SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Ivan Pavić

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori: Student

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić, dipl. ing Ivan Pavić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Tanji Jurčwvić Lulić na korisnim savjetima i pruženoj podršci tijekom izrade ovog rada.

Najviše se zahvaljujem svojim roditeljima, sestri, obitelji, djevojci i prijateljima na pruženoj podršci tijekom cijelog studija.

Ivan Pavić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: **602 - 04 / 21 - 6 / 1**	
Ur.broj: **15 - 1703 - 21 -**	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ivan Pavić** Mat. br.: 0035206969

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Viskoelastičnost bioloških tkiva**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Viscoelasticity of biological tissues**

Opis zadatka:

Kolagena biološka tkiva poput ligamenata i tetiva su viskoelastični materijali. Viskoelastičnost ukazuje na vremenski ovisno mehaničko ponašanje, odnosno odnos naprezanja i deformacije nije konstantan, već ovisi o vremenu pomaka ili opterećenja. Dvije glavne vrste ponašanja karakteristične za viskoelastičnost su puzanje i relaksacija. Zbog razumijevanja ponašanja viskoelastičnih materijala u ovisnosti o promjeni naprezanja, istezanja, puzanja i relaksacije, koriste se mehanički modeli kao na primjer Maxwellov, Voigtov, Burgeov, Maxwell-Weichertov, Voigt-Kelvinov itd. Formuliranje viskoelastičnih modela, uzimajući u obzir mehaničke doprinose strukturnih komponenata tkiva, pomaže razumijevanju nastanka viskoelastičnosti.

U radu je potrebno:
- opisati građu i materijalna svojstva kolagenih vlakana, tetiva i ligamenta,
- na primjeru kolagenog vlakna, ligamenta i tetive prikazati viskoelastične modele te odrediti konstitutivne jednadžbe i krivulje puzanja i relaksacije,
- usporediti gore određene viskoelastične modele.

Potrebne podatke uzeti iz literature i u dogovoru s mentorom.
U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. studenoga 2020.

Datum predaje rada:
1. rok: 18 veljače 2021.
2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.
3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 22.2. – 26.2.2021.
2. rok (izvanredni): 9.7.2021.
3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Predsjednik Povjerenstva:

V Soldo

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

SADRŽAJ

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

POPIS OZNAKA

α	- parametar oblika,
β	- parametar simetrije,
γ	- gama funkcija,
ε	- deformacija,
ε_0	- deformacija u početnom trenutku,
ε_e	- elastična deformacija,
ε_p	- plastična deformacija,
$\varepsilon_{E_m}, \varepsilon_{E_l}, \varepsilon_{\eta_m}$	-deformacije mikrofirbrila,
σ	- naprezanje,
σ_0	- naprezanje u početnom trenutku,
$\sigma_{E_m}, \sigma_{E_l}, \sigma_{\eta_m}$	- naprezanje mikrofibrila,
τ	- vrijeme relaksacije,
τ_{m_u}, τ_{m_b}	- omjeri karakteristike viskoznog prigušivača i modula elastičnosti,
λ	- koeficijent podatljivosti opruge,
η	- karakteristika viskoznog prigušivača,
η_{m_u}, η_{m_b}	- konstante viskoznosti spojeva kolagenih vlakana,
ξ	- parametar gama funkcije,
a, b, c, C	- konstante kod određivanja naprezanja i deformacija,
A	- eksplicitna funkcija ovisna o 5 parametara
c	- konstanta opruge,
E	- Youngov modul elastičnosti,
E_m	- modul elastičnosti mikrofibrila,
E_l	- modul elastičnosti spojeva kolagenih vlakana,
E_f	- modul elastičnosti kolagenih vlakana,
k	- koeficijent viskoznog prigušenja,
l	- duljina,
p, P	- funkcije gustoće.

t	- vrijeme,
v_{rel}	- relativna brzina gibanja klipa,
x, y	- geometrijske karakteristike gama funkcije.

SAŽETAK

U ovom radu predočena su biomehanička svojstva kolagenih vlakana, tetiva i ligamenata. Prikazano je viskoelastično ponašanje, ovisnost deformacije i naprezanja o vremenu i brzini opterećenja te su prikazane krivulje puzanja i relaksacije.

Ključne riječi:

Kolagen, kolagena vlakna, tetiva, ligament, modul elastičnosti, vlačna čvrstoća, naprezanje, deformacija, brzina deformacije

SUMMARY

In this thesis biomechanic properties of collagen fibers, tendnon and ligament are ponited out. Viscoelastic properties, stress and strain dependency of time and velocity of load are introduced and shown in diagrams of creep and relaxation.

Key words:

Collagen, collagen fiber, tendon, ligament, modulus of elasticity, tensile strenght, stress, deformation, velocity of deformation

1. UVOD

Kolagena vlakna, tetive i ligamenti su biološki materijali unutar ljudskog tijela koji imaju vrlo bitne uloge u našem tijelu kao što su: normalno kretanje, zaštita mišića i kostiju, održavanje izgleda i bolje podnošenje opterećenja pri fizičkim aktivnostima. Cilj je kroz redovnu brigu o vlastitom tijelu što duže zadržati dobra svojstva koja ipak s godinama i nenadanim situacijama opadaju.

Poseban fokus stavljen je na svojstvo viskoelastičnosti navedenih materijala. Svojstvo viskoelastičnosti promatrano je kroz različite modele koji prikazuju ovisnosti naprezanja, deformacija, brzine deformiranja i vremena te kako to svojstvo utječe na biološke materijale u ljudskom tijelu.

2. GRAĐA, SVOJSTVA I FUNKCIJE BIOLOŠKIH MATERIJALA

2.1. Kolagen i kolagena vlakna

Kolagen spada u polipeptide, odnosno skupinu blisko povezanih bjelančevina. Osnovni je sastojak kolagenih vlakana u međustaničnoj tvari potpornog tkiva te bazalnih membrana. Glavna je bjelančevinska komponenta kože, a njegova vlakna tanki su polimeri bjelančevina i najrasprostranjenija su bjelančevina u tijelu, kojima čine 30 % mase, odnosno trećinu svih bjelančevina u sisavaca [1].

Savitljivost je glavno svojstvo kolagena, dok su kolagena vlakna vrlo otporna na vlačno opterećenje gdje elongacija vlakana iznosi svega 5% ukupne duljine vlakna. Kolagenske niti čine više od 80 % vezivnog tkiva u ljudskom tijelu. Kolagen je građen od hidrofilnih aminokiselina koje su ključne kod sprječavanja gubitka vode u tkivima.

Do sada je poznato 19 vrsta kolagena od kojih je dominantno njih 4 koje se označavaju rimskim brojevima.

kolagen I – nalazi se u koži, tetivama, krvožilnom sustavu, vezivima, organima i kostima,

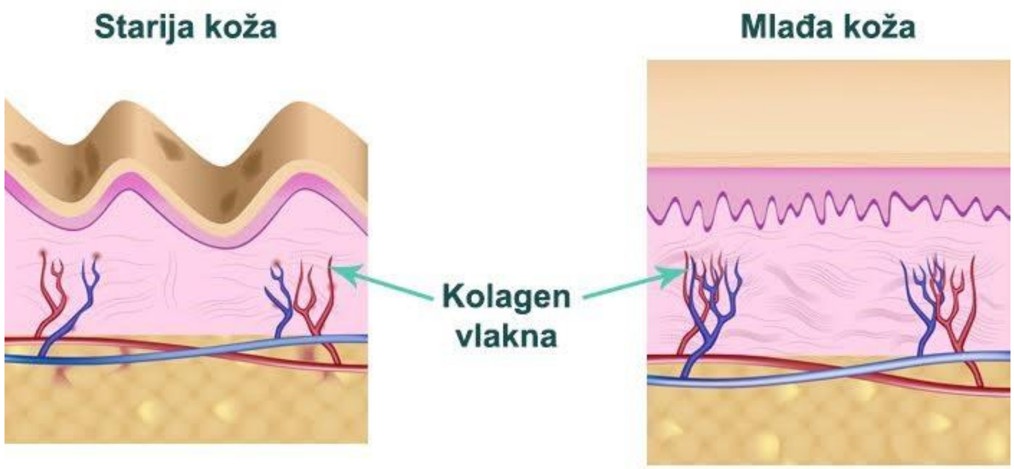
kolagen II – nalazi se u hrskavici,

kolagen III - glavna komponenta mrežastih vlakana, često ga pronalazimo uz kolagen I,

kolagen IV – baza staničnih membrana.

Tipovi kolagena I, II i III su u obliku fibrila i čine više od 90% svih kolagena u ljudskom tijelu.

Ljudski organizam ima sposobnost sinteze kolagena, konstantno potrebnog zbog rasta i zamjene istrošenih tkiva, zacjeljivanja i obnove ozlijeđenog tkiva. Kapacitet tijela u obnovi kolagena gubi se zbog procesa starenja, velikog preopterećenja (npr. vrhunski sport) ili uslijed autoimunih bolesti. U mladosti se kolagen brzo nadomiješta, ali nakon 25. godine života gubi se oko 1,5% kolagena godišnje. Gubitkak kolagena se odražava na izgled i funkciju ljudskog tijela, uzrokuje poremećaje mišićnog sustava, poremećaje u funkciji imuno-sustava i pojavu bora, celulita, suhoće kože, kose te narušava oblik ljudskog tijela. Na slici 1. je prikazano kako kolagena vlakna mijenjaju svoj izgled starenjem. Vlakna se "rascvjetaju" i gube svoju stabilnost i mogućnost preuzimanja opterećenja (zato i dolazi do bora i obješene kože što su ljudi stariji).



Slika 1. Promjena kolagenih vlakana kože starenjam [1]

Molekule kolagena su duge 300 nm i široke 1,5 nm u promjeru. Modul elastičnosti kolagena je 1000 MPa, a vlačna čvrstoća 50 - 100 MPa.

2.2. Tetive

Tetiva je čvrsta elastična struktura građena od vlaknastog vezivnog tkiva. Za razliku od ligamenata, koji povezuju kost s drugom kosti, tetive povezuju mišiće s kostima. Tetive također imaju funkciju u gibanju ljudskog tijela tako što prenose sile s mišića na kosti. Mjesto na kojem se spajaju tetiva i kost naziva se enteza. Zdrava tetiva ima sjajnu bijelu boju i ima izražena vlaknastoelastična svojstva [2].

Histološki gledano tetive se sastoje od gusto formiranog vezivnog tkiva obloženog fascijom. Normalne, zdrave tetive su većinom građene od paralelno usmjerenih usko zbijenih kolagenih vlakana, a ostatak građe čine elastin, proteoglikani i nekolageni proteini [2].

Oblik i duljina tetiva ovise od osobe do osobe, a dužina još ovisi i o trenutnoj i potencijalnoj veličini mišića u tijelu. Samim time je određeno koliko opterećenje može podnijeti određena osoba. Dužina je genetički određena i nije dokazano može li se produljivati ili smanjiti pod vanjskim utjecajima kao što je slučaj kod mišića koji se mogu smanjiti uslijed ozljeda.

Tradicionalno su se tetive smatrale samo kao mehanizam koji povezuje mišiće i kosti, ali u zadnjih 20-ak godina istraživanje je usmjereno na elastična svojstva tetiva i mogućnost istih da rade kao opruge. Sve tetive u tijelu nemaju iste uloge i ne funkcioniraju na isti način. Neke tetive kao zadatak imaju pozicioniranje udova, a primjer toga su tetive na prstima dok pišemo. S druge strane neke tetive (npr. Ahilova tetiva) služe kao opruge i čine lokomotorni sustav čovjeka učinkovitijim, a još ih nazivamo tetivama za spremanje energije.

Mehanička svojstva tetiva ovise o položaju i orijentaciji kolagenih vlakana i variraju u ovisnosti o zahtjevima koje tetiva mora ispuniti. Zadaća kolagenih vlakana kod tetiva je podnošenje osnog opterećenja, a zbog puno veće duljine od poprečnog presjeka nisu pogodna za podnošenje tlačnog opterećenja.

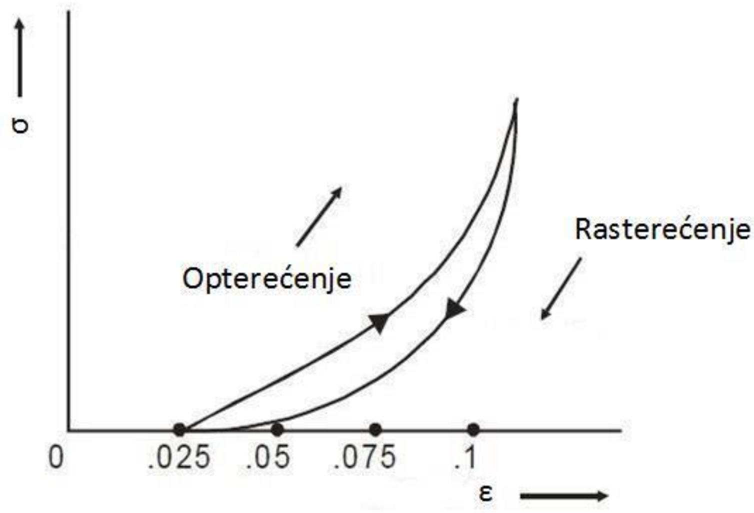
U tablici 1 prikazana su svojstva pojedinih tetiva:

Tablica 1. Mehanička svojstva tetiva [3]

Tetive	**Modul elastičnosti** (MPa)	**Vlačna čvrstoća** (MPa)	**Produljenje** %
Iver	143-660	24-69	14-27
Ahilova tetiva	65	24-61	24-59
Tetiva dlana	2310 ± 620	91 ± 15	/
Tetiva vitkog mišića	643 ± 41	112 ± 4	34 ± 2

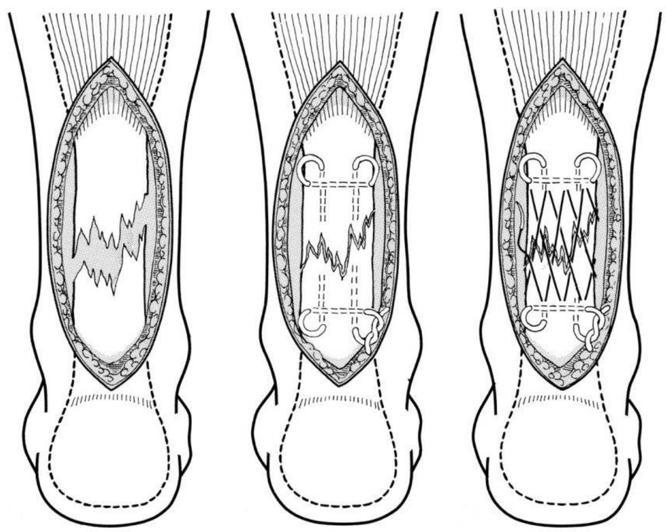
Testiranja su pokazala da tetiva poprečnog presjeka 1 cm^2 podnosi opterećenja od čak 4900 – 9810 N. Opterećenje Ahilove tetive za vrijeme trčanja iznosi 9000 N što odgovara tjelesnoj težini uvećanoj 12,5 puta.

Tetive imaju viskoelastična svojstva, što znači da njihova svojstva ovise o brzini opterećenja. Brzim opterećenjem tetive ona postaje kruća. U prvobitno stanje tetiva se može vratiti polaganim rasterećenjem. Tetiva troši više energije kod brzog opterećenja, a otpušta manje energije kod polaganog rasterećenja. Krivulja opterećenja i rasterećenja se nalazi na slici 2. i pokazuje da se kod procesa opterećenja i rasterećenja djelomično gubi energija.



Slika 2. Dijagram naprezanje-deformacija za opterećenje i rasterećenje tetive [4]

Tetive mogu podnijeti velika opterećenja, ali zbog slabe prokrvljenosti su iznimno osjetljive na upalu i mogu odumrijeti. Kao i svi drugi dijelovi ljudskog tijela podložne su ozlijedama, a najčešće su upale, djelomične i potpune rupture što možemo vidjeti na slici 3.

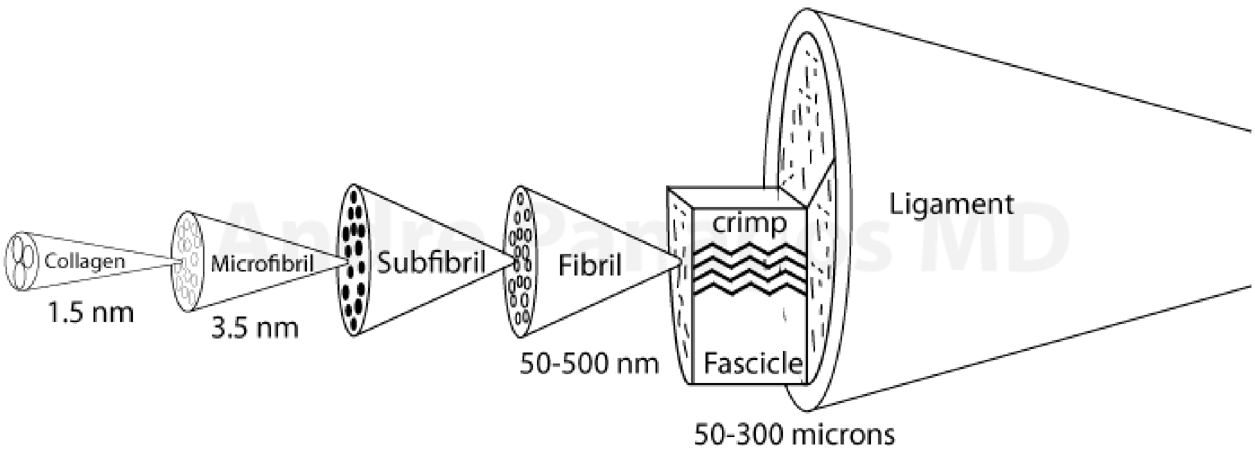


Slika 3. Potpuna ruptura i liječenje ahilove tetive [5]

2.3. Ligamenti

Ligamenti, za razliku od tetiva, međusobno povezuju dvije kosti. Imaju veću elastičnost i fleksibilnost od tetiva, ali zato im je manja vlačna čvrstoća.

Kao i tetive, ligament su podijeljeni na manje cjeline koje nazivamo fascije. Fascije u sebi sadrže osnovna vlakna ligamenata i fibroblaste (slika 4.) koji su zaduženi za stvaranje dijelova međustaničnih tvari. Kolagena vlakna su manjeg volumena i drugačije orijentacije u odnosu na tetive. Ligament su u izvanstaničnoj matrici građeni od vode, kolagena tipa I (oko 70% osušene mase), elastina, lipida i proteoglikana. Struktura ligamenata omogućuje rastezanje od 10-15% prije ozljede. Kombinacija čvrstoće i vrlo velike mogućnosti rastezanja omogućuje najbolju absorpciju velike količine energije po jedinici mase od svih bioloških materijala [6].



Slika 4. Struktura ligamenata [7]

Uloga ligamenata je povezivanje kostiju u zglobovima, osiguravanje njihove stabilnosti i sprječavanje prekomjernog gibanja zgloba. Kolagena vlakna su kod ligamenata orijentirana u više smjerova zbog pretpostavke gibanja kostiju u više smjerova, za razliku od mišića i tetiva koje su orijentirane samo u smjeru u kojemu mišić povlači tetivu [6].

Ligamenti pokazuju viskoelastična svojstva tako što se naprezanje smanjuje pri konstanoj deformaciji. Također dolazi do puzanja koje definiramo kao elongaciju pri konstantnim opterećenjima [6].

U tablici 2 možemo vidjeti modul elastičnosti, vlačnu čvrstoću i produljenje za ligamente koljena i ligamente zgloba

Tablica 2. Mehanička svojstva ligamenata [3]

Ligamenti	**Modul elastičnosti** (MPa)	**Vlačna Čvrstoća** (MPa)	**Produljenje** %
LIGAMENTI KOLJENA			
-Prednji križni	65-541	13-46	9-44
-Stražnji križni	109-413	24-36	10-29
LIGAMENTI ZGLOBA			
-Bočni kolateralni	216-512	24-46	13-17
-Srednji kolateralni	54-321	16-34	10-33

Ligamenti su jako osjetljivi na ozlijede, naročito kod vrhunskih sportaša gdje su ozlijede takve prirode jako ozbiljne i iziskuju dugačak oporavak. Pucanje prednjih križnih ligamenata jedna je od najtežih ozljeda koju sportaš može doživjeti, a događa kod hiperekstenzije koljena, uz vanjsko opterećenje s rotacijom tibije ili kod hiperekstenzije s unutarnjom rotacijom tibije.

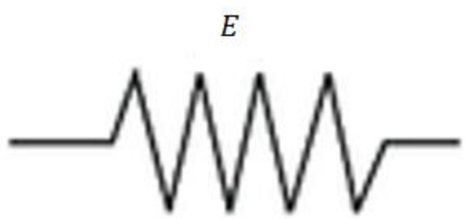
Slika 5. Hiperekstenzija koljena u doskoku

3. VISKOELASTIČNA SVOJSTVA

3.1. Viskoelastičnost i modeli za proračun

Povezanost između deformacija, naprezanja, brzine deformacije i vremena kod jednoosnog stanja naprezanja, koristimo različite modele za proračun, u kojima se koriste dva osnovna elementa: elastična opruga i viskozni prigušivač koje spajamo paralelno, serijski i u kombinacijama [8].

Linearna elastična opruga:



Slika 6. Shematski prikaz linearne elastične opruge [9]

Ako opruga ima svoju konstantu c i opterećena je silom F, onda za tu linernu elastičnu oprugu vrijede jednadžbe:

$$F = c \cdot \Delta l, \tag{1.1}$$

$$\Delta l = \frac{F}{c}, \tag{1.2}$$

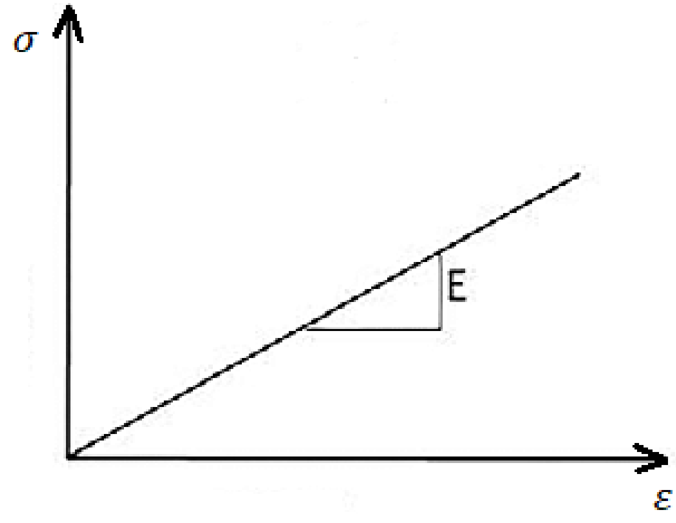
$$\Delta l = \lambda \cdot F, \tag{1.3}$$

gdje je λ koeficijent podatljivosti opruge i obrnuto je proporcionalan njezinoj krutosti.

Analogno izrazu (1.1) dobivamo izraz:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{1.4}$$

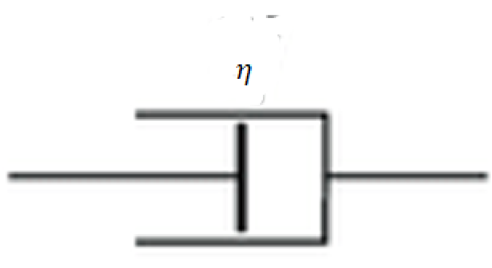
Na slici 7. možemo vidjeti graf naprezanje-deformacija za linearno elastičnu oprugu.



Slika 7. Graf naprezanje-deformacija za linearno elastičnu oprugu

Sa slike 7. i iz jednadžbe u izrazu (1.4) možemo zaključiti da je naprezanje funkcija isključivo deformacije, s obzirom da je Youngov modul elastičnosti konstantan.

Viskozni element:



Slika 8. Viskozni prigušivač [9]

U viskoznom prigušivaču relativna brzina klipa u odnosu na cilindar, proporcionalna je aksijalnoj sili F koja na njega djeluje [8].

$$F = k \cdot v_{rel}, \tag{1.5}$$

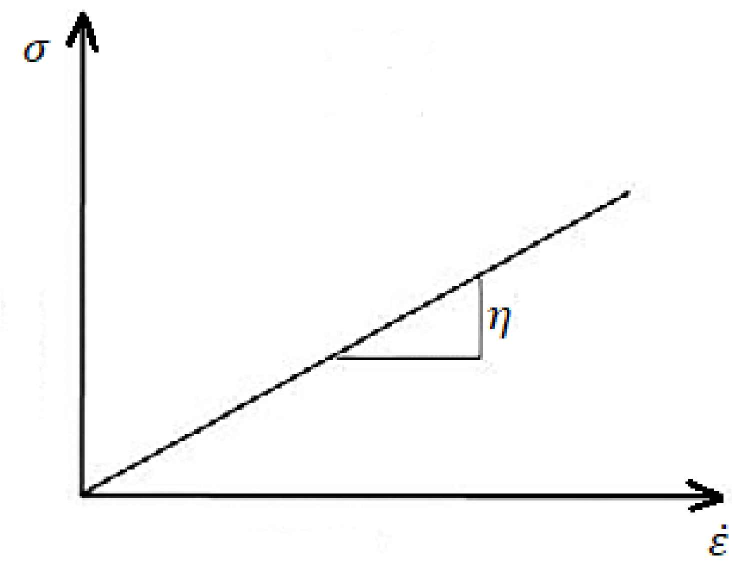
$$v_{rel} = \frac{F}{k}. \tag{1.6}$$

Analogno izrazu (1.5) dobivamo izraz:

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}, \tag{1.7}$$

gdje je $\dot{\varepsilon}$ prva derivacija deformacija, odnosno njena promjena u ovisnosti o vremenu, a η je karakteristika viskoznog prigušivača.

Karakteristiku viskoznog prigušivača možemo prikazati u dijagramu naprezanje-brzina deformacije na slici 9.



Slika 9. Viskozna karakteristika u grafu naprezanje-brzina defomacije

Prema izrazu (1.7) i grafu na slici 9. vidimo da je naprezanje funkcija brzine deformacije [8].

U viskoelastičnim materijalima naprezanje ovisi i o deformaciji i o brzini deformacije, odnosno njenoj promjeni u vremenu [8].

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}). \tag{1.8}$$

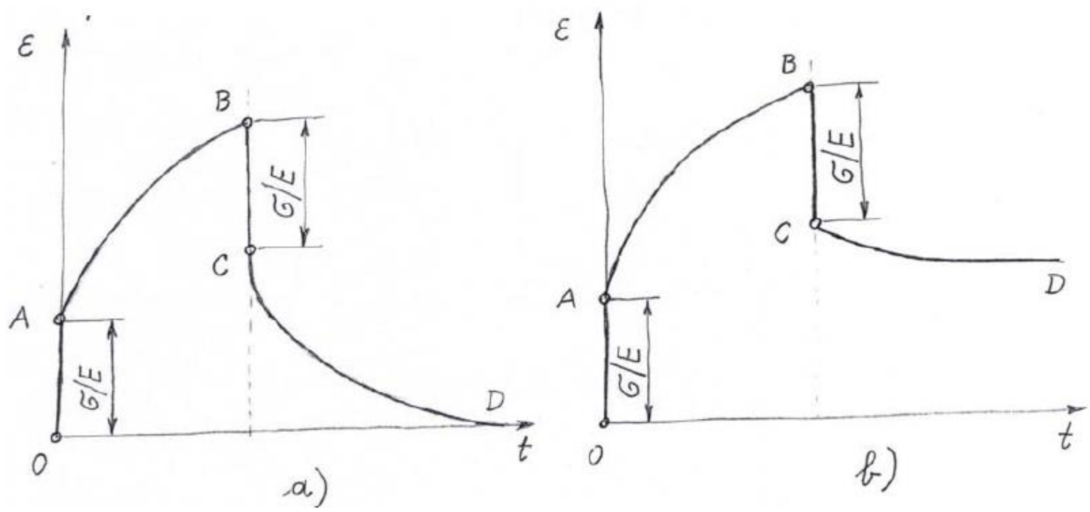
3.2. Puzanje

Naprezanja i deformacije koje se javljaju pri opterećenju deformabilnog tijela mijenjaju se tijekom vremena čak i u slučaju ako je opterećenje vremenski nepromijenjeno. Ta pojava naziva se puzanje materijala i može biti elastično ili plastično [8].

Kod elastičnog puzanja, deformacije koje su se pojavile s vremenom, smanjuju se i nakon nekog vremena potpuno nestaju (iščezavaju) [8].

Kod plastičnog puzanja, deformacije su u pravilu nepovrative jer se nakon rasterećenja one samo neznatno smanjuju [8].

Na slici 10. vidimo krivulje za elastično i plastično puzanje.



Slika 10. Krivulje puzanja [8]

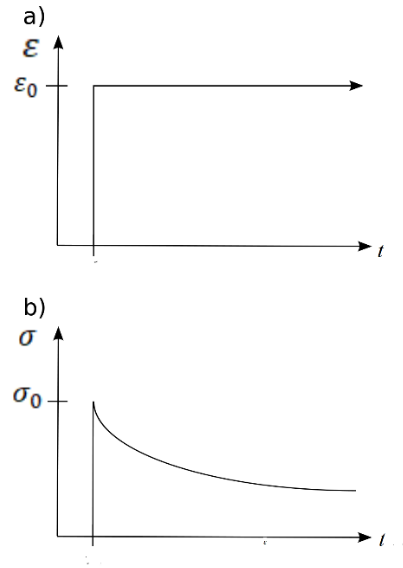
Na slici 10. a) prikazana je krivulja elastičnog puzanja koja nakon rasterećenja (u točki B) po osi deformacije dolazi do nule, tj. deformacija iščezava.

Na slici 10. b) vidimo da nakon rasterećenja (u točki B) točka D ne dodiruje os *t* što znači da imamo zaostalu defomaciju koja se tek neznatno smanjila nakon rasterećenja.

Krivulja C-D na oba grafa predstavlja krivulju relaksacije materijala nakon rasterećenja [8].

3.3. Relaksacija

Razmatra se relaksacija pri konstantnoj deformaciji kao što vidimo na slici 11 a). Pretpostavka je da je štap opterećen silom koja je u štapu izazvala naprezanje manje od granice proporcionalnosti materijala pri stalnoj temperaturi i pri tome se ukupna deformacija štapa s vremenom ne mijenja nego ostaje konstantna. Konstantna deformacija je jednaka sumi elastične i plastične (viskoelastične) deformacije nastale u procesu puzanja [8].



Slika 11. Relaksacija pri konstantnoj deformaciji [10]

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_c. \tag{1.9}$$

S obzirom da se plastična deformacija vremenom povećava, to znači da se elastična deformacija mora smanjiti [8].

Elastična deformacija može se odrediti iz Hookeovog zakona i iznosi:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}. \tag{1.10}$$

Kako se deformacija ne mijenja s vremenom, znači da je jednaka početnoj deformaciji za koju u prvom trenutku vrijedi Hookeov zakon pa imamo izraz:

$$\varepsilon = \varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}. \tag{1.11}$$

Iz izraza (1.9), (1.10) i (1.11) dobivamo izraz:

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_c, \tag{1.12}$$

gdje ε_c predstavlja plastičnu deformaciju.

Iz izraza (1.12) i sa slike 11.b) možemo zaključiti da se povećanjem plastične deformacije iznos naprezanja nužno mora smanjiti.

4. VISKOELASTIČNO PONAŠANJE KOLAGENIH VLAKANA, TETIVA I LIGAMENATA

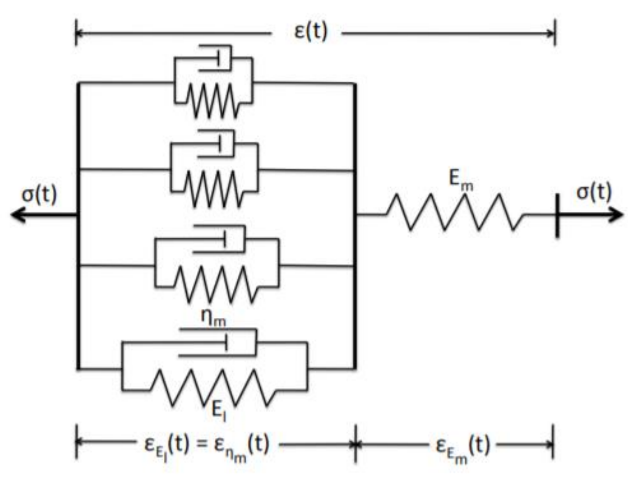
4.1. Matematički model viskoelastičnih karakteristika kolagenih vlakana

Mehanička svojstva kolagenih tkiva kao što su tetive i ligametni ovisna su direktno o svojstvima kolagenih vlakana. Kolagena vlakna smatraju se kao glavna komponenta za preuzimanje najvećeg opterećenja u tim tkivima [11].

Kolagena vlakna su sastavljena od fibrila koji su usmjereni u istom smjeru. Fibrili su građeni od mikrofibrila, a mikrofibrili su sastavljeni od kolagenih molekula koje su međusobno povezane kovalentnim vezama [11].

Viskoelastični model za proračun kolagenih vlakana formuliran je tako da je u obzir uzeta njihova struktura. Pojedino kolageno vlakno predstavlja linearno elastičnu oprugu s konstantom elastičnosti E_m. Uz to imamo seriju opruga s konstantom elastičnosti E_l povezanih s viskoznim prigušivačem s konstantom viskoznosti η_m što je vidljivo na slici 12. [11]

U ovako formuliranom modelu E_m predstavlja utjecaj mikrofibrila, E_l predstavlja utjecaj umreženih veza između mikrofibrila, dok konstanta viskoznosti η_m predstavlja utjecaj matrice. [11]



Slika 12. Model kolagenih vlakana za određivanje viskoelastičnosti [11]

Ukupno naprezanje kolagenih vlakana $\sigma(t)$ zadano je izrazom:

$$\sigma(t) = \sigma_{E_m}(t) = \sigma_{E_l}(t) + \sigma_{\eta_m}(t), \tag{1.13}$$

gdje su $\sigma_{E_m}(t)$, $\sigma_{E_l}(t)$ i $\sigma_{\eta_m}(t)$ naprezanja mikforibrila, umreženih veza i matrice. Prema slici 12. vidimo da doprinos spojeva i matrice u ukupnom naprezanju nije jednak.

Ukupna deformacija kolagenih vlakana $\varepsilon(t)$ zadana je izrazom:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{E_m}(t) + \varepsilon_{E_l}(t) = \varepsilon_{E_m}(t) + \varepsilon_{\eta_m}(t), \tag{1.14}$$

gdje su $\varepsilon_{E_m}(t)$, $\varepsilon_{E_l}(t)$ i $\varepsilon_{\eta_m}(t)$ deformacije mikrofibrila, umreženih veza i matrice.

Iz izraza (1.14) možemo zaključiti da vrijedi:

$$\varepsilon_{E_l}(t) = \varepsilon_{\eta_m}(t). \tag{1.15}$$

Naprezanje mikrofibrila definirano je kao:

$$\sigma_{E_m}(t) = E_m \varepsilon_{E_m}(t), \tag{1.16}$$

Gdje je E_{m} konstanta elastičnosti mikrofibrila.

Naprezanje u umreženim vezama kolagenih vlakana promatramo preko deformacije tih istih veza. Prema [11] pretpostavka je da spojevi kolagenih vlakana pucaju pri nekom iznosu defomacije $\varepsilon_b \geq 0$ koja je definirana eksponenacijalnom funkcijom gustoće.

$$\sigma_{E_l}(t) = E_l \varepsilon_{E_l}(t)\left\{1 - P\left[\varepsilon_{E_l}(t)\right]\right\} + E_l \int_0^{\varepsilon_{E_l}(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b, \tag{1.17}$$

gdje je E_l konstanta elastičnosti spojeva kolagenih vlakana, a $p(\varepsilon_b)$ je funkcija gustoće distribucije eksponencijalne funkcije za $\varepsilon_b \geq 0$ definirane kao:

$$p(\varepsilon_b) = \alpha e^{-\varepsilon_b}. \tag{1.18}$$

Vrijedi da je $\alpha > 0$ i označava takozvani parametar brzine.

$P\left[\varepsilon_{E_l}(t)\right]$ označava eksponencijalnu kumulativnu funkciju distribucije definiranu kao:

$$P(\varepsilon_b) = 1 - e^{-\varepsilon_b}. \tag{1.19}$$

Prvi izraz na desnoj strani jednadžbe (1.17) predstavlja naprezanje svih spojeva kolagenih vlakana koja nisu puknula, dok drugi izraz s desne strane predstavlja naprezanje kod puknutih spojeva.

Naprezanje matrice definirano je uzimajući u obzir razlike konstanti viskoznosti determiniranih pucanjem spojeva kolagenih vlakana. Izraz za naprezanje u matrici onda ima oblik:

$$\sigma_{\eta_m}(t) = \eta_{m_u}\dot{\varepsilon}_{\eta_m}(t)\left[1 - \int_0^{\varepsilon_{\eta_m}(t)} p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b\right] + \eta_{m_b}\dot{\varepsilon}_{\eta_m}(t)\int_0^{\varepsilon_{\eta_m}(t)} p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b, \tag{1.20}$$

gdje η_{m_u} i η_{m_b} označavaju konstante viskoznosti za čitave, odnosno za puknute spojeve kolagenih vlakana. U jednadžbi (1.20) prvi izraz na desnoj strani jednakosti predstavlja doprinos matrica sa čitavim spojevima, dok drugi izraz predstavlja doprinos matrice sa puknutim spojevima kolagenih vlakana. Pretpostavljeno je da su dio matrice sa čitavim spojevima i preostali dio matrice sa puknutim spojevima podvrgnuti jednakoj deformaciji $\varepsilon_{\eta_m}(t)$. [10.]

Ako u jednadžbu (1.13) uvrstimo jednadžbe (1.16), (1.17) i (1.20) dobivamo izraz:

$$\begin{aligned} E_m\varepsilon_{E_m}(t) = E_l\varepsilon_{E_l}(t)\{1 - P[\varepsilon_{E_l}(t)]\} + E_l\int_0^{\varepsilon_{E_l}(t)} \varepsilon_b p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b \\ + \eta_{m_u}\dot{\varepsilon}_{\eta_m}(t)\left[1 - \int_0^{\varepsilon_{\eta_m}(t)} p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b\right] \\ + \eta_{m_b}\dot{\varepsilon}_{\eta_m}(t)\int_0^{\varepsilon_{\eta_m}(t)} p(\varepsilon_b)d\varepsilon_b. \end{aligned} \tag{1.21}$$

S obzirom da vrijedi:

$$\varepsilon_{E_l}(t) = \varepsilon_{\eta_m}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_{E_m}(t), \tag{1.22}$$

znači da onda vrijedi i:

$$\dot{\varepsilon}_{E_l}(t) = \dot{\varepsilon}_{\eta_m}(t) = \dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}_{E_m}(t). \tag{1.23}$$

Izraz (1.21) možemo prikazati kao:

$$\dot{\varepsilon}_{E_m}(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \frac{\frac{E}{\alpha}\left(e^{-\alpha[\varepsilon(t)-\varepsilon_{E_m}(t)]} - 1\right) - \varepsilon_{E_m}(t)}{A\left(\tau_{m_u},\ \tau_{m_b}, \varepsilon_{E_m}(t), \varepsilon(t), \alpha\ \right)}, \tag{1.24}$$

Gdje vrijede relacije:

$$E = \frac{E_l}{E_m}, \tag{1.25}$$

$$A = A\left(\tau_{m_u}, \tau_{m_b}, \varepsilon_{E_m}(t), \varepsilon(t), \alpha\ \right), \tag{1.26}$$

$$\tau_{m_u} = \frac{\eta_{m_u}}{E_m}, \tag{1.27}$$

$$\tau_{m_b} = \frac{\eta_{m_b}}{E_m}. \tag{1.28}$$

Kada uzmemo u obzir da vrijedi $\sigma(t) = \sigma_{E_m}(t)$ i kada deriviramo izraz (1.16) dobivamo:

$$\dot{\sigma}(t) = E\dot{\varepsilon}_{E_m}(t). \tag{1.29}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (1.24) u izraz (1.29) dobivamo sustav jednostavnih diferencijalnih jednadžbi i samim time model za određivanje viskoelastičnih svojstava kolagenih vlakana.

Uz uvrštavanje primjerenih početnih uvjeta možemo dobiti opis mehaničkog ponašanja kolagenih vlakana.

4.1.1. Ukupna deformacija kolagenih vlakana

Kada bismo htjeli opisati konačni izgled krivulje naprezanje deformacija izračunatu inkrementalnim ispitivanjem za naprezanje i deformaciju, pomaže nam sustav diferencijalnih jednadžbi (1.24) i (1.29). Ovaj problem rješava se s pretpostavkom da deformacija kolagenih vlakana $\varepsilon(t)$ ima oblik [11]:

$$\varepsilon(t) = \mathrm{a}t. \tag{1.30}$$

Za izraz (1.30) vrijedi da je $t > 0$, dok koeficijent a označava promjenu deformacije. Kod inkrementalnog ispitivanja naprezanja i deformacija koeficijent a se ne mijenja (konstantan je) [11].

4.1.2. Relaksacija kolagenih vlakana

Relaksacija kolagenih vlakana može biti determinirana rješavanjem osnovnih diferencijalnih jednadžbi (1.24) i (1.29). Povijest deformacija kolagenih vlakana $\varepsilon(t)$ ima oblik:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \mathrm{a}t, \text{za } 0 \leq t \leq t_0 \\ \varepsilon_0, \text{za } t \geq t_0 \end{cases}, \tag{1.31}$$

gdje su a i t_0 konstante. Koeficijent a predstavlja promjenu deformacije koja se povećava od 0 do neke konstantne vrijednosti ε_0, što odgovara vrijednosti deformacije u trenutku t_0 [11].

Za $0 \leq t \leq t_0$ vrijedi da je prva derivacija deformacije jednaka konstanti a. Uvrštavanjem početnog uvjeta $\sigma(0) = 0$ i $\varepsilon_{E_m}(0) = 0$. Sustav diferencijalnih jednadžbi (1.24) i (1.29) može se riješiti i time su determinirane vrijednosti $\sigma(t_0)\ i\ \varepsilon_{E_m}(t_0)$. Te dvije vrijednosti koristimo kao početne uvjete za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi kod kojih vrijedi $t \geq t_0$ [11].

Za izraz $t \geq t_0$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ i $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ te uvrštavanjem početnih uvjeta dobivenih u prethodnom koraku, možemo izračunati naprezanje $\sigma(t)$ koje definira relaksaciju kolagenih vlakana.

4.2. Matematički model viskoelastičnih svojstava tetiva i ligamenata

Kolagena tkiva kao što su ligamenti i tetive pokazuju viskoelastična svojstva. Izložena su polaganom kontinuiranom povećanju deformacije tijekom vremena. Uz kontinuirano povećanje deformacije izloženi su i puzanju koje je definirano tako da pri konstantnom naprezanju dolazi do postepenog smanjenja naprezanja kroz vrijeme. Relaksacija je također jedna od pojava kod bioloških tkiva, a opisana je kroz konstantnu deformaciju [11].

Dijagram naprezanje-deformacija izgleda drugačije kod različitih tipova naprezanja (cikličko, istosmjerno, naizmjenično).

Povezanost mikrostrukture ovih tkiva i njihovo svojstvo viskoelastičnosti još su uvijek velika nepoznanica i predmet rasprave u modernoj biomehanici. Formuliranje modela viskoelastičnosti pojedinih elemenata u tkivima može nam pomoći u promatranju viskoelastičnosti cijelog tkiva kao jedne cjeline.

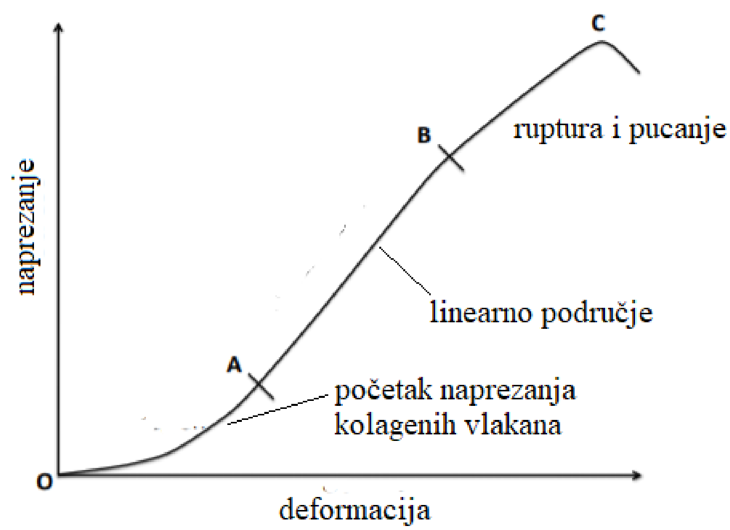
Nelinearno viskoelastično ponašanje ligamenata i tetiva možemo modelirati tako da uzmemo u obzir njihove osnovne strukturne elemente: kolagena vlakna i proteoglikansku matricu.

Matematički modeli ovih struktura spojenih u jedno može nam dočarati vlačna svojstva, relaksaciju i puzanje bioloških materijala.

Kolagena vlakna su elastična i njih možemo u modelu prikazati kao linearno elastična opruga. Proteoglikanska matrica pokazuje viskozna svojstva pa će ona u modelu predstavljati viskozni prigušivač.

Njaveću potporu kod različitih vrijednosti deformacija tkiva pružaju kolagena vlakna. Kod otpora vlačnom opterećenju jednako bitnu ulogu imaju i proteoglikanska matrica i kolagena vlakna. Kolagena vlakna imaju dominantnu ulogu kod puzanja, dok proteoglikanska matrica ima dominantnu ulogu kod relaksacije [11].

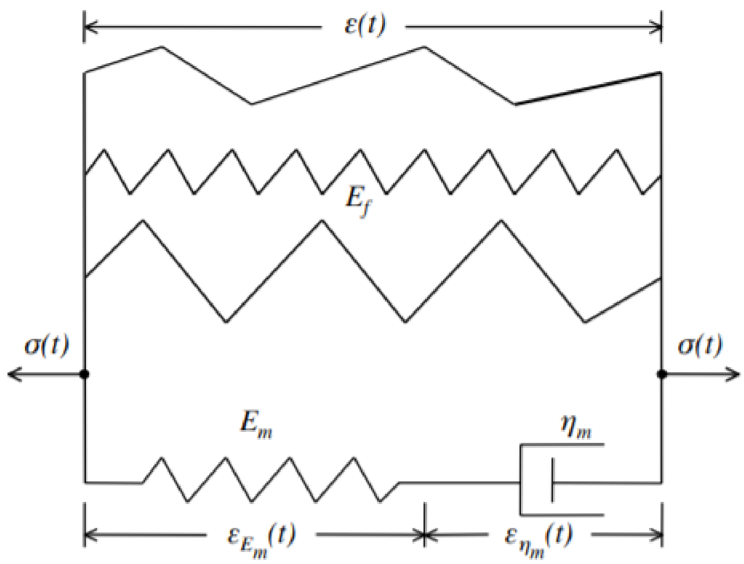
Na slici 13. možemo vidjeti tipičnu krivulju vlačne čvrstoće tetiva i ligamenata u dijagramu naprezanje-deformacija.



Slika 13. Vlačna čvrstoća ligamenata i tetiva

4.2.1. Modeliranje viskoelastičnih svojstava

Model za prikaz viskoelastičnih svojstava ligamenata i tetiva na slici 14. prikazuje paralelno spojene linearno elastične opruge različitih svojstava. Uz linearne opruge još je paralelno spojen viskozni prigušivač s elastičnom oprugom koji predstavlja ponašanje proteoglikanske matrice.



Slika 14. Model za određivanje viskoelastičnosti ligamenata i tetiva [11]

Ukupno naprezanje tkiva tetiva i ligamenata prikazano je jednadžbom.

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + \sigma_m(t), \tag{1.32}$$

gdje $\sigma_f(t)$ predstavlja naprezanje u kolagenim vlaknima, dok $\sigma_m(t)$ predstavlja naprezanje u matrici.

Ukupna deformacija modela tkiva zadano je izrazom:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_f(t) = \varepsilon_m(t), \tag{1.33}$$

gdje $\varepsilon_f(t)$ predstavlja defomacije kolagenih vlakana, a $\varepsilon_m(t)$ predstavlja deformacije u matrici.

Izraz za naprezanje možemo rasčlaniti i onda on poprima oblik:

$$\sigma_m(t) = \sigma_{E_m}(t) = \sigma_{\eta_m}(t). \tag{1.34}$$

U izrazu (1.34) deformacije su jednake jer su serijski spojevi linearno elastična opruga i viskozni prigušivač. $\sigma_{E_m}(t)$ predstavlja elastičnu komponentu, dok $\sigma_{\eta_m}(t)$ predstavlja viskoznu komponentu naprezanja u matrici.

Kao i kod naprezanja, možemo rasčlaniti deformacije do kojih dolazi u matrici, pa vrijedi izraz:

$$\varepsilon_m(t) = \varepsilon_{E_m}(t) + \varepsilon_{\eta_m}(t), \tag{1.35}$$

i vrijedi da je $\varepsilon_{E_m}(t)$ elastična deformacija, tj. deformacija opruge, dok $\varepsilon_{\eta_m}(t)$ predstavlja deformaciju viskoznog prigušivača.

Elastično naprezanje kod kolagenih vlakana unutar modela definirano je izrazom:

$$\sigma_{E_m}(t) = E_m \varepsilon_{E_m}(t). \tag{1.36}$$

Viskozno naprezanje u matrici možemo proširiti izrazom:

$$\sigma_{\eta_m}(t) = \eta_m \dot{\varepsilon}_{\eta_m}(t). \tag{1.37}$$

E_m i η_m u izrazima (1.36) i (1.37) predstavljaju konstantu elastičnosti, odnosno koeficijent viskoznosti kod poliglikanske matrice. Kao što je vidljivo iz izraza (1.37) naprezanje u matrici je funkcija prve derivacije deformacije po vremenu t.

Ako uzmemo u obzir da je $\sigma_m(t) = \sigma_{E_m}(t)$ iz izraza (1.34) i da je $\sigma_m(t) = \sigma(t) - \sigma_f(t)$ iz jednadžbe (1.32) i uvrstimo te podatke u izraz (1.36) dobivamo:

$$\varepsilon_{E_m}(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma_f(t)}{E_m}. \tag{1.38}$$

Isto tako, ako uzmemo u obzir da je $\varepsilon_{\eta_m}(t) = \varepsilon_m(t) - \varepsilon_{E_m}(t)$ iz jednadžbe (1.35) i da je $\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t)$ iz jednadžbe (1.33) i uvrstimo ih u jednadžbu (1.37) dobivamo:

$$\sigma_{\eta_m}(t) = \eta_m \dot{\varepsilon}(t) - \eta_m \dot{\varepsilon}_{E_m}(t). \tag{1.39}$$

Ako znamo da je $\sigma_m(t) = \sigma_{\eta_m}(t)$ iz jednadžbe (1.34) i koristeći jednadžbu (1.39) dobivamo novi oblik jednadžbe (1.32):

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + \eta_m \dot{\varepsilon}(t) - \eta_m \dot{\varepsilon}_{E_m}(t). \tag{1.40}$$

Konačno, nakon računanja izraza $\varepsilon_{E_m}(t)$ iz jednadžbe (1.38) i uvrštavanjem izračunatog izraza u (1.40) dobivamo:

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_m}{\eta_m}\sigma(t) = \dot{\sigma}_f(t) + \frac{E_m}{\eta_m}\sigma_f(t) + E_m\dot{\varepsilon}(t). \tag{1.41}$$

Omjer $\frac{\eta_m}{E_m}$ je karakteristično vrijeme označeno slovom τ, koje se uobičajeno naziva vrijeme relaksacije. Uvrštavanjem tog izraza jednadžba (1.41) poprima oblik:

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{\tau} = \dot{\sigma}_f(t) + \frac{\sigma_f(t)}{\tau} + E_m\dot{\varepsilon}(t). \tag{1.42}$$

Kada definiramo naprezanje $\sigma_f(t)$ (naprezanje kolagenih vlakana) sa početnim uvjetima, izraz (1.42) može se koristiti za opis puzanja relaksacije i očvrsnuća uslijed deformacije)

4.2.2. Naprezanje kolagenih vlakan

Naprezanje vlaknaste komponente unutar tkiva, $\sigma_f(t)$, definirano je strukturom kolagenih vlakana. Pretpostavka je da kolagena vlakna postaju ravna pri različitim deformacijama $\varepsilon_s \geq 0$ definirane Weibnlovom funkcijom gustoće [11]:

$$p(\varepsilon_s) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\varepsilon_s}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{\varepsilon_s}{\beta}\right)^{\alpha}}, \tag{1.43}$$

$$\int_0^{\infty} p(\varepsilon_s)d\varepsilon_s = 1, \tag{1.44}$$

gdje vrijedi da je $\alpha > 0$ i naziva se parametar oblika. β se naziva parametar simetrije i također vrijedi uvjet da je veći od 0.

Naprezanje za kolagena vlakna uz uvjet $\varepsilon \geq \varepsilon_s$ iznosi:

$$\sigma_f(t) = \int_0^{\varepsilon(t)} E_f[\varepsilon(t) - \varepsilon_s]\beta(\varepsilon_s)d\varepsilon_s. \tag{1.45}$$

Izraz (1.45) također možemo zapisati kao:

$$\sigma_f(t) = E_f\left[\varepsilon(t) - \frac{\beta}{\alpha}\gamma\left(\frac{1}{\alpha},\left(\frac{\varepsilon(t)}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\right], \tag{1.46}$$

gdje je:

$$\gamma(x,y) = \int_0^y \xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi \tag{1.47}$$

takozvana gama funkcija.

4.2.3. Relaksacija

Relaksacija je pojava kod koje promatramo kontinuirano smanjenje naprezanja uz konstantnu vrijednost deformacije. Za bilo kakvu povijest deformacije, $\varepsilon(t)$, riješenje za jednadžbu (1.42) glasi:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + \frac{\int_0^t E_m\dot{\varepsilon}\,(t)e^{\frac{t}{\tau}} + \mathrm{C}}{e^{\frac{t}{\tau}}}, \tag{1.48}$$

gdje je C konstanta uvjetovana početnim uvjetima.

Da bismo opisali relaksaciju koristeći jednadžbu (1.48). Povijest deformacije tkiva ima pretpostavljeni oblik:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \mathrm{a}t, \text{za } 0 \le t \le t_0 \\ \varepsilon_0, \text{za } t \ge t_0 \end{cases}, \tag{1.49}$$

gdje su a, ε_0 i t_0 konstante. Za $0 \le t \le t_0$ još vrijedi da je $at_0 = \varepsilon_0$ i da je $\dot{\varepsilon}(t) = a$, pa jednadžba (1.48) poprima oblik:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + E_m a\tau\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + \mathrm{C}e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{1.50}$$

Uvrštavajući početne uvjete $\sigma(0) = 0$ i $\varepsilon(0) = 0$ dobivamo da je konstanta C jednaka nuli. Prema tome, naprezanje u tkivu za uvjet $0 \le t \le t_0$ ima oblik:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + E_m \mathrm{a}\tau\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]. \tag{1.51}$$

Za uvjete $t \geq t_0$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ i $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ jednadžba poprima oblik:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + \mathrm{C}e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{1.52}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta izračunatih izrazima (1.50) i (1.51) dobivamo vrijednost:

$$C = E_m \mathrm{a}\tau\left(e^{\frac{t_0}{\tau}} - 1\right). \tag{1.53}$$

Za vrijednosti $t \geq t_0$ naprezanje u tkivu može se zapisati kao:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + E_m \mathrm{a}\tau\left[e^{\frac{t_0 - t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]. \tag{1.54}$$

Jednadžba (1.54) opisuje relaksaciju tkiva. U ovom slučaju jednadžbu (1.46) uvrštavamo u (1.54) i dobivamo oblik jednadžbe naprezanja:

$$\sigma_f(t) = E_f\left[\varepsilon_0 - \frac{\beta}{\alpha}\gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{\varepsilon_0}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\right]. \tag{1.55}$$

4.2.4. Nelinearno očvrsnuće uslijed deformacija

Kod kolagenih tkiva primjećuje se ponašanje materijala u kojem dolazi do očvrsnuća pri konstantnom povećanju deformacija. Kao što je napomenuto jednadžba (1.48) daje rješenje za bilo kakvu povijest deformacija materijala.

U ovom slučaju povijest deformiranja ima oblik $\varepsilon(t) = bt$, za $t > 0$ i konstantnu vrijednost b. Kao početne uvjete uzimamo $\sigma(0) = 0$, slijedi da je $\varepsilon(0) = 0$, što znači da je i $\mathrm{C} = 0$. Nakon uvrštavanja navedenih vrijednosti dobivamo izraz:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + E_m \mathrm{b}\tau\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]. \tag{1.56}$$

4.2.5. Puzanje

Puzanje je pojava kontinuirane deformacije uslijed konstantnog naprezanja. Treba izračunati jednadžbu (1.42) kako bismo dobili deformacije u tkivu $\varepsilon(t)$. Primjenjujemo Leibnitzovo pravilo diferecijala i integrala u izrazu (1.45) pa dobivamo izraz:

$$\dot{\sigma}(t) = E_f \dot{\varepsilon}(t) \int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon_s) d\varepsilon_s. \tag{1.57}$$

Funkcija $p(\varepsilon_s)$ je definirana jednadžbom (1.44), pa jednadžba (1.57) može biti zapisana u obliku:

$$\dot{\sigma}(t) = E_f \dot{\varepsilon}(t) \left[1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\alpha}}\right]. \tag{1.58}$$

Koristeći jednadžbu (1.58) možemo izraz (1.42) zapisati u obliku

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{\tau} - \frac{\sigma_f}{\tau}}{E_f\left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\alpha}}\right) + E_m}. \tag{1.59}$$

Izrazi (1.58) i (1.59) predstavljaju sustav diferencijalnih jednadžbi koje mogu biti numerički riješene kako bismo našli naprezanje i deformaciju u ovisnosti o vremenu kada uvrstimo početne uvjete.

U opisu puzanja, povijest naprezanja ima pretpostavljeni oblik:

$$\sigma(t) = \begin{cases} ct, \text{za } 0 \leq t \leq t_0 \\ \sigma_0, \text{za } t \geq t_0 \end{cases}, \tag{1.60}$$

gdje su c, σ_0 i t_0 konstante, a $ct_0 = \sigma_0$.

Za $0 \leq t \leq t_0$, $\dot{\sigma}(t) = \mathrm{c}$ i $\sigma(t) = \mathrm{c}t$ pa jednadžba 1.59) poprima oblik:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\mathrm{c} + \frac{\mathrm{c}t}{\tau} - \frac{\sigma_f}{\tau}}{E_f\left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\alpha}}\right) + E_m}. \tag{1.61}$$

Numeričkim rješavanjem jednadžbe (1.58) i (1.61) možemo naći deformaciju tkiva u ovisnosti o vremenu uvrštavanjem početnih uvjeta $\sigma_f(0) = 0,\ \varepsilon(0) = 0.$ Za sve $t \geq t_0,\ \sigma(t) = \sigma_0$ i $\dot{\sigma}(t) = 0$ jednadžba (1.59) poprima oblik:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\frac{\sigma_0}{\tau} - \frac{\sigma_f}{\tau}}{E_f\left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\alpha}}\right) + E_m}. \tag{1.61}$$

Rješavanjem sustava diferencijalnih jednadžbi donosi nam rješenje jednadžbe puzanja pri konstantnoj deformaciji.

ZAKLJUČAK

U radu je razmotreno ponašanja tkiva koja u sebi sadrže kolagena vlakna, s posebnim fokusom na sama vlakna, tetive i ligamente. S obzirom da je eksperimentalno gotovo nemoguće testirati biološke materijale što zbog etičkih, što zbog praktičnih razloga preostaje nam proučavati zadana svojstva preko matematičkih modela.

Modeli su strukturirani tako što je uzeta osnovna stuktura tkiva koja je proučena i u modelu kombinirana njihova svojstva kako bi se dobio što vjerodostojniji opis ponašanja bioloških materijala u stvarnosti.

Kod proučavanja kolagenih vlakana uzete su u obzir mikrofibrile i umrežene spojeve za model, dok su za proučavanje viskoelastičnog ponašanja ligamenata i tetiva uzeta u obzir sama kolagena vlakna i poliglikanska matrica i preko njihovih svojstava određeno je ponašanje bioloških materijala.

Kroz modele je pokazano viskoelastično ponašanje bioloških materijala, njihova ovisnost o brzini i trajanju naprezanja i deformacija. Pokazano je i da biološki materijali podliježu procesima puzanja, relaksacije, ali i da se događa nelinearno očvrsnuće kod ligamenata i tetiva uslijed povećane deformacije.

Kao što je već napomenuto u početku, još uvijek su ova svojstva velika nepoznanica zbog nemogućnosti testiranja, ali nam ovi modeli omogućuju dobar uvid što se događa kod bioloških materijala u ljudskom tijelu.

LITERATURA

[1] http://www.inpharma.hr/index.php/news/444/19/Kolagen 01./02.2021.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Tendon 01./02.2021.

[3] Hin, Teoh Swee: Engineering Materials for Biomedical Applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2004.

[4] Savhney, G. S.: "Fundamentals of Biomedical Engineering", 2007.

[5] http://ajs.sagepub.com/content/26/6/794/F1.expansion 01./02.2021.

[6] Kumar, P.: Overwiew of ligaments, https://www.slideshare.net/PrashanthKumar132/ligament 01/02. 2021.

[7]http://sites.bsyse.wsu.edu/pitts/be120/Handouts/animal%20tssue%20descriptions%20and%20mechanical%20proprties.htm 01./02.2021.

[8] Pustaić, D., Cukor, I.: "Teorija plastičnosti i viskoelastičnosti", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009., 01./02.2021

[9] Wrobel, J., Cortez, R., Fauci, L.:"Modelling viscoelastic network in stokes flow, 2014.

https://www.researchgate.net/publication/280207530_Modeling_viscoelastic_networks_in_Stokes_flow 01. /02. 2021.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_relaxation 01./02.2021

[11] Sopakayang, R. D.:"Viscoelastic Models for Ligaments and Tendons" Virginia Polytechinc Institute and State University, 2010., 01./02.2021