

# Uređaj za ispitivanje kinetičkog trenja

---

**Kovačić, Filip**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:188250>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-23**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Filip Kovačić

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Darko Landek, dipl. ing.

Student:

Filip Kovačić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr.sc. Darku Landeku na ukazanoj pomoći, stručnim savjetima i strpljenju te svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci.

Filip Kovačić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Filip Kovačić**

Mat. br.: 0035205727

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Uređaj za ispitivanje kinetičkog trenja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Kinetic friction tester**

Opis zadatka:

Trenje je neizbježna pojava u mehanizmima i pogonima. Za ispitivanje faktora trenja u literaturi se predlaže niz metoda od kojih su neke opisane samo fizikalnim principima, dok su druge postale dio normi. Metoda ispitivanja kinetičkog faktora trenja na temelju mjerenja periode i amplitude oscilacija Timoshenkovog oscilatora opisana je u literaturi, ali nije izvedena kao normirana metoda. Oscilator se sastoji od dva jednaka horizontalno i paralelno postavljena valjka koji se okreću istim brzinama u suprotnim smjerovima. Na valjke se postavlja ispitni uzorak u obliku šipke koji oscilira pogonjen rotacijom valjaka. Period i amplituda oscilacije uzorka ovise o faktoru kinetičkog trenja između uzorka i valjaka.

U radu treba opisati fizikalni princip rada i postaviti matematički model Timoshenkovog oscilatora te predložiti i razraditi konstrukciju uređaja za određivanje faktora kinetičkog trenja opremljenog upravljačkim i mjernim sklopovima.

Navesti u radu korištenu literaturu i stručnu pomoć

Zadatak zadan:

30. studenoga 2020.

Zadatak zadao:

Prof.dr.sc. Darko Landek

Datum predaje rada:

1. rok: 18 veljače 2021.
2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.
3. rok: 23. rujna 2021.

Predvideni datumi obrane:

1. rok: 22.2. – 26.2.2021.
2. rok (izvanredni): 9.7.2021.
3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Branko Bauer

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. TRENJE KRUTIH TIJELA .....	2
2.1. Povijest proučavanja pojave trenja .....	2
2.2. Uzroci i vrste trenja [1].....	5
2.2.1. Coulombov zakon trenja .....	5
2.2.2. Statičko trenje .....	7
2.2.3. Kinetičko trenje.....	7
2.3. Trenje i podmazivanje .....	10
2.4. Osnovni mehanizmi nastanka trenja.....	11
2.5. Trenje uz deformaciju kontaktne površine .....	12
2.6. Trenje kotrljanja i trenje klizanja.....	15
2.7. Metode ispitivanja trenja krutih tijela u laboratorijskim uvjetima [1].....	16
2.8. Standardizirani testovi za određivanje faktora trenja .....	19
2.9. Fizikalni koncepti uređaja za ispitivanje trenja .....	22
2.9.1. Mjerenje koeficijenta trenja pomoću valjnih tijela [8] .....	22
2.9.2. Uzorak koji oscilira na kosini povezan oprugom [9].....	26
2.9.3. Sustav s rotacijom dva diska [10] .....	28
3. TIMOSHENKOV OSCILATOR .....	31
3.1. Kratka biografija Stephena Timoshenka .....	31
3.2. Osnovni princip Timoshenkovog oscilatora.....	32
3.3. Matematički model određivanja kinetičkog faktora trenja preko Timoshenkovog oscilatora [13].....	32
4. KONSTRUKCIJA TIMOSHENKOVOG OSCILATORA.....	35
4.1. Mehanička izvedba Timoshenkovog oscilatora.....	35
4.2. Upravljanje radom oscilatora.....	38

---

4.3. Moguće pogreške u izvedbi i primjeni oscilatora.....	40
5. ISPITIVANJE UZORAKA NA TIMOSHENKOVOM OSCILATORU.....	42
5.1. Materijali uzoraka i plan ispitivanja .....	42
5.2. Rezultati ispitivanja .....	43
5.3. Diskusija rezultata .....	47
6. ZAKLJUČAK.....	49
LITERATURA.....	50
PRILOZI .....	51

## POPIS SLIKA

Slika 1. Charles-Augustin de Coulomb (14.6. 1736. - 23. 8. 1806.) [2] .....	3
Slika 2. Shematski prikaz tipičnih veza nastalih adhezijom [3] .....	4
Slika 3. Površinske nepravilnosti u odnosu na idealni profil [1].....	6
Slika 4. Mjerenje sile trenja [1].....	7
Slika 5. Sustav blokova u mirovanju i zatim u trenutku dodira bloka mase $m_1$ i poda [4] .....	8
Slika 6. Sustav blokova u trenutku dodira bloka mase $m_1$ i poda te zatim pomicanje bloka mase $m_2$ do stanja mirovanja [4] .....	8
Slika 7. Vrste trenja klizanja prema stanju površina nalijeganja [5] .....	11
Slika 8. Mehanizmi koji uzrokuju pojavu trenja [1]: .....	12
Slika 9. Shematski prikaz zone deformacije kod polimera [1] .....	13
Slika 10. Pojava Schallamachovih valova [1]: .....	14
Slika 11. Shematski prikaz rasporeda sila tijekom kotrljanja tijela [7] .....	16
Slika 12. Ispitivanje trenja na kosini [1] .....	18
Slika 13. Shematski prikaz trenja klizanja koji služi kao osnova za testiranje povlačenjem bloka po ravnoj podlozi [7] .....	18
Slika 14. Shematski prikaz sila koje djeluju na valjak dok se slobodno kotrlja niz kosinu [8] .....	22
Slika 15. Točke na pravcu koje označavaju svaku punu rotaciju valjka na kosini [8] .....	25
Slika 16. Graf udaljenosti između dvije točke na kosini u odnosu na $\tan \theta$ [8] .....	25
Slika 17. Eksperimentalni pristup određivanja faktora trenja [9].....	26
Slika 18. a) Izmjerena pozicija bloka u vremenu pomoću senzora [9].....	27
b) Izmjerena brzina u vremenu pomoću senzora .....	27
Slika 19. Linearni odnos normalne sile i statičke sile trenja (sila neposredno prije početka gibanja) [9] .....	27
Slika 20. Sustav s dva rotacijska diska (na slici prikazan jedan rotacijski disk i senzor pokreta) [10] .....	28



Slika 21. Kutna brzina inicijalno rotirajućeg diska i promjena brzine tijekom kolizije sa stacionarnim diskom [10].....	29
Slika 22. Disk radijusa $R$ i prsten radijusa $r$ širine $dr$ , $OOI$ je os rotacije [10].....	29
Slika 23. Stephen Timoshenko [12] .....	31
Slika 24. Shematski prikaz Timoshenkovog oscilatora [13].....	32
Slika 25. Prvi koncept konstrukcije Timoshenkovog oscilatora: a) nacrt b) tlocrt.....	36
Slika 26. Izgled prve konstrukcijske izvedbe Timoshenkovog oscilatora .....	36
Slika 27. Drugi koncept konstrukcije Timoshenkovog oscilatora: a) nacrt b) tlocrt .....	37
Slika 28. Izgled druge konstrukcijske izvedbe Timoshenkovog oscilatora .....	37
Slika 29. Arduino UNO Rev 3 s prikazanim koaksijalnim i USB priključkom.....	39
Slika 30. Shema spajanja motora, senzora brzine LM393, upravljačkog modula L298N i Arduina .....	39
Slika 31. Izgled Timoshenkovog oscilatora s upravljačko-mjernim sklopom.....	40
Slika 32. Libela koja pokazuje da su vratila u ravnoteži i elektronički sklopovi povezani mnogobrojnim žicama .....	41
Slika 33. Uzorci za ispitivanje faktora trenja .....	43
Slika 34. Prikaz titranja uzorka 1 od polistirena na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6.....	44
Slika 35. Prikaz titranja uzorka 2 od aluminijske na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6.....	44
Slika 36. Prikaz titranja uzorka 3 od čelika s prevlakom nikla na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6 .....	45
Slika 37. Prikaz titranja uzorka 4 od mjedi na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6 .....	45
Slika 38. Prikaz titranja uzorka 5 od bakra na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6 .....	46
Slika 39. Histogram izračunatih faktora trenja .....	47

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Odbori ASTM-a povezani s ispitivanjem trenja i trošenja [1] .....	19
Tablica 2. Odbori ASTM-a povezani s ispitivanjem trenja i trošenja (nastavak) [1] .....	20
Tablica 3. Uzorci za ispitivanje kinetičkog faktora trenja .....	42

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\sigma$	$\text{N/mm}^2$	Normalno naprezanje
$F$	N	Sila pritiska
$A$	$\text{mm}^2$	Površina
$F_{\text{tr}}$	N	Sila trenja
$F_N$	N	Normalna sila
$\mu$	-	Koeficijent trenja
$\mu_s$	-	Statički koeficijent trenja
$\mu_k$	-	Kinetički koeficijent trenja
$g$	$\text{m/s}^2$	Ubrzanje sile teže
$m$	kg	Masa bloka
$v$	m/s	Brzina
$v_0$	m/s	Početna brzina
$v_b$	m/s	Brzina bloka
$a$	$\text{m/s}^2$	Ubrzanje
$a_1, a_2$	$\text{m/s}^2$	Ubrzanje bloka 1 i 2
$Y$	mm	Udaljenost koju prijeđu blokovi
$X$	mm	Udaljenost koju prijeđe blok 2 u drugoj fazi
$\theta$	°	Kut nagiba kosine
$M$	kg	Masa valjka
$a_{\text{CM}}$	$\text{m/s}^2$	Ubrzanje valjka
$I_{\text{CM}}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Moment inercije valjka
$\alpha$	$\text{rad/s}^2$	Kutno ubrzanje
$R$	mm	Radijus valjka
$\Omega$	°	Oznaka kuta za koji se okrene valjak
$x_L$	mm	Položaj valjka
$x_\Omega$	mm	Udaljenost po kružnom luku
$\Delta x$	mm	Razlika udaljenosti
$D$	mm	Udaljenost između dvije točke
$m_\alpha$	°	Konstantni nagib
$a_a, a_d$	$\text{m/s}^2$	Akceleracija uz kosinu i niz kosinu
$\tau$	$\text{N}\cdot\text{mm}$	Moment sile
$l$	mm	Udaljenost između osovina oscilatora
$N_1, N_2$	N	Normalna sila između uzorka i prvog prstena te uzorka i drugog prstena na oscilatoru
$F_1, F_2$	N	Sila trenja između uzorka i prvog prstena te uzorka i drugog prstena na oscilatoru
$f$	$\text{Hz}, \text{s}^{-1}$	Frekvencija
$T$	s	Period titranja

## SAŽETAK

U radu je opisano ispitivanje trenja između krutih tijela i određivanje faktora trenja pomoću Timoshenkovog oscilatora. Timoshenkov oscilator (oscilator trenja) je uređaj u kojem se uzorak položen na dva rotirajuća prstena pobuđuje na titranje pri čemu je perioda titranja ovisna o faktoru trenja između uzorka i prstena. Prstenovi se okreću približno istom kutnom brzinom, u suprotnom smjeru i periodički povlače uzorak lijevo i desno u horizontalnoj ravnini. U ispitivanju se snima titranje oznake postavljene na sredinu uzorka i potom se analizira period titranja. U radu je predložen koncept konstrukcije i upravljanja radom Timoshenkovog oscilatora s rotirajućim prstenovima od čelika EN DIN 100Cr6. Za upravljački sklop korišten je mikrokontroler Arduino UNO Rev 3 i dva ista istosmjerna elektromotora. Predloženi uređaj i upravljački sklop su izrađeni i na njima je provedeno ispitivanje faktora trenja za pet različitih materijala: polimer, aluminiј, mjed, čelik i bakar.

Ključne riječi: Timoshenkov oscilator, trenje, faktor trenja

## SUMMARY

In this paper the friction between rigid bodies and the determination of friction coefficient using Timoshenko oscillator is described. The Timoshenko oscillator (friction oscillator) is a device in which a sample placed on two rotating rings is induced to oscillate while the period of oscillation depends on the coefficient of friction between the sample and the ring. The rings are rotating at approximately the same angular velocity, in the opposite directions and they periodically pull the sample left and right in the horizontal plane. In the test, oscillation of mark placed in the middle of sample is recorded and then the period of oscillation is analyzed. In this paper, the concept of the design and the operating control of Timoshenko oscillator with rotating rings made of steel EN DIN 100Cr6 is proposed. For the control unit are used Arduino UNO Rev 3 and two DC electric motors. Proposed device and control unit are made and on them testing of coefficient of friction is performed for five different materials: polymer, aluminium, brass, steel and copper.

Key words: Timoshenko oscillator, friction, coefficient of friction

## 1. UVOD

Trenje u kontaktu krutih tijela koja se gibaju je pojava koja se uvijek pojavljuje iako nije potpuno jasan uzrok nastajanja trenja. Posljedica kinetičkog trenja je trošenje i zagrijavanje materijala što je svakako nepovoljna stvar. Time se gubi korisna kinetička energija jer ju zamjenjuje toplinska energija. U svrhu određivanja veličine utjecaja trenja na prijenos energije i gibanja nužno je poznavati faktor trenja između površina u kontaktu. Faktor trenja je fizikalna veličina koja ovisi o različitim faktorima kao što je hrapavost, kemijski sastav materijala te načinu podmazivanja i vrsta maziva.

U radu će se obraditi osnovni pojmovi kao što je trenje, faktor trenja i mehanizmi trenja. Također će se razraditi konstrukcija i upravljanje radom Timoshenkovog oscilatora te način određivanja faktora trenja. Na izrađenom uređaju će se izmjeriti period titranja pet uzoraka od različitih materijala: polimer, aluminij, mjed, čelik i bakar i na temelju analize titranja odrediti faktor trenja.

## 2. TRENJE KRUTIH TIJELA

### 2.1. Povijest proučavanja pojave trenja

Početak istraživanja teorije trenja počinje istovremeno kada se i počela razvijati sama znanost, općenito tijekom 18. i 19. stoljeća. U začetku su postojala dva različita učenja. Jedno učenje je bilo produkt francuske škole gdje se naglasak stavlja na mehaničku interakciju površinske hrapavosti i nepravilnosti površine. Drugo učenje je bilo iz engleske škole gdje se proučavala adhezija između materijala. [1]

Francuska škola je započela 1699. godine kada je Guillaume Amontons objavio znanstvenu studiju u kojoj je opisao dva osnovna „zakona“ trenja, poznata i kao Amontonsovi zakoni. Prvim zakonom je ustvrdio da je sila trenja proporcionalna dovedenom opterećenju, a drugim da je sila trenja nezavisna od površine kontakta. Amontons je pretpostavljao da je trenje uzrokovano interakcijom neravnina različitog oblika i veličina na površini tijela. [1]

Zatim je 1750. godine švicarski znanstvenik Leonhard Euler, poznat po svojem velikom doprinosu matematici, analitičkim pristupom elaborirao na Amontonsovu teoriju. On je predložio ideju da je trenje prouzročeno cikličkim puzanjem, a time i da je rad uložen u trenje rad podizanja jednog tijela preko neravnina na površini drugog. To je bio prvi analitički pristup trenju i smatra se bitnim dijelom u mehanici, posebno području dinamike. Euler je također prvi koji je uveo grčko slovo  $\mu$  kao oznaku za faktor trenja s jasnom razlikom između statičkog i kinetičkog faktora trenja. [1]

Sljedeći korak vezan uz francusku školu proučavanja trenja desio se skoro sto godina nakon Amontonsove studije s kraja 17. stoljeća. Tada je francuski fizičar Charles-Augustin de Coulomb (slika 1), koji je najpoznatiji po Coulombovom zakonu vezanom uz električnu silu i naboje, uspio eksperimentalno dokazati Amontonsove zakone. On je donio zaključak da je trenje uzrokovano mehaničkim isprepletanjem neravnina dvaju površina, a da sam materijal površine sa svojim neravninama u stvari nema mogućnost trenja. Iako je njegov zaključak bio pogrešan Coulomb se i dalje smatra vrlo bitnim za razumijevanje trenja. Najvažnije što je proizašlo iz njegovih proučavanja i eksperimentiranja je takozvani Coulombov zakon trenja koji govori da se trenje opire gibanju tijela i da je sila trenja suprotnog smjera od sile koja uzrokuje gibanje tijela. Samim time francuska škola je mnogo doprinijela istraživanju trenja. Ponajprije shvaćanjem da se kontakti na površinama dvaju tijela ostvaruju samo u nekim točkama iako su pogrešno shvatili da su kontakti određeni samo geometrijom neravnina zanemarujući pritom plastičnu deformaciju koja uzrokuje promjenu oblika neravnina. [1]



Slika 1. Charles-Augustin de Coulomb (14.6. 1736. - 23. 8. 1806.) [2]

Engleska škola, s druge strane, započela je 1724. godine kada je John Theophilus Desaguliers predstavio kraljevskom društvu za unaprjeđenje prirodnih znanosti koncept kohezivnih sila danas nazivanih adhezijom. On je primijetio da kada se dvije olovne loptice sudare, one se „zalijepe“ jedna za drugu i da je pritom potrebna značajna sila da ih se rastavi. Pretpostavio je da je ta kohezivna sila univerzalna pojava, a samim time i predložio da trenje funkcionira na istom principu adhezije između neravnina dviju površina u kontaktu. [1]

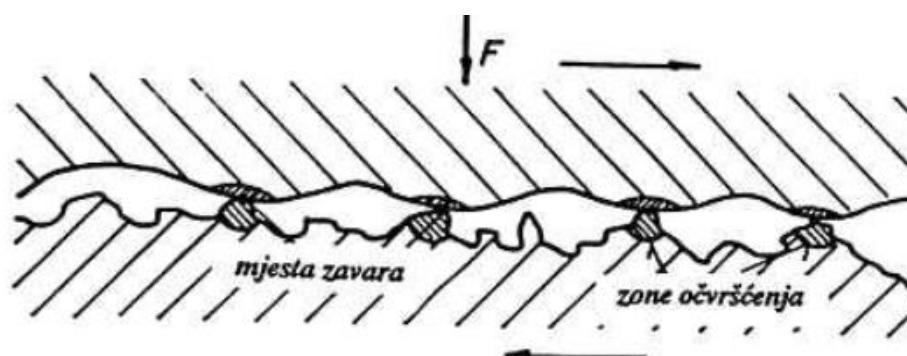


Iako su kroz godine još neki znanstvenici imali slične ideje, pravi napredak se dogodio tek sredinom 20. stoljeća kada su Frank Philip Bowden i David Tabor započeli sa zajedničkim radom. Njihov rad se temeljio na adheziji kao glavnom razlogu za pojavu trenja, ali također je ukazao i na pojave adhezije i deformacije ispod same površine tijela koje bitno utječu na raspodjelu energije nastale trenjem. Premda nisu bili prvi s teorijom adhezije pružili su najbolje dokaze kojima bi poduprli teoriju. Uključivši plastičnu deformaciju u teoriju dodali su i aspekt mehaničkih svojstava materijala o kojima se prije toga nije razmišljalo. U početku svoga rada su pretpostavili da bi se točke u kontaktu deformirale do pojave plastičnog tečenja i time dostigle opterećenje jednako utvrđenoj tvrdoći materijala. [1]

U tom slučaju mora postojati relativno gibanje između površina prilikom čega bi se prekidale veze nastale adhezijom (slika 2). Time se trenje definira kao suma svih sila potrebnih za prekidanje veza:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1)$$

Kasnije su Tabor i njegovi studenti nastavili istraživanja te su oni najviše zaslužni za današnja shvaćanja trenja. [1]



Slika 2. Shematski prikaz tipičnih veza nastalih adhezijom [3]

## 2.2. Uzroci i vrste trenja [1]

### 2.2.1. Coulombov zakon trenja

Trenje se javlja uslijed kombinacije različitih mehanizama koji zajednički djeluju kao što su adhezija, struganje ili deformacije sloja oksida. Nove tehnike mjerenja i modeliranja površina, ali i manipuliranja individualnih atoma površine pomogle su u otkrivanju novih informacija i aspekata trenja, ali postoji još mnogo mjesta za napredak. Pod trenjem podrazumijevamo gubitak kinetičke energije uslijed relativnog gibanja jednog tijela u odnosu na drugo tijelo, odnosno jedno tijelo se odupire gibanju preko površine drugog tijela. Gibanje se može ostvarivati klizanjem ili kotrljanjem.

Cilj proučavanja trenja je nastojanje kontroliranja trenja. U nekim slučajevima je poželjna mala sila trenja kao kod ležajeva i zupčanika, a u drugima pak je potrebna velika sila kao što su kočnice i lamelne spojke. Zajedničko svim sustavima je da treba trenje biti konstantno ili da se promjene veličine trenja mogu predvidjeti kako bi se komponente ili cijeli strojevi mogli konstruirati da budu što efikasniji i pouzdaniji.

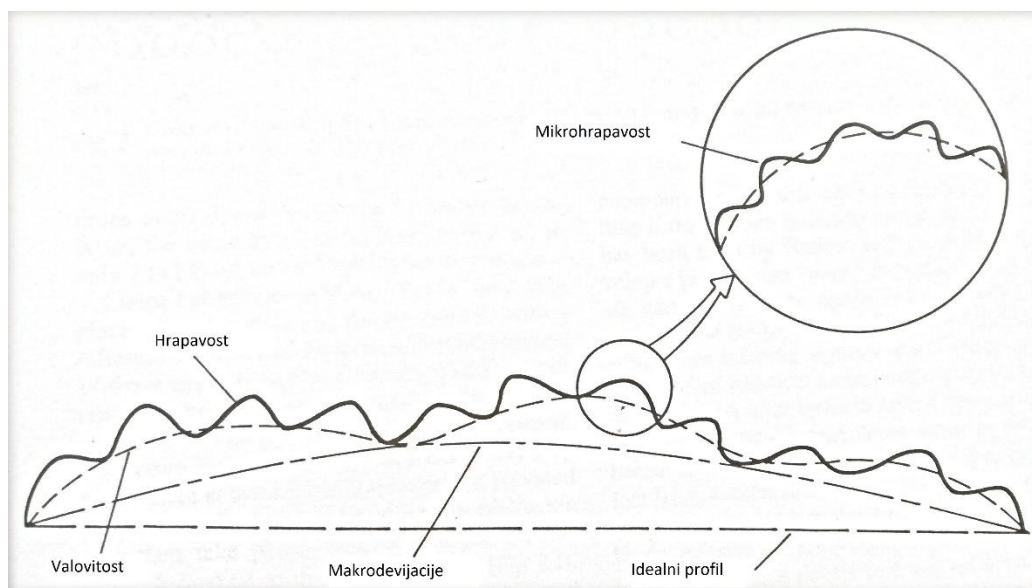
Sila trenja je tangencijalna sila na površinu tijela koju treba savladati kako bi se površina jednog tijela pomicala preko drugog. Odnos normalne i tangencijalne sile trenja naveden je Coulombovim zakonom trenja:

$$F_{\text{tr}} = \mu \cdot F_{\text{N}} \quad (2)$$

U ovoj jednadžbi  $\mu$  je koeficijent ili faktor trenja, koji može biti statički ili kinetički. Statički faktor trenja se označava s  $\mu_s$ , a kinetički s  $\mu_k$ . Uglavnom je statički koeficijent veći od kinetičkog, odnosno potrebna je veća sila da se tijelo počne gibati nego da se nastavi gibati. Koeficijent trenja je bezdimenzionalna veličina, a zavisi od materijala tijela koja su u kontaktu. Također raspon koeficijenta uobičajeno se kreće od 0 do 1, iako može biti i veći od 1 kao što je na primjer između površina dviju guma u kontaktu. U tom slučaju sila za ostvariti relativno gibanje je veća od normalne sile. Trenje može biti statičko ili kinematičko. Kinematičko trenje se još dijeli na trenje klizanja i trenje kotrljanja. U ovom radu ćemo se najviše baviti trenjem klizanja.

Osim normalne sile postoje još neki faktori koji utječu na trenje. Svojstva materijala tijela koja su u kontaktu je jedan od faktora kao i stanje samih površina. Neki materijali mogu imati različita svojstva trenja i trošenja u eksploataciji u odnosu na teoretski predviđena svojstva, npr. zbog deformacija na površini ili njihove oksidacije. Također u stanje površina možemo svrstati i topografiju površine. Kroz topografiju određujemo geometriju površine odnosno njezin oblik dobiven nekim od procesa izrade završnog oblika površine. Na svakoj se površini nalaze sitne nepravilnosti koje se mogu svrstati u nekoliko grupa (slika 3):

- Makrodevijacije – odstupanje površine od zadanog profila, uzrokuju ga neprecizni obradni sustavi.
- Valovitost – periodična odstupanja sinusoidne forme od zadanog profila.
- Hrapavost – uzrokovana je geometrijom reznih alata, trošenjem materijala i vibracijama u sustavu.
- Mikrohrapavost – finiji oblik hrapavosti, može ga uzrokovati nepravilnost unutar samog materijala kao i korozija i oksidacija koja se stvori tijekom obrade površine.

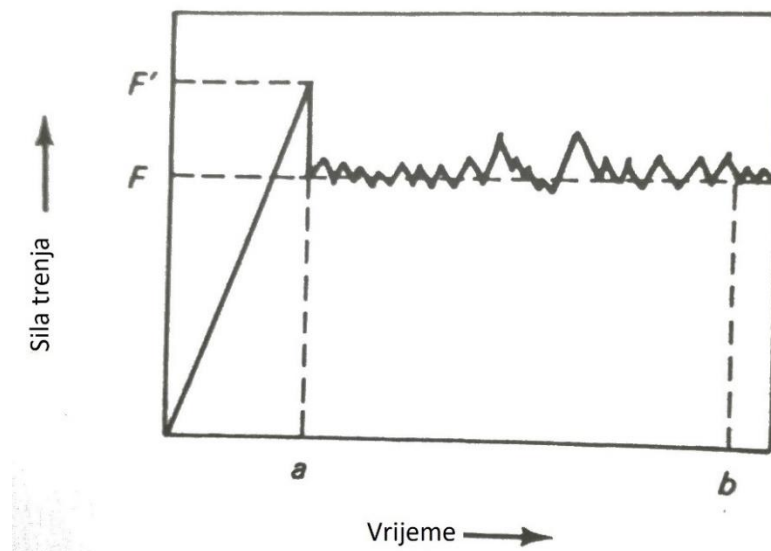


Slika 3. Površinske nepravilnosti u odnosu na idealni profil [1]

Mikrostruktura materijala ispod same površine često zna biti različita od ostatka materijala. Najčešće se to događa kod komada koji su strojno obrađeni, ali i tijekom kontinuiranog trošenja same površine. Površinski slojevi se plastično deformiraju tlačenjem i na mikrostrukturnoj razini dolazi do povećane gustoće dislokacija.

### 2.2.2. Statičko trenje

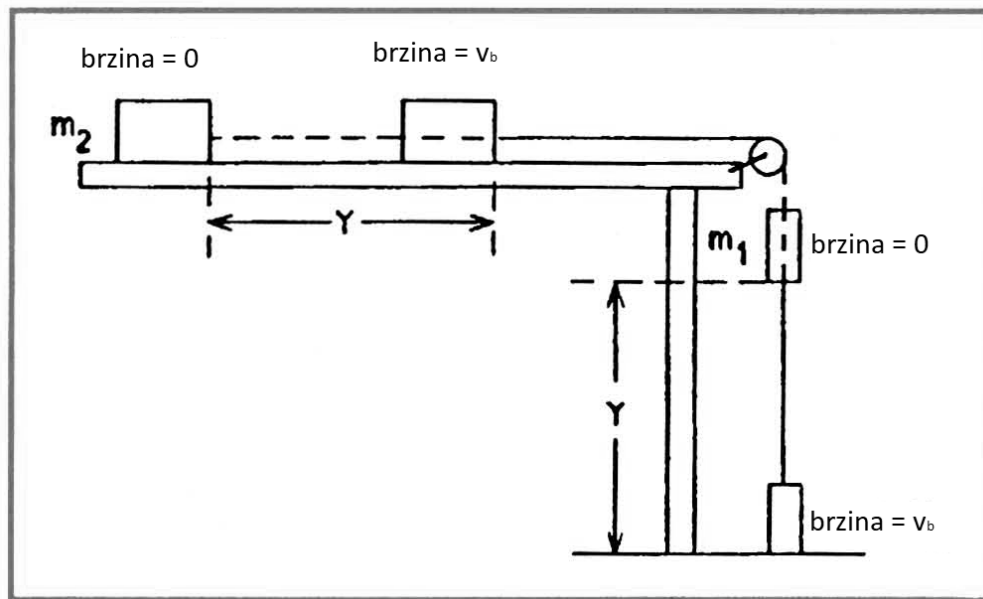
Statičko trenje prvi put definira fizičar Guillaume Amontons 1750. godine koji uvodi statički koeficijent trenja za određivanje maksimalne sile koju je potrebno savladati da bi se iniciralo makroskopsko gibanje između dva tijela. Amontons je tvrdio da u sustavu tijela na kosini taj koeficijent je jednak tangensu kuta nagiba kosine  $\theta$ . Na slici 4 prikazan je dijagram ovisnosti sile trenja o vremenu gibanja tijela na ravnoj podlozi snimljen primjenom senzora sile i osciloskopa iz kojeg je vidljiv prijelaz iz statičkog u kinetičko trenje. Ako senzori u mjernom uređaju detektiraju početni skok, označen  $F'$  (slika 4), ta se sila koristi za računanje statičkog koeficijenta trenja. Sila  $F$  s druge strane koristi se za mjerenje kinetičkog faktora trenja. [1]



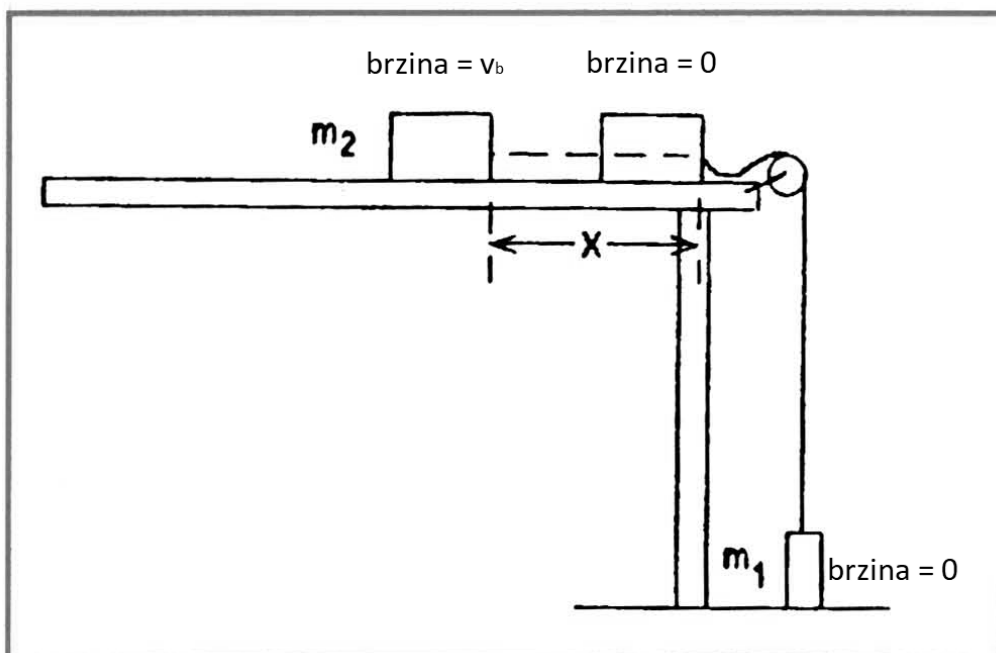
Slika 4. Mjerenje sile trenja [1]

### 2.2.3. Kinetičko trenje

Kinetičko trenje je definirano kao trenje tijekom makroskopskog relativnog gibanja između dva tijela. Veličina trenja je određena kinetičkim faktorom trenja koji ovisi o nekoliko parametara. Ti parametri se mogu prikazati pomoću jednostavnog pokusa gdje su dva bloka različitih masa povezana užetom. Jedan blok miruje na stolu dok drugog, koji preko koloture visi u zraku, puštamo da padne. [4]



Slika 5. Sustav blokova u mirovanju i zatim u trenutku dodira bloka mase  $m_1$  i poda [4]



Slika 6. Sustav blokova u trenutku dodira bloka mase  $m_1$  i poda te zatim pomicanje bloka mase  $m_2$  do stanja mirovanja [4]

Akceleraciju za sumiranu masu oba bloka možemo dobiti preko jednadžbe drugog Newtonovog zakona:

$$m_1 \cdot g - \mu_k \cdot m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a_1 \quad (3)$$

Također možemo iskoristiti i jednadžbu za jednoliko ubrzano gibanje po pravcu:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (\Delta X) \quad (4)$$

promatrajući iz slike 5 trenutak kada blok mase  $m_1$  dodirne pod uvrštavamo podatke u prethodnu formulu:

$$v_b^2 = 2 \cdot a_1 \cdot Y \quad (5)$$

Sada gledamo iz slike 6 trenutak kad se blok mase  $m_2$  nastavlja gibati do zaustavljanja nakon što je već blok mase  $m_1$  dodirnuo pod. Uvrštavamo podatke u jednadžbu drugog Newtonovog zakona:

$$-\mu_k \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2 \quad (6)$$

i uvrštavamo podatke u jednadžbu ubrzanog gibanja po pravcu:

$$0 = v_b^2 + 2 \cdot a_2 \cdot X \quad (7)$$

kombinirajući formule (5) i (7) dobivamo :

$$-a_1 \cdot Y = a_2 \cdot X \quad (8)$$

Na kraju formule (3) i (6) uvrštavamo u formulu (8) i pritom izlučujemo  $\mu_k$ :

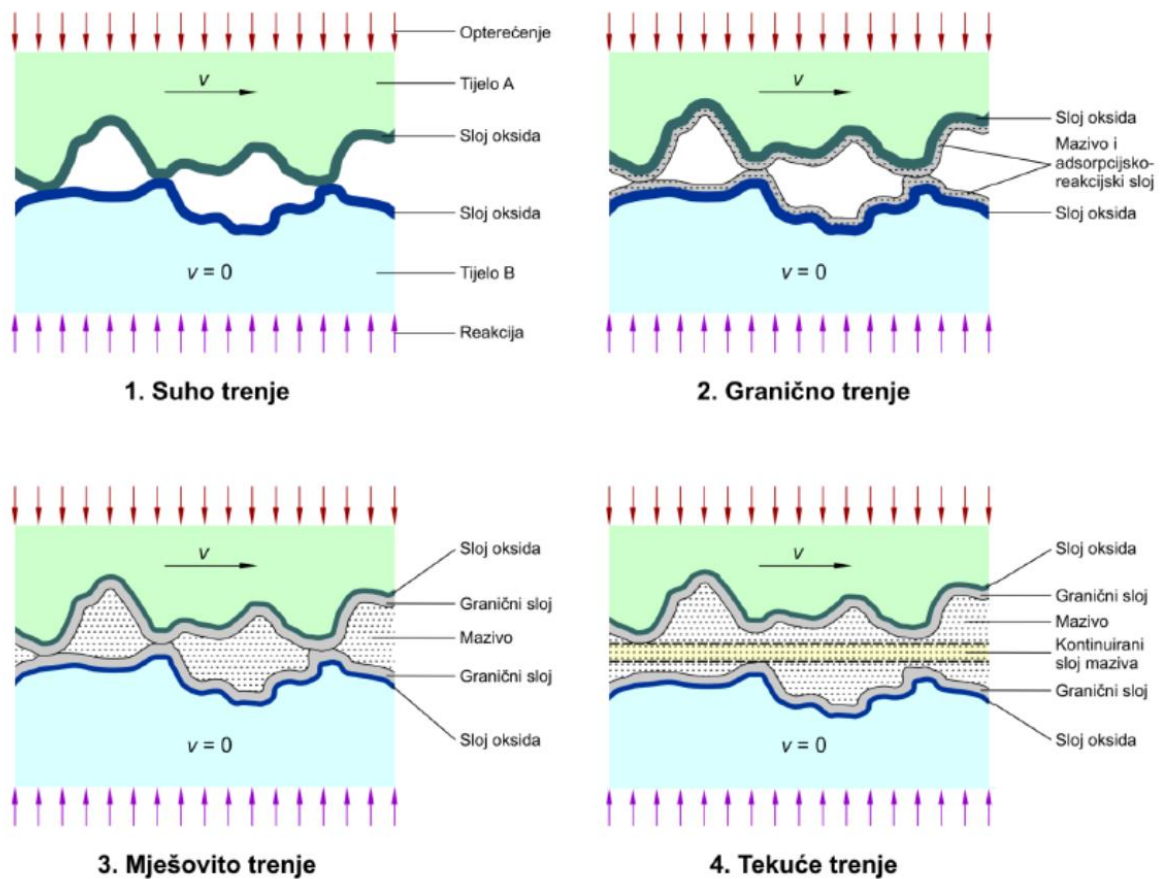
$$\mu_k = m_1 \cdot \frac{Y}{m_2 \cdot X + m_1 \cdot X + m_2 \cdot Y} \quad (9)$$

Dobili smo formulu za računanje kinetičkog faktora trenja. Iz nje vidimo da su parametri o kojima ovisi kinetički faktor trenja masa blokova i udaljenost. Osim toga ovisi i o vrsti materijala blokova, stanju površine kojom oni pritišću podlogu, koristi li se podmazivanje ili ne i temperaturi okoline i blokova. [4]

### 2.3. Trenje i podmazivanje

Kako se u većini slučajeva trenje smatra negativnom pojavom, koju se pokušava izbjeći zbog gubitka kinetičke energije, a i trošenja materijala, osmišljena su maziva. Osim toga podmazivanje ima još neke prednosti kao što su zaštita od korozije i bolje rasipanje topline. Nanošenjem tankog filma maziva trenje klizanja se znatno smanjuje. Maziva se mogu podijeliti u dvije skupine, a to su masti i ulja. Mastima se uglavnom podmazuju valjni ležajevi jer su dugotrajnija od ulja i potrebni su manji konstrukcijski zahtjevi. Neke od njih su kalcijeva, natrijeva i silikonska mast. Uljima se pak s druge strane najčešće podmazuju klizni ležajevi. Dijele se na mineralna i sintetička ulja. Trenje klizanja se može podijeliti na četiri vrste trenja prema stanju površina nalijeganja odnosno režimima podmazivanja (slika 7). Tim režimima se opisuje način prenošenja opterećenja s jedne površine na drugu. [5]

1. Suho trenje – nastavak ovog rada će se najviše odnositi na ovu vrstu trenja. Između površina nema maziva. Dolazi do pojave adhezije. Najčešće se primjenjuje kod kočnica i tarnih spojki.
2. Granično trenje – pojavljuje se kada su površine prevučene graničnim slojem koji je vrlo tanak. Može biti neko mazivo, ali i oksidi ili nečistoće. Zbog velikih lokalnih pritisaka na nekim mjestima prekida se sloj pa dolazi do zavarivanja čestica dviju površina odnosno adhezije.
3. Mješovito trenje – šupljine između neravnina su popunjene kapljevitim mazivom. Vrhovi neravnina su u dodiru preko graničnih slojeva. Još uvijek nema dovoljno maziva da u potpunosti razdvoji dvije površine.
4. Tekuće trenje – između površina postoji sloj maziva koji ih u svakom trenutku drži odvojenima. Mazivo prenosi opterećenje. Između površina nema trenja nego se javlja samo unutarnje trenje maziva.

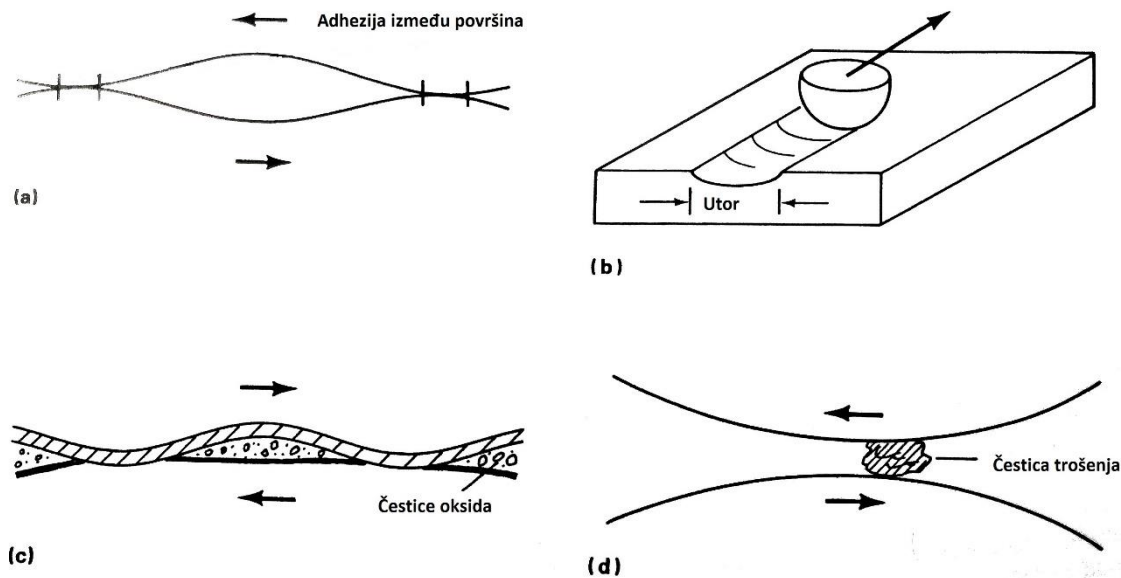


Slika 7. Vrste trenja klizanja prema stanju površina nalijeganja [5]

## 2.4. Osnovni mehanizmi nastanka trenja

U osnovne mehanizme nastanka trenja podrazumijevaju se fizikalni i kemijski događaji na mikroskopskoj razini ili događaji vezani uz svojstva materijala koji uzrokuju trenje. Različiti mehanizmi su kroz zadnjih par stotina godina predloženi, a većina ih se ustalila te se i danas smatraju uzročnicima trenja. Glavni mehanizmi koji dovode do pojave sile trenja jesu adhezija, mehanička interakcija površinskih neravnina, struganje materijala s površine djelovanjem neravnina druge površine, deformacije i puknuća površinskog sloja kao što je sloj oksida te lokalne plastične deformacije uzrokovane česticama trošenja zarobljenima između dvije površine koje se gibaju (slika 8). [1]





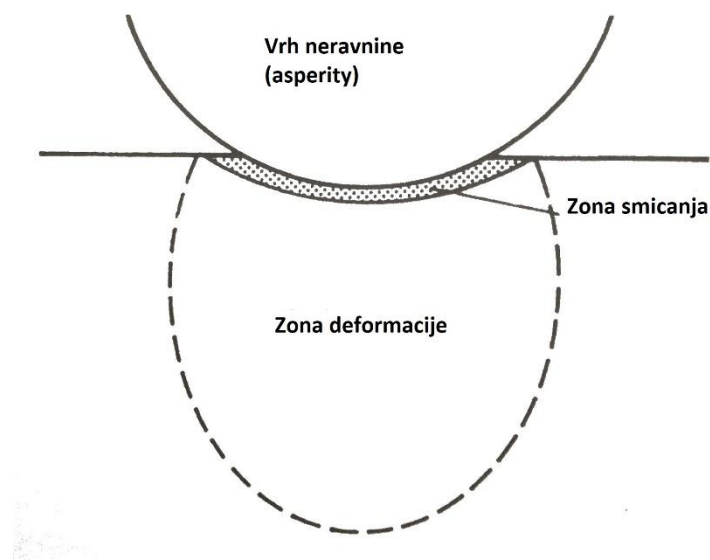
Slika 8. Mehhanizmi koji uzrokuju pojavu trenja [1]:

a) adhezija b) struganje c) deformacija i pucanje sloja oksida d) zarobljena čestica trošenja

## 2.5. Trenje uz deformaciju kontaktne površine

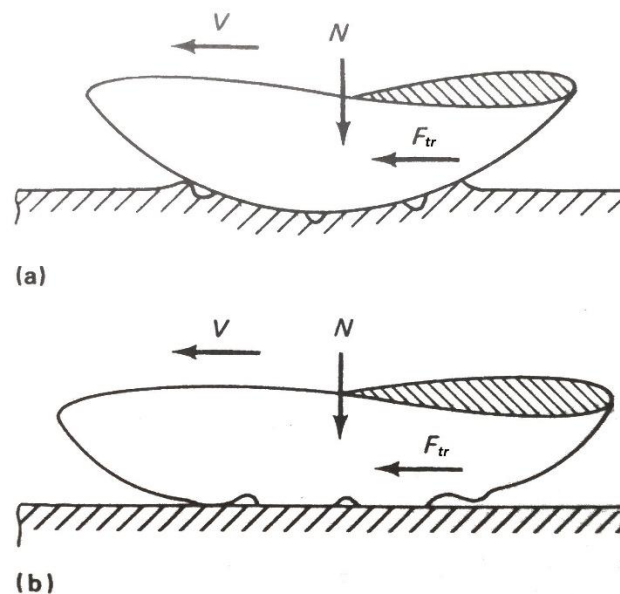
Kad se govori o trenju najčešće se misli na trenje između dvije metalne površine. To je najuobičajeniji primjer pa su se stoga znanstvenici najviše tim oblikom bavili. Međusobne veze površina koje se tu javljaju zbog adhezije podrazumijevaju da su površine vrlo čiste. Pojava adhezije može se dogoditi i praktički bez ikakvog opterećenja, uz uvjet velike glatkoće površina. Također na nju prilično utječu različite promijene površine kao što je na primjer rekonstrukcija sloja ispod same površine uslijed stvaranja spojeva kemijskim ili mehaničkim putem. Koliko će koja promjena površine utjecati ovisi o specifičnoj situaciji. Osim toga adhezija zavisi i o stupnju kompatibilnosti kristalografskih ravnina dviju površina. Najveća adhezija i sila trenja će biti kod ravnina istih materijala. Prilikom pojave trenja kod metalnih površina dolazi i do deformacije vrhova neravnina koji su u kontaktu. Deformacije mogu biti elastične, plastične i elasto-plastične, a događaju se uslijed djelovanja naprezanja. [1]

Između polimera isto dolazi do trenja. Uzrok su uglavnom mehanizmi koji su već poznati iz proučavanja trenja između površina metala, ali postoje i mehanizmi koji su specifični samo za polimere. Od onih koji su prisutni i kod metala najvažnija je adhezija. Veze koje se stvaraju i prekidaju između dodirnih točaka neravnina površina tipično su Van der Waalsove i vodikove veze. Uz adheziju se i tu javljaju deformacije koje su popraćene disipacijom mehaničke energije. Deformacije mogu biti elastične, plastične ili viskoelastične, sve zavisi o vrsti polimera. Mehanizmi koji su specifični samo za polimere se pojavljuju zbog drugačijih mehaničkih svojstava i triboloških svojstava kao što su struktura i položaj makromolekula na površini, multifaznost, vrste polimera te orijentiranje lanaca tijekom prerade. Najvažniji od mehaničkih svojstava su viskoelastičnost i niska toplinska vodljivost. Jedan od tih mehanizama je zona smicanja između dvije površine uz koji dolazi i deformacija tankog sloja jedne površine (oko 100 nm). Smicanje se može desiti pri samoj površini, ali je češće unutar polimera. Kod same zone smicanja može se pojaviti lokalno zagrijavanje zbog niske toplinske vodljivosti (slika 9). [1][6]



Slika 9. Shematski prikaz zone deformacije kod polimera [1]

Što se tiče elastomera, odnosno viskoelastičnih materijala, kod njih trenje također ima važnu ulogu. Pogotovo kod suhog klizanja jednog tijela po drugom pri čemu trenje bitno utječe na viskoelastično deformiranje. Tijekom klizanja dolazi do stvaranja tzv. Schallamachovih valova (slika 10), koji se manifestiraju kao jako velike dislokacije koje se stvaraju na strani gume koja se sažima te se pomiču kroz zonu kontakta do druge strane koja se napinje (slika 10). [1]



Slika 10. Pojava Schallamachovih valova [1]:

a) klizanje tvrde gume po mekšoj b) klizanje mekše gume po tvrđoj

Sljedeća vrsta materijala koja se može promatrati u kontekstu trenja je keramika. Kod nje još nije potpuno istraženo i objašnjeno ponašanje uslijed trenja, ali sigurno je da će faktor trenja biti dosta nizak, zbog malog utjecaja mehanizama trenja adhezije i deformacije. Adhezija će biti niska jer da bi se stvorile potrebne veze između površina dviju keramičkih površina potrebno je povezivanje pozitivnih iona jedne površine s negativnim ionima druge površine što je rijedak slučaj. Kako je tvrdoća keramike visoka tako će i deformacija biti niska. [1]

Od ostalih materijala još možemo razmotriti grafit koji ima slojevitú strukturu. Svaki sloj se sastoji od snažnih veza koja mogu prenositi značajna opterećenja, ali između slojeva se nalaze slabe veze zbog kojih je moguće lagano klizanje jednog sloja preko drugog. Zbog tih značajki grafit se može koristiti kao kruto mazivo. Osim grafita i led je poseban materijal s tribološkog aspekta. Prilikom zaleđivanja voda povećava svoj volumen. Zbog toga fenomena je moguće postići da se primjenom određenog pritiska na površinu led počne topiti čime se dobiva tanki film vode koji služi kao mazivo. To se na primjer može vidjeti kod klizaljki. [1]

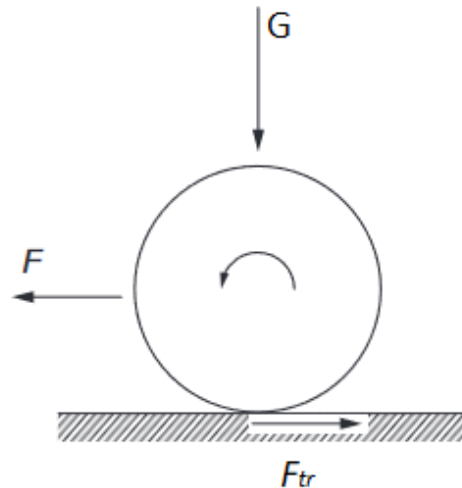
## 2.6. Trenje kotrljanja i trenje klizanja

Trenje kotrljanja se javlja uslijed otpora kotrljanja nekog cilindričnog ili sfernog tijela po površini (slika 11). Još od davnih dana je poznato da je lakše kotrljati neko tijelo nego da ono klizi. Što se tiče faktora trenja, on je znatno niži nego kod klizanja. Najveća primjena kotrljanja u svrhu ostvarivanja niskog trenja je kod kotača i kod valjnih ležajeva. Dok kod trenja klizanja maziva imaju veliki utjecaj kod kotrljanja imaju puno manji. Kada tijelo slobodno kotrlja bez utjecaja vanjskih sila tri komponente čine otpor tom kotrljanju.

Prva komponenta je proklizavanje na mikrorazini i trenje na dodiru površina. Do proklizavanja dolazi kada dva tijela imaju različita elastična svojstva i različitu zakrivljenost.

Druga komponenta je neelastična svojstva materijala. Kada bi materijali bili idealno elastični, ne bi postojao gubitak energije, a samim time trenje kotrljanja bi bilo jednako nuli. U stvarnosti deformacija sadrži elastičnu histerezu, odnosno kašnjenje deformacije tijela u odnosu na opterećenje prilikom čega dolazi do gubitka energije.

Treća komponenta je hrapavost površine koja ima minimalan utjecaj na trenje kotrljanja. Može na dva načina utjecati. Kod lagano opterećene hrapave površine energija se utroši u podizanje tijela preko nepravilnosti druge površine, trenje kotrljanja će se povećati samom brzinom kotrljanja. Drugi način utjecanja je smanjenje trenja preko lokalnih plastičnih deformacija. Neravnine se u nekim područjima na površini mogu zbog koncentracije opterećenja u točki plastično deformirati i kroz više ponavljanja izgladiti površinu. Time se otpor kotrljanju smanjuje. [1]



Slika 11. Shematski prikaz rasporeda sila tijekom kotrljanja tijela [7]

## 2.7. Metode ispitivanja trenja krutih tijela u laboratorijskim uvjetima [1]

Mjerenje sile trenja i proračunavanje faktora trenja često je potrebno kod mnogih triboloških sustava. Ta ispitivanja posebno su bitna kod kočnica, spojki i ostalih sličnih pokretnih mehanizama gdje je potrebno kontrolirati silu trenja i znati točno njezinu veličinu, jer u suprotnom može doći do velikih oštećenja. U konstruiranju strojeva, karakteristike trenja moraju biti dobro poznate za tarne prijenosnike, dimenzioniranje motora, određivanje radnih sila i za konstruiranje svih dijelova kod kojih promijene sila između kliznih površina mogu utjecati na izvođenje neke operacije. Važnosti proučavanja trenja može se još dodati podatak da između jedne trećine i jedne polovine proizvedene energije u svijetu potroši se na trenje.

Postoje tri jednostavne i popularne metode za mjerenje sile trenja na koje se naslanjaju sve ostale metode. Prvu je još u 15. stoljeću prikazao Leonardo Da Vinci i smatra se jednom od općeprihvaćenih. Sastoji se od tijela smještenog na kosini (slika 12). Kut kosine se povećava dok se tijelo ne počne gibati, a zatim se preko tangensa tog kuta odredi statički faktor trenja. Što se može vidjeti iz sljedećeg izvoda:

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta \quad (10)$$

$$\mu = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad (11)$$

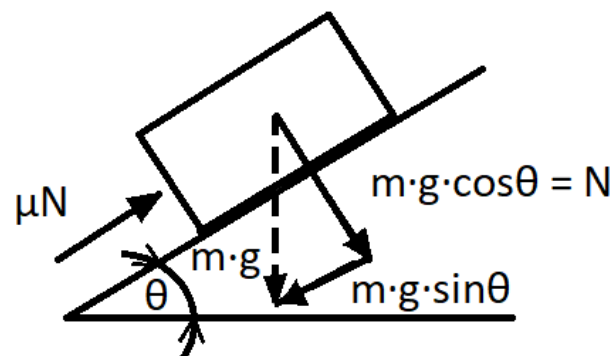
Problem kod ove metode je što se ne može primijeniti kod mnogo triboloških sustava u stvarnom životu. Kod konstrukcije strojeva ne konstruiraju se samo sustavi s tijelima na kosini. Drugi test je test preko valjka, a može poslužiti kada se testira uža ili kabel koji klizi preko valjkaste površine. Može se koristiti za određivanje statičkog i kinetičkog trenja. Najčešće se koristi kod planiranja proizvodnje žica, plastičnih filmova, metalnih folija i papira u dugim kontinuiranim linijama gdje prolaze kroz različite valjke te se na kraju na valjke i namataju. Tijekom mjerenja bitno je da su uvjeti isti kao u stvarnom sustavu koji se konstruira. Treći sustav testiranja je povlačenje bloka s mjernom ćelijom, koja služi za pretvaranje sile u mjerljiv električni izlaz, po ravnoj površini. Pomoću očitavanja s mjerne ćelije se zatim računa faktor trenja. Ako je očitavanje s mjerne ćelije sila  $F$  (slika 13) i k tome uzmemo u obzir Coulombov zakon trenja (2) onda formulu za računanje faktora trenja možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$F = F_{\text{tr}} = \mu \cdot F_{\text{N}} \quad (12)$$

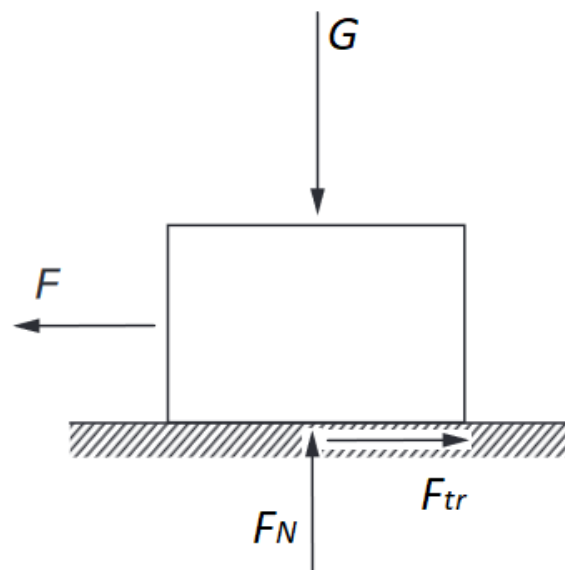
$$\mu = \frac{F_{\text{tr}}}{F_{\text{N}}} \quad (13)$$

To je možda i najuobičajeniji način računanja sile trenja. Iako postoje razne izvedbe tog sustava testiranja, najčešće se koriste mjerne ćelije (senzori sile) koji se sastoje od kalibrirane opruge. Opruga ima svoju konstantu koja određuje osjetljivost sustava.

Neki parametri sustava mogu utjecati na rezultate mjerenja. Jedina stvar koja se mjeri je sila trenja pomoću najčešće električnih signala. Problem je što senzori koji se koriste imaju elastične karakteristike, također i karakteristike za rasipanje energije koje uzrokuju vibracije, a one mogu utjecati na rezultate.



Slika 12. Ispitivanje trenja na kosini [1]



Slika 13. Shematski prikaz trenja klizanja koji služi kao osnova za testiranje povlačenjem bloka po ravnoj podlozi [7]

## 2.8. Standardizirani testovi za određivanje faktora trenja

Na temelju prethodno navedenih metoda više organizacija za standardizaciju je razvilo svoje testove za mjerenje faktora trenja. Sami testovi međusobno se razlikuju po vrsti i namjeni. Ovdje ćemo se posebno osvrnuti na testove razvijene i standardizirane od strane American Society for Testing and Materials (ASTM). Neki od njih su napravljeni za posebnu primjenu određenog materijala, a drugi pak za općenitu. ASTM standarde razvijaju i održavaju tehnički odbori koji su grupirani prema zajedničkim aktivnostima i području rada. Sastoje se od volontera unutar industrije što uključuje proizvođače i konzumente, ali i druge interesne skupine kao što je vlada i fakulteti. Odbori između ostaloga promiču znanje, potiču istraživanje i razvijaju metode testiranja. Neki od odbora vezanih uz trenje su navedeni niže u tablici 1. Unutar odbora koriste se već spomenuti standardizirani testovi vezani uz faktor trenja, a neki od njih su navedeni u tablici 2. [1]

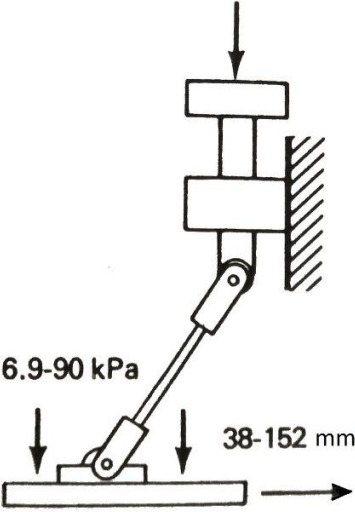
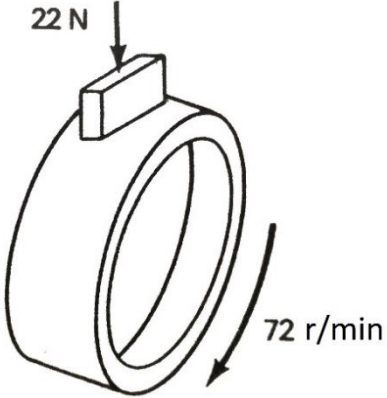
Tablica 1. Odbori ASTM-a povezani s ispitivanjem trenja i trošenja [1]

Oznaka odbora	Opis
B-9	Bavi se trenjem kompozitnih materijala koji se koriste kod tarnih spojki i kočnica.
C-5	Provođenje liste svih stvari koje se trebaju uzeti u obzir prilikom određivanja faktora trenja materijala sastavljenog od ugljika ili grafita.
D-20	Bavi se proučavanjem trenja kod polimernih filmova u odnosu na ostala čvrsta tijela. Jedan od načina testiranja je postavljanje plastičnog filma na ravnu površinu i klizanje nekog drugog materijala preko njega.
D-21	Odbor se bavi specifičnom temom, završnim slojem laka na podu. Posebnim aparatom simulira se trenje u kontaktu potplata cipele i poda.



Tablica 2. Odbori ASTM-a povezani s ispitivanjem trenja i trošenja (nastavak) [1]

Oznaka testa (Odbor)	Opis	Konfiguracija mjernog sustava
D 3028 (D-20)	Test se sastoji od dva diska, jedan je promjera 100 mm, a drugi 20 mm. Veći se može rotirati kutnom brzinom do $200 \text{ min}^{-1}$ . Manji disk je nepomičan i preko tlačne opruge je u kontaktu s većim diskom. Disku se mijenja brzina, a time se i pomiče kazaljka na skali koja je povezana s diskovima. Preko toga se računa na kraju faktor trenja.	
D 3108 (D-13)	Testiranje faktora trenja kod vune u obliku užeta i drugih sličnih materijala u tekstilnoj industriji. Uže je omotano oko koloture koje ima kazaljku. Pomicanjem užeta pomiče se uslijed trenja i kazaljka te se na kraju računa faktor trenja.	
D 3247 (D-6)	Klizanje jednog kartona preko drugoga te računanje faktora trenja.	
D 1894 (D-20)	Preko polimernog filma se povlači neki drugi čvrsti materijal na kojem je još dodatno postavljen uteg. Računa se kinetički i statički faktor trenja. Mjerenje se može provoditi i sa zagrijanom podlogom.	

D 2047 (D-21)	Koristi se poseban stroj nazvan „James Machine“. Primjenjuje se za testiranje statičkog faktora trenja kod završnog premaza poda u kontaktu s potplatom cipele. Faktor trenja ne smije biti manji od 0,5.	
D 2714 (D-2)	Sastoji se od čeličnog bloka koji je određenom silom pritisnut na čelični prsten koji se rotira. Mjeri se trenje i trošenje.	

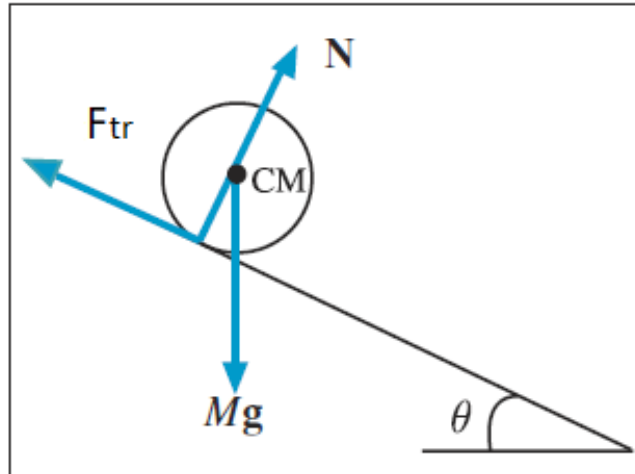
## 2.9. Fizikalni koncepti uređaja za ispitivanje trenja

U ovom poglavlju ćemo se posvetiti uređajima za određivanje faktora trenja. Kroz različite pristupe i proračune dolaze do faktora trenja. Neki od tih pristupa su valjak na kosini, uzorak povezan oprugom koji oscilira na kosini, sustav s rotacijom dva diska na istom vratilu i Timoshenkov oscilator.

### 2.9.1. Mjerenje koeficijenta trenja pomoću valjnih tijela [8]

Postoje mnoge eksperimentalne metode i tehnike mjerenja statičke i kinetičke sile trenja i posljedično faktora trenja. Većina ih uključuje povlačenje uzorka po ravnoj površini i skupe mjerne ćelije, senzore, računala i slično. Stoga ova metoda nudi drugačiji pristup mjerenja sile trenja koristeći jeftinu opremu i jednostavan sustav.

Sustav se sastoji od valjka radijusa  $R$  i mase  $M$  na kosini. Valjka puštamo da se slobodno kotrlja kao što je prikazano na slici 14.



Slika 14. Shematski prikaz sila koje djeluju na valjak dok se slobodno kotrlja niz kosinu [8]

Sada možemo zapisati jednadžbe za sumu sila i momenata oko osi cilindra:

$$\sum F_u = M \cdot a_{CM} \quad (14)$$

$$\sum \tau_{CM} = I_{CM} \cdot \alpha \quad (15)$$

gdje je moment tromosti  $I_{CM} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$  oko osi valjka, a kutno ubrzanje je označeno s  $\alpha$ .

Dok  $\sum \tau_{CM}$  predstavlja sumu momenata oko centra mase valjka. Ako se valjak kotrlja bez proklizavanja onda je  $a_{CM} = R \cdot \alpha$ . Stoga iz jednadžbi (14) i (15) dobivamo:

$$M \cdot g \cdot \sin \theta - F_{tr} = M \cdot a_{CM} \quad (16)$$

$$F_{tr} \cdot R = I_{CM} \cdot \frac{a_{CM}}{R} \quad (17)$$

Kombinirajući formule (16) i (17) dobivamo formule za statičku silu trenja i za akceleraciju valjka:

$$F_{tr} = \frac{1}{3} \cdot M \cdot g \cdot \sin \theta \quad (18)$$

$$a_{CM} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \theta \quad (19)$$

Važno je još naglasiti da je  $F_{tr}$  uvijek manji ili jednak  $F_{tr,max} = \mu_s \cdot M_g \cdot \cos \theta$ . Kada kut  $\theta$  zadovoljava uvjet  $\tan \theta < 3\mu_s$  valjak se kotrlja bez proklizavanja, a kada je  $\tan \theta > 3\mu_s$  tada je prisutno kotrljanje i proklizavanje. Stoga se može vidjeti da postoji kritični kut  $\theta_c$  iz kojeg se može izračunati statički faktor trenja:

$$\mu_s = \frac{1}{3} \cdot \tan \theta_c \quad (20)$$

Ako sada pretpostavimo da se valjak kotrlja uz proklizavanje, dakle  $\theta > \theta_c$ ,  $F_{tr}$  poprima novu vrijednost koja je sada  $F_{tr,k} = \mu_k \cdot M_g \cdot \cos \theta$ . Preko jednadžbi (14) i (15) dobivamo kutno i linearno ubrzanje:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \mu_k \cdot g \cdot \cos \theta}{R} \quad (21)$$

$$a_{CM} = g \cdot (\sin \theta - \mu_k \cdot \cos \theta) \quad (22)$$

Kako valjak kreće iz stanja mirovanja  $x = 0$ , položaj valjka  $CM$  u trenutku  $t$  se može zapisati kao:

$$x_L = \frac{1}{2} \cdot a_{CM} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\sin \theta - \mu_k \cdot \cos \theta) \cdot t^2 \quad (23)$$

Valjak se istovremeno rotira za kut  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \frac{\mu_k \cdot g \cdot \cos \theta}{R} \cdot t^2 \quad (24)$$

Pošto se valjak istovremeno kotrlja i klizi  $x_L$  se ne poklapa s udaljenošću koja se ostvari po kružnom luku  $x_\Omega = \Omega \cdot R$ . Razliku tih dviju udaljenosti se označava s  $\Delta x$  iz čega proizlazi:

$$\Delta x = x_L - x_\Omega = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\sin \theta - 3 \cdot \mu_k \cdot \cos \theta) \cdot t^2 \quad (25)$$

Vrijeme proteklo za  $N$  rotacija valjka ( $\Omega = 2 \cdot N \cdot \pi \cdot R$ ) može se odrediti preko jednadžbe:

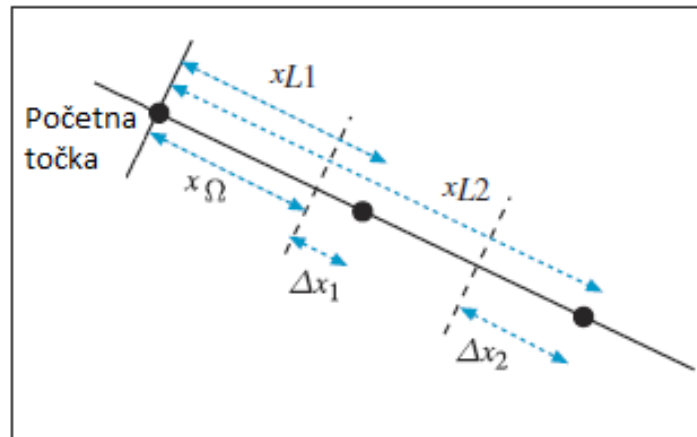
$$t_N = \left[ \frac{2 \cdot N \cdot \pi \cdot R}{\mu_k \cdot g \cdot \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Iz čega proizlazi da je razlika udaljenosti  $\Delta x_N$  za  $N$  rotacija jednaka:

$$\Delta x_N = N \cdot \pi \cdot R \cdot \left( \frac{\tan \theta}{\mu_k} - 3 \right) \quad (27)$$

Kada bi mogli označiti mjesta na kosini gdje valjak završi svaku svoju rotaciju dobili bi prikaz kao na slici 15. Udaljenost između dviju točaka koje se nalaze jedna za drugom računa se jednadžbom:

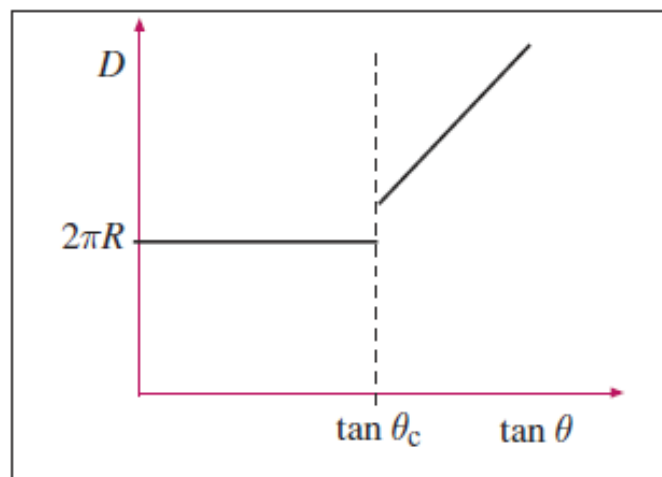
$$D = x_{L(N+1)} - x_{LN} = 2 \cdot \pi \cdot R + \pi \cdot R \cdot \left( \frac{\tan \theta}{\mu_k} - 3 \right) \quad (28)$$



Slika 15. Točke na pravcu koje označavaju svaku punu rotaciju valjka na kosini [8]

Stavljajući udaljenost  $D$  u ovisnost o  $\tan \theta$  dobivamo graf kao na slici 16. Iznad kritičnog kuta  $\theta_c$  graf ima konstanti nagib  $m_{\alpha}$  pomoću kojeg možemo u konačnici izračunati kinetički faktor trenja.

$$\mu_k = \frac{\pi R}{m_{\alpha}} \quad (29)$$



Slika 16. Graf udaljenosti između dvije točke na kosini u odnosu na  $\tan \theta$  [8]

### 2.9.2. Uzorak koji oscilira na kosini povezan oprugom [9]

Sustav uzorka na kosini povezanog s oprugom koristi se kako bi se prikazala uloga statičkog i kinetičkog trenja u sklopu prigušenog oscilatora koji se temelji na masi uzorka i opruzi. Uzorak mase  $m$  povezan je s oprugom konstante  $k$  te oscilira na kosini koja je nagnuta pod nekim kutom  $\theta$ . Izračunu statičkog i kinetičkog faktora trenja može se pristupiti teoretski i eksperimentalno.

Eksperimentalnom pristupu određivanja faktora trenja se pristupa tako da se odredi smjer kinetičkog faktora trenja jer je on ovisan o smjeru brzine. Kinetički faktor trenja može biti određen razlikom akceleracije uz kosinu  $a_a$  i niz kosinu  $a_d$ . Preko drugog Newtonovog zakona možemo zapisati:

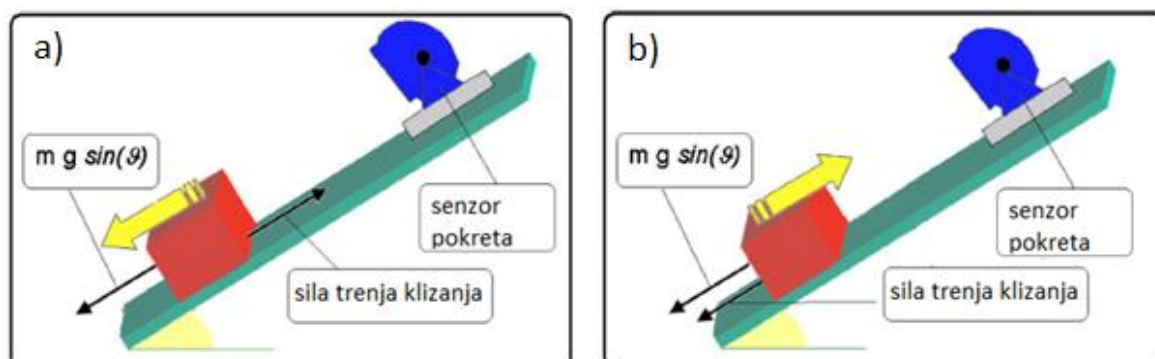
$$a_a = g \cdot \sin \theta + \mu_k \cdot g \cdot \cos \theta \quad (30)$$

$$a_d = g \cdot \sin \theta - \mu_k \cdot g \cdot \cos \theta \quad (31)$$

iz toga slijedi:

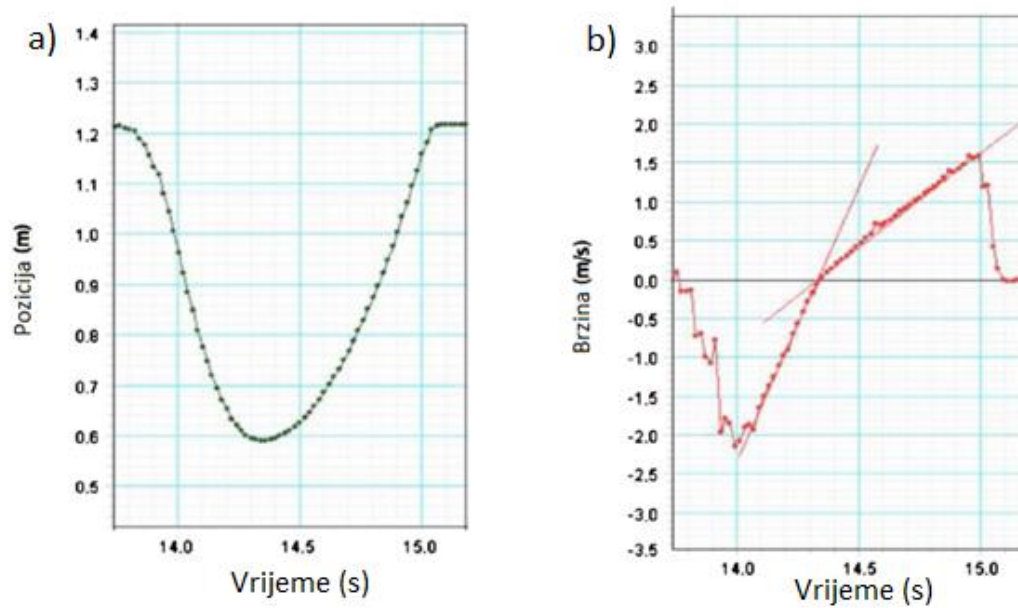
$$\mu_k = \frac{a_a - a_d}{a_a + a_d} \cdot \tan \theta \quad (32)$$

Blok se pomiče i njegovo kretanje je zabilježeno senzorom pokreta na vrhu ploče koja je nakošena (slika 17). Senzor je spojen na računalo i pomoću njega se dobije graf koji prikazuje poziciju i brzinu u odnosu na vrijeme (slika 18).



Slika 17. Eksperimentalni pristup određivanja faktora trenja [9]

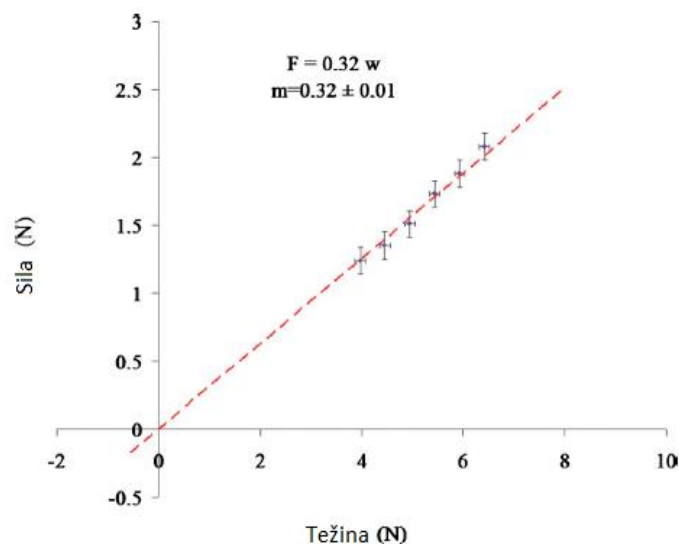
a) gibanje bloka niz kosinu b) gibanje bloka uz kosinu



Slika 18. a) Izmjerena pozicija bloka u vremenu pomoću senzora [9]

b) Izmjerena brzina u vremenu pomoću senzora

Da bi se odredila vrijednost statičkog faktora trenja  $\mu_s$  mjerimo maksimalnu vrijednost statičke sile trenja za različite vrijednosti normalne sile. Različite vrijednosti normalne sile dobivamo stavljanjem predmeta poznate mase na blok. Koristeći senzor sile i senzor pokreta dobivamo linearnu povezanost normalne sile ( $N=m \cdot g \cdot \cos \theta$ ) i statičke sile trenja  $F_s$  (slika 19). Zatim interpolacijom procjenjujemo statički faktor trenja.



Slika 19. Linearni odnos normalne sile i statičke sile trenja (sila neposredno prije početka gibanja) [9]

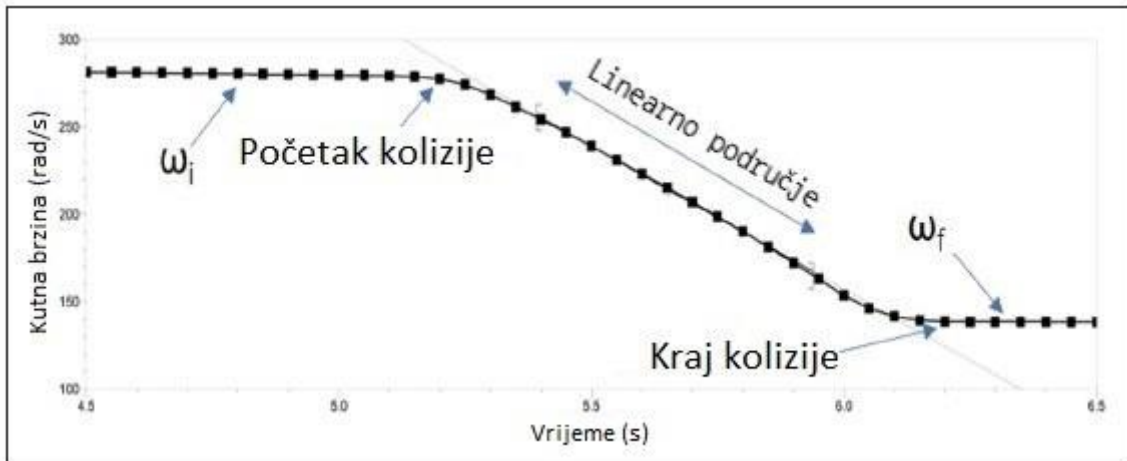


### 2.9.3. Sustav s rotacijom dva diska [10]

Sustav s rotacijom dva diska je novija metoda kojom se mjeri kinetički faktor trenja. Metoda se temelji na istraživanju dinamike kružnog gibanja, a koristi se standardnim laboratorijskim aparaturama i procedurama. Vrijednosti koje se dobiju rotacijskom tehnikom približne su vrijednostima tradicionalnih linearnih sustava. Sustav se sastoji od statičkog aluminijskog diska koji se spušta na identični disk koji se rotira početnom kutnom brzinom  $\omega_i$  (slika 20). Kutna brzina se mjeri senzorom pokreta. Kada dva diska prvi put ostvare kontakt, moment nastao zbog kinetičke sile trenja uzrokuje jednaku kutnu brzinu, ali suprotnog smjera. S vremenom oba diska se počnu okretati zajedno sa zajedničkom kutnom brzinom  $\omega_f$  (slika 21). Kako je relativno klizanje između diskova prestalo, kinetička sila trenja više ne postoji i spajanje diskova je dovršeno.



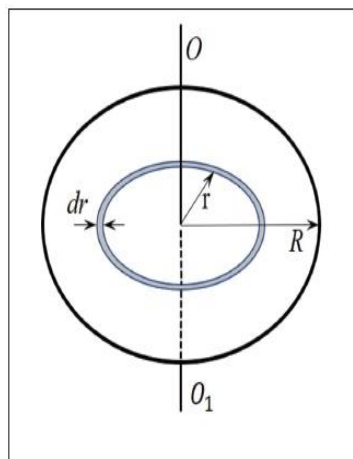
Slika 20. Sustav s dva rotacijska diska (na slici prikazan jedan rotacijski disk i senzor pokreta)  
[10]



Slika 21. Kutna brzina inicijalno rotirajućeg diska i promjena brzine tijekom kolizije sa stacionarnim diskom [10]

Da bi odredili kinetički faktor trenja prvo trebamo odrediti matematičku povezanost s eksperimentalnim parametrima koji sudjeluju u klizanju tijekom rotacije. Pretpostavimo li da je disk napravljen od niza tankih koncentričnih prstenova tražimo moment na disku. Svaki prsten ima proizvoljan radijus  $r$  koji mora biti manji od radijusa diska  $R$  i površina mu je toliko mala da se može zapisati kao  $dA = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$  (slika 22). Ako pretpostavimo da je disk ujednačen, inkrementalna normalna sila  $dN$  primijenjena na beskrajno tanak prsten je:

$$dN = g \cdot dm = \frac{m \cdot g \cdot dA}{\pi \cdot R^2} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot r \cdot dr}{R^2} \quad (33)$$



Slika 22. Disk radijusa  $R$  i prsten radijusa  $r$  širine  $dr$ ,  $OO_1$  je os rotacije [10]

U ovoj jednadžbi  $m$  predstavlja masu diska, a  $dm$  masu inkrementalnog prstena. Pomoću jednadžbe tražimo inkrementalni moment koji je uzrokovan silom trenja na beskrajno tanak prsten. Pretpostavimo da je sila kinetičkog trenja proporcionalna samo normalnoj sili i faktoru kinetičkog trenja, dok relativna brzina dviju površina i veličina površine u kontaktu nema utjecaja. Stoga inkrementalni moment dobivamo iz:

$$d\tau = r \cdot (\mu \cdot dN) = \frac{2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot r^2 \cdot dr}{R^2} \quad (34)$$

Da bismo zatim našli ukupni moment prethodnu jednadžbu inkrementalnog momenta moramo integrirati od središta diska do samoga ruba (od  $r = 0$  do  $r = R$ ). U konačnici dobivamo jednadžbu:

$$\tau = \frac{2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot R}{3} \quad (35)$$

Jednadžbu prilagodimo Newtonovom drugom zakonu za rotacijsko gibanje:

$$I \cdot \alpha = \tau \quad (36)$$

Moment inercije za disk je  $I = (m \cdot R^2)/2$ . Kombinirajući prethodne dvije jednadžbe dobivamo kinetički faktor trenja  $\mu$  i to uz pomoć samo nekoliko parametara čije vrijednosti dobijemo eksperimentalno.

$$\mu = \frac{3 \cdot \alpha \cdot R}{4 \cdot g} \quad (37)$$

Zaključujemo da spuštanjem mirujućeg diska kojemu poznajemo radijus na sekundarni identični rotirajući disk možemo izračunati koeficijent kinetičkog trenja mjerenjem kutnog ubrzanja  $\alpha$  u vremenu dok se diskovi spajaju i klize jedan u odnosu na drugog.

### 3. TIMOSHENKOV OSCILATOR

#### 3.1. Kratka biografija Stephena Timoshenka

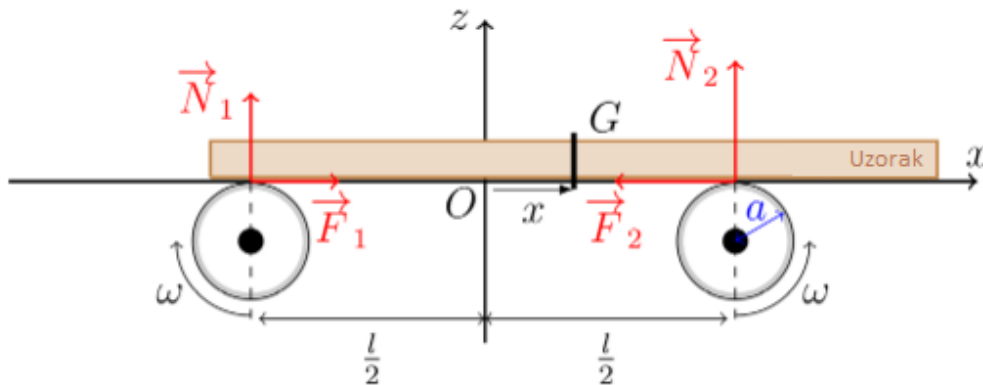
Timoshenkov oscilator nazvan je prema Stephenu Timoshenku. Rođen je u Rusiji 1878. godine gdje je i dobio diplomu kao inženjer građevine 1901. godine. Nastavio je raditi u Rusiji na različitim institutima u području primijenjene matematike i mehanike. Tijekom revolucije u Rusiji emigrira u Zagreb 1920. godine gdje je par godina predavao na fakultetu koji je prethodio Fakultetu strojarstva i brodogradnje. Zatim seli u Sjedinjene Američke Države gdje je prvo predavao na University of Michigan gdje je stekao i doktorat u elektrotehnici. Na Stanford University prelazi 1936. godine gdje ostaje do smrti 1972. godine. Dao je veliki doprinos spoznajama o čvrstoći materijala, elastičnosti i vibracijama od kojih su mnoge i danas uvriježene. U S.A.D.-u poznat i kao „otac primijenjene mehanike“. [11][12]



Slika 23. Stephen Timoshenko [12]

### 3.2. Osnovni princip Timoshenkovog oscilatora

Timoshenkov oscilator se sastoji od dva paralelna valjka istog radijusa  $a$  koji su udaljeni jedan od drugog za udaljenost  $l$ . Na valjke se postavlja uzorak mase  $m$ . Valjci se okreću kutnom brzinom  $\omega$  i to tako da se jedan okreće u suprotnom smjeru od drugoga. Cilj takvog sustava je da sile trenja koje se pojave nastoje uzorak pomicati prema centru sustava gdje je smještena točka  $O$  (slika 24). Brzina okretanja valjaka mora biti dovoljno velika da se pojavi klizanje između uzorka i valjka. Time je ostvaren uvjet za pojavu kinetičke sile trenja. [13]



Slika 24. Shematski prikaz Timoshenkovog oscilatora [13]

### 3.3. Matematički model određivanja kinetičkog faktora trenja preko Timoshenkovog oscilatora [13]

Prvo napišemo jednadžbe suma sila po  $x$  i po  $z$  osi (slika 24) uz pomoć drugog Newtonovog zakona:

$$N_1 + N_2 = m \cdot g \quad (38)$$

$$F_1 - F_2 = \mu_k \cdot (N_2 - N_1) = m \cdot \ddot{x} \quad (39)$$

Sljedeći korak je jednažba sume momenata oko točke  $O$ :

$$m \cdot g \cdot x = \frac{l}{2} \cdot (N_2 - N_1) \quad (40)$$

Kombinirajući prethodne dvije jednažbe (39) i (40) dobivamo sljedeće:

$$\ddot{x} + \frac{2 \cdot g \cdot \mu_k}{l} \cdot x = 0 \quad (41)$$

Dobivamo diferencijalnu jednažbu drugog reda koja opisuje harmonijski oscilator. Rješavanjem jednažbe dobit ćemo formulu za period titranja. Opće rješenje za ovu vrstu diferencijalne jednažbe je:

$$x = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) \quad (42)$$

Prvo diferenciranje:

$$\dot{x} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) \quad (43)$$

Drugo diferenciranje:

$$\ddot{x} = -4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) \quad (44)$$

Uvrštavamo jednažbe (42) i (44) u jednažbu (41):

$$-4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) + \frac{2 \cdot g \cdot \mu_k}{l} \cdot A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) = 0 \quad (45)$$

Nakon skraćivanja i preslagivanja jednadžbe dobivamo formulu za frekvenciju titranja uzorka:

$$f = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \mu_k}{2 \cdot l}} \quad (46)$$

Kako je  $T = 1/f$  tako ćemo dobiti i formulu za period titranja:

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g \cdot \mu_k}} \quad (47)$$

Zaključujemo da period titranja ne ovisi o masi ili dužini uzorka kao ni o radijusu prstena i njihovoj kutnoj brzini.

Sada lako možemo iz te jednadžbe u konačnici dobiti formulu za kinetički faktor trenja iz koje vidimo da faktor ovisi samo o periodu titranja  $T$  i udaljenosti  $l$  između prstenova:

$$\mu_k = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g \cdot T^2} \quad (48)$$

Ako je udaljenost između rotirajućih prstenova konstantna tada je faktor trenja određen samo s periodom titranja uzorka i konstantom uređaja  $K_T$ :

$$\mu_k = K_T \cdot \frac{1}{T^2} \quad (49a)$$

$$K_T = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g} \quad (49b)$$

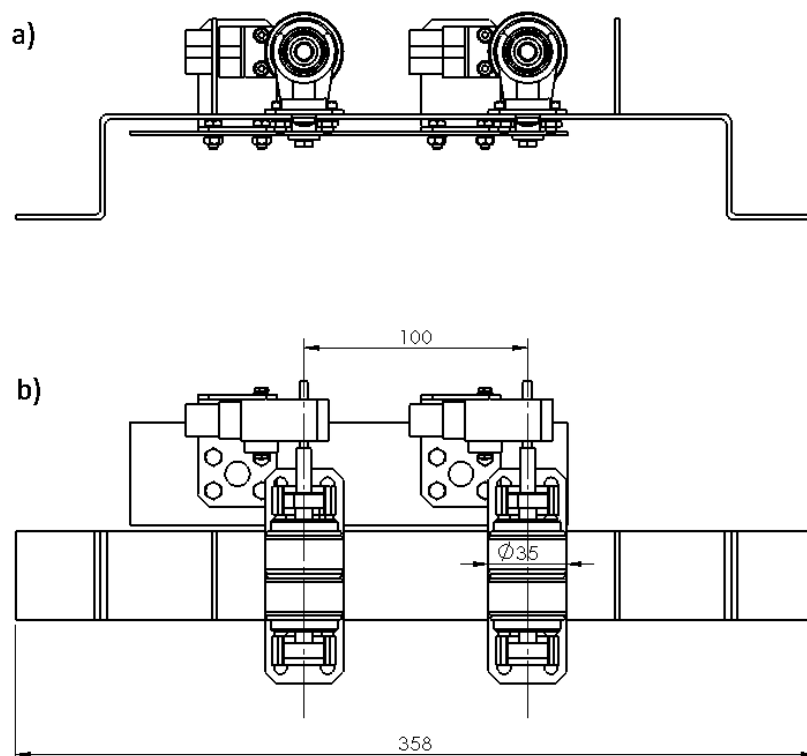
## 4. KONSTRUKCIJA TIMOSHENKOVOG OSCILATORA

### 4.1. Mehanička izvedba Timoshenkovog oscilatora

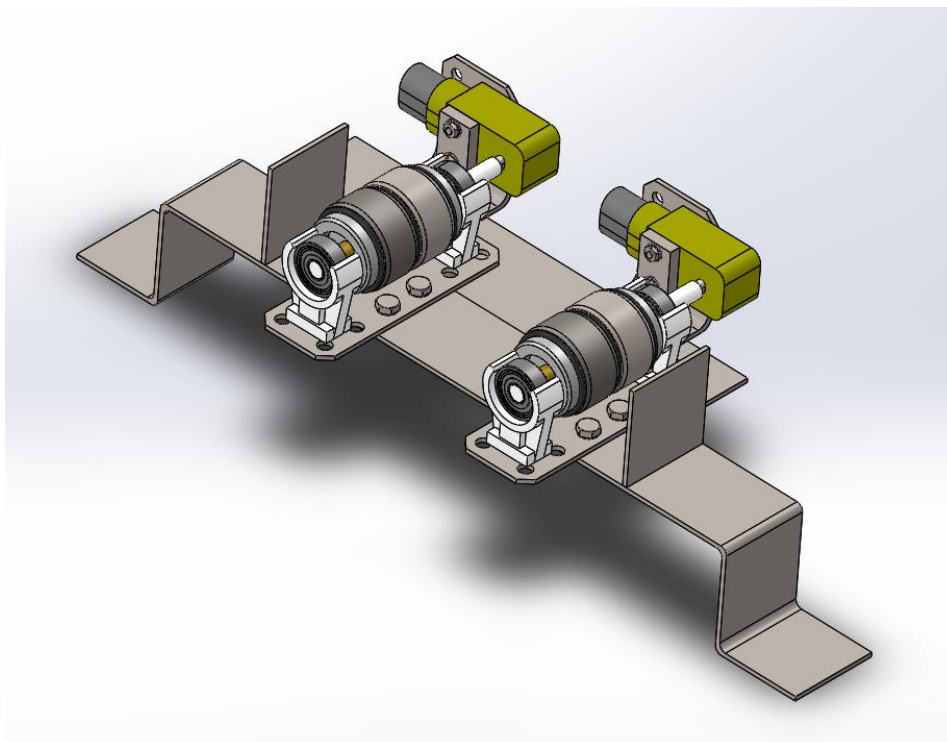
Konstrukcija Timoshenkovog oscilatora se sastoji od jednostavnih kutnih nosača i pločica od čelika koji čine osnovu na koju se postavljaju ostali elementi sustava kao što su nosači ležaja i elektromotori. Dva vratila su od aluminija, a sami prstenovi na kojima uzorak klizi su od čelika EN DIN 100Cr6. Sa svake strane prstena je postavljen graničnik koji služi da uzorak ne bi skliznuo s prstena. Na svakom vratilu u prvotnoj izvedbi su postavljena dva kuglična ležaja 608Z dok je u drugoj izvedbi postavljen samo jedan ležaj. Ležaji su umetnuti u plastične nosače. Svako vratilo pokreće jedan elektromotor u izvedbi kao motor za istosmjernu struju (DC) maksimalne snage od 9 V. Prva osmišljena izvedba sadržava na vratilu još jedan prsten drugog materijala te sama konstrukcija zauzima više mjesta. Na drugoj izvedbi oscilatora ostavljen je samo jedan prsten kako bi se smanjilo opterećenje na vratila, a posljedično i na motore. Sama konstrukcija je kompaktnija te stoga zauzima manje mjesta. Jedan kraj vratila podupire ležaj s nosačem dok drugi kraj sadržava utor na vrhu koji se umeće u kratko vratilo koje izlazi iz elektromotora. Na obje koncepcije izvedbe predviđena je fiksirana udaljenost između osi vrtnje prstena ostvarena mehaničkim stezanjem nosača ležaja na podlogu. Prstenovi se u obje izvedbe mogu izmijeniti i time se mogu ostvarivati različite kombinacije materijala prstena i uzorka.

Na slikama 25 do 28 su prikazane obje predložene koncepcije izvedbe u prostornom prikazu te u nacrtu i tlocrtu konstrukcije.

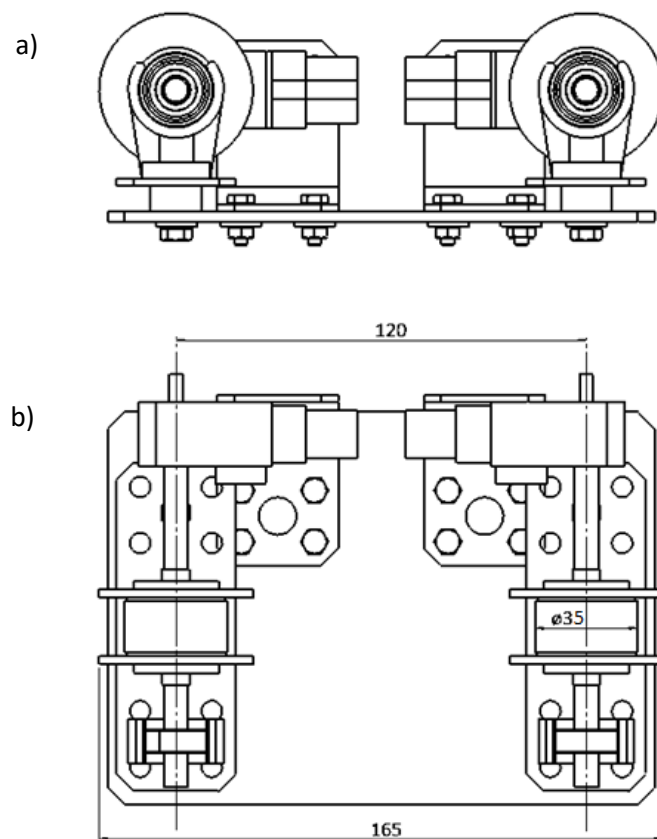




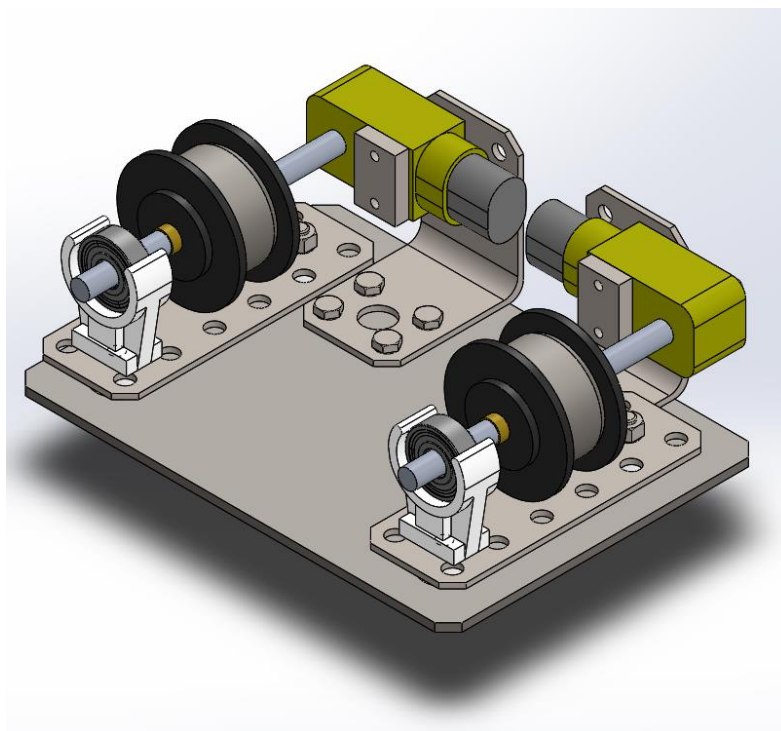
Slika 25. Prvi koncept konstrukcije Timoshenkovog oscilatora: a) nacrt b) tlocrt



Slika 26. Izgled prve konstrukcijske izvedbe Timoshenkovog oscilatora



Slika 27. Drugi koncept konstrukcije Timoshenkovog oscilatora: a) nacrt b) tlocrt



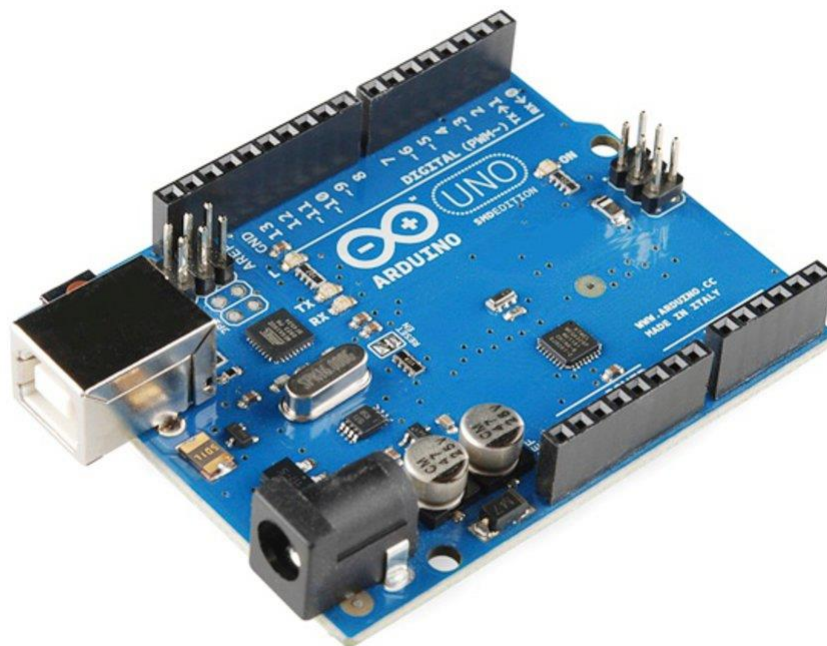
Slika 28. Izgled druge konstrukcijske izvedbe Timoshenkovog oscilatora

## 4.2. Upravljanje radom oscilatora

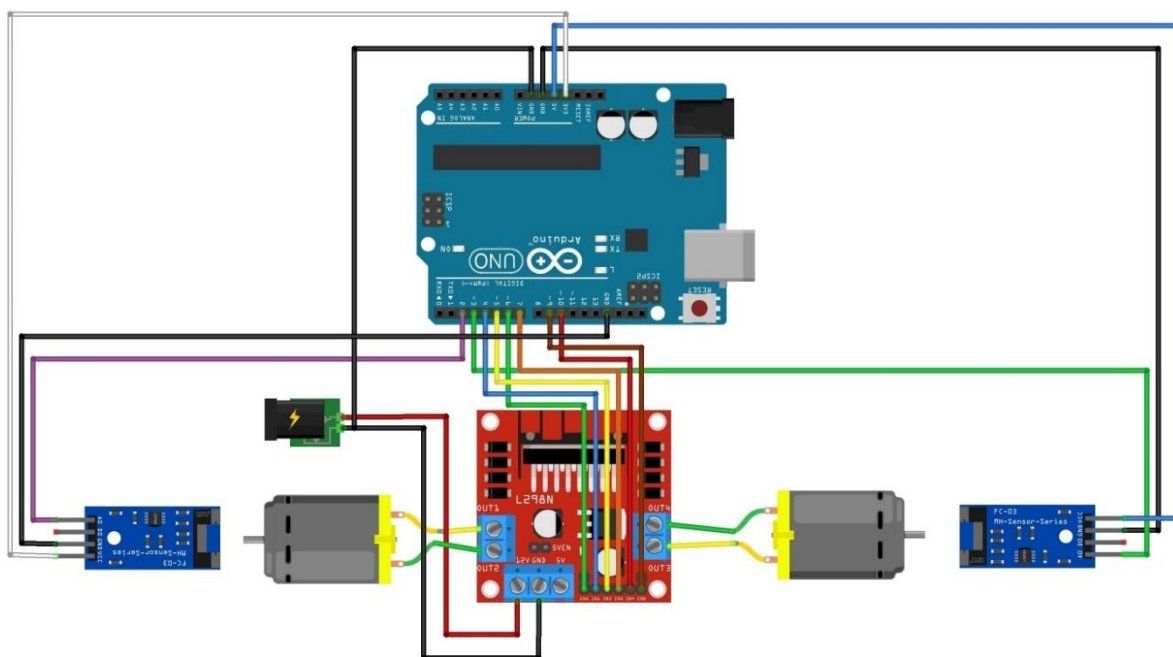
Da bi Timoshenkov oscilator funkcionirao potrebno je pokrenuti elektromotore. Upravljanje je predviđeno provesti mikrokontrolerom talijanskog proizvođača Arduino, modelom Arduino UNO Rev 3 (slika 29), koji čini središnji dio upravljačkog sustava. Povezivanje elektromotora se vrši preko upravljačkog modula L298N koji ima mogućnost prihvata dva DC elektromotora i može mijenjati smjer i brzinu vrtnje motora (slika 30). Modul se može napajati preko Arduina, ali onda bi dobivao napon od 5 V što bi u našem slučaju bilo premalo za motore, stoga spajamo na modul vanjski izvor napajanja od 12 V. Na upravljačkom modulu dolazi do pada napona od 2 V što u konačnici znači da na motore odlazi napon od 10 V čime motori mogu isporučiti maksimalnu brzinu.

Za ostvarenje iste brzine vrtnje prstenova tijekom ispitivanja treba izmjeriti brzinu vrtnje elektromotora, što je predviđeno provesti senzorima brzine. Sensori se napajaju preko Arduina. Sastoje se od odašiljača i prijemnika infracrvene svjetlosti koja se šalje kroz disk s prorezima pričvršćen na vratilo elektromotora. U slučaju kada svjetlost naiđe na prepreku signal se šalje na Arduino te se na taj način mjeri brzina vrtnje vratila. Osim pravilnog spajanja električne sheme da bi mogli upravljati sustavom potrebno je napisati i kod u odgovarajućem programskom jeziku. Arduino kao osnovu koristi C++ programski jezik. Linije koda se pišu unutar sučelja aplikacije Arduino IDE koja je napravljena od strane Arduina i putem nje se kod šalje na Arduino UNO preko USB kabela. Sam Arduino UNO sadrži priključak za USB tip B preko kojeg se šalju podaci, ali može koristiti i kao napajanje s naponom od 5 V. Alternativni način napajanja je koaksijalni priključak u rasponu 7-12 V koji može biti praktičan jer nakon što se kod s računala preko USB-a učita na mikrokontroler, USB se može ukloniti, a napajanje se vrši preko koaksijalnog priključka.

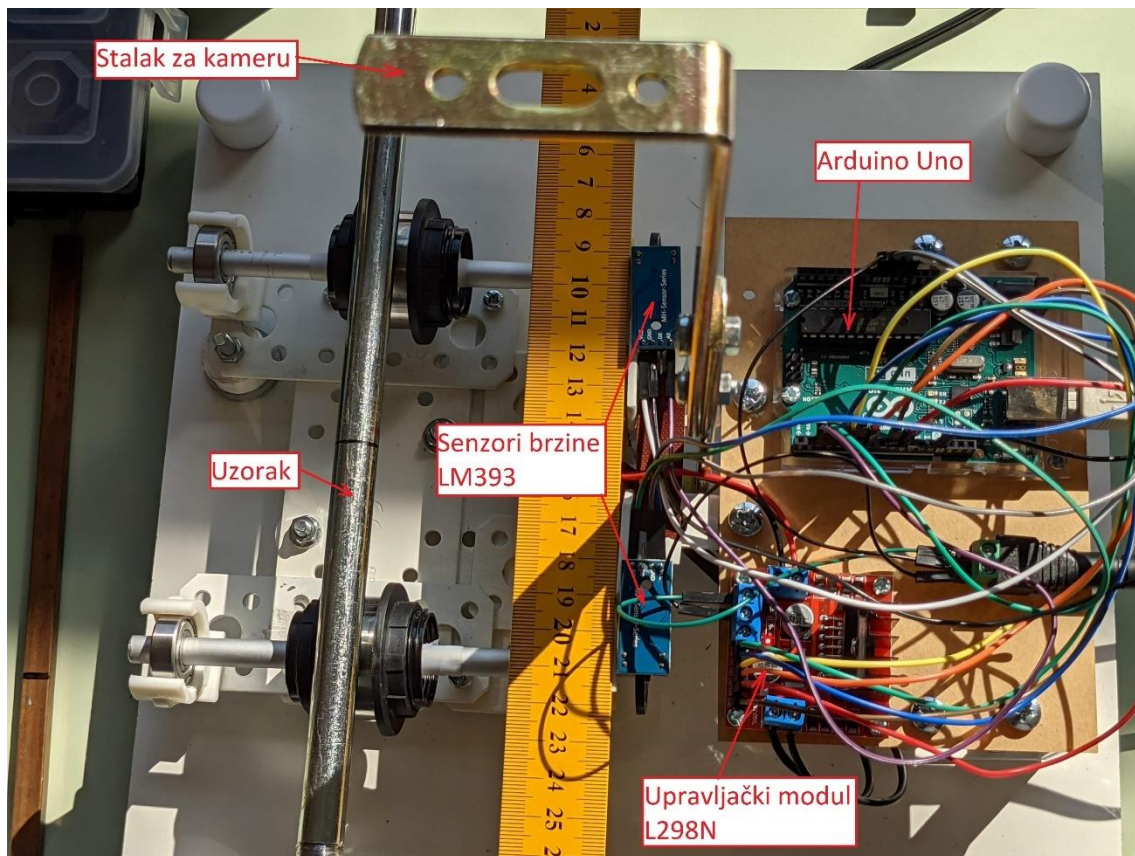
Na slici 30 prikazana je električna shema spajanja motora, senzora brzine LM393 i upravljačkog modula L298N na mikrokontroler Arduino UNO. Na slici 31 prikazana je izvedba mehaničkog i mehatroničkog dijela oscilatora.



Slika 29. Arduino UNO Rev 3 s prikazanim koaksijalnim i USB priključkom



Slika 30. Shema spajanja motora, senzora brzine LM393, upravljačkog modula L298N i Arduina



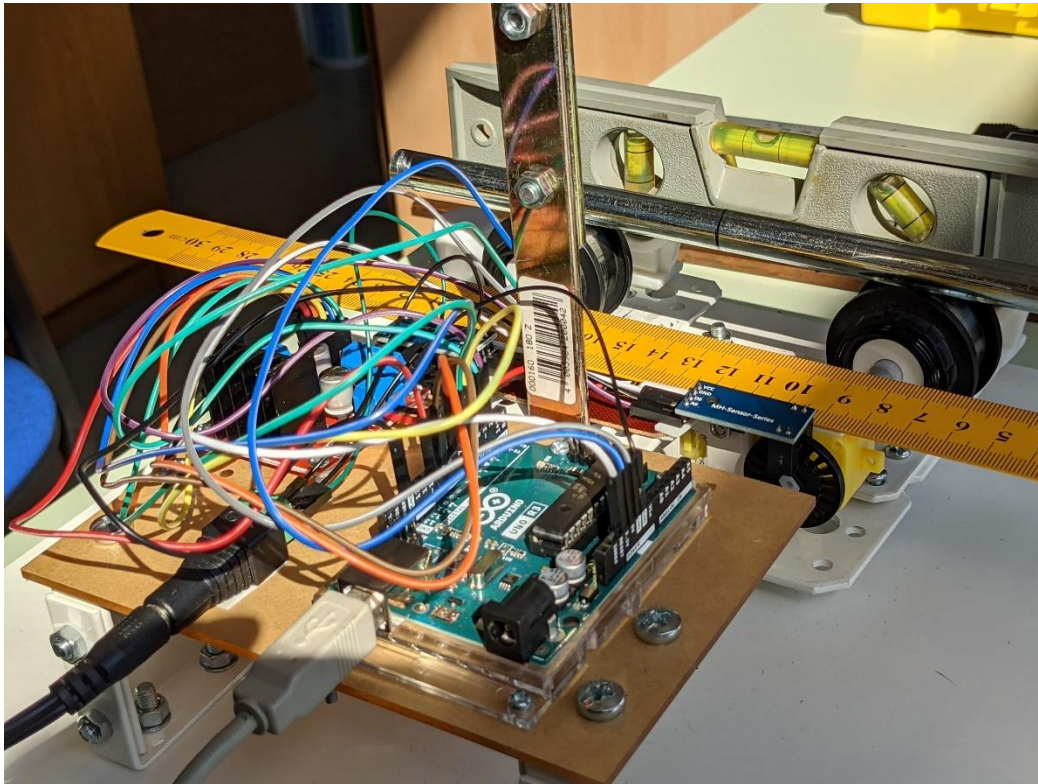
Slika 31. Izgled Timoshenkovog oscilatora s upravljačko-mjernim sklopom

### 4.3. Moguće pogreške u izvedbi i primjeni oscilatora

Pogreške na koje treba paziti mogu se podijeliti u tri kategorije: konstrukcijske pogreške, pogreške u spajanju elektroničkih sklopova, pogreške u programskom kodu.

Kod izvedbe i montaže konstrukcije mora se paziti da su vratila paralelna jedno u odnosu na drugo te da ravnina koja siječe oba vratila bude paralelna sa postoljem (slika 32). Također vratilo koje izlazi iz motora i glavno aluminijsko vratilo koje se na njega spaja mora biti u istoj ravnini. Konstrukcija mora biti dovoljno čvrsta da zadrži svoj početni oblik pod opterećenjem.

Tijekom spajanja elektroničkih sklopova treba paziti da se sve spoji prema shemi, ali i da je sama shema točna. Uzemljenja sa senzora i kontrolera moraju se spojiti na uzemljenje koje je posebno naznačeno na Arduino, kao i što svi ulazi na kontroleru za upravljanje motorima moraju biti spojeni na točno specificirana mjesta na Arduino.



Slika 32. Libela koja pokazuje da su vratila u ravnoteži i elektronički sklopovi povezani mnogobrojnim žicama

Kao zadnje preostaje napisati programski kod u C++ programskom jeziku što podrazumijeva da se pridržavamo određenih ustaljenih sintaksi, da se navedu sve varijable i da kod ispravno radi ono za što je namijenjen.

Za ispravan rad oscilatora treba osigurati iste ili približno iste brzine vrtnje elektromotora, što zahtjeva dodane korekcije vrijednosti napona na elektromotorima koje treba provesti u programskom kodu za izrađeni uređaj. Iako su primijenjeni isti modeli elektromotora oni ne moraju nužno ostvarivati istu brzinu vrtnje za zadani isti napon napajanja. Također uležištenje vratila prstena može uzrokovati manju razliku u otporima vrtnje vratila odnosno sporiju vrtnju vratila s većim otporom u valjnom ležaju. Za korekciju napona napajanja elektromotora uspoređuje se izmjerena brzina vrtnje vratila na sensorima brzine i usklađuje se vrijednost napona dok se ne postignu iste brzine vrtnje.

## 5. ISPITIVANJE UZORAKA NA TIMOSHENKOVOM OSCILATORU

### 5.1. Materijali uzoraka i plan ispitivanja

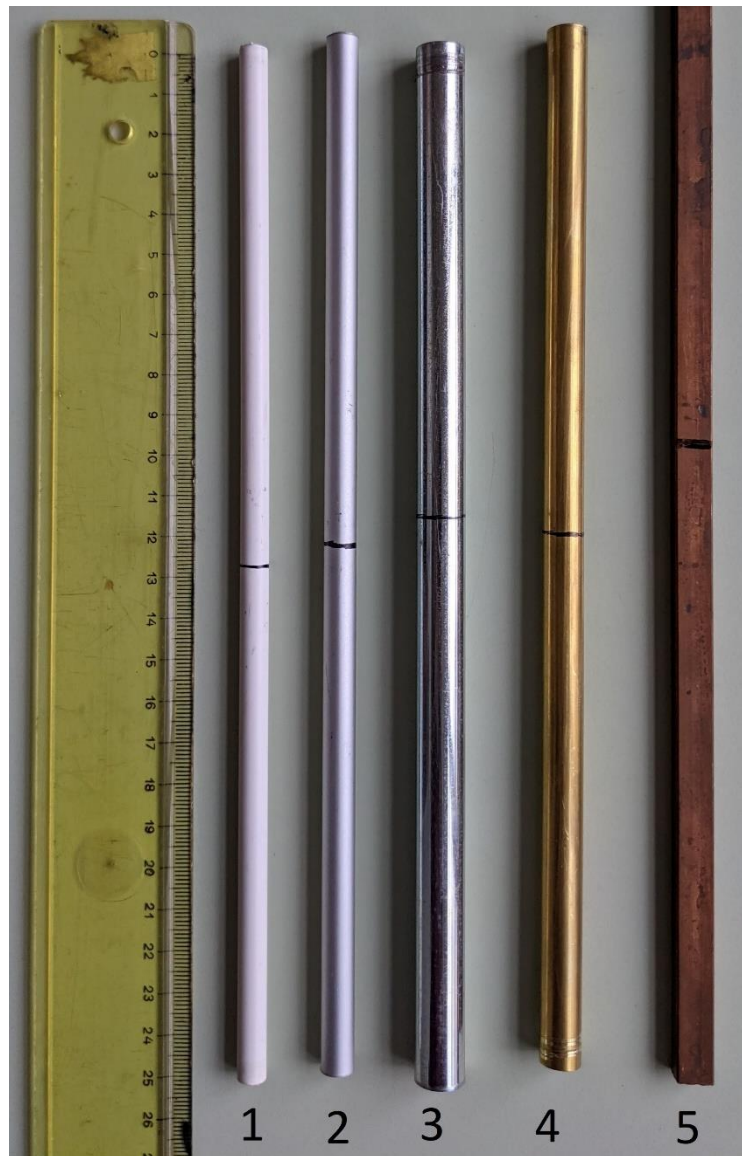
Nakon što smo uspješno postavili cijeli sustav Timoshenkovog oscilatora preostaje nam ispitati faktor trenja na uzorcima. Za određivanje periode titranja uzorka na rotirajućim prstenovima predložena je primjena mjernog sustava sastavljena od kamere s uobičajenom rezolucijom snimanja od 30 fps i računalnog programa Tracker.

Stavljanjem uzorka na oscilator uzorak počinje titrati. Kameru postavljamo na stalak s fiksnom udaljenosti od uzorka te snimamo titranje uzorka u trajanju od 5 do 60 sekundi.. U program Tracker učitamo video snimku titranja. U programu se prati oznaka na uzorku na svakoj snimljenoj slici (30 slika u sekundi) i konstruira dijagram pomaka oznake ovisan o vremenu. Iz dijagrama se očitava trajanje nekoliko perioda titranja i određuje se srednju vrijednost periode  $T$  (s). Na temelju izračunatog trajanja periode titranja uzorka i zadane duljine između osi vrtnje prstenova računa se kinetički faktor trenja prema jednadžbama (47) do (49b).

Za ispitivanje rada izrađenog sklopa oscilatora ispitano je pet uzoraka različitih materijala (tablica 3) i slika 33. Uzorci su ispitani pri sobnoj temperaturi i uz brzinu vrtnje vratila od oko 450 okr/min. Razmak između osovina je 120 mm. Prstenovi po kojima uzorci klize su prstenovi igličnih ležajeva NTN 1R30x35x17 vanjskog promjera 35 mm i širine 17 mm.

Tablica 3. Uzorci za ispitivanje kinetičkog faktora trenja

Uzorak	Materijal	Dimenzije [mm]	Masa [g]
1	Polistiren	$\varnothing 7 \times 250$	7,5
2	Aluminij	$\varnothing 8 \times 250$	14,1
3	Čelik s prevlakom nikla	$\varnothing 12 \times 250$	89,9
4	Mjed	$\varnothing 10 \times 250$	55,5
5	Bakar	9 x 6 x 360	80,5



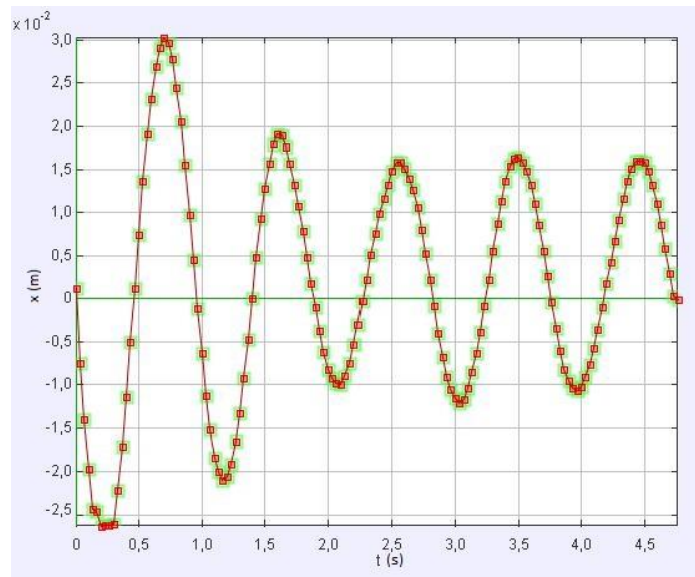
Slika 33. Uzorci za ispitivanje faktora trenja

## 5.2. Rezultati ispitivanja

Na slikama 34 do 38 prikazani su rezultati mjerenja periode titranja uzorka analizirani u računalnom programu Tracker. Na svakoj slici je prikazana krivulja titranja ovisna o vremenu. Vrijeme koje je obuhvaćeno za svaku sliku je oko 4,5 sekundi.

Ispod prikazanih slika naveden je period titranja uzorka i proračun kinetičkog faktora trenja.

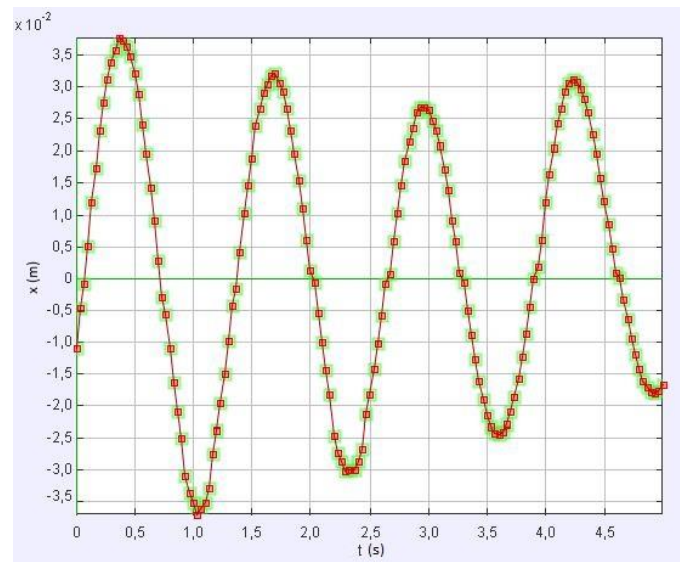




Slika 34. Prikaz titranja uzorka 1 od polistirena na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6

Srednji period titranja uzorka  $T = 0,943$  s

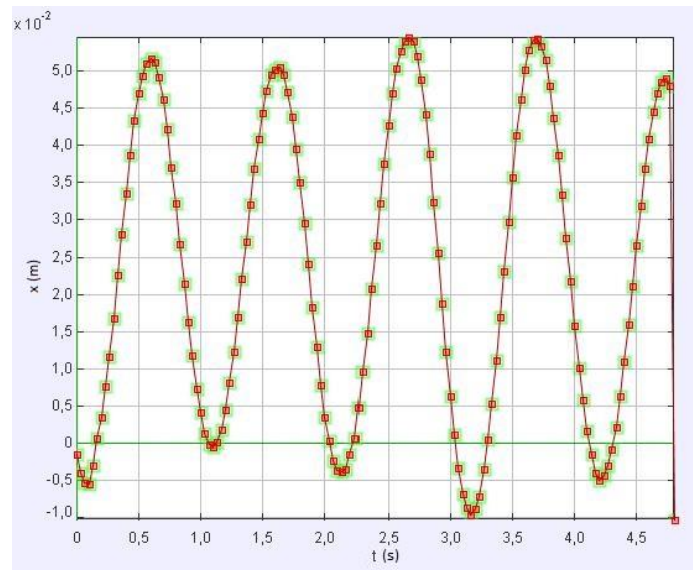
$$\text{Faktor trenja } \mu_{k1} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g \cdot T^2} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot 0,12}{9,81 \cdot 0,943^2} = 0,272$$



Slika 35. Prikaz titranja uzorka 2 od aluminija na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6

Srednji period titranja  $T = 1,279$  s

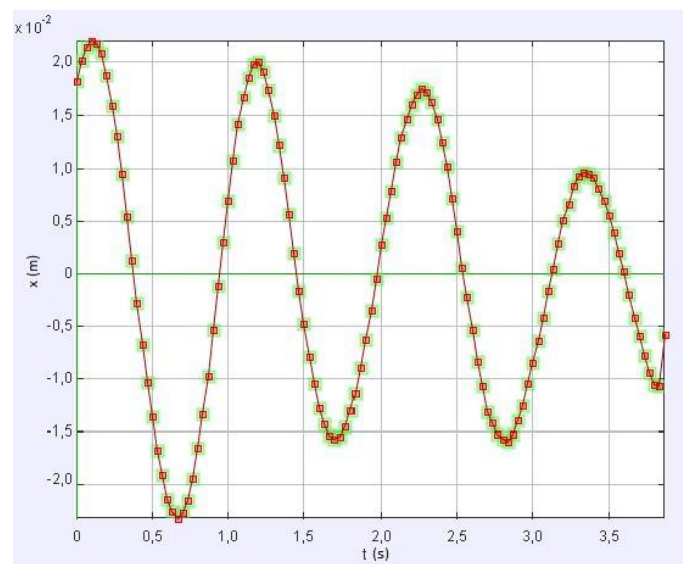
$$\text{Faktor trenja } \mu_{k2} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g \cdot T^2} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot 0,12}{9,81 \cdot 1,279^2} = 0,148$$



Slika 36. Prikaz titranja uzorka 3 od čelika s prevlakom nikla na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6

Srednji period titranja  $T = 1,037$  s

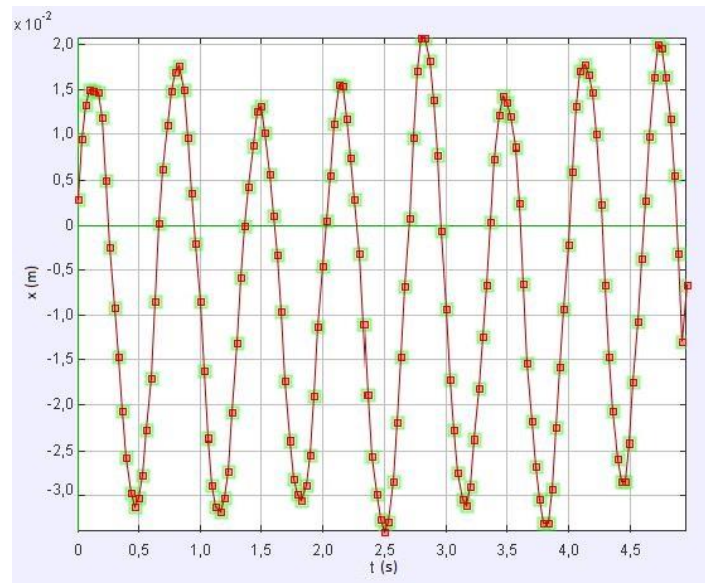
$$\text{Faktor trenja } \mu_{k3} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g \cdot T^2} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot 0,12}{9,81 \cdot 1,037^2} = 0,225$$



Slika 37. Prikaz titranja uzorka 4 od mjedi na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6

Srednji period titranja  $T = 1,073$  s

$$\text{Faktor trenja } \mu_{k3} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g \cdot T^2} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot 0,12}{9,81 \cdot 1,073^2} = 0,21$$



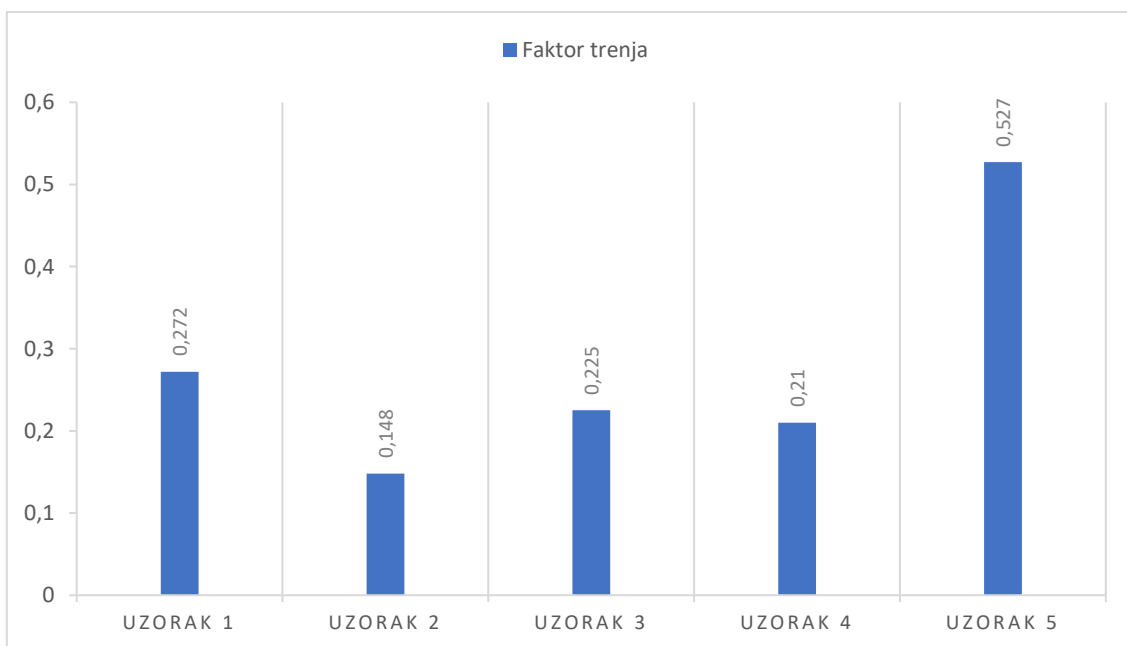
Slika 38. Prikaz titranja uzorka 5 od bakra na valjcima od čelika EN DIN 100Cr6

Srednji period titranja  $T = 0,677$  s

$$\text{Faktor trenja } \mu_{k3} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g \cdot T^2} = \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot 0,12}{9,81 \cdot 0,677^2} = 0,527$$

### 5.3. Diskusija rezultata

Na slici 39 prikazane su srednje vrijednosti faktora kinetičkog trenja za ispitivane materijale. Iz prikaza se vidi promjena faktora trenja od 0,148 za tribopar prsten od čelika 100Cr6 / uzorak od aluminija do 0,527 za tribopar prsten od čelika 100Cr6 / uzorak od bakra. U svim provedenim ispitivanjima početna vrijednost amplitude titranja uzorka bila je između 20 do 30 mm, što je bila dovoljna udaljenost za konstrukciju dijagrama titranja uzorka i određivanje perioda titranja u računalnom programu Tracker. Iz perioda pet titraja tijekom 3,0 s do 5,0 s određeno je pet vrijednosti perioda titranja i iz njih je izračunata srednja vrijednost periode koja je uvrštena u jednadžbu (48) za proračun srednje vrijednosti faktora kinetičkog trenja.



Slika 39. Histogram izračunatih faktora trenja

Materijal čiji faktor trenja najviše odstupa od ostalih je bakar zbog oksidirane i hrapavije površine u odnosu na ostale uzorke. Kod osciliranja uzorka od bakra primijećeno je povećanje amplitude nakon nekoliko sekundi osciliranja i pojava kaotičnog gibanja uzorka. Pojava kaotičnog gibanja svojstvena je svim oscilatorima uz određene uvjete uzbude, inercije i mase oscilirajućeg tijela. Za provedbu ispitivanja na Timoshenkovom oscilatoru treba izabrati brzine vrtnje prstena i materijal uzorka takvima da se može ostvariti titranje s postepeno sve manjim amplitudama, odnosno bez pojave kaotičnog gibanja ili izbacivanja uzorka s rotirajućih prstenova. Iz provedenih ispitivanja zaključuje se da je konstruirani oscilator moguće primijeniti za određivanje kinetičkog faktora trenja u rasponu vrijednosti od 0,10 do 0,50.

Daljnji nastavak ispitivanja uzoraka može biti usmjeren na drugačije kombinacije materijala prstena i uzorka te na ispitivanje faktora trenja s ohlađenim (npr. na 0 °C) ili sa zagrijanim uzorkom i prstenom (npr. do temperature 60 °C). Gornja temperatura ispitivanja ograničena je materijalima oscilatora, odnosno izradom elektromotora i graničnika oko prstena od polimernog materijala.

## 6. ZAKLJUČAK

U radu je opisana pojava i različite vrste trenja i postupci ispitivanja trenja prema preporukama strukovnih udruženja i normama ASTM. Osim standardnih metoda ispitivanja analiziran je fizički model i određivanja faktora trenja iz titranja uzorka postavljenog na dva prstena koji rotiraju u suprotnim smjerovima u literaturi poznat kao Timoshenkov oscilator. Na temelju fizikalnog principa rada Timoshenkovog oscilatora predložene su dvije konstrukcijske izvedbe oscilatora, od kojih je jedna i izrađena za eksperimentalna ispitivanja. Za upravljanje radom oscilatora izrađen je elektronički sklop s mikrokontrolerom Arduino UNO i napisan je računalni program za zadavanje brzine vrtnje prstena.

Iz provedenih ispitivanja na izrađenom uređaju uočen je problem ostvarenja konstantne zadane brzine vrtnje elektromotora, odnosno prstena i utjecaj montaže senzora brzine na vratilo elektromotora na pogrešku mjerenja brzine. Kao rješenje ovih problema predlaže se usklađivanje brzine vrtnje elektromotora zadavanjem odgovarajuće vrijednosti napona napajanja svakog elektromotora u programskom kodu pri puštanju u rad izrađenog uređaja.

Iz provedenih ispitivanja na uzorcima od polimera, aluminijskog, čelika, mjedi i bakra postavljenim na prstene od čelika EN DIN 100Cr6 potvrđena je mogućnost primjene izrađenog Timoshenkovog oscilatora za ispitivanje faktora kinetičkog trenja u rasponu od 0,10 do 0,50.

U nastavku ispitivanja preporučuje se provedba ispitivanja trenja s drugačijim kombinacijama materijala u triboparu i provedba ispitivanja s ohlađenim ili ugrijanim uzorcima.

## LITERATURA

- [1] Scott D. Henry, ed.: *ASM Handbook Friction, Lubrication, and Wear Technology*, Vol 18. ASM International, Metal park, OH, USA, 1997.
- [2] <https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=12610>, 25.08.2021.
- [3] *Trenje i podmazivanje*,  
[www.fsb.unizg.hr/deformiranje/predavanja/trenje\\_i\\_podmazivanje.pdf](http://www.fsb.unizg.hr/deformiranje/predavanja/trenje_i_podmazivanje.pdf), 26.08.2021.
- [4] C.J. Reidl: *The coefficient of kinetic friction*, High School for Science and Engineering Professions at Dunbar, Texas, USA, 2013.
- [5] Vučković K., Podloge uz predavanja iz kolegija „Elementi konstrukcija II“, Ležajevi, autorizirana predavanja, FSB, Zagreb, 2018.
- [6] V. Kovačević, D. Vrsaljko, W. Brostow: *Tribologija polimernih materijala*, Sveučilište u Zagrebu, FKIT, 29.9.2009.
- [7] I. Hutchings, P. Shipway: *Friction and Wear of Engineering Materials*, UK, 2017, 37-77
- [8] P. S. Carvalho, A. S. Sousa: *An Inexpensive Technique to Measure Coefficients of Friction with Rolling Solids*, NY, USA, 2005.
- [9] P. Onorato, D. Mascoli, A. DeAmbrosis: *Damped oscillations and equilibrium in a mass-spring system subject to sliding friction forces*, Italy, 2010.
- [10] R. Drosd, L. Minkin: *Measuring the Coefficient of Kinetic Friction by Exploring Dynamics of Rotational Motion*, Portland Community College, Portland, OR, USA, 2020.
- [11] <http://faculty-history.dc.umich.edu/faculty/stephen-timoshenko/bio>, 29.09.2021.
- [12] *Stephen Timoshenko - path-breaking professor of applied mechanics*,  
<https://engineering.stanford.edu/about/heroes/2012-heroes/stephen-timoshenko>, 29.09.2021.
- [13] R. Henaff, B. Pilette, C. Even: *A study of kinetic friction: The Timoshenko oscillator*, American Journal of Physics 86 (2018), 174-178.

## **PRILOZI**

- I. Specifikacije mikrokontrolera Arduino UNO Rev 3
- II. Specifikacije upravljačkog modula L298N
- III. Programski kod za upravljanje Timoshenkovim oscilatorom
- IV. Sklopni crtež Timoshenkovog oscilatora



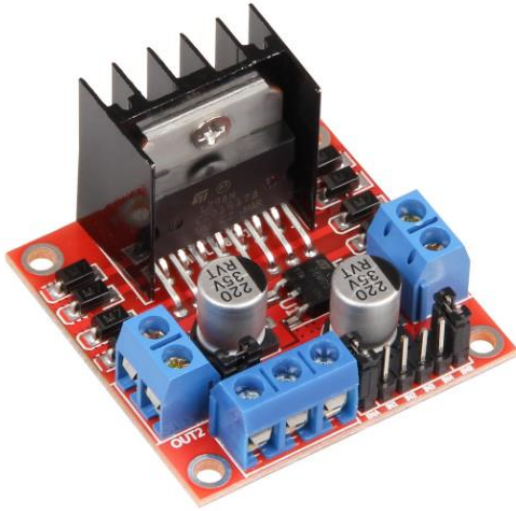
## I. Specifikacije mikrokontrolera Arduino UNO Rev 3

<https://docs.arduino.cc/hardware/uno-rev3>

<b>Board</b>	<b>Name</b>	Arduino UNO R3
	<b>SKU</b>	A000066
<b>Microcontroller</b>	ATmega328P	
<b>USB connector</b>	USB-B	
<b>Pins</b>	<b>Built-in LED Pin</b>	13
	<b>Digital I/O Pins</b>	14
	<b>Analog input pins</b>	6
	<b>PWM pins</b>	6
<b>Communication</b>	<b>UART</b>	Yes
	<b>I2C</b>	Yes
	<b>SPI</b>	Yes
<b>Power</b>	<b>Circuit operating voltage</b>	5V
	<b>Input voltage (recommended)</b>	7-12V
	<b>Input voltage (limit)</b>	6-20V
	<b>Supported battery</b>	9V battery
	<b>Battery connector</b>	Power jack
	<b>DC Current per I/O Pin</b>	20 mA
	<b>DC Current for 3.3V Pin</b>	50 mA
<b>Clock speed</b>	<b>Main Processor</b>	ATmega328P 16 MHz
	<b>USB-Serial Processor</b>	ATmega16U2 16 MHz
<b>Memory</b>	<b>ATmega328P</b>	2KB SRAM, 32KB FLASH, 1KB EEPROM
<b>Dimensions</b>	<b>Weight</b>	25 g
	<b>Width</b>	53.4 mm
	<b>Length</b>	68.6 mm

## II. Specifikacije upravljačkog modula L298N

<https://joy-it.net/files/files/Produkte/SBC-MotorDriver2/SBC-MotoDriver2-Manual.pdf>



Model	SBC-MotoDriver2
Driver	L298N
Logic Voltage	5V
Drive Voltage	5V - 35V
Drive Current	2A
Power	Max. 25W
Dimensions	43 x 43 x 25 mm

### III. Programski kod za upravljanje Timoshenkovim oscilatorom

```
#include <TimerOne.h>

const byte motorA = 2; // Motor A Interrupt Pin
- INT 0
const byte motorB = 3; // Motor B Interrupt Pin
- INT 1
volatile byte counter1 = 0;
volatile byte counter2 = 0;
static volatile unsigned long debouncel = 0;
static volatile unsigned long debouncer = 0;

// Float for number of slots in encoder disk
float diskslots = 20; // Change to match value
of encoder disk

// Motor A connections
int enA = 6;
int in1 = 4;
int in2 = 5;
// Motor B connections
int enB = 9;
int in3 = 7;
int in4 = 10;

// Motor A pulse count ISR
void ISR_countA()
{
    if (digitalRead (motorA) && (micros() -
debouncel > 500) && digitalRead (motorA) ) {

        debouncel = micros();
        counter1++;
    }
}
```

```

}
else;

}
// Motor B pulse count ISR
void ISR_countB()
{
    if (digitalRead (motorB) && (micros() -
debouncel > 500) && digitalRead (motorB) ) {

        debouncer = micros();
        counter2++;
    }
else;
}

void setup() {
    // Set all the motor control pins to outputs
    Serial.begin(9600);

    pinMode(motorA, INPUT);
    pinMode(motorB, INPUT);
    pinMode(enA, OUTPUT);
    pinMode(enB, OUTPUT);
    pinMode(in1, OUTPUT);
    pinMode(in2, OUTPUT);
    pinMode(in3, OUTPUT);
    pinMode(in4, OUTPUT);

    // Turn off motors - Initial state
    digitalWrite(in1, LOW);
    digitalWrite(in2, LOW);
    digitalWrite(in3, LOW);

```

```
digitalWrite(in4, LOW);

    attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(motorA),
ISR_countA, RISING); // Increase counter 1 when
speed sensor pin goes High
    attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(motorB),
ISR_countB, RISING); // Increase counter 2 when
speed sensor pin goes High

}

int previous_ms =0;

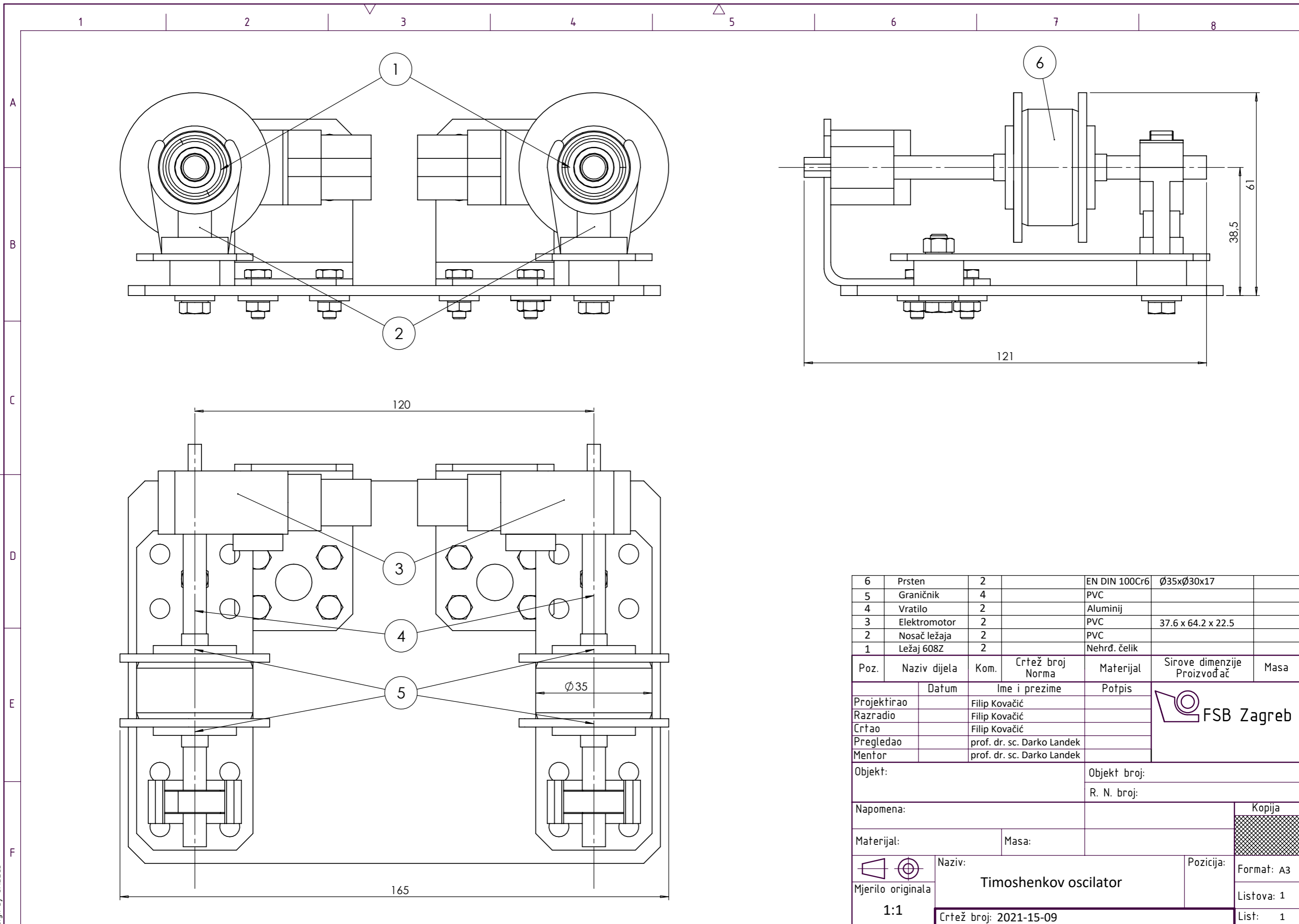
void loop() {
    int now = millis();

    // For PWM maximum possible values are 0 to 255
    analogWrite(enA, 200);
    analogWrite(enB, 140);

    // Turn on motor A & B
    digitalWrite(in1, LOW);
    digitalWrite(in2, HIGH);
    digitalWrite(in3, HIGH);
    digitalWrite(in4, LOW);
    //delay(2000);

    if ((now-previous_ms)> 1000)
    {
        Serial.print("Motor A brzina: ");
```

```
float rotationLEFT = (counter1 / diskslots) *
60.00; // calculate RPM for Motor A
Serial.print(rotationLEFT);
Serial.print(" RPM - ");
counter1 = 0; // reset counter to zero
Serial.print("Motor B brzina: ");
float rotationRIGHT = (counter2 / diskslots) *
60.00; // calculate RPM for Motor B
Serial.print(rotationRIGHT);
Serial.println(" RPM");
counter2 = 0; // reset counter to zero
previous_ms = now;
}
}
```



6	Prsten	2		EN DIN 100Cr6	Ø35xØ30x17	
5	Graničnik	4		PVC		
4	Vratilo	2		Aluminij		
3	Elektromotor	2		PVC	37.6 x 64.2 x 22.5	
2	Nosač ležaja	2		PVC		
1	Ležaj 608Z	2		Nehrđ. čelik		
Poz.	Naziv dijela	Kom.	Crtež broj Norma	Materijal	Sirove dimenzije Proizvođač	Masa
	Datum	Ime i prezime		Potpis		
Projektirao		Filip Kovačić				
Razradio		Filip Kovačić				
Crtao		Filip Kovačić				
Pregledao		prof. dr. sc. Darko Landek				
Mentor		prof. dr. sc. Darko Landek				
Objekt:				Objekt broj:		
				R. N. broj:		
Napomena:						Kopija
Materijal:			Masa:			
		Naziv:			Pozicija:	
Mjerilo originala		Timoshenkov oscilator			Format: A3	
1:1		Crtež broj: 2021-15-09			Listova: 1	
					List: 1	

Design by CADLab

