sqrt{\|g\|_2^2 + 1}}{\|\mathbf{A}^{(0)} g - b^{(0)}\|_2} \text{ za } \mathbf{A}^{(0)} g^* \neq b^{(0)}, \\ \lambda_g \sqrt{\|g\|_2^2 + 1} \text{ inače.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Prema tome, uz dovoljno veliki  $\lambda_g$ ,  $\rho_u$  postaje dovoljno velik da zadovolji *Pretpostavku 5.2*, te vrijedi *Teorem 5.1*, što znači da će konzervativnije djelovanje u robusnom smislu biti postignuto velikim  $\lambda_g$ . Naglašava se da gornja ekvivalentnost (5.20) i (5.32) generalno nužno ne vrijedi, kako je istaknuto u [27].

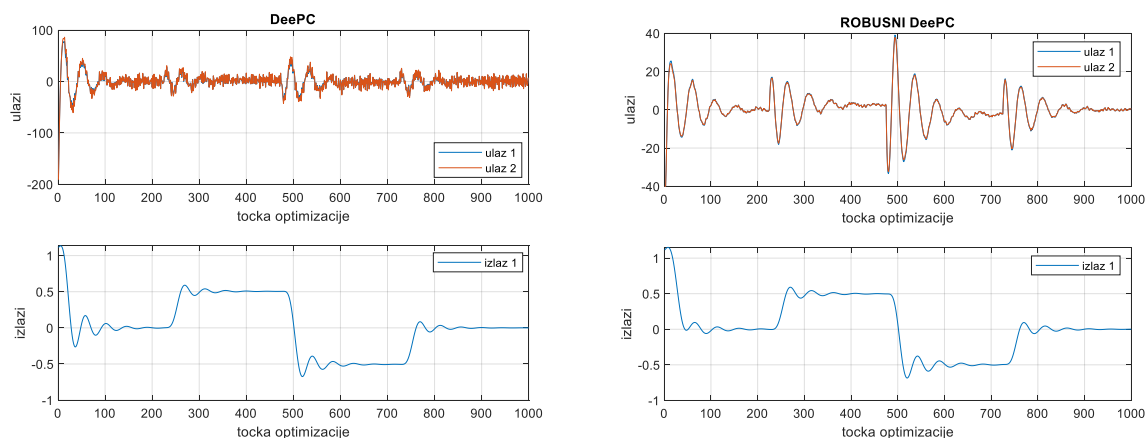
Za očekivati je da bi zbog odabrane  $p_2$  norme u funkciji cilja odziv bio i bolji kod šuma u Gaussovoj distribuciji, što je svakako vjernija projekcija stvarnosti od odabrane ravnomjerne raspodjele (vidi kôd u priložima). Ako vrijede sve pretpostavke kao i pri definiraju nominalnog DeePC algoritma, robusni se prikazuje u nastavku.

## Robusni DeePC

Input:  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_u$ ,  $\lambda_g$ ,  $r(k)$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{Y}$

1. riješi OP  $\min_{(u,y,g,\sigma_u,\sigma_y)} (5.18)$  tako da vrijedi (5.19),
2. izračunaj  $u = \mathbf{U}_f g$ , (5.34)
3. primjeni  $h \leq (N - 1)$  prvih vrijednosti  $u$ ,
4. ažuriraj vektor inicijalnih podataka, te postavi  $t = t + h$ ,
5. vrati se na broj 1.

Usporedbu nominalnog i robusnog DeePC upravljanja pokazat će se na već dobro poznatom granično stabilnom sustavu tri spregnute mase. Izlaz je ponovno stavljen isključivo na drugu masu. Amplitude ravnomjerno distribuiranog šuma na ulazne varijable je  $10^{-5}N$ , a na izlazne  $10^{-4}m$ , što su generalno veće vrijednosti od onih u literaturi. Odziv je prikazan slikom 16.



Slika 16 Usporedba robusnog i nominalnog DeePC-a

Vrijednosti podešavajućih parametara dani su tablicom 3. Varijacijama parametara dolazi se do zaključka da  $\lambda_u$  i  $\lambda_g$ , iako djeluju na finalnu funkciju cilja, ne utječu na stabilnost koliko i  $\lambda_y$ , koji uvijek treba biti vrlo visok, osim za najveće vrijednosti šuma.

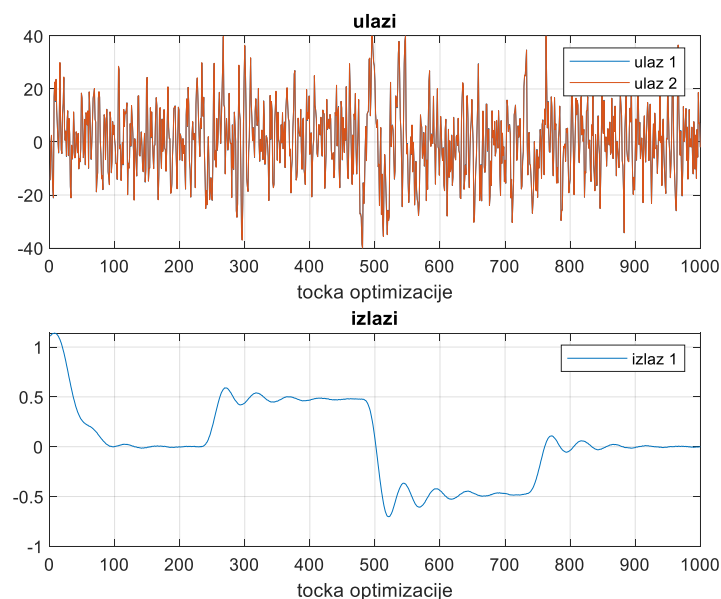
Tablica 3 Težinski parametri Robusnog DeePC-a

$\mathbf{Q}$	1500
$\mathbf{R}$	0.01



$\lambda_y$	$10^8$
$\lambda_u$	$10^8$
$\lambda_g$	30

Ponovno se prvo naglašava da bi s dostupnom računalnom snagom bilo teško pod nametnutim šumom koristiti nominalni DeePC, kako je vrijeme simulacije `quadprog()` alatu bilo okvirno 224 sekunde, dok je  $n_{hor} \cdot dis = 10$  sekundi. Robusni regulator praktično je trajao isto kao nominalni DeePC bez šuma. Dodatno, primjećuje se znatno veća vrijednost upravljačkih varijabli na početku simulacije, kad je greška najveća, te znatno izraženiji šum u odnosu na robusni regulator, što znači znatno manje trošenje aktuatora, u slučaju da uopće mogu popratiti dinamiku *chattering*-a. Da bi se još uvjerljivije pokazala efikasnost robusnog DeePC regulatora, vrijednosti amplituda ulaznih varijabli povećalo se na  $10^{-3}N$ , a izlaznih  $5 \cdot 10^{-3}m$ , gdje je uz izražen šum u upravljačkom signalu praćenje trajektorije i dalje zadovoljeno. Pri tome je postavljeno  $\lambda_u = 0$ . Rezultati simulacije dani su slikom 17.



**Slika 17 Odziv Robusnog DeePC-a kod izraženog šuma**

Može se dakle zaključiti da je robusni regulator, osim što je računalno izvediv, vrlo efikasan u kompenzaciji nesigurnosti u podacima. Ovakvo robusno djelovanje je integrirano i u računalni paket.

### 5.4.2.1. Implementacija preko Page matrice

Do sada su se u odjeljku 5.4.2., kao i pripadajućim primjerima, razmatrale nesigurnosti u izlaznim i ulaznim podacima, ali može se pokazati da će robusni učinak obuhvatiti i šum u inicijalnim podacima identifikacije sustava.

Za slučaj šuma u inicijalnim podacima, u praksi se pokazala korisnom i implementacija preko tzv. Page matrice [11], predstavljene u [15], koja je, uz pretpostavku da je  $T$  višekratnik od  $L$ , za proizvoljni izlaz definirane s

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} y(1) & y(L+1) & \dots & y(T-L+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(L) & y(2L) & \dots & y(T) \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Može se primijetiti da takva matrica zahtijeva znatno više podataka od spomenute Hankelove matrice, pa su rezultati kod šumom kontaminiranih sustava i bez dodatnih manipulacija bolji od konvencionalne metode. Ipak, glavna prednost Page matrica je što, iako zahtijevaju više podataka, njihova struktura (statistička neovisnost članova) omogućuje korištenje dekompozicije singularnih vrijednosti (eng. *Singular Value Decomposition*, SVD), kojom se, ekvivalentno standardnoj filtraciji signala dekompozicijom u red harmoničnih funkcija (npr. Fourierovom transformacijom), može izdvojiti visokofrekvencijske režime (eng. *mode*) od interesantnih nisko-frekvencijskih. Ako se za  $p = \mathbf{p}(\mathfrak{B})$  od svakog izlaznog signala  $y_d^i | i = 1 \dots p$  napravi Page matrica  $\mathcal{P}_i \in \mathbb{R}^{T_{ini}+N}$ , dekompozicijom se dobiva

$$\mathcal{P}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^T, \quad (5.36)$$

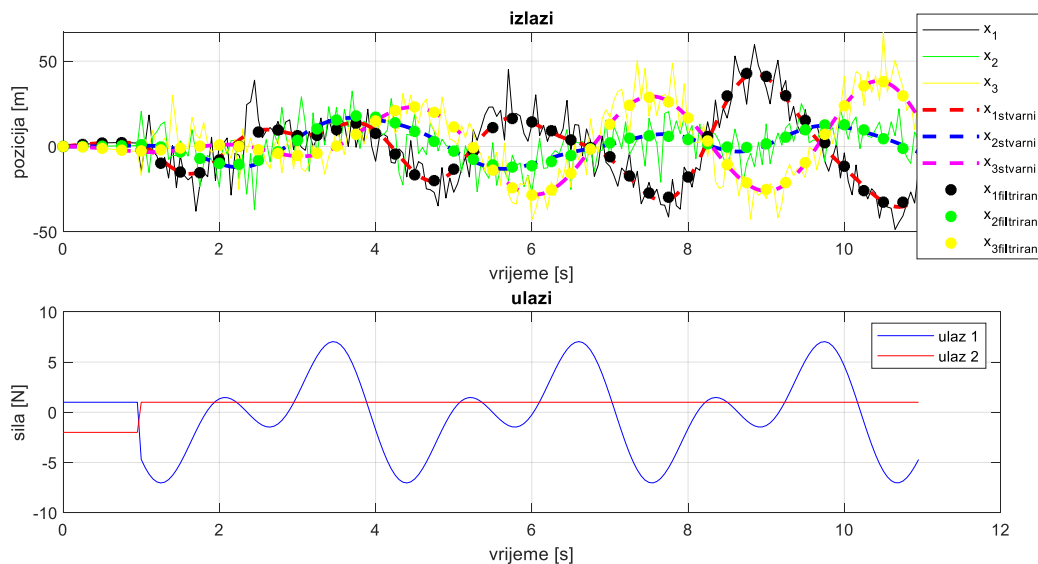
može se definirati granična singularna vrijednost  $\bar{\sigma}_s$  iznad koje je relevantni dio dinamike signala, te sve ostale dijagonalne elemente  $\mathbf{\Sigma}_i$  izjednačiti s 0. Time, u optimizacijskom problemu ograničenja bi se postavilo kao

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^p \mathcal{P}'_i \otimes e_i, \quad (5.37)$$

za vektor  $e_i \in \mathbb{N}^p$  sa svim elementima jednakima nuli osim  $i$ -tog, a  $\mathcal{P}'_i \in \mathbb{R}^{T_{ini}+N}$  odgovara filtriranoj Page matrici  $\mathcal{P}_i$ , sa svojom matricom singularnih vrijednosti  $\mathbf{\Sigma}'_i$ . Ostala ograničenja koja odgovaraju matricama  $\mathbf{U}_p$  i  $\mathbf{U}_f$  dobiju se na intuitivan način, s filtracijom ako je nužna.

U nastavku (slika 18) je priložen odziv stanja elastično spregnutog sustava predstavljenog u odjeljku 5.1.1.2., koji se dobiva kao rezultat ulaza proizvedenog s ravnomjerno distribuiranim šumom u podacima, kao ograničenje na DeePC algoritam s jednim horizontom. Za

pretpostaviti je da bi gornji podatci stvorili inicijalnu izlaznu trajektoriju koja bi netočno odredila trenutno stanje sustava, a i predikcija buduće trajektorije bila bi upitna. S druge strane, na istoj slici je s kružićima označen filtrirani signal, koji vrlo dobro prati stvarnu trajektoriju sustava.



**Slika 18 Filtracija Page matricom**

Kako je pokazano u [20], utjecaj Page matrice u odnosu na Hankelovu ovisi i o strukturi nesigurnosti (jeli strukturirana ili nestrukturirana), što će utjecati i na odabrane norme u funkciji cilja.

## 6. PROGRAMSKI PAKET

Na posljjetku se predstavlja razvijeni programski paket. Zbog zahtjeva za modelom u PS-u, poradi generiranja podataka, program nije za direktnu uporabu u praksi, ali bi se manjim intervencijama mogla osigurati praktična primjena. U algoritam je uneseno i robusno djelovanje, kako je prikazano u odjeljku 5.4.2.

Programski paket uključuje 3 programa (MATLAB-ov *.m* file), od kojih se prvi, *Launcher*, koristi za definiranje sustava u kontinuiranoj domeni, diskretizaciju, odabir duljine horizonta, te generiranje podataka (simulacijom) koji se zatim particiraju u Hankelove podmatrice.

Odmah prilikom unosa sustava, diskretizira ga se funkcijom *c2dm*, i direktno se iz sustava definiraju glavne invarijantne konstante, ulazna ( $m$  u kôdu) i izlazna kardinalnost ( $p$  u kôdu), te kardinalnost stanja ( $n$  u kôdu). Na temelju reda sustava (kardinalnost stanja) određuje se duljina inicijalne trajektorije  $T_{ini}$  ( $T_{ini}$  u kôdu). Nakon odabrane duljine horizonta, na temelju tog podatka i duljine inicijalne trajektorije odabire se lag ( $L$  u kôdu), te nužan broj podataka  $T$  ( $T$  u kôdu). Na taj je način uz pobudu šumom osigurano ispunjavanje uvjeta perzistentnosti.

Na zahtjev korisnika, *Launcher* pokreće robusni ili nominalni regulator. Kôd ovog programa dostupan je u odjeljku 8.2.

Nominalni DeePC simulira upravljanje bez nesigurnosti u podacima. Zahtjeva odabir težinskih parametara, koji se zatim prenosi u pripadajuće dijagonalne matrice. Naknadno, odabire se broj horizonata  $n_{hor}$ , koji odgovara *SimTime* varijabli u kôdu. Nakon toga je određena i dimenzija referentne trajektorije. Varijablom *ref* (*ref* u kôdu) se odlučuje o obliku referentne trajektorije. Iako je  $r(k)$  stavljen kao „input“, praćenje referentne trajektorije je, zbog jednostavnosti, omogućeno samo za slučaj  $p = 1$ , budući da je generalizacija intuitivno proširenje. Zbog jednostavnosti je ostavljena opcija automatskog generiranja referentne trajektorije za slučaj regulacije u ishodište, odnosno regulacije pri jediničnoj „step“ pobudi.

Ulazni skup  $\mathcal{U}$  ostavljan je kao polihedron u  $\mathbb{R}^m$ , ograničen s  $u_{min}$  i  $u_{max}$  (*umin*, *umax* u kôdu). Također, ostavljena je mogućnost iscertavanja predikcije ulaza i izlaza za svaki horizont, ovisno o vrijednosti varijable *plt* (*plt* u kôdu). Kôd nominalnog DeePC regulatora dostupan je u poglavlju 8.2 u priložima.

Robusni DeePC koristi se za upravljanje pri fiksnom i ravnomjerno distribuiranom šumu u izlaznim podacima. Jednostavnim proširenjem i amplituda *suma* bi se mogla povećati. Nakon

odabira identičnih varijabli kao za nominalni DeePC, korisnik unosi dodatne težinske parametre  $\lambda_g$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_u$  za regulariziranu funkciju cilja, sukladno razmatranjima u odjeljku 5.4.2.. Kôd robusnog regulatora dostupan je u poglavlju 8.2.

Napominje se dodatno da naglasak nije stavljen na inicijalni dio trajektorije, već je osigurano da je  $T_{ini} = 2\mathbf{n}$ , te je inicijalna trajektorija pobuđena nasumičnim vrijednostima  $\|u_{ini}\|_\infty \leq 5$  odgovarajuće dimenzije ( $\mathbf{m}T_{ini}$ ).

Na samom kraju se iscertava vrijeme trajanja zatvorene petlje.

U nastavku je priložen sadržaj programskog paketa.

#### *Programski paket*

Launcher

Nominalni DeePC

Robusni DeePC

#### *Launcher*

Input:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, disc, N$ ,

1. Diskretiziraj sustav  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  s korakom diskretizacije  $disc$
2. Pobudi sustav sa šumom i formiraj particiranu Hankelovu matricu
3. Pokreni Nominalni DeePC (1) ili Robusni DeePC (2)

#### *Nominalni DeePC*

Input:  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, n_{hor}, r(k), plot, ref, u_{min}, u_{max}$

1. Implementiraj (5.11) uz  $u_{min} \leq \|u\|_\infty \leq u_{max}$
2. Iscertaj (stvarnu) trajektoriju sustava, ispiši vrijeme trajanja zatvorene petlje

#### *Robusni DeePC*

Input:  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, n_{hor}, \lambda_g, \lambda_y, \lambda_u, r(k), plt, ref, u_{min}, u_{max}$

1. Implementiraj (5.34) uz  $u_{min} \leq \|u\|_\infty \leq u_{max}$
2. Iscertaj (stvarnu) trajektoriju sustava, ispiši vrijeme trajanja zatvorene petlje

## 7. ZAKLJUČAK

### 7.1. Zaključak rada

U ovom radu prvotno su sažete glavne odrednice tzv. bihevioralnog pristupa teoriji sustava. Bihevioralni pristup se naglašava kao alternativa konvencionalnom pristupu analizi i sintezi dinamičkih sustava koji polaze od reprezentacije sustava, iako se naglasio nezamjenjiv značaj konvencionalnih pristupa. Na primjerima je pokazano kako bihevioralni pristup generalizira poznate reprezentacije sustava, te kako definira njihova osnovna svojstva, kao što su potpunost, mjerljivosti i upravljivosti. Ova su svojstva stavljena u kontrast sa standardnim definicijama koji se vežu za diskretne sustave.

Naknadno, pokazano je na koji način Willemsova fundamentalna lema određuje uvjete (upravljivost, perzistentnost pobude) nužne za određivanje baze vektorskog prostora svih mogućih trajektorija potpunih LTI sustava poznate trajektorije. Ova lema je uz navedene uvjete mjerljivosti poslužila za generiranje algoritma za simulacije proizvoljnog linearnog verenski-invarijantnog sustava (električni i mehanički) za proizvoljni ulaz  $u$ , uz uvjet da je inicijalna trajektorija dovoljno duga. Naknadno se izvela sinteza prediktivnog algoritma utemeljenog na podacima skupljenima *offline*. Pokazano je da se za potpune LTI sustave generiraju upravljački signali, a time i trajektorije, identične dobro poznatom MPC (eng, *Model Predictive Control*) upravljanju, uz ispunjavanje određenih uvjeta. Ovaj je algoritam implementiran na više primjera u praksi.

U nastavku je pokazano na koji je način moguće proširiti DeePC algoritam kako bi se garantirala stacionarna točnost, uz proširenje uvjeta perzistentnosti pobude, te pretpostavljajući determinističnu prirodu sustava, odnosno nedostatak nesigurnosti. Unijevši nemodelirani poremećaj, očekivano se pojavila greška u stacionarnom stanju.

Usprkos vrlo dobrom slijeđenju referentne trajektorije, pokazalo se da je nominalni DeePC algoritam vrlo osjetljiv na pojavu nesigurnosti u podacima, što je u nastavku motiviralo za razvoj robusnog DeePC upravljanja.

Kao glavni mehanizam robustifikacije algoritma, sukladno literaturi, upotrijebile su se regularizacijske funkcije, kojima se nauštrb egzaktnosti optimizacijskog problema smanjila kompleksnost, dopustivši penaliziranu grešku u linearnim ograničenjima, te tako postiglo robusni učinak. Prema navedenoj literaturi, osigurala se rješivost problema, te stabilnost, svođenjem regularizirane funkcije cilja na klasični minimax problem robusne optimizacije, koji

podrazumijeva optimalni zakon upravljanja za najgori mogući poremećaj u nekom ograničenom, konveksnom skupu.

Na kraju se implementirala tzv. Page matrica, kojom se, usprkos znatno većoj količini potrebnih podataka, pokazalo da se dobro poznatim postupkom preko dekompozicije singularnih vrijednosti može filtrirati inicijalne podatke jednostavnim micanjem singularnih vrijednosti koje odgovaraju bržim režimima, što je ekvivalentno Fourierovoj transformaciji u teoriji signala.

Na samom kraju, predstavio se programski paket kojim se za ulazni model sustava i odabrane parametre penalizacije implementirao (robustni) DeePC regulator.

## 7.2. Buduća razmatranja

Budući radovi trebali bi ponuditi dodatne garancije stabilnosti i rekurzivne izvedivosti regulariziranih funkcija cilja, pogotovo u slučaju nelinearnosti u sustavu, budući da sva razmatranja nelinearnosti DeePC-a dosežu tek do eksperimentalnih rezultata, osim u slučaju simulacije [24]. Ističe se također pitanje matematički egzaktnog utjecaja odabranih normi u regularizaciji, slično napravljenom u [20] i [26], ili generalnije u [27].

Isto tako, moguće je postojanje jednostavnih rješenja koja bi obuhvatila i vremenski varijabilne sustave. Primjerice, najbanalnijom redovitom identifikacijom mogle bi se ostvariti sličnosti s tzv. „*Auto-Tuning*“ regulacijom u adaptivnoj tehnici. Ipak, s obzirom da, ako se pretpostavi mogućnost potpuno egzaktne identifikacije pomoću podataka, obuhvaćanje vremenske varijantnosti bi trebalo biti znatno fleksibilnije u odnosu na pristupe pomoću modela (gdje se ionako često vrši adaptacija pomoću podataka), i to u matematički rigoroznom obliku. Znatno temeljitija proširenja na vremenski promjenjive sustave mogla bi se postići proširivanjem fundamentalne lemme. Dodatno, kombinacija Page matrice s regularizacijom funkcije cilja potpuno je neistražena u teorijskim razmatranjima, a intuitivno bi se postigao izraženiji robustni učinak filtracijom inicijalnih podataka zajedno s robustifikacijom regularizacijom.

## 8. PRILOZI

### 8.1. Računalni paket

U nastavku će se interpretirati (robusti) DeePC algoritam korišten u radu.

#### 8.1.1. Ulaz u algoritam

Algoritam u potpunosti radi u diskretnoj domeni, budući da se ona intuitivnija za rad na računalu (i MPC upravljanje u pravilu je diskretno), a kako se modeliranje generalno obavlja u vremenskoj domeni, ulazni sustav mora biti u vremenskoj domeni, nakon koje slijedi diskretizacija proizvoljnim korakom.

#### 8.1.2. Optimizacija

Za korak optimizacije otvara se *for* petlja koja pokreće horizonte. Iako je standardnim interpretacijskim alatima (npr. YALMIP) moguće definirati optimizacijske varijable i odrediti objektivnu funkciju kao sumu (kako je nominalno OP i prezentiran), ovaj programski paket izbjegao je novu petlju na način

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} y^T(k) \mathbf{Q} y(k) + u^T(k) \mathbf{R} u(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

$$= \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{w}}, \quad (7.2)$$

za  $\tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN+pN}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag}([\mathbf{Q} \dots \mathbf{Q}]) \in \mathbb{R}^{pN \times pN}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} = \text{diag}([\mathbf{R} \dots \mathbf{R}]) \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag}([\mathbf{R} \dots \mathbf{R} \mathbf{Q} \dots \mathbf{Q}]) \in \mathbb{R}^{(mN+pN) \times (mN+pN)}$ . Očito je suma izbjegnuta.

Kako se za „solver“ odabrala u MATLAB integrirana `quadprog()` funkcija (efikasno rješava probleme kvadratnog programiranja), potrebno je objektivnu funkciju i ograničenja prilagoditi dotičnim ulazima. Jasno je da kvadratni OP iz (5.11) ne odgovara generalnom obliku OP-a, obzirom da „ograničenje“ (5.8) samo po sebi sadrži varijable optimizacije<sup>10</sup> u  $u$  i  $y$ . Raspisom

$$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_f \\ Y_f \end{bmatrix} g \rightarrow \tilde{\mathbf{w}}^T = g^T [U_f^T \quad Y_f^T] \quad (7.3)$$

očito je

$$J = \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{w}} = g^T [U_f^T \quad Y_f^T] \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} Y_f \\ U_f \end{bmatrix} g, \quad (7.4)$$

<sup>10</sup> Navedeno ne bi trebalo unositi zabune obzirom da je optimizacijska varijabla ipak samo  $g$  iz (5.4) (za nominalni DeePC), ali za `quadprog()` je potrebno jasno definirati konstantna ograničenja.



$$= g^T \mathbf{H} g . \quad (7.5)$$

Naknadno, ostala „ograničenja“ iz (5.8) vezana za inicijalnu trajektoriju, definicijska su linearna ograničenja oblika  $Ax = b$ . Ako se matrici  $\mathbf{H}$  doda faktor 2, rješenja nominalnog DeePC problema ekvivalentan je rješenjima quadprog  $(\mathbf{H}, [], [], [], \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} \end{bmatrix})$ .

Dodavanje robusnog djelovanja postiže se proširenjem funkcije cilja, sukladno

$$\mathbf{H}_{rob} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} + \lambda_g & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_u \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

za optimizacijske varijable  $o = [g \quad \sigma_y \quad \sigma_u]^T$ , odnosno ograničenja

$$\begin{bmatrix} U_p & 0 & -\mathbf{I} \\ Y_p & -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} o = \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

za odgovarajuće dimenzije matrice  $\mathbf{I}$ .

Za definiranje ograničenja nejednakosti, zbog potrebe za ograničenjem ulaznog signala, odnosno određivanjem  $\mathcal{U}$ , dobiva se

$$\begin{bmatrix} U_f & 0 & 0 \\ -U_f & 0 & 0 \end{bmatrix} o \leq \begin{bmatrix} u_{min} \\ y_{max} \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Odnosno definiranjem  $A_{ineq}$  ( $A_{ineq}$ ) i  $b_{ineq}$  ( $b_{ineq}$ ), vrijedi  $A_{ineq} o \leq b_{ineq}$ .

Dodatno, gornji problem se odnosi na referentni signal nulvektor. Ako se ubaci općeniti referentni vektor  $r$ , pri raspisu (7.1)-(7.5) dobit će se i ostali članovi polinoma u  $g$ , oblika  $-r^T Q Y_f g - Y_f^T Q r g + r^T Q r$ . Kako su vrijednosti  $r^T Q Y_f$ , i  $Y_f^T Q r$  skalarne, navedena dva izraza su ekvivalentna i mogu se zbrojiti. Dodatno, posljednji član je zanemariv, s obzirom da ne mijenja optimalnu točku, već samo vrijednost funkcije u točki. Ako se definira  $f = -2r^T Q Y_f$ ,

(f) konačni oblik funkcije glasi quadprog  $(\mathbf{H}, f, A_{ineq}, b_{ineq}, \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} \end{bmatrix})$ .

## 8.2. Kôd

### 8.2.1. Launcher

```

%% LAUNCHER

clc
clear

% LTI sustav

disp('UNOS SUSTAVA U KONTINUIRANOJ DOMENI');

Ac = input('unesi matricu A: ');
Bc = input('unesi matricu B: ');
Cc = input('unesi matricu C: ');
Dc = input('unesi matricu D: ');

sysc = ss(Ac, Bc, Cc, Dc);

disc = input('unesi korak diskretizacije: ');

[A, B, C, D] = c2dm(Ac, Bc, Cc, Dc, disc);

n = size(A,1); % broj stanja (kardinalnost stanja)
m = size(B,2); % broj ulaza (kardinalnost ulaza)
p = size(C,1); % broj izlaza (kardinalnost izlaza)

% Inicijalni podatci

Tini = ceil(2*n); % duljina inicijalne trajektorije

N = input('unesi velicnu horizonta: '); % velicina horizonta

L = Tini + N;

T = ceil(1.5*((m+1)*(L + n) - 1)); % broj inicijalnih podataka

Ad = 5; % amplitude of an input (all elements of an
input vector)

initial_state = ones(n,1); % initial state

% input data
ud = zeros(m, T);

for k = 1:T
    ud(:,k) = 2*Ad*(0.5*ones(m,1) - rand(m,1)); % random numbers <= Ad
end

% stanja inicijalnih podataka
xd = zeros(n, T + 1);
xd(:,1) = initial_state;

% izlaz inicijalnih podataka
yd = zeros(p, T);

for k = 1:T
    xd(:,k+1) = A*xd(:,k)+B*ud(:,k);
    yd(:,k) = C*xd(:,k)+D*ud(:,k);
end

% PERSISTANCE OF EXCITATION

L = Tini + N;

if L > T
    display('Error - prozor trajektorije ne smije biti veci od broja podataka -> L > T')
end

```

```

ud = ud(:);

U = zeros((Tini + N + n)*m, T - Tini - N - n + 1);

for i = 0:(T - L - n)
    U(:,i+1) = (ud(i*m + 1:i*m + (L + n)*m))';
end

if rank(U) < (L + n)
    display('Error - perzistentnost pobude nije reda L + n =')
    (L*m + n)
end

% ogranicenja sustava

yd = yd(:);

% formiranje Up
Up = zeros(Tini*m, T - L + 1);

for i = 0:T - L
    Up(:,i+1) = (ud(i*m + 1:i*m + Tini*m))';
end

% formiranje Yp
Yp = zeros(Tini*p, T - L + 1);

for i = 0:T - L
    Yp(:,i+1) = (yd(i*p + 1:i*p + Tini*p))';
end

% formiranje Uf
Uf = zeros(N*m, T - L + 1);

for i = 0:T - L
    Uf(:,i+1) = (ud(Tini*m + i*m + 1:Tini*m + i*m + N*m))';
end

% formiranje Yf
Yf = zeros(N*p, T - L + 1);

for i = 0:T - L
    Yf(:,i+1) = (yd(Tini*p + i*p + 1:Tini*p + i*p + N*p))';
end

% kreiranje inicijalne trajektorije

uini = zeros(m, Tini);

Aini = 5;

for k = 1:Tini
    uini(:,k) = 2*Aini*(0.5*ones(m,1)-rand(m,1)); % inicijalni ulaz - nasumicni broj
end

x0 = initial_state;

xini = zeros(n, Tini + 1);
xini(:,1) = x0;

yini = [];

for k=1:Tini
    xini(:,k+1) = A*xini(:,k) + B*uini(:,k); % inicijalno stanje
    yini(:,k) = C*xini(:,k) + D*uini(:,k); % inicijalni izlaz
end

yini=yini(:);
uini=uini(:);

itu = input('za nominalni regulator unesi 0, za robusni regulator unesi 1')
if itu == 0
    run(DeePC)
end
if itu == 1
    run(RobDeePC)

```

```
end
```

### 8.2.2. DeePC

```
%% DeePC

Q = input('unesi tezinsku matricu Q: ');           % tezinska matrica izlaza
R = input('unesi tezinsku matricu R: ');           % tezinska matrica ulaza

Q = Q*eye(p);
R = R*eye(m);

SimTime = input('unesi broj horizonata: ');        % vrijeme horizonta

%referentna trajektorija

if p == 1

    disp('UNESI VEKTOR REFERENTNE TRAJEKTORIJE');
    ref = input('za nulvektor unesi 0, za jedinичni step unesi 1, za proizvoljni vektor unesi
2: ');
    if ref == 0
        rref = zeros(p*(SimTime+N),1);
    end
    if ref == 1
        rref=ones(p*(SimTime+N),1);
    end
    if ref == 2
        rref = input('unesi vektor referentne trajektorije: ');

        while max(size(rref,1), size(rref, 2)) ~= p*(SimTime+N)

            disp('GRESKA! Velicina referentne trajektorije treba biti (broj izlaza)*(broj
horizonata + velicina horizonta)')
            rref = input('unesi vektor referentne trajektorije:');

        end

    end

end

end

% inicijalno stanje
xini = xini(:,end);

if 1

    plt = input('za iscrtavanje horizonta unesi 1, inače unesi 0: ');

    umin = input('unesi minimalnu vrijednost ulaznog signala: ');
    umax = input('unesi maksimalnu vrijednost ulaznog signala: ');

    % equality constraints

    Aeq = [Up; Yp];
    beq = [uini; yini];

    Aineq = [Uf; -Uf];
    bineq = [umax*ones(size(Uf,1),1); -umin*ones(size(Uf,1),1)]

    Qdiag = kron(eye(N),Q);
    Rdiag = kron(eye(N),R);

    RQ = (2*blkdiag(Rdiag,Qdiag));
    M = [Uf; Yf];
    H = M'*RQ*M;
    H = 0.5*(H'+H)+0.1*eye(size(H,1)); % for positive definiteness of H

    xList = [];
    uList = [];
    yList = [];

    xList = [xList,xini];

    OBJECTIVE = [];

    % petlje
```

```

tic
for k = 1:SimTime
    rN = rref((p*(k-1)+1):(p*(k-1+N)));
    f = -2*rN'*Qdiag*Yf;

    x=xini;

    g=quadprog(H, f, Aineq, bineq, Aeq, [uini;yini]);

    u = Uf*g;
    u_act = u(1:m);

    y = Yf*g;

    x_act = A*xini + B*(u_act + [0.00000*(0.5 - rand(1,1)); 0.00000*(0.5 - rand(1,1))]);
    y_act = C*xini + D*u_act + (0.0000*(0.5 - rand(1,1)));

    xList = [xList, x_act];
    uList = [uList, u_act];
    yList = [yList, y_act];

    uini = [uini((m+1):end); u_act];
    yini = [yini((p+1):end); y_act];

    OBJECTIVE = [OBJECTIVE [u' y']*RQ*[u; y]];

    xini = x_act;

    if plt == 1

        figure(1)

        subplot(211)

        for i = 0:m - 1
            txt = ['ulaz ', num2str(i + 1)];
            plt1 = plot([1:N]', u(i + 1:m:m*N));
            hold on,
            set(plt1, {'DisplayName'}, {txt})
        end

        hold off
        legend show
        grid on
        title('ulazi')

        subplot(212)

        for i=0:p - 1
            txt = ['izlaz ', num2str(i + 1)];
            plt2 = plot([1:N]', y(i + 1:p:p*N));
            hold on,
            set(plt2, {'DisplayName'}, {txt}),
        end

        hold off
        legend show
        grid on
        title('izlazi')
    end
end

vrijeme = toc

end

figure(2)

subplot(211)

for i = 0:m - 1
    txt = ['ulaz ', num2str(i + 1)];
    plt1 = plot(uList(i+1:m:end));

```

```

    hold on,
    set(plt1, {'DisplayName'}, {txt})
end

hold off
legend show
grid on
title('ulazi')

subplot(212)

for i=0:p - 1
    txt = ['izlaz ', num2str(i + 1)];
    plt2 = plot(yList(i+1:p:end));
    hold on,
    set(plt2, {'DisplayName'}, {txt}),
end

txtr = ['referentna trajektorija'];
pltr = plot(rref);
set(pltr, {'DisplayName'}, {txtr})

hold off
legend show
grid on
title('izlazi')

figure(3),
plot(OBJECTIVE)
title('ostvarena funkcija cilja')
xlabel('točka optimizacije')
ylabel('u^T*R*u + y^T*Q*Y'),
grid on

```

### 8.2.3. RobDeePC

```

%% RobDeePC

Q = input('unesi tezijsku matricu Q: ');           % tezijska matrica izlaza
R = input('unesi tezijsku matricu R: ');           % tezijska matrica ulaza

lam_y = input('unesi lam_y: ');                   % robusni inicijalni izlaz
lam_u = input('unesi lam_u: ');                   % robusni inicijalni ulaz
lam_g = input('unesi lam_g: ');

Q = Q*eye(p);
R = R*eye(m);

SimTime = input('unesi broj horizonata: ');       % vrijeme horizonta

%referentna trajektorija

if p == 1

    disp('UNESI VEKTOR REFERENTNE TRAJEKTORIJE');
    ref = input('za nulvektor unesi 0, za jedinичni step unesi 1, za proizvoljni vektor unesi
2: ');
    if ref == 0
        rref = zeros(p*(SimTime+N), 1);
    end
    if ref == 1
        rref = ones(p*(SimTime+N), 1);
    end
    if ref == 2
        rref = input('unesi vektor referentne trajektorije: ');

        while max(size(rref, 1), size(rref, 2)) ~= p*(SimTime+N)

            disp('GRESKA! Velicina referentne trajektorije treba biti (broj izlaza)*(broj
horizonata + velicina horizonta)')
            rref = input('unesi vektor referentne trajektorije: ');

        end

    end

end

```

```

end

% inicijalno stanje
xini = xini(:,end);

if 1

    plt = input('za iscrtavanje horizonta unesi 1, inače unesi 0: ');

    umin = input('unesi minimalnu vrijednost ulaznog signala: ');
    umax = input('unesi maksimalnu vrijednost ulaznog signala: ');

    Aeq = [Up zeros(size(Up, 1), Tini*p) -1*eye(Tini*m, Tini*m); Yp -1*eye(Tini*p, Tini*p)
zeros(Tini*p, Tini*m)];
    beq = [uini; yini];

    Aineq = [-Uf zeros(size(Uf,1), Tini*(m+p)); Uf zeros(size(Uf,1), Tini*(m+p))];
    bineq = [-umin*ones(size(Uf,1),1); umax*ones(size(Uf,1),1)];

    Qdiag = kron(eye(N),Q);
    Rdiag = kron(eye(N),R);

    Htemp = (2*blkdiag(Rdiag,Qdiag));
    M = [Uf;Yf];
    H = M'*Htemp*M;

    Hrob = [H + lam_g*eig(size(H, 1), size(H, 2)) zeros(size(H, 1), Tini*p); zeros(Tini*p,
size(H, 2)) diag(lam_y*ones(Tini*p, 1))];
    Hrob = [Hrob zeros(size(Hrob, 1), Tini*m); zeros(Tini*m, size(Hrob, 2))
diag(lam_u*ones(Tini*m,1))];
    Hrob = 0.5*(Hrob'+Hrob)+0.1*eye(size(Hrob,1));

    xList_rob = [];
    uList_rob = [];
    yList_rob = [];

    xList_rob = [xList_rob,xini];

    OBJECTIVE = [];

% petlje
tic

for k = 1:SimTime

    rN = rref((p*(k-1)+1):(p*(k-1+N)));
    f = -2*rN'*Qdiag*Yf;
    f = [f zeros(1, Tini*(m + p))];

    x=xini;

    g=quadprog(Hrob, f, Aineq, bineq, Aeq, [uini;yini]);

    u = Uf*g(1:T - L + 1);
    u_act = u(1:m);

    y = Yf*g(1:T - L + 1);

    x_act = A*xini + B*(u_act + [0.0001*(0.5 - rand(1,1)); 0.0001*(0.5 - rand(1,1))]);

    y_act = C*xini + D*u_act + (0.0001*(0.5 - rand(1,1)));

    xList_rob = [xList_rob,x_act];
    uList_rob = [uList_rob,u_act];
    yList_rob = [yList_rob,y_act];

    uini = [uini((m+1):end);u_act];
    yini = [yini((p+1):end);y_act];

    OBJECTIVE = [OBJECTIVE [u' y']*RQ*[u; y]];

    xini = x_act;

    if plt == 1
        figure(1)

```

```

subplot(211)

for i = 0:m - 1
    txt = ['ulaz ', num2str(i + 1)];
    plt1 = plot([1:N]', u(i + 1:m*m*N));
    hold on,
    set(plt1, {'DisplayName'}, {txt})
end

hold off
legend show
grid on
title('ulazi')

subplot(212)

for i=0:p - 1
    txt = ['izlaz ', num2str(i + 1)];
    plt2 = plot([1:N]', y(i + 1:p*p*N));
    hold on,
    set(plt2, {'DisplayName'}, {txt}),
end

hold off
legend show
grid on
title('izlazi')

end

end

vrijeme = toc

end

figure(1)

subplot(211)

for i = 0:m - 1
    txt = ['ulaz ', num2str(i + 1)];
    plt1 = plot(uList_rob(i+1:m:end));
    hold on,
    set(plt1, {'DisplayName'}, {txt})
end

xlabel('tocka optimizacije')
hold off
legend show
grid on
title('ulazi')

subplot(212)

for i=0:p - 1
    txt = ['izlaz ', num2str(i + 1)];
    plt2 = plot(yList_rob(i+1:p:end));
    hold on,
    set(plt2, {'DisplayName'}, {txt}),
end

txtr = ['referentna trajektorija'];
pltr = plot(rref);
set(pltr, {'DisplayName'}, {txtr})

xlabel('tocka optimizacije')
hold off
legend show
grid on
title('izlazi')

figure(3),
plot(OBJECTIVE)
title('ostvarena funkcija cilja')
xlabel('tocka optimizacije')

```

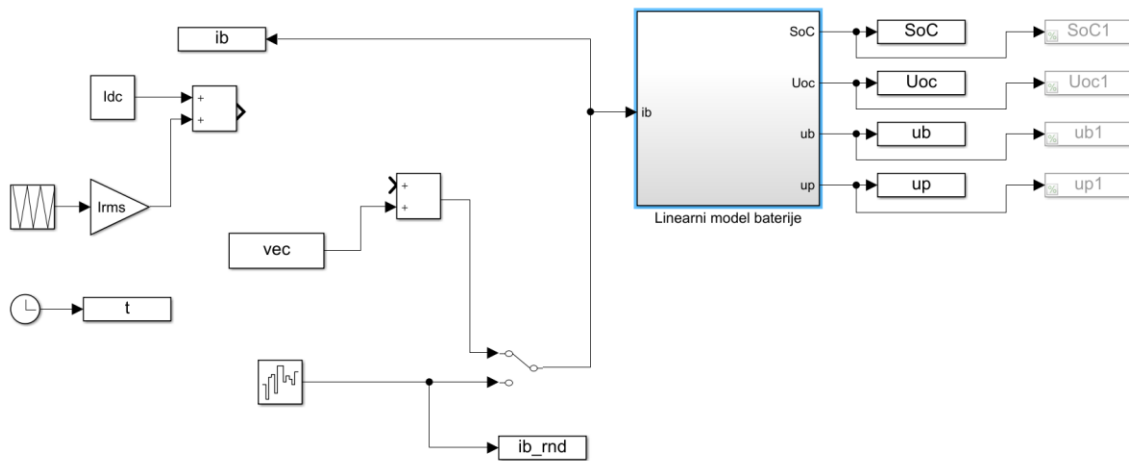


```
ylabel('u^T*R*u + y^T*Q*y'),
grid on
```

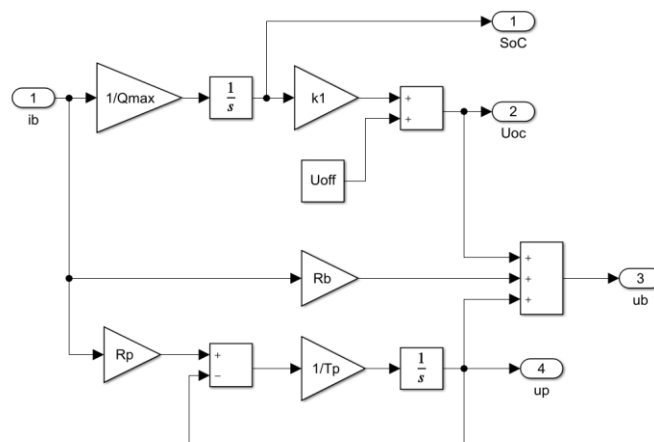
### 8.3. Modeli

#### 8.3.1. Model baterije

Ulazno izlazni podatci prikupljeni su simulacijom Simulink modela prema slici 19.



Slika 19 Simulink model baterijskog sustava



Slika 20 Simulink linearni model baterije

#### 8.3.2. Model sustava elastično spregnutih masa

Model sustava presjek je potrebe za što jednostavnijim, granično stabilnim MIMO sustavom (iako je odabran samo jedan izlaz). Parametri su dani u tablici 4.

Tablica 4 Parametri elastično spregnutog sustava 3 mase

$m_1 = m_2 = m_3$	0.25kg
$k_1 = k_2 = k_3 = k_4$	5 N/m

## 8.3.3. Model bušećeg sustava

Iz slike 12 moguće je izvesti sustav 4. reda u PS-u, s vektorom stanja  $x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_1 \\ \Delta\alpha \\ \omega_1 \end{bmatrix}$  zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_m}{J_1} & \frac{-d}{J_1 i_p^2} & \frac{-c}{J_1 i_p} & \frac{d}{J_1 i_p} \\ 0 & \frac{1}{i_p} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{d}{J_2 i_p} & \frac{c}{J_2} & \frac{-d}{J_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], D = [0].$$

Oznake  $\omega_1$  i  $\omega_2$  utjelovljuju kutne brzine,  $i_a$  je struja, a  $\Delta\alpha$  je razlika u položaju dvije mase na krajevima vratila. Parametri sustava dani su tablicom

**Tablica 5 Parametri modela bušećeg sustava**

$K_m$	400 Nm/V	Elektromotorna konstanta
$T_m$	0.01 ms	Vremenska konstanta motora
$J_1$	10 kgm <sup>2</sup>	Inercija na strani motora
$J_2$	150 kgm <sup>2</sup>	Inercija na strani tereta
$c$	450 Nm/rad	Konstanta elastičnosti
$d$	200 Nms/rad	Faktor prigušenja
$i_p$	6	Prijenosni omjer

Za uvođenje poremećaja se vektor poremećaja unijelo kao novi ulaz u sustav.

**LITERATURA**

- [1] J. C. Willems, P. Rapisarda, I. Markovskiy, B. L. De Moor, A note on persistency of excitation, *Systems & Control Letters*, Vol. 54, no. 4, pp. 325-329, 2005.
- [2] J. C. Willems, *The Behavioral Approach to Modeling and Control of Dynamical Systems*, Proceedings of the sixth international conference on Chemical Process Control, Edited by J.B. Rawlings, B.A. Ogunnaike, J.W. Eaton, American Institute of Chemical Engineers, 96-108, 2002.
- [3] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, pp. 718, Siam, 2000.
- [4] J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler, Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC, 18th European Control Conference (ECC), 978-3-907144-00-8, EUCA, 2019.
- [5] I. Markovskiy, P. Rapisarda, Data-driven simulation and control, *International Journal of Control*, Vol. 81, no. 12, 1946–1959, December 2008.
- [6] J. C. Willems, *Modelling Dynamic Systems Using Manifest and Latent Variables*, *Mathematics and Computer Simulation*, Vol. 53, 227-237, 2000.
- [7] I. Markovskiy, J. C. Willems, S. V. Huffel, B. D. Moor, *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems, A Behavioral Approach*, pp. 206, Siam, Philadelphia, 2006.
- [8] J. C. Willems, *Paradigms and Puzzles in the Theory of Dynamical Systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, no. 3, March 1991.
- [9] J. Berberich, J. Köhler, M. A. Müller, F. Allgöwer, Dana-Drive, Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2021.
- [10] E. Elokda, J. Coulosin, P. N. Beuchat, J. Lygeros, F. Dörfler, Data-enabled predictive control for quadcopters, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, DOI: 10.1002/rnc.5686, ETH Zurich, 2021.
- [11] L. Huang, J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler, Decentralized Data-Enabled Predictive Control for Power System Oscillation Damping, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1-13, DOI: 10.1109/TCST.2021.3088638, 2021.
- [12] D. Pavković, M. Krznar, A. Komljenović, M. Hrgetić, D. Zorc, Dual EKF-Based State and Parameter Estimator for a LiFePO<sub>4</sub> Battery Cell, *Journal of Power Electronics*, Vol. 17, no. 2, pp. 398-410, March 2017.
- [13] D. Pavković, J. Deur, A. Lisac, A torque estimator-based control strategy for oil-well drill-string torsional vibrations active damping including an auto-tuning algorithm, *Control Engineering Practice*, Vol. 19, pp. 770. 836-850, USA, 2017.

- [14] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, M. M. Diehl, Model Predictive Control: Theory, Computation and Design, Nob Hill Publishing, 2017.
- [15] A. A. H. Damen, P. M. J. Van den Hof, Approximate realization based upon an alternative to the Hankel matrix: the Page matrix, *Systems and Control Letters*, Vol. 2, no. 4, pp. 202-208, 1982.
- [16] J. Berberich, A. Koch, C. W. Scherer, F. Allgöwer, Robust data-driven state-feedback design, *American Control Conference*, pp. 1-3, doi: 10.23919/ACC45564.2020.9147329, July 2020.
- [17] L. Huang, J. Coulson, J. Lygeros and F. Dörfler, Data-Enabled Predictive Control for Grid-Connected Power Converters, *IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 11-13, December, 2019.
- [18] P. G. Carlet, A. Favato, S. Bolognani, F. Dörfler, Data-driven predictive current control for synchronous motor drives, *IEEE Energy Conversion Congress and expo*, doi: 10.1109/ECCE44975.2020.9235958, October, 2020.
- [19] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, pp. 716, 2004.
- [20] L. Huang, J. Zhen, J. Lygeros, F. Dörfler, Robust Data-Enabled Predictive Control: Tractable Formulations and Performance Guarantees, *arXiv preprint arXiv:2105.07199*, May, 2021.
- [21] Z. S. Hou, Z. Wang, From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective, *Information Science*, Vol. 235, pp. 3-35, August 2012.
- [22] F. Fiedler, S. Lucia, On the relationship between data-enabled predictive control and subspace predictive control, *arXiv preprint arXiv:2011.13868*, 2020
- [23] C. Cai, A. R. Teel, Input-output-to-state stability for discrete-time systems, *Automatica*, Vol. 44, no. 2, pp. 326-336. 2009.
- [24] J. Berberich, F. Allgöwer, A trajectory-based framework for data-enabled system analysis and control, 2020. *European Control Conference (ECC)* May 12-15, Saint Petersburg, Russia, 2020.
- [25] L. Huang, J. Zhen, J. Lygeros, F. Dörfler, Quadratic regularization of Data-Enabled Predictive Control: Theory and application to power converter experiment, *arXiv preprint arXiv:2012.04434*, 2020.
- [26] F. Dörfler, J. Coulson, I. Markovsky, Bridging direct and indirect data-driven control formulations via regularization and relaxations, *arXiv preprint arXiv:2101.01273*, 2021.

- [27] D. Bertsimus, M. S. Copenhaver, Characterization of the equivalence of robustification and regularization in linear and matrix regression, *European Journal of Operational Research*, Vol. 270, no. 3, pp. 3561-3574, 2010.
- [28] J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler, Distributionally Robust Chance Constrained Data-enabled Predictive Control, *IEEE Transaction on Automatic Control*, DOI: 10.1109/TAC.2021.3097706, 2021.