

# Ciklus naprežanja u korijenu zuba zupčanika s asimetričnim zubima

---

Žganec, Benjamin

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:084522>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-26**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Benjamin Žganec**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**

**CIKLUS NAPREZANJA U  
KORIJENU ZUBA ZUPČANIKA S  
ASIMETRIČNIM ZUBIMA**

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Krešimir Vučković

Student:

Benjamin Žganec

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Krešimiru Vučkoviću na svim korisnim savjetima i nesebično pruženoj pomoći tijekom izrade ovog preddiplomskog završnog rada.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji na pruženoj moralnoj i financijskoj podršci tijekom preddiplomskog studija.

Benjamin Žganec



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Benjamin Žganec** Mat. br.: 0035205662

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika s asimetričnim zubima**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Stress cycle in tooth root of a gear with asymmetric teeth**

Opis zadatka:

Nosivost zupčanih parova mora biti takva da unutar predviđenog životnog vijeka ne dođe do nastanka oštećenja koja mogu utjecati na normalan rad. Budući da se opterećenje s pogonskog na gonjeni zupčanik prenosi mijenjajući svoj pravac djelovanja, položaj i intenzitet, mijenja se i naprezanje u korijenu zuba zupčanika te uslijed zamora materijala može nastupiti lom zuba. U cilju pravilnog oblikovanja zupčanika nužno je stoga sa što većom točnošću odrediti ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika.

Za razliku od zupčanika sa simetričnim zubima kod kojih je ciklus naprezanja u korijenu operativnog boka zuba jednak bez obzira na to koji je bok (lijevi ili desni) operativan, to kod zupčanika s asimetričnim zubima nije slučaj.

U radu je, primjenom metode konačnih elemenata, potrebno odrediti ciklus naprezanja u korijenu operativnog boka zuba cilindričnog zupčanika za sljedeće slučajeve:

- operativni bok zuba ima manji tlačni kut od neoperativnog,
- operativni bok zuba ima tlačni kut jednak neoperativnom (simetričan zub) i
- operativni bok zuba ima veći tlačni kut od neoperativnog.

Pretpostaviti:

- da se analizirani korijen operativnog boka zuba nalazi na pogonskom zupčaniku,
- da su pogonski i gonjeni zupčanik izrađeni iz čelika te su geometrijski identični.

Vrijednosti potrebne za proračun i odabir pojedinih komponenti usvojiti iz postojećih rješenja sličnih uređaja, iskustvenih vrijednosti te u dogovoru s mentorom.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
30. studenoga 2020.

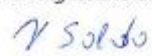
Datum predaje rada:  
1. rok: 18. veljače 2021.  
2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.  
3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 22.2. – 26.2.2021.  
2. rok (izvanredni): 9.7.2021.  
3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

  
Izv. prof. dr. sc. Krešimir Vučković

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Asimetrični zubi.....	3
2. MODELIRANJE ZUPČANIKA .....	4
2.1. Zupčanik sa simetričnim zubima .....	4
2.2. Zupčanik s asimetričnim zubima .....	6
3. NUMERIČKA ANALIZA CIKLUSA NAPREZANJA .....	13
3.1. Numeričko modeliranje.....	13
3.2. Analiza ciklusa naprezanja.....	15
3.2.1. Slučaj kada je bok s $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ operativan .....	16
3.2.2. Slučaj kada je bok s $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ operativan .....	21
3.2.3. Slučaj kada je bok s $\alpha_n = 20^\circ$ operativan (simetričan zub).....	25
4. PRIKAZ I SINTEZA REZULTATA .....	29
4.1. Usporedba ciklusa naprezanja po slučajevima zahvata .....	30
4.2. Usporedba ciklusa naprezanja po slučajevima zahvata s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem .....	32
4.3. Promjena rubnih uvjeta .....	37
5. ZAKLJUČAK.....	40
LITERATURA.....	41
PRILOZI.....	42

**POPIS SLIKA**

Slika 1. Zupčani par s ravnim zubima [1] .....	1
Slika 2. Radijalna i obodna komponenta normalne sile $F_{bn}$ [2] .....	2
Slika 3. Lom zuba uslijed savojnog opterećenja [3] .....	2
Slika 4. Zupčanici s asimetričnim zubima u zahvatu [4] .....	3
Slika 5. Korisničko sučelje pri modeliranju zupčanika [6] .....	4
Slika 6. Zupčanici sa simetričnim zubima u zahvatu .....	6
Slika 7. Osnovne dimenzije asimetričnog zuba [8].....	8
Slika 8. Zupčanici u zahvatu kada je operativan bok s $\alpha_{n,D}=28^\circ$ .....	9
Slika 9. Zupčanici u zahvatu kada je operativan bok s $\alpha_{n,C}=18^\circ$ .....	9
Slika 10. Dimenzije debljina zuba i uzubina na kinematskim promjerima pogonskog i gonjenog zupčanika .....	11
Slika 11. Podjela geometrijskog modela pogonskog zupčanika na blokove.....	13
Slika 12. Mreža konačnih elemenata za 1. slučaj zahvata zubi $\alpha_{n,D}=28^\circ$ .....	14
Slika 13. Rubni uvjeti zupčanih parova .....	15
Slika 14. Pozicija čvora u korijenu zuba određena kutom $\varphi$ .....	16
Slika 15. Područje varijacije konačnog broja elemenata.....	17
Slika 16. Konvergenција maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj zahvata asimetričnih zupčanika $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ .....	17
Slika 17. Detaljan izgled mreže konačnih elemenata za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ .....	18
Slika 18. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ .....	18
Slika 19. Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ .....	19
Slika 20. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ s uključenim trenjem .....	20
Slika 21. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem.....	21
Slika 22. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ .....	22
Slika 23. Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ .....	22
Slika 24. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ s uključenim trenjem.....	23
Slika 25. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem.....	24
Slika 26. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ .....	25
Slika 27. Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ .....	25
Slika 28. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ s uključenim trenjem.....	26
Slika 29. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem.....	27
Slika 30. Ciklus naprezanja korijena zuba za zupčanik sa simetričnim zubima sa karakterističnim točkama zahvata .....	29
Slika 31. Naprezanje u korijenu zuba k u trenutku kada opterećenje djeluje na operativni bok promatranog zuba (a) i kada opterećenje djeluje na operativni bok zuba koji u zahvat ulazi nakon promatranog zuba (b) [13].....	30
Slika 32. Ciklusi naprezanja različitih zahvata za slučaj bez uključenog trenja i centrifugalnog opterećenja.....	31
Slika 33. Promjena djelovanja smjera sile trenja na gonjenom zupčaniku [14] .....	32
Slika 34. Ciklusi naprezanja različitih zahvata za slučaj $\mu = 0,05$ i $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ .....	33
Slika 35. Ciklusi naprezanja različitih zahvata za slučaj $\mu = 0,1$ i $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ .....	33

---

Slika 36. Čvor s maksimalnim glavnim naprežanjem za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ za $\mu = 0,05$ (lijevo) i $\mu = 0,1$ (desno).....	34
Slika 37. Maksimalno naprežanje u korijenu zuba u funkciji tlačnog kuta operativnog boka	36
Slika 38. Minimalno naprežanje u korijenu zuba u funkciji tlačnog kuta operativnog boka...	36
Slika 39. Smithov dijagram s korigiranom trajnom dinamičkom čvrstoćom $\sigma_{FEkor}$ .....	37
Slika 40. Promijenjeni rubni uvjeti zupčanog para .....	38
Slika 41. Ciklusi naprežanja za oba načina zadavanja rubnih uvjeta.....	39



## POPIS TABLICA

Tablica 1. Geometrijske karakteristike zupčanog para sa simetričnim zubima .....	5
Tablica 2. Geometrijske karakteristike zupčanog para s asimetričnim zubima .....	6
Tablica 3. Svojstva materijala zupčanika .....	15
Tablica 4. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ s uključenim utjecajem centrifugalnog opterećenja .....	19
Tablica 5. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ s uključenim utjecajem trenja .....	20
Tablica 6. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ s uključenim utjecajem trenja i centrifugalnim opterećenjem .....	21
Tablica 7. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ s uključenim utjecajem centrifugalnog opterećenja .....	23
Tablica 8. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ s uključenim utjecajem trenja .....	23
Tablica 9. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ s uključenim utjecajem trenja i centrifugalnog opterećenja .....	24
Tablica 10. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ s uključenim utjecajem centrifugalnog opterećenja .....	26
Tablica 11. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ s uključenim utjecajem trenja .....	27
Tablica 12. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj $\alpha_n = 20^\circ$ s uključenim utjecajem trenja i centrifugalnim opterećenjem .....	28
Tablica 13. Granične vrijednosti glavnog naprezanja po slučajevima zahvata bez utjecaja trenja i centrifugalnog opterećenja .....	31
Tablica 14. Granične vrijednosti glavnog naprezanja po slučajevima zahvata za $\mu = 0,05$ i $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ .....	34
Tablica 15. Granične vrijednosti glavnog naprezanja po slučajevima zahvata za $\mu = 0,1$ i $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ .....	35
Tablica 16. Usporedba graničnih vrijednosti naprezanja za oba načina zadavanja rubnih uvjeta .....	39

**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
$a$	mm	Osni razmak zupčanog para
$a_d$	mm	Osni razmak nultih zupčanika
$d$	mm	Diobeni promjer zupčanika
$d_{ak}$	mm	Tjemeni promjer zupčanika sa skraćenim tjemenom
$d_b$	mm	Temeljni promjer zupčanika
$d_w$	mm	Kinematski promjer zupčanika
$E$	N/mm <sup>2</sup>	Modul elastičnosti
$e_w$	mm	Širina uzubine zupčanika na kinematskom promjeru
$F_{bn}$	N	Normalna sila na zub zupčanika
$h_{aP}$	mm	Tjemena visina osnovnog profila ozubljenja
$h_{fP}$	mm	Podnožna visina osnovnog profila ozubljenja
$km$	mm	Skraćenje tjemena zuba zupčanika
$m_n$	mm	Normalni modul zupčanika
$n$	min <sup>-1</sup>	Brzina okretaja zupčanika
$p_w$	mm	Korak zupčanika na kinematskom promjeru
$R$	-	Odnos graničnih naprezanja
$s_w$	mm	Debljina zuba zupčanika na kinematskom promjeru
$T$	Nmm	Okretni moment
$x$	-	Faktor pomaka profila
$z$	-	Broj zubi zupčanika
$\alpha_n$	°	Kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja
$\alpha_w$	°	Pogonski kut zahvatne crte
$\theta$	°	Kut zakreta gonjenog zupčanika
$\mu$	-	Faktor trenja
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\rho$	g/mm <sup>3</sup>	Gustoća
$\rho_{fP}$	mm	Polumjer zaobljenja podnožja osnovnog profila ozubljenja
$\sigma_{FE}$	N/mm <sup>2</sup>	Trajna dinamička čvrstoća
$\sigma_{FEkor}$	N/mm <sup>2</sup>	Korigirana trajna dinamička čvrstoća
$\sigma_\varphi$	N/mm <sup>2</sup>	Naprezanje u smjeru tangente na prijelaznu krivulju

$\varphi$

°

Kut tangente na prijelaznu krivulju

---

**SAŽETAK**

Odgovarajućom nosivošću zupčanih parova osigurava se da ne dođe do nastanka oštećenja koja mogu utjecati na normalan rad unutar predviđenog životnog vijeka. S obzirom da se opterećenje s pogonskog na gonjeni zupčanik prenosi na način da mijenja svoj pravac djelovanja, položaj i intenzitet, mijenja se i naprezanje u korijenu zuba zupčanika koje može izazvati lom zuba uslijed zamora materijala. U radu je primjenom metode konačnih elemenata pomoću programskog paketa *Abaqus* određen ciklus naprezanja u korijenu zuba. Pretpostavljeno je da su oba zupčanika izrađena od istog materijala te da je materijal homogen, izotropan i linearno elastičan. Analizirani su cilindrični zupčanci s ravnim simetričnim i asimetričnim zubima te je provedena usporedba njihovih ciklusa naprezanja. Kako bi sama računalna simulacija što realnije odgovarala stvarnim uvjetima rada zupčanog para, u obzir su uzeti i faktori poput centrifugalnog opterećenja i/ili trenja te je analiziran i njihov utjecaj. Određeno je mjesto maksimalnog naprezanja u korijenu zuba, tj. kritični presjek te je uspoređeno s mjestom maksimalnog naprezanja prema normi HRN EN ISO 6336-3.

Ključne riječi: zupčanik, asimetričan zub, ciklus naprezanja, korijen zuba, metoda konačnih elemenata, trenje, centrifugalno opterećenje

**SUMMARY**

By choosing the appropriate load capacity of gear pairs it is ensured that no damage occurs which could affect normal operation within the expected service life. Since the load from the operating to the driven gear is transferred in a way that it changes its direction, position and intensity, the tooth root stress also changes, which can cause breakage of the teeth due to bending fatigue. In thesis, the tooth root stress cycle was determined using finite element method and *Abaqus* software package. It is assumed that both gears are made of the same material which is considered to be homogenous, isotropic and linearly elastic. Cylindrical gears with symmetric and asymmetric involute teeth were analyzed and their stress cycles were compared. In order to conduct the simulation as accurately as possible, factors such as centrifugal load and/or friction were taken into account and their influence on the tooth root stress cycle was analyzed. The place of maximum principal stress in tooth root, i.e. the critical cross section, was determined and compared with the place of maximum stress according to the standard HRN EN ISO 6336-3.

Keywords: gear, asymmetric tooth, stress cycle, tooth root, finite element method, friction, centrifugal load

## 1. UVOD

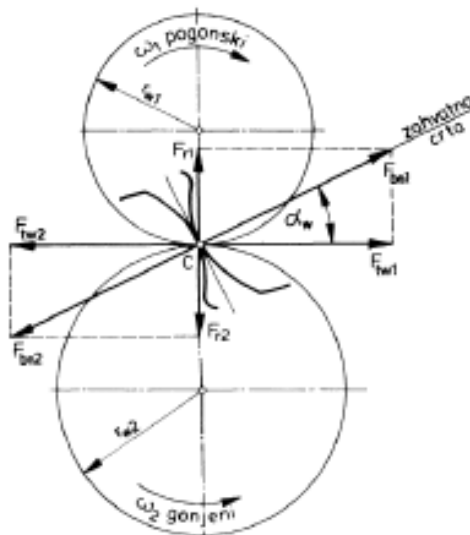
Zupčani par čine dva zupčanika u zahvatu. Zupčanici su jedni od najčešće korištenih strojnih elemenata koji služe za prijenos gibanja i okretnog momenta pomoću veze oblikom. Postoje razne vrste zupčanika, a među koje spadaju zupčanici s ravnim, kosim (helikoidnim), strelastim zubima, zupčanici s unutrašnjim ravnim ili kosim zubima, itd.



**Slika 1. Zupčani par s ravnim zubima [1]**

Jedan od uzroka nastajanja oštećenja koja utječu na nosivost zupčanih parova je pogonsko opterećenje koje izaziva smično naprezanje bokova, kontaktne (Hertzove) pritiske, naprezanja uzduž bokova zubi i naprezanje u korijenu zuba.

Prilikom prijenosa snage odnosno okretnog momenta između dvaju cilindričnih zupčanika s ravnim zubima, u smjeru zahvatne crte, sa zuba na zub djeluje sila normalna sila  $F_{bn}$ , a koja se dijeli na dvije komponente: obodnu i radijalnu, kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2. Radijalna i obodna komponenta normalne sile  $F_{bn}$  [2]

Upravo obodna sila izaziva savojno opterećenje u korijenu zuba, koji predstavlja kritično područje svakog zupčanika te može uzrokovati nastanak pukotine, a zatim i lom zuba.

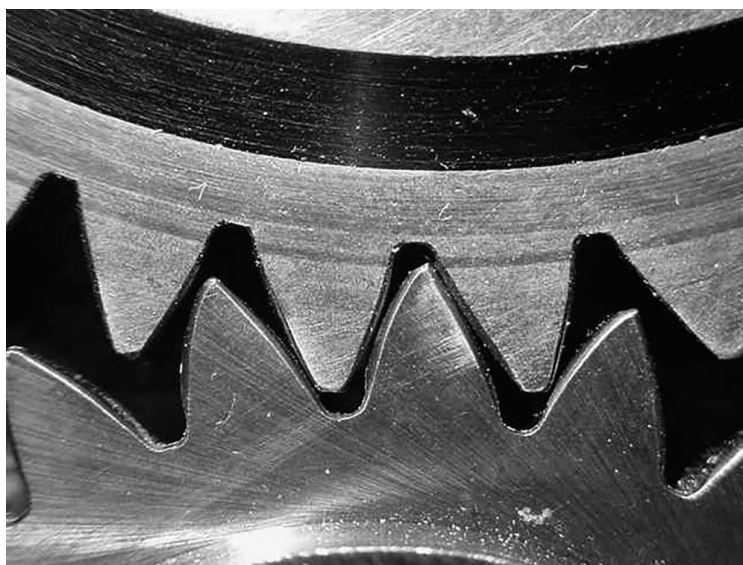


Slika 3. Lom zuba uslijed savojnog opterećenja [3]

S obzirom da se tijekom rotacije mijenja i pozicija opterećenja, a time i krak sile na korijen zuba, mijenja se i iznos naprezanja u korijenu zuba. Iz tog razloga potrebno je sa što većom točnošću odrediti ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika.

## 1.1. Asimetrični zubi

U većini današnjih prijenosnika snage koriste se zupčanici s kutom nagiba boka osnovnog profila ozubljenja  $\alpha_n = 20^\circ$  (simetrični zubi), za koje postoji mnogo dostupnih proračunskih alata i metoda. Tek u novije vrijeme krenulo se u istraživanje zupčanika s ravnim asimetričnim zubima, odnosno zupčanika sa zubima čiji se kutovi nagiba boka osnovnog profila razlikuju za oba boka zuba te kao takvi mogu biti  $\alpha_n > 20^\circ$  ili  $\alpha_n < 20^\circ$ . Činjenica da su prilikom upotrebe suprotni bokovi zuba većine zupčanika funkcionalno različiti, tj. operativni bok je znatno opterećeniji tijekom dužeg vremenskog perioda u odnosu na drugi neoperativni bok, predstavlja jedan od razloga za korištenje zupčanika s asimetričnim zubima. Upotrebom zupčanika s asimetričnim zubima poboljšavaju se svojstva operativnog boka na račun svojstava boka koji ne sudjeluju u zahvatu. Kao rezultat imamo povećanje nosivosti i trajnosti operativnog boka, smanjenje mase zupčanika te mirniji i tiši rad s obzirom da dolazi do reduciranja buke i vibracija.



Slika 4. Zupčanici s asimetričnim zubima u zahvatu [4]

Ovim radom namjerava se pomoću metode konačnih elemenata odrediti ciklus naprezanja u korijenu operativnog boka zuba. Potrebno je detaljnije proučiti utjecaj, odnosno vezu između kuta nagiba boka osnovnog profila operativnog i neoperativnog boka zubi na ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika s obzirom da prema [5] postoji zaključak koji sugerira na smanjenje normalnog naprezanja u korijenu zuba kada se za operativni bok zuba odabire bok s većim kutom nagiba boka osnovnog profila. Za modeliranje zupčanika korišteni su podaci, tj. geometrijske karakteristike zupčanika iz iste literature [5] kako bi provedene numeričke analize mogli usporediti.



## 2. MODELIRANJE ZUPČANIKA

### 2.1. Zupčanik sa simetričnim zubima

Prema geometriji zadanoj u [5], a koja je prikazana u tablici 1., u programskom paketu *AutoCAD* koristeći programsku proceduru za parametarsko modeliranje zupčanika [6] kreirani su dvodimenzionalni modeli zupčanika koji su potom stavljeni u zahvat na zadanu udaljenost  $a = 91,5$  mm. Programska procedura [6] omogućuje dvodimenzionalno parametarsko modeliranje cilindričnog zupčanika s evolventnim ozubljenjem u čeonj ravnini i to s ravnim i kosim, odnosno simetričnim i asimetričnim zubima. Parametri koji su obuhvaćeni programskom procedurom su normalni modul, broj zubi, faktor pomaka profila, kut nagiba boka zuba i profil ozubljenja te se oni unose u korisničko sučelje koje je prikazano na slici 5.

Slika 5. Korisničko sučelje pri modeliranju zupčanika [6]

**Tablica 1. Geometrijske karakteristike zupčanog para sa simetričnim zubima**

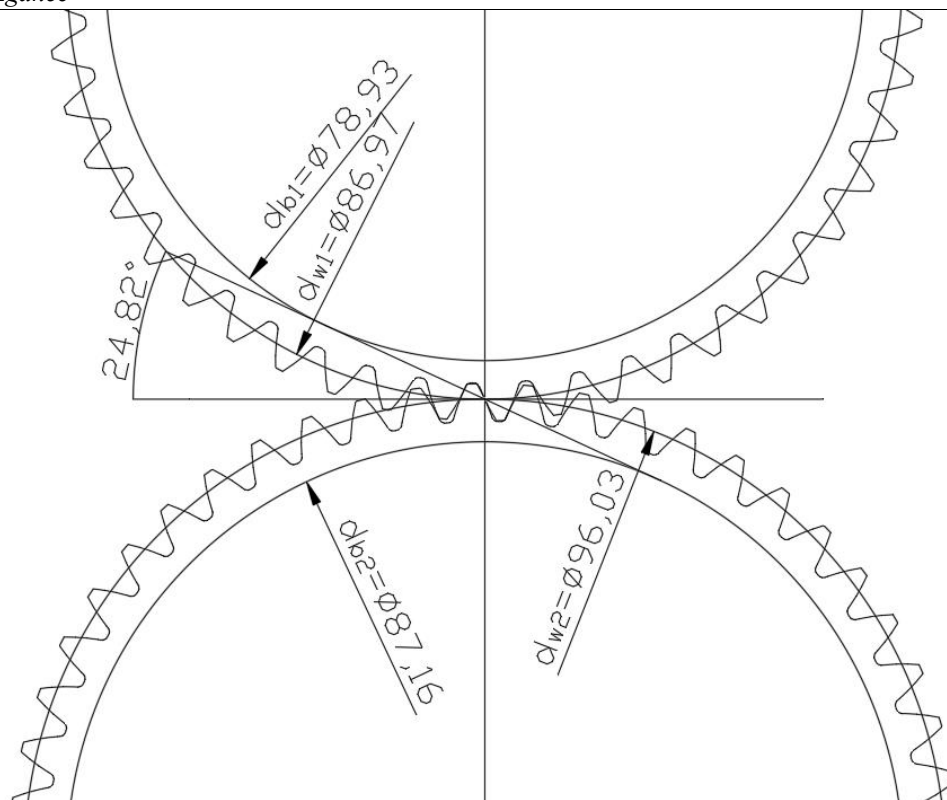
Naziv parametra	Pogonski zupčanik (1)	Gonjeni zupčanik (2)
Profil ozubljenja, -	ISO 53 Profil A	
Osni razmak $a$	91,5 mm	
Modul $m_n$	1,75 mm	
Broj zubi zupčanika $z$	48	53
Kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja $\alpha_n$	20°	
Faktor pomaka profila, $x$	1,135	0,864
Tjemena visina osnovnog profila ozubljenja $h_{aP}$	1,75 mm	
Podnožna visina osnovnog profila ozubljenja $h_{fP}$	2,1875 mm	
Polumjer zaobljenja podnožja osnovnog profila ozubljenja $\rho_{fP}$	0,38 mm	
Promjer tjemene kružnice sa skraćenim tjemenom $d_{ak}$	90,3 mm	98,1 mm
Skraćenje tjemena $k \cdot m$	0,587 mm	

Kako je:

$$a = 91,5 \text{ mm} > a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{84 + 92,75}{2} = 88,375 \text{ mm} \quad (1)$$

vidljivo je da se radi o V plus zupčanom paru. Raspodjela pomaka profila za pojedini zub prikazana je u tablici 1. Pogonski kut zahvatne crte dobiva se na sljedeći način:

$$\alpha_w = \cos^{-1}\left(\frac{a_d \cos(\alpha_n)}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{88,375 \cos(20^\circ)}{91,5}\right) = 24,824^\circ \quad (2)$$



Slika 6. Zupčanci sa simetričnim zubima u zahvatu

## 2.2. Zupčanik s asimetričnim zubima

Ponavljanjem procedure kao i za zupčanik sa simetričnim zubima, no ovaj puta korištenjem opcije *Asimetričan zupčanik* unutar programske procedure [6], modeliraju se zupčanci s asimetričnim zubima prema podacima iz tablice 2. te su stavljeni u zahvat na udaljenost  $a = 91,5$  mm.

**Tablica 2. Geometrijske karakteristike zupčanog para s asimetričnim zubima**

Naziv parametra	Pogonski zupčanik (1)	Gonjeni zupčanik (2)
Profil ozubljenja, -	ISO 53 Profil A	
Osni razmak $a$	91,5 mm	
Modul $m_n$	1,75 mm	
Broj zubi zupčanika $z$	48	53
Kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja $\alpha_{n,C}/\alpha_{n,D}$	18°/28°	
Faktor pomaka profila $x$	0,8822	1,068

Tjemena visina osnovnog profila ozubljenja $h_{aP}$	1,75 mm	
Podnožna visina osnovnog profila ozubljenja $h_{fP}$	2,1875 mm	
Polumjer zaobljenja podnožja osnovnog profila ozubljenja, $\rho_{fP}$	0,375 mm	
Promjer tjemene kružnice sa skraćenim tjemenom $d_{ak}$	89,9 mm	99,3 mm
Promjer kinematske kružnice $d_w$	86,97 mm	96,03 mm
Skraćenje tjemena $k \cdot m$	-0,3439 mm	

Dva evolventna boka asimetričnog zuba dobivena su od dva različita tjemena promjera koji se prema [7] označuju  $d_{bd}$  i  $d_{bc}$ . Simboli „d“ i „c“ u indeksu označavaju operativan (eng. *drive*) bok, odnosno neoperativan (eng. *coast*) bok. Za potrebe proračuna nepoznatih geometrijskih karakteristika zupčanika *drive* bok se odnosi na bok s kutom nagiba boka profila  $28^\circ$ , a *coast* na onaj s kutom  $18^\circ$  (u kasnijoj analizi kada se zahvat odvija po boku s kutom nagiba boka profila  $18^\circ$  i on je označen kao *drive* bok). Tako slijedi:

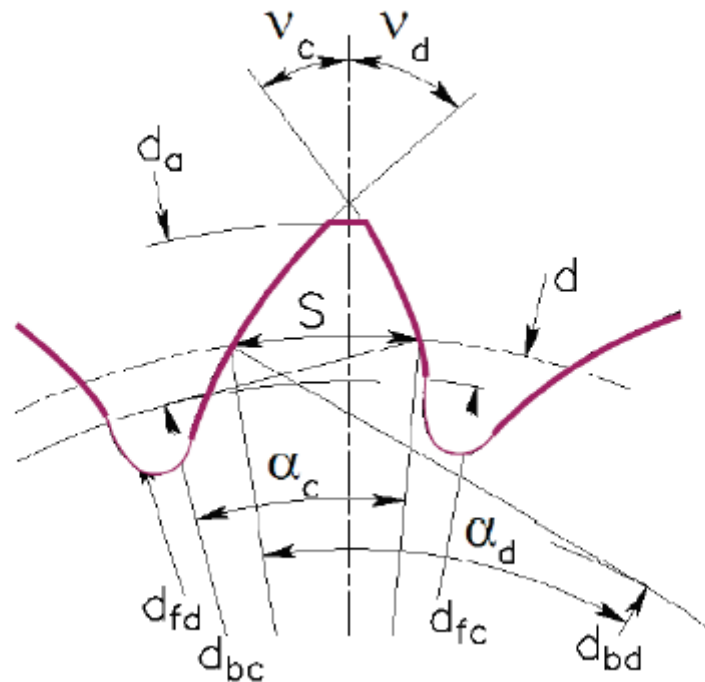
$$d_{b1,C} = d_1 \cos(\alpha_{n,C}) = 84 \cos(18^\circ) = 79,89 \text{ mm} \quad (3)$$

$$d_{b1,D} = d_1 \cos(\alpha_{n,D}) = 84 \cos(28^\circ) = 74,17 \text{ mm} \quad (4)$$

Analogno ponovljeni postupak i za gonjeni zupčanik:

$$d_{b2,C} = d_2 \cos(\alpha_{n,C}) = 92,75 \cos(18^\circ) = 88,21 \text{ mm} \quad (5)$$

$$d_{b2,D} = d_2 \cos(\alpha_{n,D}) = 92,75 \cos(28^\circ) = 81,89 \text{ mm} \quad (6)$$



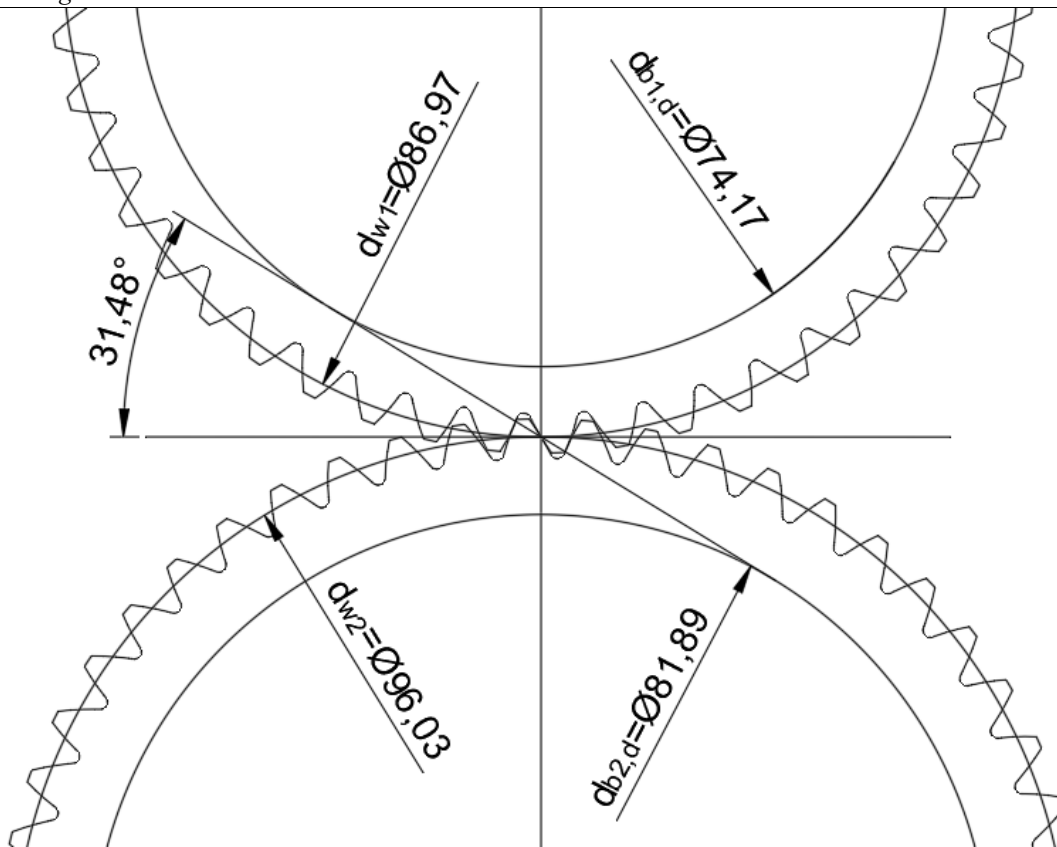
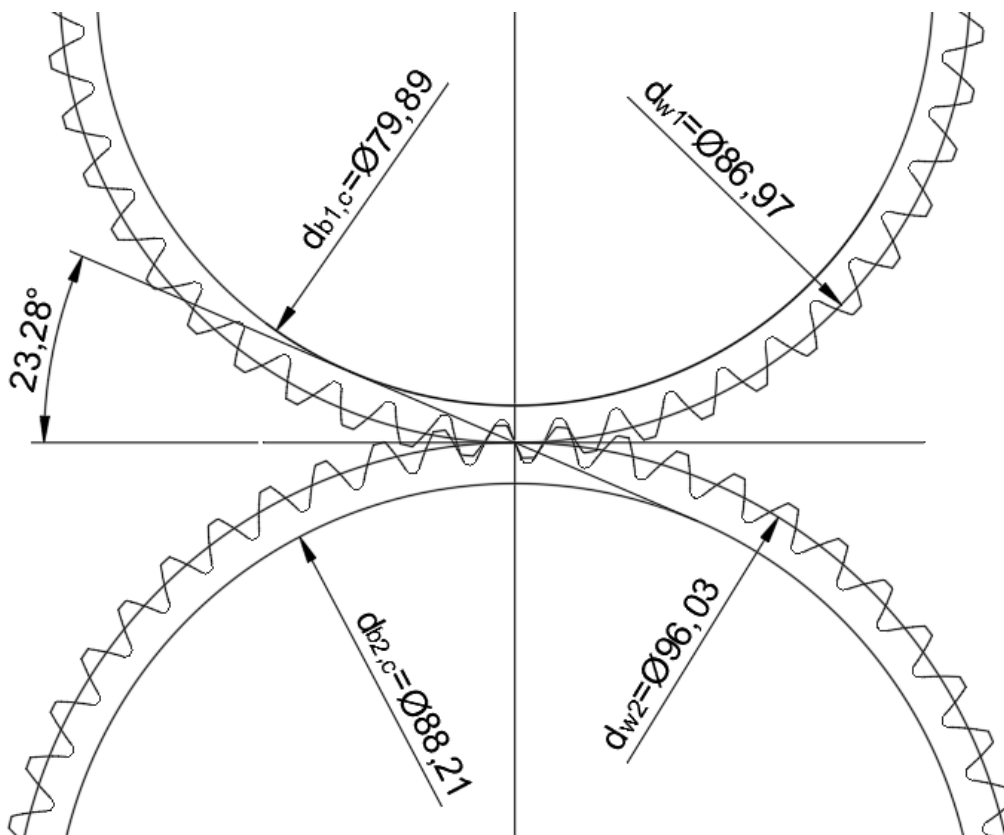
Slika 7. Osnovne dimenzije asimetričnog zuba [8]

Za zupčani par s asimetričnim zubima karakteristično je da postoje dva slučaja zahvata, ovisno o tome na kojem se boku događa kontakt.

Kao i kod simetričnog zupčanika vrijedi uvjet (1) stoga se također može zaključiti da se radi o V plus paru zupčanika. Pomaci profila prikazani u tablici 2. izračunani su na sljedeći način. Najprije je potrebno izračunati kut zahvatne crte za oba slučaja zahvata, kada je bok s  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  operativan bok, odnosno kada je bok s  $\alpha_{n,C} = 18^\circ$  operativan:

$$\alpha_{w,C} = \cos^{-1}\left(\frac{a_d \cos(\alpha_{n,C})}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{88,375 \cos(18^\circ)}{91,5}\right) = 23,281^\circ \quad (7)$$

$$\alpha_{w,D} = \cos^{-1}\left(\frac{a_d \cos(\alpha_{n,D})}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{88,375 \cos(28^\circ)}{91,5}\right) = 31,483^\circ \quad (8)$$

Slika 8. Zupčanici u zahvatu kada je operativan bok s  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ Slika 9. Zupčanici u zahvatu kada je operativan bok s  $\alpha_{n,C} = 18^\circ$

Sljedeće je izračunati evolventne funkcije:

$$\text{inv}(\alpha_{w,C}) = \tan(\alpha_{w,C}) - \alpha_{w,C} \quad (9)$$

$$\text{inv}(\alpha_{w,C}) = \tan(23,281^\circ) - \frac{23,281^\circ \pi}{180^\circ} = 0,024 \quad (10)$$

$$\text{inv}(\alpha_{n,C}) = \tan(\alpha_{n,C}) - \alpha_{n,C} \quad (11)$$

$$\text{inv}(\alpha_{n,C}) = \tan(18^\circ) - \frac{18^\circ \pi}{180^\circ} = 0,011 \quad (12)$$

$$\text{inv}(\alpha_{w,D}) = \tan(\alpha_{w,D}) - \alpha_{w,D} \quad (13)$$

$$\text{inv}(\alpha_{w,D}) = \tan(31,483^\circ) - \frac{31,483^\circ \pi}{180^\circ} = 0,063 \quad (14)$$

$$\text{inv}(\alpha_{n,D}) = \tan(\alpha_{n,D}) - \alpha_{n,D} \quad (15)$$

$$\text{inv}(\alpha_{n,D}) = \tan(28^\circ) - \frac{28^\circ \pi}{180^\circ} = 0,043 \quad (16)$$

Modificiranjem jednadžbe za zbroj faktora pomaka profila kod asimetričnog zupčanika te uzimajući u obzir da kod zahvata bokova zubi nema bočne zračnosti, odnosno da vrijedi  $s_{w1} = e_{w2}$  i  $s_{w2} = e_{w1}$  kao što je prikazano na slici 10., dobiva se sljedeće:

$$(x_1 + x_2)_{AS} = \frac{(z_1 + z_2)(\text{inv}(\alpha_{w,C}) + \text{inv}(\alpha_{w,D}) - \text{inv}(\alpha_{n,C}) - \text{inv}(\alpha_{n,D}))}{2(\tan(\alpha_{n,C}) + \tan(\alpha_{n,D}))} \quad (17)$$

$$(x_1 + x_2)_{AS} = \frac{(48 + 53)(0,024 + 0,063 - 0,011 - 0,043)}{2(0,325 + 0,532)} = 1,95 \quad (18)$$

Skraćenje tjemena profila izračunava se uvrštavajući prethodni izraz (18) u sljedeću jednadžbu:

$$km = \frac{-((x_1 + x_2)_{AS} + 2)2m + d_{ak1} - d_1 + d_{ak2} - d_2}{4} \quad (19)$$

$$km = \frac{-(1,95 + 2) \cdot 2 \cdot 1,75 + 89,9 - 84 + 99,3 - 92,75}{4} = -0,3439 \text{ mm} \quad (20)$$

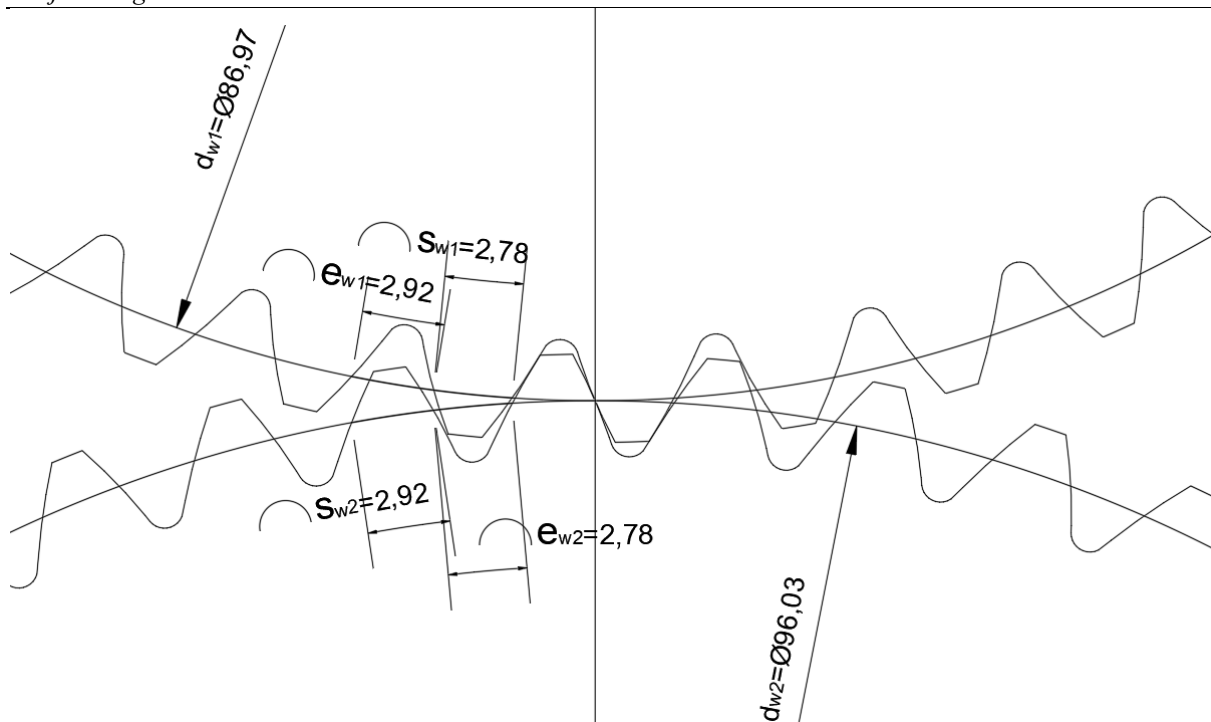
Nakon toga dobiva se raspodjela pomaka:

$$x_1 = \frac{d_{ak1} - 2km - d_1}{2m} - 1 \quad (21)$$

$$x_1 = \frac{89,9 - 2 \cdot (-0,3439) - 84}{2 \cdot 1,75} - 1 = 0,8822 \quad (22)$$

$$x_2 = \frac{d_{ak2} - 2km - d_2}{2m} - 1 \quad (23)$$

$$x_2 = \frac{99,3 - 2 \cdot (-0,3439) - 92,75}{2m} - 1 = 1,068 \quad (24)$$



**Slika 10. Dimenzije debljina zuba i uzubina na kinematskim promjerima pogonskog i gonjenog zupčanika**

Korak asimetričnog zupčanika moguće je izračunati na dva načina, preko kinematske kružnice:

$$p_w = \frac{d_{w1,2}\pi}{z_{1,2}} \quad (25)$$

$$p_w = \frac{86,97\pi}{48} = \frac{96,03\pi}{53} = 5,692 \text{ mm} \quad (26)$$

Ili preko debljine zubi na kinematskoj kružnici:

$$p_w = s_{w1,C} + s_{w2,C} + s_{w1,D} + s_{w2,D} \quad (27)$$

Izrazi za debljinu zuba asimetričnog V plus zupčanika:

$$s_{w1,C} = \frac{p_w z_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{z_1} \left( \frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan(\alpha_{n,C}) \right) - (\text{inv}(\alpha_{w,C}) - \text{inv}(\alpha_{n,C})) \right] \quad (28)$$

$$s_{w1,C} = \frac{5,692 \cdot 48}{2\pi} \left[ \frac{1}{48} \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0,8822 \cdot \tan(18^\circ) \right) - (0,024 - 0,011) \right] = 1,377 \text{ mm} \quad (29)$$

$$s_{w2,C} = \frac{p_w z_2}{2\pi} \left[ \frac{1}{z_2} \left( \frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan(\alpha_{n,C}) \right) - (\text{inv}(\alpha_{w,C}) - \text{inv}(\alpha_{n,C})) \right] \quad (30)$$

$$s_{w2,C} = \frac{5,692 \cdot 53}{2\pi} \left[ \frac{1}{53} \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1,068 \tan(18^\circ) \right) - (0,024 - 0,011) \right] = 1,428 \text{ mm} \quad (31)$$

$$s_{w1,D} = \frac{p_w z_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{z_1} \left( \frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan(\alpha_{n,D}) \right) - (\text{inv}(\alpha_{w,D}) - \text{inv}(\alpha_{n,D})) \right] \quad (32)$$

$$s_{w1,D} = \frac{5,692 \cdot 48}{2\pi} \left[ \frac{1}{48} \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0,8822 \tan(28^\circ) \right) - (0,063 - 0,043) \right] = 1,403 \text{ mm} \quad (33)$$

$$s_{w2,D} = \frac{p_w z_2}{2\pi} \left[ \frac{1}{z_2} \left( \frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan(\alpha_{n,D}) \right) - (\text{inv}(\alpha_{w,D}) - \text{inv}(\alpha_{n,D})) \right] \quad (34)$$



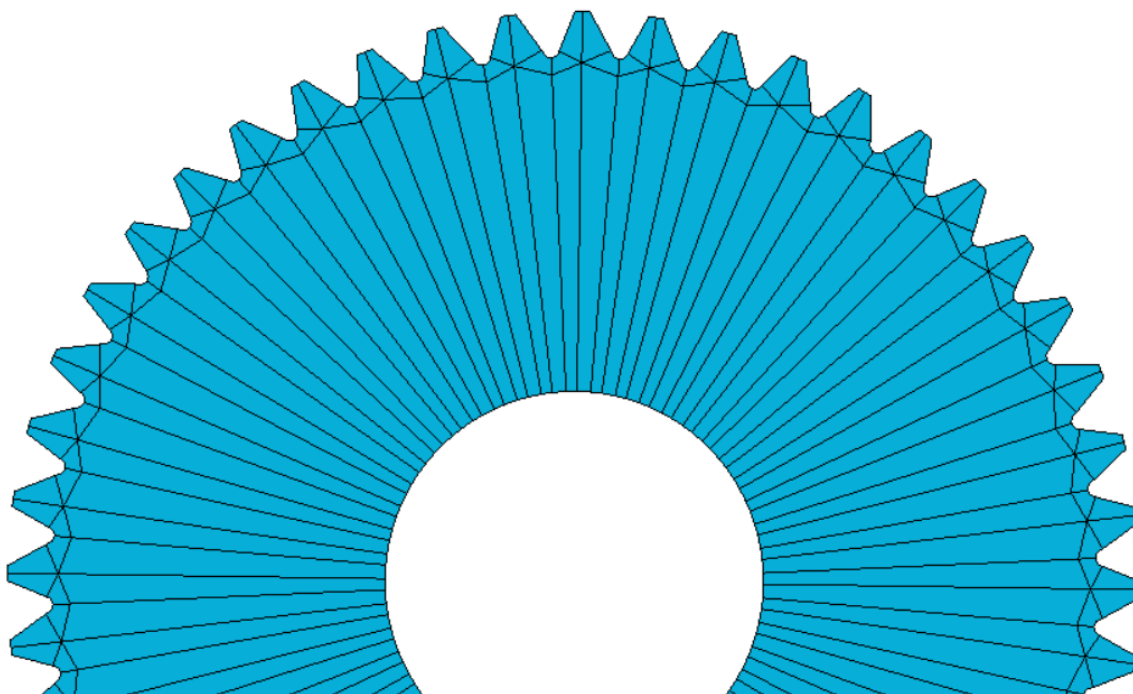
$$s_{w2,D} = \frac{5,692 \cdot 53}{2\pi} \left[ \frac{1}{53} \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1,068 \tan(28^\circ) \right) - (0,063 - 0,043) \right] = 1,492 \text{ mm} \quad (35)$$

Uvrštavajući izraze (29), (31), (33), (35) u izraz za korak na kinematskoj kružnici (27) dobiva se vrijednost kao i u izrazu (26).

### 3. NUMERIČKA ANALIZA CIKLUSA NAPREZANJA

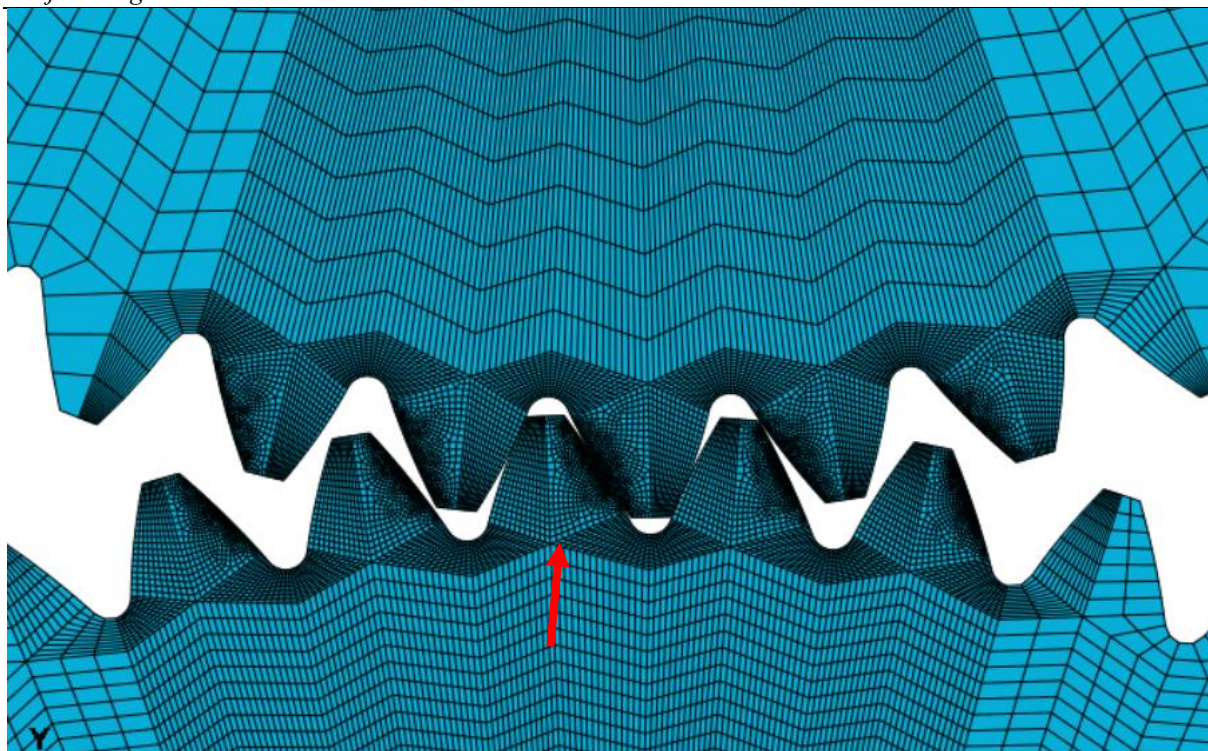
#### 3.1. Numeričko modeliranje

Prethodno kreirani modeli zupčanika u zahvatu iz *AutoCAD*-a se prebacuju u računalni program *Abaqus*. Koristeći nelinearnu analizu (opcija NLGEOM [9]) pomoću metode konačnih elemenata uz pretpostavku velikih pomaka, određuje se ciklus naprezanja korijena zuba na gonjenom zupčaniku. Modeli zupčanika diskretizirani su s nekompatibilnim četverokutnim konačnim elementima prvog reda za ravninsko stanje naprezanja (*CPS4I*) zbog povećanog efekta savijanja. U procesu generiranja mreže konačnih elemenata potrebno je modele zupčanika najprije podijeliti na blokove, tj. particije kao što je prikazano na slici 11.



Slika 11. Podjela geometrijskog modela pogonskog zupčanika na blokove

Područje operativnih bokova (evolventni dio) zupčanika po kojim se dešava kontakt diskretizirano je slobodnom mrežom dok je područje korijena zuba diskretizirano pravilno oblikovanim, odnosno strukturiranim elementima čija je gustoća raspoređenosti ispitana konvergencijom za pojedini slučaj naprezanja.

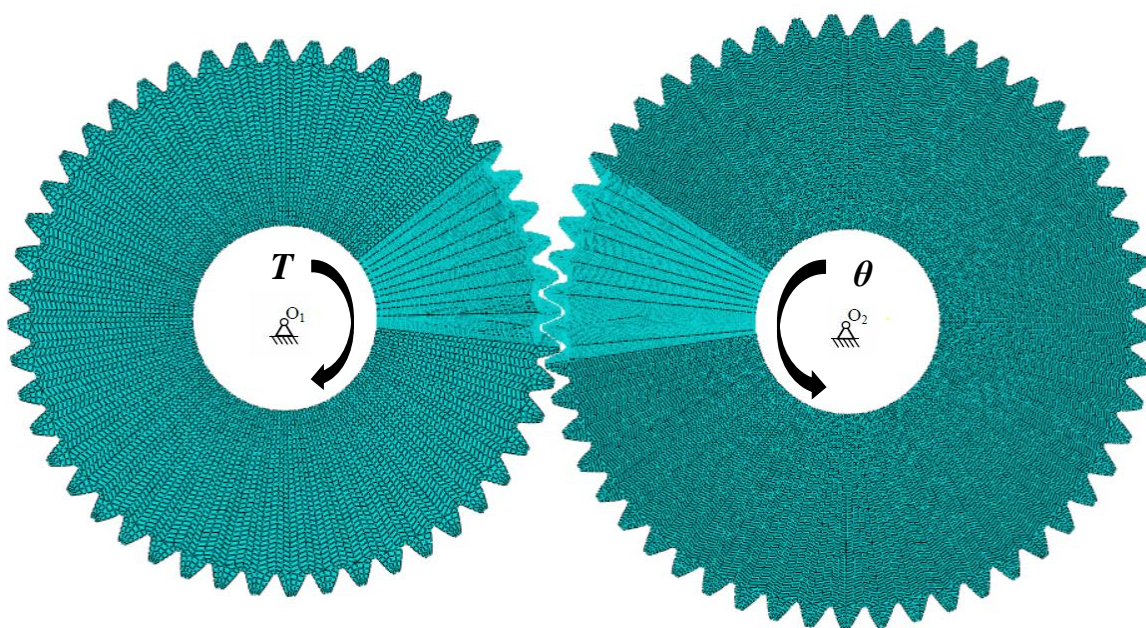


Slika 12. Mreža konačnih elemenata za 1. slučaj zahvata zubi  $\alpha_{n,D}=28^\circ$

Rubni uvjeti zadani su na način da je pogonskom zupčaniku nedozvoljeno pomicanje u dvije translacijske osi dok mu je rotacija oko vlastite osi omogućena. Gonjeni zupčanik je fiksiran, tj. onemogućena mu sva 3 stupnjeva slobode.

Simulacija rotacije zupčanika provedena je kroz dva koraka opterećenja (*Step-a*). U prvom koraku preko referentne točke 1 opterećuje se pogonski zupčanik momentom torzije  $T = 90 \text{ Nm}$  te koristeći modul *Interaction* [9] definiraju se kontakti između oba zupčanika koristeći opciju *normal behaviour - hard contact*. Interakcija je određena tipom kontakta *surface-to-surface* povezujući zasebno svih 5 para bokova zubi po kojima se odvija zahvat. U pojedinim slučajevima analize u obzir se uzima i trenje te je ono ostvareno opcijom kontakta *tangential behaviour - penalty* i definiranjem odgovarajućeg koeficijenta trenja. Kada se ono uzima u obzir, centrifugalno opterećenje se također izvodi u prvom koraku dodavanjem kutne brzine na zupčanicima preko referentnih točaka 1 i 2 za odgovarajući slučaj vrtnje.

Drugi korak služi za zadavanje rotacije gonjenom zupčaniku preko referentne točke 2 u iznosu od  $\theta = 34^\circ$  (0,593 rad) kako bi se obuhvatio kontakt od 5 zubi, od kojih će srednji biti predmet analize (označen sa crvenom strelicom na slici 12.). Čvorovi na unutarnjim promjerima glavine zupčanika povezani su s referentnim točkama 1 i 2 kinematskom vezom te su im onemogućeni translacijski pomaci i rotacija. Simulacija zakreta izvršena je pomoću 1000 fiksnih inkremenata u iznosu od 0,01 u periodu od 10 sekundi.



**Slika 13. Rubni uvjeti zupčanih parova**

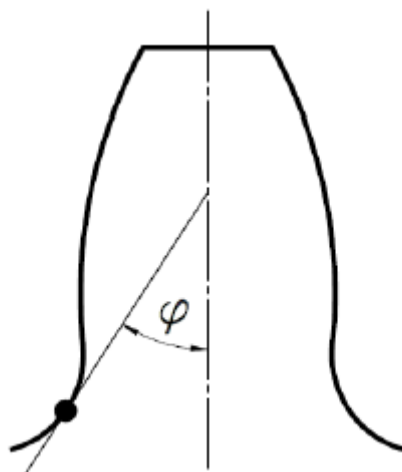
Za analizu naprezanja relevantna su i svojstva materijala zupčanika koja su prikazana u tablici 3. Pretpostavka je da je materijal oba zupčanika homogen, izotropan i linearno elastičan.

**Tablica 3. Svojstva materijala zupčanika**

Čelik 18CrNiMo7-6	
Modul elastičnosti $E$ , MPa	210 000
Poissonov faktor $\nu$ , -	0,3
Gustoća $\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	7800

### 3.2. Analiza ciklusa naprezanja

U uvodnom dijelu već je objašnjeno kako obodna komponenta normalne sile izaziva savojno opterećenje u korijenu zuba te kako je njezin položaj i intenzitet promjenjiv tijekom trajanja kontakta između zuba. Prema normi HRN EN ISO 6336-3 [10] pozicija čvora s maksimalnim naprezanjem nalazi se na  $\varphi = 30^\circ$ , gdje kut  $\varphi$  predstavlja kut između tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba i simetrale zuba, a koji se koristi za definiranje pozicije čvora na prijelaznoj krivulji korijena zuba budući da se iznos naprezanja mijenja duž prijelazne krivulje.



**Slika 14. Pozicija čvora u korijenu zuba određena kutom  $\varphi$**

Numerička analiza ciklusa naprezanja provedena je za tri slučaja, ovisno po kojem boku se dešava kontakt:

1. Analiza ciklusa naprezanja kada je bok s  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  operativan
2. Analiza ciklusa naprezanja kada je bok s  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  operativan
3. Analiza ciklusa naprezanja kada je bok s  $\alpha_n = 20^\circ$  operativan (simetričan zub)

Za svaki navedeni slučaj uzeti su u obzir parametri kao što su centrifugalno opterećenje i/ili trenje i ispitani njihovi utjecaji na ciklus naprezanja korijena zuba. Promatrani zupčanik u svakom od slučajeva je gonjeni te broj provedenih analiza po svakom slučaju iznosi 7, odnosno ukupno 21.

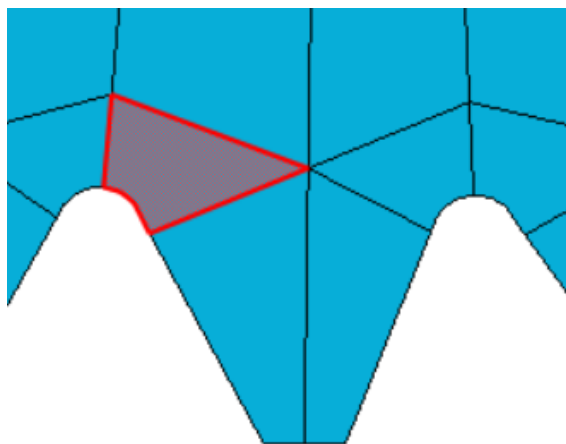
Analizirani su ciklusi naprezanja za maksimalno glavno naprezanje u korijenu zuba koje je u *Abaqus*-u u modulu *Visualisation* označeno s *Max. Principal (abs)*. Ono se prema [9] odnosi na maksimalno glavno naprezanje kada su apsolutne vrijednosti svih glavnih naprezanja uzete u obzir.

### **3.2.1. Slučaj kada je bok s $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ operativan**

Ispitivanje konvergencije maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba provedeno je iz razloga što računalni program *Abaqus* aproksimira rezultate pomoću interpolacijskih polinoma. S obzirom da veći broj točaka kroz koje je moguće provući interpolacijsku krivulju rezultira većom točnošću rezultata, potrebno je odrediti broj konačnih elemenata pri kojemu rezultat konvergira prema konačnoj vrijednosti.

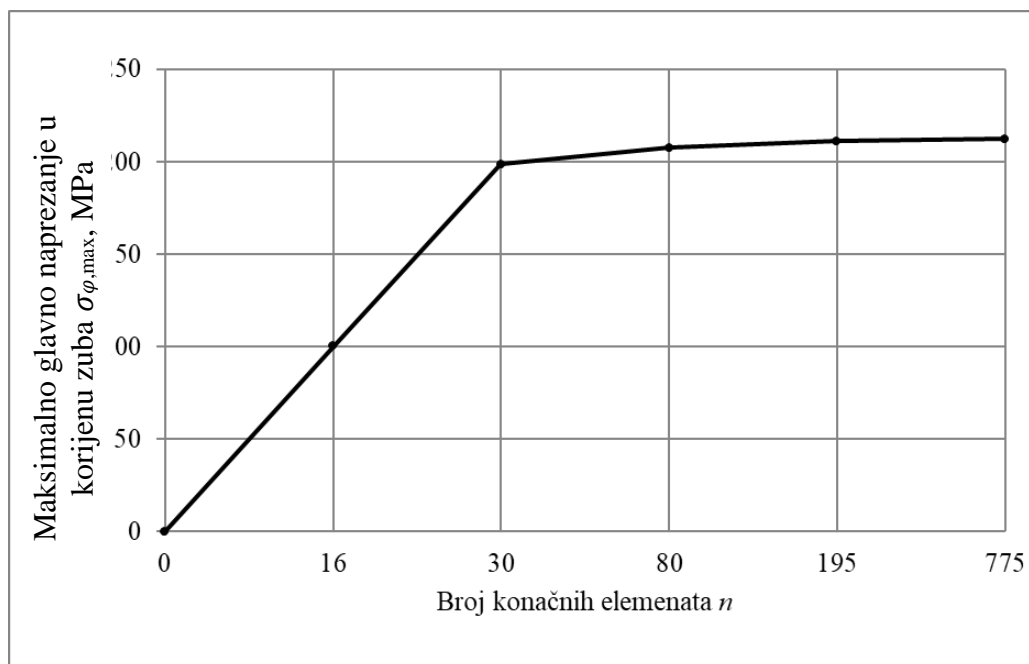
Maksimalno naprezanje u korijenu zuba prema [11] javlja se tijekom jednostrukog zahvata, no za ispitivanje konvergencije dovoljno je simulaciju naprezanja u korijenu zuba izvršiti na način

da se zupčanici stave u zahvat te se optereće momentom torzije. Kako je promatrano područje korijena zuba zupčanika, za ispitivanje konvergencije se ograničavamo na promjenu broja elemenata samo u tom području.

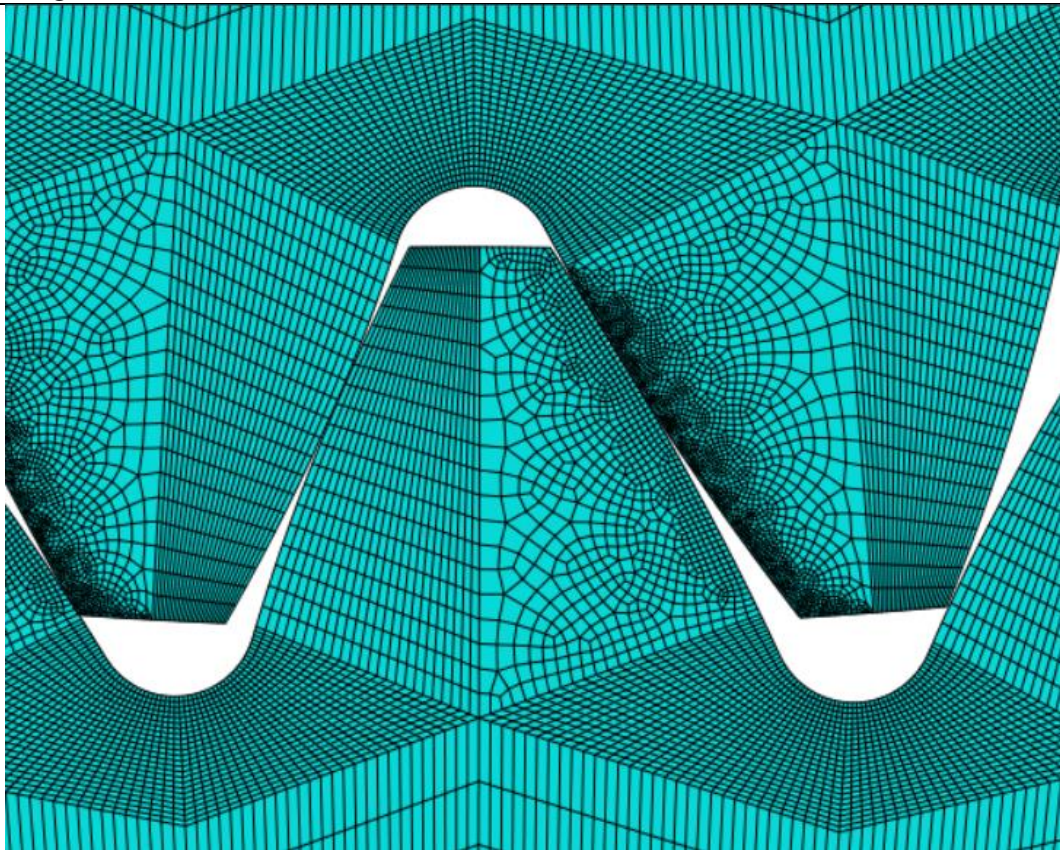


**Slika 15. Područje varijacije konačnog broja elemenata**

Rezultati konvergencije naprezanja u korijenu zuba prikazani su na slici 16. te je temeljem iste određen broj od 744 konačnih elemenata u području korijena zuba pomoću kojih je izvršena analiza ciklusa naprezanja. Razlog odabira ovako velikog broja elemenata je što precizniji rezultat. Za ostala dva slučaja zahvata po boku s  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  i  $\alpha_n = 20^\circ$  broj konačnih elemenata u području korijena zuba iznosi približno isto (oko 700 konačnih elemenata).

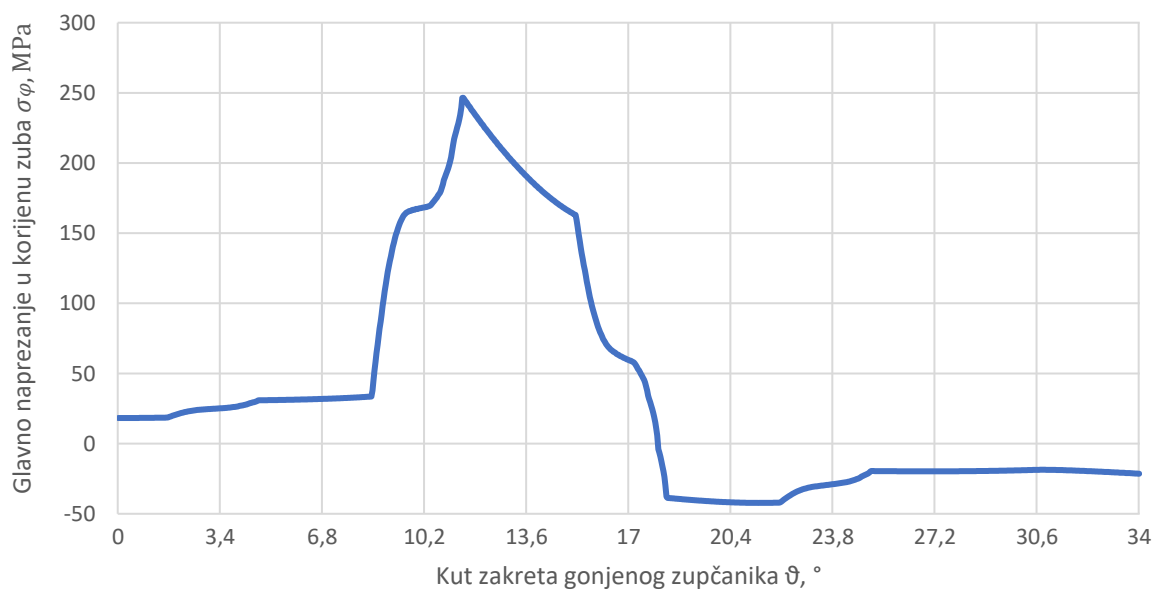


**Slika 16. Konvergencija maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj zahvata asimetričnih zupčanika  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$**

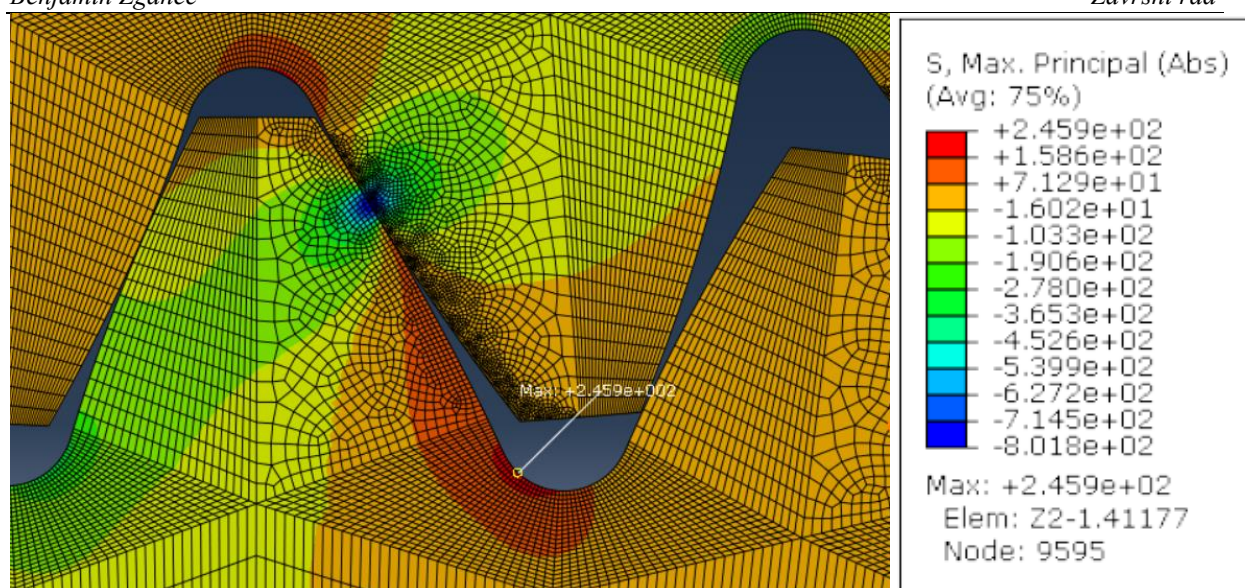


Slika 17. Detaljan izgled mreže konačnih elemenata za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$

U prvotnoj analizi ciklusa napreznja nije uzeto u obzir trenje, ali ni centrifugalno opterećenje. Na slici 18. prikazan je ciklus napreznja u korijenu zuba upravo za taj prvotni slučaj. Pozicija čvora s maksimalnim iznosom napreznja definirana je kutom  $\varphi = 45,67^\circ$ . Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog napreznja u korijenu zuba prikazan je na slici 19.



Slika 18. Ciklus napreznja korijena zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$



**Slika 19. Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprežanja u korijenu zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$**

Kako bi simulacija što realnije odgovarala stvarnim uvjetima potrebno je uzeti u obzir i pojavu centrifugalnog opterećenja s obzirom da se radi o rotacijskom gibanju zupčanika. Kako je centrifugalna sila funkcija kvadrata obodne brzine, ona će pri niskim brzinama vrtnje imati malen utjecaj na naprežanje u korijenu zuba. U ovoj analizi korištene su brzine vrtnje od  $1500 \text{ min}^{-1}$  i  $3000 \text{ min}^{-1}$  te kako se radi o relativno malim brzinama, njihov utjecaj na naprežanje je neznatan, kao što je i prikazano u tablici 4. Ciklusi naprežanja skoro se u potpunosti poklapaju sa slučajem gdje centrifugalno opterećenje nije uzeto u obzir, odnosno odstupanja su zaista minimalna te nema potrebe za dodatnim prikazivanjem dijagrama ciklusa naprežanja. Pozicija čvora s maksimalnim glavnim naprežanjem u korijenu zuba jednaka je poziciji čvora za slučaj bez uključenog centrifugalnog opterećenja, odnosno kut  $\varphi = 45,67^\circ$ .

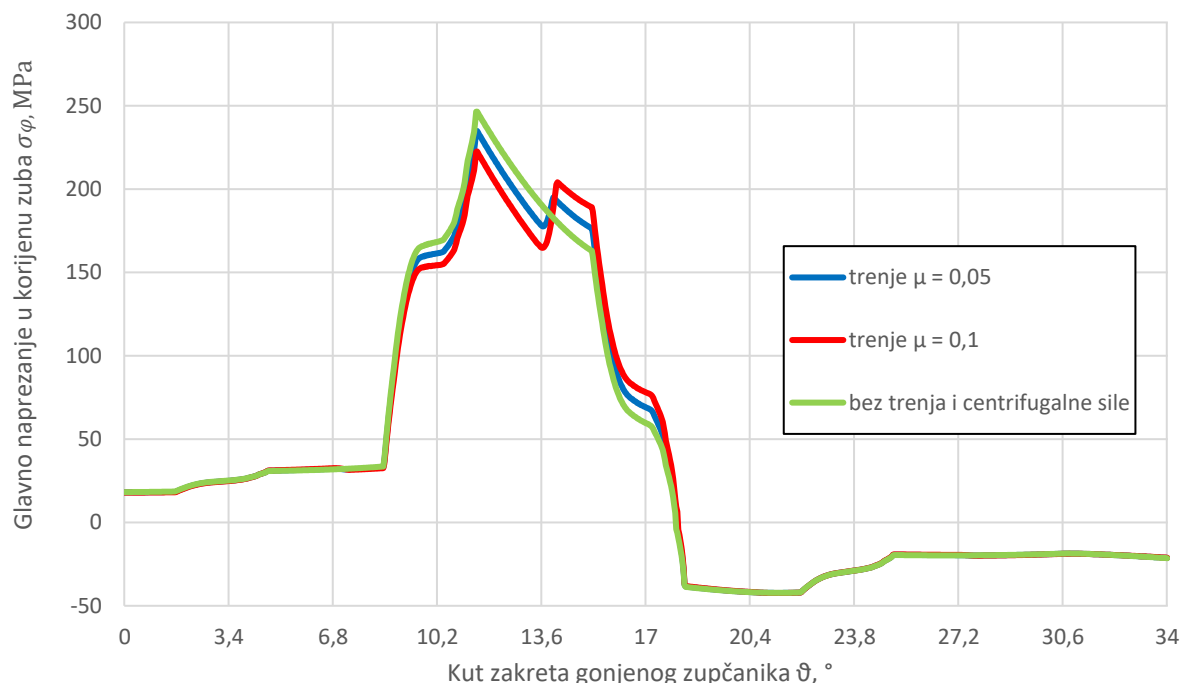
**Tablica 4. Granične vrijednosti naprežanja za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  s uključenim utjecajem centrifugalnog opterećenja**

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S centrifugalnim opt., $n = 1500 \text{ min}^{-1}$	S centrifugalnim opt., $n = 3000 \text{ min}^{-1}$
$\sigma_{\varphi, \max}$	246,50 MPa	246,61 MPa	246,96 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-42,24 MPa	-42,13 MPa	-41,79 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	288,74 MPa	288,74 MPa	288,75 MPa

Nakon centrifugalnog opterećenja, potrebno je uzeti u obzir i trenje. U sljedećim analizama uzeti su u obzir faktori trenja u iznosu od  $\mu = 0,05$  i  $\mu = 0,1$  te je pretpostavljeno da su oni konstantni tijekom cijelog zahvata. Ciklusi glavnog naprežanja u korijenu zuba prikazani su na



slici 20. dok je usporedba maksimalnih, minimalnih i zbroja njihovih apsolutnih vrijednosti napreznja prikazana u tablici 5. Pozicija čvora je i u ovom slučaju jednaka prethodnima, tj.  $\varphi = 45,67^\circ$ .

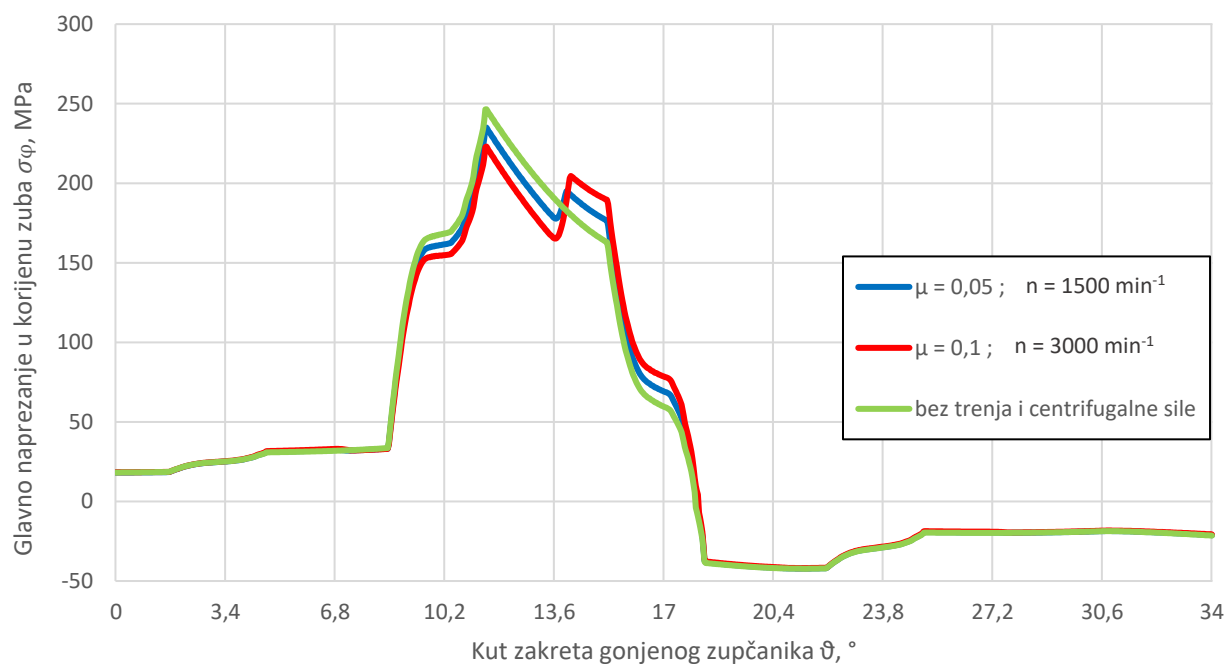


Slika 20. Ciklus napreznja korijena zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  s uključenim trenjem

Tablica 5. Granične vrijednosti napreznja za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  s uključenim utjecajem trenja

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S uključenim trenjem, $\mu = 0,05$	S uključenim trenjem, $\mu = 0,1$
$\sigma_{\varphi,max}$	246,50 MPa	234,90 MPa	222,59 MPa
$\sigma_{\varphi,min}$	-42,24 MPa	-42,28 MPa	-42,32 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	288,74 MPa	277,18 MPa	264,91 MPa

Najrealnija simulacija stvarne situacije ostvaruje se kada se u obzir uzimaju i faktor trenja i centrifugalno opterećenje. Analizirana su sljedeća dva slučaja za situaciju kada je bok s  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  operativan. Prvi slučaj odnosi se na brzinu vrtnje od  $1500 \text{ min}^{-1}$  i faktor trenja  $\mu = 0,05$  dok je drugi slučaj opisan brzinom vrtnje od  $3000 \text{ min}^{-1}$  i faktorom trenja  $\mu = 0,1$ . Pozicija čvora se također poklapa sa prethodnim slučajevima ( $\varphi = 45,67^\circ$ ).



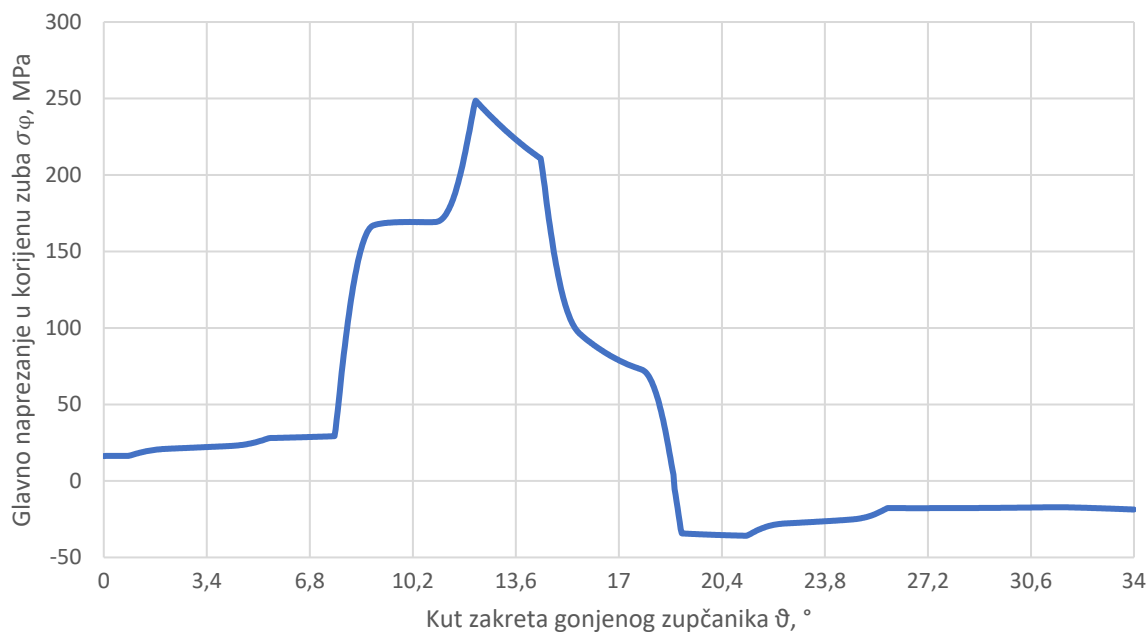
**Slika 21. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem**

**Tablica 6. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  s uključenim utjecajem trenja i centrifugalnim opterećenjem**

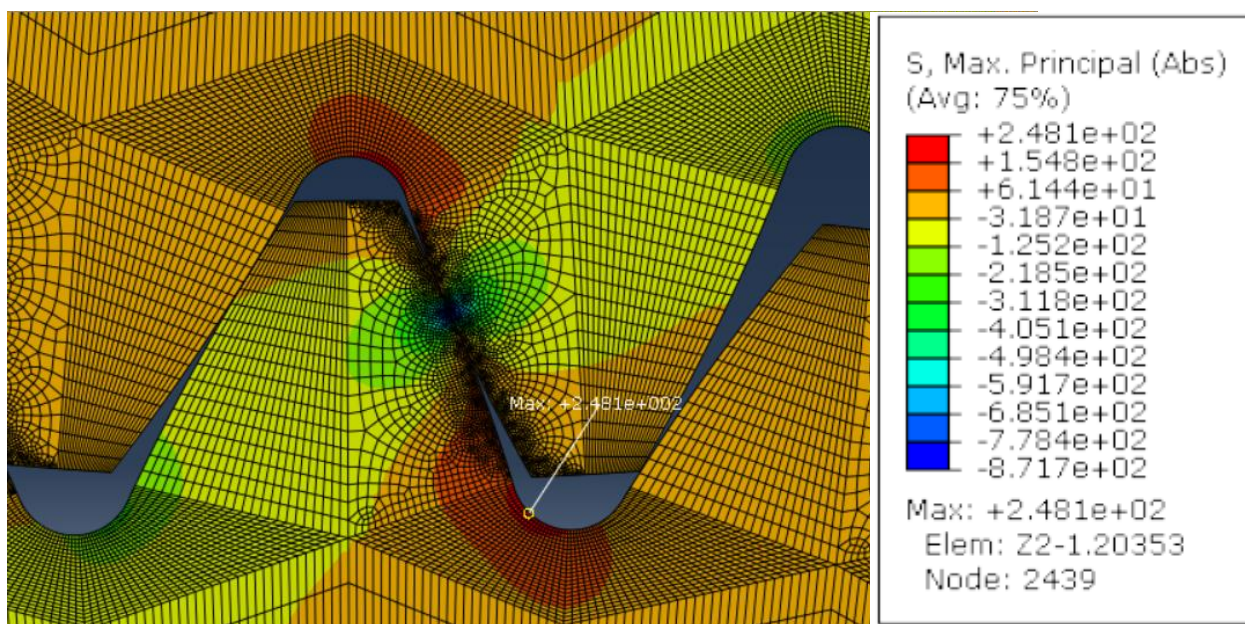
	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S centrifugalnim opt., $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ i trenjem $\mu = 0,05$	S centrifugalnim opt., $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ i trenjem $\mu = 0,1$
$\sigma_{\varphi,\max}$	246,50 MPa	235,02 MPa	223,05 MPa
$\sigma_{\varphi,\min}$	-42,24 MPa	-42,17 MPa	-41,86 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	288,74 MPa	277,19 MPa	264,91 MPa

### 3.2.2. Slučaj kada je bok s $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ operativan

Ispitivanje konvergencije provedeno je analogno poglavlju 3.2.1. U ovom slučaju broj konačnih elemenata u promatranom području korijena zuba iznosi 624. Detaljniji izgled mreže vidljiv je na slici 23. gdje je ujedno prikazan i čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja za slučaj bez utjecaja centrifugalnog opterećenja. Ciklus naprezanja za slučaj gdje centrifugalno opterećenje nije uzeto u obzir prikazan je na slici 22. Kut  $\varphi$  u ovom slučaju iznosi  $43,8^\circ$ .



Slika 22. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$



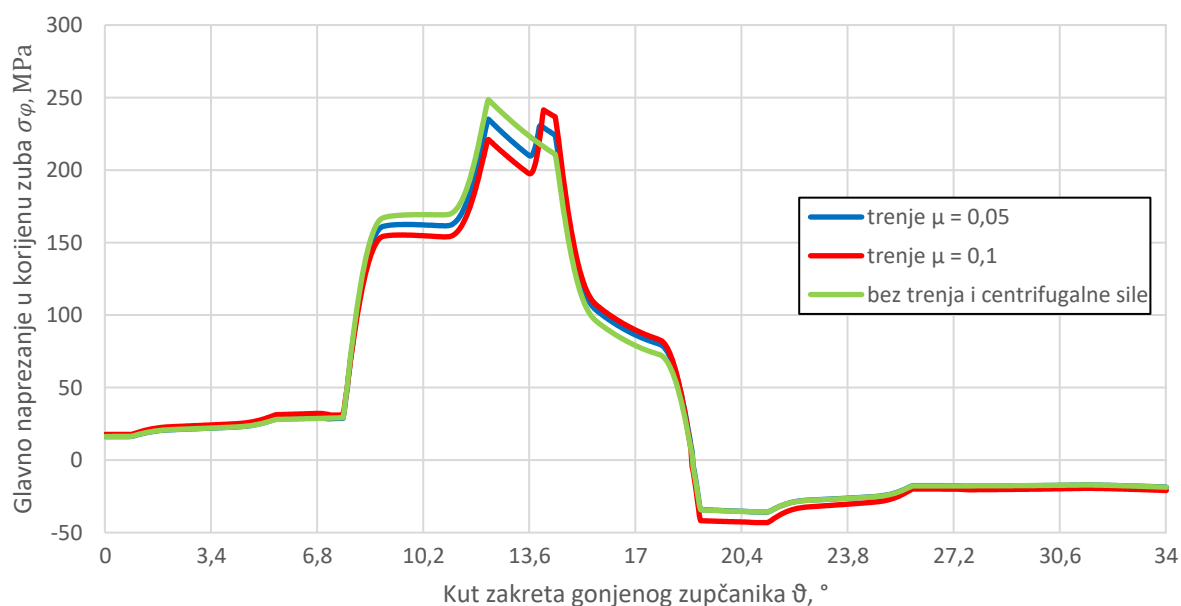
Slika 23. Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$

Utjecaj centrifugalnog opterećenja na ciklus naprezanja pri brzinama vrtnje u ovoj analizi je neznatan, kao što je i vidljivo iz rezultata prikazanih u tablici 7. Pozicija čvora jednaka je kao i u slučaju bez utjecaja centrifugalnog opterećenja ( $\varphi = 43,8^\circ$ ).

**Tablica 7. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  s uključenim utjecajem centrifugalnog opterećenja**

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S centrifugalnim opt., $n = 1500 \text{ min}^{-1}$	S centrifugalnim opt., $n = 3000 \text{ min}^{-1}$
$\sigma_{\varphi, \max}$	248,59 MPa	248,71 MPa	249,05 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-35,84 MPa	-35,72 MPa	-35,37 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	284,43 MPa	284,43 MPa	284,42 MPa

Trenje te njegov utjecaj na ciklus naprezanja prikazan je u dijagramu na slici 24. dok su granične i zbroj njihovih apsolutnih vrijednosti naprezanja prikazane u tablici 8. Za slučaj kada je  $\mu = 0,05$ , pozicija čvora s maksimalnim naprežanjem jednaka je poziciji kada trenje nije uzeto u obzir, tj. kut  $\varphi = 43,8^\circ$ . Kada je faktor trenja  $\mu = 0,1$ , pozicija čvora s maksimalnim glavnim naprežanjem se mijenja te je u tom slučaju kut  $\varphi = 46,78^\circ$ .

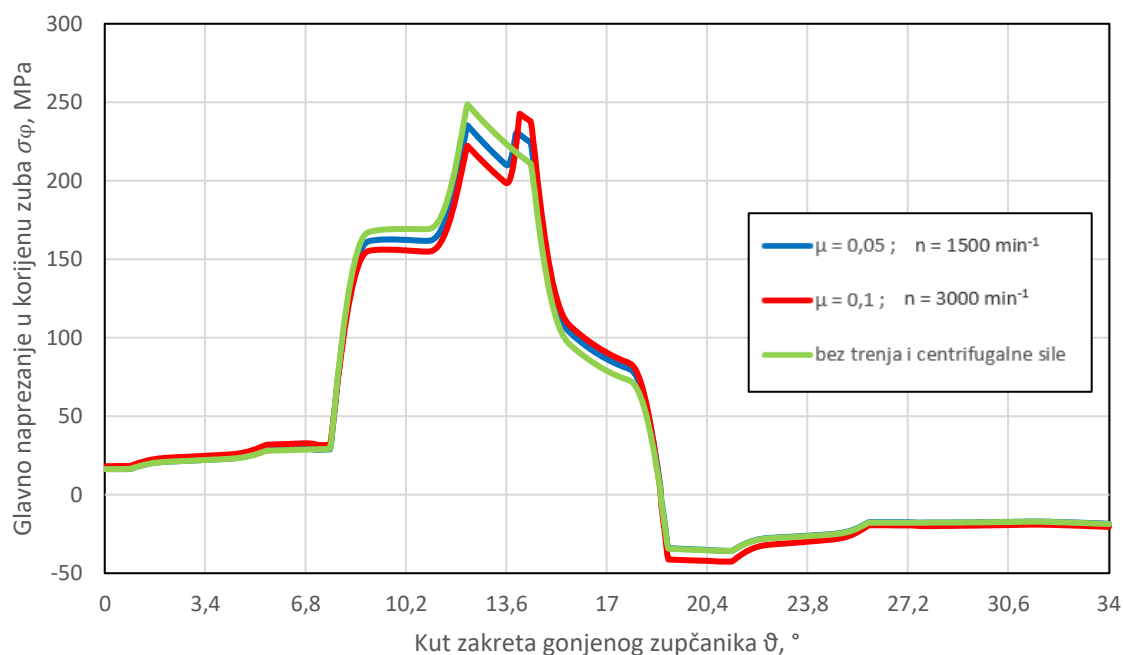


**Slika 24. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  s uključenim trenjem**

**Tablica 8. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  s uključenim utjecajem trenja**

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S uključenim trenjem, $\mu = 0,05$	S uključenim trenjem, $\mu = 0,1$
$\sigma_{\varphi, \max}$	248,59 MPa	235,14 MPa	242,16 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-35,84 MPa	-35,92 MPa	-43,13 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	284,43 MPa	271,06 MPa	285,29 MPa

Sukladno analizi provedenoj u prethodnom poglavlju 3.2.1., i u ovom slučaju analiziran je zajednički utjecaj trenja i centrifugalnog opterećenja. Na slici 25. prikazani su ciklusi naprezanja uzimajući u obzir trenje i centrifugalno opterećenje, dok su granične vrijednosti vidljive u tablici 9. Kut  $\varphi$  i ovdje se poklapa sa slučajevima kada je samo utjecaj trenja uzet u obzir, tj. za  $\mu = 0,05$  i  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$  kut  $\varphi = 43,8^\circ$ , dok je za parametre  $\mu = 0,1$  i  $n = 3000 \text{ min}^{-1}$  kut  $\varphi = 46,78^\circ$ .



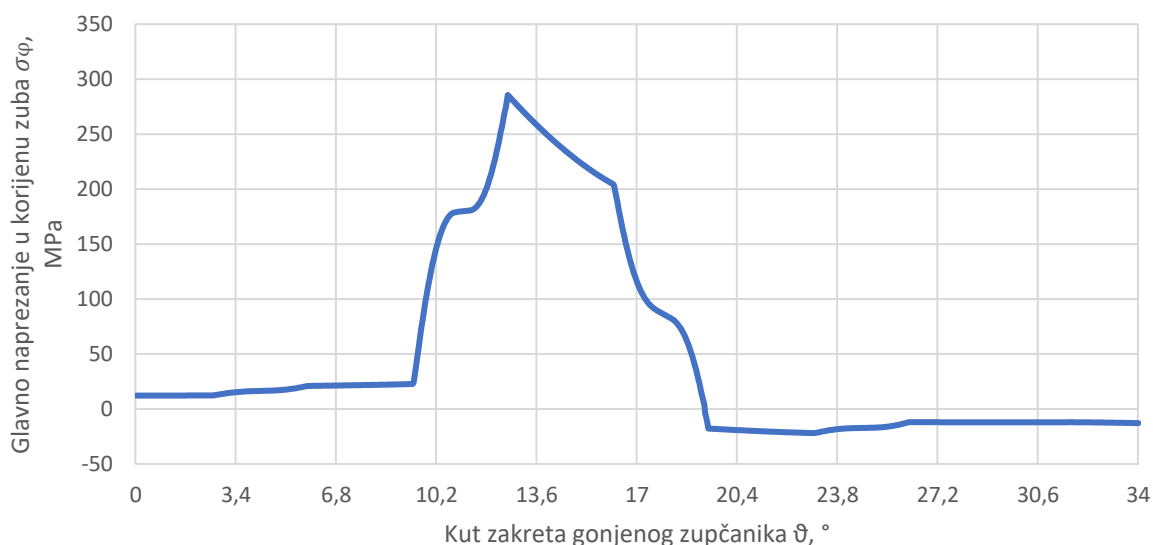
Slika 25. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem

Tablica 9. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  s uključenim utjecajem trenja i centrifugalnog opterećenja

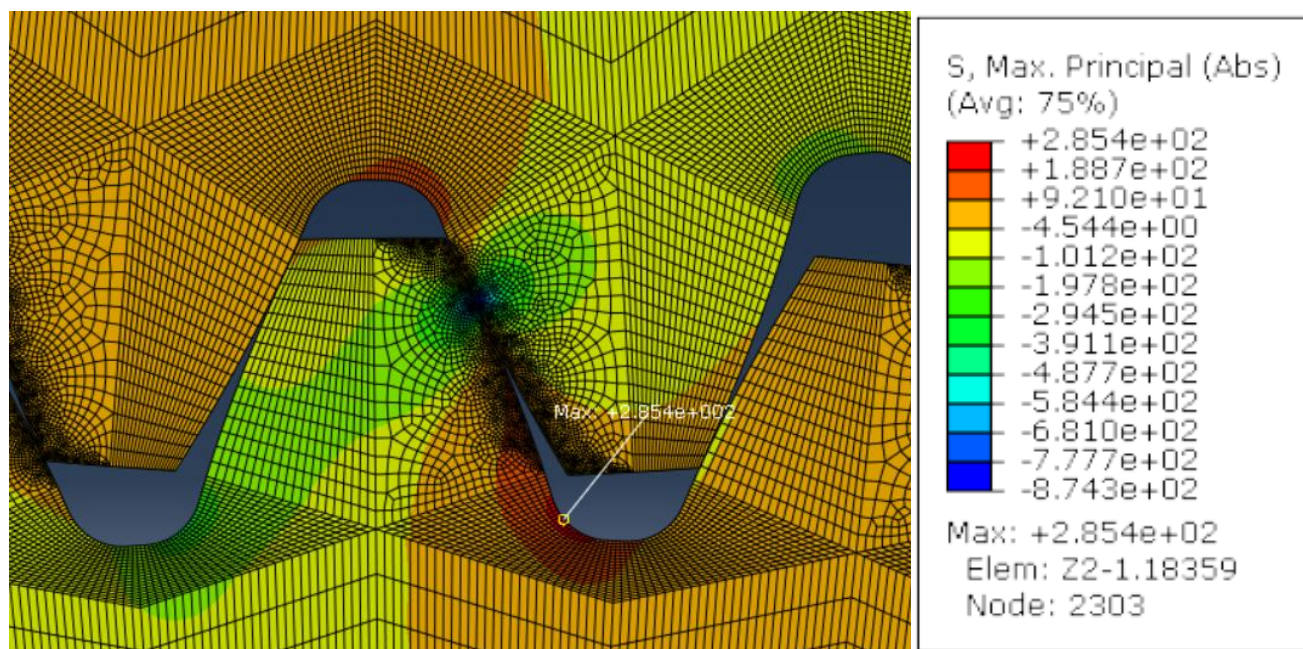
	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S centrifugalnim opt., $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ i trenjem $\mu = 0,05$	S centrifugalnim opt., $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ i trenjem $\mu = 0,1$
$\sigma_{\varphi,\max}$	248,59 MPa	235,25 MPa	242,66 MPa
$\sigma_{\varphi,\min}$	-35,84 MPa	-35,80 MPa	-42,64 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	284,43 MPa	271,05 MPa	285,30 MPa

### 3.2.3. Slučaj kada je bok s $\alpha_n = 20^\circ$ operativan (simetričan zub)

Ispitivanje konvergencije provedeno je sukladno točkama poglavlja 3.2.1. i 3.2.2. te je određen broj od 560 konačnih elemenata u promatranom području korijena zuba zupčanika čija je mreža vidljiva na slici 27. gdje je ujedno i vidljiv čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja za slučaj bez utjecaja centrifugalnog opterećenja i trenja. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za navedeni slučaj prikazan je na slici 26., dok je pozicija čvora s maksimalnim glavnim naprezanjem u korijenu zuba određena kutom  $\varphi = 37,54^\circ$ .



Slika 26. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$



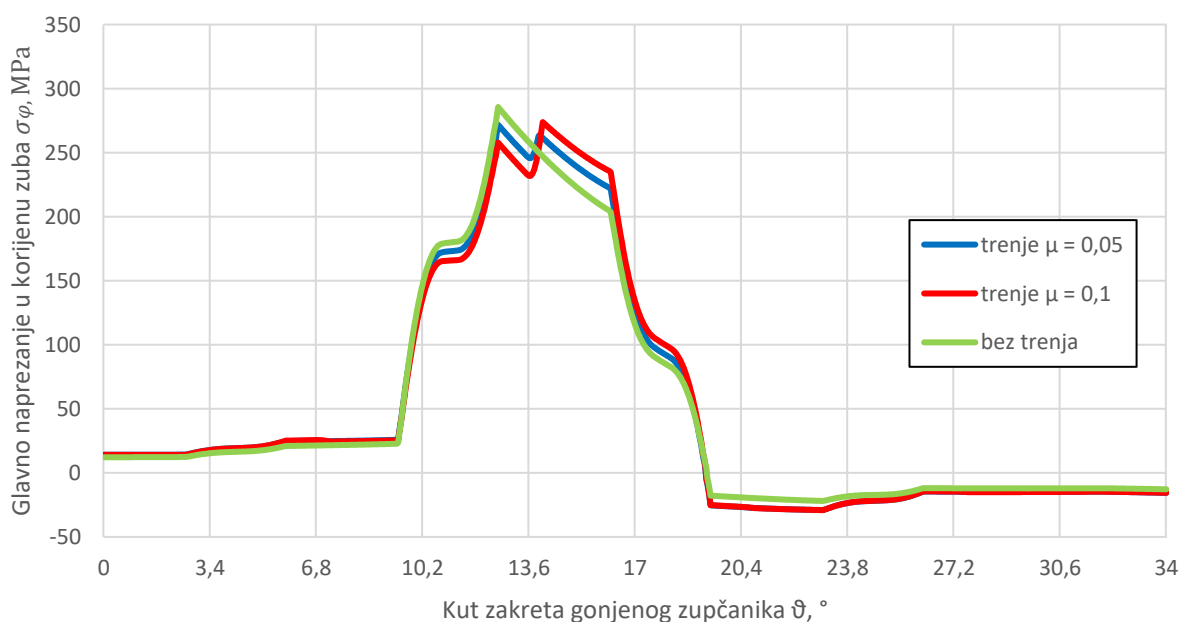
Slika 27. Promatrani čvor u trenutku maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$

Analogno prijašnjim točkama (3.2.1. i 3.2.2.) utjecaj centrifugalnog opterećenja na ciklus naprezanja i u ovim slučajevima je izrazito malen kao što je vidljivo u tablici 10. Pozicija čvora s maksimalnim naprezanjem jednaka je kao i kad centrifugalno opterećenje nije uzeto u obzir ( $\varphi = 37,54^\circ$ ).

**Tablica 10. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$  s uključenim utjecajem centrifugalnog opterećenja**

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S centrifugalnim opt., $n = 1500 \text{ min}^{-1}$	S centrifugalnim opt., $n = 3000 \text{ min}^{-1}$
$\sigma_{\varphi, \max}$	285,66 MPa	285,74 MPa	286,01 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-21,92 MPa	-21,83 MPa	-21,57 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	307,58 MPa	307,57 MPa	307,58 MPa

Ciklusi naprezanja za slučajeve u kojima je uzet u obzir i utjecaj trenja prikazani su na slici 28., a granične vrijednosti naprezanja, kao i zbroj njihovih apsolutnih vrijednosti prikazane su u tablici 11. Pozicija čvora za oba slučaja kada je trenje uzeto u obzir ( $\mu = 0,05$  i  $\mu = 0,1$ ) je jednaka, tj. kut  $\varphi = 41,34^\circ$ .



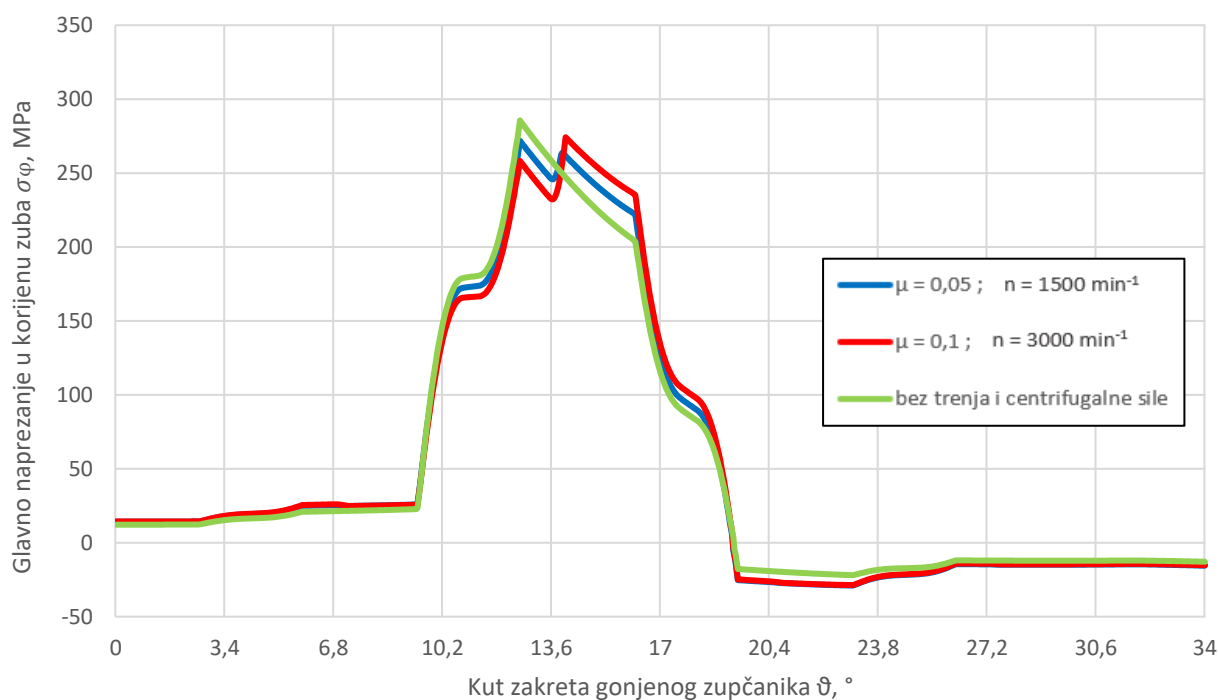
**Slika 28. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$  s uključenim trenjem**

**Tablica 11. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$  s uključenim utjecajem trenja**

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S uključenim trenjem, $\mu = 0,05$	S uključenim trenjem, $\mu = 0,1$
$\sigma_{\varphi, \max}$	285,66 MPa	273,24 MPa	275,32 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-21,92 MPa	-29,06 MPa	-29,07 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	307,58 MPa	302,30 MPa	304,39 MPa

Kod zupčanika sa simetričnim zubima provedena je jednaka analiza (kao i u prethodnim poglavljima 3.2.1. i 3.2.2.) koja uzima u obzir utjecaj centrifugalnog opterećenja i trenja što odgovara najrealnijoj simulaciji. Pozicija čvora s maksimalnim glavnim naprezanjem u korijenu zuba također odgovara poziciji za prethodne slučajeve kada je samo trenje uzeto u obzir, odnosno  $\varphi = 41,34^\circ$ .

Ciklusi naprezanja prikazani su na slici 29., a granična naprezanja i zbroj njihovih apsolutnih vrijednosti naprezanja za pojedini slučaj u tablici 12.



**Slika 29. Ciklus naprezanja korijena zuba za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$  s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem**

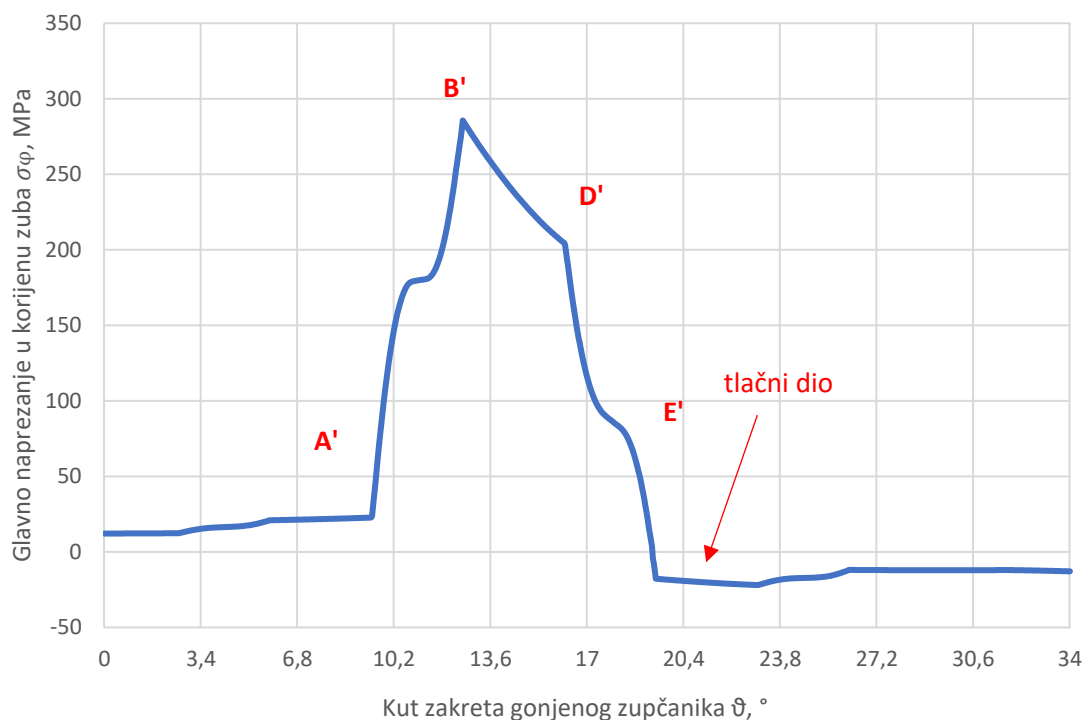


**Tablica 12. Granične vrijednosti naprezanja za slučaj  $\alpha_n = 20^\circ$  s uključenim utjecajem trenja i centrifugalnim opterećenjem**

	Bez centrifugalnog opt. i bez trenja	S centrifugalnim opt., $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ i trenjem $\mu = 0,05$	S centrifugalnim opt., $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ i trenjem $\mu = 0,1$
$\sigma_{\varphi,\max}$	285,66 MPa	273,34 MPa	275,71 MPa
$\sigma_{\varphi,\min}$	-21,92 MPa	-28,96 MPa	-28,68 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	307,58 MPa	302,30 MPa	304,39 MPa

#### 4. PRIKAZ I SINTEZA REZULTATA

Ciklus naprezanja za zupčanik sa simetričnim zubima ( $\alpha_n = 20^\circ$ ) prikazan na slici 30. odabran je za referentnu analizu naprezanja korijena zuba.



**Slika 30. Ciklus naprezanja korijena zuba za zupčanik sa simetričnim zubima sa karakterističnim točkama zahvata**

Poštivajući nomenklaturu karakterističnih točaka zahvata iz [12] te uzimajući u obzir i deformaciju zuba, karakteristične točke označene su slovima od A' do E'. Normalna sila  $F_{bn}$ , za vrijeme puta zahvata (A'E') djeluje dijelom na dva para zuba, a dijelom na jedan par zubi kao što je objašnjeno u nastavku.

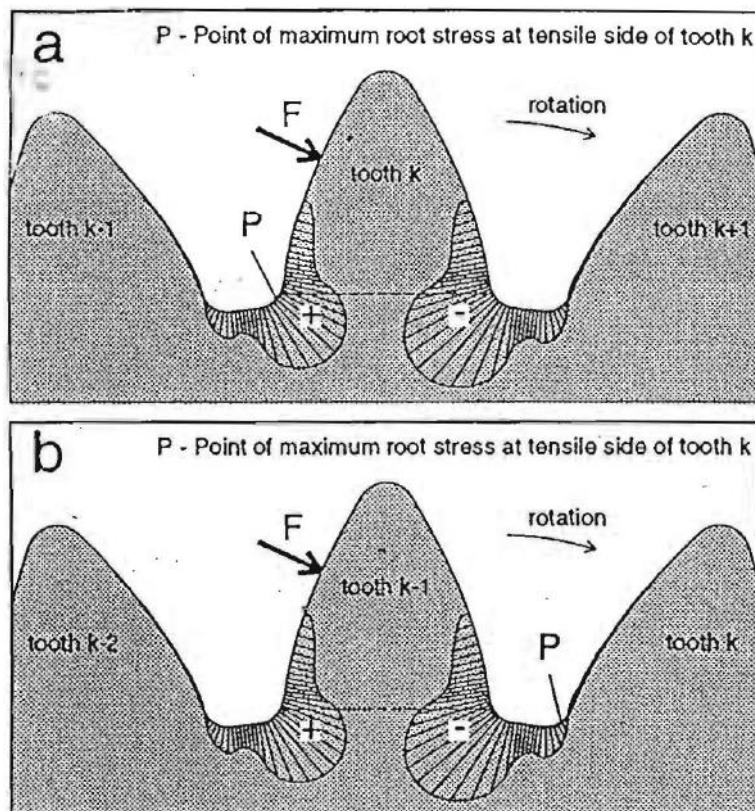
Točka A' predstavlja početak zahvata promatranog para zubi, tj. podnožje pogonskog zupčanika zahvaća tjeme gonjenog zupčanika. Kako se radi o području dvostrukog zahvata, promatran par zubi dijeli opterećenje sa parom koji je ušao ranije u zahvat.

Promatrani par zuba dostiže maksimalni iznos naprezanja u točki B' i to nakon što je ušao u područje jednostrukog zahvata s obzirom da je par zubi koji prethodi promatranom izašao iz zahvata.

U točki D' počinje opet zahvat dva para zubi te se opterećenje opet dijeli na dva para zubi što za posljedicu ima pad naprezanja u korijenu zuba.

Točka E' označava izlazak promatranog zuba iz zahvata te pad naprezanja koje u jednom trenu iz vlačnog područja ( $\sigma_\varphi > 0$ ) prelazi u tlačno područje ( $\sigma_\varphi < 0$ ).

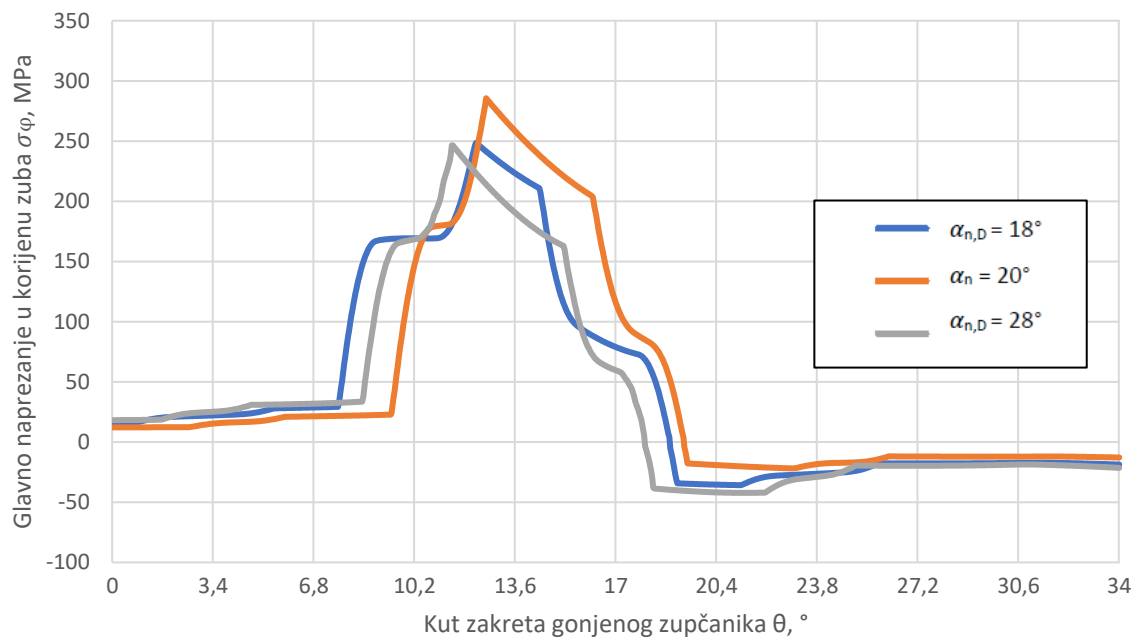
Tlačni dio naprezanja u dijagramu na slici 30. posljedica je djelovanja sile  $F_{bn}$  (na slici 31. označena s F) na bok susjednog zuba koji je ušao u zahvat nakon što je promatrani zub izašao iz njega. Točka P označava čvor s maksimalnim glavnim naprežanjem u korijenu gonjenog zuba k, a rotacija gonjenog zupčanika odvija se u smjeru kazaljke na satu.



**Slika 31. Naprežanje u korijenu zuba k u trenutku kada opterećenje djeluje na operativni bok promatranog zuba (a) i kada opterećenje djeluje na operativni bok zuba koji u zahvat ulazi nakon promatranog zuba (b) [13]**

#### 4.1. Usporedba ciklusa naprežanja po slučajevima zahvata

Najjednostavnija usporedba ciklusa naprežanja po zahvatima, bez uključenog utjecaja trenja i centrifugalnog opterećenja prikazana je na slici 32. dok su granične i zbroj njihovih apsolutnih vrijednosti naprežanja prikazane u tablici 13. kako bi postojao zorniji prikaz za usporedbu.



**Slika 32. Ciklusi naprezanja različitih zahvata za slučaj bez uključenog trenja i centrifugalnog opterećenja**

**Tablica 13. Granične vrijednosti glavnog naprezanja po slučajevima zahvata bez utjecaja trenja i centrifugalnog opterećenja**

	$\alpha_n = 20^\circ$	$\alpha_{n,D} = 18^\circ$	$\alpha_{n,D} = 28^\circ$
$\sigma_{\varphi, \max}$	285,66 MPa	248,60 MPa	246,50 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-21,92 MPa	-35,84 MPa	-42,24 MPa
$ \sigma_{\Sigma} $	307,58 MPa	284,44 MPa	288,74 MPa

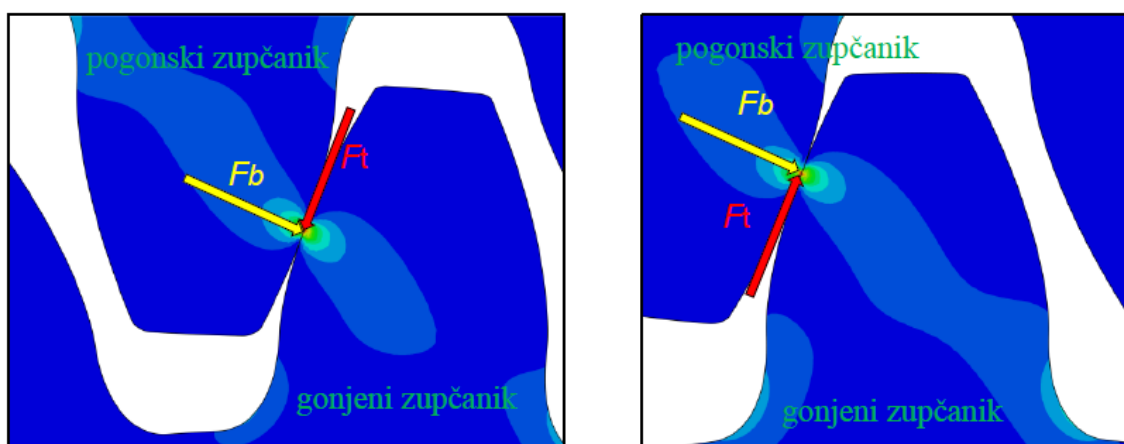
Jasno su vidljive niže vrijednosti maksimalnog naprezanja za zupčani par s asimetričnim zubima u odnosu na referentni par sa simetričnim zubima. Razlike iznose -37,06 MPa (-12,97 %) za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  i -39,15 MPa (-13,71 %) za  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ .

S druge strane, vidljiv je i porast apsolutne vrijednosti minimalnog naprezanja. Kako se minimalno naprezanje odnosi na tlačno područje te ima negativnu vrijednost, ono ima i za posljedicu povećanje amplitude ciklusa naprezanja. Uspoređujući amplitudne vrijednosti, one su i dalje niže kod asimetričnih zubi u iznosu od 11,57 MPa za  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  i 9,42 MPa za  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ .

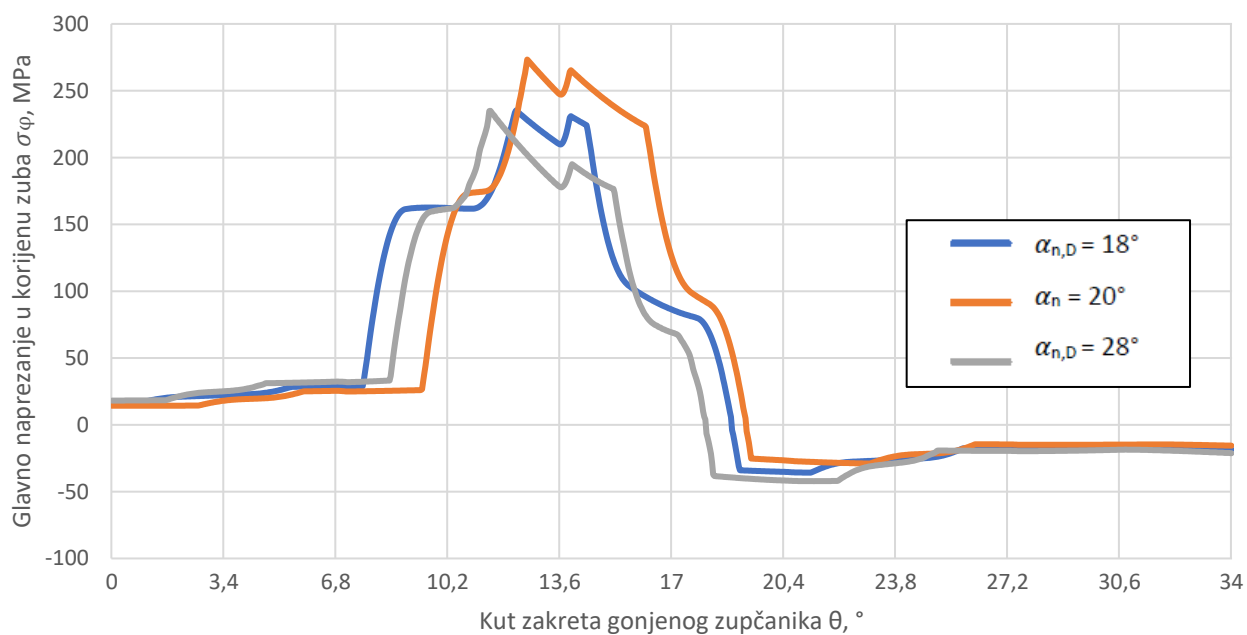
#### 4.2. Usporedba ciklusa naprezanja po slučajevima zahvata s uključenim trenjem i centrifugalnim opterećenjem

Kao što je već navedeno u poglavlju 3.2.1. utjecaj centrifugalnog opterećenja u ovim simulacijama je neznatan kako se radi o relativno nižim vrijednostima brzine vrtnje ( $1500$  i  $3000 \text{ min}^{-1}$ ) stoga nema potrebe za zasebnim uspoređivanjem ciklusa naprezanja uzimajući u obzir samo centrifugalno opterećenje. Nasuprot tome, uključivanje faktora trenja u analizu ima relativno znatan utjecaj na ciklus naprezanja.

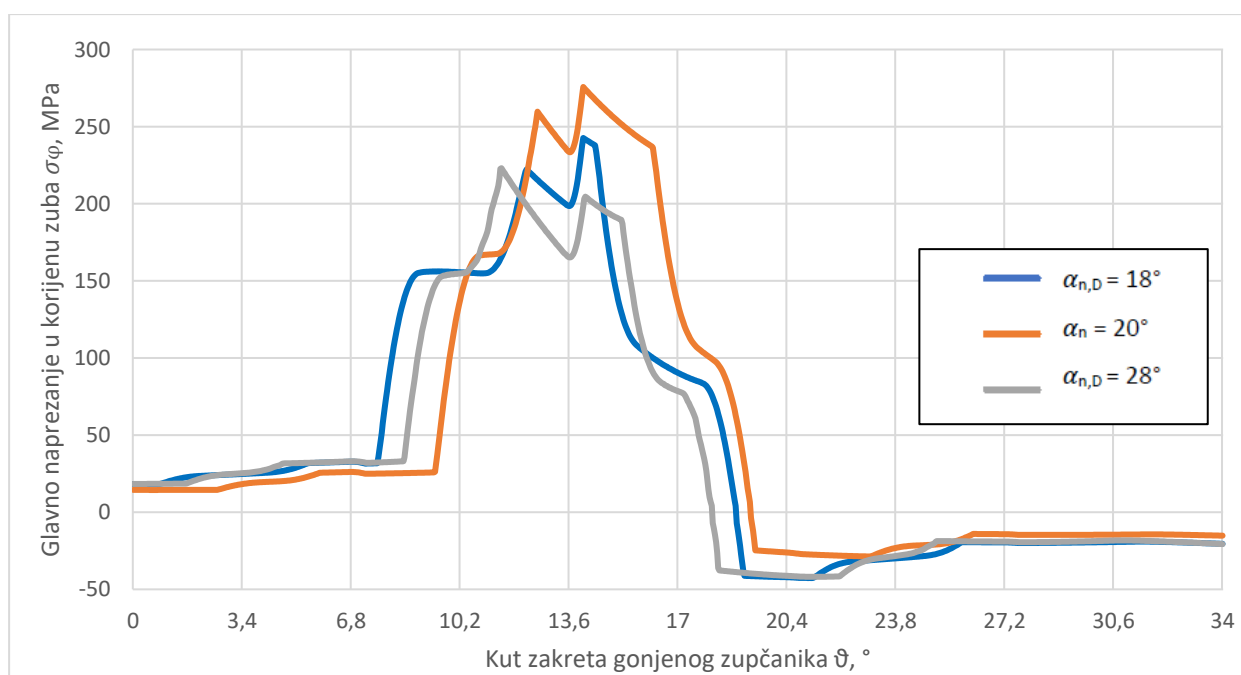
Iz dijagrama na slici 20., 24. i 28. vidljiva je razlika u ciklusima naprezanjima u području jednostrukog zahvata za slučaj bez i s uključenim trenjem. Tijekom jednostrukog zahvata dolazi do smanjenja, odnosno do povećanja glavnog naprezanja u korijenu zuba gonjenog zupčanika. Uzrok ovakve promjene glavnog naprezanja u korijenu zuba je promjena djelovanja smjera sile trenja, odnosno momenta koji ona stvara na promatranu točku u području korijena zuba [14]. Na slici 33. prikazana je promjena djelovanja smjera sile trenja  $F_t$  kada pogonski zupčanik djeluje na gonjeni zupčanik normalnom silom  $F_b$ .



Slika 33. Promjena djelovanja smjera sile trenja na gonjenom zupčaniku [14]

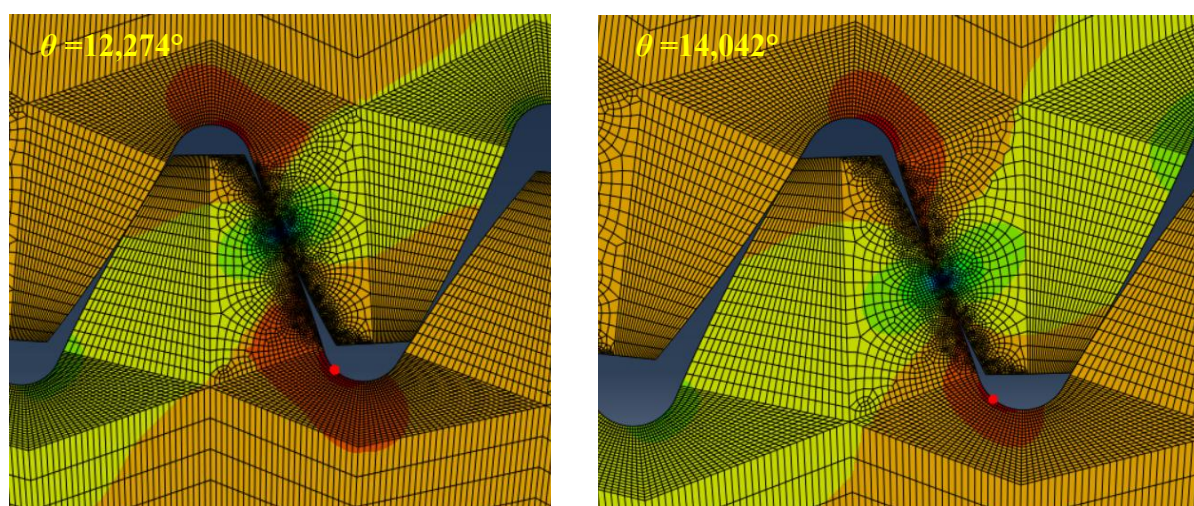


Slika 34. Ciklusi naprezanja različnih zahvata za slučaj  $\mu = 0,05$  i  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$



Slika 35. Ciklusi naprezanja različnih zahvata za slučaj  $\mu = 0,1$  i  $n = 3000 \text{ min}^{-1}$

Provođenjem usporedbe svih tri slučaja zahvata prema slici 34. za uvjete s uključenim trenjem  $\mu = 0,05$  i  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$  utvrđeno je da se maksimalno glavno naprezanje u korijenu zuba  $\sigma_{\varphi, \max}$  ne javlja uvijek pri jednakom kutu zakreta gonjenog zupčanika. Jednostavan razlog tome leži u samoj geometriji zuba, s obzirom da se radi o dva različita slučaja zahvata jednakog asimetričnog zupčanika ( $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  ili  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ ) i zahvatu zupčanika sa simetričnim zubima ( $\alpha_n = 20^\circ$ ). Zajedničko za sva tri slučaja zahvata je to što se maksimalno glavno naprezanje u korijenu zuba javlja uvijek pri početku jednostrukog zahvata, iako je sam početak jednostrukog zahvata pri različitim kutovima zakreta gonjenog zupčanika za sva tri slučaja. Iz slike 35. za uvjete s uključenim trenjem  $\mu = 0,1$  i  $n = 3000 \text{ min}^{-1}$  vidljivo je kako to već nije slučaj. Povećanjem faktora trenja na  $\mu = 0,1$  došlo je do promjene kuta zakreta gonjenog zupčanika pri kojemu se ostvaruje maksimalno glavno naprezanje u korijenu zuba  $\sigma_{\varphi, \max}$  za slučajeve zahvata  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  i  $\alpha_n = 20^\circ$ , dok je za slučaj zahvata  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  on ostao isti, tj.  $\sigma_{\varphi, \max}$  je na početku jednostrukog zahvata.



Slika 36. Čvor s maksimalnim glavnim naprezanjem za slučaj  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  za  $\mu = 0,05$  (lijevo) i  $\mu = 0,1$  (desno)

Tablica 14. Granične vrijednosti glavnog napreznja po slučajevima zahvata za  $\mu = 0,05$  i  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$

	$\alpha_n = 20^\circ$	$\alpha_{n,D} = 18^\circ$	$\alpha_{n,D} = 28^\circ$
$\sigma_{\varphi, \max}$	273,34 MPa	235,25 MPa	235,02 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-28,96 MPa	-35,80 MPa	-42,17 MPa
$ \sigma_\Sigma $	302,30 MPa	271,05 MPa	277,18 MPa

**Tablica 15. Granične vrijednosti glavnog napreznja po slučajevima zahvata za  $\mu = 0,1$  i  $n = 3000 \text{ min}^{-1}$** 

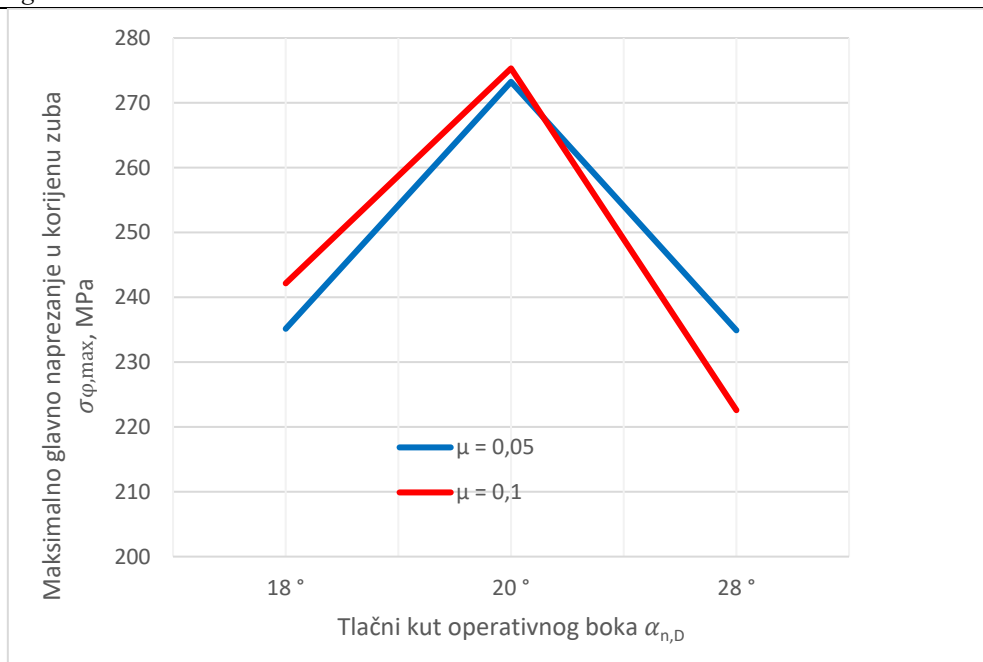
	$\alpha_n = 20^\circ$	$\alpha_{n,D} = 18^\circ$	$\alpha_{n,D} = 28^\circ$
$\sigma_{\varphi,\max}$	275,71 MPa	242,66 MPa	223,05 MPa
$\sigma_{\varphi,\min}$	-28,68 MPa	-42,63 MPa	-41,86 MPa
$ \sigma_\Sigma $	304,39 MPa	285,29 MPa	264,91 MPa

Uspoređujući granične vrijednosti za uvjete trenja  $\mu = 0,05$  i centrifugalnog opterećenja  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$  prema tablici 14. jasno je vidljiv trend smanjenja maksimalnog napreznja prilikom korištenja zupčanika s asimetričnim zubima ( $\alpha_{n,D} = 18^\circ$  i  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ ) u odnosu na zupčanik sa simetričnim zubima ( $\alpha_n = 20^\circ$ ) i to u nezanemarivoj vrijednosti od  $\sim -38 \text{ MPa}$ , odnosno oko -13,9%. S druge strane, kod asimetričnih zubi vidljiv je i porast apsolutne vrijednosti minimalnog napreznja koje se nalazi na tlačnoj strani dijagrama ciklusa napreznja. Porast tlačnog dijela napreznja posljedica je utjecaja susjednog zuba kao što je ranije navedeno, a iz tablice 14. jasno je vidljivo kako je taj utjecaj mnogo veći za slučaj zahvata  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$ . Amplitudne vrijednosti napreznja i u tom su slučaju zahvata, kao i kod zahvata  $\alpha_{n,D} = 18^\circ$ , manje nego kod zahvata simetričnih zubi ( $\alpha_n = 20^\circ$ ).

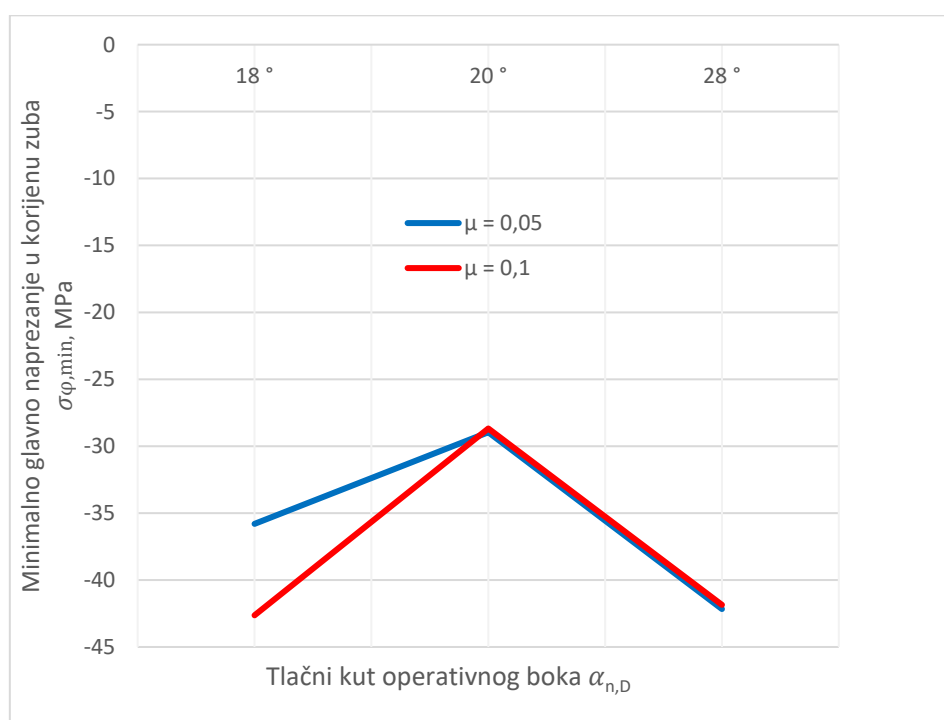
Tablica 15. za uvjete  $\mu = 0,1$  i  $n = 3000 \text{ min}^{-1}$  također potvrđuje trend smanjena maksimalnog glavnog napreznja u korijenu zuba kod asimetričnih zubi, no ovdje je to u slučaju zahvata  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  itekako više izraženo s obzirom da razlika u maksimalnog napreznju u odnosu na zahvat sa simetričnim zubima iznosi  $-52,66 \text{ MPa}$  (-19,1%). Rezultat toga je i podosta manja vrijednost amplitude napreznja za taj slučaj zahvata, iako je i dalje apsolutna vrijednost tlačnog dijela napreznja veća za asimetrične zube u odnosu na simetrične.

Zorniji prikaz iznosa maksimalnog glavnog napreznja u korijenu zuba  $\sigma_{\varphi,\max}$  u funkciji iznosa tlačnog kuta operativnog boka vidi se na slici 37., dok je za minimalno glavno napreznje u korijenu  $\sigma_{\varphi,\min}$  prikazano na slici 38.





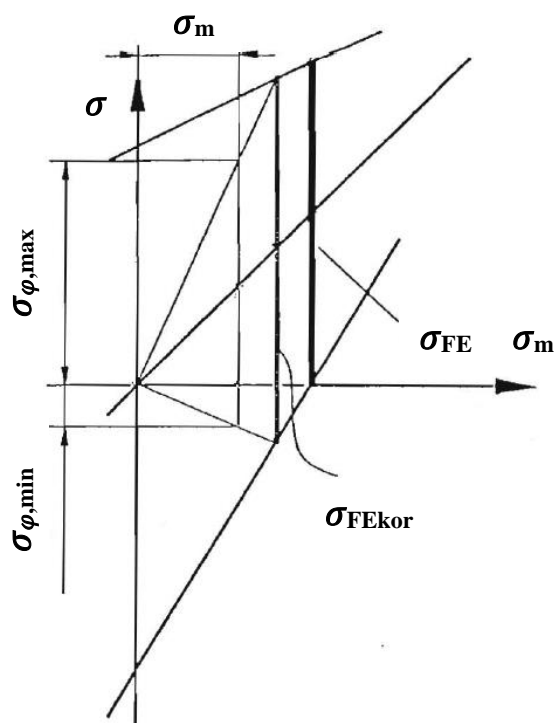
**Slika 37. Maksimalno naprezanje u korijenu zuba u funkciji tlačnog kuta operativnog boka**



**Slika 38. Minimalno naprezanje u korijenu zuba u funkciji tlačnog kuta operativnog boka**

Norma HRN EN ISO 6336-3 [10] definira trajnu dinamičku čvrstoću korijena zuba kao najveće naprezanje koje zubi uz 99% pouzdanosti izdrže bez pojave loma nakon  $3 \times 10^6$  broja ciklusa promjene naprezanja. Navedena norma u proračunu koristi vrijednosti trajnih dinamičkih čvrstoća  $\sigma_{FE}$  za različite materijale dobivene ispitivanjem na savijanje uzoraka pri čistom

istosmjernom ciklusu naprezanja ( $R = 0$ ). Kao što je potvrđeno u ovom radu, a i u ostalima [11], [13], zbog utjecaja susjednog zuba u stvarnosti ciklus naprezanja korijena zuba nije čisti istosmjerni ciklus ( $R=0$ ) nego naizmjenični, tj. nalazi se u području  $-1 < R < 0$ . Kako trajna dinamička čvrstoća  $\sigma_{FE}$  ne uzima u obzir tlačni dio ciklusa naprezanja korijena zuba, već samo vlačni dio, potrebne su određene korekcije u proračunu. Neke od korekcija već su predložene u [13] i [15] gdje u odnosu na uobičajeni faktor sigurnosti, a koji je omjer trajne dinamičke čvrstoće  $\sigma_{FE}$  i maksimalnog vlačnog naprezanja u korijenu zuba  $\sigma_{\varphi, \max}$ , postoji i korigirani faktor sigurnosti koji uzima u obzir i tlačni dio naprezanja. Na slici 39. prikazan je Smithov dijagram s korigiranom trajnom dinamičkom čvrstoćom korijena zuba  $\sigma_{FEkor}$  koja uzima u obzir i tlačni dio naprezanja.

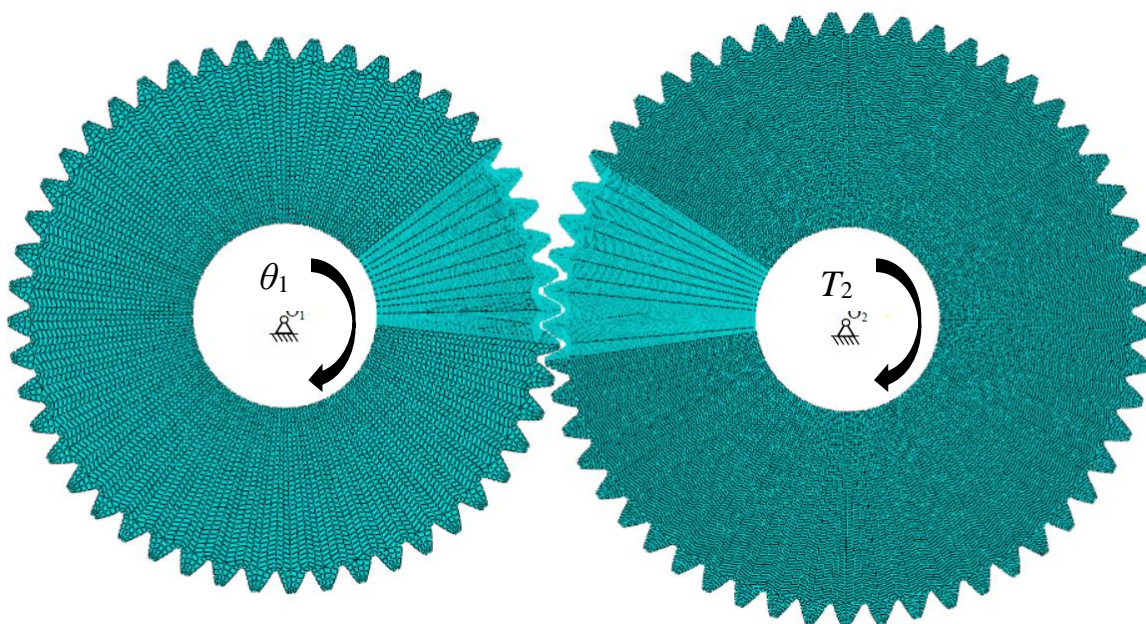


Slika 39. Smithov dijagram s korigiranom trajnom dinamičkom čvrstoćom  $\sigma_{FEkor}$

### 4.3. Promjena rubnih uvjeta

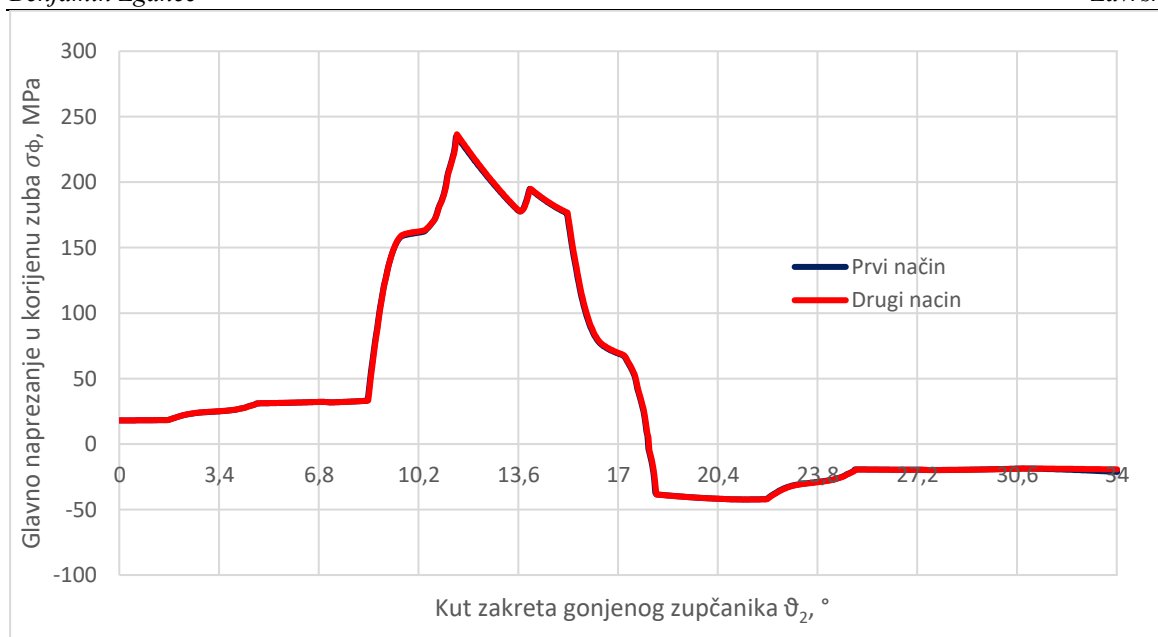
U kasnijoj fazi izrade ovog rada primijećeno je potencijalno poboljšanje u postavljanju rubnih uvjeta, i to sa svrhom što egzaktnijeg novog rješenja. Prema poglavlju 3.1. rubni uvjeti postavljeni su tako da je pogonski zupčanik opterećen momentom torzije  $T$ , dok je kut zakreta  $\theta$  određen na gonjenom zupčaniku kao što je prikazano na slici 13. Bolje rješenje bilo bi zadati kut zakreta  $\theta_1$  na pogonskom zupčaniku, a gonjeni zupčanik opteretiti momentom torzije  $T_2$ . Usporedbe radi, promijenjeni su rubni uvjeti za slučaj zahvata kada je bok s  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$

operativan i kada je u obzir uzeto trenje  $\mu = 0,05$ . Promjenu rubnih uvjeta potrebno je izvršiti uzevši u obzir prijenosni omjer  $i$  te predznake prilikom zadavanja istih kako bi simulacija mogla funkcionirati. Promijenjeni rubni uvjeti prikazani su na slici 40.



Slika 40. Promijenjeni rubni uvjeti zupčanog para

Slika 41. pokazuje da se ciklusi naprezanja za oba dva načina zadavanja rubnih uvjeta uglavnom „poklapaju“ te da su razlike kod maksimalnih i minimalnih vrijednosti naprezanja minimalne, ali ipak postoje, kao što je vidljivo u tablici 16. Valja napomenuti da se ovdje radi samo o jednom slučaju zahvata s  $\alpha_{n,D} = 28^\circ$  i uvjetima trenja  $\mu = 0,05$  te da je potrebno provesti usporedbe analiza i za druge slučaje zahvata i uvjete trenja i/ili centrifugalnog opterećenja.



**Slika 41. Ciklusi naprezanja za oba načina zadavanja rubnih uvjeta**

**Tablica 16. Usporedba graničnih vrijednosti naprezanja za oba načina zadavanja rubnih uvjeta**

	Prvi način zadavanja R.U.	Drugi način zadavanja R.U.
$\sigma_{\varphi, \max}$	234,9035 MPa	236,60328 MPa
$\sigma_{\varphi, \min}$	-42,2819 MPa	-42,3392 MPa

## 5. ZAKLJUČAK

U radu je uspješno pomoću metode konačnih elemenata provedena analiza ciklusa naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika sa simetričnim i asimetričnim zubima. Analiziran je utjecaj centrifugalnog opterećenja i/ili trenja na pojedini ciklus naprezanja kako bi uvjeti numeričke analize odgovarali u što većoj mjeri stvarnoj situaciji. Relativno mala brzina vrtnje u iznosu od  $1500 \text{ min}^{-1}$  i  $3000 \text{ min}^{-1}$  ima zanemariv utjecaj na ciklus naprezanja te je prirast naprezanja prilikom uzimanja u obzir centrifugalnog opterećenja za navedene brzine vrtnje minimalan.

Uključivanjem faktora trenja u analizu, kod gonjenog zupčanika dolazi do promjene ciklusa naprezanja u području jednostrukog zahvata gdje sila trenja mijenja svoj smjer te tako dolazi do smanjenja, odnosno povećanja glavnog naprezanja u području jednostrukog zahvata. Generalno gledajući, vrijednosti maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba su kod zupčanika s asimetričnim zubima otprilike oko 10 do 20 % manje nego kod zupčanika sa simetričnim zubima, ovisno o faktoru trenja. Međutim, utvrđeno je da je ciklus naprezanja naizmjeničan te da prilikom izlaska promatranog zuba iz zahvata, a zbog utjecaja susjednog zuba dolazi i do tlačnog naprezanja koje odgovara minimalnom glavnom naprezanju u korijenu zuba. U tablici 14. i 15. jasno je vidljivo kako razlike u minimalnom glavnom naprezanju između zupčanika sa simetričnim i asimetričnim zubima nikako nisu zanemarive. Iz tih razloga pogrešno bi bilo prilikom proračuna uzimati vrijednost trajne dinamičke čvrstoće kao što to sugerira norma HRN EN ISO 6336-3. Pozicija čvora maksimalnog glavnog naprezanja u korijenu zuba koja je definirana kutom između tangente na prijelaznu krivulju u korijenu zuba i simetrale zuba, za svaki od slučajeva zahvata analiziranih u ovom radu, ne odgovara kritičnoj poziciji navedenoj u normi HRN EN ISO 6336-3.

---

**LITERATURA**

- [1] [www.indiamart.com/](http://www.indiamart.com/)
- [2] Oberšmit, E., Ozubljenja i zupčanici, SNL Zagreb, 1982.
- [3] [www.doi.org/](http://www.doi.org/)
- [4] Kapelevich, A. L.: Asymmetric Gearing, CRC Press, 2019.
- [5] Weber, C., Tobie, T., Stahl, K., Investigation on the tooth root bending strength of gears with special involute tooth shape, Gear Research Centre (FZG), Technical University of Munich, Garching, Germany, 2017.
- [6] Rastija, M., Parametarsko modeliranje cilindričnog zupčanika s evolventnim ozubljenjem, Diplomski rad, Zagreb, 2017.
- [7] Kapelevich, A. L.: Asymmetric gearing, CRC Press, 2019.
- [8] Kapelevich, A. L.: Measurement of Directly Designed Gears with Symmetric and Asymmetric Teeth, Gear Technology, January/February, 60-65, 2011.
- [9] ABAQUS 6.13, Dassault Systems, Simulia, 2013.
- [10] HRN EN ISO 6336-3, „Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength“, ISO, 2009.
- [11] Čular, I., Ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem, Završni rad, Zagreb, 2016.
- [12] Oberšmit, E., Ozubljenja i zupčanici, SNL Zagreb, 1982.
- [13] Linke, H., Borner, J., The influence of neighbouring teeth on the tooth root capacity, Dresden University of Technology, 1994.
- [14] Vučković, K., Risović, S., Čular, I., Effects of Finite Element Type, Mesh Size and Friction on Spur Gear Nominal Tooth Root Stress Results, 3rd International Scientific Conference, Jahorina, Republic of Srpska, BiH, 7.-9.12.2016.
- [15] Langheinrich, A., Otto, M., Stahl, K., Geometry, strain and deformation of asymmetric spur gears, Institute of Machine Elements/Gear Research Centre (FZG), Munich, 2015.

---

**PRILOZI**

I. CD-R disc