Numerička analiza naprezanja i deformacija u toplinski opterećenoj štapnoj konstrukciji

Klasić, Karlo

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:347663

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-14**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Karlo Klasić

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor: Student:

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković Karlo Klasić

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodostrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: **602 - 04 / 21 - 6 / 1**	
Ur.broj: **15 - 1703 - 21 -**	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Karlo Klasić** JMBAG: **0035214530**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza naprezanja i deformacija u toplinski opterećenoj štapnoj konstrukciji**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical analysis of stresses and strains in a thermally loaded rod structure**

Opis zadatka:

U radu je potrebno provesti numeričku analizu naprezanja i deformacija u štapnim konstrukcijama uslijed toplinskih opterećenja. Pritom je potrebno analizirati stacionarno i nestacionarno provođenje topline u statički određenim i neodređenim konstrukcijama. Za numeričke analize primijeniti programski paket Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata.

Za diskretizaciju modela koristiti više različitih jednodimenzijskih i trodimenzijskih konačnih elemenata te prikazati konvergenciju rješenja. Istražiti dostupne algoritme za rješavanje stacionarnog i nestacionarnog provođenja topline te pripadne formulacije konačnih elemenata. Za rješavanje nestacionarnih problema primijeniti eksplicitnu metodu vremenske integracije, a za rješavanje problema provođenja topline spregnutog s mehaničkom analizom primijeniti sekvencijalno spregnutu metodu.

Za analizirane modele potrebno je prikazati raspodjelu temperatura, naprezanja, deformacija i pomaka. Rezultate numeričkih analiza usporediti s pripadnim analitičkim rješenjima, odnosno rješenjima iz literature. Potrebni podaci i literatura se mogu dobiti kod mentora.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datumi obrane:
6. svibnja 2021.	**2. rok (izvanredni):** 5. srpnja 2021. **3. rok:** 23. rujna 2021.	**2. rok (izvanredni):** 9.7.2021. **3. rok:** 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

Prof.dr.sc. Zdenko Tonković

Dr. sc. Boris Jalušić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno, koristeći se pritom isključivo literaturom koja je citirana i navedena u popisu literature.

Zahvaljujem svom mentoru, profesoru Zdenku Tonkoviću, koji je ustrajno pratio tijek izrade ovog rada te svojim komentarima, savjetima i smjernicama upotpunio moje ideje i pokazao mi novi način razmišljanja, kako kroz kolegij Metoda konačnih elemenata, tako i kroz ovaj rad. Zahvaljujem majci Senki, ocu Anđelku i bratu Luki koji su me nesebično podupirali kako u životu, tako i u obrazovanju. Također bih se zahvalio najboljem mi prijatelju Patriku, koji je sa mnom prolazio kroz zahtjevne trenutke i pružio mi neupitnu podršku.

Karlo Klasić

SADRŽAJ

POPIS SLIKA ... III
POPIS TABLICA ... IV
POPIS OZNAKA ... V
SAŽETAK ... VII
SUMMARY ... VIII
1. UVOD ... 1
2. TEORIJSKA RAZRADA ... 3
2.1. Opća raspodjela trodimenzionalnog temperaturnog polja ... 3
2.2. Rubni i početni uvjeti ... 6
2.2.1. Rubni uvjeti [1], [2], [3] ... 6
2.2.1.1. Dirichletovi rubni uvjeti ... 6
2.2.1.2. Neumannovi rubni uvjeti ... 6
2.2.1.3. Newtonovi rubni uvjeti ... 6
2.2.2. Početni uvjeti [1], [2], [3]. ... 7
2.3. Formulacija konačnih elemenata za stacionarni prijenos topline ... 8
2.3.1. Jednodimenzionalni stacionarni prijenos topline ... 8
2.3.1.1. Egzaktno rješenje ... 8
2.3.1.2. Formulacija konačnih elemenata [2], [3] ... 9
2.3.2. Trodimenzionalni stacionarni prijenos topline ... 12
2.3.2.1. Osnovni tetraedarski element [1] ... 12
2.3.2.2. Osnovni prizmatični element [1] ... 17
2.4. Nestacionarni prijenos topline ... 19
2.4.1. Metode vremenske integracije ... 20
2.4.1.1. Implicitna metoda vremenske integracije [2], [4] ... 20
2.4.1.2. Implicitna Crank-Nicolsonova metoda vremenske integracije [2], [4] ... 20
2.4.1.3. Eksplicitna metoda vremenske integracije [2], [4] ... 20
2.4.2. Opća formulacija metode konačnih elemenata trodimenzionalnog nestacionarnog problema [2], [3] ... 21

2.4.3. Opis jednodimenzionalnog konačnog elementa za nestacionarni prijenos topline [2], [3] ... 23
2.5. Konvergencija rješenja ... 26
2.5.1. Mogućnost opisivanja pomaka krutog tijela [1] ... 26
2.5.2. Mogućnost opisivanja polja konstantne deformacije [1] ... 27
2.5.3. Zadovoljavanje potrebnih uvjeta kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata [1] ... 27
2.6. Formiranje globalne matrične jednadžbe konačnih elemenata ... 29
2.7. Sekvencijalno spregnuta metoda [2], [3], [5], [6] ... 30
2.7.1. Opća formulacija konačnog elementa za mehaničku analizu [1] ... 31
2.7.2. Jednodimenzionalni konačni element [1] ... 33
2.7.3. Trodimenzionalni konačni elementi [1] ... 37
2.7.3.1. Osnovni tetraedarski element ... 37
2.7.3.2. Osnovni šesterostrani prizmatični element [1] ... 38
3. Primjena jednadžbi na matematičkim modelima ... 40
3.1. Primjer 1 [2], [7], [8] ... 40
3.2. Primjer 2 [2], [7], [8] ... 43
3.3. Primjer 3 [7], [8] ... 49
3.4. Primjer 4 [7], [8] ... 52
3.5. Primjer 5 [7], [8] ... 57
4. Zaključak ... 60
Prilog ... 62
Literatura ... 65

POPIS SLIKA

Slika 1. 3D diferencijalni model 3
Slika 2. Raspodjela početnih i rubnih uvjeta na jednoj domeni [2] 7
Slika 3. Prikaz 1D konačnog elementa 9
Slika 4. Tetraedarski element [1] 12
Slika 5. Osnovni prizmatični element [1] 17
Slika 6. Jednodimenzionalni konačni element 23
Slika 7. Pomaci krutog tijela[1] 27
Slika 8. Prikaz kompatibilnosti duž rubova pravokutnog elementa [1] 28
Slika 9. a) Pascalov trokut, b) Pascalov tetraedar [1] 28
Slika 10. Monotona i nemonotona konvergencija ovisno o broju elemenata [2] 29
Slika 11. Slučaj toplinskog opterećenja bez pojave naprezanja [2] 33
Slika 12. Opći položaj štapa u prostoru 35
Slika 13. Primjer 1 40
Slika 14. Temperaturno polje 43
Slika 15. Primjer 2 43
Slika 16. Vremenska promjena temperature srednjeg čvora 46
Slika 17. Vremenska promjena toplinskog toka za slučaj 2 konačna elementa 47
Slika 18. Konvergencija rješenja za navedene uvjete 48
Slika 19. Konvergencija rješenja za navedene uvjete 48
Slika 20. Primjer 3 49
Slika 21. Primjer 4 53
Slika 22. Prikaz konačnog elementa štapa 3 55
Slika 23. Štapna konstrukcija 57
Slika 24. Raspodjela temperaturnog polja nakon grijanja štapa 2 58
Slika 25. Raspodjela naprezanja po štapnoj konstrukciji 58
Slika 26. Konvergencija rješenja 59

POPIS TABLICA

Tablica 1. Prikaz indeksa koordinata po čvorovima 18
Tablica 2. Prikazani odnos globalnih i lokalnih stupnjeva slobode 30
Tablica 3. Raspored globalnih i lokalnih stupnjeva slobode..... 41
Tablica 4. Prikaz vrijednosti ovisno o broju elemenata 42
Tablica 5. Vrijednosti stacionarne temperature srednjeg čvora i toplinskih tokova na rubovima ovisno o broju elemenata..... 47
Tablica 6. Prikaz stacionarnog rješenja temperature u središtu ovisno o veličini inkrementa. 49
Tablica 7. Prikaz rezultata pomaka, deformacija i naprezanja ovisno o broju elemenata 52
Tablica 8. Prikaz rezultata pomaka, deformacija i naprezanja ovisno o broju elemenata 52
Tablica 9. Odnos lokalnih i globalnih stupnjeva slobode 53
Tablica 10. Pomaci slobodnog kraja štapne konstrukcije 59

POPIS OZNAKA

A [m^2]	- površina,
$\mathbf{B}$	- matrica derivacija funkcija oblika,
c [J/(kgK)]	– specifična toplina,
$\mathbf{C}$, $\mathbf{c}$	- matrice toplinskih kapaciteta,
$\mathbf{D}$	- matrica fizikalnih svojstava,
$\mathbf{D_k}$	- matrica kinematskih operatora,
E_s [J]	- akumulirana energija u sustavu,
$\mathbf{F_t}$, $\mathbf{F}$	- matrice opterećenja (toplinskih i mehaničkih),
$\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$	- matrice krutosti,
$\mathbf{K_t}$, $\mathbf{k_t}$	- toplinske matrice krutosti,
l [m]	- duljina konačnog elementa,
l_i	-Lagrangeovi interpolacijski polinomi,
N_i	- funkcije oblika konačnih elemenata,
$\mathbf{N}$	- matrica funkcija oblika,
t [s]	- vrijeme,
Δt, Δt_{kr} [s]	- vremenski inkrement, kritični vremenski inkrement,
T [K]	- termodinamička temperatura,
$\mathbf{T}$	- matrica transformacije,
q [W/m^2]	- gustoća toplinskog toka,
$\boldsymbol{q}_v$, $\boldsymbol{q}_b$	- vektor stupac toplinskog opterećenja (volumenski i površinski),
$\mathbf{q}$	- ukupni vektor opterećenja,
Q_v [W/m^3]	- toplinski izvor/ponor,
U [J]	- unutarnja energija sustava,
$\mathbf{u}$	- vektor pomaka po elementu,
V [m^3]	- volumen,
$\mathbf{v}$	- vektor čvornih pomaka,
α [K^{-1}]	- koeficijent toplinskog rastezanja/stezanja,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	- matrica deformacija,
$\boldsymbol{\sigma}$	- matrica naprezanja,
ϑ [^{o}C]	- temperatura,
$\boldsymbol{\vartheta}$	- matrica čvornih temperatura,

$\vartheta(t_n)$ [°C]	– trenutna temperatura,
$\vartheta(t_{n+1})$ [°C]	– temperatura u idućem trenutku,
λ [W/mK]	- koeficijent toplinskog provođenja,
ρ [kg/m^3]	- gustoća,
$\varnothing$ [W]	- toplinski tok,
Π	- funkcional, energija deformiranja.

SAŽETAK

U eksploataciji, konstrukcije su podvrgnute različitim vrstama opterećenja, među kojima je toplinsko opterećenje. Toplinsko opterećenje uzrokuje promjenu temperaturnog polja konstrukcije te se manifestira kroz pomake, odnosno deformacije i pojavu naprezanja u određenim uvjetima. Takva vrsta opterećenja se analizira termomehaničkom analizom koja može biti potpuno spregnuta termomehanička analiza ili sekvencijalno spregnuta termomehanička analiza.

Uslijed toplinskog opterećenja, ne dolazi do trenutnog stacioniranja novog temperaturnog polja već postoji vrijeme u kojem se vrijednosti stacioniraju. Takve pojave nazivaju se tranzijentnim pojavama čije se vrijednosti računaju raznim metodama vremenske integracije.

Ovaj rad se bazira na sekvencijalno spregnutoj metodi koja podrazumijeva pronalazak temperaturnog polja, a potom se promjena temperature implementira u matematički model. Oba modela, termalni i mehanički, analiziraju se i opisuju jednadžbama Metode konačnih elemenata, dok se tranzijentne pojave obuhvaćaju i računaju eksplicitnom metodom vremenske integracije.

Ključne riječi: sekvencijalno spregnuta termomehanička analiza, toplinsko opterećenje, pomaci, toplinske deformacije, toplinska naprezanja, statično temperaturno polje, dinamično temperaturno polje, eksplicitna metoda vremenske integracije.

SUMMARY

Structures are subjected to a variety of loads during exploitation, including a heat load. The heat load generates a change in the structure's temperature field, which presents itself as displacements, or deformations, as well as the appearance of stress under particular conditions. Thermomechanical analysis, which can be fully coupled thermomechanical analysis or sequentially coupled thermomechanical analysis, is used to study this sort of stress.

Due to the heat load, the current staticity of the new temperature field does not occur, but there is a time at which the values are stationed.

These are known as transient phenomena, and their values can be determined using a variety of time integration methods.

This thesis is based on a sequentially coupled method that entails first locating a temperature field, and then incorporating the temperature change into a mathematical model. Both models, thermal and mechanical, are analyzed and described by equations of Finite element methods, while transient phenomena are encompassed and calculated by explicit time integration method.

Keywords: sequentially coupled thermomechanical analysis, heat load, displacements, thermal deformations, thermal stresses, static temperature field, dynamic temperature field, explicit time integration method.

1. UVOD

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda za približno određivanje rješenja diferencijalnih jednadžbi za koje općenito nije poznato egzaktno rješenje, tj. funkcija koja povezuje sve parametre i argumente o kojima ovisi. Temelji se na ideji diskretizacije kontinuuma, a u području mehanike deformabilnih tijela najviše se koristi za određivanje približnih rješenja pomaka i deformacija određene konstrukcije koji su posljedica djelovanja opterećenja, toplinskih utjecaja ili njihove kombinacije te općenito za rješavanje problema polja, odnosno za prikaz raspodjele fizikalne veličine. Da bi se analiza mogla provesti, potrebno je izvršiti određene pripreme kao što je određivanje prirode problema, tj. je li problem statički ili dinamički pa se prema tome izrađuje matematički model koji je opisan jednom diferencijalnom jednadžbom ili sa sustavom diferencijalnih jednadžbi. Potom se vrši diskretizacija konstrukcije, odnosno dijelovi se podijele u konačne, manje elemente po kojima je definirana interpolacijska funkcija fizikalne veličine što predstavlja lokalnu raspodjelu, a pošto je cilj dobiti rješenja po cijeloj konstrukciji, iz lokalnih jednadžbi se formira globalni sustav te se uvrštavaju rubni i početni uvjeti, ako je problem nestacionaran, iz čega proizlazi sustav algebarskih jednadžbi čija rješenja predstavljaju aproksimacijske vrijednosti tražene fizikalne veličine. Postoje dvije metode formulacije metode konačnih elemenata, a to su varijacijski princip i metoda težinskog ostatka (reziduuala). Varijacijski princip se upotrebljava kada postoji funkcional opisanog problema te se varira po traženoj fizikalnoj veličini. Gledano sa stajališta varijacijskog principa u mehanici deformabilnih tijela, najčešće se rabe dva principa, a to su princip virtualnih pomaka i princip minimuma potencijalne energije. U oba principa je pomak tražena fizikalna veličina, a opterećenja i pomaci su povezani preko matrice krutosti. Cilj metode težinskog reziduala je smanjenje ili, ako je moguće, potpuno otklanjanje greške u čvorovima konačnog elementa, a ako su težinske funkcije jednake funkcijama oblika konačnih elemenata, govorimo o Galerkinovoj metodi težinskog reziduala te se na temelju te ideje izvode konačni elementi.

Osim pomaka, a time i deformacija, uzrokovanih vanjskim opterećenjem, potrebno je uzimati u obzir i pomake uzrokovane toplinskim promjenama, dakle prijenosom topline i promjenom temperaturnog polja jer imaju značajan utjecaj u analizi naprezanja. Takva naprezanja se javljaju prilikom toplinske obrade dijelova konstrukcije (zaostala toplinska naprezanja) ili prilikom eksploatacije konstrukcije.

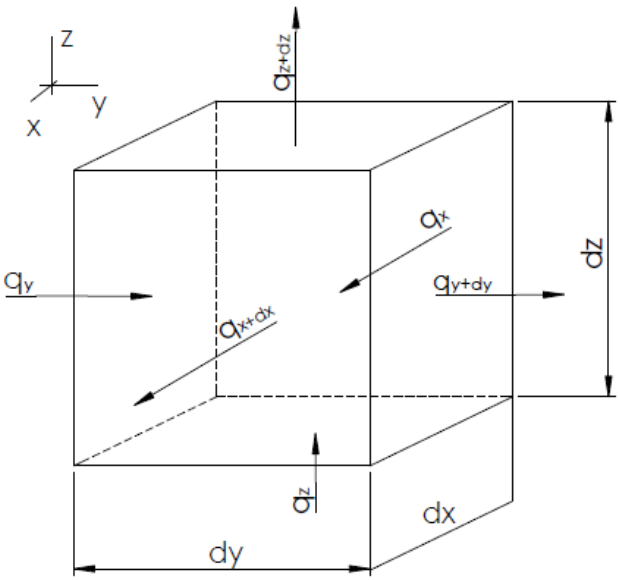
U današnjici je moguće napraviti jako finu mrežu konačnih elemenata zbog razvoja računala, a posljedica toga je bolja konvergencija rješenja tražene veličine ka egzaktnom rješenju. No da bi proračun s rješenjima bio prihvaćen, inženjer treba imati „osjećaj“ za ponašanje fizikalne veličine kako bi mogao potvrditi približnu točnost rješenja jer se ipak radi samo o približnim rješenjima.

U nastavku je opisan i prikazan postupak rješavanja toplinski opterećenog sustava pomoću jednodimenzionalnih i trodimenzionalnih konačnih elemenata s naglaskom na eksplicitnu metodu vremenske integracije i sekvencionalno spregnutu metodu koja daje vezu između temperaturnog polja i polja pomaka.

2. TEORIJSKA RAZRADA

2.1. Opća raspodjela trodimenzionalnog temperaturnog polja

Kako bi se mogla izvesti metoda konačnih za analizu temperaturnog polja, potrebno je pronaći općenitu raspodjelu temperature trodimenzionalnog tijela. Ta će raspodjela biti opisana diferencijalnom jednadžbom.[Slika 1] prikazuje 3D diferencijalni model u Kartezijevom koordinatnom sustavu s prikazanim koordinatnim osima koji služi za izvod temperaturnog polja.



Slika 1. 3D diferencijalni model

Toplinski tok predstavlja nepravilni diferencijal jer njegov iznos ovisi samo o početnom i konačnom stanju sustava u kojem se izmjenjuje no zbog jednostavnosti, u nastavku će biti prikazan kao pravilni diferencijal. Izmjena topline kroz materiju se izvodi provođenjem (kondukcija), a fizikalno predstavlja difuziju, odnosno spontanu izmjenu topline zbog postojanja gradijenta temperature. Uveden je pojam gustoće toplinskog toka, koji je definiran kao diferencijal toplinskog toka po diferencijalu površine:

$$q = \frac{\mathrm{d}\emptyset}{\mathrm{d}A} \tag{1.1}$$

Kako toplinski tok nije vektorska veličina, tako nije ni gustoća toplinskog toka pa gustoće toka u sva 3 smjera na Slici 1 predstavljaju pomnoženu vrijednost s normalama stranica. Kao i u

većini slučajeva, kreće se od I. glavnog stavka termodinamike koji kaže da je vremenska promjena akumulirane energije u sustavu jednaka razlici vremenske promjene ulazne energije i vremenske promjene izlazne energije sustava, a matematički zapisano glasi

$$\frac{\mathrm{d}E_S}{\mathrm{d}t} = \dot{e}_{\mathrm{u}} - \dot{e}_{\mathrm{i}} + Q_{\mathrm{v}} \,. \tag{1.2}$$

Za nastavak izvoda je potrebno povezati gustoću toplinskog toka s toplinom (energijom) Q, a njihova povezanost je sljedeća:

$$\emptyset = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \,, \tag{1.3}$$

i taj se izraz još podvrgne derivaciji po površini pa se dobiva

$$\mathrm{d}^2 Q = q \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

Akumulirana energija predstavlja unutarnju energiju koja je definiran kao

$$\mathrm{d}U = \rho c \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}\vartheta \,, \tag{1.5}$$

gdje je:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,. \tag{1.6}$$

Na slici 1 su prikazane gustoće toplinskog toka i one predstavljaju energiju stoga je ulazna energija prikazana simbolično s q_i, a izlazna kao q_{i+di}, gdje je $i = x, y, z$. Pošto je funkcija gustoće toplinskog toka u ovisnosti o koordinatama nepoznata, interpolacija rješenja će biti raspisana pomoću Taylorovog reda. Gledano s inženjerskog stajališta, dovoljno dobra su prva dva člana, a daljnji razvoj bi otežao izvod pa se gustoća toplinskog toka zapisuje kao:

$$\begin{aligned} q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\ q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\ q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \end{aligned} \tag{1.7}$$

Implementacijom ovih izraza u I. glavni stavak dobiva se sljedeći izraz

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dxdydz = (q_x \mathrm{d}A_x + q_y \mathrm{d}A_y + q_z \mathrm{d}A_z) - \left[\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}A_x + (q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}A_y + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\ \mathrm{d}A_z\right] \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_x &= \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}A_y &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}A_z &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \end{aligned} \quad (1.9)$$

Kao što se može vidjeti, uvrštavanjem izraza diferencijalnih površina (1.9) i oduzimanja komponenata ulaznih gustoća toplinskog toka rezultira sa sljedećim izrazom

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + Q_v\,. \quad (1.10)$$

Pošto je u pitanju provođenje topline kroz materiju, za daljnje izvođenje će poslužiti Fourierov stavak koji kaže da je gustoća toplinskog toka proporcionalna gradijentu temperature:

$$q = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$$

pa se može zapisati po komponentama:

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (1.11)$$

$$q_y = -\lambda_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad (1.12)$$

$$q_z = -\lambda_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad (1.13)$$

Minus predstavlja smjer izmjene topline jer difuzija ide od više temperature prema nižoj, a negativan gradijent to pokazuje.

Uvrštavanjem izraza (1.2), (1.3), (1.4) u (1.1) dobije se trodimenzionalna dinamička raspodjela temperature:

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \lambda_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \lambda_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + Q_v \tag{1.14}$$

Ostali prijenosi topline su konvekcija i radijacija, a pošto se gleda raspodjela temperature unutar materije nepotrebno ih je opisivati.

2.2. Rubni i početni uvjeti

2.2.1. *Rubni uvjeti [1], [2], [3]*

Rubni uvjeti su vrijednosti fizikalnih veličina ili njihovih derivacija, poznatih u svakom trenutku, koje se nalaze na granicama promatranog sustava. Za prijenos topline, dijele se u 3 skupine, a to su: Dirichletovi, Neumanovi i Newtonovi rubni uvjeti.

2.2.1.1. Dirichletovi rubni uvjeti

U svakom trenutku je zadana vrijednost tražene fizikalne veličine na granicama promatranog sustava, a u ovom razmatranju je to temperatura. Matematički se zapisuje kao:

$$T = T_0 \text{ na granici } \Gamma_T \tag{1.15}$$

2.2.1.2. Neumannovi rubni uvjeti

Neumannov rubni uvjet predstavlja vrijednost gradijenta fizikalne veličine na granici sustava, a sa stajališta prijenosa topline može se reći da predstavlja gustoću toplinskog toka na granici. Matematički se zapisuje kao:

$$q_f = \left(-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\right)_f \text{ na granici } \Gamma_{qf} \tag{1.16}$$

2.2.1.3. Newtonovi rubni uvjeti

Ovi rubni uvjeti predstavljaju vrijednost toplinskog toka na granici sustava, a zadan je još jednim načinom prijenosa topline, konvekcijom. Matematički se zapisuje kao:

$$q_c = \alpha(\vartheta_c - \vartheta_\infty) \text{ na granici } \Gamma_{qc} \tag{1.17}$$

Newtonovi rubni uvjeti se još nazivaju i Cauchyjevi rubni uvjeti. Može se vidjeti da nam daju povezanost gradijenta temperature i razlike granične i temperature fluida.
Na jednom rubu može biti zadan samo jedan od ta 3 rubna uvjeta dok je početni uvjet zadan po cijelom području diskretizacije, odnosno po cijeloj domeni.

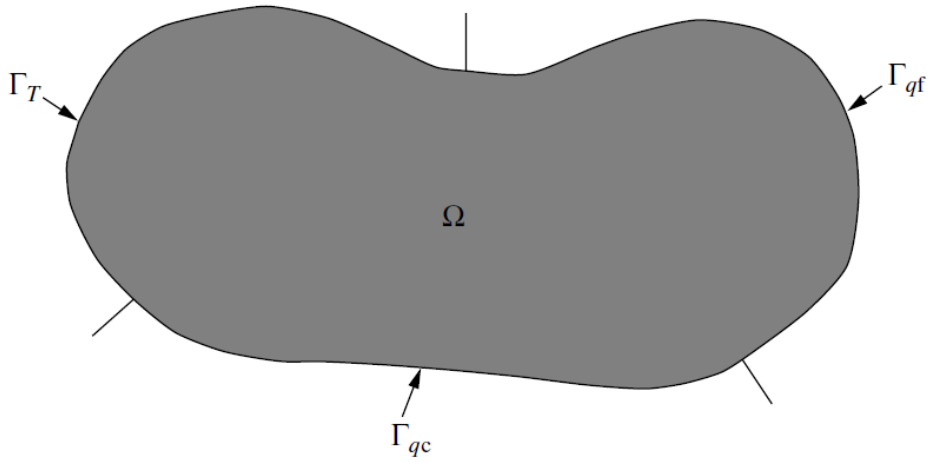
2.2.2. Početni uvjeti [1], [2], [3].

Početni uvjeti predstavljaju distribuciju fizikalne veličine po cijeloj domeni Ω u trenutku početka analize problema. U ovom problemu je to raspodjela temperature i matematički je prikazana kao:

$$T(x,y,z,t=0) = T_o(x,y,z) \tag{1.18}$$

Ovakva vrsta uvjeta dolazi u obzir prilikom razmatranja nestacionarnih problema.

[Slika 2] prikazuje raspodjelu rubnih i početnih uvjeta.



Slika 2. Raspodjela početnih i rubnih uvjeta na jednoj domeni [2]

2.3. Formulacija konačnih elemenata za stacionarni prijenos topline

U ovom poglavlju je opisana formulacija metode za jednodimenzionalni i trodimenzionalni slučaj prijenosa topline. Pošto se radi o stacionarnom prijenosu topline, vremenska promjena temperature u izrazu (1.14) iščezava te ostaje ovisnost temperaturnog polja o prostornim koordinatama. Promjena toplinske vodljivosti u prostoru se može značajno mijenjati, npr. prilikom zavarivanja gdje dolazi do promjene strukture materijala pa će ostati zapisana po komponentama. Općenito gledano, stacionarna distribucija temperature 3D modela se mijenja prema izrazu:

$$\lambda_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \lambda_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \lambda_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + Q_v = 0 \tag{2.1}$$

2.3.1. Jednodimenzionalni stacionarni prijenos topline

2.3.1.1. Egzaktno rješenje

U ovom dijelu se razmatra teorijsko, odnosno egzaktno rješenje koje će poslužiti kao ocjena 1D metode konačnih elemenata. Jednodimenzionalni problemi se svode na promatranje promjene fizikalne veličine u smjeru uzdužne osi promatrane konstrukcije. Ta os je za ovaj slučaj os *„x“*, a toplinska vodljivost je označavana bez indeksa osi zbog dimenzije problema.
Dakle, kreće se od 1D Laplaceove jednadžbe:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + Q_v = 0 \tag{2.2}$$

Ako se zanemari toplinski izvor/ponor, nakon dvostrukog integriranja se dobije linearna distribucija temperature u obliku

$$\vartheta(x) = C_1 x + C_2 \tag{2.3}$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta u linearnu distribuciju:

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_{s1},$$
$$\vartheta(x=l) = \vartheta_{s2},$$

dobiva se izraz distribucije temperature:

$$\vartheta(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\vartheta_1 + \frac{x}{l}\vartheta_2 \tag{2.4}$$

2.3.1.2. Formulacija konačnih elemenata [2], [3]

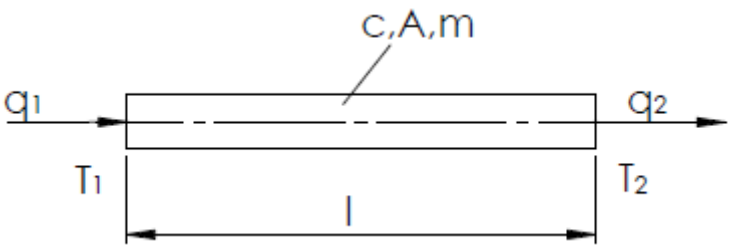
Konačni element će biti opisan Galerkinovom metodom težinskog reziduala. Cilj Galerkinove metode je maksimalno smanjiti reziduale u čvorovima konačnog elementa, a to se postiže integriranjem umnoška težinskih funkcija i funkcije problema po volumenu, a pošto je u pitanju 1D problem, integrira se po duljini. Općenito je Galerkinova metoda formulirana na idući način:

$$\int_V \boldsymbol{WR}\mathrm{d}V = 0 \tag{2.5}$$

ili za 1D slučaj glasi:

$$\int_l \boldsymbol{WR}A(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{2.6}$$

Konačni element je formuliran po uzoru na [Slika 3].



Slika 3. Prikaz 1D konačnog elementa

Općenito se za element prvog reda pretpostavlja linearna interpolacija rješenja pa je i tu takav slučaj, a pošto je pokazano da je egzaktna distribucija temperature linearna, taj odnos će biti uzet kao pretpostavljeno rješenje. Pretpostavljeno rješenje se zapisuje pomoću funkcija oblika koje, prema uzetoj linearnoj raspodjeli, glase:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$$
$$N_2(x) = \frac{x}{l} \tag{2.7}$$

Iz njihovih izraza se može vidjeti svojstvo funkcija oblika da su sve jednake 0 u određenom čvoru osim one koja se odnosi na taj čvor. Pretpostavljena raspodjela zapisana pomoću indeksne notacije glasi:

$$\bar{\vartheta}(x) = N_k(x)\vartheta_k \text{ , } k\text{=1,2} \tag{2.8}$$

Težinske funkcije su funkcije oblika, a reziduual je definiran kao:

$$R = \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right) + Q_v \tag{2.9}$$

pa se sada s definiranim potrebnim funkcijama može krenuti u izvođenje konačnog elementa. Kao što je već rečeno, potrebno je integrirati umnožak težinskih funkcija s rezidualom i izjednačiti s nulom jer želimo maksimalno ili po mogućnosti potpuno otkloniti ostatak u čvorovima:

$$\int_l \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right) + Q_v\right) N_j A \, \mathrm{d}x = 0, \text{ j=1,2} \tag{2.10}$$

Zapis (1.28) je potrebno razdvojiti na članove:

$$\int_l \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right) N_j A \, \mathrm{d}x + \int_l Q_v N_j A \, \mathrm{d}x = 0$$

Zbog lakše formulacije i smanjenja reda derivacije, prvi član s lijeve strane jednakosti će biti podvrgnut parcijalnoj integraciji.

$$\int_l \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right) N_j A \,\mathrm{d}x = \left[A\lambda N_j \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right]_0^l - \int_l \lambda \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} A \,\mathrm{d}x$$

a s uvrštenom pretpostavljenom raspodjelom:

$$\vartheta_k \int_l \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x}\right) N_j A \,\mathrm{d}x = \left[A\lambda N_j \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right]_0^l - \int_l \lambda \vartheta_k \frac{\partial N_k}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} A \,\mathrm{d}x$$

Vraćanjem tog izraza u početni, postiže se osnovni odnos članova koji opisuje konačni element:

$$\int_l \lambda \vartheta_k \frac{\partial N_k}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} A \,\mathrm{d}x = \int_l Q_v N_j A \,\mathrm{d}x + \left[A\lambda N_j \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right]_0^l \tag{2.11}$$

Razvojem gornjeg izraza po indeksnoj notaciji pojavljuju se 4 jednadžbe, a jednadžbe, radi lakšeg zapisa i rješavanja, mogu biti zapisane matrično, no kako bi to moglo biti ostvareno, određeni gornji izrazi moraju biti zapisani također matrično. Uvode se sljedeće matrice:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2]$$

$$\mathbf{D}_\mathrm{k} = [\frac{\partial}{\partial x}]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathrm{k}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = [A\lambda]$$

Nakon implementacije matričnih pojednostavljenja, izraz (2.11) predstavlja matričnu jednadžbu:

$$\int_l A\lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \mathrm{d}x \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \int_l Q_v \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} A \,\mathrm{d}x + \left[A\lambda \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}\right]_0^l \tag{2.12}$$

Ovaj matrični zapis se dade još jednostavnije zapisati uvođenjem matrice koja se naziva matrica krutosti:

$$\mathbf{k}_{\mathrm{T}} = \int_l \mathbf{D}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\,\mathrm{d}x = \int_l A\lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{A\lambda}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Dakle, matrična jednadžba glasi:

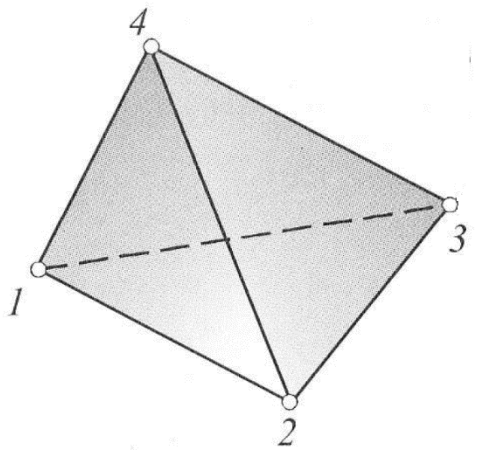
$$\mathbf{k}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{q}_{\boldsymbol{v}} + \mathbf{q}_{\mathrm{b}} \tag{2.14}$$

2.3.2. Trodimenzionalni stacionarni prijenos topline

U ovom dijelu su spomenuti i razrađeni osnovni tetraedarski element i osnovni prizmatični element jer su oni korišteni pri numeričkoj analizi u programskom paketu Abaqus.

2.3.2.1. Osnovni tetraedarski element [1]

Kao što mu ime govori, taj element se sastoji od 4 čvora, vrhova tetraedra. U svakom čvoru je jedan stupanj slobode, a to je temperatura. [Slika 4] prikazuje tetraedarski element s orijentacijom numeracije.



Slika 4. Tetraedarski element [1]

Raspodjela temperature po tetraedarskom elementu je opisana potpunim polinomom 1. stupnja koji glasi:

$$\vartheta(x,y,z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \tag{2.15}$$

$$\vartheta = [1\ x\ y\ z]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha a} \tag{2.16}$$

Uvođenjem temperaturnih rubnih uvjeta rezultira s 4 jednadžbe koje se dadu zapisati s jednom matričnom jednadžbom:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

ili skraćeno zapisano:

$$\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{Ca} \tag{2.17}$$

Kako postupak ne bi obuhvaćao traženje koeficijenata iz matrice **a**, distribucija temperature se zapisuje preko čvornih temperatura i funkcija oblika koje treba pronaći. Također je zgodno za primijetiti da je determinanta matrice krutosti **C,** podijeljena sa 6, jednaka volumenu tetraedra. Temperaturna distribucija, zapisana preko funkcija oblika glasi:

$$\vartheta(x,y,z) = N_1(x,y,z)\vartheta_1 + N_2(x,y,z)\vartheta_2 + N_3(x,y,z)\vartheta_3 + N_4(x,y,z)\vartheta_4 \tag{2.18}$$

$$\vartheta = N_k\vartheta_k = [N_1\ N_2\ N_3\ N_4]\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\boldsymbol{\vartheta} \tag{2.19}$$

A kako je

$$\vartheta = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{a} = \mathbf{N}\boldsymbol{\vartheta}$$

te s uvrštenim izrazom (2.17) i množenjem gornje jednakosti s $\boldsymbol{a}^{-1}$ dobije se matrična jednadžba čija su rješenja funkcije oblika tetraedarskog elementa:

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1} = [N_1\ N_2\ N_3\ N_4] \tag{2.20}$$

Pojedine funkcije oblika su izračunate pomoću računalnog alata MATLAB čiji kod se nalazi u Prilogu rada, no može se primijetiti obrazac izmjene pojedinih članova pa se funkcije oblika mogu skraćeni zapisati:

$$N_i = \frac{1}{6V}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z),\ i = \epsilon[1,4] \tag{2.21}$$

Grčki simboli predstavljaju determinante matrično zapisanih koordinata koje se ciklički zamjenjuju ovisno o indeksu *i*. Primjer koji prikazuje zapis determinanta je uzet za *i* = 1.

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},\ \beta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},\ \gamma_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix},\ \delta_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

U nastavku obrade tetraedarskog i izvođenju jednadžbe konačnog elementa, pojavit će se matrice koje će sada biti definirane. Jedna od tih matrica je matrica kinematskih (diferencijalnih) operatora $\mathbf{D}_k$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

koja pomnožena sa matricom funkcija oblika daje:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D_k N} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix}$$

Izvod jednadžbe konačnog elementa kreće od izraza (1.10), zapisanog indeksnom notacijom radi pojednostavljenja, s uvrštenim stacionarnim uvjetom, dakle:

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q_v = 0 \tag{2.23}$$

Taj izraz se množi s funkcijom oblika, a potom integrira po volumenu, kao što govori Galarkinova metoda:

$$-\int_V \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q_v\right) N_i \, \mathrm{d}V = 0 \tag{2.24}$$

Separacijom članova postiže se oblik koji ne daje približnije rješenje pa je potrebno napraviti neke preinake. Naime, da bi se dobila jednadžba konačnog elementa, jednadžbi se mora pribrojiti i oduzeti član

$$\int_V q_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V \tag{2.25}$$

kako bi se jednadžba nadopunila do:

$$-\int_V \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_j} N_i + q_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}V + \int_V q_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \int_V Q_v N_i \mathrm{d}V \tag{2.26}$$

Može se uočiti poznati izraz za derivaciju produkta u prvom članu s lijeve strane jednakosti te je taj član jednak:

$$\int_V \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_j} N_i + q_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial (q_j N_i)}{\partial x_j} \mathrm{d}V \tag{2.27}$$

a primjenom Gauss-Ostrogradsky teorema o divergenciji, može se zapisati:

$$\int_V \frac{\partial (q_j N_i)}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \int_S (q_j N_i) n_j \mathrm{d}S \tag{2.28}$$

Vraćanjem tog izraza u (2.26), slijedi relacija:

$$\int_V q_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \int_V Q_v N_i \mathrm{d}V + \int_S (q_j N_i) n_j \mathrm{d}S \tag{2.29}$$

Takav oblik je nešto bliži jednadžbi konačnog elementa, no kako da bi se dobila finalna jednadžba, lijeva strana se treba zapisati pomoću Fourierovog stavka s uvrštenim približnim rješenjem distribucije temperature:

$$\int_V q_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \int_V -\lambda \frac{\partial N_k}{\partial x_j} \vartheta_k \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V \tag{2.30}$$

Konačna jednadžba elementa zapisana s indeksnom notacijom glasi:

$$\int_V -\lambda \frac{\partial N_k}{\partial x_j} \vartheta_k \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \int_V Q_v N_i \mathrm{d}V + \int_S (q_j N_i) n_j \mathrm{d}S \tag{2.31}$$

Razvijanjem po indeksnoj notaciji bi uslijedile 4 jednadžbe s 4 nepoznanice (temperature u čvorovima) pa se matrično može zapisati:

$$\int_{\boldsymbol{V}} \mathbf{B^T D B} \mathrm{d}V \, \boldsymbol{\vartheta} = \int_V Q_v \mathbf{N^T} \mathrm{d}V + \int_S (q_j n_j) \mathbf{N^T} \mathrm{d}S \tag{2.32}$$

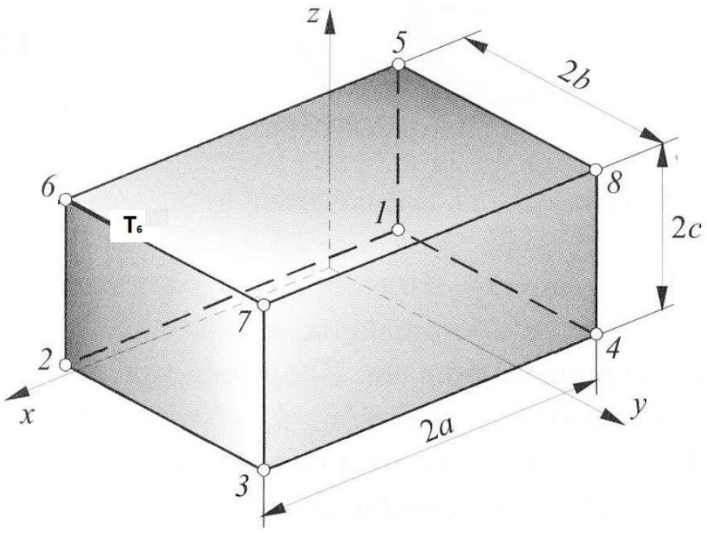
ili se može zapisati već poznatom relacijom:

$$\mathbf{k_T \vartheta} = \mathbf{q}_\mathrm{v} + \mathbf{q}_\mathrm{b} \tag{2.33}$$

U radu s tetraedarskim elementima, poželjno je lokalni koordinatni sustav postaviti u težište tetraedra kako bi se olakšao izračun površinskih i volumnih veličina koje djeluju i opterećuju element.

2.3.2.2. Osnovni prizmatični element [1]

Slijedeći na redu je osnovni prizmatični element koji je prikazan na [Slika 5 Tablica 5].



Slika 5. Osnovni prizmatični element [1]

Kao što je vidljivo, sastoji se od 8 čvorova, a temperaturna distribucija je opisana nepotpunim polinomom 3. stupnja:

$$\vartheta(x,y,z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \tag{2.34}$$

Funkcije oblika se mogu odrediti postupkom opisanim kod tetraedarskog elementa, no zbog većeg broja čvorova, a time i većeg broja funkcija oblika, takav način je kompleksan. Do rješenja se dolazi elegantnije putem Lagrangeovih jednodimenzionalnih interpolacijskih polinoma. Funkcije oblika kao i daljnji izvod prati [Slika 5].
Lokalni koordinatni sustav je postavljen u težište trodimenzionalnog elementa pa Lagrangeov interpolacijski polinom izgleda:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \tag{2.35}$$

Kako je prikazano na slici, postoje po dvije koordinate pa onda prema tome postoje i po 2 interpolacijska polinoma za sva 3 smjera. Ti interpolacijski polinomi glase:

$$l_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right),\ l_2(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{a})$$

$$l_1(y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{b}\right),\ l_2(y) = \frac{1}{2}(1 + \frac{y}{b}) \tag{2.36}$$

$$l_1(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right),\ l_2(z) = \frac{1}{2}(1 + \frac{z}{c})$$

Kreće se od čvora 1 čije su koordinate (-*a*, -*b*, -*c*) i te sve 3 koordinate se smatraju koordinatama pod indeksom 1. Pozitivne koordinate se vode pod indeksom 2 pa se prema tome može složiti tablica prema kojoj će biti izvedene funkcije oblika:

Tablica 1. Prikaz indeksa koordinata po čvorovima

Čvor	Indeks koordinate „*x*“	Indeks koordinate „*y*“	Indeks koordinate “z“
1	1	1	1
2	2	1	1
3	2	2	1
4	1	2	1
5	1	1	2
6	2	1	2
7	2	2	2
8	1	2	2

Prema toj tablici se izvode funkcije oblika po čvorovima na slijedeći način:

$$N_1(x,y,z) = l_1(x)l_1(y)l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

$$N_2(x,y,z) = l_2(x)l_1(y)l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

$$
\begin{aligned}
N_3(x,y,z) &= l_2(x)l_2(y)l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{z}{c}\right) \\
N_4(x,y,z) &= l_1(x)l_2(y)l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{z}{c}\right) \\
N_5(x,y,z) &= l_1(x)l_1(y)l_2(z) = \tfrac{1}{8}\left(1-\tfrac{x}{a}\right)\left(1-\tfrac{y}{b}\right)\left(1+\tfrac{z}{c}\right) \\
N_6(x,y,z) &= l_2(x)l_1(y)l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right) \\
N_7(x,y,z) &= l_2(x)l_2(y)l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right) \\
N_8(x,y,z) &= l_1(x)l_2(y)l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right)
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Tako definirane funkcije oblika tvore matricu funkcija oblika:

$$\mathbf{N} = [N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5\ N_6\ N_7\ N_8]$$

Matrica kinemtskih operatora je identična matrici tetraedarskih elemenata, a matrica **B** se dobiva množenjem matrice kinematskih operatora i matrice funkcija oblika. Jednadžba konačnog elementa za slučaj prijenosa topline se izvodi na isti način kao kod tetraedarskih elemenata i ima isti oblik, no jedino se razlikuje po dimenzijama matrica jer ovaj element ima dvostruko više čvorova od prethodnog.

2.4. Nestacionarni prijenos topline

Opće analitičko rješenje nestacionarnih problema trenutno nije izvedeno, a pošto je nestcionarnost puno češći slučaj u prirodi, moraju se nekako dati opisati i riješiti sa zadovoljavajućim rješenjima. Razvijene su metode vremenske integracije koje se primjenjuju s obzirom na očekivani raspon i ponašanje traženih vrijednosti. U svim tim metodama je vremenska promjena fizikalne veličine aproksimirana metodom konačnih razlika, ali se razlikuju u tome koristi li se razlika unaprijed, unazad, središnja razlika ili neka modificirana razlika.

2.4.1. Metode vremenske integracije

2.4.1.1. Implicitna metoda vremenske integracije [2], [4]

Ta metoda je bazirana na vremenskoj razlici unazad:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t}(t + \Delta t) \approx \frac{\emptyset(t+\Delta t)-\emptyset(t)}{\Delta t} \tag{3.1}$$

U toj metodi je uključena greška 1. reda, a ako se pojave fizikalni problemi s nelinearnim svojstvima materijala, u matričnoj jednadžbi je potrebno proračunavati matrice svojstava za svaku iteraciju.

2.4.1.2.Implicitna Crank-Nicolsonova metoda vremenske integracije [2], [4]

U toj metodi je aproksimacija određena središnjom razlikom na način da se u središtu vremenskog koraka uzimaju uprosječene vrijednosti fizikalne veličine:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx \frac{\emptyset(t+\Delta t)-\emptyset(t)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

U toj metodi se javlja greška 2. reda što znači da se smanjuje s 2. potencijom vremenskog koraka. Obje implicitne metode su bezuvjetno stabilne, dakle neovisno o veličini vremenskog koraka, no mora se uzimati u obzir da s povećanjem vremenskog koraka raste i greška u rješenju.

2.4.1.3. Eksplicitna metoda vremenske integracije [2], [4]

Eksplicitna metoda se bazira na vremenskoj razlici unaprijed:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t}(t) \approx \frac{\emptyset(t+\Delta t)-\emptyset(t)}{\Delta t} \tag{3.3}$$

Za određivanje fizikalne veličine u budućem trenutku, koriste se vrijednosti fizikalne veličine u sadašnjem trenutku. Kroz primjenu na konkretnom primjeru će biti pokazano kako se mogu razvrstati vrijednosti sada i u idućem trenutku. Za razliku od gore navedenih implicitnih metoda, eksplicitna metoda vremenske integracije je stabilna isključivo ako je korak integracije manji od kritičnog.

2.4.2. Opća formulacija metode konačnih elemenata trodimenzionalnog nestacionarnog problema [2], [3]

Kao i u prošlim slučajevima, kreće se od izraza (1.10), a ne od opće diferencijalne jednadžbe temperaturne distribucije kako bi se izbjegao duži put primjene parcijalne integracije. Pretpostavit će se da su funkcije oblika funkcije prostornih koordinata, a čvorne temperature su funkcije vremena pa onda pretpostavljena distribucija temperature poprima oblik:

$$\overline{\vartheta}(x,y,z,t) = N_k(x,y,z)\vartheta_k(t) = \mathbf{N}\boldsymbol{\vartheta} \tag{3.4}$$

Pošto se i ovaj oblik metode konačnih elemenata izvodi pomoću Galerkinove metode, izraz:

$$\rho c\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - Q_v = 0,\ j = x,y,z \tag{3.5}$$

je potrebno pomnožiti s funkcijama oblika, a zatim integrirati po volumenu:

$$\int\left(\rho c\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - Q_v\right)N_j \mathrm{d}V = 0 \tag{3.6}$$

Svi se članovi razvijaju na isti način kao i kod stacionarnih problema, osim prvog člana s lijeve strane jednakosti pa je on razrađen u nastavku, a kreće se od uvrštavanja pretpostavljene distribucije temperature:

$$\int \rho c\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}N_j\ \mathrm{d}V = \int \rho c\frac{\partial\vartheta_k}{\partial t}N_kN_j\ \mathrm{d}V \tag{3.7}$$

što se može i matrično zapisati:

$$\int \rho c\, \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{N}\, dV \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{c}\dot{\boldsymbol{\vartheta}} \tag{3.8}$$

Kao što je već rečeno, ostali članovi izraza (3.6) su raspisani kao i u prethodnim slučajevima pa se taj korak sad može preskočiti, a onda finalna jednadžba konačnog elementa glasi:

$$\mathbf{c}\dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{k}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{q}_{\mathrm{v}} + \mathbf{q}_{\mathrm{b}} \tag{3.9}$$

Bitno je tu naglasiti da su funkcije oblika iste kao i kod stacionarnog slučaja za pojedine elemente, bilo da se radi o 3D ili 1D elementima. Iz gornjeg izraza se može vidjeti da se nestacionarna formulacija od stacionarne razlikuje isključivo po dodatnom članu koji opisuje vremensku promjenu čvornih temperatura. U ovom razmatranju je pitanje vremenske promjene čvornih temperatura riješeno eksplicitnom vremenskom integracijom. Naime, kako eksplicitna vremenska integracija koristi konačnu razliku unaprijed, a fizikalna veličina je temperatura, ta vremenska promjena se može prikazati na slijedeći način:

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial t}(t) \approx \frac{\vartheta_k(t+\Delta t)-\vartheta_k(t)}{\Delta t} \tag{3.10}$$

Radi lakšeg praćenja računa, uvode se oznake za trenutni vremenski trenutak $t=t_n$ i za idući $t + \Delta t = t_{n+1}$, pa se gornja jednadžba onda može preformulirati:

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial t}(t_n) \approx \frac{\vartheta_k(t_{n+1})-\vartheta_k(t_n)}{\Delta t} \tag{3.11}$$

Dakle, ako se s tako postavljenim izrazima krene u matričnu jednadžbu konačnog elementa, dobiva se:

$$\mathbf{c}\left[\frac{\boldsymbol{\vartheta}(t_{n+1})-\boldsymbol{\vartheta}(t_n)}{\Delta t}\right] + \mathbf{k}_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\vartheta}(t_n) = \mathbf{q}_{\mathbf{v}}(t_n) + \mathbf{q}_{\mathbf{b}}(t_n) = \mathbf{q}(t_n) \tag{3.12}$$

Iz tog izraza se može izlučiti matrica čvornih temperatura u idućem trenutku, a izraz glasi:

$$\boldsymbol{\vartheta}(t_{n+1}) = [\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1}\mathbf{k}_{\mathbf{T}}\Delta t]\, \boldsymbol{\vartheta}(t_n) + \boldsymbol{c}^{-1}\mathbf{q}\Delta t \tag{3.13}$$

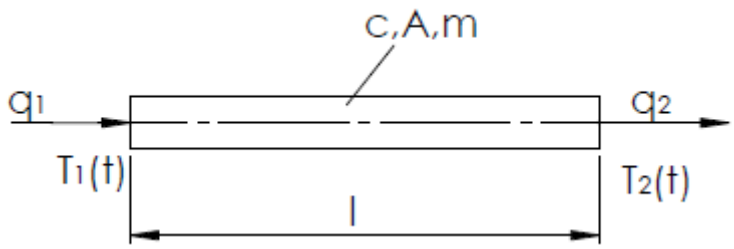
Kako je gore već bilo spomenuto, za eksplicitnu metodu je potrebno poznavati kriterij stabilnosti. Za njegovo određivanje se promatra gornji izraz i pokušavaju se donijeti određeni zaključci. Ako se toplina dovodi, vektor stupac **q** će biti popunjen s pozitivnim vrijednostima, a također je za očekivati da će doći do povećanja temperature. Ako se toplina odvodi, **q** će biti popunjen s negativnim vrijednostima i temperatura će opadati. U oba slučaja će vrijednost zagrade koja množi temperature u trenutku t_n morati biti veća od 0 kako bi prijašnji zaključci bili istiniti. Sada kada je to rečeno, može se zaključiti da je kriterij stabilnosti opisan upravo tom zagradom i glasi:

$$KS = [\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1}\mathbf{k_T}\Delta t] > 0 \tag{3.14}$$

Pošto je matrica krutosti singularna, ne može joj se naći inverz pa se stoga traženju kritičnog vremenskog koraka pristupa na način da se obavi matrično množenje i oduzimanje od jedinične matrice, a onda se kritični korak nađe iz jednog od članova matrice rezultata tih matematičkih operacija.

2.4.3. Opis jednodimenzionalnog konačnog elementa za nestacionarni prijenos topline [2], [3]

[Slika 6] prikazuje izgled jednodimenzionalnog nestacionarnog konačnog elementa s pripadnim rubnim uvjetima.



Slika 6. Jednodimenzionalni konačni element

S izvodom se kreće od opće diferencijalne raspodjele temperature, dakle od izraza (1.14) s uvrštenim jednodimenzionalnim uvjetom, odnosno ne postoje gradijenti u *y* i *z* smjeru.

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) - Q_v = 0 \tag{3.15}$$

Kako nalaže Galerkinova metoda, potrebno je taj izraz pomnožiti s funkcijama oblika, a zatim integrirati po volumenu, a pošto se radi o jednodimenzionalnom elementu, kakav je prikazan na [Slika 7]. Diferencijal volumena se može zapisati kao dV = $A(x)$ dx. Implementacijom tih izraza, dobiva se:

$$\int_l \; A\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} N_j \, \mathrm{d}x - \int_l \; A\lambda_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) N_j \, \mathrm{d}x - \int_l \; Q_v A \, N_j \, \mathrm{d}x = 0 \tag{3.16}$$

Taj izraz je identičan onome u stacionarnom obliku problema s dodatkom prvog člana s lijeve strane jednakosti. Također su funkcije oblika ostale iste, a to znači da je i matrica krutosti nepromijenjena. Tu će biti obrađena jedino matrica toplinskih kapaciteta. Nakon što se uvrsti pretpostavljeno rješenje oblika:

$$\overline{\vartheta}(x,t) = N_k(x)\vartheta_k(t) \tag{3.17}$$

dobivae se izraz za matricu toplinskih kapaciteta. Kako je riječ o jednodimenzionalnom slučaju, izrazi za matrice nisu veliki pa će tu biti izvedeni i zapisani.

$$\mathbf{c} = \int_l \; A\rho c N_k N_j \, \mathrm{d}x = \int_l \; A\rho c \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{c} = \frac{A\rho c l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Sad kad je određena matrica toplinskih kapaciteta, može se primijeniti eksplicitna metoda vremenske integracije u izvedenom obliku koji daje iznos temperatura u idućem vremenskom trenutku:

$$\boldsymbol{\vartheta}(t_{n+1}) = [\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1}\mathbf{k_T}\Delta t] \, \boldsymbol{\vartheta}(t_n) + \boldsymbol{c}^{-1}\mathbf{q}\Delta t \tag{3.19}$$

Zbog lakšeg razumijevanja te matrične jednadžbe, bit će raspisana po članovima:

$$\begin{bmatrix}\vartheta_1(t_{n+1})\\ \vartheta_2(t_{n+1})\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{2}{A\rho cl}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\frac{A\lambda}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Delta t\right)\begin{bmatrix}\vartheta_1(t_n)\\ \vartheta_2(t_n)\end{bmatrix} + \frac{2}{A\rho cl}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{q}\Delta t$$

Kriterij stabilnosti eksplicitne vremenske integracije za ovaj slučaj glasi:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{2}{A\rho cl}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\frac{A\lambda}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Delta t > \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Raspisivanjem se dobe slijedeći uvjeti:

$$\begin{bmatrix}1 - \dfrac{6\lambda\Delta t}{c\rho l^2} & \dfrac{6\lambda\Delta t}{c\rho l^2}\\ \dfrac{6\lambda\Delta t}{c\rho l^2} & 1 - \dfrac{6\lambda\Delta t}{c\rho l^2}\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ako se uzme podatak na mjestu prvog retka i drugog stupca, neće se saznati baš previše toga jer se je za zadovoljenje tog uvjeta potreban pozitivni vremenski korak bilo kojeg iznosa.

$$\frac{6\lambda\Delta t}{c\rho l^2} > 0 \tag{3.21}$$

Zbog toga se uzima podatak prvog reda i prvog stupca iz kojeg se može izvući maksimalno dopušteni vremenski korak:

$$1 - \frac{6\lambda\Delta t}{c\rho l^2} > 0$$

$$\Delta t < \frac{c\rho l^2}{6\lambda} = \Delta t_{\mathrm{kr}} \tag{3.22}$$

2.5. Konvergencija rješenja

Konvergencija rješenja zapravo govori koliko je numeričko rješenje dobro izračunato u odnosu na analitičko ili neko drugo točno rješenje rješenje problema. Pošto numeričke metode daju samo približno rješenje, provjerom uvjeta konvergencije se može ispitati točnost dobivenih približnih rješenja. Neka osnovna pretpostavka je da se usitnjavanjem mreže konačnih elemenata algebarski model približava diferencijalnom jer se smanjenjem dimenzija približava diferencijalnim dimenzijama. Ako je konačni element ispravno formuliran, izračunata rješenja će po apsolutnoj vrijednosti biti manja od točnih rješenja, a usitnjavanjem mreže će konvergirati prema istim. Takva konvergencija se naziva monotonom konvergencijom, a postoji i nemonotona. To je vrsta konvergencije u kojoj nije zadovoljen jedan od 3 uvjeta konvergencije, a to je ispunjen kompatibilnost duž susjednih rubova elemenata.

Najbolja konvergencija je monotona, a da bi ona bila moguća, interpolacijske funkcije moraju ispuniti slijedeća 3 uvjeta:

a) Mogućnost opisivanja pomaka krutog tijela
b) Mogućnost opisivanja polja konstantne deformacije
c) Zadovoljavanje potrebnih uvjeta kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata

2.5.1. Mogućnost opisivanja pomaka krutog tijela [1]

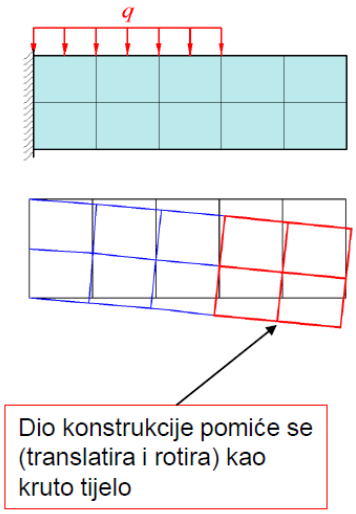
Općenito govoreći, pomak krutog tijela je pomak bez pojave deformacije. Taj uvjet se provjerava pomoću vlastitih vrijednosti matrice krutosti. Naime, broj vlastitih vrijednosti

jednakih 0 mora biti jednak broju stupnjeva slobode formiranog konačnog elementa. Vlastite vrijednosti se izračunavaju prema izrazu:

$$\det(k - \alpha I) = 0 \tag{4.1}$$

Ako je riječ o temperaturi, to je jedan stupanj slobode pa neovisno o dimenzionalnosti problema, mora postojati jedna vlastita vrijednost koja je jednaka nuli, a ako je riječ o pomacima, jednodimenzionalni problemi imaju 2 vlastite vrijednosti(jedan zakret i jedan pomak), dvodimenzionalni elementi imaju takve 3 vlastite vrijednosti (mogućnost zakreta i 2

pomaka), a trodimenzionalni problemi imaju 6 vlastitih vrijednosti (3 zakreta i 3 pomaka). Ukoliko taj uvjet nije zadovoljen, riječ je o osjetljivim elementima na krute pomake, a ta se osjetljivost može smanjiti povećanjem stupnja interpolacijskog polinoma.



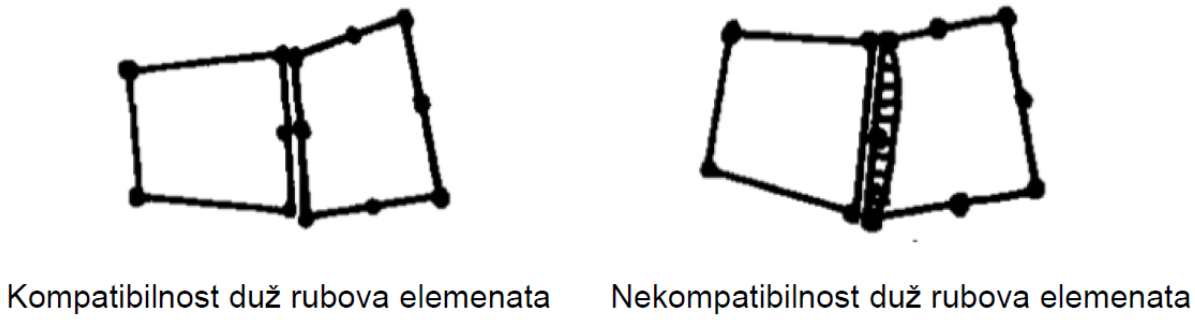
Slika 7. Pomaci krutog tijela[1]

2.5.2. Mogućnost opisivanja polja konstantne deformacije [1]

Ako funkcija pomaka sadržava članove koji omogućuju opisivanje polja konstantne deformacije, ovaj uvjet je ispunjen i bez tog ispunjenog uvjeta se ne može desiti konvergencija. Zapravo se dešava to da se usitnjavanjem mreže deformacije približavaju konstantnim vrijednostima, a s velikim brojem elemenata, može se opisati proizvoljna raspodjela deformacije i još bitnije, može se opisati proizvoljna raspodjela naprezanja.

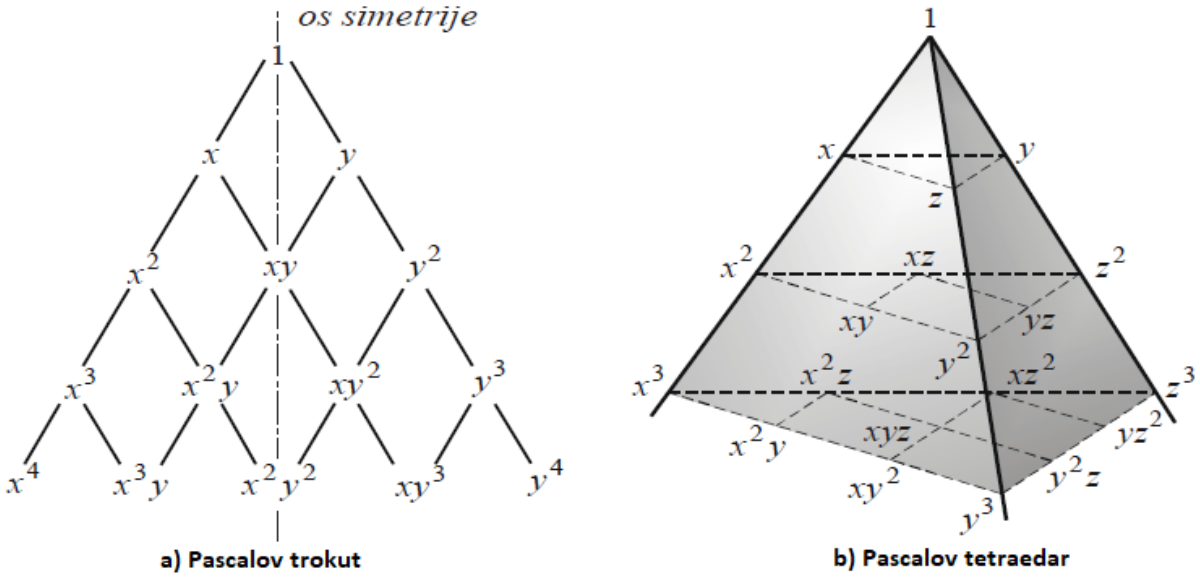
2.5.3. Zadovoljavanje potrebnih uvjeta kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata [1]

Ukoliko je raspodjelu pomaka s potrebnim derivacijama duž rubova elemenata moguće jednoznačno opisati pomoću veličina u pripadnim čvorovima, uvjet kompatibilnosti je zadovoljen. Za jednodimenzionalne štapne elemente, taj je uvjet ispunjen u početku jer se susjedni rubovi spajaju u čvorovima.



Slika 8. Prikaz kompatibilnosti duž rubova pravokutnog elementa [1]

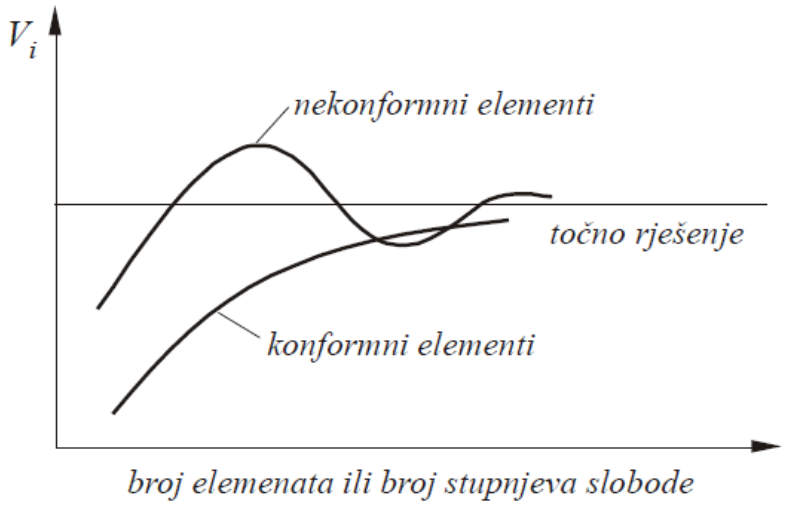
Brzina konvergencije ovisi o stupnju interpolacijske funkcije na način da viši stupanj ubrzava približavanje točnom rješenju. Prilikom formulacije konačnog elementa se gleda da je element prostorno izotropan, dakle stupnjevi slobode su neovisni o orijentaciji koordinatnog sustava te da su interpolacijski polinomi potpuni pa su svi stupnjevi slobode opisani istim interpolacijskim funkcijama. Ukoliko se ne može postići potpunost interpolacijskih polinoma, potrebno je izvesti polinome sa simetričnim članovima koji su ovisno o dimenziji elementa, prikazani na [Slika 9].



Slika 9. a) Pascalov trokut, b) Pascalov tetraedar [1]

Ako je kompatibilnost zadovoljena, riječ je o konformnim elementima i osigurana je monotona konvergencija. Ukoliko to nije slučaj, riječ je o nekonformnim elementima, s kojima se može osigurati oblik nemonotone konvergencije. Za to postoji metoda koja provjerava polje

konstantnih deformacija, a naziva se „Patch test“. Grupa elemenata se u čvorovima opterećuje silama koje uzrokuju konstanto polje naprezanja, kao i deformacija. Ako su izračunate komponente naprezanja konstantne, a pomaci dobro opisani, taj test je zadovoljen i desit će se nemonotona konvergencija. Razlika monotone i nemonotone konvergencije je prikazana na [Slika 10].



Slika 10. Monotona i nemonotona konvergencija ovisno o broju elemenata [2]

2.6. Formiranje globalne matrične jednadžbe konačnih elemenata

Do sada je bila riječ o formiranju konačnih elemenata u lokalnim koordinatnim sustavima, no skup tih konačnih elemenata predstavlja diskretiziranu mrežu neke konstrukcije. Kako bi se došlo do rješenja na globalnoj razini, odnosno na razini konstrukcije, potrebno je napraviti globalni sustav jednadžbi od formiranih konačnih elemenata. Matrice krutosti i matrice toplinskih kapaciteta, kao i matrice opterećenja su do sada bile pisane malim slovima abecede jer je to oznaka za lokalni sustav, dok se na globalnoj razini označavaju velikim tiskanim slovima. To je dogovor kojeg se treba pridržavati radi lakšeg snalaženja. Najlakši način za krenuti je formiranje tablice izjednačavanja koja govori o odnosu globalnih i lokalnih stupnjeva slobode po konačnim elementima. Prema toj tablici se popunjavaju globalne matrice koje su sastavni dio globalne jednadžbe. Svaki element ima određeni broj čvorova koji se dogovorno numeriraju suprotno od smjera kazaljke na satu. Kako su elementi povezani, jedan čvor je

poveznica za više elemenata. Stoga je potrebno svaki element izdvojiti i prikazati redni broj čvora kako bi se mogla sastaviti [Tablica 2]. Prema toj tablici se popunjava globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja. Ovaj dio je krucijalan da se točno obavi da bi rješenja došla točna do neke zadovoljavajuće razine.

Tablica 2. Prikazani odnos globalnih i lokalnih stupnjeva slobode

Globalna raspodjela		T_{1g}	T_{2g}	…	T_{mg}
Lokalna raspodjela	KE 1	1	2	…	
	KE 2		1	…	
	…			…	
	KE n			…	m

Nakon popunjavanja matrica, potrebno je uvrstiti rubne i početne uvjete kako bi se dobio sustav koji prikazuje realni problem. Izbacivanjem dijelova iz globalnih jednadžbi koje su zadane rubnim uvjetima, dobije se skup algebarskih jednadžbi.

2.7. Sekvencijalno spregnuta metoda [2], [3], [5], [6]

Toplinska analiza sama po sebi ne daje potrebnu informaciju potrebnu u dijelu strojarstva koji se bavi analizom deformacija i naprezanja pa je potrebno povezati toplinsku analizu s pojavama deformacija i naprezanja. Iz tog su razvijene sekvencijalno spregnuta metoda i potpuno spregnuta metoda za analizu termo-mehaničkih problema. Potpuno spregnuta metoda se koristi kada postoji jak uzajaman odnos temperature i deformacija, odnosno kada plastične deformacije materijala uzrokuju značajno povišenje temperature. Sekvencijalno spregnuta metoda se koristi u slučajevima kada deformacije nastaju zbog promjene temperature, ali se promjena temperature ne dešava zbog deformacija. Iz tih razloga se može provesti termalna analiza konstrukcije, a potom se rezultati temperatura koriste za mehaničku analizu deformacija i naprezanja. Razlika konačnih elemenata za mehaničku i toplinsku analizu je veći broj stupnjeva slobode kod dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih elemenata. Konačni elementi se formuliraju na jedan od načina koji su spomenuti u uvodu, a u nastavku će biti prikazana varijacijska metoda

2.7.1. Opća formulacija konačnog elementa za mehaničku analizu [1]

Svaka od formulacija se može shvatit kao formulacija preko sila i preko pomaka. U ovom slučaju je interesantna formulacija preko pomaka jer su rješenja upravo pomaci koji lako daju informacije o deformacijama, a time i o naprezanjima. Potencijalna energija u zbroju s radom vanjskih sila u čvorovima i energijom vanjskog opterećenja jednaka je ukupnoj energiji deformiranja, odnosno zakon očuvanja mehaničke energije. Taj princip se koristi pri varijacijskoj formulaciji konačnih elemenata. Matematički zapis glasi:

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}_{\mathbf{v}}\mathrm{d}V - \int_S \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}_{\mathbf{s}}\mathrm{d}S - \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} \tag{5.1}$$

Matrica pomaka se zapisuje kao:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v} \tag{5.2}$$

a preko nje se može zapisati i matrica deformacija:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{\mathbf{k}}\mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v} \tag{5.3}$$

Uvrštavanje te relacije u gornji izraz rezultira slijedećom jednadžbom:

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{v}\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}_{\mathbf{v}}\mathrm{d}V - \int_S \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}_{\mathbf{s}}\mathrm{d}S - \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} \tag{5.4}$$

Prva varijacija funkcionala mora biti jednaka 0 kako bi se potvrdila stabilnost sustava opisanog funkcionalom. Pod stabilnošću se podrazumijeva da funkcional ne mijenja iznos ako se promijeni vrijednost varijacijske varijable. U ovom slučaju je varijacijska varijabla matrica pomaka, a matrica pomaka može izaći van integrala jer su to konstantne vrijednosti za određeni slučaj.

$$\delta\pi = \delta\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\left(\int_V \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}V\,\mathbf{v} - \int_V \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}_{\mathbf{v}}\mathrm{d}V - \int_S \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}_{\mathbf{s}}\mathrm{d}S - \mathbf{F}\right) = 0 \tag{5.5}$$

Trivijalno rješenje gornje varijacije bi bilo kada bi varijacija pomaka bila jednaka 0, a trivijalna rješenja ne govore ono što se traži. Stoga će izraz u zagradi biti izjednačen s 0. Izraz u zagradi predstavlja prepoznatljiv izraz koji opisuje konačni element i to na ovaj način:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B^T D B} \mathrm{d}V \tag{5.6}$$

$$\mathbf{F_t} = \int_V \mathbf{B^T D \varepsilon_t} \mathrm{d}V \tag{5.7}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_v} + \mathbf{q_s} = \int_V \mathbf{N^T q_v} \mathrm{d}V + \int_S \mathbf{N^T q_s} \mathrm{d}S \tag{5.8}$$

Pa se kraće može zapisati:

$$\mathbf{kv} = \mathbf{F_t} + \mathbf{q} + \mathbf{F} \tag{5.8}$$

Kako je riječ o termo-mehaničkoj analizi, u obzir dolaze isključivo toplinska opterećenja, $\mathbf{F_t}$. Toplinske deformacije su proporcionalne promjeni temperature, a matematički su povezane preko koeficijenta toplinske rastzljivosti α:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{tx} \\ \varepsilon_{ty} \\ \varepsilon_{tz} \\ (\gamma_{xy})_t \\ (\gamma_{yz})_t \\ (\gamma_{zx})_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \Delta\vartheta \\ \alpha \Delta\vartheta \\ \alpha \Delta\vartheta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Iz gornje matrice je vidljivo kako toplinsko opterećenje ne uzrokuje kutne deformacije, a time ni smična naprezanja. Dakle, termo-mehanička analiza je omogućena jer iz termalne analize proizlaze vrijednosti temperatura, a iz mehaničke analize toplinske deformacije. Naprezanja proizlaze iz Hookeovog zakona:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{uk} - \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}) \tag{5.10}$$

Ako su deformacije uzrokovane isključivo toplinskim opterećenjem, naprezanja neće postojati, a to se i vidi iz gornje relacije.

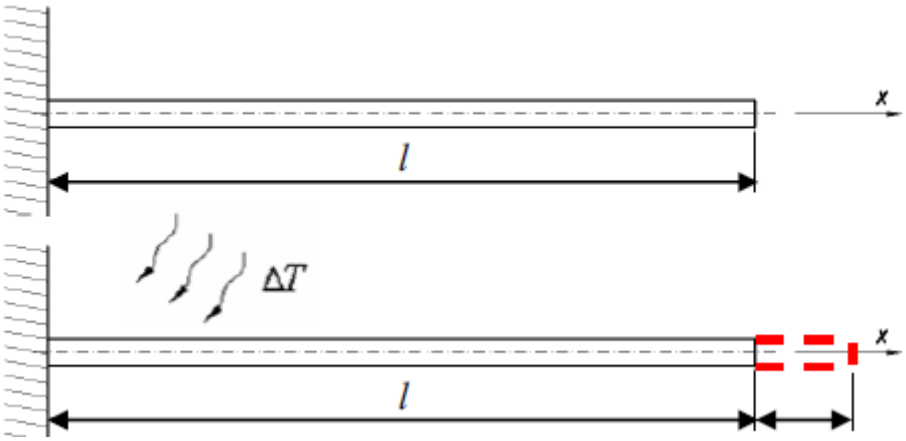
2.7.2. Jednodimenzionalni konačni element [1]

Jednodimenzionalni konačni element je prikazan na [Slika 3], a pošto se radi o mehaničkoj analizi, stupnjevi slobode su pomaci o smjeru osi štapa umjesto temperatura. Pretpostavlja se linearna raspodjela pomaka pa su funkcije oblika iste kao i kod toplinske analize. Jednadžba konačnog elementa glasi:

$$\int_l \mathbf{B^T D B} A(x)\mathrm{d}x\,\mathbf{v} - \int_l A(x)\boldsymbol{B^T}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}\mathrm{d}x = 0 \tag{5.11}$$

$$\int_l A(x)E\begin{bmatrix}-\frac{1}{l}\\ \frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}\mathrm{d}x\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \int_l A(x)E\begin{bmatrix}-\frac{1}{l}\\ \frac{1}{l}\end{bmatrix}[\alpha\Delta\vartheta]\mathrm{d}x \tag{5.12}$$

Sustav algebarskih jednadžbi je dalje lako riješiti, a rezultat su pomaci iz kojih se može doći do naprezanja ako postoje. Naime, na [Slika 11] je prikazan slučaj kada su naprezanja jednaka 0, odnosno kada se štap može nesmetano širiti.



Slika 11. Slučaj toplinskog opterećenja bez pojave naprezanja [2]

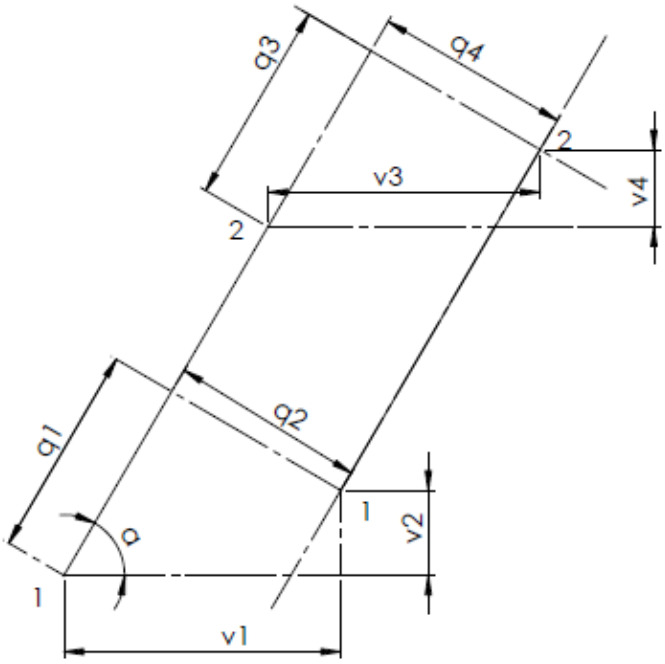
Crveni dio predstavlja produljenje uslijed djelovanja topline, a jednako je $\Delta l = \alpha \Delta \vartheta l$. Kako je ukupna deformacija jednaka toplinskoj deformaciji, jer ne postoji vanjsko opterećenje u vidu sila, pozivajući se na izraz (5.10) vidljivo je kako su deformacije jednake 0, dakle:

$$\sigma = E\varepsilon = E(\varepsilon_{uk} - \varepsilon_t) = 0 \tag{5.13}$$

Ukoliko bi se štap ukliještio s oba kraja i zatim bio podvrgnut toplinskom opterećenju, ukupna deformacija bila bi jednaka 0, a onda bi postojale deformacije uslijed djelovanja reakcije u uklještenju, dakle:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{uk} = \varepsilon + \varepsilon_t = 0, \\ \varepsilon = -\varepsilon_t, \\ \sigma = -E\alpha\Delta\vartheta \end{gathered} \tag{5.14}$$

No takav primjer nije jedini mogući, dapače, češće se javljaju problemi u obliku štapnih konstrukcija, odnosno više štapova povezanih zglobnom vezom. Takve probleme je jednostavnije riješiti u jednodimenzionalnoj sferi što će biti prezentirano u nastavku gdje će biti opisan postupak lokalne analize (lokalni koordinatni sustav) i konverzija u globalni sustav, u kojem se dolazi do potrebnih rješenja. [Slika 12] predstavlja opći položaj štapnog konačnog elementa u prostoru sa prikazanim stupnjevima slobode u lokalnom i globalnom koordinatnom sustavu.



Slika 12. Opći položaj štapa u prostoru

Stupnjevi slobode označeni sa q su lokalni, dok su globalni stupnjevi slobode označeni s v. Analiza konačnog elementa kreće od lokalne razine pa je za dobivanje zadovoljavajućeg rješenja potrebno pronaći odnos koji lokalne veličine pretvara u globalne. Matematička povezanost je određena slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned} q_1 &= v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha \\ q_2 &= v_1\sin\alpha - v_2\cos\alpha \\ \\ q_3 &= v_3\cos\alpha + v_4\sin\alpha \\ q_4 &= v_3\sin\alpha - v_4\cos\alpha \end{aligned} \tag{5.15}$$

što se može matrično zapisati kao:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Matrica ispunjena trigonometrijskim operatorima se naziva matrica transformacije i obično se označava s **T** pa s tim gornji zapis može biti kraće definiran kao:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{v} \tag{5.17}$$

Upravo taj odnos definira poveznicu globalnih i lokalnih stupnjeva slobode i bitan je za formiranje globalnih matrica krutosti pojedinačnih elemenata i na kraju jedne globalne matrične jednadžbe. Matrica krutosti jednog elementa (izraz (5.6)) se također pretvara na sličan način, preko invarijantnosti energije deformiranja:

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}_{\mathbf{g}}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \tag{5.18}$$

a nakon uvrštavanja izraza transformacije, globalna matrica krutosti je definirana kao:

$$\mathbf{k}_{\mathbf{g}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}\mathbf{T} \tag{5.18}$$

i kao tako definirana, nakon matričnog množenja poprima oblik:

$$\mathbf{k}_{\mathbf{g}} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha \\ \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha \\ -\cos\alpha\,\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Ako neko opterećenje djeluje u nekom čvoru konačnog elementa činjenica da je rad invarijantan daje relaciju koja povezuje lokalni vektor opterećenja u čvorovima sa globalnim:

$$\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} = \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}_{\mathbf{g}}$$

odnosno, nakon uvrštavanja poveznice:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{g}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} \tag{5.20}$$

Ukoliko se javi i toplinsko opterećenje, što će biti slučaj u primjerima, prvo se sastavi lokalni vektor opterećenja pa se potom pretvori u globalni.

2.7.3. Trodimenzionalni konačni elementi [1]

I ovdje će biti upotrijebljeni elementi u obliku osnovnog tetraedra i šesterostrane prizme. Od toplinskih elemenata se razlikuju po tome što u svakom čvoru imaju 3 stupnja slobode. Funkcije oblika su identične onima u toplinskoj analizi, ali zbog većeg broja stupnjeva slobode, u matrici funkcija oblika, te funkcije su drugačije preraspodijeljene. Matrica pomaka je izražena kao:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = [u_i \; v_i \; w_i], \;\; i = \epsilon[1, n] \tag{5.21}$$

2.7.3.1. Osnovni tetraedarski element

Raspodjela pomaka u sva 3 smjera je opisana potpunim polinomima prvog stupnja:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\ v(x,y,z) &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \\ w(x,y,z) &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \end{aligned} \tag{5.22}$$

Pojedinačne funkcije oblika se računaju prema izrazu (2.37), a matrično se zapisuju kao:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti jednaka je:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}V = \int_V \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathrm{d}V = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}V \tag{5.23}$$

Gornji izraz je bilo moguće zapisati jer su podintegralne matrice za tetraedar konstantne, a volumen se izračunava iz izraza determinante matrice krutosti **C** (objašnjeno u odjeljku 2.3.2.1).

Matrica **S** povezuje fizikalna svojstva materijala i matricu derivacija funkcija oblika, a kada bi se raspisala, glasila bi:

$$\mathbf{S} = [S_1\ S_2\ S_3\ S_4] = [S_i],\ \ i = 1,2,3,4 \tag{5.24}$$

$$S_i = \frac{E}{6(1+\nu)(1-2\nu)V}\begin{bmatrix} \beta_i(1-\nu) & \gamma_i\nu & \delta_i\nu \\ \beta_i\nu & \gamma_i(1-\nu) & \delta_i\nu \\ \beta_i\nu & \gamma_i\nu & \delta_i(1-\nu) \\ \frac{\gamma_i}{2}(1-2\nu) & \frac{\beta_i}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & \frac{\delta_i}{2}(1-2\nu) & \frac{\gamma_i}{2}(1-2\nu) \\ \frac{\delta_i}{2}(1-2\nu) & 0 & \frac{\beta_i}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

2.7.3.2. Osnovni šesterostrani prizmatični element [1]

Raspodjela pomaka je opisana nepotpunim polinomom trećeg stupnja:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \\ v(x,y,z) &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}xy + a_{14}yz + a_{15}zx + a_{16}xyz \\ w(x,y,z) &= a_{17} + a_{18}x + a_{19}y + a_{20}z + a_{21}xy + a_{22}yz + a_{23}zx + a_{24}xyz \end{aligned} \tag{5.26}$$

Funkcije oblika su zapisane pomoću Lagrangeovih interpolacijskih polinoma, a matrično su zapisane:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

a matrica krutosti se određuje iz izraza:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B^T D B} \mathrm{d}V = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathbf{B^T D B} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{5.27}$$

Matrična jednadžba koja opisuje toplinski opterećen konačni element glasi:

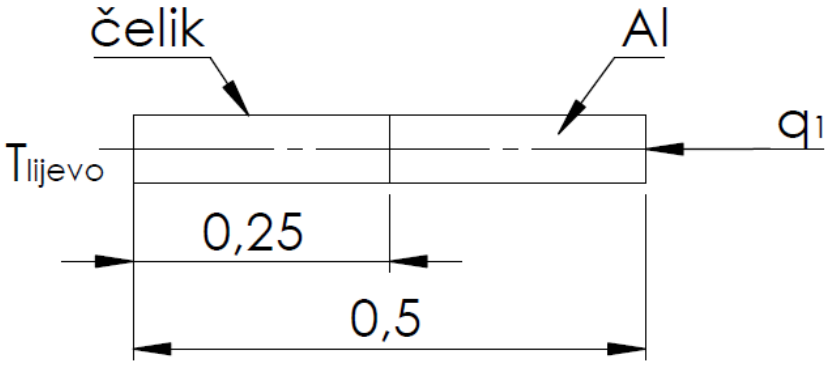
$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\mathbf{B^T}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ . \\ . \\ . \\ v_{24} \end{bmatrix} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\mathbf{B^T}\mathbf{D}\begin{bmatrix} \alpha\Delta\vartheta \\ \alpha\Delta\vartheta \\ \alpha\Delta\vartheta \end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{5.28}$$

3. PRIMJENA JEDNADŽBI NA MATEMATIČKIM MODELIMA

U ovom dijelu se provjerava točnost dosadašnjih izvedenih izraza koji zajedno čine općeniti model. Za provjeru će poslužiti računalni paket Abaqus čija rješenja će poslužiti za ručno izračunata rješenja. Ručni postupak će biti opisan za prve, jednostavne primjere. Kako bi se uštedjelo na vremenu, matrične jednadžbe će biti izračunate u MATLAB-u, a kod je prikazan u Prilogu.

3.1. Primjer 1 [2], [7], [8]

Analiza stacionarnog temperaturnog polja kompozitnog materijala sačinjenog od čelika i aluminija je provedena u okviru prvog primjera. Štap je izoliran tako da se toplina izmjenjuje isključivo uzdužno. Poznate su vrijednosti koeficijenta toplinskog provođenja u iznosu 60 W/(mK) (čelik) i 200 W/(mK) (aluminij), a toplinski tok, koji djeluje u desnom rubu, iznosi 6 kW/m^2. Analizu je potrebno provesti uz 2, 4 i 8 konačnih elemenata. Poznata je rubna temperatura lijevog ruba koja iznosi 30 ^{o}C. Ostale potrebne informacije su prikazane na donjoj slici.



Slika 13. Primjer 1

Ručno numeričko rješavanje za 2 konačna elementa:

Oba su elementa istih dimenzija i postavljaju se lokalne jednadžbe toplinskih matrica krutosti:

$$k_{T,\check{c}} = \frac{\lambda_{\check{c}} A}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{60 \cdot 1{,}96 * 10^{-3}}{0{,}25}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}47 & -0{,}47 \\ -0{,}47 & 0{,}47 \end{bmatrix}.$$

$$k_{T,\,\mathrm{Al}} = \frac{\lambda_{Al} A}{\mathrm{l}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{200 \cdot 1{,}96 * 10^{-3}}{0{,}25} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}568 & -1{,}568 \\ -1{,}568 & 1{,}568 \end{bmatrix}$$

Idući korak je izrada tablice koja pokazuje odnos lokalnih i globalnih stupnjeva slobode:

Tablica 3. Raspored globalnih i lokalnih stupnjeva slobode

Globalni stupnjevi slobode		T1	T2	T3
Lokalni stupnjevi slobode	KE 1	1	2	
	KE 2		1	2

Prema toj tablici se slaže globalna matrica krutosti koja izgleda ovako:

$$\mathbf{K_{t,g}} = \begin{bmatrix} 0{,}47 & -0{,}47 & 0 \\ 0{,}47 & 2{,}038 & -1{,}568 \\ 0 & -1{,}568 & 1{,}568 \end{bmatrix}$$

Globalno gledano, u vektor opterećenja ulaze gustoće toplinskih tokova koje djeluju u rubovima i zapisuje se na idući način:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 A \\ 0 \\ q_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 A \\ 0 \\ 11{,}76 \end{bmatrix}$$

Sad su postavljene sve matrice za slaganje globalne jednadžbe konačnih elemenata, a glasi:

$$\begin{bmatrix} 0{,}47 & -0{,}47 & 0 \\ -0{,}47 & 2{,}038 & -1{,}568 \\ 0 & -1{,}568 & 1{,}568 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 A \\ 0 \\ 11{,}76 \end{bmatrix}$$

Pošto je matrica toplinske krutosti simetrična, ne postoji njezin inverz pa se taj sustav rješava Gauss-Jordan metodom eliminacije, a rješenja koja proizlaze glase:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 55{,}02 \\ 62{,}52 \end{bmatrix}$$

a toplinski tok koji izlazi iz desnog ruba iznosi:

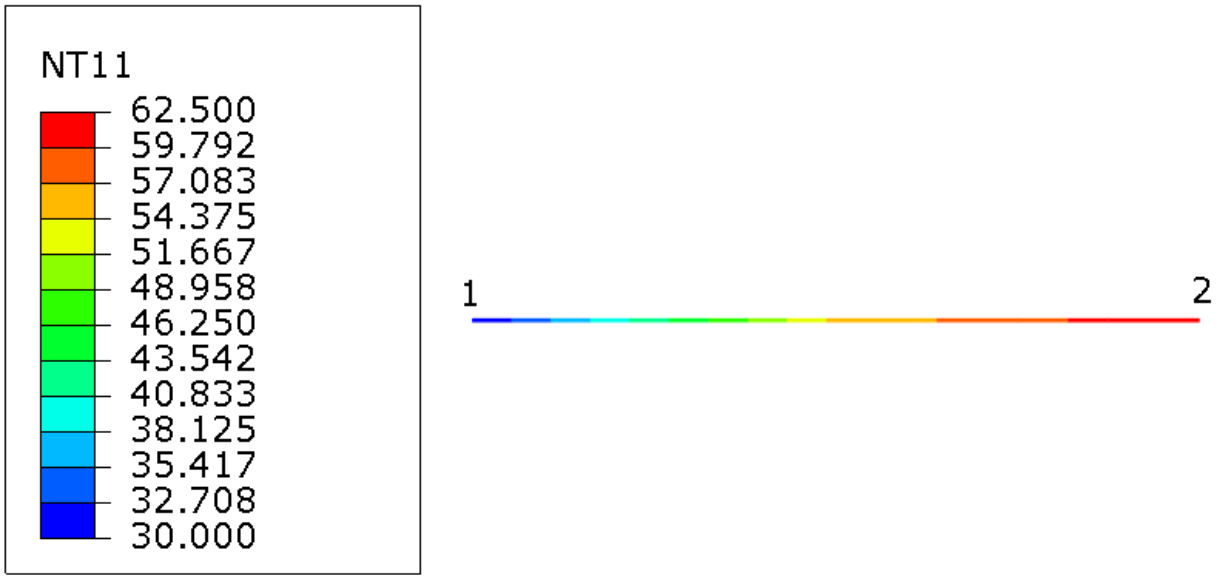
$$q_1 = \frac{0{,}47(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{A} = -5999{,}96 \frac{W}{m^2}$$

što apsolutno zadovoljava uvjet stacionarnosti, a predznak je negativan zbog smjera izlaska toka koji je suprotan smjeru osi *x*. Ovo je bio primjer ručnog rješavanja, a u nastavku će biti tablično prikazane i uspoređene vrijednosti koje su dobivene izradom u Abaqus-u. [Tablica 4] prikazuje usporedbu temperature u kontaktnom dijelu 2 materijala i temperature desnog ruba ovisno o broju elemenata.

Tablica 4. Prikaz vrijednosti ovisno o broju elemenata

Broj elemenata	Kontaktna temperatura [°C]	Temperatura desnog ruba [°C]
2	55	62,5
4	55	62,5
8	55	62,5
Analitičko rješenje	55	62,5

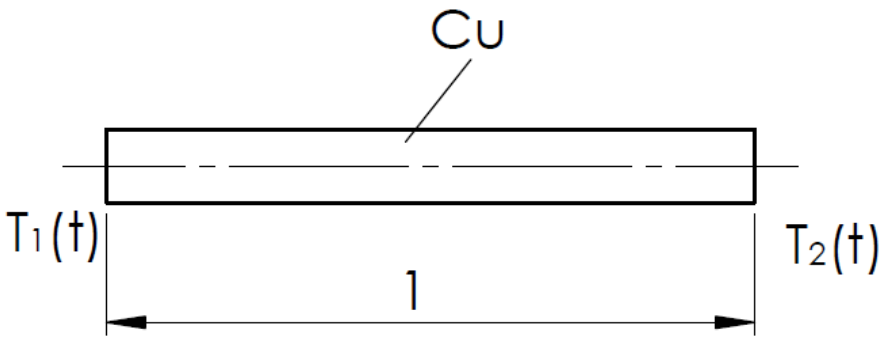
Na ovo primjeru je jasno vidljivo kako se podudaraju rješenja analitički i numerički, stoga prikaz konvergencije nije potrebno posebno isticati. [Slika 14] prikazuje temperaturno polje po numeričkom štapnom modelu.



Slika 14. Temperaturno polje

3.2. Primjer 2 [2], [7], [8]

U okviru drugog primjera provedena je analiza tranzijentnog temperaturnog polja do točke stacionarnosti jednostavnog štapnog elementa izrađenog od bakra (389 W/(mK)). Kao početni temperaturni uvjet uzima se 25 ^{o}C što će biti i temperatura na desnom rubu štapa. U nekom trenutku, trenutno dolazi do povećanja temperature lijevog ruba na 90 ^{o}C. Analizirat će se raspodjela temperature do stacionarnog stanja u nekoliko koraka. Gustoća materijala iznosi 8960 kg/m^3, a specifična toplina je 385 J/(kgK).



Slika 15. Primjer 2

Ručno rješavanje je prikazano za 2 elementa:

Kreće se od formiranja matrica toplinskog kapaciteta i toplinske matrice krutosti. Pošto su oba elementa ista, imat će iste pripadne matrice koje glase:

$$\mathbf{c} = \frac{A\rho cl}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1{,}96 * 10^{-4} * 8960 * \frac{385}{6} * 0{,}5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112{,}687 & 56{,}343 \\ 56{,}343 & 112{,}687 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k_t} = \frac{A\lambda}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1{,}96 * 10^{-4} * \frac{389}{0{,}5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1525 & -0{,}1525 \\ -0{,}1525 & 0{,}1525 \end{bmatrix}$$

Pošto je ista raspodjela globalnih i lokalnih stupnjeva slobode, globalne se matrice mogu složiti sukladno [Tablica 3] iz prošlog primjera.

$$\mathbf{C_g} = \begin{bmatrix} 112{,}687 & 56{,}343 & 0 \\ 56{,}343 & 225{,}374 & 56{,}343 \\ 0 & 56{,}343 & 112{,}687 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_{t,g}} = \begin{bmatrix} 0{,}1525 & -0{,}1525 & 0 \\ -0{,}1525 & 0{,}305 & -0{,}1525 \\ 0 & -0{,}1525 & 0{,}1525 \end{bmatrix}$$

Kritični iznos vremenskog inkrementa iznosi:

$$\Delta t_{kr} = \frac{c\rho l^2}{6\lambda} = 369{,}5\ s$$

Pa je odabrani vremenski inkrement:

$$\Delta t = 10\ s$$

Pomoću tih izraza se može složiti globalna jednadžba koja nakon uvrštavanja rubnih i početnih uvjeta, glasi:

$$\begin{bmatrix} 112{,}687 & 56{,}343 & 0 \\ 56{,}343 & 225{,}374 & 56{,}343 \\ 0 & 56{,}343 & 112{,}687 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1525 & -0{,}1525 & 0 \\ -0{,}1525 & 0{,}305 & -0{,}1525 \\ 0 & -0{,}1525 & 0{,}1525 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 90 \\ \vartheta_2 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 A \\ 0 \\ q_3 A \end{bmatrix}$$

Ako je znano da se koristi eksplicitna metoda vremenske integracije, onda vrijedi:

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t}(t) \approx \frac{\vartheta_2(t+\Delta t)-\vartheta_2(t)}{\Delta t} = \frac{{\vartheta_2}^{n+1}-{\vartheta_2}^{n}}{\Delta t}$$

Primjenjujući taj izraz, gornja se matrična jednadžba za drugu čvornu temperaturu može zapisati u obliku:

$$225{,}374\frac{{\vartheta_2}^{n+1}-{\vartheta_2}^{n}}{\Delta t}+0{,}305{\vartheta_2}^{n}=17{,}5375$$

Odnosno, iteracijski oblik:

$${\vartheta_2}^{n+1}=0{,}9865{\vartheta_2}^{n}+0{,}7782$$

Uvrštavanjem u kalkulator, postignuta stacionarnost temperature iznosi $\vartheta_2 = 57{,}64^{o}\mathrm{C}$. Gustoće toplinskih tokova se mogu izračunati iz matričnih jednadžbi za svaki vremenski inkrement pomoću izraza:

$$q_1(n) = 28746{,}43{\vartheta_2}^{n+1} - 29524{,}49{\vartheta_2}^{n} + 70025{,}51$$
$$q_3(n) = 28746{,}43{\vartheta_2}^{n+1} - 29524{,}49{\vartheta_2}^{n} + 19451{,}53$$

Kako bi se olakšao izračun, u izraze za toplinske tokove, uvrštava se iteracijski izraz za vrijednost temperature u idućem vremenskom koraku pa gustoće toplinskih tokova glase:

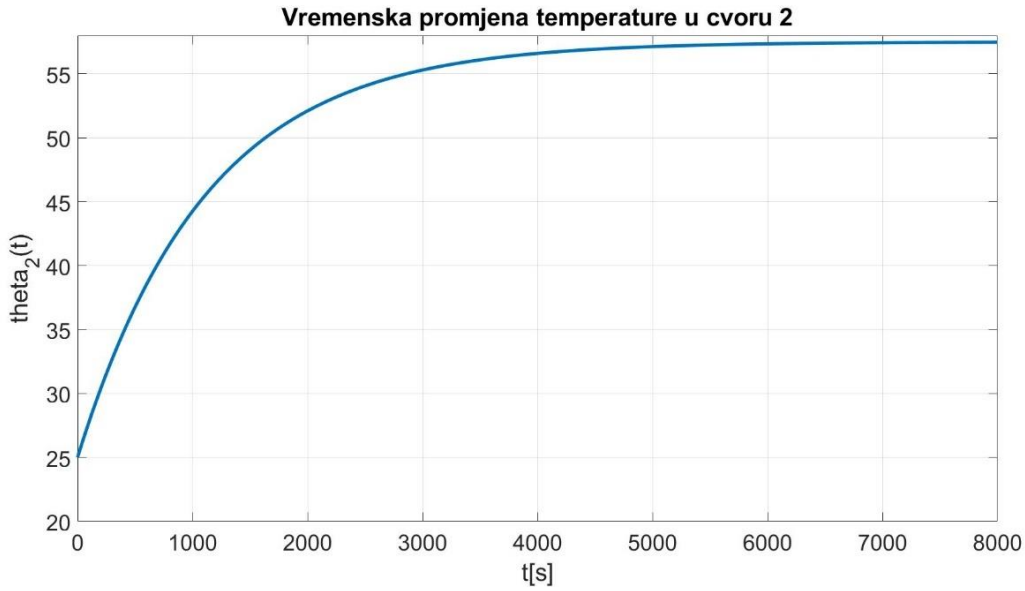
$$q_1(n) = 92387{,}78 - 166{,}08{\vartheta_2}^{n}$$
$$q_3(n) = 41817{,}78 - 166{,}08{\vartheta_2}^{n}$$

Uvrštavanjem stacionarnog rezultata, $\vartheta_2 = 57{,}64^{o}C$,iznosi gustoća toplinskih tokova su:

$$q_1 = 25174{,}93\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\check{}$$
$$q_3 = -25395{,}07\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\check{}$$

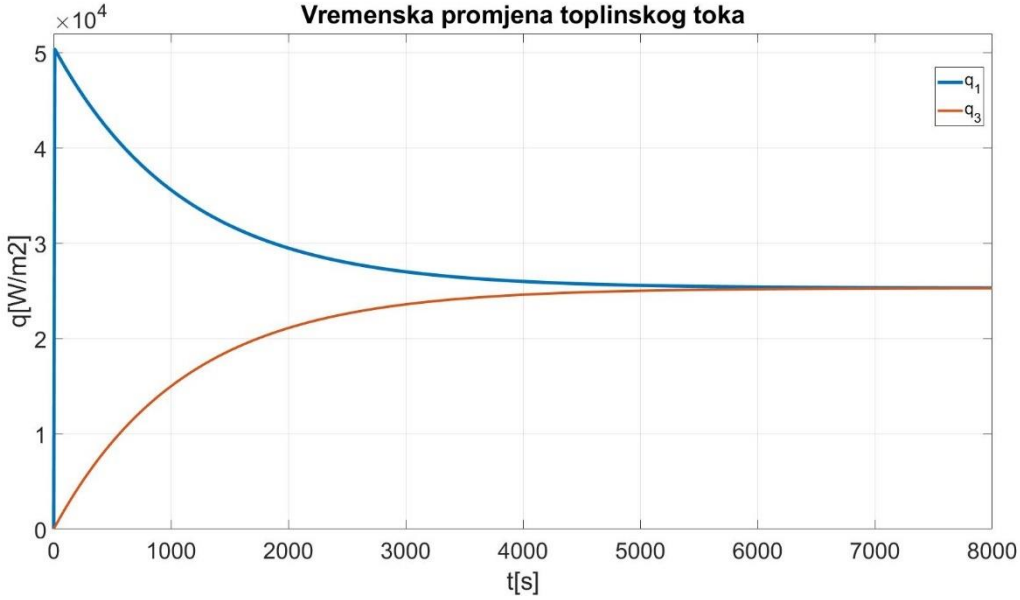
Iz rezultata se vidi mala razlika ulazne i izlazne gustoće toplinskih tokova pa se ta rješenja mogu uzeti kao točna za stacionarno stanje. Predznak izlaznog tok je negativan jer izlazi iz sustava.

Računalna analiza također kreće od 2 konačna elementa. Vrijednost vremenskog inkrementa će ostati ista kako bi se moglo usporediti s ručnim računom. [Slika 16] predstavlja vremensku promjenu temperature drugog čvora do stacionarne vrijednosti.



Slika 16. Vremenska promjena temperature srednjeg čvora

Iduća slika predstavlja vremensku promjenu koncentriranog toplinskog toka q [W/m^2]



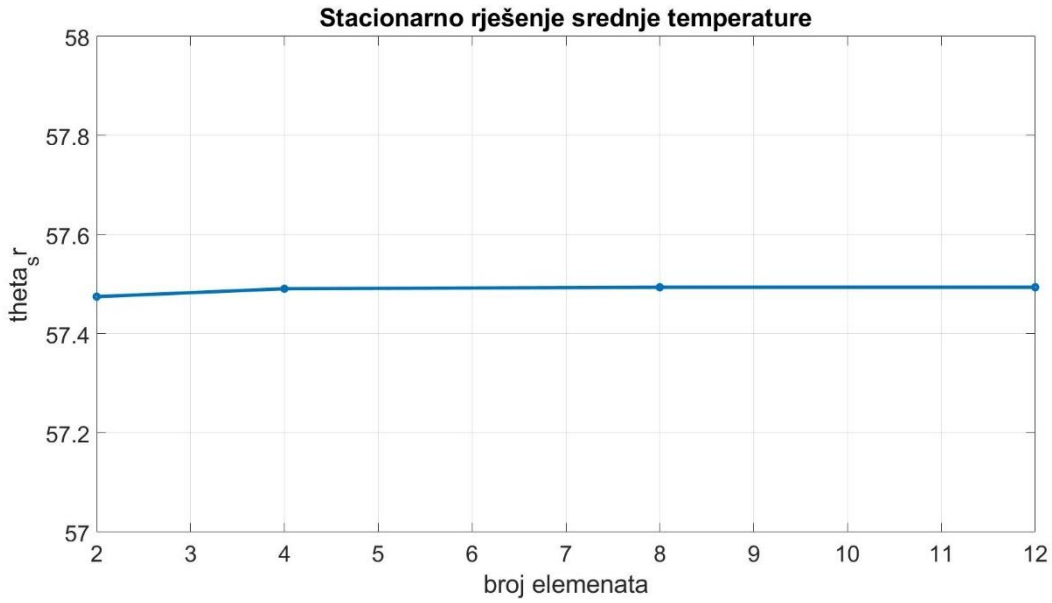
Slika 17. Vremenska promjena toplinskog toka za slučaj 2 konačna elementa

Idući stacionarni rezultati temperature srednjeg čvora su dobiveni za isti vremenski inkrement, ali za različiti broj konačnih elemenata i prikazani su tablično, a vrijeme iteracije je 8000 s.

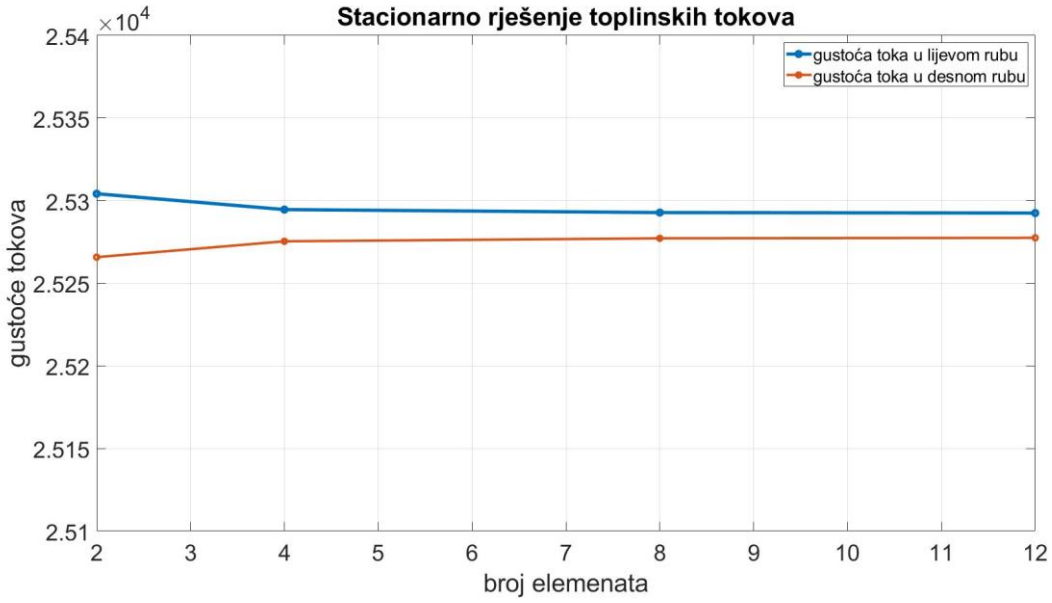
Tablica 5. Vrijednosti stacionarne temperature srednjeg čvora i toplinskih tokova na rubovima ovisno o broju elemenata

Broj elemenata	Temperatura srednjeg čvora [°C]	Gustoća toplinskog toka na lijevom rubu [W/m^2]	Gustoća toplinskog toka na desnom rubu [W/m^2]
2	57,475	25304,2	25265,8
4	57,491	25294,6	25275,4
8	57,494	25292,8	25277,2
12	57,494	25292,5	25277,5

Kao što je i očekivano, s većim brojem elemenata se postiže bolja konvergencija, no rješenja se razlikuju u drugoj decimali što je prihvatljivo. Grafički prikaz konvergencije je prikazan na slici ispod. [Slika 18] prikazuje temperaturnu konvergenciju ovisno o broju elemenata, a [Slika 19] prikazuje konvergenciju gustoća toplinskih tokova po rubovima ovisno o broju elemenata.



Slika 18. Konvergencija rješenja za navedene uvjete



Slika 19. Konvergencija rješenja za navedene uvjete

Pošto se radi o eksplicitnoj metodi vremenske integracije, iduća analiza će pokazati kako se rješenje stacionarne vrijednosti temperature u središtu štapa ponaša ovisno o veličini vremenskog inkrementa. Analiza je sprovedena na modelu od 8 konačnih elemenata, a rezultati su prikazani u [Tablica 6].

Tablica 6. Prikaz stacionarnog rješenja temperature u središtu ovisno o veličini inkrementa

Δt	ϑ_{sr} [°C]
10	57,494
100	57,4903
300	57,481
369	57,477
400	57,475
1000	57,438

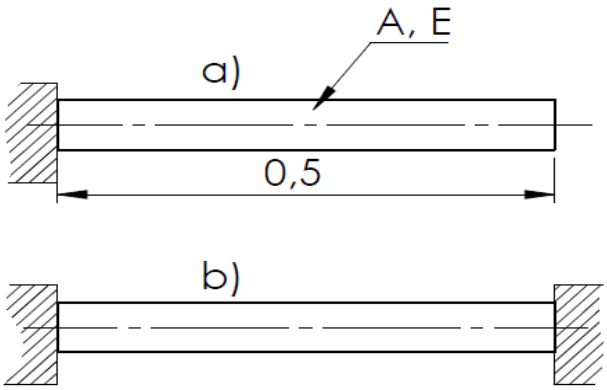
Iz postignutih rezultata se vidi da je s povećanjem vremenskog inkrementa došlo do smanjenja vrijednosti temperature, no nije došlo do divergencije. Razlog tome je što je u Abaqus-u osigurana vrijednost vremenskog inkrementa s minimalnom i maksimalnom vrijednošću te maksimalnim brojem inkrementa. Ako se za veće vrijednosti inkrementa postave minimalne i maksimalne vrijednosti jednake željenom inkrementu, proračun će biti prekinut.

3.3. Primjer 3 [7], [8]

Zadani štap sa [Slika 20] izrađen od čelika hladi se za 20 °C. Ako je štaap s jedne strane uklješten, potrebno je analizirati toplinske deformacije i naprezanja za slučaj da je:

a) drugi rub slobodan (Slika 20a)
b) drugi rub uklješten (Slika 20b).

Analiza se sprovodi s više diskretizacija u računalnom alatu Abaqus, a ručni proračun će biti prikazan za slučaj jednog konačnog elementa.



Slika 20. Primjer 3

Ručno rješavanje:

a) Slobodan drugi rub (Slika 20a)

Kako je štap izrađen od čelika, poznata su svojstva elastičnosti i toplinskog stezanja u iznosima od: E=210 GPa i α=8,5*10^{-6} K^{-1}. Promjena temperature je $\Delta\vartheta$=-20 ^{o}C pa toplinske deformacije iznose: $\varepsilon_t = \alpha\ \Delta\vartheta$ = -0,17 mm/mm. Matrica krutosti konačnog elementa glasi:

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3{,}1416 * 10^{-4} * 2{,}1 * 10^{11}}{0{,}5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 131947200 & -131947200 \\ -131947200 & 131947200 \end{bmatrix}$$

Kako je metoda konačnih elemenata definirana putem varijacijskog principa, opterećenje se može zapisati na idući način:

$$\mathbf{R} = AE\alpha\ \Delta\vartheta \int_l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 11215{,}512 \\ -11215{,}512 \end{bmatrix}$$

Lokalni koordinatni sustav se poklapa s globalnim pa su onda lokalne matrice jednake globalnim, naravno, jer se radi o jednom konačnom elementu.

$$\begin{bmatrix} 131947200 & -131947200 \\ -131947200 & 131947200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11215{,}512 \\ -11215{,}512 \end{bmatrix}$$

Gornja matrična jednadžba predstavlja globalnu jednadžbu konačnog elementa u koju sad treba uvrstiti rubni uvjet. Uklještenje desnog kraja daje rubni uvjet v_1=0, nakon čijeg uvrštavanja ostaje jednostavna jednadžba koja glasi:

$$131947200 v_2 = -11215{,}512$$

iz koje proizlazi pomak lijevog ruba: v_2 = - 0,085 *mm*. Deformacije su jedino toplinske pa je očekivano naprezanje u štapu jednako nuli što se može lako pokazati. Kako je naprezanje definirano pomoću unutarnjih sila u konstrukciji, koje se javljaju kao reakcija na djelovanje vanjskog opterećenja koje u ovom slučaju ne djeluje, može se zapisati:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{uk}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{uk}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}) = 0$$

b) Drugi rub ukliješten (Slika 20b)

U ovom slučaju su oba rubna pomaka štapa jednaka nuli, što govori i da su ukupne deformacije jednake nuli pa polazeći od tih zaključaka, zapisuje se iduća relacija:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}} = -\alpha\ \Delta\vartheta = 0{,}17\frac{mm}{mm}$$

a naprezanje:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = -E\varepsilon_t = 210\ 000\frac{N}{mm^2} * 0{,}17\frac{mm}{mm} = 35{,}7\ \frac{N}{mm^2}$$

Ovaj iznos govori da je štap podvrgnut vlačnom naprezanju što je dobro jer ako je štap ima tendenciju skupljanja, uklještenje to sprječava, reakcija će biti vlačna.
Rješavanje u Abaqus-u:

Analize će biti sprovedene na više diskretizacija i to redom: 1, 2, 4 konačna elementa.

a) Slobodni rub

Tablični prikaz rezultata pomaka, deformacija i naprezanja ovisno o broju elemenata nalazi se u [Tablica 7].

Tablica 7. Prikaz rezultata pomaka, deformacija i naprezanja ovisno o broju elemenata

Broj elemenata	v_2 [mm]	ε_t [mm/mm]	σ [N/mm^2]
1	-0,085	-0,17	0
2	-0,085	-0,17	0
4	-0,085	-0,17	0

Povećanjem broja elemenata nije došlo do promjene rješenja pa nije potrebno prikazivati konvergenciju.

b) Uklještenje ruba

Tablični prikaz rezultata pomaka, deformacija i naprezanja ovisno o broju elemenata nalazi se u [Tablica 8].

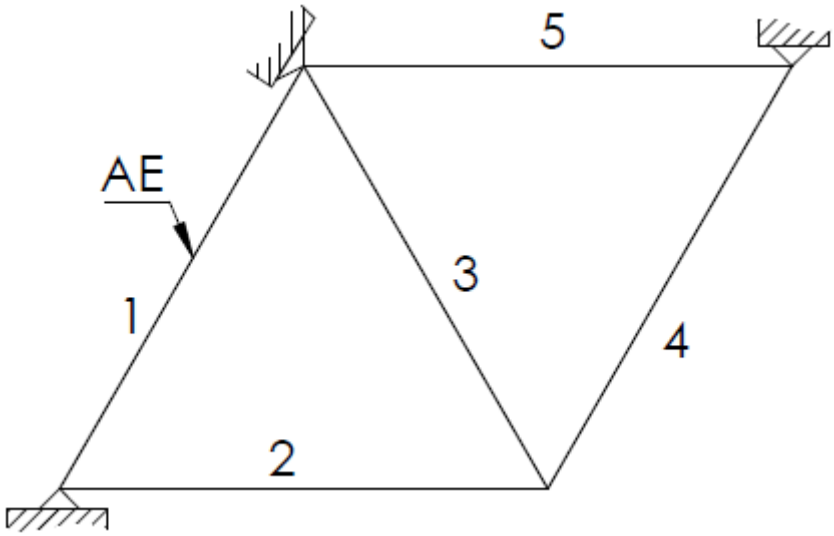
Tablica 8. Prikaz rezultata pomaka, deformacija i naprezanja ovisno o broju elemenata

Broj elemenata	v_2 [mm]	ε_t [mm/mm]	σ [N/mm^2]
1	0	-0,17	35,7
2	0	-0,17	35,7
4	0	-0,17	35,7

Povećanjem broja elemenata nije došlo do promjene rješenja pa nije potrebno prikazivati konvergenciju.

3.4. Primjer 4 [7], [8]

Zadana štapna konstrukcija sastoji se od 5 štapova sačinjenih od čelika (poznata svojstva) koji su jednakih duljina i poprečnih presjeka (L=1m, d=0,02m). Štap 3 je podvrgnut hlađenju za 10 ^{o}C. Potrebno je analizirati deformacije i eventualna naprezanja uslijed hlađenja štapa 3. Ručno će se analizirati za slučaj jednog konačnog elementa, a za 2, 4, 8 konačnih elemenata po štapu, analiza će biti sprovedena u Abaqus-u. Potrebno je prikazati konvergenciju rješenja.



Slika 21. Primjer 4

Kao što je moguće vidjeti sa [Slika 21] potrebno je načiniti globalne matrice krutosti i opterećenja od 5 lokalnih. Odmah je bitno naglasiti kako će lokalne matrice krutosti biti jednake za elemente 2 i 5 kao i za 1 i 4 jer imaju isti kut zakreta od globalnih osi. Kako bi se mogle formirati jednadžbe potrebno je načiniti tablicu odnosa lokalnih i globalnih stupnjeva slobode:

Tablica 9. Odnos lokalnih i globalnih stupnjeva slobode

Globalno		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
Lokalno	KE1	1	2					3	4
	KE2	1	2	3	4				
	KE3			3	4			1	2
	KE4			1	2	3	4		
	KE5					3	4	1	2

Općeniti prikaz matrica krutosti je izveden u poglavlju koji se bavi sekvencionalnom analizom kod štapnih konstrukcija, a glasi ovako:

$$\boldsymbol{k_g} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha \\ \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha \\ -\cos\alpha\,\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

Stoga, za štap 1 i 4, kut otklona je 60° u pozitivnom smjeru(suprotno od kazaljke na satu) pa matrice krutosti glase:

$$\boldsymbol{k_{g(1,4)}} = 10^7\begin{bmatrix} 1{,}64934 & 2{,}8567407 & -1{,}64934 & -2{,}8567407 \\ 2{,}8567407 & 4{,}94802 & -2{,}8567407 & -4{,}94802 \\ -1{,}64934 & 2{,}8567407 & 1{,}64934 & 2{,}8567407 \\ -2{,}8567407 & -4{,}94802 & 2{,}8567407 & 4{,}94802 \end{bmatrix}$$

Dok je za elemente 2 i 5 kut otklona jednak nuli pa matrice krutosti glase:

$$\boldsymbol{k_{g(2,5)}} = \begin{bmatrix} 65973600 & 0 & -65973600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -65973600 & 0 & 65973600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element 3 je tako definiran da mu kut otklona iznosi -60° pa njegova matrica krutosti glasi:

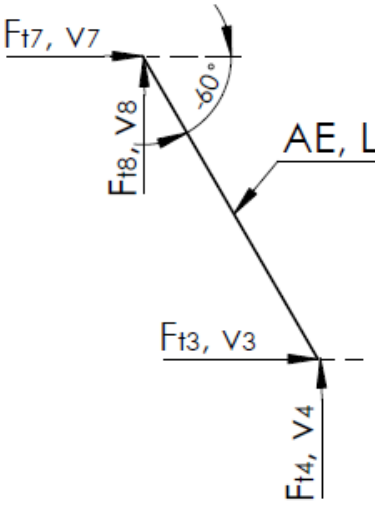
$$\boldsymbol{k_{g3}} = 10^7\begin{bmatrix} 1{,}64934 & -2{,}8567407 & -1{,}64934 & 2{,}8567407 \\ -2{,}8567407 & 4{,}94802 & 2{,}8567407 & -4{,}94802 \\ -1{,}64934 & 2{,}8567407 & 1{,}64934 & -2{,}8567407 \\ 2{,}8567407 & -4{,}94802 & -2{,}8567407 & 4{,}94802 \end{bmatrix}$$

Prema [Tablica 9]

slaže se globalna matrica krutosti koja glasi:

$$\boldsymbol{K_g} = 10^7\begin{bmatrix} 8{,}2467 & 2{,}8567407 & -6{,}59736 & 0 & 0 & 0 & -1{,}64934 & -2{,}8567407 \\ 2{,}8567406 & 4{,}94802 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}85674 & -4{,}94802 \\ -6{,}59736 & 0 & 9{,}8960399 & 0 & -1{,}64934 & -2{,}85674 & -1{,}64934 & 2{,}85674 \\ 0 & 0 & 0 & 9{,}89604 & -2{,}8567407 & -4{,}94802 & 2{,}85674 & -4{,}94802 \\ 0 & 0 & -1{,}64934 & -2{,}8567407 & 8{,}2467 & 2{,}85674 & -6{,}59736 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}8567407 & -4{,}94802 & 2{,}8567407 & 4{,}94802 & 0 & 0 \\ -1{,}64934 & -2{,}8567406 & -1{,}64934 & 2{,}8567406 & -6{,}59736 & 0 & 9{,}89603 & 0 \\ -2{,}8567407 & -4{,}94802 & 2{,}8567407 & -4{,}94802 & 0 & 0 & 0 & 9{,}89604 \end{bmatrix}$$

Način ispunjavanja je prikazan za globalnu matricu krutosti elementa 1 u Prilogu jer je taj zadatak rješavan u MATLAB-u.



Slika 22. Prikaz konačnog elementa štapa 3

Opterećenje se uzima samo po elementu 3 i sukladno [Slika 22], vektor lokalnog opterećenja glasi:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -AE\alpha\Delta\vartheta \\ 0 \\ AE\alpha\Delta\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5607{,}756 \\ 0 \\ -5607{,}756 \\ 0 \end{bmatrix}$$

S time je toplinsko opterećenje pretvoreno u ekvivalentnu silu koja uzrokuje horizontalne pomake u lokalnom koordinatnom sustavu. Taj vektor je potrebno pretvoriti u globalni, a to se radi pomoću matrice transformacije koja za konačni element 3 glasi:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}86602 & 0 & 0 \\ 0{,}86602 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}86602 \\ 0 & 0 & -0{,}86602 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

a poznato je da je globalni vektor opterećenja:

$$\mathbf{r_g} = \mathbf{T^T r} = \begin{bmatrix} 2803{,}9 \\ -4856{,}5 \\ -2803{,}9 \\ 4856{,}5 \end{bmatrix}$$

Pa se prema [Tablica 9] slaže ukupni globalni vektor opterećenja:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2803{,}9 \\ 4856{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 2803{,}9 \\ -4856{,}5 \end{bmatrix}$$

Pomoću tih izraza se dobije globalna matrična jednadžba koja glasi:

$$10^7 \begin{bmatrix} 8{,}2467 & 2{,}856740 & -6{,}59736 & 0 & 0 & 0 & -1{,}64934 & -2{,}8567407 \\ 2{,}856740 & 4{,}94802 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}85674 & -4{,}94802 \\ -6{,}5973 & 0 & 9{,}896039 & 0 & -1{,}64934 & -2{,}85674 & -1{,}64934 & 2{,}85674 \\ 0 & 0 & 0 & 9{,}89604 & -2{,}8567407 & -4{,}94802 & 2{,}85674 & -4{,}94802 \\ 0 & 0 & -1{,}64934 & -2{,}856740 & 8{,}2467 & 2{,}85674 & -6{,}59736 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}856740 & -4{,}94802 & 2{,}8567407 & 4{,}94802 & 0 & 0 \\ -1{,}64934 & -2{,}856740 & -1{,}64934 & 2{,}8567406 & -6{,}59736 & 0 & 9{,}89603 & 0 \\ -2{,}856740 & -4{,}94802 & 2{,}856740 & -4{,}94802 & 0 & 0 & 0 & 9{,}89604 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2803{,}9 \\ 4856{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 2803{,}9 \\ -4856{,}5 \end{bmatrix}$$

Sad je u prethodni izraz potrebno uvrstiti rubne uvjete pomaka: $v_1 = v_2 = v_5 = v_6 = v_7 = v_8 = 0$.

Ako do sada nije bilo jasno koji se pomaci odnose na koje elemente, onda je bitno naglasiti da numeracija ide suprotno od smjera kazaljke na satu počevši od donjeg lijevog nepomičnog oslonca na štapu 1. Nakon uvrštavanja rubnih uvjeta, ostaje matrična jednadžba:

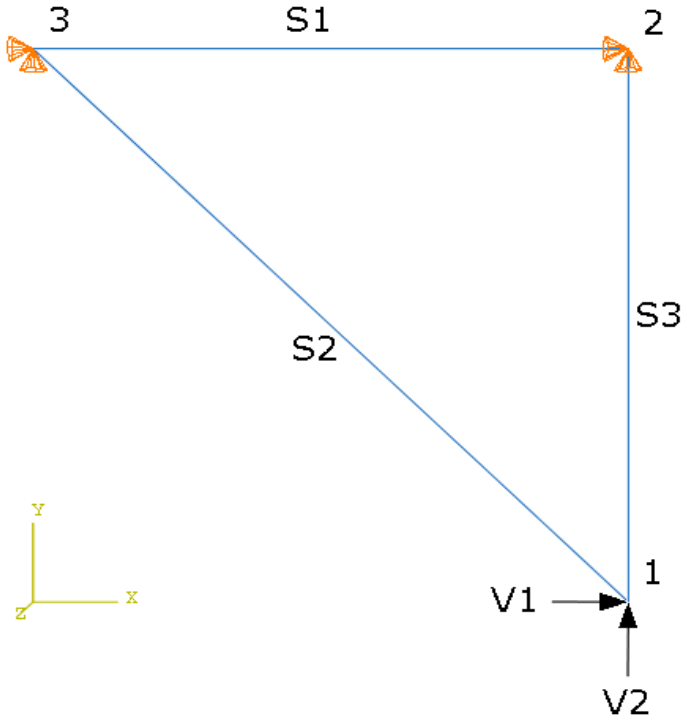
$$10^7 \begin{bmatrix} 9{,}89604 & 0 \\ 0 & 9{,}89604 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2803{,}9 \\ 4856{,}5 \end{bmatrix}$$

Koja se rješava metodom Gauss-Jordan eliminacije i traženi pomaci glase:

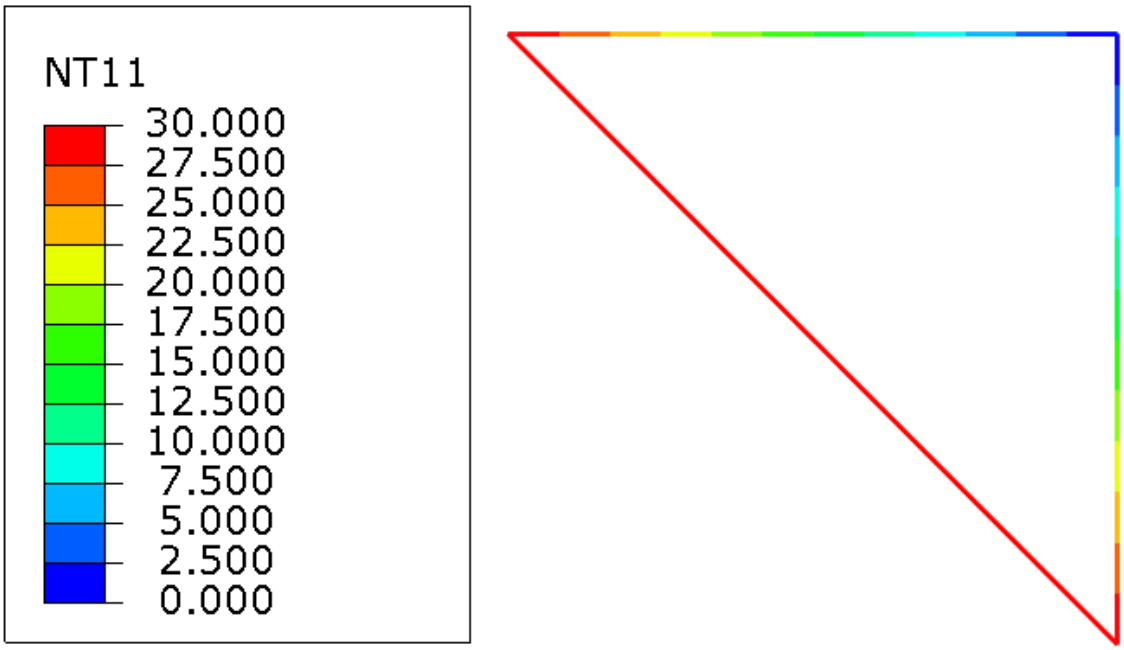
$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02833 \\ 0{,}04907 \end{bmatrix} mm$$

3.5. Primjer 5 [7], [8]

Zadana štapna konstrukcija sastoji se od 3 štapa jednakih promjera (*d*=15 mm) i materijala. Duljine štapova 1 i 3 su jednake i iznose 5 m. Štapu 2 se podigne temperatura za 30 ^{o}C, dok se ostalima ne dovodi toplina, a temperaturno polje se razvija sukladno kondukciji. Analiza se sprovodi samo u Abaqus-u, a rješenja će biti prikazana u [Tablica 10]. Materijal štapova je čelik (*E*=210 GPa, λ=60 W/(mK), α=13,33*10^{-6} K^{-1}).

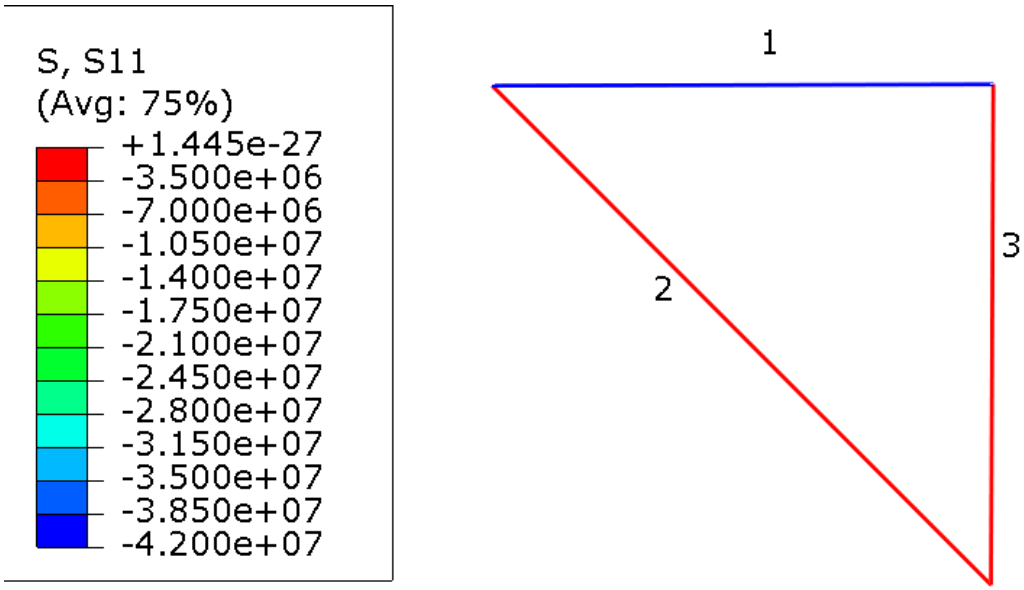


Slika 23. Štapna konstrukcija



Slika 24. Raspodjela temperaturnog polja nakon grijanja štapa 2

Na [Slika 24] je vidljivo kako je došlo do preraspodjele temperature u štapnoj konstrukciji upravo zbog kondukcije jer ostali štapovi nisu izolirani i u jednoj točki ne mogu biti dvije vrijednosti temperature. Ako se želi vidjeti utjecaj grijanja štapa 2, bez utjecaja promjene temperature ostalih štapova, u svojstvima materijala se stavi da su koeficijenti toplinskih rastezanja ostalih štapova jednaki nuli no to tu nije učinjeno.



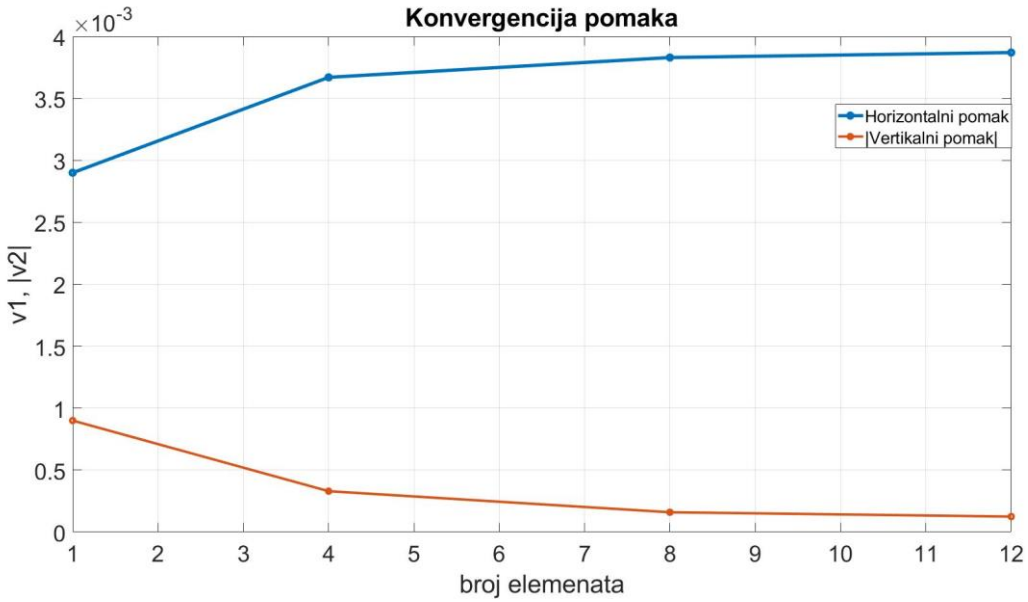
Slika 25. Raspodjela naprezanja po štapnoj konstrukciji

Na [Slika 25] su prikazana naprezanja na štapnoj konstrukciji. Vrijedno je prokomentirati pojavu naprezanja u štapu 1. Naprezanja su se javila zbog toga jer su u oba ruba štapa 1 pomaci onemogućeni (rubni uvjeti), a vrijednost pokazuje da se radi o tlačnim naprezanjima. To je dobar predznak zbog tendencije štapa da se rasteže, a krajevi ga sprječavaju što se manifestira tlačenjem. U ostalim štapovima je vrijednost naprezanja jednaka nuli jer oba štapa imaju slobodan rub koji se širi.

U [Tablica 10] su prikazani pomaci slobodnog ruba u ovisnosti o broju konačnih elemenata.

Tablica 10. Pomaci slobodnog kraja štapne konstrukcije

Broj elemenata	V_1 [mm]	V_2 [mm]
1	0,0029	-0,0009
4	0,00367	-0,00033
8	0,00383	-0,00016
12	0,00387	-0,000125



Slika 26. Konvergencija rješenja

4. ZAKLJUČAK

Svrha dosadašnjeg rada bila je pokazati, kako se uslijed promjene temperature neke konstrukcije, javljaju pomaci te kako izračunati deformacije i eventualna naprezanja. Toplinska analiza je vrlo bitna za analizu čvrstoće konstrukcija jer upravo te deformacije mogu imati krucijalan utjecaj na postojanu stabilnost i izdržljivost. Također, toplinska naprezanja se često uzimaju kao zaostala naprezanja koja se javljaju zbog načina obrade materijala te se mogu otkloniti odgovarajućim postupcima. Kako je već rečeno, Metoda konačnih elemenata je približna metoda za proračun konstrukcija sa stajališta čvrstoće, no ipak dovoljno dobra da ta rješenja budu relevantna, ukoliko se sustav dobro postavi.

U *Primjeru 1* je prikazano kako se pomoću metode konačnih elemenata dolazi do temperaturnog polja te se na tom jednostavnom primjeru primjećuje kako su analitička rješenja jednaka onima u dobivenim Metodom konačnih elemenata. Razlog tome je isti linearni opis jednodimenzionalnog temperaturnog polja. Još jedna od prednosti Metode konačnih elemenata je da se, osim u stacionarnim problemima, može primijeniti i za nestacionarne probleme, jer još uvijek nije poznata egzaktna temperaturna funkcija vremena. To govori i konvergencija rješenja do stanja stacionarnosti što se može vidjeti u *Primjeru 2*. Eksplicitna metoda vremenske integracije, koja je korištena u istom primjeru, ima svoje prednosti i mane. Mana je postojanje kritičnog vremenskog inkrementa koji ovisi o svojstvima materije te ako se prekorači taj kritični inkrement, vrlo vjerojatno dolazi do divergencije rješenja upravo iz razloga nefizikalnosti matrične jednadžbe koja opisuje nestacionarni sustav (kriterij stabilnosti). Toplinske deformacije su opisivane sekvencijalno spregnutom metodom što znači da se prvo riješi termodinamički problem te s pronađenim temperaturnim poljem se izračunaju pomaci, deformacije i eventualna naprezanja. Formulacija konačnih elemenata za primjenu u sekvencijalnoj metodi mogu se formulirati varijacijskim principom jer se na kraju krajeva pomaci traže za stacionarno temperaturno polje. Ako bi se tražili pomaci za nestacionarni temperaturni problem, pomaci bi se računali za svaku temperaturu čvora u određenom inkrementu, Naravno, pomaci ne bi otišli unedogled jer bi predstavljena temperaturna razlika bila ovisna o vremenskom inkrementu sve do stanja stacionarnosti. Stoga se zbog bržeg rješavanja problema računaju u stacionarnom stanju. *Primjer 3,* iako jednostavan, dobro pokazuje utjecaj promjene temperature. U *a)* djelu primjera nije došlo do pojave naprezanja jer

desnom kraju štapa nije ograničeno kretanje te nije došlo do pojave unutarnjih sila koje bi se manifestirale kroz naprezanje. Svrha *b)* djela zadatka je bila pokazati pojavu opasnosti u toplinski opterećenoj konstrukciji ako su na oba kraja onemogućeni pomaci. *Primjer 4* predstavlja moguću realnu konstrukciju u kojoj je došlo do promjene temperature jednog člana. U Prilogu je detaljno prikazano slaganje globalne matrice krutosti prema definiranoj tablici odnosa lokalnih i globalnih stupnjeva slobode. U Metodi konačnih elemenata je to toplinsko opterećenje zamijenjeno ekvivalentnim silama koje su preraspodijeljene po konačnom elementu te je prikazan ručni proračun. Rezultati su dosta intuitivni, barem po predznacima, jer se ipak radi o toplinskom stezanju. Idući primjer je realniji od prošlog upravo iz kondukcijskih razloga. Kako je znano, u jednoj točki prostora ne mogu postojati dvije različite temperature, a pošto štapovi imaju fizikalno svojstvo provođenja topline, doći će do formiranja temperaturnog polja u svim štapovima i svi će imati utjecaj na pomake, a time i na deformacije.

U nekim primjerima, u kojima je bilo potrebno, je prikazana vrijednost traženog rješenja ovisno o broju elemenata. Povećanjem mreže konačnih elemenata smanjuje se veličina istih te dolazi do približavanja veličini diferencijala. Tu je problem potrebnog vremena jer se povećava i broj varijabli u algebarskim aproksimacijskim jednadžbama. Realne se konstrukcije rješavaju pomoću računala s gustom mrežom konačnih elemenata kako bi se ostvarila bolja konvergencija, no s tim se povećava vrijeme računanja i zauzeće memorije. Stoga je dobro znati unaprijed na koliku se točnost cilja i koje će vrijednosti zadovoljiti kao točne.

PRILOG

Funkcije oblika tetraedarskog elementa

```
syms x y z x1 x2 x3 x4 y1 y2 y3 y4 z1 z2 z3 z4 a1 a2 a3 a4 A l ro c dt
lambda
alpha=[1 x y z];
a=[a1;a2;a3;a4];

C=[1 x1 y1 z1;
   1 x2 y2 z2;
   1 x3 y3 z3;
   1 x4 y4 z4];
C_m=C^-1;
N=alpha*C_m;
N_t=transpose(N);

N1=N_t(1,1);
N2=N_t(2,1);
N3=N_t(3,1);
N4=N_t(4,1);

V_6=det(C);

[n1_N, n1_D]=numden(N1);
[n2_N, n2_D]=numden(N2);
[n3_N, n3_D]=numden(N3);
[n4_N, n4_D]=numden(N4);


alpha_1=[x2 y2 z2;
         x3 y3 z4;
         x4 y4 z4];
beta_1=-[1 y2 z2;
         1 y3 z3;
         1 y4 z4];
gama_1=-[x2 1 z2;
         x3 1 z3;
         x4 1 z4];
delta_1=-[x2 y2 1;
         x3 y3 1;
         x4 y4 1];
```

Primjer 4:

```
%globalne matatrice
clc
clear all
format long
kg1=65973600*[(cosd(60))^2 cosd(60)*sind(60) -(cosd(60))^2 -
cosd(60)*sind(60);
             cosd(60)*sind(60) (sind(60))^2 -cosd(60)*sind(60) -
(sind(60))^2;
              -(cosd(60))^2 -cosd(60)*sind(60) (cosd(60))^2
cosd(60)*sind(60);
              -cosd(60)*sind(60) -(sind(60))^2 cosd(60)*sind(60)
(sind(60))^2];
```

```
kg2=65973600*[(cosd(0))^2 cosd(0)*sind(0) -(cosd(0))^2 -cosd(0)*sind(0);
             cosd(0)*sind(0) (sind(0))^2 -cosd(0)*sind(0) -(sind(0))^2;
              -(cosd(0))^2 -cosd(0)*sind(0) (cosd(0))^2 cosd(0)*sind(0);
              -cosd(0)*sind(0) -(sind(0))^2 cosd(0)*sind(0) (sind(0))^2];

 kg3=65973600*[(cosd(-60))^2 cosd(-60)*sind(-60) -(cosd(-60))^2 -cosd(-
60)*sind(-60);
             cosd(-60)*sind(-60) (sind(-60))^2 -cosd(-60)*sind(-60) -
(sind(-60))^2;
              -(cosd(-60))^2 -cosd(-60)*sind(-60) (cosd(-60))^2 cosd(-
60)*sind(-60);
              -cosd(-60)*sind(-60) -(sind(-60))^2 cosd(-60)*sind(-60)
(sind(-60))^2];

 kg4=65973600*[(cosd(60))^2 cosd(60)*sind(60) -(cosd(60))^2 -
cosd(60)*sind(60);
             cosd(60)*sind(60) (sind(60))^2 -cosd(60)*sind(60) -
(sind(60))^2;
              -(cosd(60))^2 -cosd(60)*sind(60) (cosd(60))^2
cosd(60)*sind(60);
              -cosd(60)*sind(60) -(sind(60))^2 cosd(60)*sind(60)
(sind(60))^2];

kg5=65973600*[(cosd(0))^2 cosd(0)*sind(0) -(cosd(0))^2 -cosd(0)*sind(0);
             cosd(0)*sind(0) (sind(0))^2 -cosd(0)*sind(0) -(sind(0))^2;
              -(cosd(0))^2 -cosd(0)*sind(0) (cosd(0))^2 cosd(0)*sind(0);
              -cosd(0)*sind(0) -(sind(0))^2 cosd(0)*sind(0) (sind(0))^2];

Kg1=zeros(8);
Kg2=zeros(8);
Kg3=zeros(8);
Kg4=zeros(8);
Kg5=zeros(8);
%Globalna matrica KE1
Kg1(1,1)=kg1(1,1);
Kg1(1,2)=kg1(1,2);
Kg1(1,7)=kg1(1,3);
Kg1(1,8)=kg1(1,4);
Kg1(2,1)=kg1(2,1);
Kg1(2,2)=kg1(2,2);
Kg1(2,7)=kg1(2,3);
Kg1(2,8)=kg1(2,4);
Kg1(7,1)=kg1(3,1);
Kg1(7,2)=kg1(3,2);
Kg1(7,7)=kg1(3,3);
Kg1(7,8)=kg1(3,4);
Kg1(8,1)=kg1(4,1);
Kg1(8,2)=kg1(4,2);
Kg1(8,7)=kg1(4,3);
Kg1(8,8)=kg1(4,4);
%ostale matrice se popunjavaju na analogan način
%Globalna matrica
Kg=Kg1+Kg2+Kg3+Kg4+Kg5;
%globalni vektor opterećenja
T=[cosd(-60) sind(-60) 0 0;
   sind(-60) -cosd(-60) 0 0;
    0 0 cosd(-60) sind(-60) ;
    0 0 sind(-60) -cosd(-60)];
r=[5607.756;
```

```
    0
    -5607.756;
    0];
rg=T'*r;
%
Rg=[0;0;rg(3,1);rg(4,1);0;0;rg(1,1);rg(2,1)];
%Nakon uvrštavanja rubnih uvjeta pomaka
K=zeros(2);
K(1,1)=Kg(3,3);
K(1,2)=Kg(3,4);
K(2,1)=Kg(4,3);
K(2,2)=Kg(4,4);
R=[Rg(3,1); Rg(4,1)];
%Gauss-Jordan eliminacija
jed=[K R];
for i=1:size(jed,1)
    jed(i, :)=jed(i,:)./jed(i,i);
    for j=1:size(jed,1)
        if j~=i
           kljucno=jed(j,i)./jed(i,i);
           jed(j,:)=jed(j,:)-kljucno*jed(i,:);
        end
    end
end
rez=jed(:,end);
v3=rez(1,1);
v4=rez(2,1);
```

LITERATURA

[1] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata , Golden marketing, Zagreb, 2004.

[2] Tonković, Z.: Toplinska analiza-Prezentacija s predavanja, FSB Zagreb.

[3] R. W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N.Seetharamu: Fundamentals of Finite Element Method for Heat and Fluid Flow,

[4] Virag, Z., Džijan, I.: Računalna dinamika fluida, Zagreb, 2014,

[5] ABAQUS 6.14., Documentation, Dassault Systèmes,

[6] Šubat, A.: THERMOMECHANICAL NUMERICAL ANALYSIS OF ENGINE EXHAUST MANIFOLD, Zagreb, 2017,

[7] B. Halasz, A. Galović, I. Boras: Toplinske tablice, FSB Zagreb.

[8] Karl-Heinz Decker: Elementi strojeva, 2. popravljeno izdanje, Zagreb, 2006.