

# Biomehanička analiza skoka u dalj

---

**Horvat, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2010**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:600227>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# DIPLOMSKI RAD

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Tanja Jurčević Lulić

Marko Horvat

Zagreb, 2010

## Sažetak

Ovaj rad bavi se proučavanjem biomehanike skoka u dalj s mjesta. U radu se opisuju metode koje su potrebne kako bi se omogućilo što točnije definiranje gibanja i orijentacije ljudskog tijela u prostoru. U tu svrhu izrađen je žičani model snimljenog skoka muškog subjekta. Definiran je biomehanički model kao sustav geometrijskih tijela povezanih zglobovima zbog utvrđivanja inercijskih značajki dijelova tijela. Opisan je postupak utvrđivanja orijentacije pojedinih dijelova tijela tijekom gibanja te metoda izračunavanja 3D putanji težišta i određivanje središnjih dinamičkih momenata tromosti tijela tijekom gibanja. Promjene dinamičkih značajki 3D modela tijekom skoka prikazane su dijagramski.

## Sadržaj

1. Uvod.....	1
1.1. Cilj rada.....	2
2. Metode i ispitanici.....	3
2.1. Mjerenja u biomehanici .....	3
2.1.1. 3D optička analiza.....	5
2.1.2. Video analiza .....	7
2.1.3. Skok u dalj s mjesta .....	8
2.2. Biomehanički model .....	11
3. Izračunavanje biomehaničkih podataka.....	19
3.1. Određivanje orijentacije segmenata .....	19
3.1.1. Matrične metode .....	25
3.1.1.1. Relativna orijentacija lokalnog i globalnog sustava .....	25
3.1.1.2. Definiranje položaja u dva referentna koordinatna sustava.....	28
3.2. Određivanje putanje središta mase tijela.....	33
3.3. Određivanje središnjih dinamičkih momenata tromosti cijelog tijela.....	36
3.4. Jednadžbe gibanja .....	37
4. Rezultati .....	42
4.1. Putanja središta mase tijela .....	42
4.2. Dinamičke antropomjere – središnji dinamički momenti tromosti.....	50
5. Zaključak.....	53
6. Literatura.....	54

## Popis slika

Slika 1. Prikaz 3D sustava za snimanje .....	6
Slika 2. Prikaz markera na tijelu .....	6
Slika 3. Prikaz rastavljenog udarca u golfu .....	7
Slika 4. Prikaz 1. – 6. faza skoka u dalj s mjesta (sagitalna ravnina) .....	8
Slika 5. Prikaz 7. – 12. faze skoka (sagitalna ravnina) .....	9
Slika 6. Prikaz 1. - 12. faze skoka u dalj s mjesta (frontalna ravnina).....	10
Slika 7. Kinematička shema biomehaničkog modela – žičani model.....	11
Slika 8. Prikaz žičanog modela u sagitalnoj ravnini .....	12
Slika 9. Prikaz žičanog modela u sagitalnoj ravnini .....	13
Slika 10. Prikaz žičanog modela u frontalnoj ravnini.....	14
Slika 11. Prikaz "stadiuma" .....	17
Slika 12. 3D model tijela .....	18
Slika 13. Ravnine ljudskog tijela .....	19
Slika 14. Prikaz lokalnih koordinatnih sustava vezanih na pojedine segmente na tijelu.....	21
Slika 15. Prikaz radij-vektora lijeve strane tijela .....	22
Slika 16. Prikaz radij-vektora desne strane tijela.....	24
Slika 17. Čista translacija je definirana s tri komponente vektora $L_g$ Velika tiskana slova označavaju globalni sustav, a mala lokalni koordinatni sustav .....	25
Slika 18. Komponente jediničnog vektora $x$ u globalnom referentnom .....	27
Slika 19. Gornja slika prikazuje rotaciju lokalnog sustava $L$ u odnosu na globalni sustav $G$ . U donjoj slici prikazana je točka $P$ u globalnom i lokalnom sustavu .....	29
Slika 20. Položaj točke $P$ u globalnom sustavu .....	31
Slika 21. Shematski prikaz težišta pojedinih segmenata u postocima .....	33
Slika 22. Prikaz žičanog modela i ucrtanih koordinata za desnu potkoljenu u frontalnoj i sagitalnoj ravnini.....	34
Slika 23. Prikaz žičanog modela sa ucrtanim težištem u frontalnoj i sagitalnoj ravnini .....	35
Slika 24. Eulerovi kutovi .....	38
Slika 25. Prikaz skoka u dalj preko žičanih modela u sagitalnoj ravnini .....	42
Slika 26. Prikaz skoka u dalj preko žičanih modela u frontalnoj ravnini .....	43
Slika 27. Prikaz težišta u sagitalnoj ravnini kroz cijeli skok .....	45
Slika 28. Prikaz težišta u frontalnoj ravnini kroz cijeli skok .....	46
Slika 29. Prikaz putanji ukupnog težišta u $yz$ ravnini.....	47
Slika 30. Prikaz putanji ukupnog težišta u $xz$ ravnini.....	48
Slika 31. Prikaz putanji ukupnog težišta u $xy$ ravnini .....	49

## Popis tablica

Tablica 1. Regresijski koeficijenti za muškarce prema Donskom i Zaciorskom.....	15
Tablica 2. Regresijski koeficijenti za žene prema Donskom i Zacijorskom, R - koeficijent regresije, $\sigma$ - standardna devijacija. ....	15
Tablica 3. Prikaz mase i gustoće pojedinih segmenata.....	44
Tablica 4 Prikaz dinamičkih momenata tromosti za pojedine segmente .....	50

## Popis dijagrama

Dijagram 1. Prikaz dinamičkog momenta tromosti $I_x$ u globalnom koordinatnom sustavu u vremenu.....	51
Dijagram 2. Prikaz dinamičkog momenta tromosti $I_y$ u globalnom koordinatnom sustavu u vremenu.....	51
Dijagram 3. Prikaz dinamičkog momenta tromosti $I_z$ u globalnom koordinatnom sustavu u vremenu.....	52

## Popis oznaka

$B_0, B_1, B_2$	regresijski faktori
$H$	stojeća visina subjekta u cm
$I_i$	tenzor inercije i-tog člana s obzirom na vlastito središte mase
$I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$	glavni dinamički momenti inercije referentnog člana
$\vec{K}_i$	kinetički moment i-tog člana s obzirom na vlastito središte masa
$K_{1x_1}, K_{1y_1}, K_{1z_1}$	komponente kinetičkog momenta referentnog člana s obzirom na vlastito središte mase, izražene u koordinatnom sustavu čije se osi poklapaju s glavnim osima inercije segmenta
$L_G$	vektor ishodišta lokalnog sustava u globalnom sustavu
$M$	ukupna masa tijela subjekta
$m_i$	masa i-tog segmenta
$P_G, P_L$	komponente vektora $P$ u globalnom i lokalnom referentnom sustavu
[R]	matrica rotacije
[T]	matrica transformacije
$\omega_{1x_1}, \omega_{1y_1}, \omega_{1z_1}$	komponente kutne brzine referentnog člana izražene u koordinatnom sustavu čije se osi poklapaju s glavnim osima inercije segmenta
$\phi, \theta, \psi$	Eulerovi kutovi orijentacije referentnog člana

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno uz pomoć mentora te navedene literature.

Potpis

Posebnu i iskrenu zahvalu dugujem prof. dr. sc. Tanji Jurčević Lulić na odabiru teme diplomskog rada, kao i na savjetima i vodstvu pruženima tijekom izrade ovog rada.

Zahvalio bi se i roditeljima i bratu Davidu na beskrajnoj potpori tokom cijelog života. Od srca Vam hvala.

I na kraju, zahvala Lani što je bila uz meni i pružila mi potporu tijekom pisanja diplomskog rada.



## 1. Uvod

Kretanje ljudskog tijela složen je sustav koji ovisi o mnogo čimbenika, poput lokomotornog i živčanog sustava, i naravno, o njihovom skladu. Razvojem tehnologije, omogućene su razne metode snimanja i analiziranja gibanja ljudskog tijela, samim time i mogućnost preciznog definiranja gibanja tijela u prostoru. Sukladno tome moguće je promatrati i inercijske značajke te promjene istih koje nastaju tokom gibanja.

Biomehanika proučava fizikalne zakonitosti koje određuju efikasnost lokomotornog sustava, postupke za analizu, simulaciju kretanja i interpretaciju dobivenih podataka.

Primjena biomehanike, u moderno vrijeme, dolazi do izražaja u različitim područjima, od medicine do profesionalnog sporta. U medicini se koristi kod korekcije ili rehabilitacije određenih nepravilnosti u kretanju izazvanih ili urođenim manama ili nepravilnostima nastalim oštećenjem lokomotornog sustava, dok u sportu imamo korekciju gibanja, ali u svrhu poboljšavanja rezultata. Takva vrsta korekcije, vrši se u sportovima koji zahtijevaju izvrsnu koordinaciju cijelog tijela. Golf, baseball, skokovi u dalj i vis, trčanje, tenis, samo su neki od sportova u kojima se vrlo često primjenjuje biomehanika u svrhu poboljšanja rezultata.

## 1.1. Cilj rada

U ovom radu provest će se biomehanička analiza skoka u dalj s mjesta.

Sportski skokovi, kao što je i skok u dalj s mjesta, predstavljaju složena gibanja koja zahtijevaju složenu koordinaciju gornjih i donjih ekstremiteta. Kao i u mnogim sportovima, glavni cilj je razvoj efikasne tehnike koja će maksimizirati izvedbu lokomotornog sustava u svrhu poboljšanja rezultata skoka. U slučaju skoka u dalj s mjesta, značajnu ulogu u unapređenju izvedbe skoka, a samim time i postizanju boljih rezultata, imaju gibanja ruku, kut odraza i doskok. Samim razmatranjem kako i na koji način unaprijediti tehniku skoka, moramo se i zapitati na koji način se tijelo giba u prostoru, što će biti i jedan od ciljeva ovog rada.

## 2. Metode i ispitanici

### 2.1. Mjerenja u biomehanici

Svako mjerenje u biomehanici zahtjeva uporabu tehnologije. Kod korištenja različitih tehnika snimanja potrebno je obratiti pažnju na više stvari. Između ostaloga, to su: dobro poznavanje mjernih instrumenata koje koristimo, prednosti i nedostaci jednih mjernih instrumenata u odnosu na druge i pravilan odabir i primjena istih. Najvažnije od svega toga jest pravilno tumačenje i interpretacija dobivenih rezultata.

Postoji više načina snimanja i analiziranja podataka:

1. Segmentalna analiza
  - a) Elektromiografija
  - b) Izokinetička analiza
2. Analogna analiza
  - a) EMG
  - b) Platforme za mjerenje sila
3. 3D optička analiza – sustavi od više kamera (IC kamere)
4. Video analiza
  - a) Dvodimenzionalna
  - b) Trodimenzionalna
  - c) Digitalna

Prije odabira metode kojom će se raditi potrebno je točno procijeniti što se želi mjeriti i zbog čega, a zatim što pravilnije odabrati način snimanja.

Za segmentalnu analizu potrebni su markeri i kamere. Kod segmentalne analize mogu se koristiti instrumenti poput goniometra te elektrode koje su bitne za elektromiografiju. Ovu vrstu analize moguće je kombinirati s analognom analizom u slučaju kad se upotrebljavaju razne platforme. Najčešće analizira ljudski hod kod kojeg se poseban naglasak stavlja na donje ekstremitete i donji dio trupa, te je stoga jako zastupljena u atletici i u procesu rehabilitacije povreda.

Kod analogne analize u isto vrijeme možemo pratiti gibanje, elektromiografske signale i reakcijske sile na podlozi. Ovakva vrsta analize jako je osjetljiva i podložna greškama pri mjerenju, tako da malo odstupanje bilo kojeg instrumenta dovodi do velikih pogrešaka u izračunavanju sila. U analognoj analizi vrlo često se koriste platforme koje se ugrađuju u podlogu, a njihova svrha je mjerenje reakcijskih sila koje nastaju tijekom hoda, skoka ili neke slične radnje. Uz platformu, koriste se i markeri koji služe za detektiranje gibanja pojedinih segmenata u prostoru.

U sljedeća dva odlomka pobliže će se objasniti 3D optička i video analiza.

### 2.1.1. 3D optička analiza

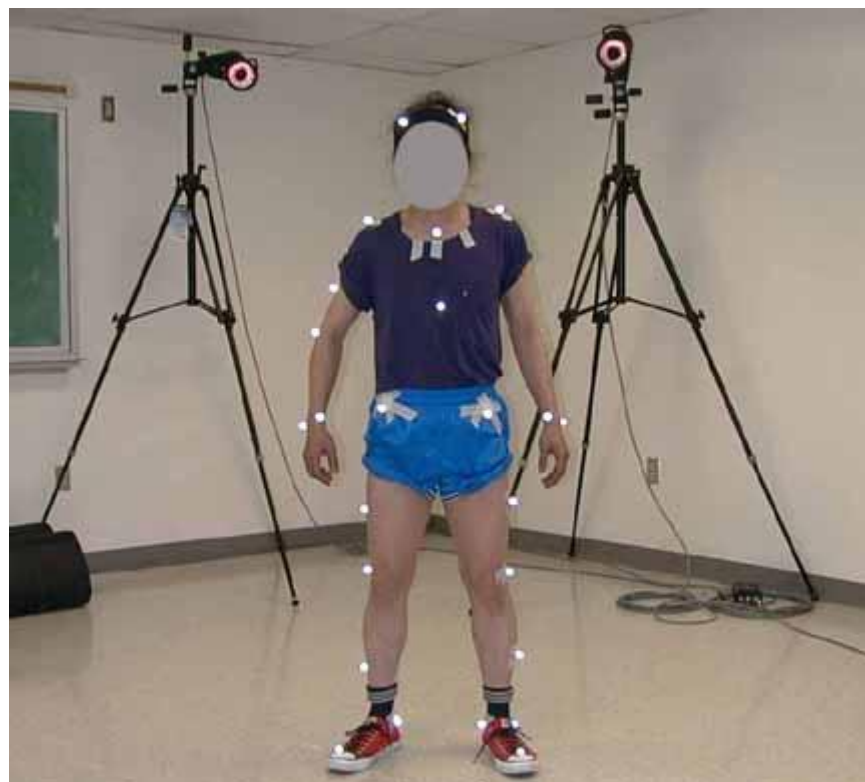
3D ili trodimenzionalna optička analiza, najskuplja je i najbolja analiza od svih gore navedenih. Najčešće se koristi s najmanje dvije, pa sve do više od deset kamera. Kamere se mogu postaviti u liniju ili u krug. Prednost postavljanja kamera u krug je bolje i kvalitetnije snimanje pokreta iz svih kutova. Ovakva vrsta snimanja koristi se kod složenih gibanja ljudskog tijela. Na slici 1 prikazan je jedan 3D optički sustav.

Način na koji kamere prikupljaju podatke jest refleksijom signala od markera koji se prethodno postave na ljudsko tijelo (slika 2). Povratim signalom tj. refleksijom dobivamo točke u prostoru. Nedostaci kod ovakvog načina snimanja su skupoća cijelog sustava, održavanje i razvoj software-a, te šumovi koji se javljaju tijekom refleksije. Postoji i određena nepreciznost kod postavljanja markera na tijelo i zadržavanje istih tokom snimanja.

Markeri se postavljaju na točno određeno mjesto na tijelu zbog definiranja orijentacije u prostoru. Tako se za segmente koji su rotacioni i simetrični markeri postavljaju na zglobove i dovoljna su dva markera na susjednim zglobovima. Ako segment nije rotacioni i simetričan potrebna su tri markera da bi se odredila orijentacija segmenta. Slika 2 prikazuje postavljenu konfiguraciju markera.



Slika 1. Prikaz 3D sustava za snimanje



Slika 2. Prikaz markera na tijelu

### 2.1.2. Video analiza

Jedna od najvećih prednosti video analize jest da se snimka može pogledati ponovo, ali i usporeno. Na taj način mogu se uočiti i najsitniji detalji pokreta. Video analiza se najčešće koristi kod rastavljanja neke sportske tehnike na dijelove i stoga se razni elementi pokreta prikazuju na vrlo jednostavan i razumljiv način. Subjekt kojeg se promatra može na brz način uočiti i shvatiti grešku koju ponavlja tijekom gibanja. Video analizom mogu se vršiti 2D ili 3D analize.

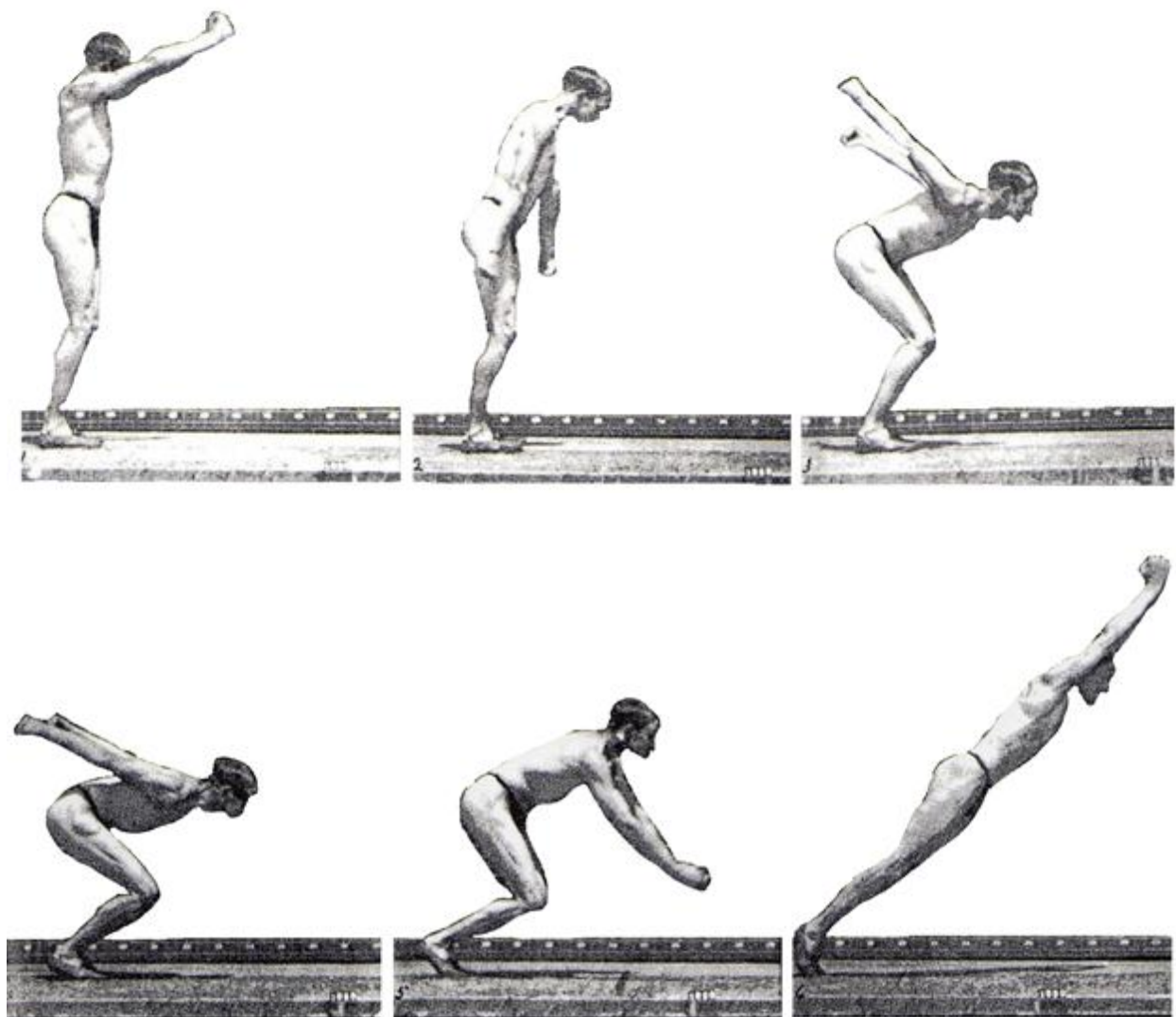
2D analiza je jednostavnija i jeftinija zbog manjeg broja kamera. Također je jednostavnija digitalna obrada i prijenos izvedenog pokreta iz koordinatnog sustava za snimanje u stvarni koordinatni sustav. Dvodimenzionalnom analizom ne možemo dobiti uvid u dubinu ali preračunavanjem podataka dobivenih 2D analizom možemo prebaciti u 3D analizu. Na slici 3 prikazana je snimka početnog udarca u golfu rastavljena na faze.



Slika 3. Prikaz rastavljenog udarca u golfu

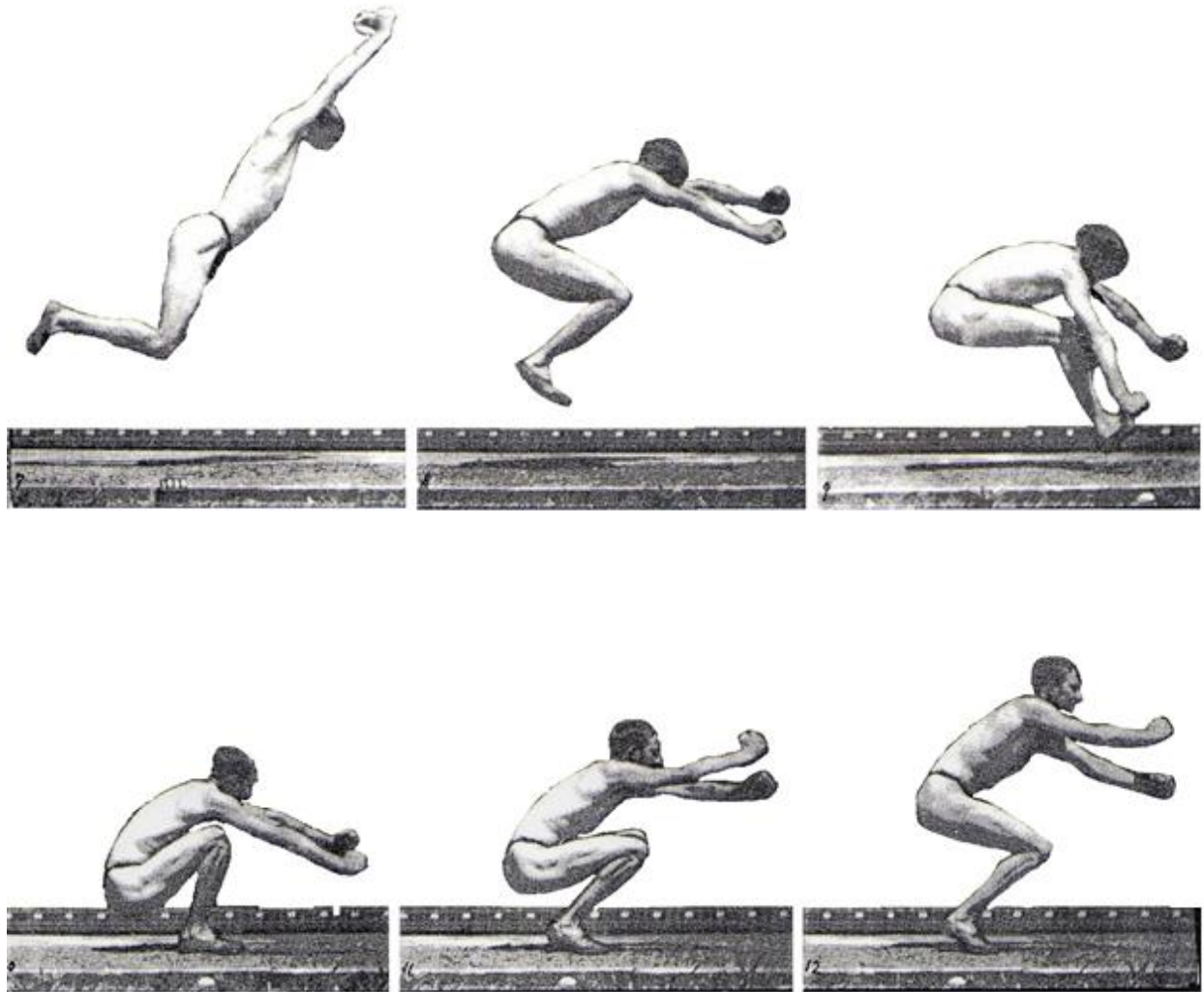
### 2.1.3. Skok u dalj s mjesta

Snimljen je muški ispitanik mase 78 kg i visine 181 cm pri izvođenju skoka u dalj s mjesta. Prikazano je 12 faza skoka u sagitalnoj (slika 4 i 5) i frontalnoj ravnini (slika 6). Vremenski razmak između dvije prikazane faze skoka iznosi 0.156 s.

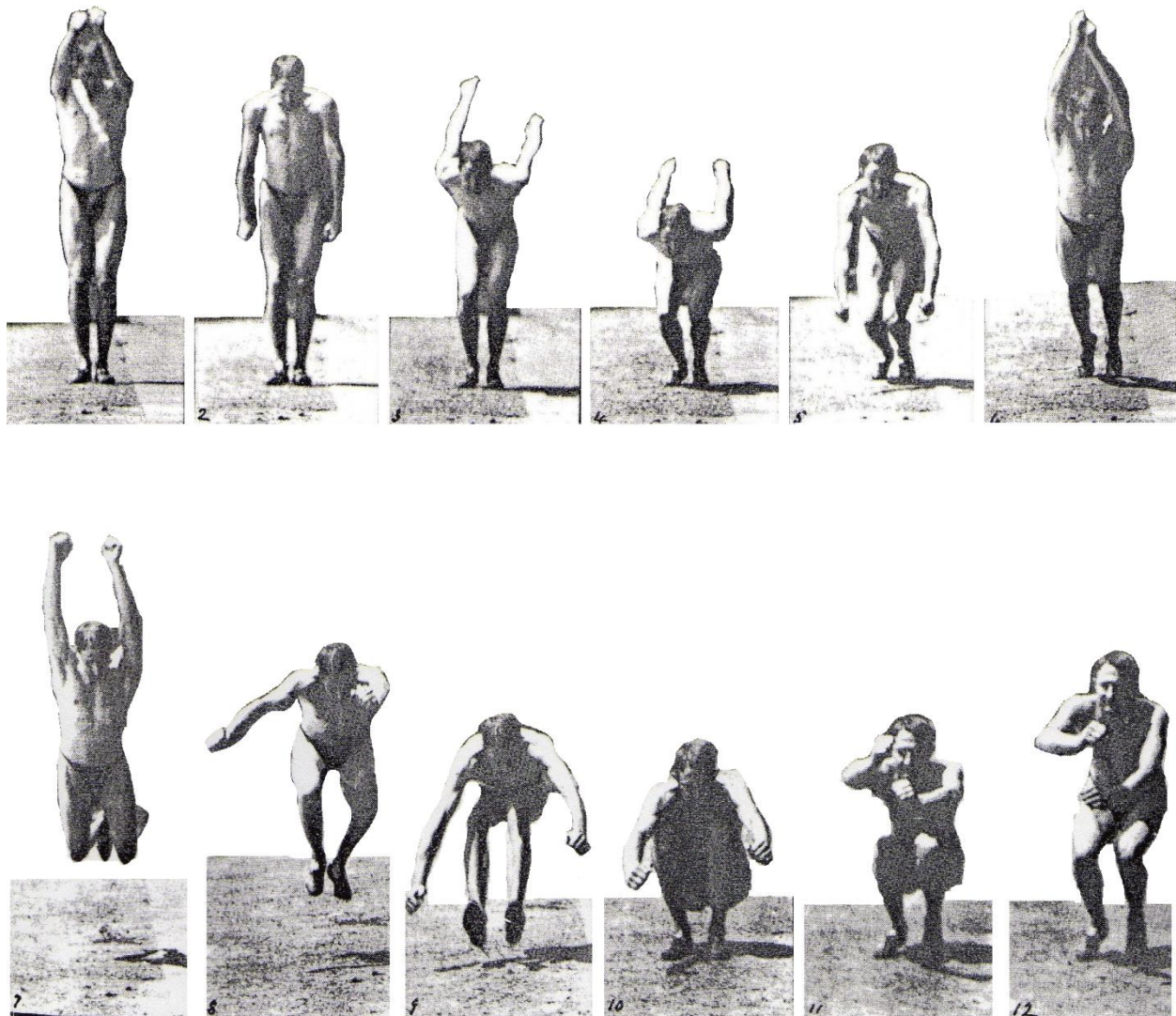


Slika 4. Prikaz 1. – 6. faza skoka u dalj s mjesta (sagitalna ravnina)





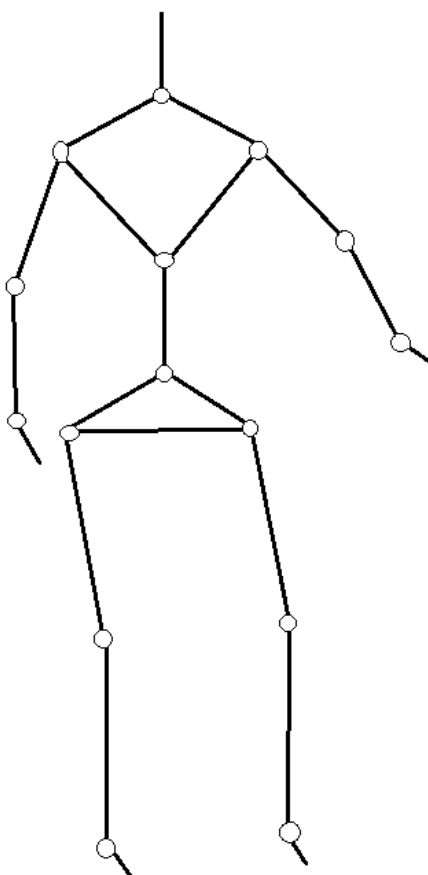
Slika 5. Prikaz 7. – 12. faze skoka (sagitalna ravnina)



Slika 6. Prikaz 1. - 12. faze skoka u dalj s mjesta (frontalna ravnina)

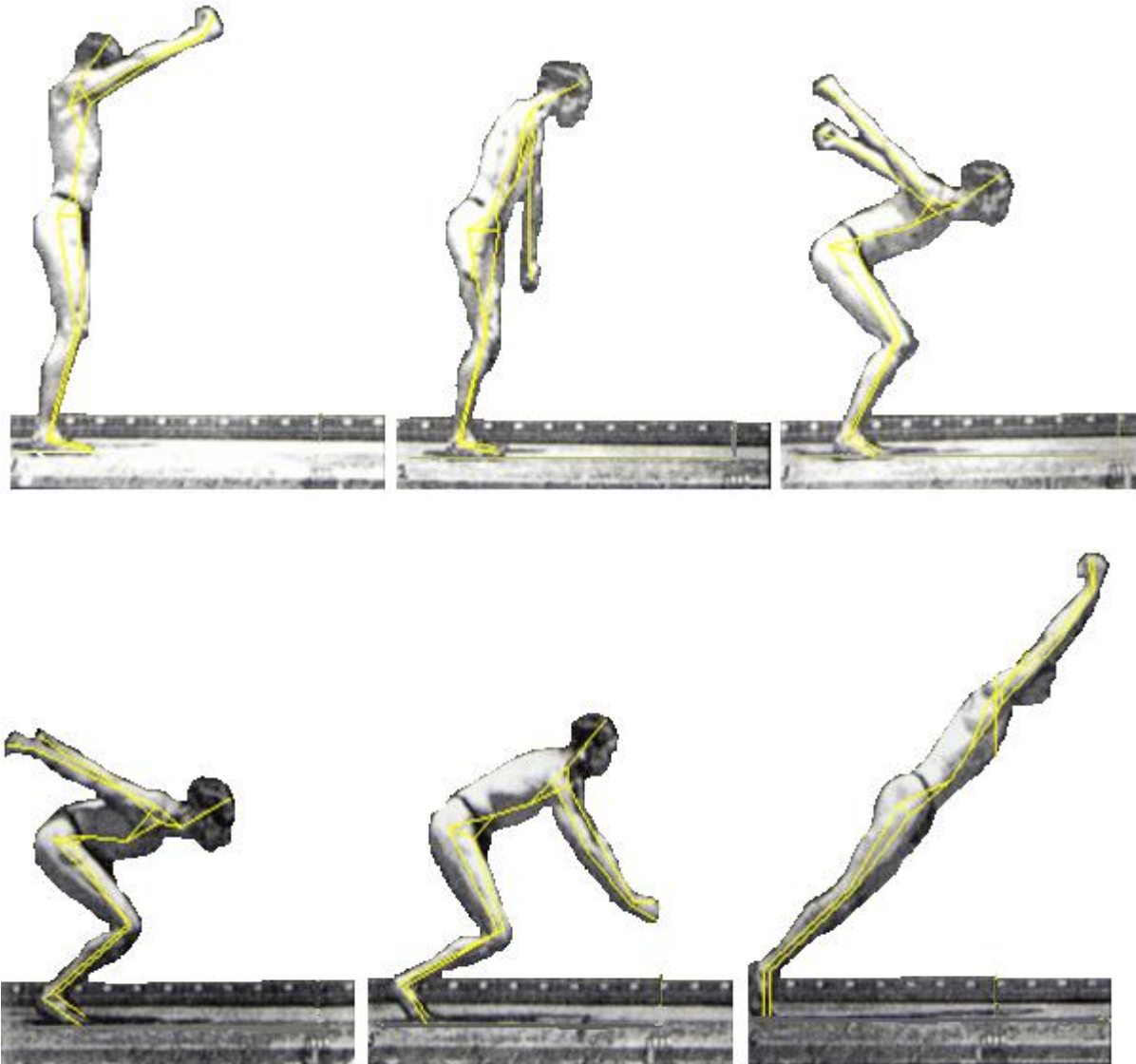
## 2.2. Biomehanički model

Biomehanički model izvođačkog podsustava čovjekova tijela sastoji se od sustava 16 krutih tijela povezanih zglobovima. Kod ovakvog sustava promatramo glavu s vratom, zatim gornji, donji i srednji dio trupa, dvije šake, podlaktice, nadlaktice, potkoljenice, natkoljenice te stopala. Kinematička shema takvog sustava prikazana je na slici 7. Ovakav prikaz naziva se još i „žičani model“. Nastaje tako da se u unaprijed određene točke spajaju ravnim linijama u žičani model (štapni model).

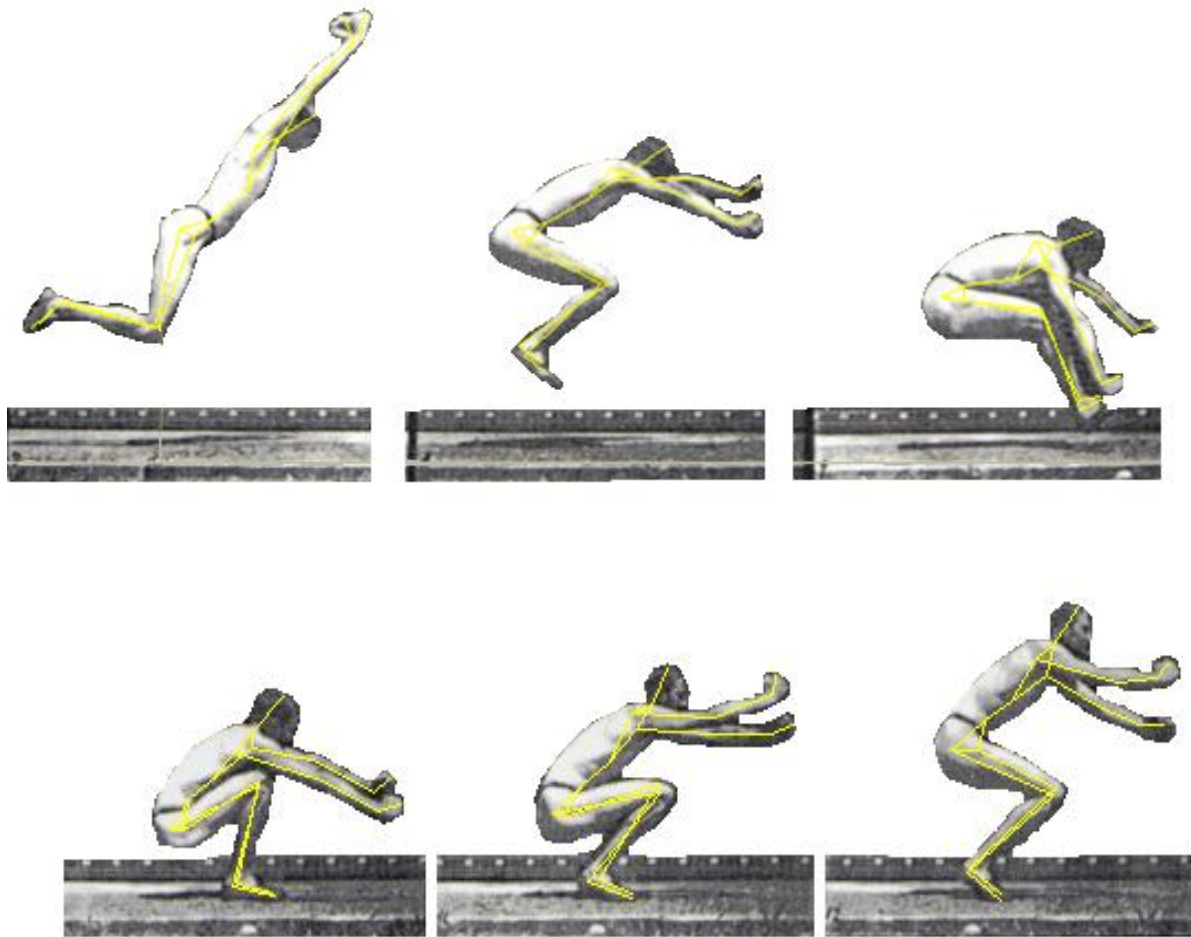


Slika 7. Kinematička shema biomehaničkog modela – žičani model

Slike 8, 9 i 10 prikazuju crtane žičane modele u sagitalnoj i frontalnoj ravnini.



**Slika 8. Prikaz žičanog modela u sagitalnoj ravnini**



Slika 9. Prikaz žičanog modela u sagitalnoj ravnini



Slika 10. Prikaz žičanog modela u frontalnoj ravnini

Za određivanje inercijskih svojstava koristi se geometrijski antropometrijski model kod kojeg se inercijski parametri segmenata računaju iz jednostavnog geometrijskog prikaza segmenata tijela (elipsoidi, krnji stošci, paralelopipedi..)

Jedna od metoda za određivanja raspodjela masa i dinamičkih značajki segmenata jest metoda Donskog i Zaciorskog. Ova je metoda utvrđena na 100 muških i 100 ženskih subjekata. Iz statističke obrade utvrdili su odgovarajuće koeficijente, iz kojih se mogu računati željene mase. Mase se segmenta računaju iz sljedeće regresijske jednadžbe:

$$m_i = B_0 + B_1 M + B_2 h, \text{ kg}$$

Gdje su  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  regresijski koeficijenti (koeficijenti za muškarce prikazani su u tablici 1, dok su za žene prikazani u tablici 2),  $M$  ukupna masa tijela subjekta,  $h$  je stojeća visina subjekta u cm, a  $m_i$  masa analiziranog segmenta u kilogramima.

**Tablica 1. Regresijski koeficijenti za muškarce prema Donskom i Zaciorskom**

Segment	$B_0$	$B_1$	$B_2$	R	$\sigma$
Stopalo	-0,829	0,0077	0,0073	0,702	0,101
Potkoljenica	-1,592	0,031616	0,0121	0,872	0,219
Natkoljenica	-2,649	0,1436	0,0137	0,891	0,721
Šaka	-0,1165	0,0036	0,00175	0,516	0,036
Podlaktica	0,3185	0,01445	-0,00114	0,786	0,101
Nadlaktica	0,25	0,03012	-0,0027	0,837	0,178
Glava	1,296	0,0171	0,0143	0,591	0,322
Gornji dio trupa	8,2144	0,1862	-0,058	0,798	1,142
Srednji dio trupa	7,181	0,2234	-0,0663	0,828	1,238
Donji dio trupa	-7,498	0,0976	0,04896	0,743	1,02

**Tablica 2. Regresijski koeficijenti za žene prema Donskom i Zaciorskom, R - koeficijent regresije,  $\sigma$  - standardna devijacija.**

Segment	$B_0$	$B_1$	$B_2$	R	$\sigma$
Stopalo	-1,207	0,0175	0,0057	0,71	0,11
Potkoljenica	-0,436	-0,011	0,0238	0,42	0,36
Natkoljenica	5,185	0,183	-0,042	0,73	0,81
Šaka	-0,116	0,0017	0,002	0,48	0,03
Podlaktica	0,295	0,009	0,0003	0,38	0,11
Nadlaktica	0,206	0,0053	0,0066	0,27	0,21
Glava	2,388	-0,001	0,015	0,24	0,49
Gornji dio trupa	-16,593	0,14	0,0995	0,64	1,47
Srednji dio trupa	-2,741	0,031	0,056	0,45	1,09
Donji dio trupa	-4,908	0,124	0,0272	0,61	0,9

Znači, prema ovoj metodi u mogućnosti smo izračunati, iz poznate visine subjekta (bilo žene ili muškarca) i ukupne mase, svaku segmentalnu masu.

Kod modeliranja segmenata ljudskog tijela geometrijskim tijelima uvedene su određene pretpostavke i pojednostavljenja. Ljudsko tijelo sastoji se od heterogenih materijala te različiti dijelovi tijela imaju i različita svojstva. Kod ljudskog organizma nijedno svojstvo nije konstantno za duži period vremena. Također, postoje razlike u masi segmenata tijela tijekom gibanja različitih grupa mišića koje sudjeluju u izvršavanju pokreta pojedinih segmenata, a pripadaju drugim segmentima. Unatoč tome, pretpostavljeno je da su segmenti kruta homogena tijela međusobno spojena idealnim zglobovima.

Također, gustoća segmenata ljudskog tijela mijenja se po poprečnom presjeku te duž uzdužne osi segmenta, ali kod modeliranja je pretpostavljena jednolika gustoća duž svakog segmenta. Također, kod oblikovanja segmenta tijela pretpostavljena je simetričnost građe tijela da bi se dobile simetrične inercijske vrijednosti za lijeve i desne ekstremitete. Kod oblikovanja trupa usvojeno je načelo simetrije kod kojeg središnja sagitalna ravnina dijeli tijelo na simetričnu lijevu i desnu polovicu, a frontalna ravnina na simetričan prednji i stražnji dio, pa je trup oblikovan simetričnim geometrijskim tijelom s obzirom na sagitalnu i frontalnu ravninu.

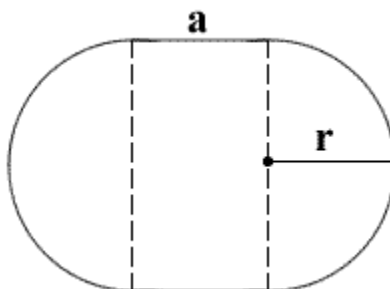
Uz navedene pretpostavke, ljudsko tijelo je oblikovano s 16 geometrijskih krutih tijela spojenih zglobovima. Budući da su korištene regresijske jednadžbe Donskog i Zaciorskog za utvrđivanje masa segmenata te njihovi podaci o položaju središta masa segmenata, tijelo je podijeljeno na segmente ravninama okomitim na uzdužne osi segmenata na način koji su utvrdili Donski i Zaciorski.

Glava i vrat smatraju se jedim segmentom, a od gornjeg dijela tijela trupa odijeljeni su ravninom okomitom na uzdužnu os glave koja prolazi grlenom rupom. Trup je podijeljen na 3 dijela – donji, srednji i gornji dio. Ravnina koja predstavlja granicu između srednjeg i donjeg dijela trupa prolazi kroz pupak. Zdjelica se proteže od pupka do zglobova kukova. Segmenti donjih i gornjih ekstremiteta utvrđeni su dijeljenjem udova ravninama u susjednim zglobovima. Natkoljenica se proteže od zgloba kuka do zgloba koljena, potkoljenica od koljena do gležnja, a gležanj predstavlja granicu između potkoljenice i stopala. Ruka se dijeli na nadlakticu, podlakticu i šaku s granicama u ramenom zglobu, laktu i zglobu šake.



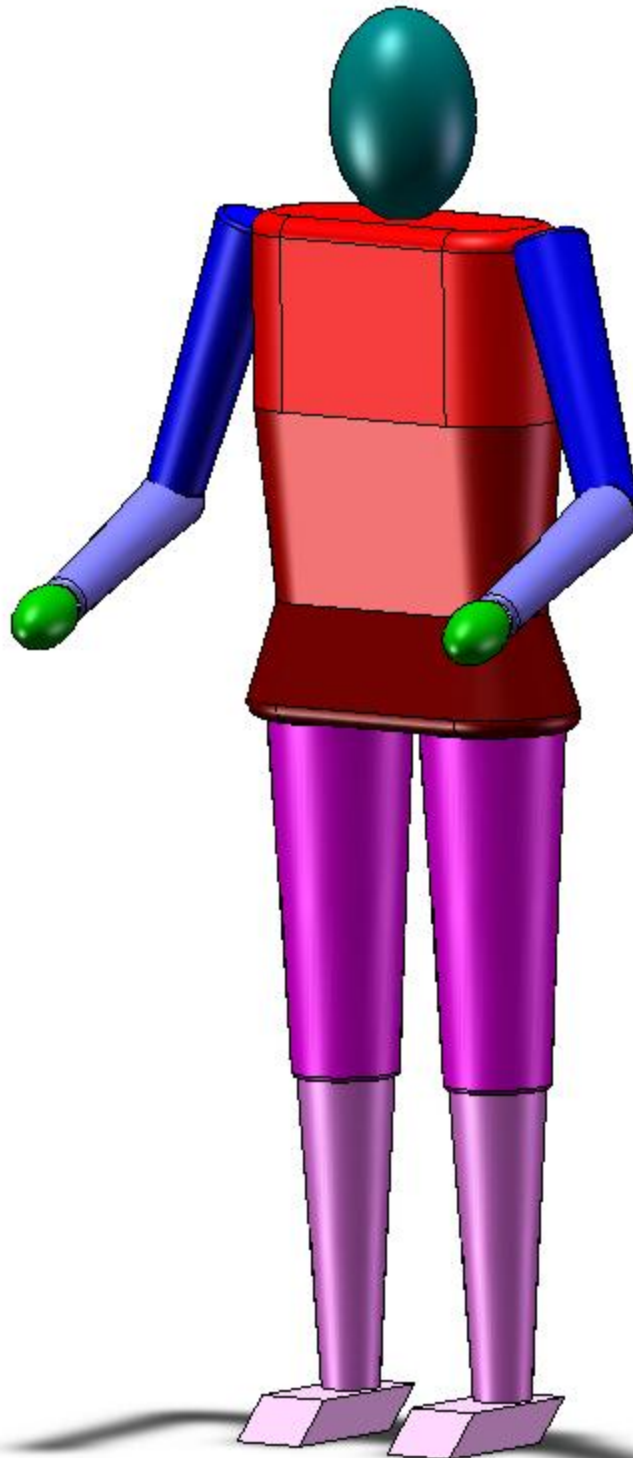
Segmenti tijela zamjenjuju se geometrijskim tijelima ovisno o obliku segmenata i položaju središta mase segmenata. Iz izračunatih masa segmenata i podataka o prosječnoj gustoći segmenata, određuju se volumeni segmenata. Poznavanjem volumena i položaja središta masa segmenata te mjerenjem pojedinih dimenzija segmenata, moguće je izračunati ostale dimenzije segmenata.

Model treba opisivati antropodinamičke karakteristike ljudskog tijela. Glava i vrat modelirani su rotacionim elipsoidom, a nadlaktica, podlaktica, natkoljenica i potkoljenica krnjim stošcem. Stopalo je predstavljeno paralelopipedom, a šaka rotacionim elipsoidom. Poprečni presjek trupa aproksimiran je "stadionom" tj. likom koji se sastoji od pravokutnika i dva polukruga. Stadium je prikazan na slici 11.



Slika 11. Prikaz "stadiuma"

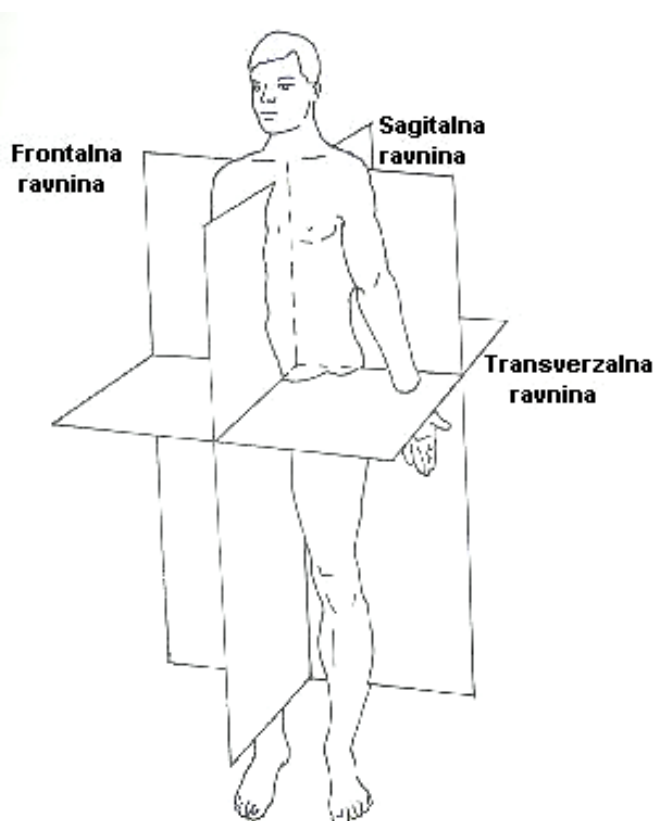
Slika 12 prikazuje inercijski model čovjeka oblikovanog pomoću gore navedenih geometrijskih tijela.



Slika 12. 3D model tijela

### 3. Izračunavanje biomehaničkih podataka

#### 3.1. Određivanje orijentacije segmenata



Slika 13. Ravnine ljudskog tijela

Kod *anatomskog položaja* ljudskog tijela pretpostavljamo da tijelo stoji uspravno na horizontalnoj podlozi, s rukama obješenim uz tijelo i dlanovima okrenutim prema naprijed te uspravnim položajem glave (slika 13). Ravnina koja dijeli ljudsko tijelo na lijevi i desni dio naziva se *sagitalna ravnina*. Sagitalna ravnina je usmjerena u anteroposteriornom smjeru. Ako ravnina dijeli tijelo na dvije simetrične polovice, tada se naziva *kardinalna*, ili *glavna sagitalna ravnina*.

Za uspravna tijela, horizontalna ravnina koja prolazi kroz tijelo naziva se *transverzalna* ravnina. Transverzalna ravnina koja prolazi kroz težište tijela naziva se kardinalna ili glavna transverzalna ravnina.

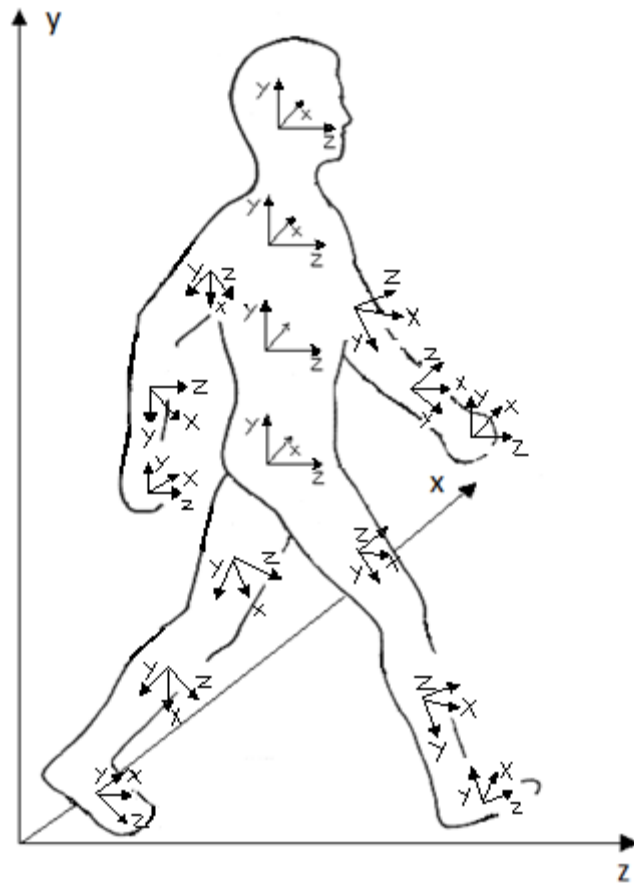
*Frontalna* ili *koronalna* ravnina prolazi bočno s jedne na drugu stranu i okomita je na preostale dvije, sagitalnu i transverzalnu ravninu. Frontalna ravnina dijeli tijelo na prednji (anterior) i stražnji (posterior) dio. Kada ravnina prolazi kroz težište tijela naziva se glavna frontalna ravnina.

Osi na sjecištima ravnina nazivamo:

- *Anteroposteriorna os* ( sjecište sagitalne i transverzalne ravnine)
- *Longitudinalna os* ( sjecište sagitalne i frontalne ravnine)
- *Lateromedialna os* ili frontalna os ( sjecište frontalne i transverzalne ravnine)

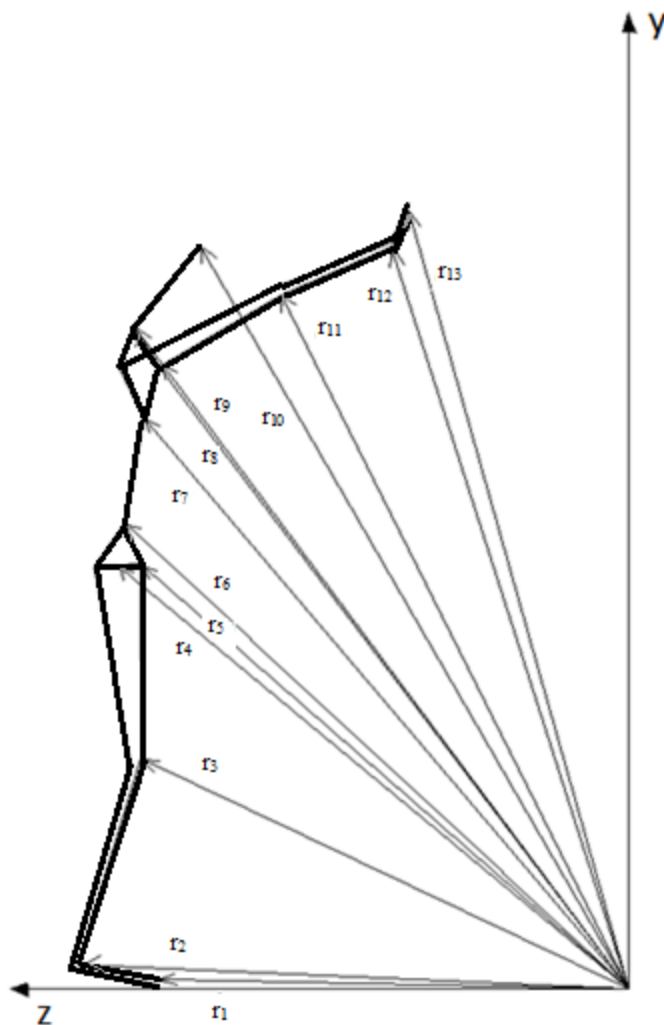
U ovom radu definiran je desni Kartezijev koordinatni sustav u kojem je os z os gibanja skoka u dalj, os y je vertikalna os, a os x je poprečna os (slika 14).

Lokalni koordinatni sustavi kroz središte mase svakog segmenta vezani su za segmente, te tijekom gibanja mijenjaju orijentaciju u prostoru. Veličine koje se odnose za određeni radij-vektor prikazane su na slikama. Način na koji se definiraju lokalni koordinatni sustavi segmenata prikazan na primjeru lijeve potkoljenice i lijevog stopala.



**Slika 14. Prikaz lokalnih koordinatnih sustava vezanih na pojedine segmente na tijelu**

Kod definiranja lokalnih koordinatnih sustava nadlaktica, podlaktica, natkoljenica, potkoljenica, šaka, glave krećemo s pretpostavkom da je jedinični vektor  $k = [0,0,1]$ , koji kasnije korigiramo, dok kod stopala, gornjeg, srednje i donjeg dijela trupa pretpostavljamo da je jedinični vektor  $i = [1,0,0]$  koji isto kasnije korigiramo.



Slika 15. Prikaz radij-vektora lijeve strane tijela

Lijeve potkoljenica

Potkoljenica je oblikovana rotaciono simetričnim tijelom pa se os rotacije tj. uzdužna os predstavlja  $y_2$  os lokalnog koordinatnog sustava. Kod lijeve potkoljenice os  $y_2$  se određuje na sljedeći način:

$$\vec{y}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$$

$$\vec{J}_{y_2} = \frac{\vec{y}_2}{|\vec{y}_2|}$$

$\vec{y}_2$  – vektor smjera osi  $y_2$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice

$\vec{J}_{y_2}$  – jedinični vektor smjera osi  $y_2$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice

Bilo koje dvije osi okomite na  $y_2$ , a koje su i međusobno okomite, predstavljaju preostale dvije osi  $x_2$  i  $z_2$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice te se određuju na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\vec{k} &= [0,0,1] \\ \vec{x}_2 &= \vec{J}_{y_2} \times \vec{k} \\ \vec{t}_2 &= \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} \\ \vec{k}_2 &= \vec{t}_2 \times \vec{J}_2\end{aligned}$$

$\vec{x}_2$  – vektor smjera osi  $x_2$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice

$\vec{t}_2$  – jedinični vektor smjera osi  $x_2$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice

$\vec{k}_2$  – jedinični vektor smjera osi  $z_2$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice

Lijevo stopalo

$$\begin{aligned}\vec{y}_1 &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{J}_{y_1} &= \frac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|}\end{aligned}$$

$\vec{y}_1$  – vektor smjera osi  $y_1$  lokalnog koordinatnog sustava lijevog stopala

$\vec{J}_{y_1}$  – jedinični vektor smjera osi  $y_1$  lokalnog koordinatnog sustava lijevog stopala

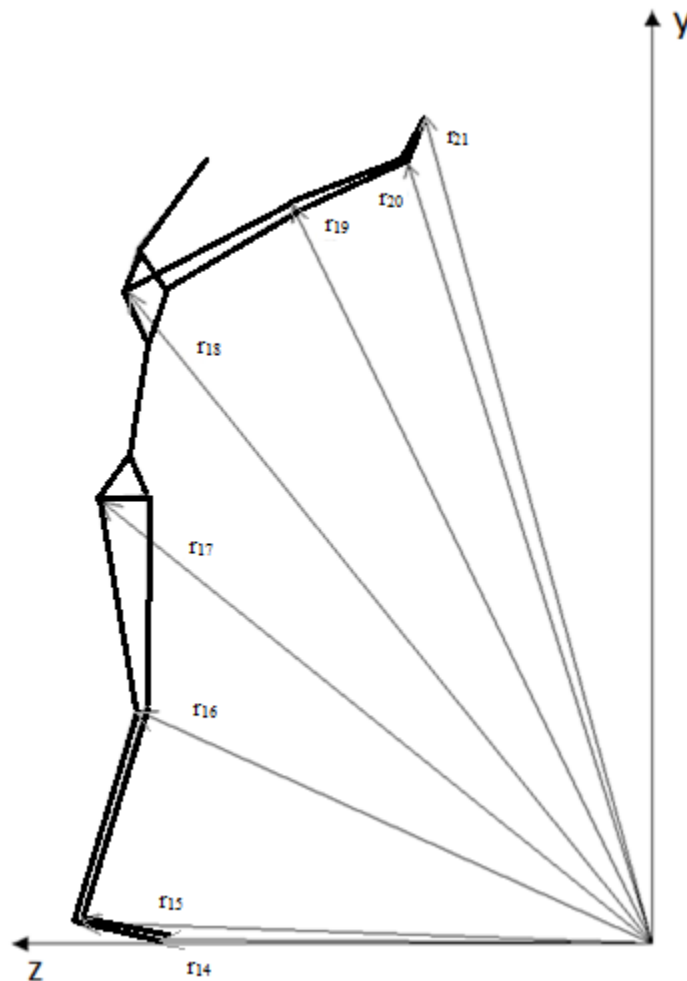
Bilo koje dvije osi okomite na  $y_1$ , a koje su i međusobno okomite, predstavljaju preostale dvije osi  $x_1$  i  $z_1$  lokalnog koordinatnog sustava lijeve potkoljenice te se određuju na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= [1,0,0] \\ \vec{x}_1 &= \vec{J}_{y_1} \times \vec{i} \\ \vec{k}_1 &= \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} \\ \vec{t}_1 &= \vec{J}_1 \times \vec{k}_1\end{aligned}$$

$\vec{x}_1$  – vektor smjera osi  $x_1$  lokalnog koordinatnog sustava lijevog stopala

$\vec{l}_1$  – jedinični vektor smjera osi  $x_1$  lokalnog koordinatnog sustava lijevog stopala

$\vec{k}_1$  – jedinični vektor smjera osi  $z_1$  lokalnog koordinatnog sustava lijevog stopala



Slika 16. Prikaz radij-vektora desne strane tijela

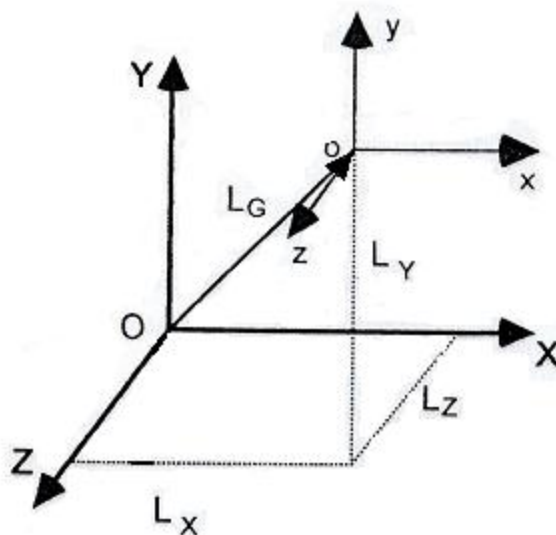


### 3.1.1. Matrične metode

S ovom metodom može se odrediti translacija i rotacija lokalnog sustava u odnosu na globalni sustav. Stoga se mogu lagano opisati položaj objekta u različitim trenucima te pomaci objekta. U biomehanici gibanja ljudskog tijela, globalni referentni sustavi su proizvoljno pridodati okolišu tijela, a lokalni sustavi dijelovima tijela. Kada se uzastopne promjene orijentacija ljudskog tijela definiraju u odnosu na globalni sustav, često se nazivaju rotacija segmenta ili kosti. Kada se isti pokret opisuje u odnosu na lokalni sustav koji je fiksiran na nekom segmentu ljudskog tijela, naziva se rotacija zgloba.

#### 3.1.1.1. Relativna orijentacija lokalnog i globalnog sustava

**Položaj.** Definiranje položaja je jednostavno ( slika 17). Neka  $O-XYZ$  i  $o-xyz$  budu globalni odnosno lokalni sustav koordinata. Ako je  $L_g$  vektor ishodište lokalnog sustava u globalnom sustavu, komponente toga vektora  $L_x, L_y$  i  $L_z$  definiraju položaj lokalnog sustava i mogu biti napisane kao elementi stupčaste matrice  $[L_x L_y L_z]^T$ . Translacija iz točke  $O$  u točku  $o$  definiran je istim komponentama  $L_x, L_y$  i  $L_z$ .



Slika 17. Čista translacija je definirana s tri komponente vektora  $L_g$ . Velika tiskana slova označavaju globalni sustav, a mala lokalni koordinatni sustav

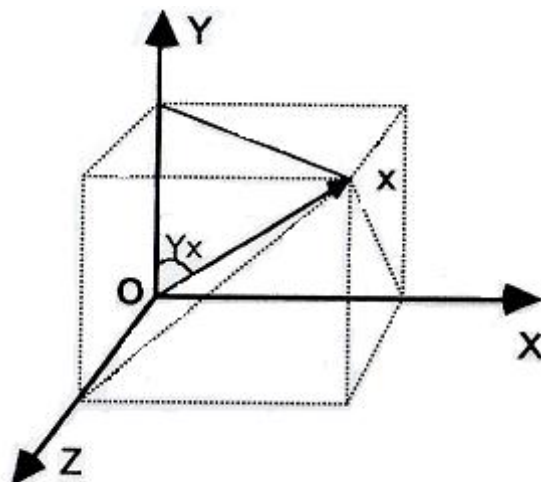
**Rotacija.** Svaki jedinični vektor (  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  ) lokalnog sustava zastupljen je u globalnom referentnom sustavu pomoću svojih komponenta kao što je prikazano na slici 18. Dijeleći svaku komponentu s dužinom vektora, dobivamo kosinus kuta vektora i svake pojedine koordinatne osi globalnog sustava. Ti kutovi se nazivaju *kutovi smjera*, a kosinusi su preimenovani u *kosinuse smjera* (slika 18). Kosinusi smjera mogu biti zapisani u matričnoj formi kao elementi 3x3 matrice. Velika tiskana slova označavaju osi globalnog sustava, a mala slova označavaju osi lokalnog sustava. Uobičajeno je koristiti brojeve umjesto slova u označavanju referentnih os. Matrica kosinusa ili matricu rotacije [R] može se zapisati na sljedeći način:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix}$$

Ili

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos_{11} & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{21} & \cos_{22} & \cos_{23} \\ \cos_{31} & \cos_{32} & \cos_{33} \end{bmatrix}$$

U ovoj notaciji npr.  $\cos_{23}$  znači kosinus kuta koji zatvaraju druga os globalnog referentnog sustava i treća os lokalnog sustava. Stupci rotacijske matrice su 3 x 1 jedinični vektori, a predstavljaju orijentaciju lokalnih referentnih osi u globalnom sustavu. Stupci se podudaraju s osima lokalnog sustava, a redci rotacijske matrice odgovaraju osima globalnog koordinatnog sustava.



Slika 18. Komponente jediničnog vektora  $x$  u globalnom referentnom

**Translacija i rotacija.** Položaj lokalnog sustava u odnosu na globalni sustav može se izraziti kao slijed translacije i rotacije opisane stupcem  $3 \times 1$  matrice za translaciju i  $3 \times 3$  matrice kosinusa smjera za rotaciju. Dodavanjem novog reda  $(1,0,0,0)$ , možemo napisati novu  $4 \times 4$  maticu. Ta matrica se naziva matrica položaja ili matrica transformacije  $[T]$ , uključuje matrice translacije i rotacije lokalnog referentnog sustava u odnosu na globalni sustav.

Matrica glasi:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_x & \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ L_y & \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ L_z & \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix}$$

Na ovaj način može se odrediti položaj bilo kojeg koordinatnog sustava u odnosu na drugi.

Matrica transformacije sastoji se od:

- Stupčaste matrice 3 x 1 koja daje položaj ishodišta jednog koordinatnog sustava u odnosu na drugi
- Matrica rotacije 3 x 3 koja sadrži 9 kosinusa smjera
- Matrica 1 x 4 zbog matematičke prikladnosti

Matrica [T] opisuje bilo koji položaj lokalnog koordinatnog sustava. Ako je lokalni sustav pričvršćen na kruto tijelo, matrica [T] je jednaka za sve točke na tijelu. Ali, za svaku novu poziciju tijela dobivamo i novu matricu.

### 3.1.1.2. Definiranje položaja u dva referentna koordinatna sustava

Kada je neka točka zadana njezinim radij - vektorom u jednom koordinatnom sustavu (sve tri komponente vektora su poznate), položaj te točke u odnosu na drugi koordinatni sustav može se pronaći u slučaju da poznajemo translacijsku matricu i matricu rotacije.

**Čista translacija.** Ako su koordinate točke P u lokalnom sustavu  $P_x, P_y, P_z$  predstavljene matricom  $[P_L]$  i ako je položaj lokalnog sustava u odnosu na globalni zadan pomoću matrice  $[L_G]$ , položaj točke P u globalnom sustavu određen je matricom  $[P_G]$ .

$$[P_G] = [L_G] [P_L] \quad [P_G]$$

$$\begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_X + P_x \\ L_Y + P_y \\ L_Z + P_z \end{bmatrix}$$

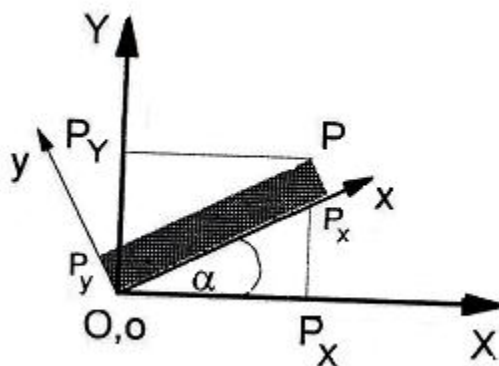
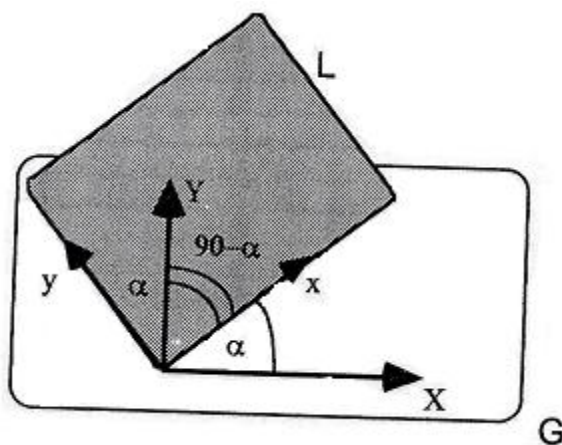
Ili

$$\begin{bmatrix} 1 \\ P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_X & 1 & 0 & 0 \\ L_Y & 0 & 1 & 0 \\ L_Z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ L_X + P_x \\ L_Y + P_y \\ L_Z + P_z \end{bmatrix}$$

Više je uobičajenije prikazati translaciju kroz množenje nego kroz zbrajanje matrica. Da bi se to napravilo upotrebljava se  $4 \times 4$  matrica  $[L_G]$  umjesto  $3 \times 1$  matrica, a matrice  $[P_L]$  i  $[P_G]$  su zapisane kao  $4 \times 1$  matrice s jedinicom kao prvim elementom.

Prednost ovog pristupa je opisivanje translacije i rotacije zajedno pomoću jedne matematičke operacije, tj. produkta matrica.

**Rotacija.** Ako se razmotri prvo čista rotacija oko referentnih osi, recimo oko osi Z, rotacija se zbiva u XY ravnini. Vektor  $\mathbf{P}$  je dan pomoću njegovih komponenti u lokalnom sustavu (slika 19). Problem je naći komponente u globalnom sustavu.



Slika 19. Gornja slika prikazuje rotaciju lokalnog sustava L u odnosu na globalni sustav G. U donjoj slici prikazana je točka P u globalnom i lokalnom sustavu

Kosinus smjera osi  $x$  lokalnog sustava, u odnosu na  $X$  i  $Y$  osi globalnog sustava, je  $\cos \alpha$  i  $\cos (90^\circ - \alpha)$ . Kosinus smjera osi  $y$  s obzirom na osi  $X$  i  $Y$  je  $\cos (90^\circ + \alpha)$  i  $\cos \alpha$ . Množeći komponente vektora  $\mathbf{P}$  u lokalnom sustavu, koje poznajemo, s njihovim kutovima smjera, možemo izračunati komponente vektora  $\mathbf{P}$  uzduž  $X$  i  $Y$  osi u globalnom sustavu. Komponente vektora  $\mathbf{P}$  uzduž tih osi su:

$$P_x = P_x \cos \alpha + P_y \cos (90^\circ + \alpha)$$

$$P_y = P_x \cos (90^\circ - \alpha) + P_y \cos \alpha$$

Koristeći matrični zapis, gornje jednadžbe možemo zapisati kao:

$$[R_G] = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = [R] \cdot [P_L]$$

gdje su  $[P_G]$  i  $[P_L]$  stupci matrice komponenata vektora  $\mathbf{P}$  u globalnom i lokalnom referentnom sustavu, i  $[R]$  je matrica rotacije. Elementi u stupcima matice  $[R]$  su kosinusi smjera lokalnih referentnih osi u odnosu na osi globalnog koordinatnog sustava. Matrica rotacije može se također zapisati i kao :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Na primjer, rotiranjem lokalnog referentnog sustav oko  $Z$  osi pod kutom  $\alpha$  točka  $P(1,0)$  prelazi u:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

U trodimenzionalnom sustavu, vektor zadan pomoću svojih komponenti u lokalnom referentnom sustavu, također može biti izražen pomoću svojih komponenti u globalnom sustavu ako poznajemo kosinuse smjera:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = [P_G] = [R][P_G]$$

Za transformaciju koordinata vektora danog u globalnom sustavu u lokalni sustav, trebamo koristiti transponiranu matricu matrice  $R$ :

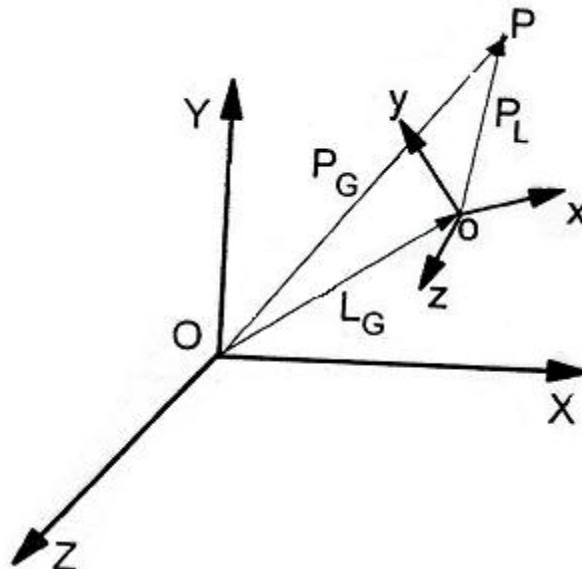
$$[P_L] = [R]^T [P_G]$$

Iz jednadžba slijedi:

$$[R]^T [R] = [I]$$

Stoga,  $[R]^T = [R]^{-1}$  i matrica  $[R]$  je ortogonalna matrica. Također je i ortonormalna matrica zato što svi vektori stupca imaju jediničnu dužinu. Determinanta matrice  $R$  jednak je  $+1$ . Ortogonalne matrice čija je determinanta jednaka  $+1$  nazivaju se još i pravilno ortogonalne matrice.

**Translacija i rotacija.** Ako je referentni sustav povezan s drugim pomoću translacije i rotacije i položaj točke  $P$  je zadan vektorskim komponentama u lokalnom referentnom sustavu, položaj točke u globalnom sustavu može se izraziti ako su poznate matrice translacije i rotacije. Položaj točke  $P$  u globalnom koordinatnom sustavu je vektorski zbroj vektora  $L_G$ , koji označava središte lokalnog sustava u globalnom sustavu, i vektora  $P_L$  (slika 20).



Slika 20. Položaj točke  $P$  u globalnom sustavu

Prije nego li se ta dva vektora mogu zbrojiti, moraju se izraziti u globalnom sustavu.

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{L}_G + [\mathbf{R}]\mathbf{P}_L$$

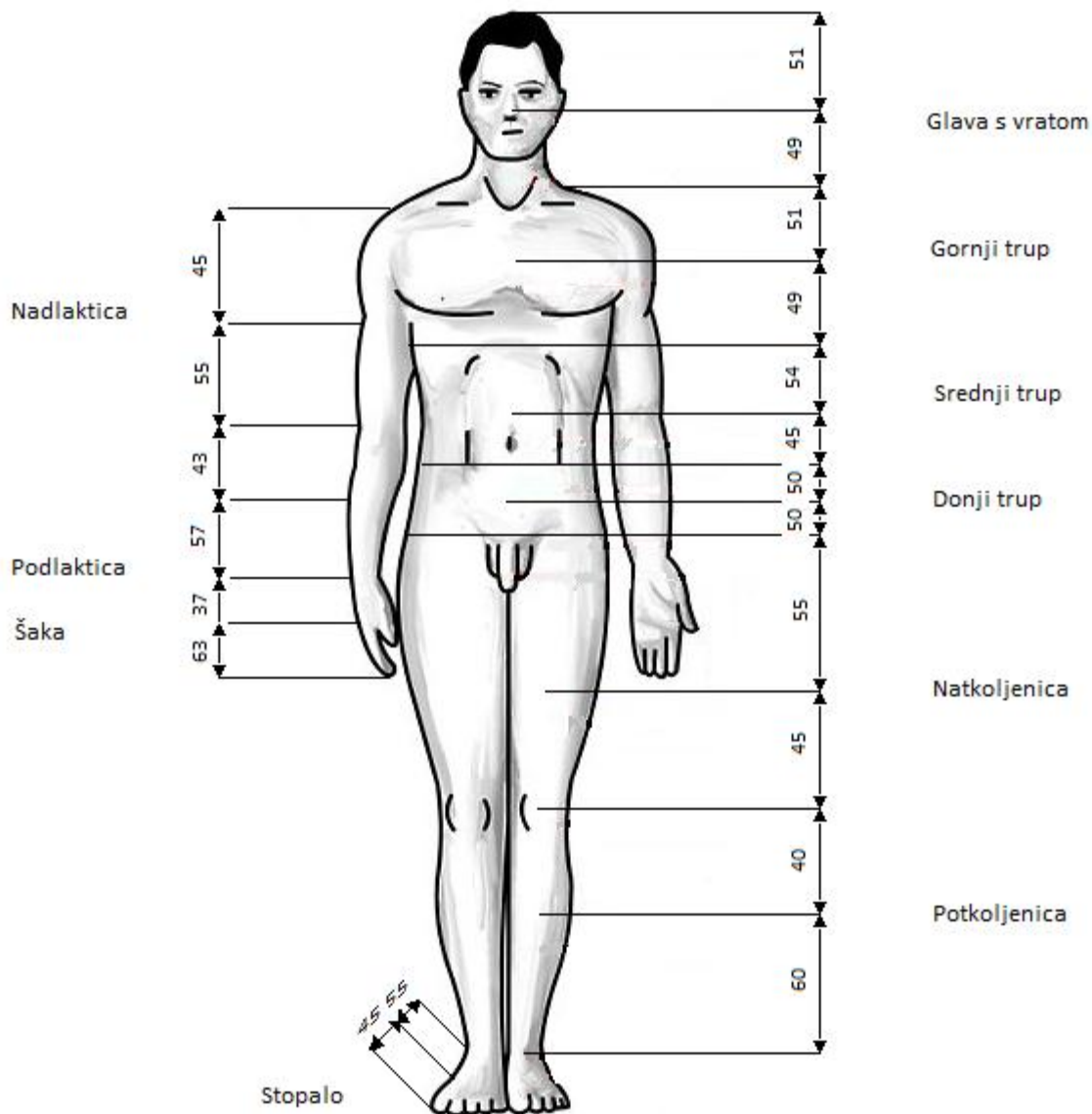
Sažeto, matrice transformacije mogu predstavljati:

- Položaj lokalnog sustava L u odnosu na globalni sustav G
- Transformaciju koordinata iz L koordinata u G koordinate
- Pomak tijela iz jedne pozicije u drugu te niz pomaka

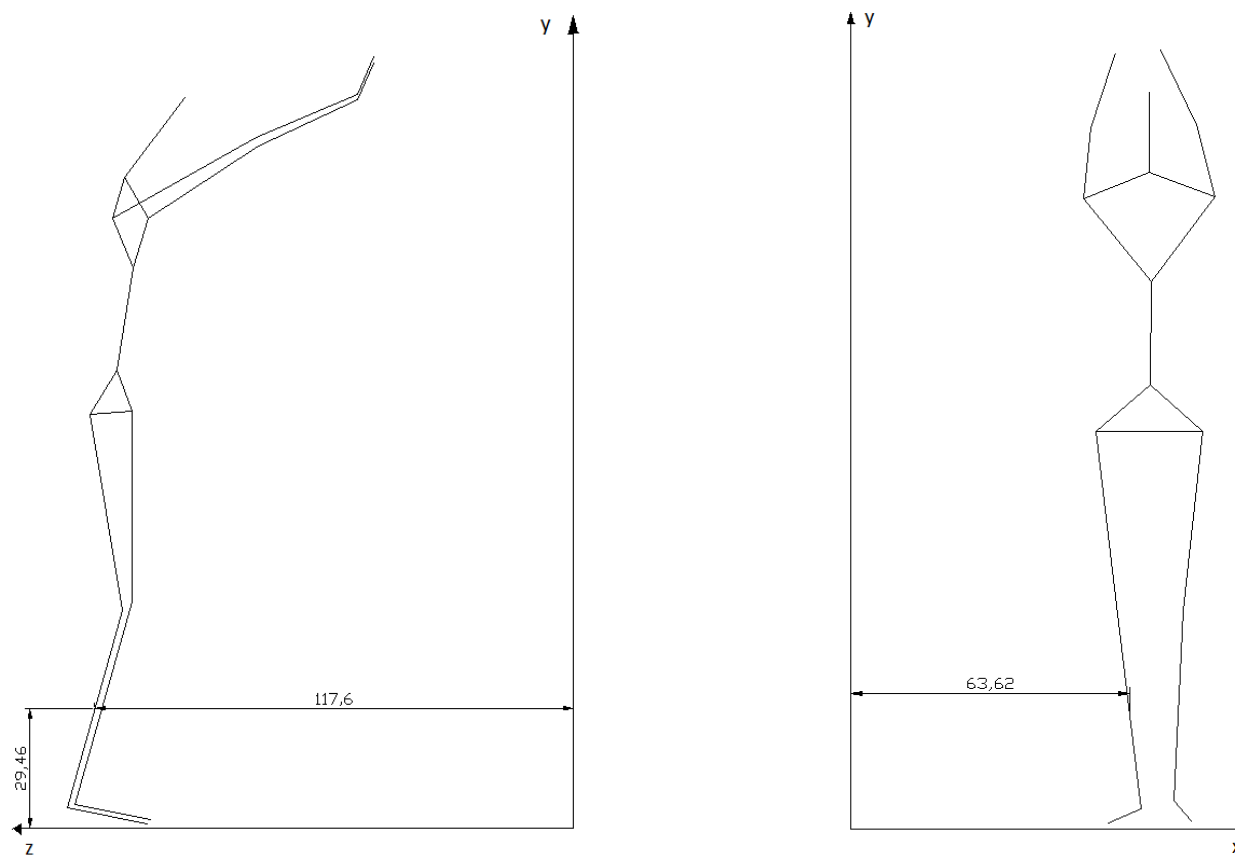


### 3.2. Određivanje putanje središta mase tijela

Za izračunavanje težišta segmenata i cijelog tijela poslužit će žičani model promatran za 12 faza koje su frame-ovi snimke skoka u dalj s mjesta. Određivanje težišta pojedinog segmenta pokazat ćemo na sljedećem primjeru (slika 22).



Slika 21. Shematski prikaz težišta pojedinih segmenata u postocima



Slika 22. Prikaz žičanog modela i ucrtanih koordinata za desnu potkoljenicu u frontalnoj i sagitalnoj ravnini

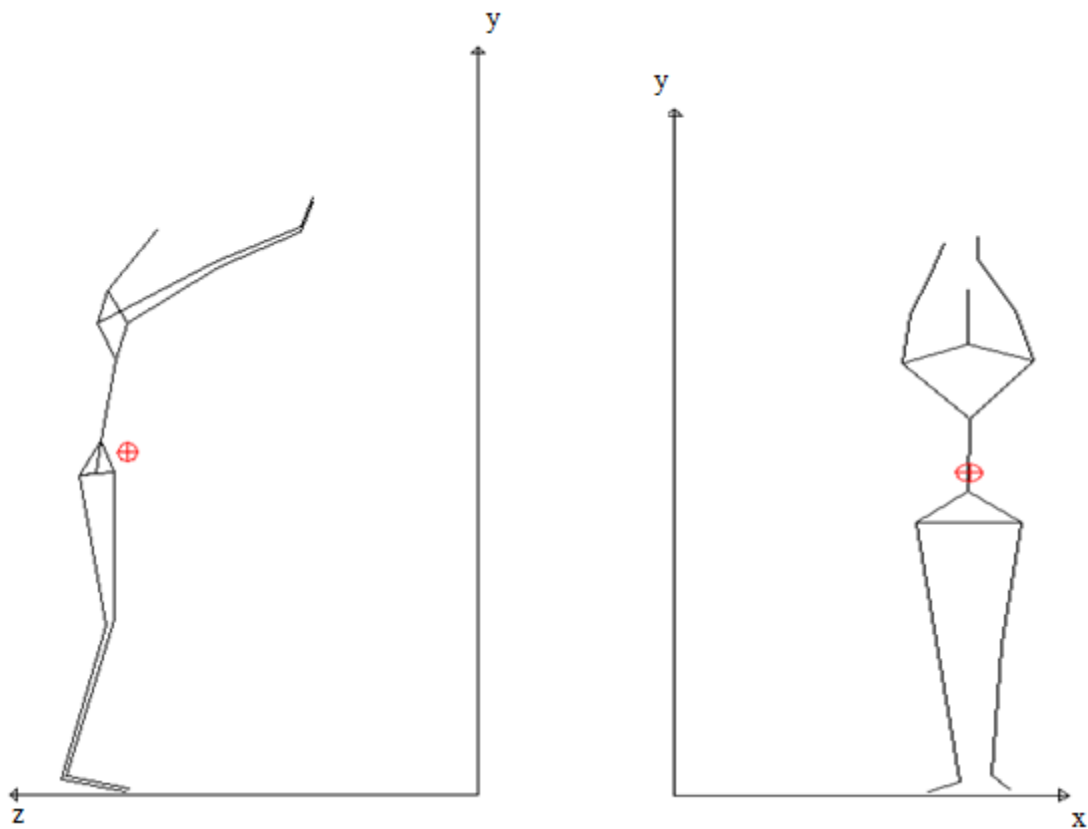
Iz žičanog modela očitavaju se koordinate težišta za svaki segment kroz 12 faza. Za ovaj primjer, potkoljenice, na slici 22 težište se nalazi na 60% visine mjerene odozdo. Nakon što očitamo sve koordinate težišta za svaki pojedini segment u mogućnosti smo izračunati ukupno težište tijela za zadani položaj.

Koordinate ukupnog težišta za svaku pojedinu sliku izračunavamo pomoću izraza

$$x_{Sj} = \frac{\sum_{i=1}^{16} x_{Si,j} m_i}{\sum_{i=1}^{16} m_i}, y_{Sj} = \frac{\sum_{i=1}^{16} y_{Si,j} m_i}{\sum_{i=1}^{16} m_i}, z_{Sj} = \frac{\sum_{i=1}^{16} z_{Si,j} m_i}{\sum_{i=1}^{16} m_i}$$

gdje su indeksi  $i$  – broj segmenta, a  $j$  broj slike.

Slika 23 prikazuje izračunato i ucrtano težište za jednu fazu skoka.



Slika 23. Prikaz žičanog modela sa ucrtanim težištem u frontalnoj i sagitalnoj ravnini

### 3.3. Određivanje središnjih dinamičkih momenata tromosti cijelog tijela

Nakon što su određene orijentacije, mase i težišta svih segmenata te cijelog tijela, računaju se dinamički momenti tromosti pojedinih segmenata s obzirom na lokalni koordinatni sustav kroz središte mase svakog pojedinog segmenta.

Kod modeliranja ovakvog biomehaničkog modela, pojedine segmente interpolirat ćemo sa sljedećim geometrijskim tijelima i sukladno njima računati dinamičke momente tromosti

- Elipsoid: glava, šake
- Krnji stožac: nadlaktice, podlaktice, natkoljenice, potkoljenice
- Geometrijsko tijelo s bazama stadion: donji, srednji i gornji dio trupa
- Paralelopiped: stopalo

Budući da je pretpostavljeno da su segmenti kruta tijela čiji se oblik i masa ne mijenja, dinamički momenti tromosti segmenata konstantni su tijekom gibanja. Svaki tako određen tenzor tromosti segmenta  $\mathbf{I}_i$  transformira se u sustav paralelan s globalnim sustavom pomoću izraza

$$[I_i]_{xyz} = [T_i][I_i]_{x_i y_i z_i} [T_i]^T$$

$[I_i]_{xyz}$  – matrica komponenti tenzora tromosti  $\mathbf{I}_i$  i-tog segmenta s obzirom na težište segmenta u globalnom sustavu

$[I_i]_{x_i y_i z_i}$  – matrica komponenti tenzora tromosti  $\mathbf{I}_i$  i-tog segmenta u lokalnom koordinatnom sustavu

$[T_i]$  – matrica transformacije iz lokalnog u globalni koordinatni sustav

Zatim se, koristeći Steinerovo pravilo računaju ukupni dinamički momenti tromosti tijela s obzirom na osi kroz središte mase cijelog tijela paralelne s globalnim koordinatnim sustavom. Ovi dinamički momenti tromosti računaju se za svaki od 12 položaja. U obzir je još uzeta simetričnost parnih ekstremiteta, tako da su dinamički momenti tromosti za iste jednaki.

### 3.4. Jednadžbe gibanja

Pri izvođenju jednadžbi gibanja, polazi se od činjenice da je kinematički moment tijela nepromjenjiv s obzirom na ukupno težište tijela. Polazi se od sljedeće jednadžbe koja predstavlja kinetički moment čovjekova tijela s obzirom na ukupno težište tijela:

$$\vec{K}_s = \sum_{i=1}^{16} \vec{K}_i + \sum_{i=1}^{16} [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i]$$

Kinetički se moment referentnog segmenta obzirom na vlastito težište može prikazati skalarnim produktom tenzora inercije segmenta s obzirom na vlastito težište i vektora kutne brzine. Ako postavimo lokalni koordinatni sustav  $(x_1, y_1, z_1)$  u središte mase referentnog segmenta, tako da se osi sustava poklapaju s glavnim osima inercije segmenta, komponente kinetičkog momenta referentnog segmenta određene matričnom jednadžbom glase:

$$[K_1]_{x_1 y_1 z_1} = [I_1]_{x_1 y_1 z_1} [\omega_1]_{x_1 y_1 z_1}$$

Ili

$$\begin{bmatrix} K_{1x_1} \\ K_{1y_1} \\ K_{1z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1x_1} \\ \omega_{1y_1} \\ \omega_{1z_1} \end{bmatrix}$$

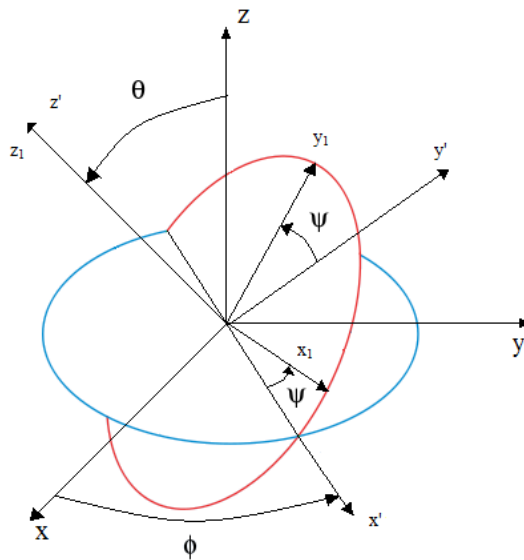
Gdje su sve veličine izražene u  $(x_1, y_1, z_1)$  koordinatnom sustavu, čije je ishodište u središtu mase referentnog segmenta, a osi mu se poklapaju s glavnim osima inercije segmenta.

$$\begin{bmatrix} K_{1x_1} \\ K_{1y_1} \\ K_{1z_1} \end{bmatrix} - \text{matrica komponenata kinetičkog momenta}$$

$$\begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} - \text{matrica komponenata tenzora tromosti}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{1x_1} \\ \omega_{1y_1} \\ \omega_{1z_1} \end{bmatrix} - \text{matrica komponenata kutne brzine}$$

Kako bi se mogla pratiti orijentacija referentnog segmenta, komponente kutne brzine u gornjoj jednadžbi bit će izražene preko Eulerovih kutova  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , kojima se opisuje njegova orijentacija u prostoru (slika 24)



Slika 24. Eulerovi kutovi

Pomoću Eulerovih kutova transformacija koordinata nekog vektora  $\vec{u}$  iz inercijskog sustava  $(x, y, z)$  u koordinatni sustav  $(x_1, y_1, z_1)$ , koji se giba zajedno s referentnim segmentom, može se opisati jednadžbom:

$$\begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ u_{z_1} \end{bmatrix} = [C_3(\psi)][C_2(\theta)][C_1(\phi)] \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$  – komponente vektora  $\vec{u}$  u  $(x, y, z)$  koordinatnom sustavu

$\begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ u_{z_1} \end{bmatrix}$  – komponente vektora  $\vec{u}$  u  $(x_1, y_1, z_1)$  koordinatnom sustavu

Matrice  $[C_3(\psi)][C_2(\theta)][C_1(\psi)]$  iznose:

$$[C_1(\phi)] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C_2(\theta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[C_3(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uz pomoć gornjih izraza komponente kutne brzine  $\vec{\omega}_1$  u  $(x_1, y_1, z_1)$  koordinatnom sustavu mogu se izraziti jednadžbama:

$$\omega_{1x_1} = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta$$

$$\omega_{1y_1} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi$$

$$\omega_{1z_1} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

Ako gornje jednadžbe zapišemo u matičnom obliku one tada glase:

$$\begin{bmatrix} \omega_{1x_1} \\ \omega_{1y_1} \\ \omega_{1z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Uzimajući u obzir gornju jednadžbu, jednadžba kinetičkog momenta u matičnom obliku glasi:

$$\begin{bmatrix} K_{1x_1} \\ K_{1y_1} \\ K_{1z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Iz gornje jednadžbe slijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{1x_1} \\ K_{1y_1} \\ K_{1z_1} \end{bmatrix}$$

Gornjim je skupom diferencijalnih jednadžbi određena orijentacija referentnog segmenta tijekom gibanja. Ona zavisi o promjeni kinetičkog momenta  $[K_{1x_1} \quad K_{1y_1} \quad K_{1z_1}]^T$  referentnog segmenta s obzirom na vlastito središte mase tijekom gibanja. Promjena kinetičkog momenta referentnog segmenta s obzirom na vlastito središte masa bit će utvrđena izračunavanjem na temelju rezultata mjerenja karakterističnih veličina promatranog gibanja. Izmjerene su veličine izražene u  $(x, y, z)$  koordinatnom sustavu.

Jednadžba za njegovo izračunavanje glasi:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_s - \sum_{i=2}^{16} \vec{K}_i + \sum_{i=1}^{16} [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i]$$



Razvijanjem gornje jednadžbe u skalarni oblik izračunavaju se komponente  $[K_{1x} \ K_{1y} \ K_{1z}]^T$  kinetičkog momenta  $\overline{K}_1$  u sustavu  $(x, y, z)$ .

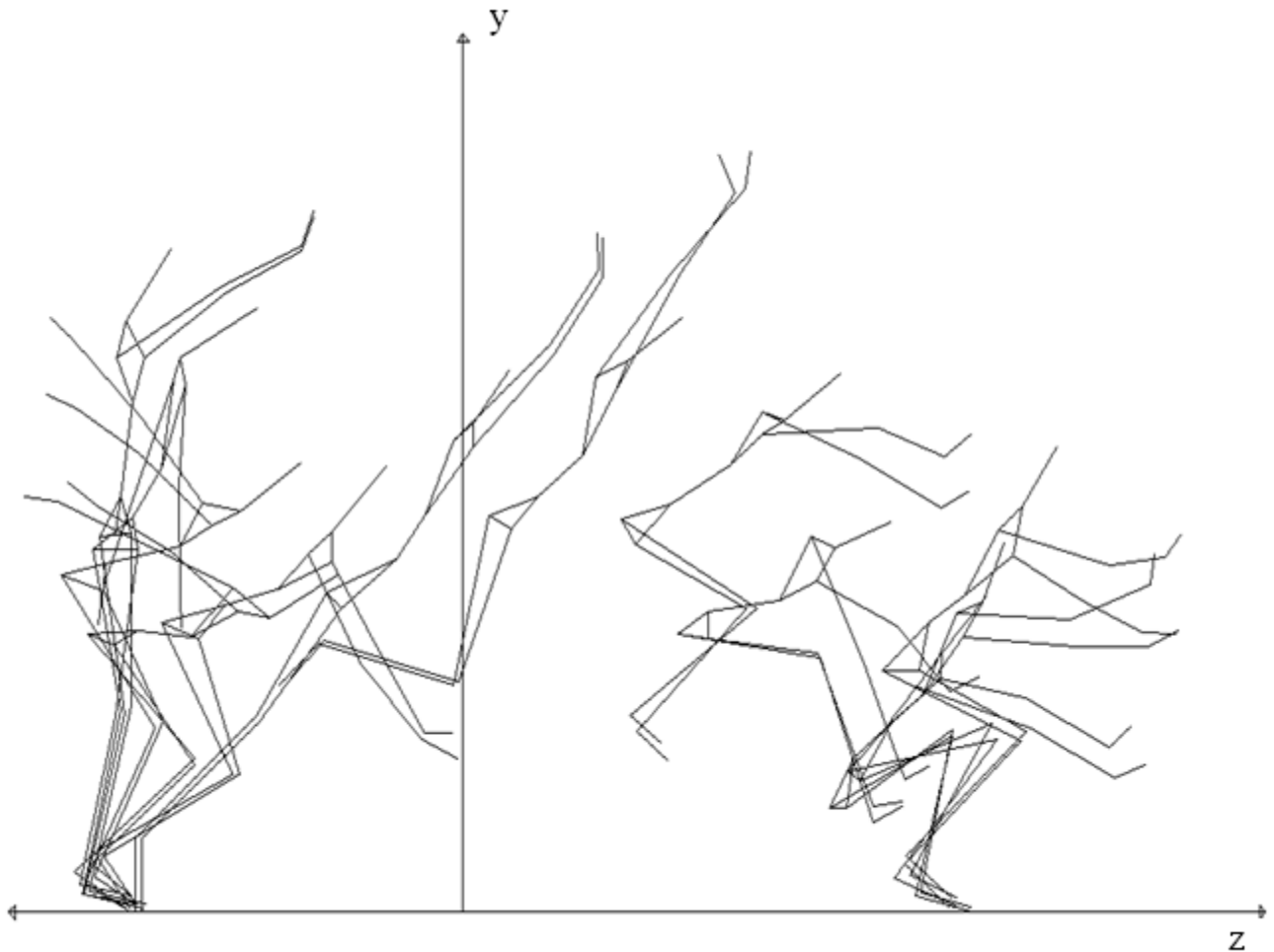
Transformacija koordinata kinetičkog momenta  $\overline{K}_1$  iz inercijskog koordinatnog sustava  $(x, y, z)$ , u kojem su izmjerene, u koordinatni sustav  $(x_1, y_1, z_1)$  vezan za referentni član dana je izrazom:

$$\begin{bmatrix} K_{1x_1} \\ K_{1y_1} \\ K_{1z_1} \end{bmatrix} = [C_3(\psi)][C_2(\theta)][C_1(\phi)] \begin{bmatrix} K_{1x} \\ K_{1y} \\ K_{1z} \end{bmatrix}$$

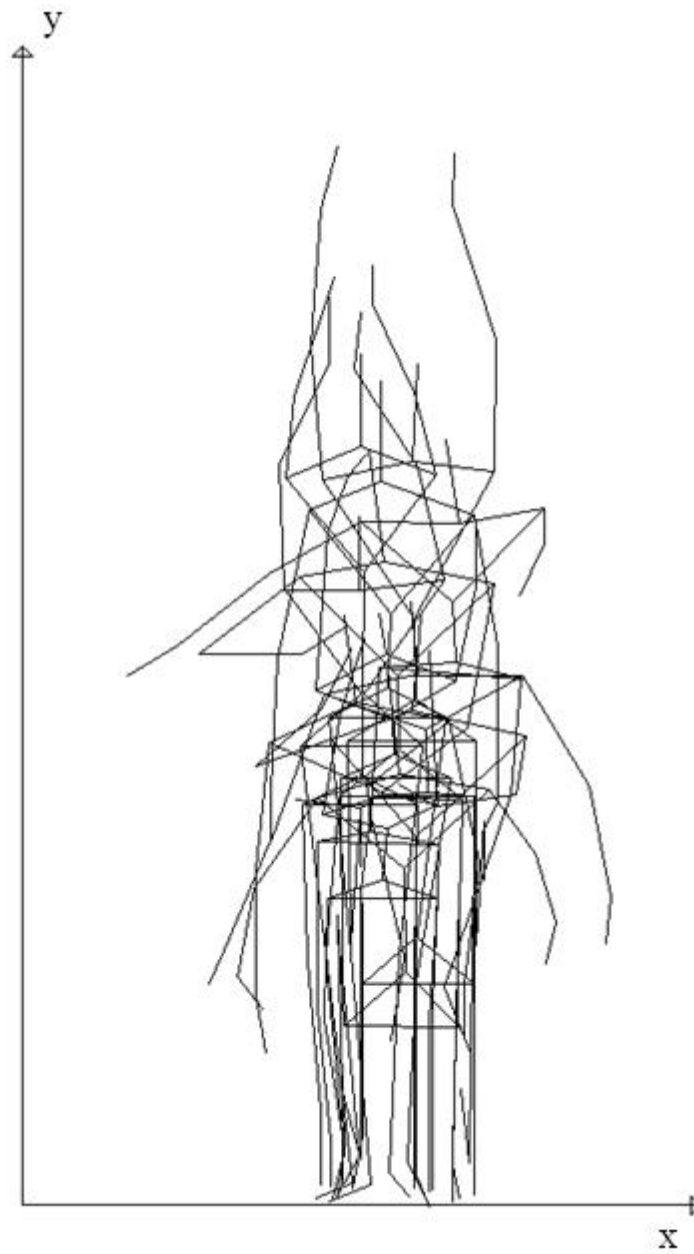
## 4. Rezultati

### 4.1. Putanja središta mase tijela

Napravljeni su žičani modeli za sve faze skoka (slike 8,9 i 10 ). Slika 25 prikazuje skok u sagitalnoj ravnini, a slika 26 u frontalnoj ravnini.



Slika 25. Prikaz skoka u dalj preko žičanih modela u sagitalnoj ravnini



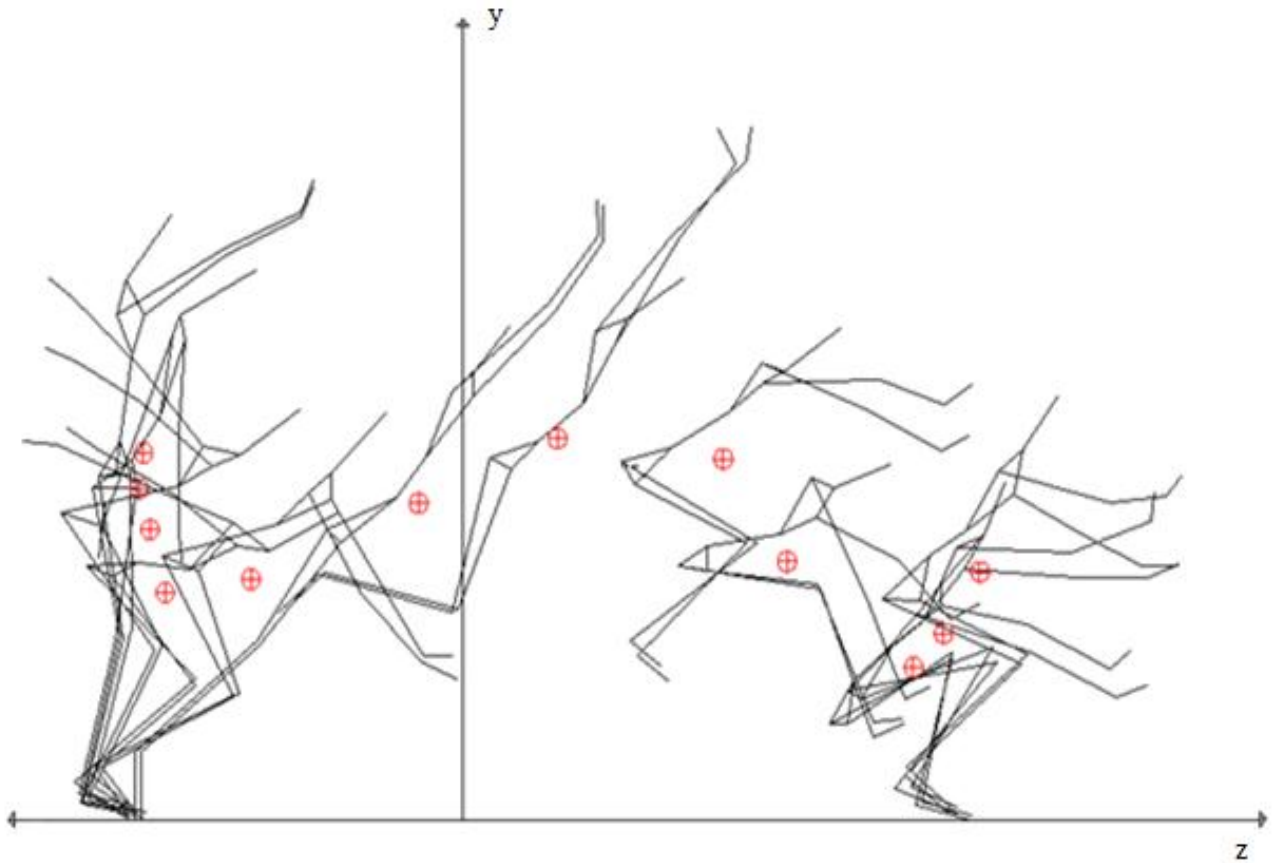
**Slika 26. Prikaz skoka u dalj preko žičanih modela u frontalnoj ravnini**

Prema regresijskoj jednadžbi Donskog i Zaciorskog izračunate su mase segmenata tijela za ispitanika mase 78 kg i visine 181 cm.

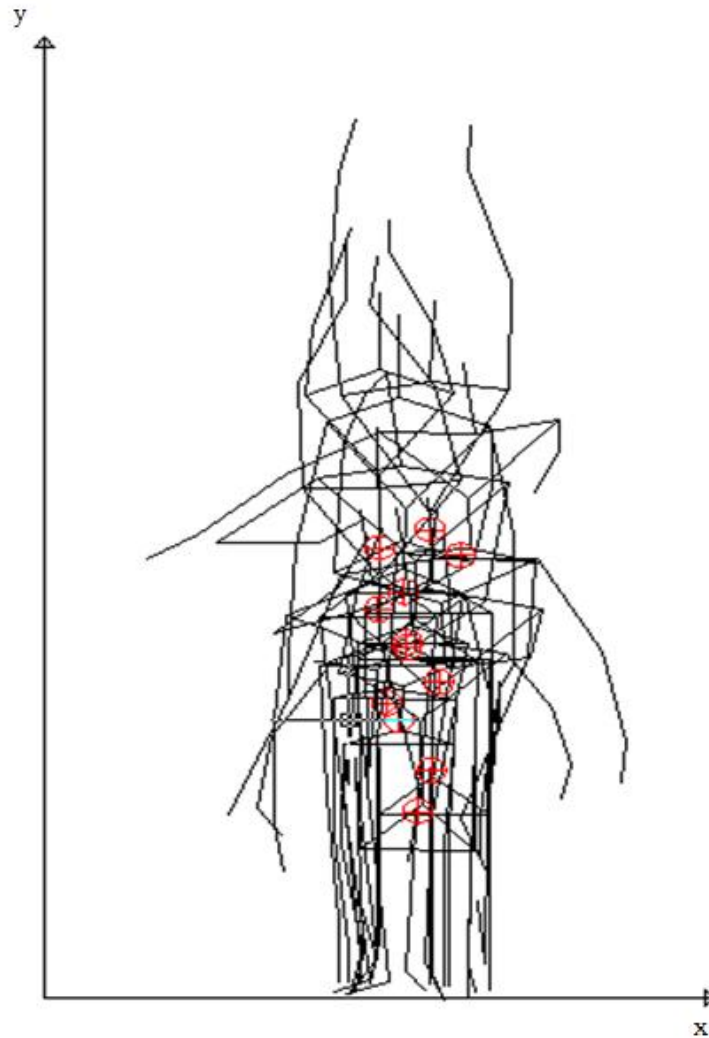
**Tablica 3. Prikaz mase i gustoće pojedinih segmenata**

Segment	Masa, kg	Gustoća $\times 10^{-3}$ , kg/cm <sup>3</sup>
Glava	5,218	1,110
Lijeva nadlaktica	2,111	1,070
Desna nadlaktica	2,111	1,070
Lijeva podlaktica	1,239	1,125
Desna podlaktica	1,239	1,125
Lijeva šaka	0,481	1,155
Desna šaka	0,481	1,155
Gornji dio trupa	12,240	0,960
Srednji dio trupa	12,606	1,000
Donji dio trupa	8,977	1,030
Lijeva natkoljenica	11,032	1,050
Desna natkoljenica	11,032	1,050
Lijeva potkoljenica	3,419	1,090
Desna potkoljenica	3,419	1,090
Lijevo stopalo	1,093	1,095
Desno stopalo	1,093	1,095

Tablica 3 prikazuje izračunate mase segmenata te gustoće pojedinih segmenata [Dempster]. Izračunata su težišta cijelog tijela za svaku pojedinu fazu skoka. Primjer žičanog modela s ucrtanim težištem cijelog tijela vidi se na slici 23. Žičani modeli s ucrtanim težištima prikazani su u sagitalnoj (slika 27) i frontalnoj (slika 28) ravnini.

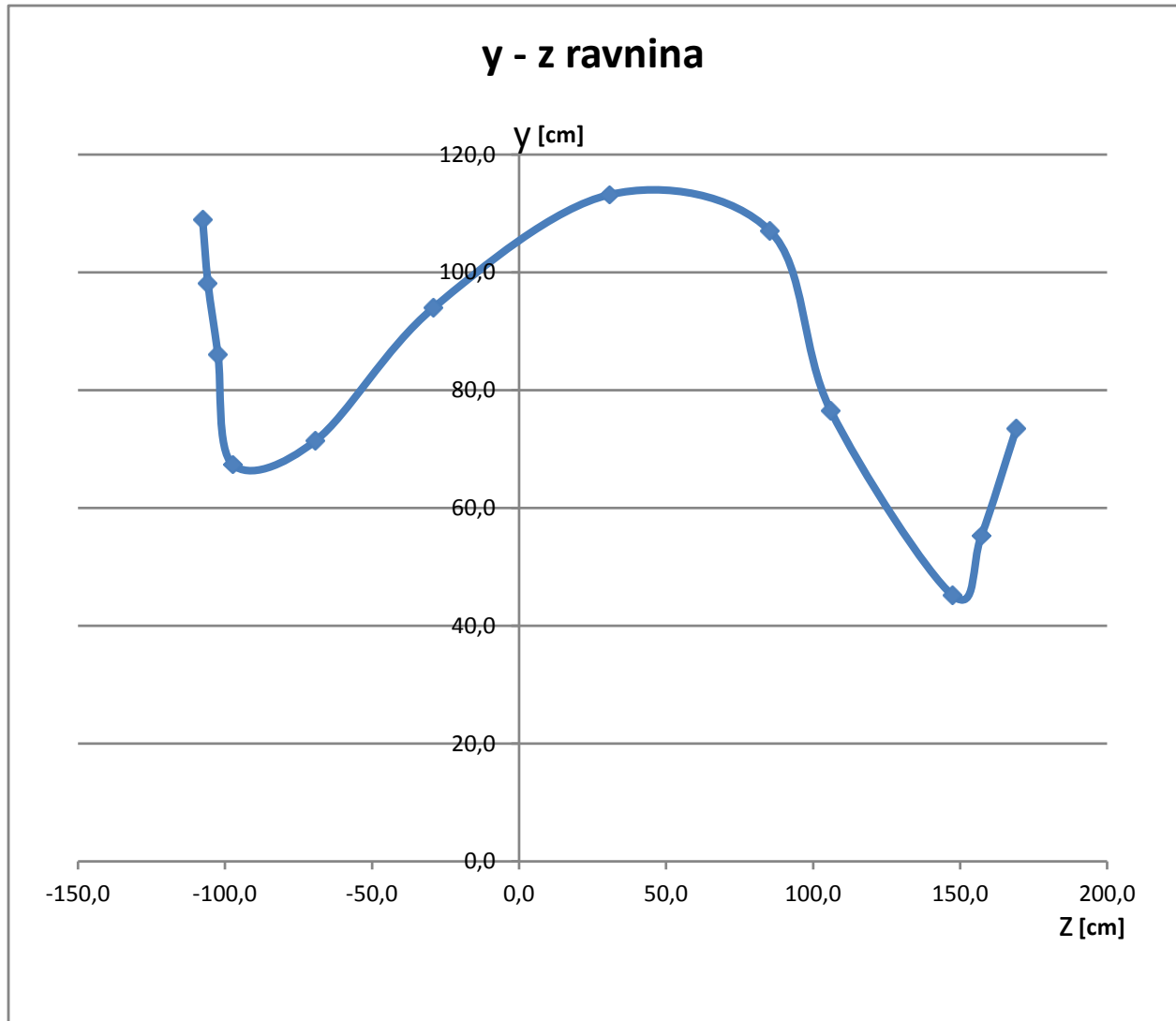


Slika 27. Prikaz težišta u sagitalnoj ravnini kroz cijeli skok

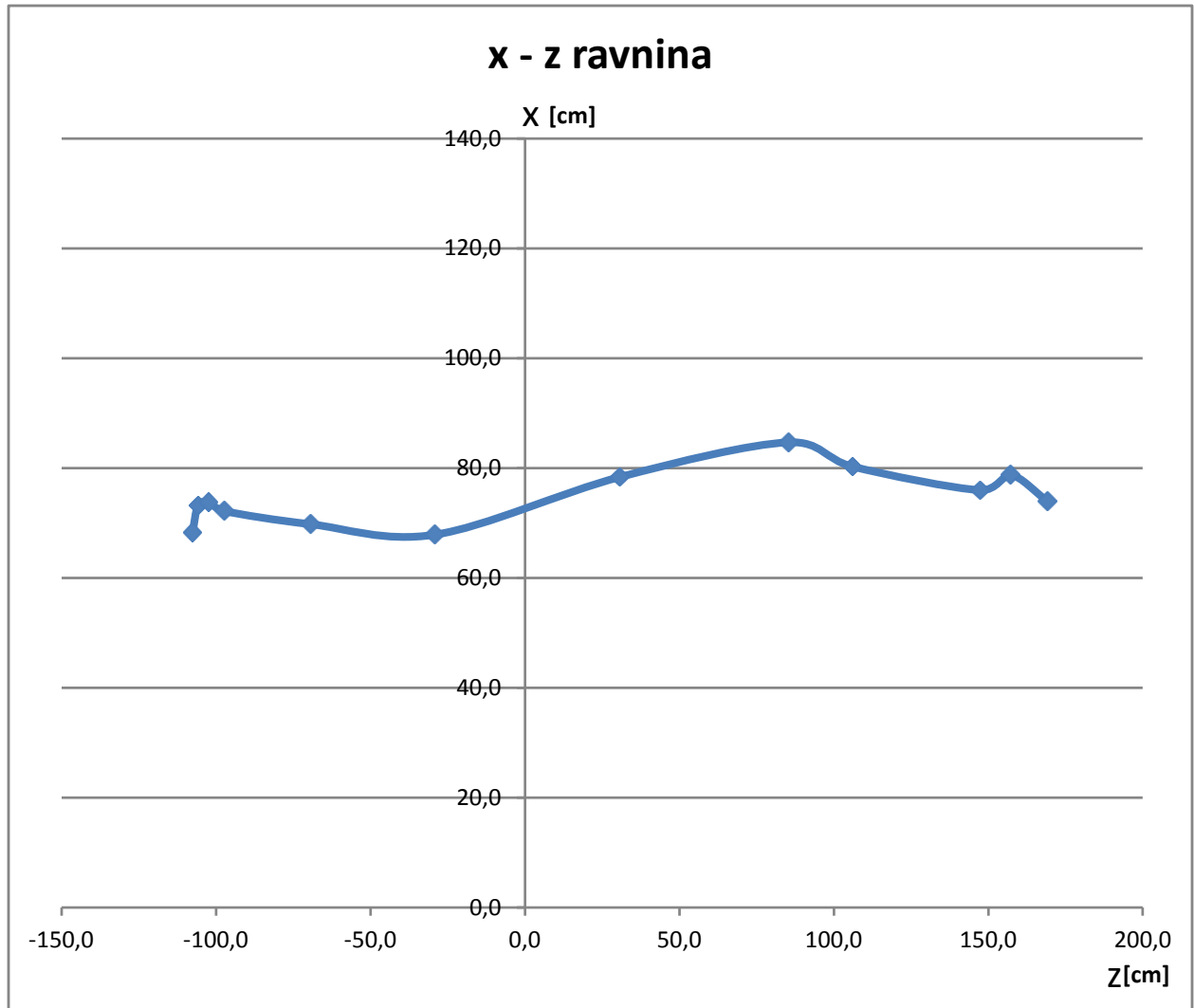


**Slika 28. Prikaz težišta u frontalnoj ravnini kroz cijeli skok**

Slike 29, 30 i 31 prikazuju putanju središta mase cijelog tijela u sagitalnoj, frontalnoj i horizontalnoj ravnini.

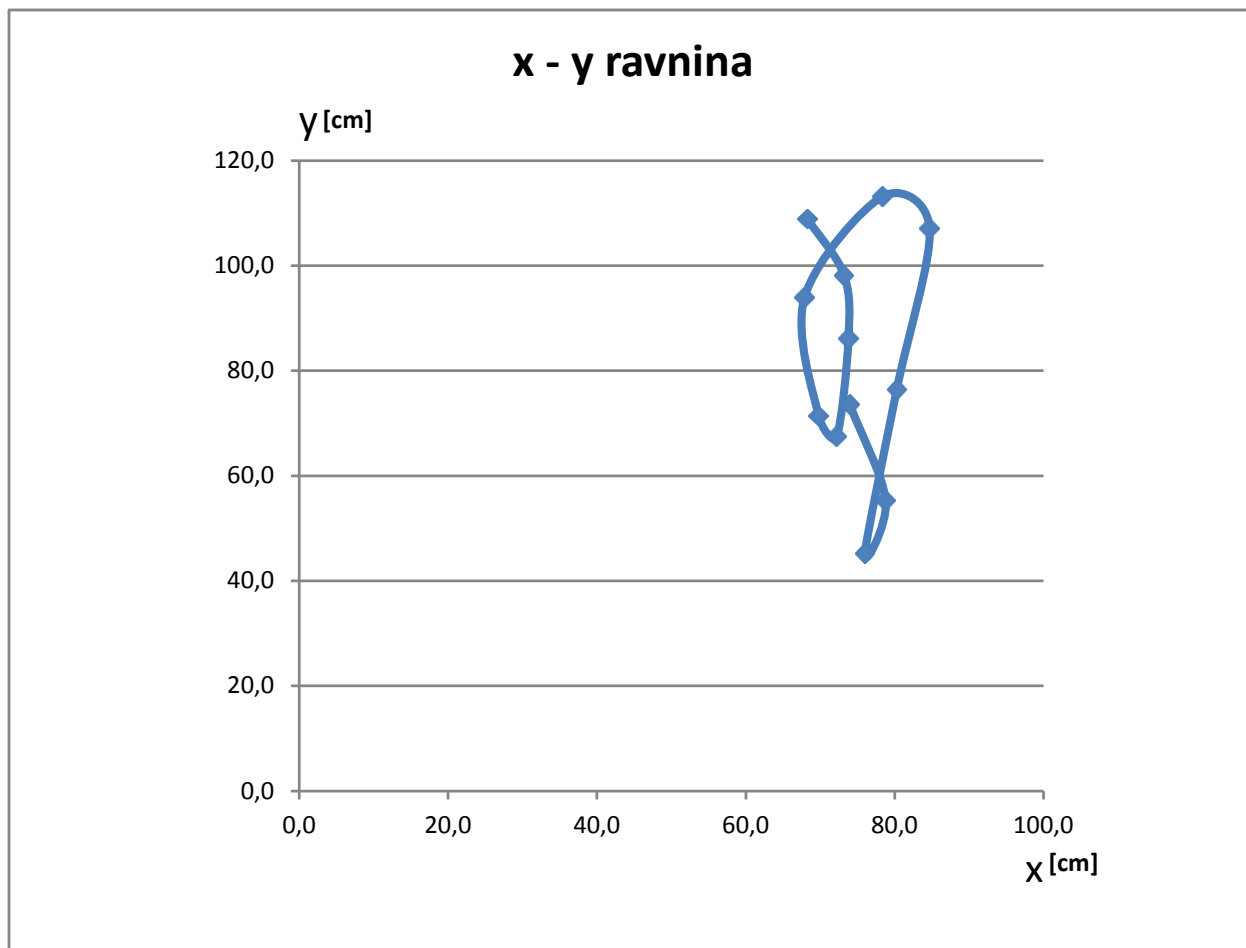


Slika 29. Prikaz putanji ukupnog težišta u yz ravnini



Slika 30. Prikaz putanji ukupnog težišta u xz ravnini





Slika 31. Prikaz putanji ukupnog težišta u xy ravnini

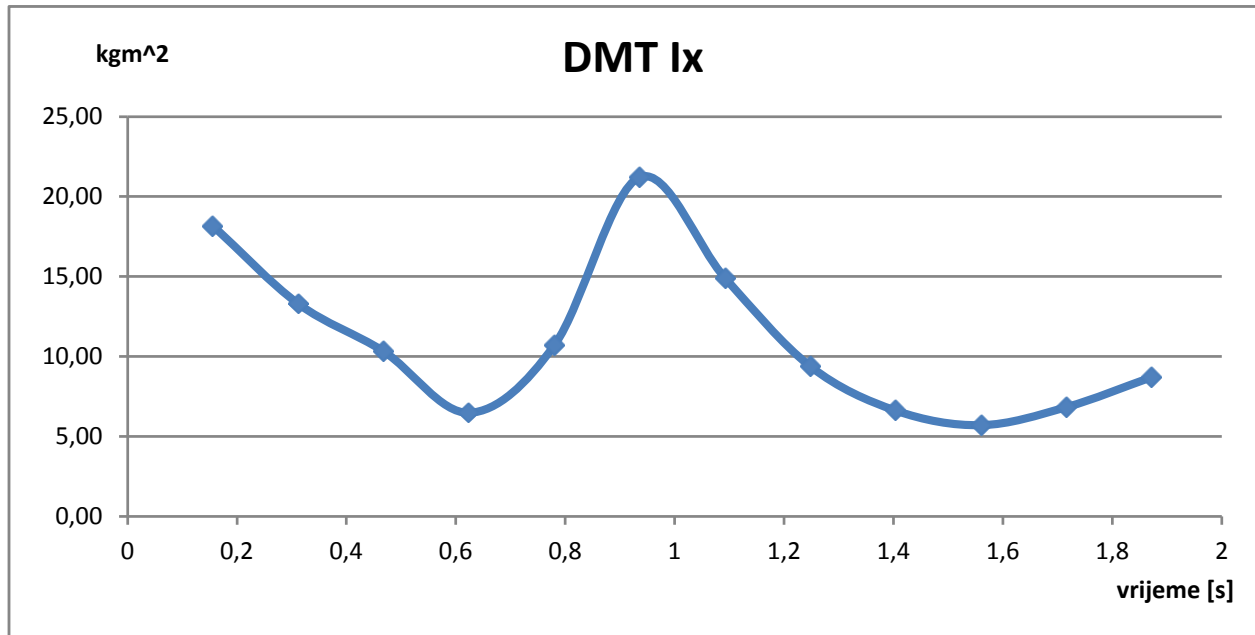
U ravnini xz i xy krivulja bi trebala biti pravac, ali zbog određenog odstupanja tijekom skoka i određene nepreciznosti tijekom mjerenja (vrlo teško je postaviti kameru u idealan položaj) dolazi do pomaka od idealnog slučaja.

## 4.2. Dinamičke antropomjere – središnji dinamički momenti tromosti

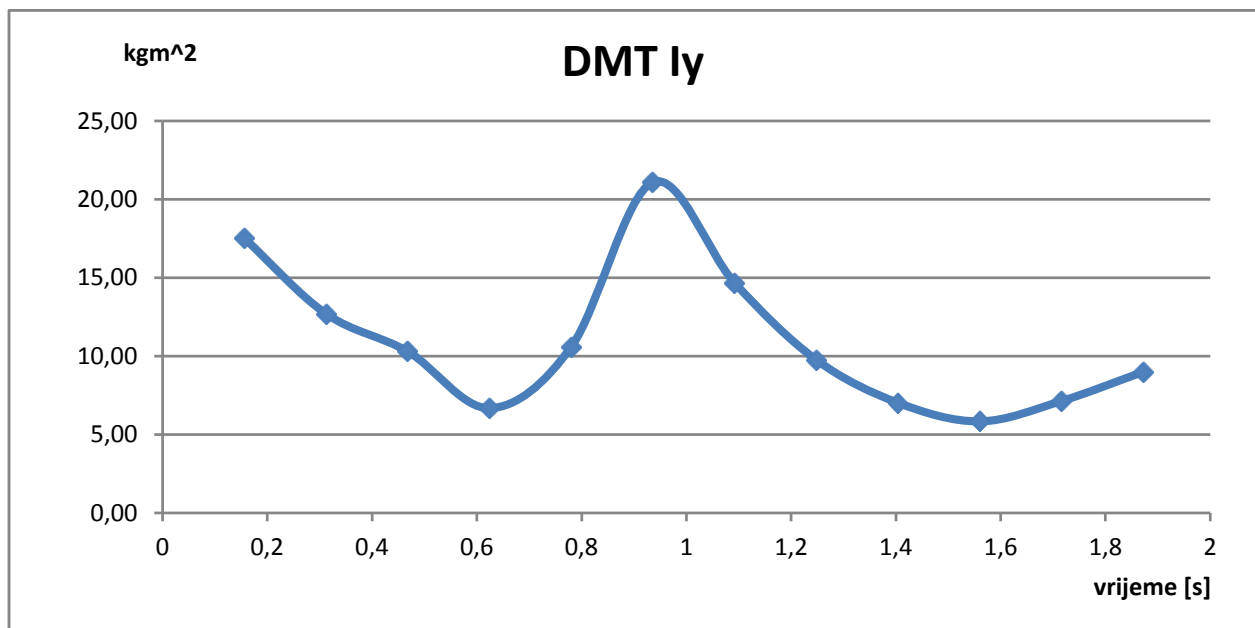
Pojedine dinamičke momente tromosti segmenata izračunavamo po poznatim formulama za pravilna geometrijska tijela. Njihov rezultat prikazan je u tablici 4. Pomoću tih dinamičkih momenata tromosti i matrica transformacije računamo dinamičke momente tromosti u globalnom sustavu koji su prikazani na dijagramima 1, 2 i 3. Dinamički momenti tromosti u globalnom koordinatnom sustavu računati su pomoću matematičkog paketa Matlab R2009a.

**Tablica 4 Prikaz dinamičkih momenata tromosti za pojedine segmente**

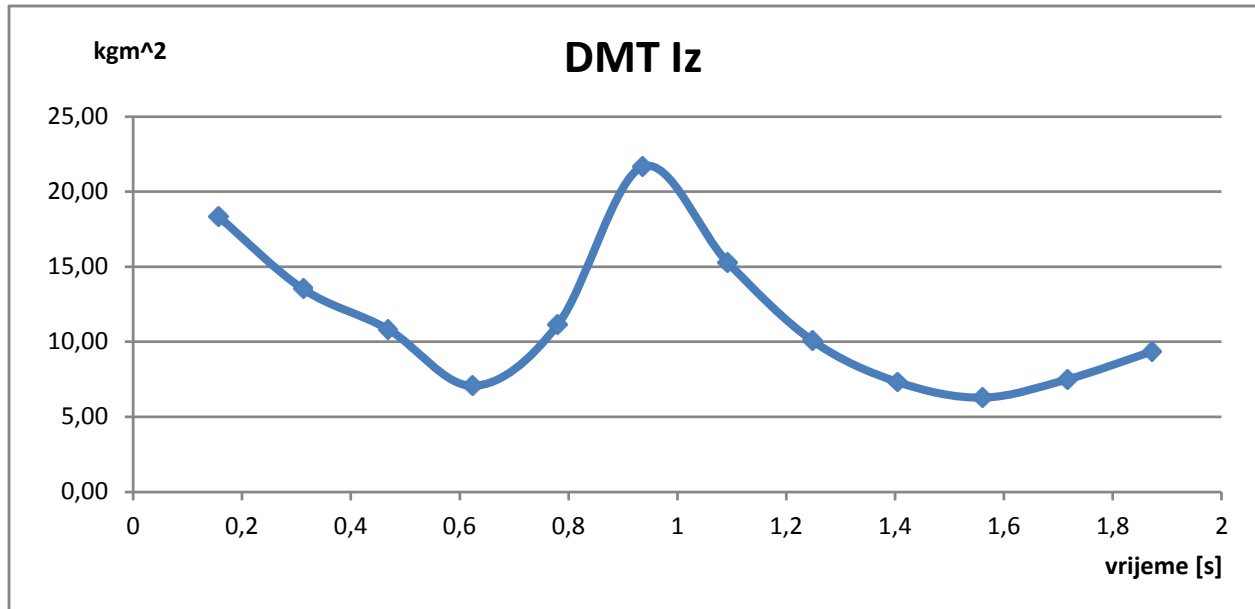
DMT Ix [kgcm <sup>2</sup> ]	DMT Iy [kgcm <sup>2</sup> ]	DTM Iz [kgcm <sup>2</sup> ]	Segment
270,55	102,27	270,55	Glava
184,78	54,80	184,78	Lijeva nadlaktica
184,78	54,80	184,78	Desna nadlaktica
80,10	21,50	80,10	Lijeva podlaktica
80,10	21,50	80,10	Desna podlaktica
5,00	1,73	5,00	Lijeva šaka
5,00	1,73	5,00	Desna šaka
1772,20	414,67	2269,30	Gornji dio trupa
1080,10	306,40	1440,60	Srednji dio trupa
878,00	561,94	1406,70	Donji dio trupa
2713,40	854,17	2713,40	Lijeva natkoljenica
2713,40	854,17	2713,40	Desna natkoljenica
568,28	92,17	568,28	Lijeva potkoljenica
568,28	92,17	568,28	Desna potkoljenica
78,43	82,58	78,43	Lijevo stopalo
78,43	82,58	78,43	Desno stopalo



Dijagram 1. Prikaz dinamičkog momenta tromosti  $I_x$  u globalnom koordinatnom sustavu u vremenu



Dijagram 2. Prikaz dinamičkog momenta tromosti  $I_y$  u globalnom koordinatnom sustavu u vremenu



Dijagram 3. Prikaz dinamičkog momenta tromosti  $I_z$  u globalnom koordinatnom sustavu u vremenu

## 5. Zaključak

U ovom radu pokazan je jedan od načina biomehaničke analize gibanja tijela pomoću koje se mogu promatrati i sva ostala gibanja ljudskog tijela u svrhu poboljšavanja, da li zbog postizanja boljih sportskih rezultata ili u medicinske svrhe. Ograničit ćemo se samo na analiziranje biomehanike skoka u dalj s mjesta.

U prvom dijelu rada izrađen je žičani model ljudskog tijela, pomoću kojeg je opisano gibanje tijela u prostoru i pomoću kojeg su se vršili izračuni težišta pojedinih segmenata i naravno ukupnog težišta tijela. Dobiveni rezultat prikazani su na slikama 29, 30 i 31.

Žičani model poslužio je i za određivanje orijentacije pojedinih segmenata u prostoru. U tu svrhu uveden je lokalni koordinatni sustav. Dakle, promatrali smo orijentaciju segmenta za koji smo definirali lokalno koordinatni sustav u odnosu na globali koordinatni sustav.

Za računanje masa i volumena segmenata korištena je metoda Donski i Zaciorski. Rezultati za pojedine segmente prikazani su u tablici 3.

Kod izrade biomehaničkog modela, korištena su pravilna geometrijska tijela kojima su zamijenjeni pojedini segmenti zbog jednostavnijeg računanja dinamičkih momenata tromosti. Isto tako uvedena je pretpostavka o simetričnosti parnih dijelova tijela (šaka, podlaktica, nadlaktica, natkoljenica, potkoljenica i stopalo). Rezultati za dinamičke momente tromosti pojedinih segmenata prikazani su u tablici 4.

Promatrane su promjene dinamičkih momenata tromosti tijekom skoka. Rezultati za to promatranje prikazani su na dijagramima 1, 2 i 3. Naočigled dijagrami izgledaju isto, a razlog tome je vrlo mala razlika u izračunatim vrijednostima. Promatranjem dijagrama može se zaključiti da je najmanja vrijednost dinamičkih momenata tromosti u trenutku prije odraza, dok je najveća u trenutku najviše točke skoka.

Biomehanička analiza opisana u ovom radu predstavlja praktično primjenjivu metodu analize sportskih pokreta. Na jednostavan način moguće je utvrditi dinamičke karakteristike 3D gibanja. I na kraju, variranjem pojedinih parametara moguće je optimizirati pokret s ciljem postizanja uspješnijih sportskih rezultata.

## 6. Literatura

- [1] Alfirević Ivo: Tenzorski račun i tenzorska mehanika, Biblioteka tehnička mehanika, 2007.
- [2] Alfirević Ivo: Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Biblioteka tehnička mehanika, 2003
- [3] Jurčević Lulić Tanja: Istraživanje utjecaja promjena mase trupa čovjeka na antropodinamičke veličina, magistarskih rad, 1994.
- [4] Jurčević Lulić Tanja: O dinamičkom utjecaju simetričnih podsustava čvrstih tijela na gibanja cjelovitog sustava, doktorska disertacija, 1999.
- [5] Knudson Duane: Fundamentals of biomechanics, second edition, Springer, 2007.
- [6] Terze Zdravke: Određivanje promjena dinamičkih značajki prostornog modela čovjeka u složenom pokretu, magistarski rad, 1994.
- [7] Zatsiorsky Vladimir M.: Kinematics of human motion, Human Kinetics, 1998.
- [8] Zatsiorsky Vladimir M. i S.Y. Aleshinsky: Simulation of human locomotion in space, Baltimore: University Park Press, 1975.
- [9] Hamill J., Knutzen K. M.: Biomechanical basis of human movement third edition, The Point, 2009.

### Web:

<http://mathworld.wolfram.com/Cone.html>, 2010.

[http://www.c-motion.com/help/Visual3D\\_Modeling/Segments/Properties/Segment\\_Inertia.htm](http://www.c-motion.com/help/Visual3D_Modeling/Segments/Properties/Segment_Inertia.htm), 2002.

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/MomentofInertiaRectangularParallelepiped.html>, 2007.

<http://mathworld.wolfram.com/Ellipsoid.html>, 2010.