

# Analiza podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije

---

**Bralić, Svemir**

**Scientific master's theses / Magistarski rad**

**2003**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:390148>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**ANALIZA PODOBNOSTI OREBRENE**  
**TANKOSTJENE KONSTRUKCIJE**  
**MAGISTARSKI RAD**

Kandidat: **Svemir Bralić, dipl. ing.**

Mentor: **Prof.dr.sci. Vedran Žanić**

**ZAGREB, 2003.**

## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

<b>UDK:</b>	629.5.023:519.6 629.7.023:519.6
<b>Ključne riječi:</b>	Tankostjena konstrukcija, semi-analitički pristup, konačni elementi, konačne trake, ukrepljeni paneli, faktori podobnosti, faktori sigurnosti, inicijalna imperfekcija
<b>Znanstveno područje:</b>	Tehničke znanosti
<b>Znanstveno polje:</b>	Brodogradnja i zrakoplovstvo
<b>Institucija na kojoj je rad izrađen:</b>	Fakultet strojarstva i brodogradnje
<b>Mentor rada:</b>	Prof. dr. sc. Vedran Žanić
<b>Broj stranica:</b>	165
<b>Broj slika:</b>	64
<b>Broj tablica:</b>	30
<b>Broj korištenih bibliografskih jedinca:</b>	52
<b>Datum obrane:</b>	16. srpanj 2003.
<b>Povjerenstvo:</b>	Prof. dr. sc. Ivo Alfirević, predsjednik povjerenstva Prof. dr. sc. Vedran Žanić, voditelj rada Prof. dr. sc. Josip Dvornik, član povjerenstva
<b>Institucija u kojoj je rad pohranjen:</b>	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb



## ZAHVALA

Ovaj rad je nastajao kroz proteklih pet godina moga rada na Fakultetu strojarstva i brodogradnje. U njegovu stvaranju sudjelovalo je mnogo uvaženih profesora, kolega, studenata i osoblja fakulteta s kojima sam bio u kontaktu. Svima skupa bih se želio zahvaliti na nesebičnoj pomoći tijekom ovih godina kako pri izradi samog rada tako i pri ispunjavanju ostalih obveza vezanih za protekli period.

Zahvaljujem se svom mentoru profesoru Vedranu Žaniću koji mi je svojim savjetima pomogao ovaj rad učiniti kvalitetnijim. Osim toga, on je u ranoj fazi definirao samu osnovu moga rada te usmjerivši me na savladavanje kvalitetnih numeričkih alata i programskih paketa omogućio mi stvaranje jednog šireg opsega znanja. Stvorivši uvjete da se ta znanja primjene i na realnim problemima ispunio sve što sam mogao očekivati od svog voditelja.

Zahvaljujem se profesoru Ivi Alfireviću koji mi je svojim sugestijama i komentarima koje je iznosio kroz predavanja, svoje knjige i dok je čitao ovaj rad dao posebnu inspiraciju pri pisanju magistarskog rada.

Zahvaljujem se gospodinu Tomislavu Jančijevu koji mi je svojim sugestijama uvelike pomogao pri rješavanju konkretnih problema, a svojom osobnošću i stavom prema znanosti i poslu definirao neke nove vrijednosti.

Zahvaljujem se svojim kolegama Jerolimu Andriću, Josipu Hozmecu, Darku Franku, Marku Stipčeviću i Peri Prebegu za izuzetnu atmosferu tijekom zajedničkog rada proteklih godina.

Svojim roditeljima, užoj i široj obitelji i prijateljima zahvaljujem za sve ono što su mi pružili tijekom proteklih godina.

Mojoj supruzi Marini koja je svojom ljubavlju, razumijevanjem i radom učinila naš život idealnim pretvorivši probleme u šale zahvaljujem se svim srcem.

Kćeri Miji koja je rasla zajedno sa ovim radom tata zahvaljuje za sve nezaboravne trenutke koje mu je pružila pomažući mu da barem nakratko zaboravi na svakodnevne probleme.

## SADRŽAJ

<b>PREDGOVOR .....</b>	<b>1</b>
<b>POPIS SLIKA .....</b>	<b>2</b>
<b>POPIS TABLICA .....</b>	<b>4</b>
<b>POPIS KRATICA I OZNAKA .....</b>	<b>6</b>
<b>SAŽETAK .....</b>	<b>11</b>
<b>KLJUČNE RIJEČI .....</b>	<b>13</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>14</b>
<b>2. METODOLOGIJA MODELIRANJA .....</b>	<b>19</b>
2.1 Modeliranje konstrukcije metodom konačnih elemenata .....	21
2.2 Modeliranje konstrukcije pomoću makroelemenata .....	28
2.3 Modeliranje konstrukcije superelementima .....	30
2.4 Modeliranje ukrepljenih panela pomoću konačnih traka .....	32
<b>3. BIBLIOTEKA ANALITIČKI ZADANIH PROJEKTNIH KRITERIJA - BIBLIOTEKA OGRANIČENJA .....</b>	<b>34</b>
3.1 Općenito .....	34
3.2 Popuštanje ravnih ploča .....	35
3.3 Izvijanje ravnih ploča .....	37
3.3.1 Jednoosno tlačno opterećenje konstantnog iznosa .....	38
3.3.2 Jednoliko smično naprezanje .....	46
3.3.3 Čisto savijanje u ravnini ploče (membrana) .....	47
3.3.4 Dvoosno tlačno naprezanje .....	48
3.3.5 Dvoosno tlačno naprezanje i smično naprezanje .....	51
3.4 Granična čvrstoća ravnih ploča .....	51
3.4.1 Općenito .....	51
3.4.2 Jednoosno tlačno opterećenje konstantnog iznosa .....	53
3.4.3 Jednoliko smično naprezanje .....	54
3.4.4 Dvoosno tlačno opterećenje .....	55
3.4.5 Dvoosno tlačno opterećenje i smično opterećenje .....	57
3.5 Izvijanje ukrepa .....	57
3.5.1 Sunosiva širina .....	57
3.5.2 Izvijanje stupa (vrata) ukrepe .....	58
3.5.3 Izvijanje ukrepe kao grede .....	60
3.5.4 Torzijsko-fleksijsko izvijanje .....	62
3.5.5 Plastično savijanje ukrepe .....	65
3.5.6 Stabilnost prirubnice i struka ukrepe .....	67

3.6	Uzdužno ukrepljeni paneli .....	68
3.6.1	Jednoosno tlačno naprezanje .....	69
3.6.2	Dvoosno tlačno naprezanje i smično naprezanje .....	74
3.6.3	Granično nosivo stanje uzdužno ukrepljenog panela .....	77
<b>4.</b>	<b>METODA KONAČNIH TRAKA .....</b>	<b>86</b>
4.1	Općenito .....	86
4.2	Formulacija konačne trake - metoda pomaka .....	88
4.2.1	Osnovne jednadžbe teorije elastičnosti .....	89
4.2.2	Pomaci, deformacije i naprezanja .....	90
4.2.3	Unutarnja energija deformacije i rad vanjskih sila .....	92
4.2.4	Opći izraz za matrice krutosti konačne trake .....	93
4.3	Analiza stabilnosti pomoću metode konačnih traka .....	94
4.4	Odabir funkcije oblika .....	96
4.4.1	Odabir analitičke funkcije .....	96
4.4.2	Odabir polinoma .....	100
4.5	Pravokutna konačna traka za savijanje tankih ploča s dvije čvorne linije .....	102
4.5.1	Pomaci i deformacije trake .....	103
4.5.2	Elastična matrica krutosti .....	105
4.5.3	Geometrijska matrica krutosti .....	107
4.6	Pravokutna konačna traka za analizu ravninskog stanja naprezanja s dvije čvorne linije .....	108
4.6.1	Pomaci i deformacije trake .....	108
4.6.2	Elastična matrica krutosti .....	109
4.6.3	Geometrijska matrica krutosti .....	110
4.6.4	Vrijednosti koeficijentata matrica krutosti za različite rubne uvjete .....	110
<b>5.</b>	<b>PROCEDURA PRORAČUNA PODOBNOSTI .....</b>	<b>115</b>
<b>6.</b>	<b>PRIMJERI PRIMJENE .....</b>	<b>120</b>
6.1	Primjer izvijanja ravne ploče .....	120
6.2	Usporedba linearne i nelinearne analize ukrućenog panela .....	124
6.3	Izvijanje sendvič panela .....	128
6.4	Analiza podobnosti ravnim trakama ukrućene ploče .....	132
6.4.1	Utjecaj početnog ekscentriciteta oplata i ukrepa na izvijanje .....	141
6.5	Proračun podobnosti 2D presjeka RO-RO broda .....	146
<b>7.</b>	<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>151</b>
	<b>LITERATURA .....</b>	<b>153</b>
	<b>PRILOG A .....</b>	<b>158</b>
	<b>PRILOG B .....</b>	<b>161</b>
	<b>PRILOG C .....</b>	<b>164</b>

## **PREDGOVOR**

Orebrene tankostjene konstrukcije su zbog omjera čvrstoće i težine veoma čest element u mnogim konstrukcijama. Tu prednjače zrakoplovne i brodske konstrukcije budući da je kod njih osim sigurnosti minimalna težina jedan od osnovnih projektnih kriterija. Osim toga tankostjene konstrukcije nalazimo kao sastavne dijelove mostova, željezničkih vagona, kontejnera za prijevoz tereta, tvorničkih i drugih hala itd.

Analiza podobnosti konstrukcije može se podijeliti u dva dijela: proračun odziva (zahtijeva) konstrukcije na temelju zadanog opterećenja te određivanje izdržljivosti konstrukcije.

Proračun odziva konstrukcije može se vršiti numeričkim (metoda konačnih elemenata, metoda konačnih diferencija), semi-analitičkim (metoda konačnih traka) i analitičkim metodama. Analitičke metode se koriste uglavnom u problemima s pravilnim domenama za provjeru numeričkih metoda i kod jednostavnih konstrukcija. Semi-analitičke metode se koriste za specifične tipove problema (npr. uzdužno ukrepljeni paneli, mostovi itd.) dok se numeričke metode mogu koristiti za sve tipove konstrukcija i opterećenja.

Proračun izdržljivosti može se vršiti analitički prema propisanim formulama (formule najčešće propisuju klasifikacijska društva), semi-analitički ili numerički, na primjer metodom konačnih elemenata.

Svrha ovog rada je definiranje biblioteke analitičkih i semi-analitičkih kriterija za analizu podobnosti tankostjene konstrukcije te njihova usporedba s numeričkim rezultatima za karakteristične primjere iz prakse. Tako potvrđeni kriteriji moći će se koristiti za donošenje odluka prilikom preliminarnog projektiranja konstrukcija i za analizu podobnosti gotovih konstrukcija.

U Zagrebu, srpanj 2003.

Svemir Bralić, dipl. ing.



## POPIS SLIKA

sl. 1 Idealizacija jednostavne krovne konstrukcije .....	19
sl. 2 Vizualna usporedba modeliranih materijala po presjeku .....	20
sl. 3 Neki slučajevi koji zahtijevaju finu mrežu .....	21
sl. 4 Minimalni broj konačnih elemenata po poluvalu izvijanja .....	22
sl. 5 Geometrije konačnih elemenata .....	23
sl. 6 Utjecaj načina modeliranja ukrepa na maksimalno naprezanje .....	24
sl. 7 Primjeri ispravnih i neispravnih elemenata .....	25
sl. 8 Modeliranje na granicama fizikalnih svojstava .....	26
sl. 9 Raspodjela opterećenja "čvor po čvor" .....	26
sl. 10 Raspodjela opterećenja "element po element" .....	27
sl. 11 Minimalni rubni uvjeti kod 2D modela .....	27
sl. 12 Minimalni rubni uvjeti kod 3D modela .....	28
sl. 13 Greda s krutim krajevima .....	29
sl. 14 Ukrepljeni membranski četverokutni element .....	30
sl. 15 Zrakoplov podijeljen na 6 superelemenata .....	31
sl. 16 Daljnje dijeljenje konstrukcije zrakoplova na superelemente .....	31
sl. 17 Rubni uvjeti oplata između ukrepa i jakih nosača u slučaju lokalnog izvijanja .....	32
sl. 18 Odnos naprezanja i deformacije za konstrukcijski čelik ST37 .....	36
sl. 19 Uzdužno ukrepljeni panel .....	37
sl. 20 Slobodno oslonjena ploča opterećena jednoosnim tlačnim naprezanjem .....	38
sl. 21 Ovisnost Poisson-ova broja o naprezanju .....	42
sl. 22 Faktor korekcije u plastičnom području, ST37 .....	43
sl. 23 Ovisnost koeficijenta $k_C$ za različite rubne uvjete, [19] .....	44
sl. 24 Semi-analički proračun koeficijenta $k_C$ za različite rubne uvjete .....	45
sl. 25 Ploča opterećena konstantnim smičnim naprezanjem .....	46
sl. 26 Ploča opterećena na savijanje .....	47
sl. 27 Ploča opterećena dvoosnim tlačnim naprezanjem .....	48
sl. 28 Postupni razvoj plastificiranih područja i pomicanje neutralne osi .....	51
sl. 29 Raspodjela Von Mises-ovog ekvivalentnog naprezanje pri potpunom kolapsu ploče .....	52
sl. 30 Diskretizirani model dijela orebrene tankostijene konstrukcije .....	86
sl. 31 Konačna traka u globalnom koordinatnom sustavu .....	88
sl. 32 Analitička funkcija za slučaj slobodno oslonjenih krajeva .....	97

sl. 33 Analitička funkcija za konzolu .....	98
sl. 34 Prvi kraj slobodno oslonjen, drugi ukliješten .....	99
sl. 35 Izgled analitičke funkcije za oba ukliještena kraja .....	100
sl. 36 Pravokutna konačna traka za savijanje s četiri stupnja slobode .....	103
sl. 37 Geometrijska analiza deformiranja elementa ploče pri savijanju, [26] .....	104
sl. 38 Pravokutna konačna traka (membrana) s četiri stupnja slobode.....	109
sl. 39 Organizacija programa CREST .....	115
sl. 40 MG prikaz vrijednosti faktora podobnosti.....	118
sl. 41 CREST prikaz vrijednosti faktora podobnosti.....	119
sl. 42 Druga forma izvijanja slobodno oslonjene ploče ( <i>Linear Buckling</i> ).....	121
sl. 43 T profilom ukrućena ravna ploča.....	124
sl. 44 Prva forma izvijanja uzdužno ukrepljene ravne ploče.....	126
sl. 45 Geometrijski nelinearna analiza ukrućene ploče .....	126
sl. 46 Geometrijski i materijalno nelinearna analiza ukrućene ploče .....	127
sl. 47 Ovisnost maksimalnog pomaka o opterećenju .....	128
sl. 48 Shematski prikaz sendvič panela .....	129
sl. 49 Inicijalno opterećenje modela sendvič panela (dio gornje oplata nije prikazan).....	130
sl. 50 Lokalno izvijanje sendvič panela.....	131
sl. 51 Vrijednosti koeficijenta izvijanja sendvič panela, [2].....	132
sl. 52 Shematski prikaz ravnim trakama ukrućene ploče .....	133
sl. 53 Analizirani model ukrućene ploče .....	133
sl. 54 Kolaps uslijed globalnog izvijanja - Model 3 .....	135
sl. 55 Stanje deformacije kod prestanka konvergencije - Model 8.....	136
sl. 56 Stanje deformacije kod prestanka konvergencije - Model 18.....	136
sl. 57 Ravna ploča s početnom imperfekcijom (5 poluvalova, uvećanje 10 puta) .....	141
sl. 58 Predkritično deformirano stanje ravnim trakama ukrućenog panela - Model 2 .....	142
sl. 59 Lokalni kolaps ravnim trakama ukrućenog panela - Model 2 .....	142
sl. 60 Globalni kolaps ravnim trakama ukrućenog panela - Model 2.....	143
sl. 61 Globalni kolaps ravnim trakama ukrućenog panela - Model 13.....	143
sl. 62 CREST FEM model presjeka RO-RO broda.....	146
sl. 63 Organizacija modula EPAN.....	158
sl. 64 Organizacija programa FIST.....	159

## POPIS TABLICA

<b>Tab. 1.1.</b> Udjeli težina BOEING-a 767-200 (* maksimalna vrijednost) .....	15
<b>Tab. 1.2.</b> Pregled programskih modula projektnog sustava OCTOPUS.....	17
<b>Tab. 3.1</b> Određivanje modula plastičnosti ukrepe .....	61
<b>Tab. 4.1</b> Usporedba metode konačnih traka i metode konačnih elemenata.....	87
<b>Tab. 4.2</b> Matrica krutosti na savijanje - linearni dio .....	107
<b>Tab. 4.3</b> Matrica krutosti na savijanje - nelinearni dio .....	108
<b>Tab. 4.4</b> Membranski dio matrice krutosti konačne trake - linearni dio.....	110
<b>Tab. 4.5</b> Vrijednosti integrala za razne rubne uvijete i broj poluvalova izvijanja .....	113
<b>Tab. 6.1</b> Karakteristike analiziranog modela ravne ploče.....	121
<b>Tab. 6.2</b> Usporedba rezultata za ravnu ploču - jednoosno tlačno opterećenje.....	122
<b>Tab. 6.3</b> Usporedba rezultata za ravnu ploču - dvoosno opterećenje .....	123
<b>Tab. 6.4</b> Karakteristike analiziranog modela ploče ukrućene T profilom .....	125
<b>Tab. 6.5</b> Karakteristike analiziranog modela sendvič konstrukcije .....	130
<b>Tab. 6.6</b> Rubni uvjeti analiziranog modela ravnim trakama ukrućene ploče .....	133
<b>Tab. 6.7</b> Dimenzije analiziranih MSC NASTRAN modela ravnim trakama ukrućene ploče ....	134
<b>Tab. 6.8</b> Rezultati parametarske analize modela ravnim trakama ukrućene ploče.....	137
<b>Tab. 6.8</b> Nastavak .....	138
<b>Tab. 6.9</b> Usporedba rezultata analize modela ravnim trakama ukrućene ploče.....	139
<b>Tab. 6.9</b> Nastavak .....	140
<b>Tab. 6.10</b> Usporedba rezultata analize modela ravnim trakama ukrućene ploče s početnim ekscentricitetom.....	144
<b>Tab. 6.10</b> Nastavak .....	145
<b>Tab. 6.11</b> Karakteristike uspoređivanih elemenata strukture (vojeva).....	147
<b>Tab. 6.12</b> Proračunati odziv, ulaz u biblioteku kriterija .....	148
<b>Tab. 6.13</b> Faktori podobnosti oplate između ukrepa, $\sigma_x$ ili $\sigma_y$ .....	148
<b>Tab. 6.14</b> Faktori podobnosti oplate između ukrepa, $\sigma_x$ i $\sigma_y$ .....	149
<b>Tab. 6.15</b> Faktori podobnosti za slučaj smičnog izvijanja oplate između ukrepa .....	149
<b>Tab. 6.16</b> Faktori podobnosti g za slučaj smičnog izvijanja oplate između ukrepa .....	150
<b>Tab. B.1</b> Popis kriterija za oplatu između ukrepa sadržanih u programu CREST.....	161
<b>Tab. B.2</b> Popis kriterija za uzdužno ukrepljene panele.....	162
<b>Tab. B.3</b> Popis kriterija za poprečne okvire.....	162
<b>Tab. B.4</b> Popis kriterija za ukrepe.....	163

<b>Tab. C.1</b> Dokumentacija magistarskog rada.....	164
<b>Tab. C.2</b> Korišteni standardni programski paketi.....	165

## POPIS KRATICA I OZNAKA

ABS	American Bureau of Shipping
CATIA	Program za konstruiranje pomoću računala (CAD) koji uključuje jednostavnije FEM proračune
CC	označava slučaj rubnih uvjeta kada su oba kraja upeta ( <i>Clamped-Clamped</i> )
CF	označava slučaj rubnih uvjeta kada je jedan kraj upet ( <i>Clamped</i> ), a drugi slobodan ( <i>Free</i> )
CREST	Croatian Registrar Evaluation of Structure
CRS	Croatian Register of Shipping
DNV	Det Norske Veritas
DSA	Detailed Stress Analysis
d. s. n.	dvoosno stanje naprezanja
FAR	Federal Aviation Regulations
FEM	Finite Element Method
FF	označava slučaj rubnih uvjeta kada su oba kraja slobodna ( <i>Free-Free</i> )
FIST	FInite STrip, program za analizu podobnosti metodom konačnih traka izrađen u sklopu ovoga rada
HRB	Hrvatski registar brodova
HyperSizer	Collier Research, program za detaljnu analizu i lokalnu optimalizaciju strukturnih elemenata u zrakoplovstvu
JAA	Joint Aviation Requirements
j. s. n.	jednoosno stanje naprezanja
k. s.	koordinatni sustav
MAESTRO	Proteus Engineering, Program za analizu i optimalizaciju tankostjenih konstrukcija
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NASTRAN	MSC Software, Program za analizu konstrukcija metodom konačnih elemenata
TOKV	Program za proračun odziva poprečne strukture broskog trupa
TORO	Program za proračun geometrijskih karakteristika poprečnog presjeka, uzdužne čvrstoće poprečnog presjeka i toka smičnih naprezanja po presjeku
RINA	Registro Italiano Navale

SF	označava slučaj rubnih uvjeta kada je jedan kraj slobodno oslonjen ( <i>Simply Supported</i> ), a drugi slobodan ( <i>Free</i> )
SS	označava slučaj rubnih uvjeta kada su oba kraja slobodno oslonjena ( <i>Simply Supported-Simply Supported</i> )
VAST	Martec Limited, Program za proračun čvrstoće i analizu vibracija
$A$	analitička funkcija konačne trake, površina poprečnog presjeka
$A^S$	površina poprečnog presjeka ukrepe
$A_f^S$	površina poprečnog presjeka prirubnice ukrepe
$A_p^S$	površina poprečnog presjeka oplata (definirana sunosivom širinom)
$A_w^S$	površina poprečnog presjeka struka ukrepe
$a$	duljina ploče, opterećena stranica ploče kod jednoosnog opterećenja, duljina poluvala izvijanja
$\mathbf{a}_i$	matrica koeficijenata za opisivanje pomaka čvorova konačne trake
$B$	interpolacijska funkcija (B spline)
$b$	širina ploče (dijela oplata između ukrepa), neopterećena stranica ploče kod jednoosnog opterećenja
$b_e$	efektivna širina oplata
$b_f^S$	širina prirubnice ukrepe
$C$	izdržljivost ( <i>Capability</i> )
$C_w^S$	koeficijent vitoperenja ukrepe
$c_l, c_s$	koeficijenti za korekciju kritičnog naprezanja izvijanja u plastičnom području
$\mathbf{D}$	matrica elastičnih konstanti materijala
$D$	zahtjev ( <i>Demand</i> )
$d^S$	visina struka ukrepe
$E$	modul elastičnosti materijala
$E_s$	sekantni modul elastičnosti materijala
$E_t$	tangencijalni modul elastičnosti materijala

<b>F</b>	vektor vanjskog opterećenja konačne trake u globalnom k. s.
<b>f</b>	vektor vanjskog opterećenja konačne trake u lokalnom k. s.
$F_a$	aksijalna sila koja djeluje na ukrepu
$F_0$	aksijalna sila potpune plastičnosti ukrepe
$\bar{\mathbf{F}}$	normalizirani vektor vanjskog opterećenja konačne trake u globalnom k. s.
$G$	modul smika materijala ukrepe
$g$	faktor podobnosti
$I^S$	moment inercije ukrepe sa sunosivom širinom
$I_0^S$	polarni moment inercije ukrepe (bez oplata) oko centra smika
$J^S$	torzijska konstanta ukrepe
<b>K</b>	ukupna matrica krutosti konačne trake u globalnom k. s.
<b>k</b>	matrica krutosti konačne trake
$k_C$	koeficijent izvijanja (aksijalno opterećenje)
$k_f$	koeficijent izvijanja prirubnice ukrepe
<b>K<sub>E</sub></b>	elastična matrica krutosti konačne trake u globalnom k. s.
<b>K<sub>G</sub></b>	geometrijska matrica krutosti konačne trake u globalnom k. s.
$k_S$	koeficijent izvijanja (smično opterećenje)
$\bar{\mathbf{K}}_G$	normalizirana geometrijska matrica krutosti konačne trake u g. k. s.
$l^S$	duljina ukrepe
$M$	moment savijanja
$m$	broj članova reda sadržanih u analitičkoj funkciji, broj ukrepa
$mm$	broj poluvalova izvijanja u uzdužnom smjeru ploče
$M_a$	moment savijanja kada djeluje aksijalna sila
$M_{fy}$	moment pri kojemu su prirubnice ukrepe potpuno plastificirane
$M_0$	moment pri kojemu je ukrepa potpuno plastična
$N$	funkcija oblika konačne trake
$n$	faktor oblika za krivulju $\sigma - \varepsilon$
$N_1$	funkcija oblika konačne trake bez analitičkog dijela
$NE$	broj konačnih elemenata (traka) u modelu
$nn$	broj poluvalova izvijanja u poprečnom smjeru ploče

$NP$	broj čvorova u modelu
$n_s$	broj ukrepa
$P$	polinom konačne trake
$\mathbf{q}, \mathbf{q}$	vektor vanjskog opterećenja, kontinuirano opterećenje
$q_u$	granično kontinuirano opterećenje
$R$	omjer tlačnog naprezanja
$r$	polumjer inercije ukrepe
$SF$	faktor sigurnosti ( <i>Safety Factor</i> )
$SM$	faktor za izračun momenta plastičnosti ukrepe
$T$	vrijeme računanja
$t$	debljina ploče, debljina konačne trake, debljina oplata
$t_c$	debljina ukrepljenja sendvič panela
$t_f^S$	debljina prirubnice ukrepe
$t_s$	debljina oplata između ukrepa
$t_w^S$	debljina struka ukrepe
$U$	unutarnja energija deformacije kontinuuma
$V$	volumen kontinuuma
$\mathbf{U}$	vektor pomaka čvorova u globalnom koordinatnom sustavu,
$\mathbf{u}$	vektor pomaka čvorova konačne trake
$u, w, w$	pomaci čvorova konačne trake u smjeru koordinatnih osi $x, y, z$
$x, y, z$	pravokutne koordinate
$\mathbf{0}$	nul vektor
$\alpha$	omjer stranica ploče
$\beta$	vitkost ploče
$\delta, \delta$	vektor pomaka čvorova konačne trake, faktor opterećenja
$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}$	vektor relativnih deformacija, relativna deformacija, faktor iskoristivosti
$\boldsymbol{\varepsilon}^L$	linearni dio vektora relativnih deformacija
$\boldsymbol{\varepsilon}^N$	nelinearni dio vektora relativnih deformacija



$\Delta$	polje pomaka konačne trake, ekscentricitet
$\eta$	faktor korekcije kritičnog naprezanja izvijanja u plastičnom području
$\nu$	Poisson-ov omjer
$\nu_{el}$	Poisson-ov omjer u elastičnom području
$\nu_{pl}$	Poisson-ov omjer u plastičnom području
$\sigma, \sigma$	tenzor naprezanja, naprezanje
$\sigma_{x,cr}$	kritično naprezanje izvijanja u $x$ smjeru
$\sigma_{y,cr}$	kritično naprezanje izvijanja u $y$ smjeru
$\sigma_{xu}$	granično naprezanje izvijanja u $x$ smjeru kod dvoosnog stanja naprezanja
$\sigma_{yu}$	granično naprezanje izvijanja u $y$ smjeru kod dvoosnog stanja naprezanja
$\sigma_{x,ul}$	granično naprezanje izvijanja u $x$ smjeru
$\sigma_{y,ul}$	granično naprezanje izvijanja u $y$ smjeru
$\sigma_{cr,pl}$	kritično naprezanje izvijanja u plastičnom područje
$\sigma_{ct}$	kritično naprezanje izvijanja ukrepe
$\sigma_0$	granica popuštanja materijala
$\sigma_{0.7}$	naprezanje kod kojega je modul elastičnosti $0.7 E$
$\sigma_{0.85}$	naprezanje kod kojega je modul elastičnosti $0.85 E$
$\sigma_p$	granica proporcionalnosti materijala
$\sigma_{ul}$	granično normalno naprezanje
$\Pi$	ukupna potencijalna energija
$\tau$	tangencijalno naprezanje
$\tau_{cr}$	kritično tangencijalno (smično) naprezanje izvijanja
$\tau_{ul}$	granično tangencijalno (smično) naprezanje izvijanja

## SAŽETAK

Postupci projektiranja i optimalizacije novih te provjere već postojećih orebrenih tankostjenih konstrukcija zapravo podrazumijevaju analizu njene podobnosti. Tri su osnovna načina na koje se može dobiti uvid u podobnost konstrukcije; provjerom pojedinih dijelova analitičkim formulama, eksperimentalnim putem (analizom prototipa ili mjerenjem na realnoj konstrukciji) ili proračunom numeričkim metodama (najčešće metodom konačnih elemenata). Analitičke formule karakteriziraju značajna pojednostavljenja, eksperimentalnu provjeru vrlo često nije moguće izvesti, dok proračun metodom konačnih elemenata u nekim slučajevima predugo traje pa sa stanovišta preliminarnog projektiranja i optimalizacije nije prihvatljiv. Kao kompromisno rješenje razvijena je metoda konačnih traka (semi-analitički pristup) koja kombinira prednosti metode konačnih elemenata, a preddefiniranim analitičkim funkcijama smanjuje dimenzionalnost problema. Matrice sustava postaju znatno manje, a vrijeme računanja višestruko se skraćuje. Rješenja koja se tako dobiju prihvatljiva su za preliminarno projektiranje.

Kako bi se obuhvatio cijeli postupak analize podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije, obrađena je procedura modeliranja konstrukcije metodom konačnih elemenata, makroelemenata i konačnih traka sa stanovišta analize podobnosti. Dan je pregled dostupnih analitičkih kriterija za analizu podobnosti iz područja zrakoplovstva i brodogradnje. Oni su objedinjeni u biblioteku ograničenja (Modul EPAN) koja je dopunjena i testirana u sklopu ovoga rada. Detaljno je izvedena konačna traka za analizu izvijanja koja je zatim isprogramirana kao zasebni modul (FIST).

Izvršena je usporedba pojedinih metoda na jednostavnim primjerima ravne ploče za slučaj jednoosnog i dvoosnog tlačnog opterećenja i svih kombinacija rubnih uvjeta kako bi se pokazala njihova ispravnost. Na primjeru T profilima ukrućene ravne ploče prikazana je usporedba linearne i nelinearne analize konstrukcije metodom konačnih elemenata. Usporedbom rezultata bifurkacijske analize izvijanja i proračuna metodom konačnih traka na primjeru sendvič panela prikazana je njena točnost kod složenih konstrukcija. Parametarskom studijom ravnim trakama ukrućene ploče dana je usporedba svih obrađenih metoda. Na zadnjem primjeru prikazana je procedura analize podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije na 2D presjeku Ro-Ro broda pomoću programa CREST.

## **SUMMARY**

Procedures of design and optimisation of thin wall structure are based on analysis of its adequacy feasibility. There are three main algorithms for checking structure feasibility; by checking parts of structure using analytical formulae, utilizing numerical methods (mostly FEM) or by experiment (performing measures on prototype or real structure). Analytical formulae are characterized by significant simplifications; experiments are often not possible, numerical procedures are time consuming and from preliminary design and optimisation point of view are not acceptable. As a compromise, in early 1970s Finite Strip Method which combines advantages of FEM and utilizing predefined analytical functions reduces dimensionality of problem (semi-analytical approach) was developed. Such composed systems of linear algebraic equations are smaller and less time consuming. Obtained results are acceptable for preliminary design.

In order to describe whole process of adequacy analysis of stiffened thin wall structure, procedure of modelling using finite elements, macro elements and finite strips are briefly discussed. An overview of analytical formulae for adequacy analysis of aircraft and ship thin wall structure is given. They are combined into library of criteria (Module EPAN) which is expanded and tested in this work. As alternative to FEM and analytical formulae Finite Strip Method for stability analysis is developed. It is coded into FIST module.

In order to show accuracy of described methods flat plate subjected to uniaxial and biaxial stresses for different boundary conditions is analysed. T stiffened panel is used to compare linear buckling and nonlinear static FEM analysis. One sandwich panel is also analysed by both finite elements and finite strips as an example of complex thin wall structure. Finally, parametric study of flat bar stiffened panel is performed by finite elements, finite strips and corresponding analytical formulae. Four strake panels of Ro-Ro ship 2D section is analysed by CRS CREST software (which includes modules EPAN and FIST).

## **KLJUČNE RIJEČI**

Tankostjena konstrukcija, semi-analitički pristup, konačni elementi, konačne trake, ukrepljeni paneli, faktori podobnosti, faktori sigurnosti, inicijalna imperfekcija

## **KEY WORDS**

Thin walled structures, semi-analytical approach, finite elements, finite strips, stiffened panels, adequacy parameters, safety factors, initial imperfections

## 1. UVOD

Živeći u materijalnom svijetu čovjek je da bi opstao još od davnina bio prisiljen konstruirati. U početku su to bili primitivni alati u obliku noževa, sjekira, zatim kotač, parni stroj da bi danas bili svjedoci postojanja svemirskih letjelica koje mu omogućuju da opstane u za njega neprirodnom okolišu. Stvarajući kroz povijest čovjeku je njegova vlastita sigurnost bila iznad svega. Svjesni nemogućnosti da točno predvide ponašanje svojih konstrukcija inženjeri su ih gradili s velikim faktorima sigurnosti, ili jednostavno rečeno ugrađivali su u konstrukcije mnogo veće količine materijala nego što je to zaista bilo potrebno. Nerijetko su to činili pogrešno što bi za rezultat imalo manju sigurnost od predviđene. Nove tehnologije koje su se pojavile početkom sedamdesetih, a tu se poglavito misli na širu primjenu računala, omogućile su inženjerima da uz pomoć već poznatih metoda, dotada neprimjenjivih u praksi, dođu do rješenja složenih problema. Novi način života, sve veći broj ljudi na Zemlji, sve manje zalihe prirodnih izvora vode i energije, poremećena prirodna ravnoteža, definirali su i osnovne smjernice moderne konstrukcije. Ona mora biti:

- optimalna s obzirom na dane zahtjeve i
- ekološki prihvatljiva.

Pod pojmom analize podobnosti podrazumijevamo analitički, semi-analitički, numerički ili eksperimentalni postupak koji omogućuje simuliranje ponašanja nove ili provjeru sigurnosti postojeće konstrukcije u za nju predviđenim radnim uvjetima. Zadaća analize podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije je:

- definirati postupak za generiranje matematičkog modela konstrukcije,
- proračunati odziv same konstrukcije za dana opterećenja,
- proračunati dopuštene vrijednosti odziva za pojedine kriterije sigurnosti,
- usporedbom stvarnog odziva i dopuštenih vrijednosti izraziti sigurnost konstrukcije pomoću mjere sigurnosti (faktori sigurnosti, normalizirani faktori sigurnosti i sl.).

Okosnica magisterija je analiza izvijanja orebrene tankostjene konstrukcije kao najvažnijeg kriterija za provjeru podobnosti (sigurnosti) tankostjene konstrukcije. U radu su obrađeni analitički postupci za proračun dopuštenih vrijednosti (naprezanja, pomaka...) i formulirana je

metoda konačnih traka koja se koristiti za analizu podobnosti ploča i uzdužno ukrepljenih panela. Osim toga opisan je postupak modeliranja konstrukcije metodom konačnih elemenata, makroelemenata i superelemenata.

Osnovna hipoteza ovoga rada je da u preliminarnom projektiranju tankostijene konstrukcije analitički i semi-analitički kriteriji za analizu podobnosti mogu uvelike pomoći u određivanju kvalitetnih početnih dimenzija konstrukcije koje se u daljnjim fazama projektiranja neće suštinski mijenjati. Pri tome su te dvije metode ranga točnosti kao i metoda konačnih elemenata, a znatno su brže i jeftinije. Iz te činjenice proizlazi mogućnost njihove ugradnje u programe za optimalizaciju konstrukcija kod kojih je brzina izvođenja ključni faktor (mogućnost simuliranja većeg broja projekata u jedinici vremena).

Tankostijena konstrukcija je jedan od osnovnih strukturnih elemenata u zrakoplovstvu i brodogradnji. Kako se radi o transportnim sredstvima, masa je važan parametar jer direktno utječe na nosivost samog zrakoplova odnosno broda, njegovu potrošnju goriva, a time i na njegovu ekonomsku isplativost. Ilustracije radi, u Tab. 1.1 je prikazan odnos težina kod BOEING-a 767-200 koji zorno prikazuje značaj uštede na masi konstrukcije [1], str. 599.

**Tab. 1.1.** Udjeli težina BOEING-a 767-200 (\* maksimalna vrijednost)

	masa [kg]		postotak ukupne mase [%]	
Maksimalna masa pri polijetanju	136080		100	
Masa praznog zrakoplova	74750		54.93	
Masa goriva	*51130	41735	*37.57	30.67
Nosivost	10200	*19595	7.50	*14.4

U želji da se postigne što je moguće lakša konstrukcija, posebno u zrakoplovnoj industriji, elementi konstrukcije izrađuju se minimalnih dopuštenih dimenzija. Tako izrađene elemente treba provjeriti na izvijanje, popuštanje i ostale pojave koje ukoliko nisu kontrolirane mogu uzrokovati kolaps cjelokupne konstrukcije. U tom smislu analiza podobnosti dolazi do izražaja već u početnoj fazi definiranja konstrukcije.

Proces preliminarnog konstruiranja obično započinje s već postojećim modelom. Na takav model unose se željene izmjene i započinje postupak generiranja nove konstrukcije. Pri tome je važno od samog početka imati uvid u podobnost pojedinih novonastalih elemenata. U tome nam koristi

biblioteka ograničenja sigurnosti (biblioteka kriterija). Ona sadrži rutine za proračun kritičnih naprezanja izvijanja, popuštanja, odnosa dimenzija i dopuštenih progiba pojedinih elemenata za različite slučajeve opterećenja, npr. jednoosno tlačno opterećenje, savijanje itd. Ograničenja su proizišla iz analitičkih, eksperimentalnih i ostalih istraživanja pojedinih tipova elemenata strukture. Neka od njih su dana propisima (npr. JAR, FAR u zrakoplovstvu, HRB, ABS, DNV, RINA u brodogradnji). Postupak optimiranja konstrukcije također se svodi na višestruko provjeravanje podobnosti elemenata strukture koji se mijenjaju u procesu optimiranja da bi se što više približili ciljanoj konstrukciji.

Sam rad je koncipiran u tri dijela. Prvi dio (poglavlje 1 i 2) pored samog uvoda obrađuje i metodologiju modeliranja tankostjene konstrukcije metodom konačnih elemenata, makroelemenata i superelemenata. U drugom dijelu (poglavlje 3) je dana biblioteka analitičkih kriterija (biblioteka ograničenja) za proračun podobnosti. Također je formulirana i izvedena konačna traka (poglavlje 4) zasnovana na semi-analitičkom pristupu kao alternativa analitičkim formulama i metodi konačnih elemenata u proračunu kritičnog naprezanja izvijanja orebrene tankostjene konstrukcije. Točnost i primjenjivost pojedinih metoda i kriterija je dana u trećem dijelu (poglavlja 5 i 6). Tu se pokušalo međusobno usporediti analitički, semi-analitički i numerički dobivene vrijednosti kritičnih naprezanja izvijanja za karakteristične primjere orebrene tankostjene konstrukcije. Elementi strukture su modelirani konačnim trakama (FIST), [2], [3] i običnim konačnim elementima (NASTRAN), [4], [5]. Za prikaz procedure određivanja podobnosti elemenata na konkretnom primjeru korišteno je okruženje programa CREST, [6].

Biblioteka kriterija kao i metoda konačnih traka se u ovom radu zasnivaju na pretpostavkama izotropnog materijala koji se podvrgava Hooke-ovu zakonu te se generalno ne mogu primjenjivati na ostale tipove materijala.

Ovaj magistarski rad dio je projektnog sustava OCTOPUS čije su osnove dane su u radu [7], a koji se bavi projektiranjem na osnovi pouzdanosti putem paralelnog procesiranja. Daljnja razradba za jednoprosorska računala izvedena je u suradnji FSB-a i Brodarskog instituta, [8] odnosno FSB-a i Hrvatskog registra brodova, [9], [10]. U tijeku je daljnji intenzivni razvoj sustava kroz niz koordiniranih magisterija i doktorata na FSB-u.

Tab. 1.2. Pregled programskih modula projektnog sustava OCTOPUS

Projektni sustav OCTOPUS		
Nivo	Programi i programske ljsuke	Modul
7	Interaktivna ljsuka za subjektivno odlučivanje u metričkom prostoru	SYNCHRO DEMAK-S
6	Ljsuka za automatizirano odlučivanje (optimalizaciju)	PARALLEL
	(a) Program za adaptivno generiranje projekata u afinom prostoru - lokalna/globalna optimalizacija	DEMAK-G
	(b) Program za globalnu optimalnu redistribuciju uzdužnog materijala u poprečnom presjeku	CALMOP
	(c) Program za koordinaciju lokalne i globalne optimalizacije	GAZ
5	Ljsuka za određivanje statusa projektnih kriterija (projektna ograničenja i atributi), eliminaciju nepodobnih projekata i rješavanje konfliktnih situacija	CRITER
4	Programi i ljsuke za proračun vrijednosti projektnih kriterija	
	(a) Proračun minimalnih dimenzija po Pravilima CRS	CRMIND
	(b) Program za proračun cijene i težine strukture	US0
	(c) Program za nelinearni proračun kolapsne izdržljivosti strukture	US1
	(d) Program za deterministički proračun strukturne sigurnosti	US2**
	(e) Ljsuka za AFOSM proračun pouzdanosti strukture i strukturnih elemenata	US3
	(f) Program za proračun unutarnje raspodjele energije	(US4)
3	Biblioteke projektnih kriterija podobnosti	
	(a) Biblioteka kriterija granične nosivosti	EPAN1*
	(b) Biblioteka kriterija granične uporabljivosti	EPAN2*
	(c) Biblioteka kriterija po Pravilima CRS	EPAN3*
	(d) Biblioteka tehnološko/proizvodnih ograničenja	ETEH
2	Programi za proračun odziva (deformacija i naprezanja) na 2-D FE modelima	
	(a) Program za proračun odziva uzdužnih elemenata poprečnog presjeka putem proširene teorije grede- UZDUŽNA I TORZIJSKA ČVRSTOĆA	LTOR**
	(b) Program za proračun odziva poprečne strukture - POPREČNA ČVRSTOĆA	TOKV**
	(c) Program za proračun odziva u superelementima – PODSTRUKTURE	(SUPEL)
	(d) Program za proračun 2-D struktura pod djelovanjem tlaka – PREGRADE	TROS
	(e) Program za proračun uzdužne čvrstoće broda	FIN
1	Ljsuka za definiranje projektnih kombinacija opterećenja	
	(a) Proračun opterećenja na osnovi proračuna pomorstvenosti	DLOADS
	(b) Eksplicitno zadavanje komponenti opterećenja	EXLOAD**
	(c) Proračun komponenti opterećenja po Pravilima CRS	CRLOAD**
0	Interaktivna ljsuka za (re)modeliranje strukture i vizualizaciju rezultata	CRINDAT ** /MM, MG

\* doprinos magisterija, \*\* korišteni moduli

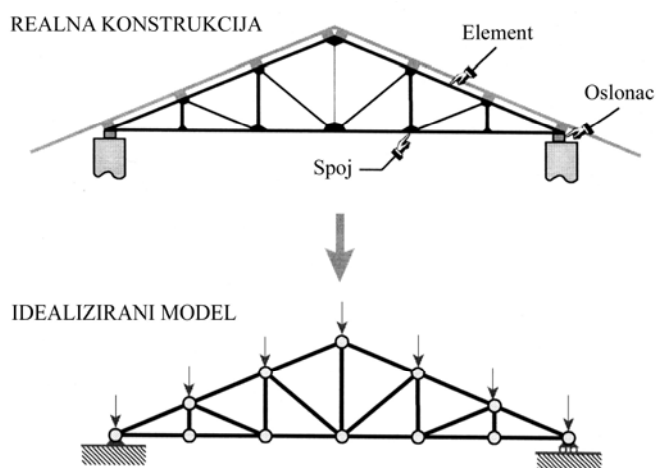


Programski sustav OCTOPUS strukturiran je kroz 8 proračunskih razina (nivoa) i odgovarajućih modula (programa i ljsaka), Tab. 1.2, [11]. Programi nulte, prve i sedme razine se koriste u interaktivnom radu dok se ostali izvršavaju automatski. Prikaz je dan počevši od najviše interaktivne ljske (nivo 7) prema nižem nivou modeliranja (nivoi 0 i 1) prateći projektni proces. Moduli višeg nivoa objedinjuju module nižeg nivoa kroz odabir i prijenos podataka. Svaka niže numerirana razina generira podatke za module više razine, temeljene na parametrima koji definiraju projektni zadatak. Iznimku čine samo moduli 2 razine koji podatke dobivaju od rješenja (novih projekata) dobivenih na 6-toj razini koji su ažurirani u modulima 0-te razine.

U ovom radu obrađuju se ključni moduli 3 razine (podobnost) koja za ulaz uzima odziv 2 razine i direktna opterećenja 1 razine. Podobnosni model 3 razine istovremeno je najviša faza analize konstrukcije (razina 0-3) ali ujedno generira niz strukturnih ograničenja, sigurnosti konstrukcije (izdržljivost > projektna opterećenja) koja su osnova racionalne projektne procedure. Ona ograničavaju dimenzije konstrukcije kod generiranja konstrukcije npr. minimalne težine na razinama 4-7. U Tab. 1.2 doprinos magisterija je označen s \* dok su korišteni analitički moduli kao i moduli za projektiranje u kojima se koristi biblioteka kriterija označeni s \*\*.

## 2. METODOLOGIJA MODELIRANJA

Općenito, modeliranje možemo definirati kao idealizaciju realne konstrukcije po unaprijed definiranim pravilima kako bi se stvorio matematički model koji je prikladan za određenu svrhu. Cilj modeliranja je postići takav matematički model koji će, ukoliko se podvrgne istim uvjetima kao stvarna konstrukcija, imati odziv koji odgovara onome kod realne konstrukcije. Budući da je to moguće postići samo kod jednostavnih modela, u većini slučajeva pribjegava se ekvivalentnom modeliranju. Usprkos nemogućnosti egzaktnog modeliranja, dobiveni odziv konstrukcije se najčešće ne razlikuje značajno od stvarnog. Da bi što vjernije opisali stvarni problem, neki od programa za modeliranje specijalizirali su se za pojedine tipove konstrukcija. Tako imamo programe specijalizirane za zrakoplovne konstrukcije (HyperSizer), brodove i *off-shore* konstrukcije (MAESTRO) itd. Neki proizvođači programa imaju posebne module koji su prilagođeni modeliranju pojedinih tipova konstrukcija (MSC NASTRAN/PATRAN modul za aeroelastičnost). Primjer idealizacije konstrukcije dan je na sl. 1, [12], str. 1-12.



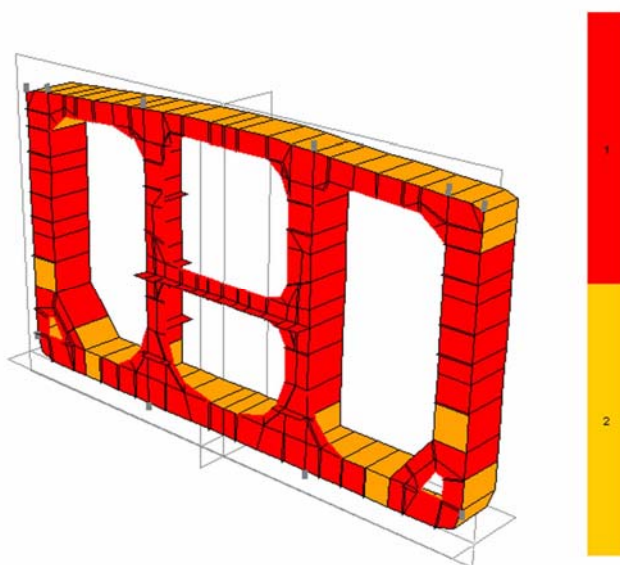
sl. 1 Idealizacija jednostavne krovne konstrukcije

Bez obzira modelira li se konstrukcija konačnim elementima, makroelementima ili superelementima, proces modeliranja se može podijeliti u četiri faze:

- analiza opterećenja, rasporeda materijala i elemenata konstrukcije,
- definiranje mreže elemenata (geometrija i topologija),
- zadavanje svojstava elemenata, generiranje modela i
- zadavanje opterećenja i rubnih uvjeta, kontrolni proračun odziva (pomaci).

Prve dvije faze su najvažnije u procesu modeliranja. Naime, pogreška napravljena u tim fazama gotovo uvijek znači vraćanje na početak. Obično se provode na nacrtima konstrukcije. Prilikom te faze potrebno je predvidjeti kakav će biti odziv konstrukcije te sukladno tome locirati kritična mjesta s obzirom na geometriju konstrukcije, zadano opterećenje i rubne uvjete. Na temelju tih zaključaka odabire se gustoća mreže na pojedinim mjestima i definiraju globalni čvorovi na konstrukciji. Da bi se smanjile ljudske pogreške preporučuje se da cijeli proces generiranja matematičkog modela izvodi dvoje ili više ljudi ovisno o složenosti same konstrukcije.

Treća faza modeliranja konstrukcije može se organizirati tako da se najprije definiraju svojstva svih elemenata koji se pojavljuju u konstrukciji te pristupi generiranju modela ili da se svojstva elemenata generiraju kada se pojavi potreba za njima. Nakon što se završi generiranje modela preporučuje se provjera ispravnosti modela prije nego se započne sa zadavanjem rubnih uvjeta. To podrazumijeva provjeru materijala (sl. 2) modela, debljina itd.



sl. 2 Vizualna usporedba modeliranih materijala po presjeku

Zadavanje opterećenja i rubnih uvjeta je posljednja faza u procesu definiranja matematičkog modela konstrukcije. Odziv konstrukcije uvelike ovisi o tome kako su zadani rubni uvjeti (npr. kritično naprezanje izvijanja bitno se razlikuje za različite rubne uvjete). Posebnu je pažnju potrebno posvetiti zadovoljavanju rubnih uvjeta i to poglavito ukoliko se radi kraćeg vremena računanja generiralo djelomičan model. Tu se prvenstveno misli na korištenje simetrije kod jednoosno, dvoosno ili osno-simetričnih konstrukcija. Korištenje simetrije potrebno je

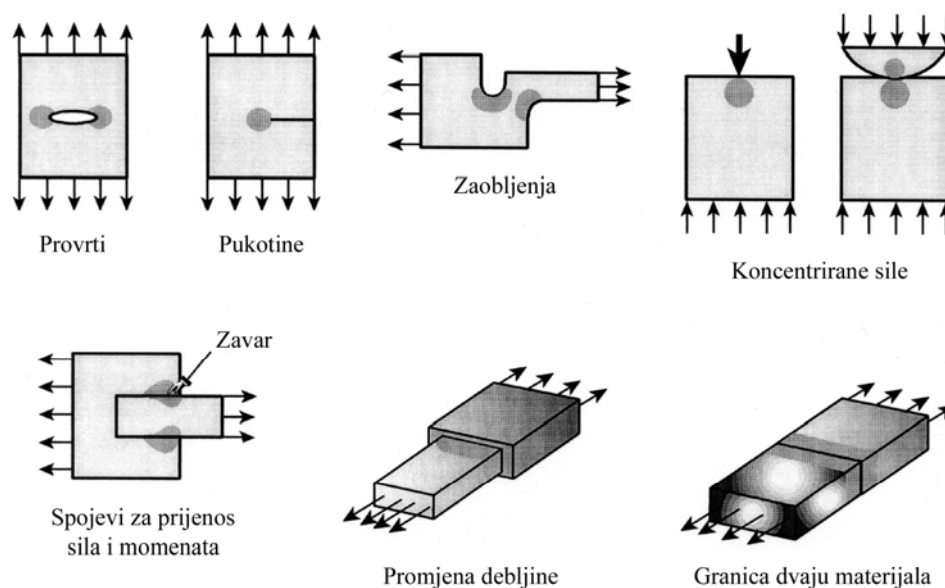
izbjegavati kod analize izvijanja i vibracija jer i **simetrične konstrukcije imaju nesimetrične forme izvijanja koje se ne mogu adekvatno opisati s reduciranim modelima.**

## 2.1 Modeliranje konstrukcije metodom konačnih elemenata

Konačni elementi su dijelovi kontinuuma konačnih dimenzija koji se koriste za modeliranje konstrukcija. Ponašanje kontinuuma unutar konačnog elementa definirano je parametrima zdanim samog elementa. Zbog širokog raspona problema koji se javljaju u praksi izvedeni su i različiti tipovi konačnih elemenata. Njihovim kombiniranjem možemo modelirati razne postojeće konstrukcije. Problem nastaje kada je veličina tako kreiranog matematičkog modela prevelika pa nismo u mogućnosti s raspoloživim računalnim resursima u realnom vremenu proračunati odziv konstrukcije.

Prilikom kreiranja modela konstrukcije metodom konačnih elemenata potrebno je voditi računa o sljedećem:

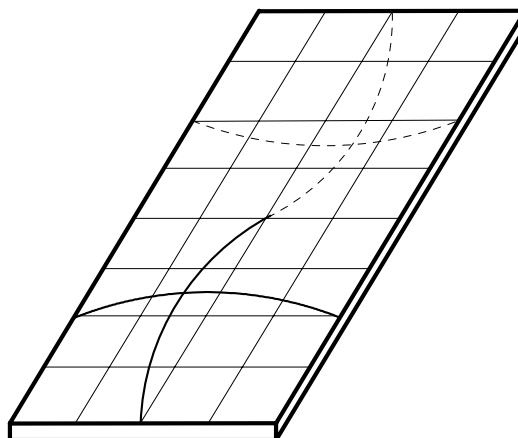
- gustoći mreže s obzirom na opterećenje i geometriju i fizikalna svojstva konstrukcije,
- tipu i formulaciji elemenata koji se primjenjuju i
- geometriji elemenata (npr. odnosi stanica trokutastog elementa).



sl. 3 Neki slučajevi koji zahtijevaju finu mrežu

Pod pojmom gustoće mreže podrazumijevamo veličinu i broj elemenata koji opisuju neki dio konstrukcije. Tako je potrebno povećati gustoću elemenata na mjestima velikih gradjenata naprezanja, opterećenja, skokovitih promjena debljine, spojevima materijala različitih karakteristika itd. Na sl. 3 prikazane su karakteristična mjesta koja zahtijevaju finu mrežu, [12].

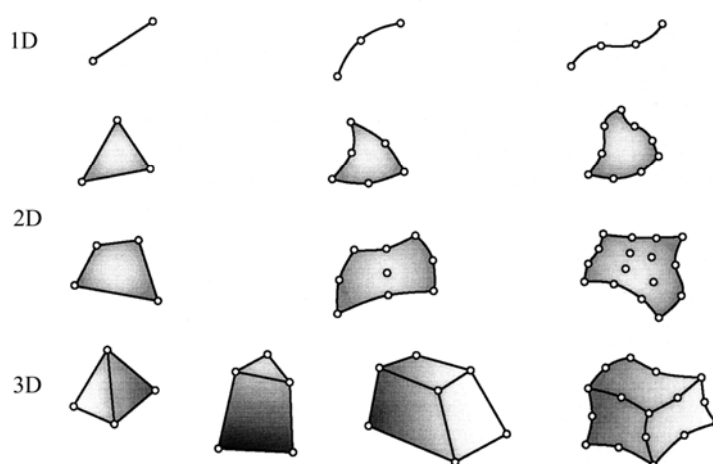
Ukoliko se modelira konstrukcija kod koje se želi analizirati njeno ponašanje u kritičnom i postkritičnom području (izvijanje konstrukcije), potrebno je pažljivo odabrati broj elemenata da bi se mogle opisati sve forme izvijanja kod globalnih i lokalnih modova. Za uspješno opisivanje forme izvijanja preporučuje se minimalno 4 konačna elementa po poluvalu izvijanja, [12]. Kada se u analizi osim geometrijske koristi i materijalna nelinearnost potrebno je dodatno povećati gustoću mreže kako bi se što bolje opisale zone plastifikacije.



sl. 4 Minimalni broj konačnih elemenata po poluvalu izvijanja

Tip elemenata koji se primjenjuje definiran je samom prirodom problema. Tu se prvenstveno misli na geometriju konačnih elemenata pa se tako rešetkaste konstrukcije modeliraju štapnim odnosno grednim elementima, pločaste dvodimenzijских trokutastim ili četverokutnim elementima, ljuskaste konstrukcije raznim tipovima ljuskastih elemenata te puna tijela trodimenzijским tetraedrima, pentaedrima, heksaedrima itd. Na sl. 5 prikazane su različite geometrije konačnih elemenata.

Općenito, rešetkaste konstrukcije se modeliraju jednodimenzijским elementima. Ovisno o vrsti spoja pojedinih elemenata rešetke, tj. stupnjevima slobode koji se mogu prenijeti na mjestima spoja, mogu se modelirati štapnim elementima (prihvaća samo uzdužnu silu i moment torzije) te grednim elementima (prenose svih 6 stupnjeva slobode u čvoru).

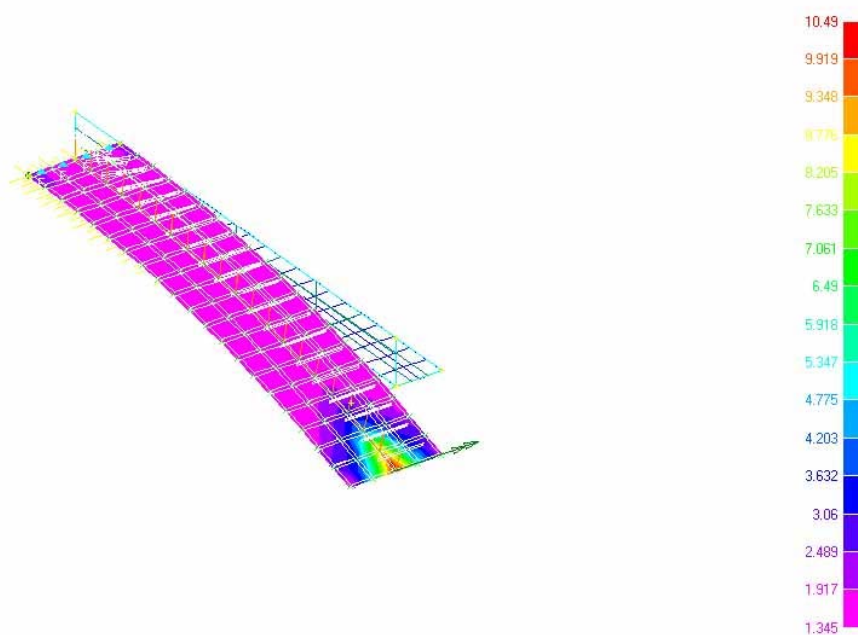


sl. 5 Geometrije konačnih elemenata

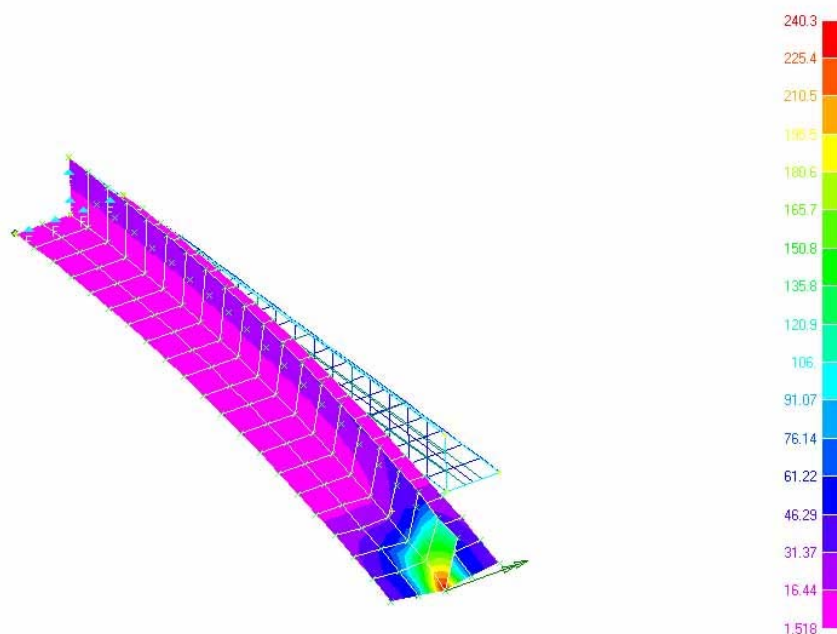
Pločaste konstrukcije se modeliraju dvodimenzijskim konačnim elementima. To su uglavnom trokutasti i četverokutni elementi. Sa stajališta podobnosti preporučuje se modeliranje četverokutnim elementima. Trokutasti elementi se koriste samo tamo gdje je to nužno za fino opisivanje geometrije konstrukcije (lukovi, zaobljenja itd.).

Ljuskaste se konstrukcije modeliraju zakrivljenim konačnim elementima koji mogu biti izvedeni primjenom klasične teorije ljosaka ili degeneriranjem trodimenzijskih elemenata, [13]. Isto tako ljuskaste se konstrukcije često modeliraju finom mrežom ravnih elemenata. Osim toga kod dvodimenzijskih elemenata pažnju treba obratiti na formulaciju elementa što podrazumijeva prikladnost elementa za opisivanje ponašanja same konstrukcije (npr. mogućnost opisivanja velikih pomaka, konačnih rotacija itd.). Tako se za analizu debelih ploča moraju koristiti elementi zasnovani na Reissner-Mindlin-ovoj formulaciji, a ne oni zasnovani na Kirchoff-ovoj teoriji tankih ploča, [4].

Kod modeliranja orebrenih tankostjenih konstrukcija metodom konačnih elemenata posebnu je pažnju potrebno obratiti modeliranju samog ukrepljenja. Ukoliko se ukrepe modeliraju pločastim elementima nastaje konstrukcija koja je generalno znatno kruća od realne. To posebno dolazi do izražaja na mjestima zadavanja opterećenja (koncentrirane sile ili momenti) gdje se javljaju naprezanja koja su red veličine veća od stvarnih. Naime, pločasti element ima pet stupnjeva slobode te ne može prenijeti rotaciju u ravnini ploče (K6ROT).



a) pomoću ekscentričnog grednog elementa



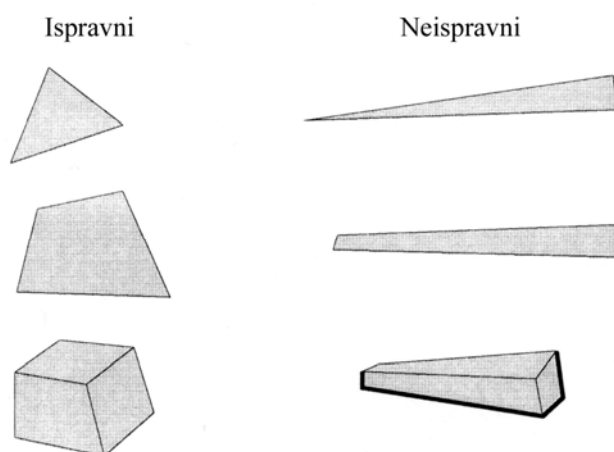
b) pomoću pločastih elemenata

sl. 6 Utjecaj načina modeliranja ukrepa na maksimalno naprezanje

Na sl. 6 je prikazana raspodjela Von Mises-ovog naprezanje u konzoli opterećenoj momentom savijanja koja ima ukrućenje modelirano pomoću ekscentrične grede (a) odnosno u slučaju kada je ukrepljenje modelirano pomoću elementa ploče (b). Sam model generiran je pomoću FEM programa *MSC NASTRAN for Windows*. Vidljivo je da je maksimalno naprezanje u drugom slučaju preko 20 puta veće od onoga u prvom. Razlog tome leži u činjenici da na vrhu konzole

gdje je zadan moment koji zakreće konzolu u ravnini njenog ukrepljenja, konačni element koji modelira ukrepu ne može prenijeti tu rotaciju. Stoga se ona prenosi na elemente u oplati pa imamo koncentraciju naprezanja. Ono što je važno naglasiti je činjenica da se naprezanje izjednači sa stvarnim na udaljenosti koja je približno 20% duljine konzole. Kao zaključak može se reći da je ukrepljenje poželjno modelirati s grednim elementima osim u slučajevima kada se zahtijeva detaljna analiza naprezanja. Osim toga tako modelirana konstrukcija ima manje stupnjeva slobode što povoljno utječe na njene proračunske sposobnosti.

Za modeliranje trodimenzijskih konstrukcija koje ne spadaju u tankostjene (npr. motori s unutarnjim izgaranjem i sl.) koriste se trodimenzijski konačni elementi (tetraedri, heksaedri itd.). Tu se također preporučuje upotreba heksaedara pred tetraedrima. Vrijednosti naprezanja kod tetraedara mogu biti pogrešne čak i u slučajevima kada su deformacije konstrukcije ispravne.

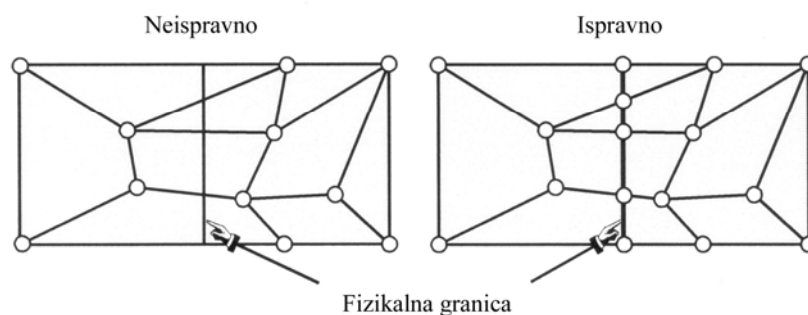


sl. 7 Primjeri ispravnih i neispravnih elemenata

Kod modeliranja dvodimenzijskih i trodimenzijskih problema treba izbjegavati elemente velike vitkosti. Vitkost je definirana kao odnos najdulje i najkraće stranice elementa. Tako se elementi čija vitkost prelazi 3 moraju koristiti s posebni oprezom, a oni kod kojih vitkost prelazi 10 samo u iznimnim slučajevima. Maksimalna vitkost konačnog elementa često je propisana (JAR, FAR, HRB, RINA itd.), a većina komercijalnih programskih paketa također ne dopušta upotrebu vitkih elemenata (NASTRAN, CATIA itd.). Usporedba ispravnih i neispravnih (vitkih) elemenata dana je na sl. 7.

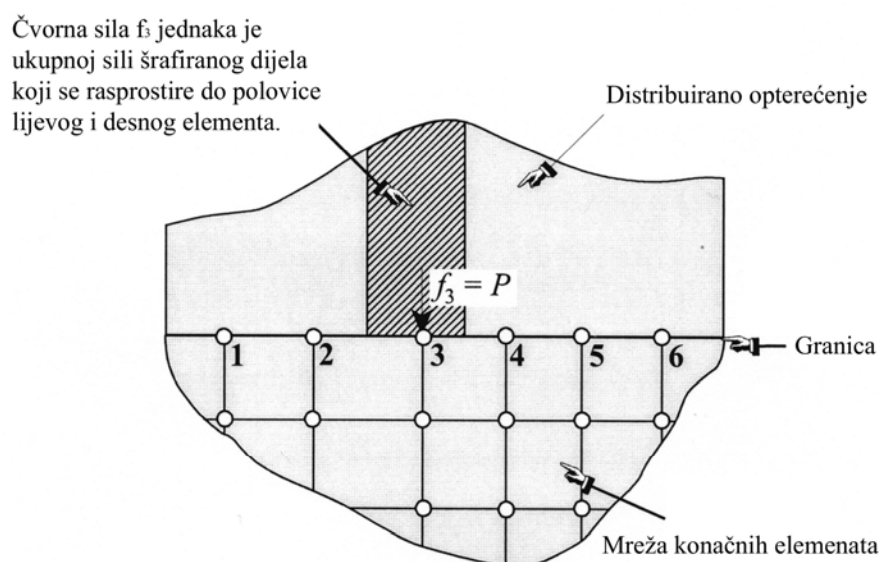


Prilikom modeliranja dvodimenzijskih i trodimenzijskih konstrukcija potrebno je voditi računa i o granicama fizikalnih svojstava, sl. 8. Tako se npr. ne smije dogoditi da se neki element rasprostire na granici dvaju različitih materijala, ili dviju debljina.



sl. 8 Modeliranje na granicama fizikalnih svojstava

Posljednja radnja u procesu modeliranja konstrukcije je zadavanje opterećenja i rubnih uvjeta. U praksi najčešći slučaj opterećenja je kontinuirano, dok su koncentrirane sile i momenti rjeđi. Bez obzira na oblik opterećenja u metodi konačnih elemenata ona moraju biti pretvorena u sile odnosno momente u čvorovima koji proizvode isti rad kao i kontinuirano opterećenje.

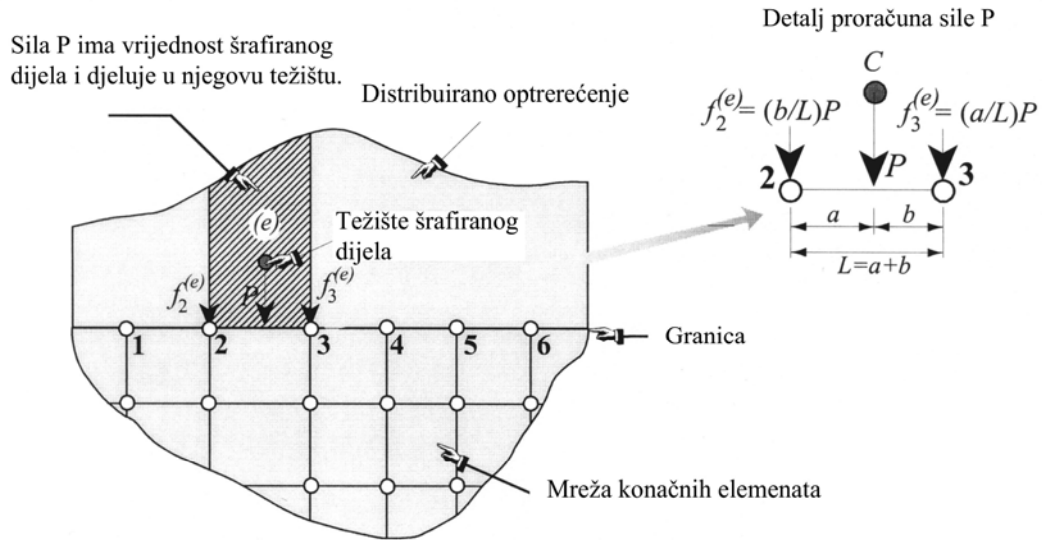


sl. 9 Raspodjela opterećenja "čvor po čvor"

Razlikujemo dva načina pretvaranja kontinuiranih opterećenja u čvorne sile:

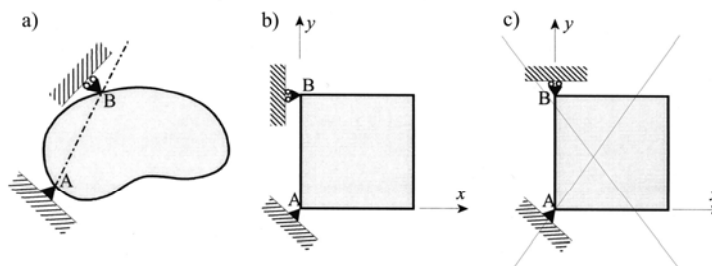
- raspodjela čvor po čvor i
- raspodjela element po element.

Kod raspodjele opterećenja čvor po čvor (sl. 9), integrira se dio opterećenja do polovica čvoru susjednih elemenata. Tako dobivena sila zadaje se u čvor.



sl. 10 Raspodjela opterećenja "element po element"

Kod raspodjele "element po element", sumira se sila na cijelom elementu. Zatim se pronade težište elementa, te se na temelju statičke ravnoteže odrede vrijednosti sila u prvom odnosno drugom čvoru elementa. Ukupna suma u pojedinom čvoru dobije se kao suma doprinosa svih elemenata kojima je to zajednički čvor. Općenito, ova je procedura točnija dok se za jednostavne primjere (npr. kontinuirano opterećenje) ne razlikuje od "čvor po čvor" raspodjele.

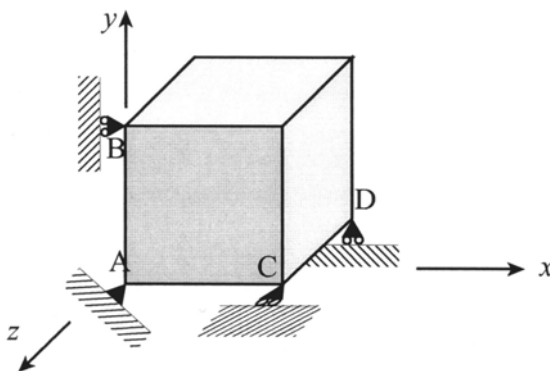


sl. 11 Minimalni rubni uvjeti kod 2D modela

Da bi uopće mogli govoriti o deformacijama konstrukcije, potrebno je stvoriti preduvjete da bi se ona deformirala. Zapravo, potrebno je spriječiti da se konstrukcija uslijed opterećenja giba kao kruto tijelo u prostoru. To se postiže zadavanjem rubnih uvjeta. Na sl. 11 shematski je prikazan način zadavanja nužnih rubnih uvjeta da bi se izbjeglo gibanje modela kao krutog tijela kod

dovdimenzijskih problema. U tu svrhu potrebno je kod ravninskih problema oduzeti tri stupnja slobode; dvije translacije i jednu rotaciju. Na sl. 10c prikazan je slučaj pogrešno zadanih rubnih uvjeta, gdje je konstrukcija ostala mehanizam jer se može rotirati oko točke A.

Kod trodimenzijskih konstrukcija minimalni rubni uvjeti moraju spriječiti šest stupnjeva slobode: tri translacije i tri rotacije. Postoji više načina kako se mogu spriječiti ti stupnjevi slobode. Na sl. 12 prikazan je jedan od njih. Spriječene su sve tri translacije u točki A, u točki B spriječena je translacija u smjeru  $x$  da bi se spriječila rotacija oko osi  $z$ , u točki C spriječena je translacija u smjeru  $z$  da se spriječi rotacija oko osi  $y$  i u točki D oduzeta je translacija u smjeru  $y$  da se spriječi rotacija oko osi  $x$ .



sl. 12 Minimalni rubni uvjeti kod 3D modela

Kod proračuna podobnosti, rubni uvjeti neposredno određuju kritičnu duljinu izvijanja koja izravno utječe na kritično naprezanje izvijanja.

## 2.2 Modeliranje konstrukcije pomoću makroelemenata

Makroelementi su također konačni elementi s tom razlikom da je dio kontinuuma koji oni opisuju znatno složeniji. Radi se uglavnom o logičkim elementima karakterističnim za neke zrakoplovne, brodske ili druge tankostijene konstrukcije. Granice kontinuuma kod makroelemenata su takve da opisuju dio konstrukcije na kojeg se mogu primijeniti postojeće formule za izvijanje (npr. ukrepljeni panel) ili da vrijede pretpostavke o krutim krajevima (greda s krutim krajevima) itd.

Prednosti ovakvog modeliranja su višestruke:

- vremenski je znatno kraće,
- daje manje matematičke modele, pa je i vrijeme računanja kraće,
- makroelementi su izuzetno pogodni za analizu podobnosti, optimalizaciju i
- relativno jednostavne izmjene mreže i izmjera elemenata.

Osnovni nedostaci ovog načina modeliranja su:

- često se javlja potreba za ekvivalentnim modeliranjem,
- poteškoće u modeliranju izrazito zakrivljenih dijelova konstrukcija i
- složena interpretacija rezultata.

Najčešći makroelementi koji se koriste za modeliranje tankostjenih konstrukcija su greda s krutim krajevima, ukrepljeni pločasti element, ćelijaste strukture itd. Greda s krutim krajevima, sl. 13, [14], najčešće se koristi kod zrakoplovnih i brodskih konstrukcija za modeliranje okvirnih rebara koji redovito imaju koljena kao ukrućenja na kritičnim mjestima.

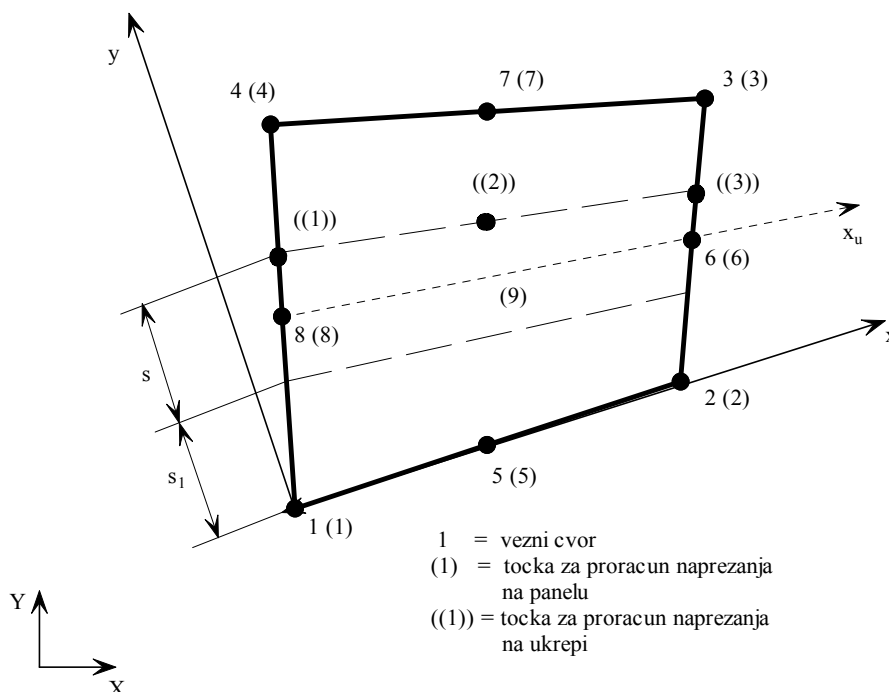


sl. 13 Greda s krutim krajevima

Ukrepljeni membranski element, sl. 14, koristi se za opisivanje dijelova konstrukcije koji su ukrućeni profilima (npr. trup i dijelovi krila kod zrakoplova, dvodno, palube i pregrade kod broda), [14].

Čest je slučaj u praksi da programi koji za analizu konstrukcije koriste makroelemente, daju mogućnost prebacivanja dijela modela iz makromreže u mikromrežu, tj. automatsko generiranje modela konačnih elemenata. Tako dobiven model se koristi za detaljnu analizu konstrukcije na mjestima koja su locirana na makromodelu kao kritična (MAESTRO → VAST DSA). Sa stanovišta podobnosti potrebno je voditi računa o vitkosti elemenata, te smjeru i orijentaciji

ukrepa. MAESTRO 8.5.1. omogućava uključivanje dijela makrostrukture modeliranog pomoću konačnih elemenata u nekom drugom programu u svoj proračunski model, [16].



sl. 14 Ukrepljeni membranski četverokutni element

### 2.3 Modeliranje konstrukcije superelementima

Pod pojmom superelementa podrazumijevamo združeno modeliranje grupe konačnih elemenata koja formira neki dio konstrukcije. Koncept superelemenata se pojavio u zrakoplovstvu 60-tih godina prošlog stoljeća u želji da se složene strukture razbiju na jednostavnije kao što je to prikazano na sl. 15. Kao takav odmah je prihvaćen u brodogradnji gdje je sličnost konstrukcija po pojedinim tipovima brodova izraženija pa je samim time i mogućnost korištenja superelemenata kao modula veća.

Prednosti korištenja superelemenata su:

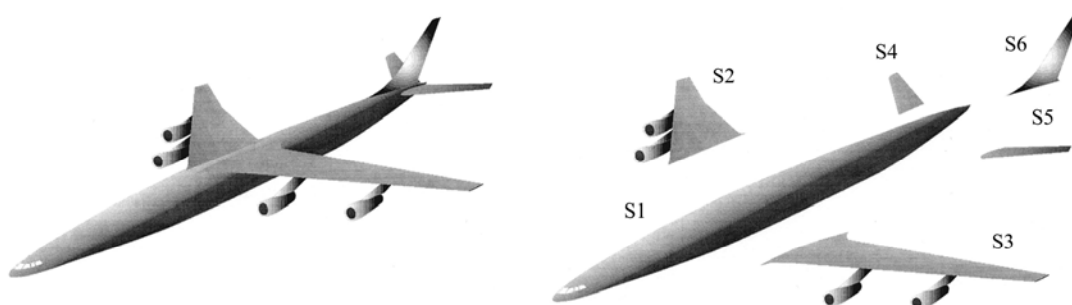
- mogućnost rješavanja velikih modela koji bi inače prešli mogućnosti računala,
- kraće vrijeme jednog proračuna nakon što su superelementi jednom proračunati (matrice krutosti i opterećenja superelemenata pohranjene),

- komponente se mogu modelirati odvojeno (više grupa ljudi može raditi na istom problemu),
- djelomična promjena modela ne zahtijeva ponovno izvođenje cijele analize,
- mogućnost kreiranja nelinearnih superelemenata za lokalne nelinearnosti konstrukcije.

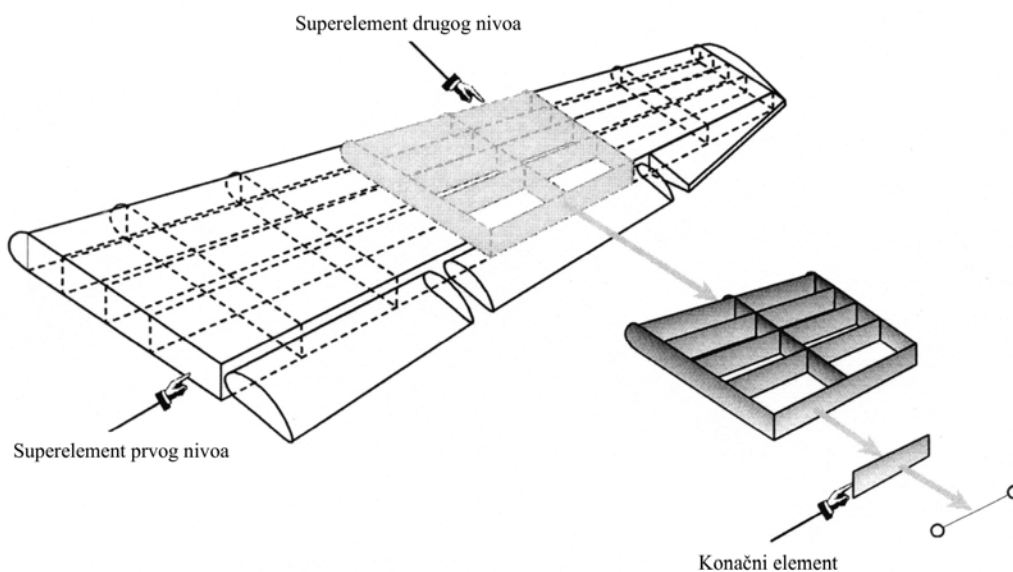
Nedostatci ovakvog modeliranja su:

- složenost rada s velikim brojem datoteka,
- reduciranje matrice krutosti kod dinamičkih problema zahtijeva dodatne aproksimacije.

Ovisno o složenosti konstrukcije može se definirati više nivoa superelemenata, sl. 16.



sl. 15 Zrakoplov podijeljen na 6 superelemenata



sl. 16 Daljnje dijeljenje konstrukcije zrakoplova na superelemente

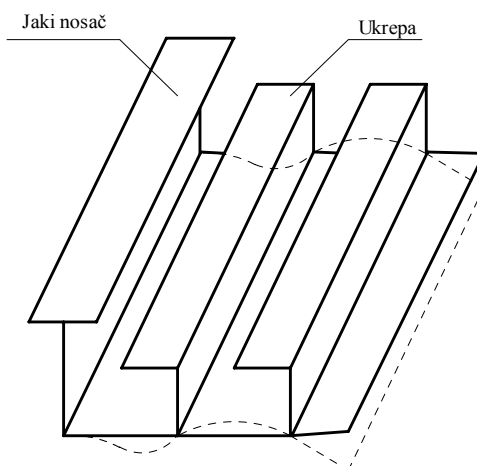
Sa stanovišta podobnosti prilikom kreiranja samog superelementa potrebno je uvažiti sve one pretpostavke koje vrijede za konačne elemente.

## 2.4 Modeliranje ukrepljenih panela pomoću konačnih traka

U ovom poglavlju je dan princip modeliranja orebrene tankostjene konstrukcije pomoću konačnih traka, [2], [3], [15]. Budući da je u sklopu ovoga rada razvijen program FIST za proračun izvijanja spomenutom metodom postupak modeliranja će se u nekim detaljima odnositi upravo na spomenuti program. Ono što treba istaknuti vezano za proračun kritičnog naprezanja izvijanja pomoću metode konačnih traka je da ona izuzetno dobro opisuje lokalno izvijanje, dok su kod opisivanja globalnih modova odstupanja značajna. Naime, pokazalo se da pretpostavke uvedene kod izvoda konačne trake za analizu ravninskog stanja naprezanja nisu dovoljne za točno opisivanje ponašanja konstrukcije.

Prilikom analiziranja lokalnog izvijanja orebrene tankostjene konstrukcije može se pretpostaviti da se oplata izvija između ukrepljenja tj. da se na mjestima spoja ukrepe i oplata nema pomaka (vidi sl. 17). Kod lokalnog izvijanja oplata između ukrepa odnosno samo ukrepljenje u slučaju sendvič konstrukcije se izvija u uzdužnom smjeru u nekoliko poluvalova ovisno o odnosu karakteristične širine i duljine. Dvije su osnovne mogućnosti proračuna lokalnog izvijanja:

- poznate dimenzije orebrenog tankostjenog elementa, a traži se njegovo kritično naprezanje,
- potrebno je odrediti kritičnu duljinu elementa.



sl. 17 Rubni uvjeti oplata između ukrepa i jakih nosača u slučaju lokalnog izvijanja

Kada su zadane dimenzije ukrepljenog panela, a želi se pronaći kritično naprezanje za taj odnos dimenzija pretpostavlja se broj poluvalova u uzdužnom smjeru u kojem je konačna traka zadana kao analitička funkcija. U poprečnom smjeru se preporučuje zadavanje četiri konačne trake da se opiše jedan poluval izvijanja (dvije konačne trake su minimum, a daju nešto kruću konstrukciju tj. veće kritično naprezanje). Program FIST u slučaju lokalnog izvijanja računa kritično naprezanje mijenjajući broj poluvalova  $m = 1, 2, 3, \dots, r$  ( $r$  se zadaje) odabirući kritično naprezanje i broj poluvalova u uzdužnom smjeru za taj slučaj.

U svrhu određivanja kritične duljine lokalnog izvijanja program FIST mijenja duljinu izvijanja držeći pri tome broj poluvalova izvijanja u uzdužnom smjeru fiksnim ( $m = 1$ ). Kritična je duljina ona koja odgovara minimalnom tlačnom naprezanju pri kojem dolazi do izvijanja. Tu su na raspolaganju dva načina približavanja rješenju. Prvi, koji zasigurno daje točan rezultat, ali je nešto sporiji. On dijeli pretpostavljenu maksimalnu duljinu na  $n$  intervala ( $n$  se zadaje) te vrši proračun umanjujući duljinu izvijanja za jedan interval, [15]. Pri tome se bilježi najmanje naprezanje i njemu odgovarajuća kritična duljina. Drugi način [2] znatno brže konvergira k rješenju, ali sama konvergencija nije zajamčena (nakon 100 pokušaja traženje rješenja se prekida). Pretpostave se tri duljine (80, 90 i 100% početne duljine) za koje se proračunaju kritična naprezanja. Na temelju tih vrijednosti se konstruira parabola ovisnosti naprezanja o duljini. Minimum te parabole određuje novu pretpostavljenu vrijednost dok se vrijednost koja odgovara najvećem kritičnom naprezanju odbacuje. Postupak se ponavlja dok naprezanje ne konvergira.



### 3. BIBLIOTEKA ANALITIČKI ZADANIH PROJEKTNIH KRITERIJA - BIBLIOTEKA OGRANIČENJA

#### 3.1 Općenito

U matematičkom modelu za konceptualno projektiranje konstrukcije podobnosni model ima središnju ulogu. On nosi informaciju o odnosu odziva konstrukcije i dopuštenih veličina za dano ograničenje. Predstavljen je bibliotekom analitički, semi-analitički i numerički zadanih projektnih kriterija, **biblioteka ograničenja**, koja ograničava izbor projektnih varijabli samo na one za koje će projekt konstrukcije biti podoban odnosno koje će zadovoljiti sve projektne kriterije ograničenja.

Biblioteku ograničenja čini matematička formulacija projektnih kriterija u formi projektnih ograničenja kao funkcije projektnih varijabli. Ograničenja omeđuju dio projektnog prostora u kojem se nalaze podobne kombinacije strukturnih varijabli koje zadovoljavaju sva ograničenja.

Projektna ograničenja uključuju:

- propisima definirana ograničenja (npr. JAR, FAR...), ograničenja klasifikacijskih društava (npr. HRB, RINA...),
- ograničenja koja direktno proizlaze iz teoretskih postavki, a vezana su za pojedine elemente strukture (npr. izvijanje upora, oplata, ukrepa...).

Kao izlazni rezultat biblioteke ograničenja najčešće se daje faktor podobnosti  $g$  (*adequacy parameter*) koji je definiran vrijednostima izdržljivosti  $C$  (*Capability*), zahtijeva  $D$  (*Demand*) i faktora sigurnosti  $SF$  (*Safety Factor*). Veza tih vrijednosti dana je prema relaciji (3.1), [19]:

$$g = \frac{C - SF \cdot D}{C + SF \cdot D} \quad (3.1)$$

Za kriterije ograničenja koji koriste interakcijski izraz, odnos je prikazan izrazom (3.2):

$$g = \frac{1-D}{1+D}. \quad (3.2)$$

Ovako definiran parametar podobnosti  $g$  poprima vrijednost  $-1 \leq g \leq 1$ . Granični slučajevi su kada  $g \rightarrow 1$ , ako  $D \rightarrow 0$ ;  $g \rightarrow -1$ , ako  $C \rightarrow 0$ . Kriterij ograničenja je zadovoljen ako je vrijednost parametra podobnosti  $g \geq 0$ . Prednosti ovoga načina prikazivanja podobnosti su:

- lako uočavanje elemenata koji nisu zadovoljili ograničenja (korisnik),
- mogućnost jednostavnog filtriranja rezultata (programer).

Rizik oštećenja elemenata strukture proizlazi iz različitih nepravilnosti koje uključuju nepravilnosti opterećenja (zapusi vjetrova, udari valova), kvalitetu izrade dijelova konstrukcije, odstupanje svojstava materijala od naznačenih itd.

Utjecaj nepravilnosti definira se putem faktora sigurnosti. Ukupni faktor sigurnosti  $SF$  može se prikazati izrazom:

$$SF = \delta/\varepsilon, \quad (3.3)$$

gdje su:

$\varepsilon$  faktor iskoristivosti,

$\delta$  faktor opterećenja koji obuhvaćaju parcijalne faktore sigurnosti definirane za pojedine utjecaje nepravilnosti.

U nastavku su dani analitički i semi-analitički kriteriji za analizu podobnosti zrakoplovnih [16], brodskih [8], [18], [19] i ostalih konstrukcija koje se po svojim karakteristikama mogu svrstati u orebrene tankostjene konstrukcije. Radi boljeg uočavanja sličnosti i razlika kriterija koji se primjenjuju u zrakoplovstvu i brodogradnji, istovjetni kriteriji su obrađeni paralelno.

### 3.2 Popuštanje ravnih ploča

Von Mises kriterij, [20] je najčešće korišten kriterij popuštanja za zrakoplovne i brodske konstrukcije. On omogućava provjeru određenog elementa konstrukcije uzimajući u obzir sve

komponente napreznaja u proračunskoj točki. Da bi se izbjeglo popuštanje materijala tankostjene konstrukcije mora biti zadovoljen sljedeći uvjet:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_0 \quad (3.4)$$

gdje su:

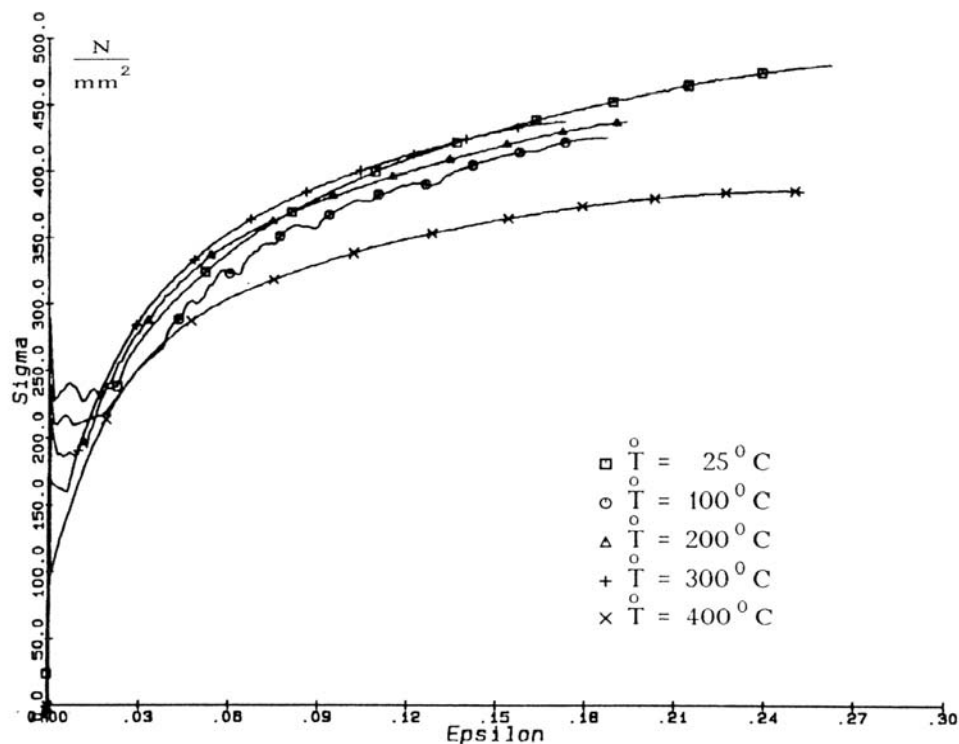
$\sigma_x$  normalno napreznaje u  $x$  smjeru,

$\sigma_y$  normalno napreznaje u  $y$  smjeru,

$\tau_{xy}$  tangencijalno napreznaje i

$\sigma_0$  granica popuštanja za dani materijal.

Kod analize realnih konstrukcija zone s napreznajem većim od granice popuštanja javljaju se na mjestima koncentracije napreznaja ili velikih gradijenata deformacija (veliki pomaci kod izvijanja). Međutim, do kolapsa strukture dolazi tek ako se te zone prošire na cijelo nosivo područje presjeka. Von Mises kriterij popuštanja (Von Mises napreznaje) je osnovni kriterij koji se uspoređuje prilikom proračuna strukture metodom konačnih elemenata.

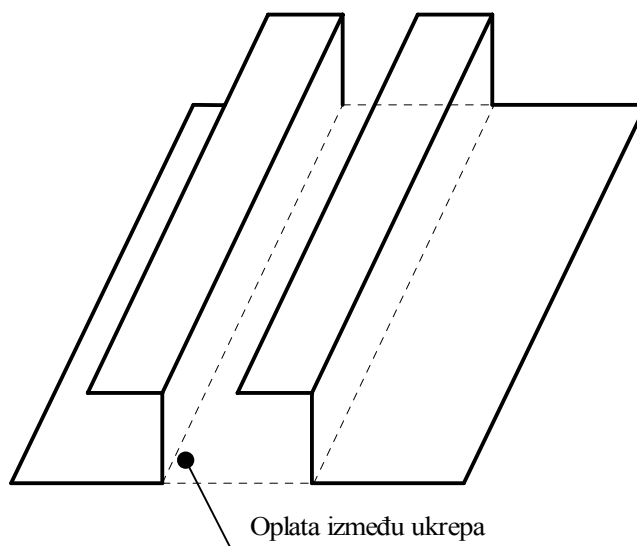


sl. 18 Odnos napreznaja i deformacije za konstrukcijski čelik ST37

Na sl. 18, [21] je prikazan dijagram  $\sigma - \varepsilon$  za konstrukcijski čelik ST 37 pri brzini deformacije od  $10^{-4} s^{-1}$ .

### 3.3 Izvijanje ravnih ploča

Općenito ravnom pločom možemo smatrati oplatu između dviju susjedni ukrepa, jakih nosača ili kombinacije tih dvaju elemenata strukture. Dio makroelementa koji omeđuje oplatu između ukrepa prikazan je na sl. 19.



sl. 19 Uzdužno ukrepljeni panel

Ovisno o tipu elementa strukture koji ograničuje dio oplate javljaju se i različiti rubni uvjeti, a samim time i izvijanje oplate je različito. U slučaju izvijanja ploče razlikujemo tri granična slučaja rubnih uvjeta, sl. 17:

- slobodno oslonjen rub (ovaj slučaj nastaje na mjestu gdje se nalazi ukrepa),
- ukliješten rub (u slučaju kada se na rubu nalazi jaki nosač) i
- slobodni rub.

U praksi se najčešće susreće prijelazna situacija u kojoj imamo slučaj djelomične upetosti. Faktor upetosti opisan je u [16], [19]. Oplata (ploča) između ukrepa panela može se smatrati slobodno oslonjenom pločom (rubovi ploče mogu se zakretati i pomicati u ravnini ploče). Kriteriji ograničenja ploče između ukrepa panela obuhvaćaju elastično i plastično područje izvijanja ploče (stanje granične uporabljivosti) i kolaps (granično nosivo stanje) pod djelovanjem

jednoosnog, dvoosnog i smičnog naprezanja, te popuštanje i plastične deformacije pod djelovanjem jednolikog pritiska.

### 3.3.1 Jednoosno tlačno opterećenje konstantnog iznosa

Na sl. 20 prikazana je slobodno oslonjena izotropna ploča pod utjecajem jednoosnog tlačnog naprezanja konstantnog po duljini stranice,  $\sigma_y$ . Prema analitičkim formulama [8], [18], [19] za taj slučaj opterećenja minimalna vrijednost tlačnog naprezanja u slučaju slobodno oslonjenih krajeva  $\sigma_{y,cr}$  u elastičnom području dobije se prema jednadžbi:

$$\sigma_{y,cr} = \frac{\pi^2 \cdot a^2 \cdot D \cdot \left( \frac{mm^2}{a^2} + \frac{nn^2}{b^2} \right)^2}{t \cdot mm^2}, \quad (3.5)$$

gdje su:

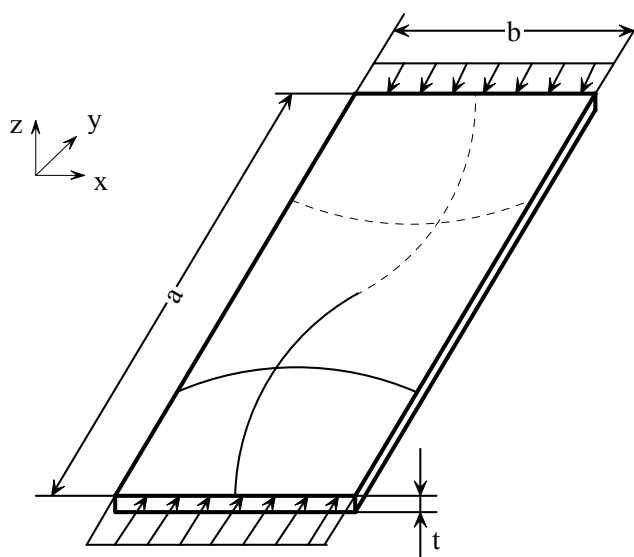
$mm, nn$  broj poluvalova u uzdužnom odnosno poprečnom smjeru ploče u izvijenom obliku,

$a$  duljina neopterećene stranice ploče (kod jednoosnog tlačno opterećenja),

$b$  duljina opterećene stranice ploče (kod jednoosnog tlačno opterećenja),

$t$  debljina ploče i

$D$  krutost ploče na savijanje  $D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_e^2)}$ .



sl. 20 Slobodno oslonjena ploča opterećena jednoosnim tlačnim naprezanjem

Najmanja vrijednost  $\sigma_{cr}$ , dobije se za vrijednost parametra  $mn = 1$ . U tom slučaju ploča će se izvijati u samo jednom poluvalu u poprečnom (neopterećenom) smjeru, te se vrijednost  $\sigma_{cr}$  određuje prema:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot D}{a^2 \cdot t} \cdot \left[ mm + \frac{1}{mm} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2. \quad (3.6)$$

Općenitiji izraz za  $\sigma_{cr}$  dobije se uvođenjem koeficijenta  $k_C$  i on za slobodno oslonjenu ploču glasi:

$$k_C = \left( \frac{mm \cdot b}{a} + \frac{a}{mm \cdot b} \right)^2. \quad (3.7)$$

Sada se izraz za kritično tlačno naprezanje u elastičnom području može zapisati kao:

$$\sigma_{cr} = k_C \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu_e^2)} \cdot \left( \frac{t}{b} \right)^2. \quad (3.8)$$

U ovisnosti o odnosu duljina stranica razlikujemo duge ( $a/b \geq 1$ ) i kratke ploče ( $a/b < 1$ ). Kritično naprezanje, za slučaj dugih ploča, ima najmanju vrijednost kada je broj poluvalova izvijanja u uzdužnom (opterećenom) smjeru jednak omjeru stranica  $a/b$ . Pod tim uvjetima koeficijent izvijanja je  $k_C = 4$  (opterećeni krajevi slobodno oslonjeni). Za slučaj širokih ploča, vrijednost koeficijenta  $k_C$  se dobije preko izraza:

$$k_C = \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2. \quad (3.9)$$

Dakle, da bi se izbjeglo elastično izvijanje oplata između ukrepa (stanje granične uporabljivosti) pri djelovanju tlačnog naprezanja, tlačno naprezanje  $\sigma_y$  treba biti manje od  $\sigma_{cr}$  dobivenog prema izrazu (3.8):

$$\sigma_{cr} = k_C \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu_e^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \leq \sigma_p, \quad (3.10)$$

gdje je:

$\sigma_p$  granica proporcionalnosti materijala.

Na sl. 18 je prikazan dijagram  $\sigma - \varepsilon$  za konstrukcijski čelik ST37 čija granica proporcionalnosti iznosi  $\sigma_p \approx 240 \text{ N/mm}^2$ . U nedostatku točnih vrijednosti za konstrukcijske čelike se može uzeti da je:

$$\sigma_p = 0.6\sigma_0. \quad (3.11)$$

gdje je:

$\sigma_0$  granica popuštanja materijala.

U slučaju da je vrijednost  $\sigma_{cr}$  određena prema izrazu (3.8) veća od vrijednosti granice proporcionalnosti, što znači prelazak u područje plastičnog tlačnog izvijanja, potrebno je izvršiti korekciju kritičnog naprezanja. Prema [8] korekcija se dobije u skladu s jednadžbom (3.12). Koeficijenti  $c_l$  za omjer stranica  $a/b \geq 1$  i  $c_s$  za omjer stranica  $a/b < 1$  dani su izrazom (3.13).

$$\sigma_{cr,pl} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{c_l \sigma_0}{c_l + 1} & \frac{a}{b} \geq 1.0 \\ \sigma_0 - \frac{1}{c_s} & \frac{a}{b} < 1.0 \end{array} \right\}, \quad (3.12)$$

gdje je:

$c_l, c_s$  koeficijenti koji se određuju prema:

$$c_l = \frac{\sigma_l^2}{\sigma_p (\sigma_0 - \sigma_p)}, \quad \sigma_l = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad (3.13)$$

$$c_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_p(\sigma_0 - \sigma_p)}, \quad \sigma_s = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2,$$

Sama procedura za određivanje kritičnog naprezanja izvijanja u plastičnom području prema [16] nešto se razlikuje od gore navedene. Kritično naprezanje izvijanja u plastičnom području prikazuje se kao produkt koeficijenta korekcije  $\eta$  i kritičnog naprezanja izvijanja u elastičnom području:

$$\sigma_{cr,pl} = \eta \cdot k_C \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu_e^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad (3.14)$$

gdje je:

$\eta$  faktor korekcije u plastičnom području.

Faktor  $\eta$  obuhvaća promjenu koeficijenta izvijanja  $k_C$ , modula elastičnosti  $E$  i Poisson-ova broja  $\nu$  prelaskom u plastično područje. Koeficijent izvijanja ovisi o tipu opterećenja, duljini izvijanja (ona ovisi o rubnim uvjetima), odnosu dužina stranica, iznosu opterećenja i u slučaju slobodnih krajeva o Poisson-ovu broju. Prelaskom u plastično područje dolazi do smanjenja krutosti na savijanje što je u direktnoj vezi s modulom elastičnosti  $E$ . Poisson-ov broj  $\nu$  se prelaskom u plastično područje postupno mijenja s vrijednosti u elastičnom području  $\nu_e = 0.3$  do vrijednosti  $\nu_{pl} = 0.5$  u potpuno plastičnom području (vrijednosti vrijede za većinu izotropnih materijala), [16]. Ovisnost faktora korekcije naprezanja izvijanja  $\eta$  u plastičnom području za slučaj slobodno oslonjene duge ploče glasi:

$$\eta = \left[ \left( \frac{E_s}{E} \right) \frac{(1 - \nu_e^2)}{(1 - \nu^2)} \right] \cdot \left\{ 0.500 + 0.250 \left[ 1 + \left( 3 \frac{E_t}{E_s} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

U slučaju kada su neopterećeni krajevi upeti faktor korekcije  $\eta$  postaje:



$$\eta = \left[ \left( \frac{E_s}{E} \right) \frac{(1-\nu_e^2)}{(1-\nu^2)} \right] \cdot \left\{ 0.352 + 0.324 \left[ 1 + \left( 3 \frac{E_t}{E_s} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

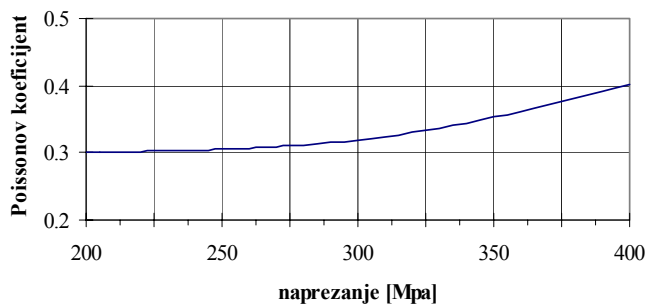
Pri tome su:

$E_s$  sekantni modul elastičnosti,

$E_t$  tangencijalni modul elastičnosti.

Ovisnost Poisson-ova broja u prijelaznom području može se izraziti kao:

$$\nu = \nu_{pl} - (\nu_{pl} - \nu_e) \cdot \frac{E_s}{E} \quad (3.17)$$



sl. 21 Ovisnost Poisson-ova broja o naprezanju

Odnosi sekantnog i tangencijalnog modula elastičnosti dani su izrazima:

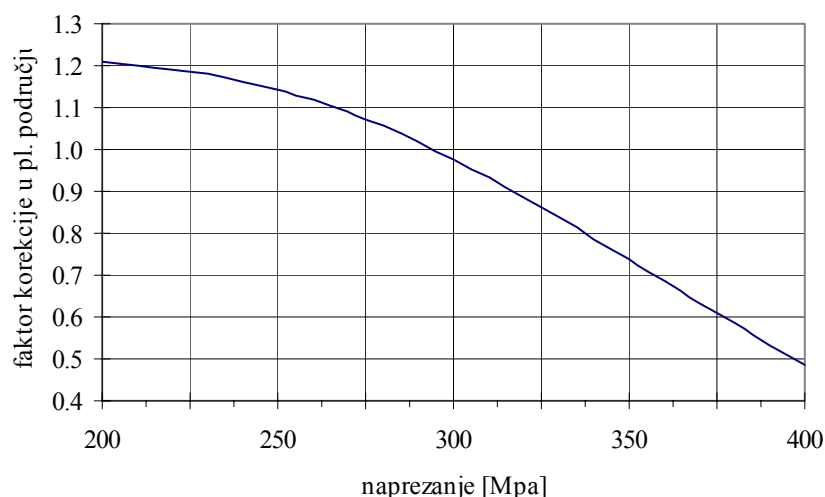
$$\frac{E}{E_s} = 1 + \frac{3}{7} \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0.7}} \right)^{n-1}, \quad \frac{E}{E_t} = 1 + \frac{3}{7} \cdot n \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0.7}} \right)^{n-1}, \quad (3.18)$$

gdje je:

$n$  faktor oblika za krivulju  $\sigma - \varepsilon$ :

$$n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{17}{7}\right)}{\ln\left(\frac{\sigma_{0.7}}{\sigma_{0.85}}\right)}. \quad (3.19)$$

Faktor korekcije u plastičnom području za klasični konstrukcijski čelik ST37 i slučaj slobodno oslonjenih krajeva prikazan je na sl. 22. Podaci za materijal su preuzeti iz [21] dok je sama vrijednost izračunata prema [16].

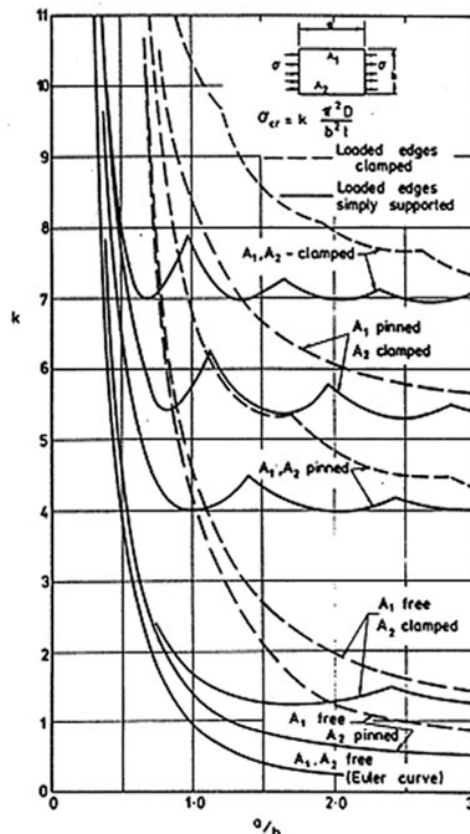


sl. 22 Faktor korekcije u plastičnom području, ST37

Ukoliko su opterećeni rubovi ukliješteni, koeficijent izvijanja poprima nešto veću vrijednost za male odnose duljina stranica. Ako  $a/b \rightarrow \infty$  vrijednost koeficijenta izvijanja teži onoj za slučaj kada su opterećeni krajevi slobodno oslonjeni,  $k_C = 4.0$  ( $k_C = 4.2$  za  $a/b = 5$ ). Ta je činjenica jasna sama po sebi budući da se već pojavom trećeg poluvala izvijanja on ponaša kao da je slobodno oslonjen, a manja razlika je posljedica skraćivanja duljine poluvala uslijed rubnih uvjeta.

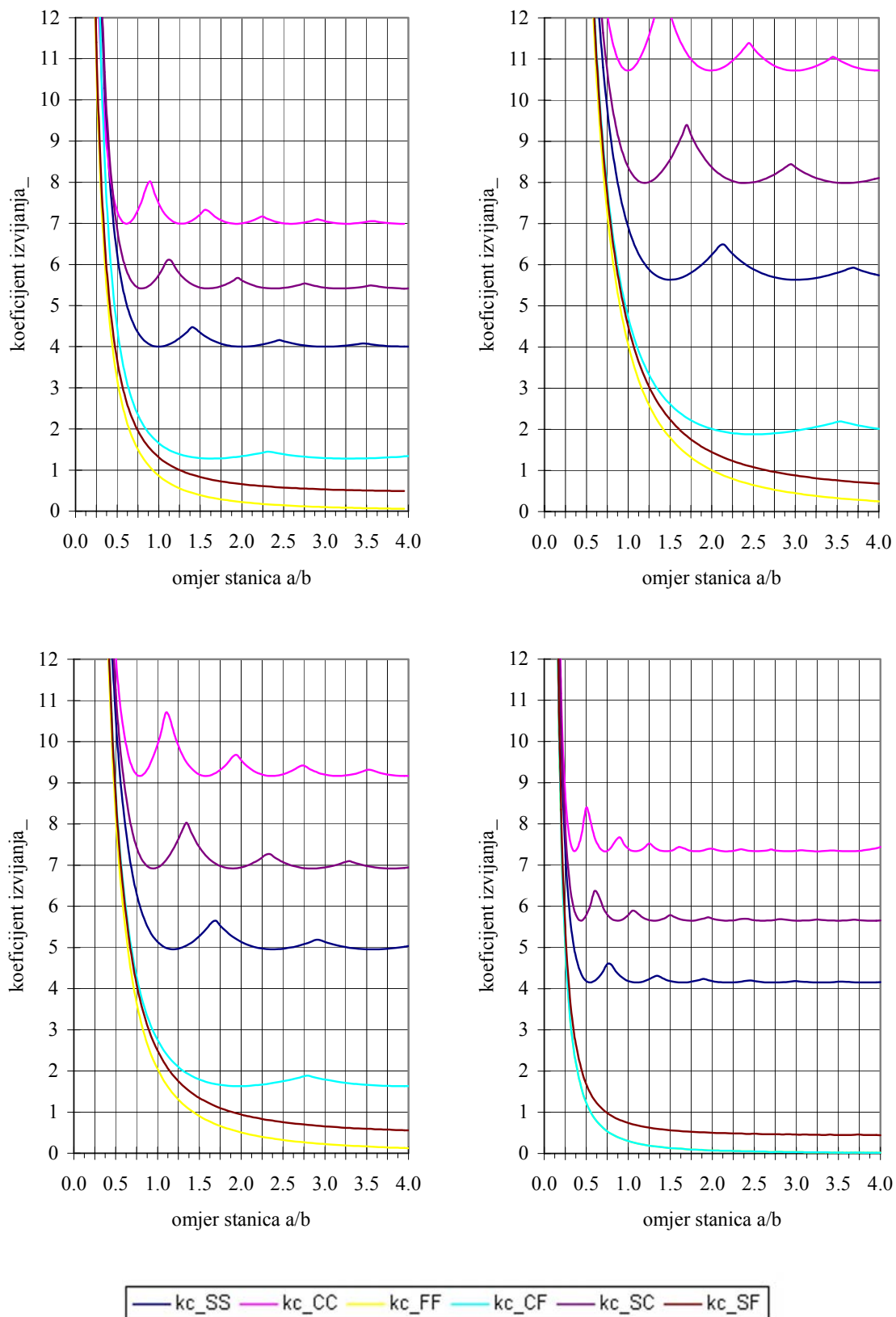
U slučaju kada su neopterećeni rubovi ukliješteni koeficijent izvijanja poprima veće vrijednosti. Minimalna vrijednost koeficijenta za taj slučaj je  $k_C = 6.98$ . Ta minimalna vrijednost koeficijenta postiže se već kod odnosa stranica  $a/b \geq 4$ . Ukoliko su opterećeni rubovi također

ukliješteni vrijednost koeficijente izvijanja poprima vrijednost  $k_C = 7.2$  kod odnosa stranica  $a/b = 5$ . Kada  $a/b \rightarrow \infty$  vrijednost koeficijenta teži k vrijednosti  $k_C = 6.98$ .



sl. 23 Ovisnost koeficijenta  $k_C$  za različite rubne uvjete, [19]

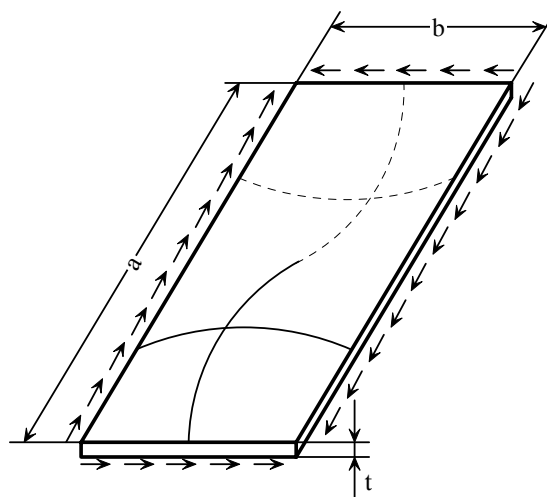
Program FIST, koji radi semi-analitički proračun metodom konačnih traka nam omogućuje zadavanje četiri najčešće korištena rubna uvjeta na opterećenim krajevima (analitički) i proizvoljne rubne uvjete na slobodnim krajevima (numerički). Na sl. 24 su prikazani rezultati proračuna koeficijenta  $k_C$  za sve raspoložive rubne uvjete. Prvi dijagram prikazuje vrijednosti koeficijenta izvijanja za slučaj da su opterećeni krajevi slobodno oslonjeni dok drugi prikazuje slučaj oba upeta kraja. Donji dijagrami redom prikazuju vrijednosti koeficijenta izvijanja za slučaj kada je jedan opterećeni kraj upet, a drugi slobodno oslonjen odnosno slobodan. Detaljan opis semi-analitičkog postupka proračuna podobnosti dan je u poglavlju 4.



sl. 24 Semi-analitički proračun koeficijenta  $k_C$  za različite rubne uvjete

### 3.3.2 Jednoliko smično naprezanje

Na sl. 25 prikazana je pravokutna ploča duljine  $a$ , širine  $b$  i debljine  $t$  opterećenu jednoliko raspoređenim smičnim opterećenjem.



sl. 25 Ploča opterećena konstantnim smičnim naprezanjem

Da bi se izbjeglo elastično izvijanje oplata između ukrepa pri djelovanju smičnog opterećenja, smično naprezanje bi trebalo biti manje od  $\tau_{cr}$ , [8]:

$$\tau_{cr} = \left\{ \begin{array}{ll} k_s \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 & \tau_{cr} \sqrt{3} \leq \sigma_p \\ \frac{c\sigma_0}{\sqrt{3}(c+1)} & \tau_{cr} \sqrt{3} > \sigma_p \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Faktor  $k_s$  se određuje prema izrazu koji je dobiven aproksimacijom teoretskih krivulja (radovi Seydel-a, Stein-Neff-a, Southwel-Skan-a), [8], [16], [18]:

$$k_s = \left\{ \begin{array}{ll} 5.34 + 4.0 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 & \frac{a}{b} \geq 1 \\ 4.0 + 5.34 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 & \frac{a}{b} < 1 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

U slučaju da je vrijednost  $\tau_{cr}\sqrt{3}$  određena prema izrazu (3.20) veća od granice proporcionalnosti za dani materijal, prelazak u područje plastičnog izvijanja, potrebno je odrediti faktor  $c$  pomoću kojeg se određuje nova vrijednost za kritično naprezanje  $\tau_{cr}$ :

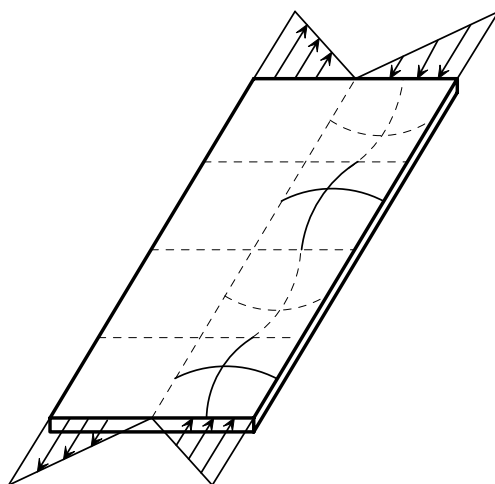
$$\tau_{cr} = \frac{c \cdot \sigma_0}{\sqrt{3} \cdot (c+1)}, \quad \sqrt{3} \cdot \tau_{cr} > \sigma_p, \quad (3.22)$$

gdje se faktor  $c$  određuje prema izrazu:

$$c = \frac{3 \cdot \tau_{cr}^2}{\sigma_p \cdot (\sigma_0 - \sigma_p)}, \quad \tau_{cr}^2 = \frac{k_S \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2. \quad (3.23)$$

### 3.3.3 Čisto savijanje u ravnini ploče (membrana)

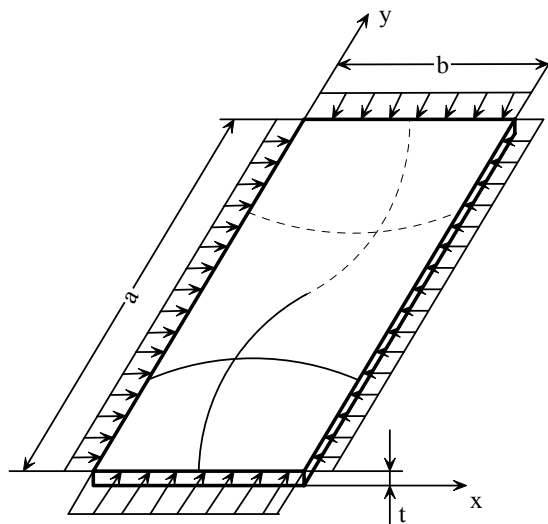
Na sl. 26 prikazana je ploča opterećenja na savijanje u ravnini. Iz nje je vidljivo da se u slučaju savijanja ploče izvijanje može javiti samo u dijelu gdje se javlja tlačno naprezanje. Time se duljina izvijanja u poprečnom smjeru znatno smanjuje. Tako je koeficijent izvijanja za slučaj slobodno oslonjenih krajeva  $k_B = 24$ , dok u slučaju upetih krajeva poprima vrijednost  $k_B = 42$ . Tako visoki koeficijenti izvijanja ukazuju na činjenicu da je moguće izostaviti provjeru tog slučaja opterećenja.



sl. 26 Ploča opterećena na savijanje

### 3.3.4 Dvoosno tlačno naprezanje

Na sl. 27 prikazana je ploča opterećena dvoosnim tlačnim opterećenjem. Pretpostavlja se da je smjer  $y$  smjer glavnog tlačnog naprezanja. Omjera stranica  $\alpha = a/b$  može biti proizvoljan.



sl. 27 Ploča opterećena dvoosnim tlačnim opterećenjem

Vrijednosti kritičnih naprezanja  $\sigma_{x,cr}$  i  $\sigma_{y,cr}$  određuju se za elastično i plastično područje izvijanja. Da bi se izbjeglo elastično izvijanje oplata između ukrepa (stanje granične uporabljivosti) opterećene dvoosnim tlačnim naprezanjem, od kojeg jedno ima poznatu vrijednost naprezanja  $\sigma_x$ , drugo tlačno naprezanje  $\sigma_y$  trebalo bi biti manje od  $\sigma_{y,cr}$  [8]. U elastičnom području mora vrijediti:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{y,cr}^2 - \sigma_x \sigma_{y,cr}} \leq \sigma_p, \quad (3.24)$$

Kritično naprezanje se određuje metodom pokušaja i pogrešaka dok se ne dobije najmanja vrijednost za  $\sigma_{y,cr}$ .

$$\sigma_{y,cr} mm^2 + \sigma_x nn^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sigma_e \left( mm^2 + nn^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right)^2, \quad (3.25)$$

gdje je:

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2. \quad (3.26)$$

Veličine  $mm$  i  $nn$  predstavljaju broj valova izvijanja oplata u  $y$  odnosno  $x$  smjeru.

U plastičnom području vrijedi da je:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{y,cr}^2 - \sigma_x \sigma_{y,cr}} > \sigma_p. \quad (3.27)$$

Da bi se u tom slučaju izbjeglo izvijanje području mora biti zadovoljen sljedeći interakcijski izraz:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}}\right)^2 = 1. \quad (3.28)$$

Vrijednosti  $\sigma_{x,cr}$  i  $\sigma_{y,cr}$  su određuje se prema (3.8) zasebno za slučaj jednoosnog opterećenja u  $x$  odnosno  $y$  smjeru.

Da bi se izbjeglo elastično izvijanje oplata između ukrepa (stanje granične uporabljivosti) opterećene dvoosnim tlačnim naprezanjem od kojeg jedno ima poznatu vrijednost naprezanja  $\sigma_y$ , drugo tlačno naprezanje  $\sigma_x$  trebalo bi biti manje od  $\sigma_{x,cr}$  [8]:

$$\sqrt{\sigma_{x,cr}^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x,cr} \sigma_y} \leq \sigma_p, \quad (3.29)$$

$$\sigma_{x,cr} nn^2 + \sigma_y mm^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sigma_e \left( mm^2 + nn^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2, \quad (3.30)$$

gdje je  $\sigma_e$  dano izrazom (3.26).

Ovisno o veličini tlačnog naprezanja  $\sigma_y$  odabiru se vrijednosti za  $mm$  i  $nn$ .



$$\sigma_e \left( 1 - 4 \frac{a^2}{b^2} \right) < \sigma_y < \sigma_e \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (3.31)$$

Ako se  $\sigma_y$  nalazi unutar gore navedenih granica vrijednosti za  $mm$  i  $nn$  su:  $mm = 1$  i  $nn = 1$ . Ako je vrijednost  $\sigma_y$  veća od gornje granice izraza (3.31) i leži između granica izraza (3.32), tada je vrijednost  $nn = 1$ , a vrijednost  $mm = i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) za  $i$  koji zadovoljava sljedeći izraz:

$$\sigma_e \left( 2i^2 - 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) < \sigma_y < \sigma_e \left( 2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (3.32)$$

Ako je vrijednost  $\sigma_y$  manja od donje granice izraza (3.31) i leži između granica izraza (3.33), tada je vrijednost  $mm = 1$ , a vrijednost  $nn = i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) za  $i$  koji zadovoljava izraz:

$$\sigma_e \left[ 1 - i^2 (i-1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right] > \sigma_y > \sigma_e \left[ 1 - i^2 (i+1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right]. \quad (3.33)$$

U plastičnom području mora biti zadovoljen sljedeći izraz:

$$\sqrt{\sigma_{x,cr}^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x,cr} \sigma_y} > \sigma_p, \quad (3.34)$$

$$\left( \frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}} \right)^2 = 1. \quad (3.35)$$

Vrijednosti  $\sigma_{x,cr}$  i  $\sigma_{y,cr}$  su određuje se prema (3.8).

Usporedba analitičkih, semi-analitičkih i numeričkih rezultata za slučaj dvoosnog opterećenja dan je u poglavlju s primjerima.

### 3.3.5 Dvoosno tlačno opterećenje i smično opterećenje

Da bi se izbjeglo elastično i plastično izvijanje oplata između ukrepa (stanje granične uporabljivosti) opterećene dvoosnim tlačnim opterećenjem  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  te smičnim opterećenjem  $\tau$ , sljedeći interakcijski izraz mora biti zadovoljen [8]:

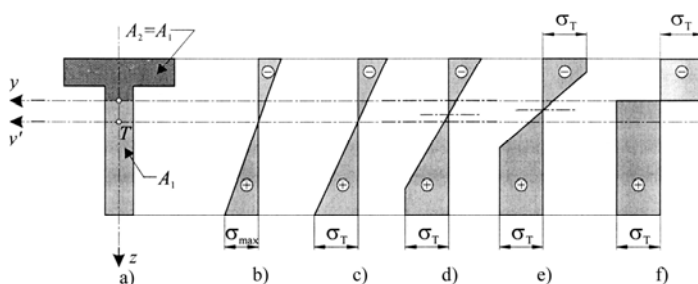
$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 \leq 1. \quad (3.36)$$

Vrijednosti  $\sigma_{x,cr}$  i  $\sigma_{y,cr}$  dane su u (3.8), a vrijednost  $\tau_{cr}$  u (3.20).

## 3.4 Granična čvrstoća ravnih ploča

### 3.4.1 Općenito

Pod graničnom čvrstoćom podrazumijevamo maksimalni iznos opterećenja koje konstrukcija može preuzeti prije potpunog kolapsa. Na sl. 28 je prikazan postupni razvoj plastificiranih područja i pomicanje neutralne osi kod savijanja T profila, [20]. Slično ponašanje ima segment ravnim trakama ukrućene ploče (ravna traka zajedno sa sunosivom širinom).



- a) potpuno plastificirani presjek, b) naprezanja u elastičnom stanju, c) maksimalna naprezanja u elastičnom stanju, d), e) naprezanja u elastoplastičnom stanju, f) raspodjela naprezanja u graničnom stanju

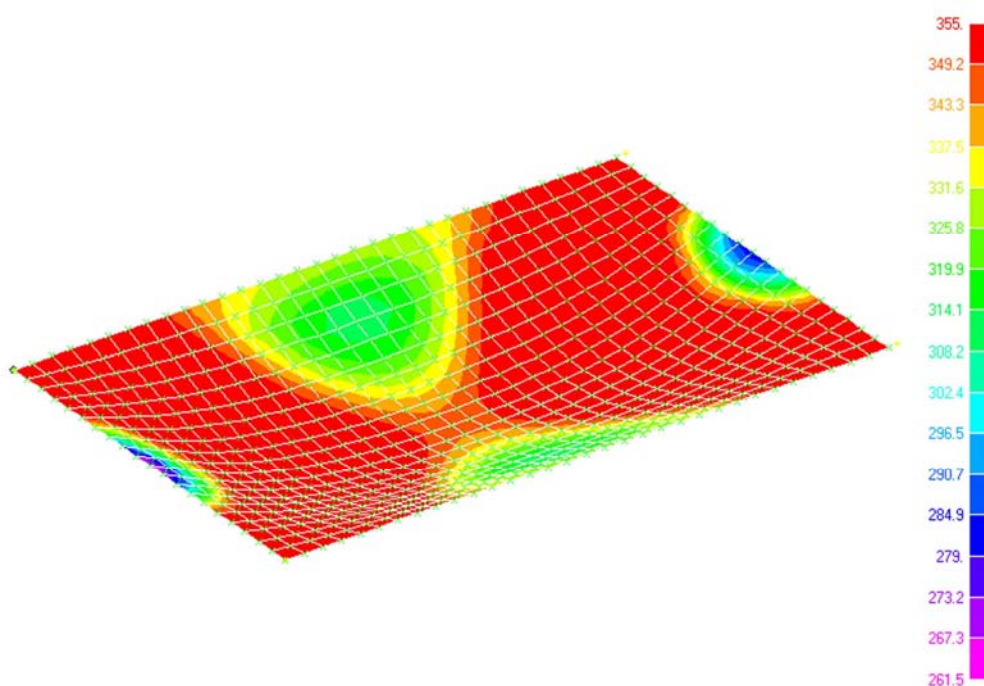
sl. 28 Postupni razvoj plastificiranih područja i pomicanje neutralne osi

Vitkost ploča je bitan faktor u određivanju granične čvrstoće. Faktor omjera vitkosti ploča dan je izrazom:

$$\beta = \frac{b}{t} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}} \quad (3.37)$$

U ovisnosti o vrijednosti faktora omjera vitkosti ploče  $\beta$  razlikuju se tri područja:

- vitke ploče,  $\beta \geq 3.5$ ,
- prijelazne ploče,  $1 < \beta < 3.5$  i
- čvrste ploče,  $\beta \leq 1$ .



sl. 29 Raspodjela Von Mises-ovog ekvivalentnog naprezanje pri potpunom kolapsu ploče

Kod vitkih ploča vrijednost graničnog naprezanja je znatno niža od naprezanja granice tečenja (popuštanja)  $\sigma_0$ . Zbog toga je kod vitkih ploča prvi značajniji odziv na jednoosno tlačno naprezanje upravo izvijanje ploče. Kao rezultat izvijanja, središnji dio ploče sve manje preuzima opterećenje, koje se sada prenosi na dijelove uz rub ploče. Ploča i dalje, iako je došlo do izvijanja, preuzima opterećenje i još nije došlo do kolapsa. Uslijed otklonjenog oblika dijela ploče koji se je izvio, aksijalna krutost tog dijela se smanjila, a time i krutost cijele ploče. Daljnjim povećavanjem opterećenja, središnji izvijeni dio se povećava, te se iznos naprezanja na rubu ploče značajno povećava sve do granice kada nastupa kolaps ploče.

Potpuni kolaps konstrukcije nastupa ukoliko nakon smanjenja aksijalne krutosti uslijed velikih pomaka susjedni dijelovi (npr. jaki uzdužni nosači) ne preuzmu opterećenje. Vitke su ploče redovna pojava u zrakoplovstvu (aluminijske konstrukcije), a kako je danas i u brodogradnji trend gradnje konstrukcija minimalne težine prijelazne i krute ploče postepeno će se zamijeniti sa vitkim.

Na sl. 29 je prikazana raspodjela Von Mises-ovog ekvivalentnog naprezanja po presjeku ploče dobivena geometrijski i materijalno nelinearnom analizom (*MSC NASTRAN, Nonlinear Static, Ideal Plastic Material*, granica popuštanja materijala je  $\sigma_0 = 355 \text{ N/mm}^2$ , kriterij popuštanja Von Mises).

### 3.4.2 Jednoosno tlačno opterećenje konstantnog iznosa

Prijelazne ploče se susreću uglavnom kod čeličnih konstrukcija. Za prijelazne ploče vrijedi da se povećanjem opterećenja, početne nepravilnosti oblika (koje su uvijek prisutne u stvarnim pločama) povećavaju i uzrokuju gubitak krutosti te lokalno popuštanje.

Kod čvrstih ploča početne nepravilnosti oblika su jako male u odnosu na debljinu ploče. Naprezanje elastičnog izvijanja ovih ploča je jako veliko, pa stoga čvrste ploče mogu preuzeti opterećenje koje izaziva tlačno naprezanje jednako granici popuštanja materijala  $\sigma_0$ .

Da bi se izbjegao kolaps oplata između ukrepa (granično nosivo stanje) pri djelovanju tlačnog naprezanja, tlačno naprezanje trebalo bi biti manje od  $\sigma_{ul}$ , [8], [18].

#### Omjer stranica $a/b \geq 1$

Vrijednost  $\sigma_{ul}$  se određuje ovisno o omjeru vitkosti ploče  $\beta$  prema izrazima:

$$\frac{\sigma_{ul}}{\sigma_0} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0}} & \beta \geq 3.5 \\ \frac{2.25}{\beta} - \frac{1.25}{\beta^2} & 1.0 \leq \beta < 3.5 \\ 1.0 & \beta < 1.0 \end{array} \right\}, \quad (3.38)$$

gdje je:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} = \frac{4 \cdot \pi^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\beta^2}. \quad (3.39)$$

### Omjer stranica $a/b < 1$

U ovom slučaju  $\sigma_{ul}$  se također u ovisnosti o omjeru vitkosti ploče  $\beta$  određuje prema:

$$\frac{\sigma_{ul}}{\sigma_0} = \frac{a}{b} \cdot c_u + 0.08 \cdot \left(1 - \frac{a}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)^2 \leq 1.0, \quad (3.40)$$

gdje je:

$$c_u = \left. \begin{array}{ll} \frac{4 \cdot \pi^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\beta^2} & \beta \geq 3.5 \\ \frac{2.25}{\beta} - \frac{1.25}{\beta^2} & 1.0 \leq \beta < 3.5 \\ 1.0 & \beta < 1.0 \end{array} \right\}. \quad (3.41)$$

### 3.4.3 Jednoliko smično naprezanje

Ako je ploča opterećena velikim smičnim naprezanjem može doći do kolapsa ploče, [19]. Mehanizam kolapsa ovisi o vitkosti ploče. Kod veoma vitkih ploča (3.37) smično naprezanje će prouzrokovati elastično izvijanje. Nakon izvijanja, ploča će još uvijek zadržati sposobnost preuzimanja opterećenja zbog toga što će u jednom od dva dijagonalna pravca ploče vladati vlačno naprezanje koje može dalje preuzeti smično naprezanje sve dok se ne pojavi popuštanje materijala, a time i kolaps. Kod čvrstih ploča ne javlja se elastično izvijanje nego kolaps nastaje uslijed čistog popuštanja.

Najčešći primjer ploče opterećene velikim iznosom smičnog naprezanja u brodskim konstrukcijama je ploča struka dugog i visokog nosača u blizini mjesta oslonca. Na oplati trupa broda i oplati palube ne javljaju se veliki iznosi smičnih naprezanja zbog širokog rasprostiranja oplata i rasporeda opterećenja.

Da bi se izbjegao kolaps oplata između ukrepa (granično nosivo stanje) pri djelovanju smičnog naprezanja, smično naprezanje  $\tau$  trebalo bi biti manje od  $\tau_{ul}$ , [18]:

$$\tau_{ul} = \tau_{cr} + \frac{\sqrt{3} \cdot (\tau_0 - \tau_{cr})}{2 \cdot \sqrt{(1 + \alpha + \alpha^2)}}, \quad \alpha > 1.0. \quad (3.42)$$

gdje je:

$\alpha$  omjer stranica ploče  $\alpha = a/b$ .

Vrijednost  $\tau_{cr}$  dana je izrazom (3.20) ili (3.22).

### 3.4.4 Dvoosno tlačno opterećenje

Za ovaj kriterij pretpostavlja se da je dimenzija ploče  $a$  duljina ploče u smjeru većeg tlačnog naprezanja  $\sigma_y$ , dok je dimenzija ploče  $b$  širina ploče u smjeru manjeg tlačnog naprezanja  $\sigma_x$ . Budući da interakcijski izrazi za određivanje  $\sigma_{yu}$  i  $\sigma_{xu}$  vrijede za omjere stranica  $a/b \geq 1$  to je potrebno koordinatne osi  $x$  i  $y$ , a time i naprezanja  $\sigma_y$  i  $\sigma_x$  prilagoditi postavljenom uvjetu  $a/b \geq 1$ .

#### Određivanje $\sigma_{yu}$

Da bi se izbjegao kolaps oplata između ukrepa (granično nosivo stanje) izložene tlačnim naprezanjima  $\sigma_y$  i  $\sigma_x$ , naprezanje  $\sigma_y$  bi trebalo biti manje od  $\sigma_{yu}$ , gdje  $\sigma_{yu}$  i  $\sigma_x$  trebaju zadovoljiti sljedeći interakcijski izraz [8]:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,ul}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yu}}{\sigma_{y,ul}}\right)^2 - \eta \cdot \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,ul}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{yu}}{\sigma_{y,ul}}\right) = 1. \quad (3.43)$$

Vrijednosti  $\sigma_{x,ul}$  i  $\sigma_{y,ul}$  se određuju prema (3.38). Faktor  $\eta$  se određuje prema sljedećem izrazu:

$$\eta = \begin{cases} 0.25 & \frac{a}{b} \geq 3 \\ 3.2 \cdot e^{-0.35 \cdot \beta} - 2 & \frac{a}{b} = 1 \end{cases}. \quad (3.44)$$

Za slučaj kada je  $1 < a/b < 3$  i za poznati omjer  $\sigma_x/\sigma_{x,ul}$ , vrijednost  $\sigma_{yu}/\sigma_{y,ul}$  se dobije linearnom interpolacijom.

### Određivanje $\sigma_{xu}$

Kako bi se izbjegao kolaps oplata između ukrepa (granično nosivo stanje) izložene tlačnim naprežanjima  $\sigma_y$  i  $\sigma_x$ , naprežanje  $\sigma_x$  bi trebalo biti manje od  $\sigma_{xu}$ . Pri tome  $\sigma_{xu}$  i  $\sigma_y$  trebaju zadovoljiti sljedeći interakcijski izraz [8]:

$$\left(\frac{\sigma_{xu}}{\sigma_{x,ul}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,ul}}\right)^2 - \eta \cdot \left(\frac{\sigma_{xu}}{\sigma_{x,ul}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,ul}}\right) = 1. \quad (3.45)$$

Vrijednosti  $\sigma_{x,ul}$  i  $\sigma_{y,ul}$  se određuju prema (3.38). Vrijednost faktora  $\eta$  je dana (3.44).

Za slučaj kada je  $1 < a/b < 3$  i za poznati omjer  $\sigma_y/\sigma_{y,ul}$ , vrijednost  $\sigma_{xu}/\sigma_{x,ul}$  se dobije linearnom interpolacijom.

### 3.4.5 Dvoosno tlačno opterećenje i smično opterećenje

Da bi se izbjeglo elastično i plastično izvijanje oplata između ukrepa (stanje granične uporabljivosti) opterećene dvoosnim tlačnim naprežanjem  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ , te smičnim naprežanjem  $\tau$ , sljedeći interakcijski izraz mora biti zadovoljen:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,ul}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,ul}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{ul}}\right) = 1. \quad (3.46)$$

Vrijednosti  $\sigma_{x,ul}$  i  $\sigma_{y,ul}$  se određuju prema (3.38), dok je  $\tau_{ul}$  dan izrazom (3.42).

## 3.5 Izvijanje ukrepa

U ovom poglavlju promatra se samo granično nosivo stanje ukrepa sa sunosivom širinom budući da čim se ukrepa izvije dolazi do kolapsa strukture, [18]. Ukrepa i poprečni nosač sa sunosivom širinom analiziraju se za slučaj jednoosnog tlačnog naprežanja i jednolikog pritiska. Budući da je ukrepa izravno pričvršćena na oplatu potrebno je uzeti u obzir njihovu interakciju. Ona se definira kroz pojam sunosive širine  $b_e$ .

### 3.5.1 Sunosiva širina

Sunosiva širina zapravo predstavlja širinu dijela oplata koji se deformira zajedno sa ukrepom koja je na njega pričvršćena. Za praktične svrhe često se pretpostavlja da se efektivna širina opločenja zajedno s ukrepom ponaša kao greda. Efektivna širina iznosi između 30 i 60 debljina oplata na koju je ukrepa pričvršćena, [8]. U tom se slučaju ne uzima se u obzir tip opterećenja, izgled strukture i rubni uvjeti. Kod određivanja sunosive širine koristi se ravninska teorija naprežanja. Prema [8] sunosiva širina ovisi o:

- rasponu ukrepa i povećava se s rasponom,
- prirodi opterećenja, ali ne i o iznosu, te je najmanja gdje postoji najveće smično naprežanje i na mjestima koncentriranih sila,
- rubnim uvjetima, osobito na rubovima oplata.



Ono što je važno za istaknuti je činjenica da sunosiva širina ne ovisi o debljini oplata.

U slučaju da je oplata opterećena tlačnim naprežanjem sunosiva širina se određuje obzirom na efekt izvijanja, dok se u slučaju opterećenja oplata jednolikim pritiskom sunosiva širina određuje obzirom na smičnu analizu (*shear lag*), [8].

U slučaju tlačnog naprežanja sunosiva širina pri djelovanju tlačnog naprežanja:

$$b_e = b \cdot \left( \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_0} \right), \quad (3.47)$$

gdje je:

$b$  razmak između ukrepa,

$\sigma_{ul}$  granična čvrstoća.

Za slučaj jednolikog pritiska sunosiva je širina prema [8] dana izrazom:

$$b_e = b \cdot \rho, \quad (3.48)$$

gdje je:

$$\rho = \frac{4}{\varphi} \cdot \frac{\sinh(\varphi) + \varphi}{3.51 \cdot \cosh(\varphi) + 0.84 \cdot \varphi^2 + 4.49}, \quad (3.49)$$

$$\varphi = \frac{\pi \cdot b}{l^s}.$$

Pri tome je  $l^s$  duljina ukrepe.

### 3.5.2 Izvijanje stupa (vrata) ukrepe

Granično nosivo stanje stupa ukrepe predstavljeno je maksimalnim opterećenjem kojeg stup ukrepe može izdržati i ovisi o početnom ekscentricitetu ukrepe, ekscentricitetu opterećenja,

poprečnom opterećenju, rubnim uvjetima, lokalnom izvijanju i zaostalim napreznjima. Eulerovo napreznje izvijanja stupa ukrepe predstavlja idealiziranu vrijednost koja ne uzima u obzir gore navedene faktore.

### Elastično područje izvijanja

Do izvijanja stupa ukrepe uslijed tlačnog napreznja neće doći ako je ono manje od  $\sigma_{cr}$  danog izrazima, [8]:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l^S}{r}\right)^2}, \quad \sigma_{cr} \leq \sigma_p \quad (3.50)$$

gdje je:

$l^S$  duljina ukrepe,

$r$  polumjer inercije ukrepe:  $r = \sqrt{I^S / A^S}$ ,

$I^S$  moment inercije ukrepe sa sunosivom širinom i

$A^S$  površina poprečnog presjeka ukrepe sa sunosivom širinom.

Eulerovo napreznje izvijanja predstavlja opterećenje pod kojim će se idealizirani stup ukrepe izviti. Realna ukrepa će imati nižu kritičnu vrijednost napreznja  $\sigma_{cr}$  od Eulerovog napreznja. Činjenica je da će trenutno izvijanje stupa ukrepe nastupiti samo kod idealizirane ukrepe (bez zaostalih napreznja i ekscentriteta).

### Plastično područje izvijanja

U slučaju da je vrijednost kritičnog napreznja određena prema (3.50) veća od granice proporcionalnosti, što znači prelazak u plastično područje izvijanja, potrebno je odrediti faktor proporcionalnosti  $c_s$  pomoću kojeg se određuje nova vrijednost za kritično napreznje  $\sigma_{cr}$ :

$$\sigma_{cr} = \sigma_0 - \frac{1}{c_s}, \quad \sigma_{cr} > \sigma_p, \quad (3.51)$$

gdje je  $c_s$  faktor dan izrazom:

$$c_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_p \cdot (\sigma_0 - \sigma_p)}, \quad \sigma_s = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l^s}{r}\right)^2}. \quad (3.52)$$

### 3.5.3 Izvijanje ukrepe kao grede

Da bi se izbjeglo izvijanje grede ukrepe, tlačno naprezanje  $\sigma$  i moment  $M$  induciran jednolikim pritiskom trebaju zadovoljiti sljedeći interakcijski izraz:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} + c \frac{M}{M_{fy}} = 1. \quad (3.53)$$

Budući da je ukrepa opterećena jednolikim pritiskom, a pretpostavka je da je upeta na svojim krajevima, moment  $M$  iznosi:

$$M = \frac{q \cdot (l^s)^2}{12}, \quad (3.54)$$

gdje je:

$q$  kontinuirano linijsko opterećenje ukrepe.

Faktor  $c$  određuje se prema sljedećem izrazu, [8]:

$$c = \frac{c_m}{1 - (\sigma/\sigma_{cr})} \geq 1, \quad (3.55)$$

$$c_m = 0.6 + 0.4 \cdot \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad (3.56)$$

gdje su:

$M_1$  manji iznos momenta u ravnini savijanja i

$M_2$  veći iznos momenta u ravnini savijanja.

U slučaju jednolikog pritiska vrijedi  $M_1 = M_2 = M$ , a inače vrijedi:

$M_1 / M_2 > 0$  za jednovalno savijanje,

$M_1 / M_2 < 0$  za dvovalno savijanje.

Moment pri kojem su prirubnice potpuno plastične  $M_{fy}$ :

$$M_{fy} = SM \cdot \sigma_0, \quad (3.57)$$

gdje je:

$SM = S_F + S_W + S_P$  modul plastičnosti ukrepe kod djelovanja jednolikog pritiska

**Tab. 3.1** Određivanje modula plastičnosti ukrepe

	$A_p^S > A_f^S + A_w^S$	$A_p^S < A_f^S + A_w^S$
$C_1$	$(A_p^S - A_w^S - A_f^S) / (2 \cdot A_p^S)$	$(A_w^S + A_f^S - A_p^S) / (2 \cdot A_w^S)$
$C_2$	$C_1^2 - C_1 + 0.5$	
$G$	$C_1 \cdot t$	$C_1 \cdot d^S$
$S_F$	$A_f^S \cdot (d^S + g + 0.5 \cdot t_f^S)$	$A_f^S \cdot (d^S - g + 0.5 \cdot t_f^S)$
$S_W$	$A_w^S \cdot (0.5 \cdot d^S + g)$	$A_w^S \cdot d^S \cdot C_2$
$S_P$	$A_p^S \cdot t \cdot C_2$	$A_w^S \cdot (g + 0.5 \cdot t)$

gdje su:

$d^S$  visina struka ukrepe,

- $t_f^S$  debljina prirubnice ukrepe,  
 $t$  debljina oplata,  
 $A_p^S$  površina poprečnog presjeka oplata (uključujući sunosivu širinu),  
 $A_w^S$  površina poprečnog presjeka struka ukrepe i  
 $A_f^S$  površina poprečnog presjeka prirubnice ukrepe.

Vrijednost za  $\sigma_{cr}$  određena je izrazom (3.50) za elastično odnosno (3.51) za plastično područje izvijanja.

### 3.5.4 Torzijsko-fleksijsko izvijanje

Osnovni slučaj izvijanja ukrepe opterećene jednoosnim tlačnim naprezanjem pretpostavlja da će se stup ukrepe izviti u ravnini jedne od osnovnih osi ukrepe bez rotacije poprečnog presjeka. Ova pretpostavka vrijedi za ukrepe koje imaju dvije osi simetrije poprečnog presjeka i gdje opterećenje djeluje u sjecištu osi, a ne vrijedi za poprečne presjeke koji imaju samo jednu ravninu simetrije ili uopće nisu simetrični.

Mogućnost torzijskog izvijanja stupa ukrepe javlja se kod tankostjenih struktura otvorenih presjeka koji pokazuju tendenciju simultanog savijanja i uvijanja pod utjecajem jednoosnog tlačnog naprezanja. Uslijed smanjenje torzione krutosti, vrijednost kritičnog naprezanja ovakvih ukrepa uglavnom je manja od vrijednosti kritičnog naprezanja dobivenog na osnovi izvijanja stupa ukrepe.

Pri određivanju vrijednosti kritičnog torziono/fleksijskog naprezanja promatraju se dva slučaja:

- poprečni presjek ukrepe s dvije ravnine simetrije i
- poprečni presjek ukrepe s jednom ravninom simetrije.

#### Poprečni presjek ukrepe s dvije ravnine simetrije

U ovom slučaju centar smika i centar osi inercije se poklapaju pa se torziono izvijanje poistovjećuje sa fleksijskim. Položaj centra smika ukrepe spojene na oplatu određuje se prema sljedećem izrazu, [8]:

$$z_0 = \frac{I_l^{sf}}{I_l^s} \cdot d^s, \quad (3.58)$$

gdje su:

$d^s$  visina struka ukrepe,

$I_l^s$  moment inercije ukrepe sa sunosivom širinom oko osi kroz struk ukrepe i

$I_l^{sf}$  moment inercije prirubnice ukrepe oko osi kroz struk ukrepe.

#### *Elastično područje izvijanja*

Da bi se izbjeglo torzijsko/fleksijsko elastično izvijanje ukrepe  $\sigma_{ct}$ , tlačno naprezanje  $\sigma$  koje djeluje na ukrepu trebalo bi biti manje od  $\sigma_{ct}$ :

$$\sigma_{ct} = \frac{1}{I_0^s} \cdot \left( G \cdot J^s + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w^s}{l^{s2}} \right) \quad \sigma_{ct} \leq \sigma_p, \quad (3.59)$$

gdje su:

$G$  modul smika materijala ukrepe,

$l^s$  duljina ukrepe,

$I_0^s$  polarni moment inercije ukrepe (bez oplata) oko centra smika,

$J^s$  torziona konstanta ukrepe:  $J^s = 1/3 \cdot (d^s \cdot t_w^{s3} + b_f^s \cdot t_f^{s3})$ ,

$C_w^s$  koeficijent vitoperenja ukrepe:  $C_w^s = 1/12 \cdot d^{s2} \cdot t_f^s \cdot b_f^{s3}$ ,

$t_w^s$  debljina struka ukrepe,

$b_f^s$  širina prirubnice ukrepe i

$t_f^s$  debljina prirubnice ukrepe.

Vrijednosti za torzionu konstantu ukrepe  $J^s$  i koeficijent vitoperenja ukrepe  $C_w^s$  određuju se prema [19] uzimajući u obzir samo dimenzije ukrepe bez sunosive širine. Oplata neznatno sudjeluje u pružanju otpora vitoperenju pa se stoga njen utjecaj zanemaruje.

*Plastično područje izvijanja*

U slučaju da je vrijednost kritičnog naprezanja  $\sigma_{ct}$  određena prema gore navedenom izrazu veća od granice proporcionalnosti, što znači prelazak u plastično područje izvijanja, potrebno je odrediti novu vrijednost kritičnog naprezanja uz korištenje pomoćne vrijednosti  $\sigma_t$ , [18]:

$$\sigma_{ct} = \sigma_0 \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_p \cdot (1 - \sigma_p / \sigma_0)}{\sigma_t} \right] \quad \sigma_{ct} > \sigma_p \quad (3.60)$$

gdje je:

$$\sigma_t = \frac{1}{I_0^S} \cdot \left( G \cdot J^S + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w^S}{l^2} \right) \quad (3.61)$$

**Poprečni presjek ukrepe s jednom ravninom simetrije**

U ovom slučaju centar smika i centar osi inercije se ne poklapaju pa se granično nosivo stanje dobije kombinacijom torzijskog i fleksijskog izvijanja. Da bi se izbjeglo torzijsko/fleksijsko izvijanje ukrepe, tlačno naprezanje  $\sigma$  koje djeluje na ukrepu trebalo bi biti manje od  $\sigma_{tfe}$  ili  $\sigma_{tfp}$ , [18]:

*Elastično područje izvijanja  $\sigma_{tfe} \leq \sigma_p$* 

$\sigma_{tfe}$  je najmanji korijen sljedećeg izraza:

$$\frac{I_c^S}{I_0^S} \cdot \sigma_{tfe}^2 - \sigma_{tfe} \cdot (\sigma_{cr} + \sigma_t) + \sigma_{cr} \cdot \sigma_t = 0, \quad (3.62)$$

gdje je:

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{1}{I_0^S} \cdot \left( G \cdot J^S + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w^S}{l^S} \right) \quad (3.63)$$

$I_c^S$  polarni moment inercije ukrepe (bez oplate) oko centra dviju osi inercije.

Vrijednost  $\sigma_{cr}$  je određena je izrazom (3.50) odnosno (3.51).

*Plastično područje izvijanja  $\sigma_{tfe} > \sigma_p$*

$$\sigma_{tfe} = \sigma_0 \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_p \cdot (1 - \sigma_p / \sigma_0)}{\sigma_{tfe}} \right] \quad (3.64)$$

U slučaju da je vrijednost  $\sigma_t$  izračunata u gornjim izrazima manja od vrijednosti  $\sigma_{cr}$  koja se dobije prema izrazu (3.50) odnosno (3.51) tada je potrebno ugraditi koljena protiv torzijsko/fleksijskog izvijanja. Razmak koljena  $s$  ne bi trebao biti veći od, [18]:

$$s = b \cdot 0.44 \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} \quad (3.65)$$

### 3.5.5 Plastično savijanje ukrepe

Da bi se izbjeglo plastično savijanje ukrepe, maksimalno kontinuirano linijsko opterećenje ukrepe  $q$  trebalo bi biti manje od  $q_u$ , [18]. Pri tome se promatraju dva slučaja: čisto savijanje (djeluje samo pritisak) i savijanje s aksijalnom silom (djeluju pritisak i aksijalna sila).



**Čisto savijanje**

$$q_u = \frac{16 \cdot M_s}{(l^s)^2}, \quad (3.66)$$

Moment pri kojem ukrepa potpuno plastična  $M_0$ :

$$M_0 = SM \cdot \sigma_0, \quad (3.67)$$

gdje je:

$SM$  modul plastičnosti ukrepe kod djelovanja jednolikog pritiska dan u Tab. 3.1.

**Savijanje s aksijalnom silom**

$$q_u = \frac{16 \cdot M_a}{(l^s)^2} \quad (3.68)$$

Vrijednost  $M_a$  se određuje pomoću izraza:

$$\frac{M_a}{M_0} + \left( \frac{P}{P_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{A_w^s}{A_c^s} - \left( \frac{A_w^s}{A_c^s} \right)^2} = 1 \quad \frac{F_a}{F_0} \leq \frac{A_w^s}{A_c^s}, \quad (3.69)$$

$$\frac{M_a}{M_0} \cdot \left( 1 - \frac{A_w^s}{2 \cdot A_c^s} \right) + \frac{P}{P_0} = 1 \quad \frac{F_a}{P_0} > \frac{A_w^s}{A_c^s}$$

gdje su:

$A_c^s$  površina poprečnog presjeka ukrepe (uključujući sunosivu širinu),

$A_w^s$  površina poprečnog presjeka struka ukrepe,

$F_a$  aksijalna sila koja djeluje na ukrepu i

$F_0$  aksijalna sila potpune plastičnosti ( $F_0 = \sigma_0 \cdot A_c^s$ ).

### 3.5.6 Stabilnost prirubnice i struka ukrepe

U nastavku su dani kriteriji koji moraju biti ispunjeni da bi se osigurala stabilnost prirubnice odnosno struka ukrepe sa sunosivom širinom.

#### Prirubnica

Da bi se zadovoljila stabilnost i čvrstoća, dimenzije prirubnice bi trebale zadovoljiti sljedeći izraz, [18]:

$$\frac{b_f^S}{t_f^S} < 0.56 \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} \quad (3.70)$$

gdje su:

$b_f^S$  širina prirubnice ukrepe i

$t_f^S$  debljina prirubnice ukrepe.

Tlačno naprezanje koje djeluje na ukrepu trebalo bi biti manje od  $\sigma_{cr}$ , [18]:

$$\sigma_{cr} = 0.4E \left( \frac{t_f^S}{b_f^S} \right)^2 \quad (3.71)$$

Ukoliko prirubnicu ukrepe promatramo kao slobodno oslonjenu prema [17] koeficijent izvijanja u skladu s relacijom (3.8)

$$k_{c,f} = \left( \frac{6}{\pi} \right)^2 \left\{ (1 - \nu_e) + \frac{1}{6} \left( \frac{mm\pi b}{a} \right)^2 \right\} \quad (3.72)$$

Ako prirubnicu možemo smatrati upetom na struku koeficijent izvijanja prema [17], glasi:

$$k_{c,f} = 0.83 - 0.93v_e + 1.34 \left( \frac{a}{mm\pi b} \right)^2 + 0.10 \left( \frac{mm\pi b}{a} \right)^2. \quad (3.73)$$

Pri tome su:

$a$  duljina prirubnice,

$b$  širina prirubnice,

$mm$  broj poluvalova u uzdužnom smjeru.

### Struk

Da bi se zadovoljila stabilnost i čvrstoća struka, sljedeći uvjet bi trebao biti ispunjen, [18]:

$$\frac{d^S}{t_w^S} < 2.38 \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} \cdot \left( 1 - 1.4 \cdot \frac{F}{F_0} \right) \frac{F}{F_0} \leq 0.27$$

$$\frac{d^S}{t_w^S} < 1.48 \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} \frac{F}{F_0} > 0.27$$
(3.74)

gdje su:

$d^S$  visina struka ukrepe i

$t^S$  debljina struka ukrepe.

Tlačno naprezanje koje djeluje na ukrepu trebalo bi biti manje od  $\sigma_{cr}$ , [18]:

$$\sigma_{cr} = 3.62 \cdot E \cdot \left( \frac{t_w^S}{d^S} \right)^2. \quad (3.75)$$

### 3.6 Uzdužno ukrepljeni paneli

U ovom dijelu opisano je izvijanje ravnih pravokutnih uzdužno ukrepljenih panela opterećenih jednoosnim i dvoosnim tlačnim naprežanjem, smičnim naprežanjem i jednolikim pritiskom.

Uzdužno ukrepljeni panel može se izviti na dva različita načina. Prvi način je da se izvije cijeli panel što znači da su se ukrepe panela izvile zajedno s oplatom - *overall buckling*, a drugi način je da se izvije samo ukrepa ili ploča između ukrepa panela - *local buckling*.

Način na koji će se uzdužno ukrepljeni panel pod djelovanjem tlačnog naprezanja izviti uglavnom ovisi o ukrepama. Dva su osnovna zahtjeva koja se postavljaju pred ukrepe:

- moraju imati dovoljnu torzionu stabilnost tako da se ne izviju prije oplata između ukrepa panela,
- lateralna krutost ukrepa mora biti dovoljna da se spriječi izvijanje cijelog panela.

Za praktične svrhe, izvijanje ukrepa zajedno s opločenjem je sinonim izvijanja cijelog panela i budući da nastupa iznenada ovakvo stanje izvijanja je nepoželjnije od ostalih stanja izvijanja.

Iz gore navedenog proizlazi da je prvi i osnovni zahtjev na ukrepe da su jake koliko i oplata, što znači da su krute i stabilne toliko da izvijanje cijelog panela (*overall buckling*) ne prethodi izvijanju oplata između ukrepa panela. U određivanju kritičnih naprezanja uzdužno ukrepljenog panela pretpostavlja se da je panel slobodno oslonjen i da elementi ukrepa panela nisu podvrgnuti stanju nestabilnosti. Izvijanje uzdužno ukrepljenog panela izbjegava se zadovoljavanjem sljedećih izraza koji su definirani u kriterijima ograničenja te koji ovise o vrsti opterećenja panela.

### 3.6.1 Jednoosno tlačno naprezanje

#### Određivanje $\sigma_{y,cr}$

Da bi se izbjeglo elastično i plastično izvijanje (stanje granične uporabljivosti) uzdužno ukrepljenog panela, tlačno naprezanje  $\sigma_y$  bi trebalo biti manje od kritičnog naprezanja  $\sigma_{y,cr}$ , [19].

#### *Elastično područje izvijanja*

Izraz za kritično naprezanje je dobiven iz Euler-ovog izraza za izvijanje stupa ukrepe.

$$\sigma_{y,cr} = \left( \frac{b_e \cdot t + A_w^S + A_f^S}{b \cdot t + A_w^S + A_f^S} \right) \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\left( \frac{a}{\rho_e} \right)_{eq}^2}, \quad \sigma_{y,cr} \leq \sigma_P \quad (3.76)$$

gdje su:

$a$  duljina panela,

$b$  razmak između ukrepa,

$b_e$  sunosiva širina ukrepa,

$t$  debljina oplata,

$A_w^S$  površina poprečnog presjeka struka ukrepe,

$A_f^S$  površina poprečnog presjeka prirubnice ukrepe i

$\left( \frac{a}{\rho_e} \right)_{eq}$  vrijednost omjera vitkosti:

$$\left( \frac{a}{\rho_e} \right)_{eq}^2 = \frac{C_{\Pi} \cdot a}{\sqrt{\frac{I_x^S}{(b_e \cdot t + A_w^S + A_f^S)}}}, \quad (3.77)$$

gdje je:

$I_x^S$  moment inercije ukrepe sa sunosivom širinom u x smjeru,

$C_{\Pi}$  parametar panela.

Za kratke panele vrijednost  $C_{\Pi}$  je jednaka 1, a za druge panele iznosi:

$$C_{\Pi} = \min \left( 1; \frac{1}{\Pi} \sqrt{\frac{\gamma_x}{2 \cdot (1 + \sqrt{1 + \gamma_x})}} \right), \quad (3.78)$$

gdje je:

$\gamma_y$  zahtijevana krutost uzdužnih ukrepa.

Kod analize izvijanja uzdužno ukrepljenih panela postoji neki minimalni omjer krutosti  $\gamma_{\min}^B$  koji daje maksimalnu graničnu vrijednost čvrstoće izvijanja. Isto tako kod analize granične nosive čvrstoće postoji značajni omjer krutosti  $\gamma_{\min}^U$ . U slučaju da je minimalna zahtijevana krutost  $\gamma_y < \gamma_{\min}^B$  kolaps cijelog panela nastupa nakon izvijanja panela, a ako je  $\gamma_{\min}^B < \gamma_y < \gamma_{\min}^U$  kolaps cijelog panela nastupa nakon lokalnog izvijanja, dok u slučaju  $\gamma_y > \gamma_{\min}^U$  nastaje lokalni kolaps poslije lokalnog izvijanja oplata. U nekim slučajevima za različite kombinacije omjera duljine i širine panela te broja ukrepa, postoji samo slučaj lokalnog kolapsa i lokalnog izvijanja i u tom slučaju je  $\gamma_{\min}^B = \gamma_{\min}^U$ .

Zahtijevana krutost uzdužnih ukrepa, potrebna da izvijanje cijelog panela ne prethodi izvijanju oplata između ukrepa, predstavljena je parametrom  $\gamma_x$  koji predstavlja omjer krutosti na savijanje kombinacije ukrepa-oplata i savojne krutosti same oplata te bi njegov iznos trebao biti veći od parametra minimalne krutosti  $\gamma_{\min}^U$  ( $\gamma_y > \gamma_{\min}^U$ ):

$$\gamma_y = \frac{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_x^S}{b_e \cdot t^3}. \quad (3.79)$$

Vrijednost parametra  $\gamma_{\min}^U$  dana je u ovisnosti o broju ukrepa, [8], [19].

Za panel ukrepljen s jednom centralnom ukrepom vrijednost parametra  $\gamma_{\min}^U$  je manja od vrijednosti proračunatih pomoću izraza (3.80) (3.81).

$$\gamma_{\min}^U = 22.8 \cdot \Pi + (2.5 + 16 \cdot \delta_x) \cdot \Pi^2 - 10.8 \cdot \sqrt{\Pi} \quad (3.80)$$

$$\gamma_{\min}^U = 48.8 + 112 \cdot \delta_x (1 + 0.5 \cdot \delta_x), \quad (3.81)$$

Panel ukrepljen s dvije jednako razmaknute ukrepe poprima manju vrijednost od proračunate temeljem formula (3.82) i (3.83).

$$\gamma_{\min}^U = 43.5 \cdot \sqrt{\Pi^3} + 36 \cdot \delta_x \cdot \Pi^2, \quad (3.82)$$

$$\gamma_{\min}^U = 288 + 610 \cdot \delta_x + 325 \cdot \delta_x^2, \quad (3.83)$$

Za proizvoljan broj ukrepa može se primijeniti izraz:

$$\gamma_{\min}^U = \delta_x \cdot (1 + N_B^2 \cdot \Pi^2)^2 + \frac{4}{\pi} \cdot \Pi \cdot (1 + N_B^2 \cdot \Pi^2) \cdot \sqrt{2 + N_B^2 \cdot \Pi^2}. \quad (3.84)$$

Parametri korišteni u izrazu za minimalnu krutost  $\gamma_{\min}^U$  su:

$$\delta_y = \frac{A_w^S + A_f^S}{b_e \cdot t}, \quad \Pi = \frac{a^C}{Y}, \quad N_B = 1 + m. \quad (3.85)$$

Budući da su uzdužno ukrepljeni paneli tako dimenzionirani da izvijanje ploče prethodi izvijanju cijelog panela potrebno je uzeti sunosivu širinu koja odgovara jednom stvarnom preuzimanju naprezanja. Stoga, postupak određivanja  $\sigma_{y,cr}$  provodi iterativno na sljedeći način:

1. Pretpostavi se neka početna vrijednost za  $b_e$ .
2. Izračuna se vrijednost za  $\delta_x$ ,  $I_x^S$ ,  $\gamma_x$  i  $(a/\rho_e)_{eq}$ .
3. Izračuna se vrijednost  $(\sigma_e)_{cr}$  prema izrazu (3.86). Provjerava se je li dobivena vrijednost manja od kritičnog naprezanja izvijanja oplata između ukrepa  $\sigma_{cr}$  prema (3.87).

$$(\sigma_e)_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{a}{\rho_e}\right)_{eq}^2} \quad (3.86)$$

$$\sigma_{cr} = 3.62 \cdot E \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2. \quad (3.87)$$

4. Koristeći vrijednost  $(\sigma_e)_{cr}$ , određuje se vrijednost  $b_e$  pomoću izraza:

$$b_e = \frac{\pi \cdot t}{\sqrt{3 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot \sqrt{\frac{E}{(\sigma_e)_{cr}}} \quad (3.88)$$

5. Ponavlja se korak 2-4 sve dok  $b_e$  konvergira.

6. Određuje se  $\sigma_{y,cr}$ .

U slučaju da je vrijednost kritičnog naprezanja  $\sigma_{y,cr}$  određena prema gore navedenom postupku veća od granice proporcionalnosti, što znači prelazak u plastično područje izvijanja, tada se određuje nova vrijednost naprezanja.

#### Plastično područje izvijanja

$$\sigma_{y,cr} = \sigma_0 \cdot \left(1 - \frac{\sigma_0}{4 \cdot \sigma_l}\right) \quad \sigma_{y,cr} > \sigma_p, \quad (3.89)$$

gdje je:

$$\sigma_{\bar{I}} = \left(\frac{b_e \cdot t + A_w^S + A_f^S}{b \cdot t + A_w^S + A_f^S}\right) \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{a^C}{\rho_e}\right)_{eq}} \quad (3.90)$$

naprezanje koje se određuje prema postupku navedenom za elastično područje izvijanja.



**Određivanje  $\sigma_{x,cr}$** 

Da bi se izbjeglo elastično izvijanje uzdužno ukrepljenog panela (stanje granične uporabljivosti), tlačno naprezanje  $\sigma_x$  trebalo bi biti manje od  $\sigma_{x,cr}$ , [18], [19]:

$$\sigma_{x,cr} = k_C \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad \sigma_{x,cr} \leq \sigma_p. \quad (3.91)$$

Faktor  $k_C$  daje ovisnost kritičnog naprezanja o omjeru stranica i određuje se prema izrazu (3.50) odnosno (3.51).

**3.6.2 Dvoosno tlačno naprezanje i smično naprezanje**

Analitički i eksperimentalni rezultati izvijanja uzdužno ukrepljenog panela pri djelovanju kombiniranih tlačnih i smičnih naprezanja su rijetki. Do rješenja se dolazi prilagođavanjem podataka za neukrepljene ploče na uzdužno ukrepljene panele.

Za neukrepljene ploče postavlja se interakcijski izraz, [19]:

$$R_y + R_s^2 = 1 \quad (\alpha \geq 1), \quad (3.92)$$

gdje je:

$R_y$  omjer tlačnog naprezanja kada izvijanje nastupa pri kombinaciji smičnog i tlačnog naprezanja i iznosa kritičnog naprezanja kod djelovanja samo jednoosnog tlačnog naprezanja:

$$R_y = \frac{\sigma_y^C}{\sigma_{y,cr}}, \quad (3.93)$$

$R_s$  omjer smičnog naprezanja kada izvijanje nastupa pri kombinaciji smičnog i tlačnog naprezanja i iznosa kritičnog naprezanja kod djelovanja samo smičnog naprezanja:

$$R_s = \frac{\tau}{\tau_{cr}}. \quad (3.94)$$

Metodom konačnih elemenata analizirano je izvijanje beskonačno širokih uzdužno ukrepljenih panela pod djelovanjem tlačnog i smičnog naprezanja, [8]. Pretpostavljeno je ukrepe imaju i savojnu i torzionu krutost. Pokazano je da dobiveni rezultati sljede parabolichnu raspodjelu ( $R_y + R_s^2 = 1$ ) za ( $\alpha \geq 1$ ).

Ako se uzme u obzir i tlačno naprezanje u poprečnom smjeru dobije se nešto promijenjen interakcijski izraz. Da bi se izbjeglo izvijanje uzdužno ukrepljenog panela (stanje granične uporabljivosti), tlačna naprezanja  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  i smično naprezanje  $\tau$  trebali bi zadovoljiti sljedeći interakcijski izraz, [19]:

$$\frac{0.625 \cdot \left(1 + \frac{0.6}{\alpha}\right) \cdot R_x}{1 - 0.625 \cdot R_y} + \frac{R_s^2}{1 - R_y} = 1 \quad \text{za } \alpha \geq 1, \quad (3.95)$$

gdje su:

$$R_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}}, \quad R_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}}, \quad R_s = \frac{\tau}{\tau_{cr}}. \quad (3.96)$$

Gornji izraz se može upotrijebiti i za omjer  $\alpha < 1$  uz zamjenu mjesta  $R_y$  i  $R_x$  te ako se za proračun vrijednosti  $\alpha$  uvrsti omjer  $b/a$ .

Vrijednosti  $\sigma_{y,cr}$  i  $\sigma_{x,cr}$  su određene u slučaju jednoosnog tlačno opterećenja dok je vrijednost  $\tau_{cr}$  dana izrazom.

$$\tau_{cr} = k_s \cdot E \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad \text{za } a \geq b. \quad (3.97)$$

Vrijednost  $k_s$  predstavlja empirijski izraz koji pokriva cijelo područje geometrije panela te vrijednosti dobivene ovim izrazom ne odstupaju od numeričkih rezultata za više od 8% te je rasipanje rezultata na strani sigurnosti:

$$k_s = 4.5 \cdot \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{1}{N_B^2} + \left( \frac{N_B^2 - 1}{N_B^2} \right) \cdot \left( \frac{\varpi}{1 + \varpi} \right)^r \right], \quad (3.98)$$

gdje su:

$$\varpi = \frac{I_e^S}{l^S \cdot t^3}, \quad r = 1 - 0.75 \cdot \frac{b}{l^S}, \quad N_B = 1 + m, \quad (3.99)$$

$I_e^S$  moment inercije ukrepe (sunosiva širina je jednaka polovici razmaka ukrepa),

$l^S$  duljina ukrepe i

$m$  broj ukrepa panela.

U slučaju da je omjer stranica  $a/b < 1$ , za određivanje kritičnog smičnog naprezanja koristi se sljedeći izraz:

$$\tau_{cr} = k_s \cdot E \cdot \left( \frac{t}{a} \right)^2 \text{ za } a/b < 1. \quad (3.100)$$

odnosno:

$$\tau_{cr} = k_s \cdot E \cdot \left( \frac{t}{b} \right)^2 \text{ ako je } a \geq b. \quad (3.101)$$

Pri tome su:

$$\varpi = \frac{I_{se}}{l^S \cdot t^3}, \quad r = 0.25, \quad N_B = 1 + m. \quad (3.102)$$

### 3.6.3 Granično nosivo stanje uzdužno ukrepljenog panela

Za uzdužno ukrepljene panele sa slobodno oslonjenim krajevima razlikuju se tri osnovna tipa opterećenja za granično nosivo stanje:

- jednoliki pritisak koji uzrokuje negativni moment savijanja panela,
- jednoliki pritisak koji uzrokuje pozitivni moment savijanja panela,
- tlačno naprezanje.

Tlačno naprezanje se pojavljuje u kombinaciji s jednim od kontinuiranih opterećenja. Moment savijanja je pozitivan ako prouzrokuje tlak u oplati, a naprezanje u ravnini oplata je pozitivno ako je tlačno. Progib i početni ekscentritet su pozitivni kod pozitivnog momenta savijanja. Udaljenost od neutralne linije je pozitivna ako ide u smjeru oplata.

Svaki od ova tri osnovna tipa opterećenja je povezan s jednim ili više mogućih mehanizama kolapsa. Kada se tlačno naprezanje pojavljuje u kombinaciji sa jednim od prvih dva osnovna tipa opterećenja postoji interakcija između specifičnih mehanizama kolapsa, [19].

#### Mehanizmi kolapsa za pojedina opterećenja

##### *Negativni moment savijanja*

Kod ovog opterećenja oplata je vlačno napregnuta i stoga se ne može izviti. Budući da se neutralna linija nalazi blizu oplata, prirubnica ukrepe će prva popustiti. Povećanjem momenta savijanja popuštanje se širi kroz ukrepu i oplata počinje vlačno popuštati. Do kolapsa dolazi kada moment savijanja dostigne vrijednost formiranja plastičnog zgloba,  $M_p$ , sl. 28. Međutim, budući da je ukrepa tlačno opterećena, moguće je da dođe do njenog izvijanja. U tom slučaju do kolapsa dolazi i prije nego što se formira plastični zglob. Zbog toga za negativni moment savijanja sklopa oplata-ukrepa možda neće biti u stanju izdržati cijeli moment plastičnosti  $M_p$ .

##### *Pozitivni moment savijanja*

Pri ovom opterećenju oplata je tlačno napregnuta. Budući da je neutralna linija veoma blizu oplati, oplata neće biti jako napregnuta sve dok opterećenje ne postane jako veliko kada cijela ukrepa počinje vlačno popuštati, a oplata tlačno popuštati i na kraju se kolaps javlja kao rezultat

formiranja plastičnog zgloba. Za većinu brodskih panela neutralna linija plastičnosti leži unutar debljine oplata tako da je jedan dio oplata vlačno napregnut. To stabilizira oplatu da može podnijeti mnogo veći moment savijanja i da izbjegne izvijanje. Zbog toga kombinacija oplata-ukrepa može izdržati gotovo cijeli iznos momenta plastičnosti  $M_p$ .

### *Tlačno naprezanje*

Pri ovom opterećenju kolaps nastupa kada vanjski sloj tlačno opterećene prirubnice dostiže vrijednost granice tlačnog popuštanja materijala prirubnice. Postoje dva oblika kolapsa ovisno o tome koja je prirubnica tlačno opterećena (prirubnica ukrepe ili oplata). Ta dva opterećenja kolapsa nisu istog iznosa i kao mjerodavni se uzima onaj manjeg iznosa. Pod djelovanjem ovog opterećenja uzdužno ukrepljeni panel se može pretpostaviti kao grupa identičnih nesimetričnih greda, od kojih se svaka sastoji od ukrepe i prirubnice ukrepe efektivne širine  $b_e$ .

Tlačno naprezanje se uglavnom pojavljuje u kombinaciji s jednim od opterećenja momenata savijanja. U brodskim strukturama ukrepljeni paneli su obično opterećeni kombinacijom momenata savijanja (pozitivni, negativni) i naprezanjem u ravnini panela (tlak, vlak). Kombiniranjem opterećenja pojavljuje se interakcija gore navedenih mehanizama kolapsa.

## **Mehanizmi kolapsa kod kombinacije opterećenja**

### *Tlačno naprezanje i negativni moment savijanja*

Kod ove kombinacije opterećenja prirubnica ukrepe je tlačno napregnuta tako da do kolapsa dolazi zbog tlačnog popuštanja ili izvijanja prirubnice ukrepe. Pod utjecajem vanjskog tlačnog naprezanja povećava se tlačno naprezanje savijanja u prirubnici ukrepe, a smanjuje se vlačno naprezanje savijanja u oplati. Budući da tlačno naprezanje u ravnini panela povećava ukupni iznos tlačnog naprezanja u prirubnici ukrepe, to se tlačno popuštanje ukrepe događa naglo, dok do popuštanja oplata panela ne dolazi. Zbog toga ne može doći do formiranja plastičnog zgloba, kao što je to slučaj kada djeluje samo negativni moment savijanja. Umjesto toga, ukrepa postiže granicu preuzimanja opterećenja odmah nakon što je prirubnica popustila budući da efektivni moment inercije ukrepe postaje vrlo mali jer je sada samo oplata efektivna.

U većini slučajeva dolazi do formiranja lokalnog plastičnog mehanizma u prirubnici. Taj mehanizam uključuje velike poprečne progibe i rotacije ukrepe. Do kolapsa može doći i uslijed postranog izvijanja ukrepe. Budući da maksimalni iznos tlačnog naprezanja u prirubnici ukrepe mora biti manji od iznosa granice popuštanja  $\sigma_0$  da bi se izbjeglo formiranje lokalnih plastičnih mehanizama, to će se postrano izvijanje izbjeći ako se postavi zahtjev da iznos kritičnog naprezanja uslijed postranog izvijanja  $\sigma_T$ , dobiven iz teorije elastičnosti, mora biti manji od  $\sigma_0$ . Budući da se kolaps pojavljuje kada prirubnica ukrepe dostigne iznos granice popuštanja materijala (ili manji ako je  $\sigma_T < \sigma_0$ ), ukrepa ostaje potpuno elastična do pojave kolapsa. Da bi se izbjegao kolaps uzdužno ukrepljenog panela (granično nosivo stanje), tlačno naprezanje  $\sigma_y$  trebalo bi biti manje od  $\sigma_{y,ul}$ , [19]:

$$\sigma_{y,ul} = R \cdot \sigma_F, \quad (3.103)$$

gdje su:

$R$  bezdimenzijski parametar,

$\sigma_F$  minimalna vrijednost naprezanja:  $\sigma_F = \min(\sigma_0, \sigma_T)$ ,

$\sigma_0$  granica popuštanja materijala i

$\sigma_T$  elastično naprezanje postranog izvijanja:

$$\sigma_T = \frac{\pi^2 \cdot E}{12 + 4 \cdot \frac{A_w^S}{A_f^S}} \cdot \left( \frac{b_f^S}{a} \right)^2. \quad (3.104)$$

Pri tome su:

$A_w^S$  površina poprečnog presjeka struka ukrepe,

$A_f^S$  površina poprečnog presjeka prirubnice ukrepe i

$b_f^S$  širina prirubnice ukrepe.

Bezdimenzijski parametar  $R$  se određuje prema sljedećem izrazu:

$$R = \frac{\zeta}{2} - \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} - \frac{1-\mu}{\lambda^2}}, \quad (3.105)$$

gdje su ostali parametri:

$$\zeta = 1 - \mu + \frac{1 + \eta}{\lambda^2}, \quad (3.106)$$

$$\mu = \frac{M_M \cdot y_f^S}{I_b^S \cdot \sigma_F}, \quad \lambda = \frac{a}{\pi \cdot \rho_M} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_F}{E}}, \quad \eta = \frac{(\delta_M + \Delta) \cdot y_f^S}{\rho_M^2}, \quad (3.107)$$

$M_M$  iznos maksimalnog momenta savijanja kod djelovanja samo jednolikog pritiska (pretpostavka je da se pojavljuje na sredini raspona ukrepe):

$$M_M = \frac{q \cdot a^2}{8}, \quad (3.108)$$

$q$  kontinuirano linijsko opterećenje,

$a$  duljina uzdužno ukrepljenog panela,

$\delta_M$  iznos maksimalnog progiba kod djelovanja samo jednolikog pritiska (pretpostavka je da se pojavljuje na sredini raspona ukrepe):

$$\delta_M = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot a^4}{E \cdot I_b^S}, \quad (3.109)$$

$I_b^S$  moment inercije ukrepe sa sunosivom širinom (sunosiva širina je jednaka razmaku ukrepa budući da je oplata ukrepe vlačno napregnuta),

$y_f^S$  udaljenost od pola debljine prirubnice ukrepe do neutralne osi grede (ukrepa i oplata),

$\rho_M$  polumjer inercije ukrepe sa sunosivom širinom:

$$\rho_M = \sqrt{\frac{I_b^S}{A^S}}, \quad (3.110)$$

$A^S$  površina poprečnog presjeka ukrepe sa sunosivom širinom (sunosiva širina je jednaka razmaku ukrepa) i

$\Delta$  početni ekscentritet ukrepe sa sunosivom širinom:

$$\Delta = -\frac{a}{750}. \quad (3.111)$$

### Tlačno naprezanje i pozitivni moment savijanja

#### *Tlačno popuštanje oplata*

Za slučaj male ili srednje vrijednosti momenta savijanja i tlačnog naprezanja u ravnini panela, kolaps se događa zbog tlačnog popuštanja oplata. Tlačno popuštanje oplata je složeni neelastični proces. Za većinu ploča kod kojih je omjer vitkosti  $\beta > 1$  odnos naprezanja i relativnog produljenja postaje nelinearan prije kolapsa. Prosječna krutost oplata je manja nego krutost oplata u nenapregnutom stanju. Smanjenje krutosti se očituje smanjenjem vrijednosti  $E$  pomoću vrijednosti faktora transformacije  $T_r$  ( $E_S = T_r \cdot E$ ), gdje je vrijednost  $T_r < 1$ . Na ovaj način pretpostavljeno je kao da je oplata napravljena iz drugog materijala kojem Young-ov modul ima vrijednost  $E_S$ . Matematički izraz za  $T_r$  je prikazan u nastavku.

Da bi se izbjegao kolaps uzdužno ukrepljenog panela (granično nosivo stanje), tlačno naprezanje  $\sigma_y$  trebalo bi biti manje od  $\sigma_{y,ul}$ , [19]:

$$\sigma_{y,ul} = \sigma_F \cdot R_{II} \cdot \left( \frac{A_r^S}{A^S} \right), \quad (3.112)$$

gdje su:

$\sigma_F$  ekvivalentno naprezanje popuštanja oplata,

$R_{II}$  omjer čvrstoće,



$A_{tr}^S$  površina transformiranog poprečnog presjeka ukrepe sa sunosivom širinom:

$$A_{tr}^S = b_{tr} \cdot t + A_w^S + A_f^S, \quad (3.113)$$

$b_{tr}$  transformirana širina oplata ukrepe:

$$b_{tr} = T_r \cdot b, \quad (3.114)$$

$T_r$  faktor transformacije,

$b$  razmak između ukrepa,

$A_w^S$  površina poprečnog presjeka struka ukrepe,

$A_f^S$  površina poprečnog presjeka prirubnice ukrepe i

$A^S$  površina poprečnog presjeka ukrepe sa sunosivom širinom (sunosiva širina je jednaka razmaku ukrepa).

Proračun  $\sigma_{y,ul}$  se provodi na slijedeći način. Za zadani jednoliki pritisak izračunaju se vrijednosti maksimalnog momenta savijanja  $M_M$  i maksimalni progib  $\delta_M$  za slučaj da djeluje samo jednoliki pritisak:

$$M_M = \frac{qa^2}{8}, \quad \delta_M = \frac{5}{384} \frac{qa}{EI_b^S}. \quad (3.115)$$

Zatim se izračunaju vrijednosti faktora transformacije  $T_r$  i ekvivalentno naprezanje popuštanja oplata  $\sigma_F$ .

$$T_r = 0.25 \cdot \left( 2 + \xi - \sqrt{\xi^2 - \frac{10.4}{\beta^2}} \right), \quad (3.116)$$

Pri tome je:

$$\xi = 1 + \frac{2.75}{\beta^2}, \quad \beta = \frac{b}{t} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}}. \quad (3.117)$$

Izraz za ekvivalentno naprezanje popuštanja oplata uzimaju u obzir i utjecaj smičnog naprezanja  $\tau$  i tlačnog naprezanja u poprečnom smjeru  $\sigma_x$ .

$$\sigma_F = \frac{T_r - 0.1}{T_r} \sigma_0 \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\tau}{\sigma_0} \right)^2} \left( 1 - \frac{\sigma_x}{\sigma_{x,ul}} \right), \quad (3.118)$$

gdje se vrijednost kritičnog tlačnog naprezanja  $\sigma_{x,ul}$  za poprečni smjer određuje prema izrazu:

$$\sigma_{x,ul} = \frac{b}{a} \cdot (T_r - 0.1) \cdot \sigma_0 + \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{0.63}{1 + 3.27 \cdot \frac{\delta_M}{\beta_l^2 \cdot t}} \cdot \frac{\sigma_0}{\beta_l^2} \quad a/b > 1, \quad (3.119)$$

$$\beta_l = \frac{a}{t} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}}, \quad \beta_l > 1. \quad (3.120)$$

Za transformiranu oplatu ukrepe koja sada ima širinu  $b_{tr} = T_r \cdot b$ , gdje je  $b$  razmak između ukrepa izračunati transformirane veličine poprečnog presjeka ukrepe  $A_{tr}^S$ , udaljenost neutralne linije ukrepe do sredine debljine transformirane oplata  $y_{p,tr}^S$ , transformirani polumjer inercije ukrepe sa oplatom  $\rho_{tr}$  i ekscentricitet  $\Delta_p$ .

Budući da se promatra kompozitna struktura, kod koje oplata i ukrepa imaju različite module elastičnosti, struktura se treba transformirati u ekvivalentnu sekciju koja ima jedinstveni modul elastičnosti. Kao referentni materijal uzima se materijal ukrepe, pa je potrebno površinu presjeka oplata pomnožiti sa faktorom transformacije  $T_r$ .

Za transformiranu neutralnu os određuje se transformirane veličine poprečnog presjeka ukrepe  $A_{tr}^S$ , udaljenost neutralne linije ukrepe do sredine debljine transformirane oplatae  $y_{p,tr}^S$  i moment inercije za transformiranu neutralnu os ukrepe  $I_{tr}^S$ .

Transformirani polumjer inercije ukrepe sa oplatom  $\rho_{tr}$  određuje se prema:

$$\rho_{tr} = \sqrt{\frac{I_{tr}^S}{A_{tr}^S}}. \quad (3.121)$$

Budući da je neutralna linija transformirane sekcije pomaknuta malo dalje od oplatae u odnosu na neutralnu liniju netransformirane sekcije koja je po definiciji mjesto djelovanja vanjske sile od tlačnog opterećenja, javlja se dodatni pozitivni ekscentritet koji stvara dodatni pozitivni moment u sekciji. Na taj način smanjuje se vrijednost naprezanja graničnog nosivog stanja.

Ekscentritet se određuje prema slijedećem izrazu:

$$\Delta_p = y_h^S \cdot (A_w^S + A_f^S) \cdot \left[ \frac{1}{A_{tr}^S} - \frac{1}{A^S} \right], \quad (3.122)$$

gdje su:

$y_h^S$  udaljenost neutralne linije ukrepe (bez oplatae) do sredine debljine oplatae,

$\Delta$  početni ekscentritet:  $\Delta = \frac{a}{750}$ .

Nakon toga se izračunaju parametri  $\lambda$ ,  $\eta$ ,  $\eta_p$ ,  $\mu$  potrebni za određivanje vrijednosti  $R_{II}$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a}{\pi \cdot \rho_{tr}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_F}{E}}, & \eta &= \frac{(\Delta + \delta_M) \cdot y_{p,tr}^S}{\rho_{tr}^2}, \\ \eta_p &= \frac{\Delta_p \cdot y_{p,tr}^S}{\rho_{tr}^2}, & \mu &= \frac{M_M \cdot y_{p,tr}^S}{I_{tr}^S \cdot \sigma_F}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Izračunati vrijednost  $R_{II}$ :

$$R_{\Pi} = \frac{\zeta_{\Pi}}{2} - \sqrt{\frac{\zeta_{\Pi}^2}{4} - \frac{1-\mu}{(1+\eta_p)} \cdot \lambda^2}, \quad (3.124)$$

gdje je:

$$\zeta_{\Pi} = \frac{1-\mu}{1+\eta_p} + \frac{1+\eta_p+\eta}{(1+\eta_p) \cdot \lambda^2}. \quad (3.125)$$

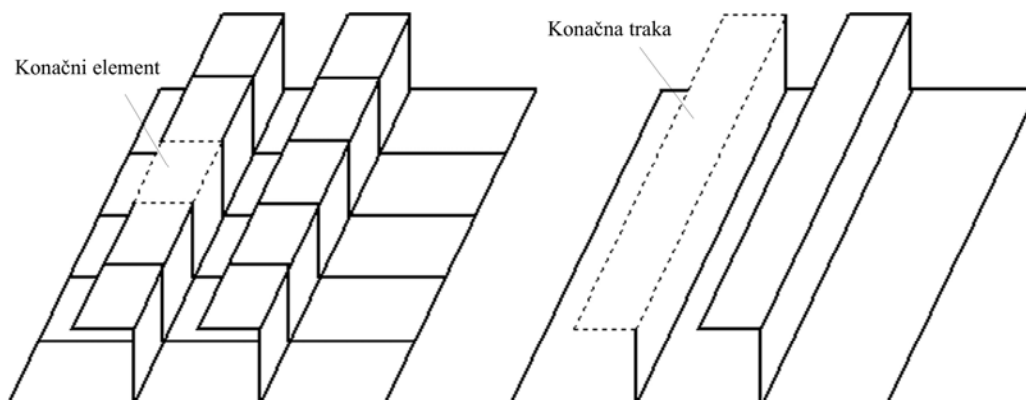
Izračuna se vrijednost  $\sigma_{y,ul}$ :

$$\sigma_{y,ul} = \sigma_F \cdot R_{\Pi} \cdot \left( \frac{A_{tr}^S}{A^S} \right). \quad (3.126)$$

## 4. METODA KONAČNIH TRAKA

### 4.1 Općenito

Pored metode konačnih elemenata (**Finite Element Method - FEM**) kao najsvestranije i najtočnije metode za proračun odziva tankostjenih konstrukcija, metoda konačnih traka (**Finite Strip Method - FSM**) se također može koristiti za proračun odziva i podobnosti nekih od njih. Ograničenje metode u proračunu odziva uzrokovano je činjenicom da kod nekih slučajeva rubnih uvjeta funkcija pomaka ne može istovremeno zadovoljiti uvjete pomaka i naprezanja na rubovima (npr. u slučaju kada su oba kraja ploče uklještena, funkcija koja zadovoljava uvjete pomaka na rubovima, za tangencijalna naprezanja daje nulu što ne odgovara stvarnosti). Kod proračuna podobnosti, a tu se prvenstveno misli na izvijanje, te činjenice nisu od primarnog značaja. Zbog toga će se daljnje tretiranje metode prilagoditi proračunu podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije.



sl. 30 Diskretizirani model dijela orebrene tankostjene konstrukcije

Metoda konačnih traka opisana u ovom radu se zasniva na metodi konačnih elemenata (formulacija pomaka). Osnovna razlika te dvije metode je u načinu diskretizacije kontinuuma. Metoda konačnih elemenata diskretizira kontinuum u elemente čije su dimenzije istog reda veličine dok metoda konačnih traka pretpostavlja da je duljina trake beskonačna. U stvarnosti to znači da je jedna dimenzija trake višestruko veća od druge. Na primjer kod analize uzdužno ukrepljenog panela poprečni se presjek diskretizira kao kod metode konačnih elemenata dok se u uzdužnom smjeru pretpostavlja jedna traka neovisno o duljini panela. Na sl. 30. prikazan je

pojednostavljeni model orebrene tankostjene konstrukcije diskretiziran metodom konačnih elemenata i metodom konačnih traka.

Kao posljedica načina diskretizacije kontinuuma proizlazi i upotreba metode konačnih traka. Usporedba ovih dviju metoda i opis primjene metode konačnih traka i metode konačnih elemenata dan je u Tab. 4.1.

**Tab. 4.1** Usporedba metode konačnih traka i metode konačnih elemenata

Metoda konačnih traka	Metoda konačnih elemenata
Koristi se uglavnom za strukture s poduprtim nasuprotnim krajevima, (oplata između ukrepa, mostovi, krovovi...), zadovoljavajuća točnost računanja.	Primjenjiva za bilo koji geometrijski oblik, rubne uvjete i materijale. Izrazito svestrana i precizna.
Karakteriziraju je matrice krutosti s uskim pojasom, što ima za posljedicu kratko vrijeme računanja.	Pojasi matrice krutosti su znatno širi, proračun traje duže i zahtijeva bolju opremu.
Mala količina ulaznih i izlaznih podataka.	Velika količina ulaznih podataka, veća vjerojatnost nastajanja pogreške, velika količina izlaznih podataka, teže interpretiranje rezultata.
Relativno laka za programirati.	Programi koriste složene tehnike proračuna i formiranja matrica krutosti

Konačne trake s obzirom na zakrivljenost možemo podijeliti na:

5. ravne (definiraju se u pravokutnom koordinatnom sustavu) i
6. zakrivljene (opisane su pomoću polarnih koordinata).

Zakrivljene konačne trake se koriste za specifične namjene, npr. mostovi. Osnovna ideja koja je prikazana u izvodima ravnih konačnih traka prilagodljiva je i na cilindrični koordinatni sustav.

Ovisno o broju čvorova koji definiraju poprečni presjek konačne se trake slično kao i konačni elementi dijele na:

7. obične konačne trake (imaju dva čvora u poprečnom smjeru, sl. 31) i
8. konačne trake s dodatnim čvorovima.

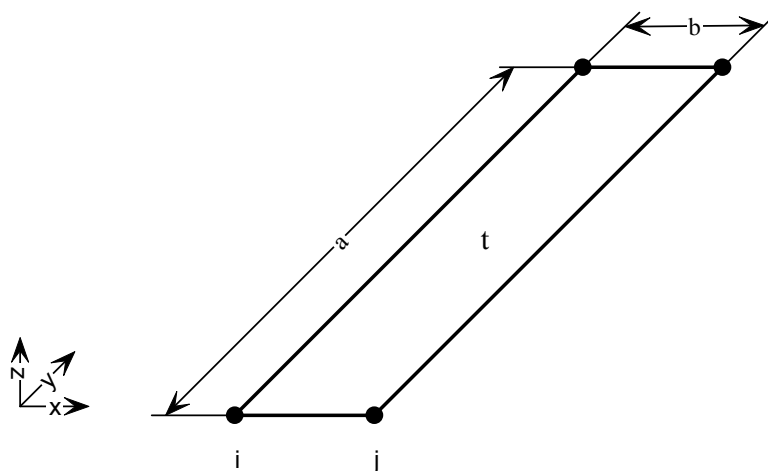
U nastavku su dani izvodi za obične konačne trake. Kod njih se konvergencija ka rješenju postiže povećanjem broja konačnih traka.

## 8.1 Formulacija konačne trake - metoda pomaka

Osnovne pretpostavke korištene u formulaciji konačne trake dane u nastavku proizlaze iz teorije ploča. One prema [3] glase:

9. Ploča koja se analizira je tanka što podrazumijeva da je odnos debljine ploče i tipične duljine stranice  $t/a < 0.05$ ,
10. Pomaci ploče i njihove derivacije su istog reda veličine kao i debljina tj. mali su u usporedbi s ostalim dimenzijama ploče,
11. Komponente deformacija su male i vrijedi Hooke-ov zakon,
12. Naprezanje u smjeru normale na srednju plohu ploče je zanemarivo, a deformacija se linearno mijenja po debljini (Kirchhoff-ova hipoteza).

Ukoliko se radi o geometrijski nelinearnoj formulaciji konačnih traka dodatne pretpostavke je potrebno uzeti u obzir, [22], [24].



sl. 31 Konačna traka u globalnom koordinatnom sustavu

Funkcija pomaka konačne trake u lokalnom koordinatnom sustavu se najčešće definira produktom polinoma  $P_m(x)$  kao funkcije oblika i višestruko derivabilne analitičke funkcije  $A_m(y)$ , [2], [3]. To je ujedno i razlog zašto ovaj pristup nazivamo još i semi-analitičkim. Na sl. 31 prikazana je konačna traka s dvije čvorne linije u globalnom koordinatnom sustavu.

U skladu s navedenim polje pomaka konačne trake se može prikazati kao:

$$\Delta(x, y) = \sum_{m=1}^r P_m(x) \cdot A_m(y) \quad (4.1)$$

Polinom  $P_m(x)$  je najčešće prvog (membransko stanje naprezanja) ili trećeg stupnja (savijanje), dok se kao analitička funkcija  $A_m(y)$  ovisno o rubnim uvjetima uglavnom koristi neka kombinacija trigonometrijskih funkcija.

Pomak konačne trake također se može prikazati kao produkt polinoma  $P_m(x)$  i interpolacijske funkcije  $B_m(y)$  (interpolacijska funkcija je najčešće  $B_3$  spline koji je pogodniji za zadavanje rubnih uvjeta i složenijih opterećenja, [25]). Tada polje pomaka trake glasi:

$$\Delta(x, y) = \sum_{m=1}^r P_m(x) \cdot B_m(y) \quad (4.2)$$

U ovom radu je obrađen takozvani semi-analitički pristup koji pomake opisuje prema (4.1).

### 12.1.1 Osnovne jednadžbe teorije elastičnosti

Kao što je već ranije spomenuto za analizu stabilnosti konstrukcija koristiti će se formulaciju pomaka. Matrice krutosti koje se pri tome dobiju izvode se polazeći od osnovnih jednadžbi teorije elastičnosti. Općeniti izraz za polje deformacija u pravokutnom koordinatnom sustavu  $x, y, z$  prema teoriji elastičnosti [26] glasi:



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\
\varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Zapisan u matričnom obliku izraz za deformaciju glasi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx} \} \tag{4.4}$$

Iz relacije (4.3) vidljivo je da se izraz za deformacije sastoji od linearnog i nelinearnog dijela, što se može kraće zapisati kao:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^L + \boldsymbol{\varepsilon}^N \tag{4.5}$$

Prethodno izvedene jednačbe se koriste prilikom formiranja elastične i geometrijske matrice krutosti konačne trake.

### 12.1.2 Pomaci, deformacije i naprezanja

Pretpostavimo da u skladu s navedenom formulacijom pomake  $\Delta_i = \{u \quad v \quad w\}$  možemo izraziti pomoću:

$$\Delta_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}, \quad i = x, y, z. \tag{4.6}$$

Pri tome su  $\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n\}$  pomaci čvorova (translacije i rotacije) i  $\mathbf{a}_i$  je redna matrica čiji su koeficijenti općenito funkcija koordinata  $x, y, z$ . Kombinirajući jednažbe (4.3) i (4.6) izraz za deformacije se prema [2] može zapisati kao:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}^* + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \\
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}^* + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

U izrazu (4.7) (\*) označava množenje elementa s elementom ( $C = A^* B = [c_{ij}] = [a_{(ij)} \cdot b_{(ij)}]$ ) dok zagrade ukazuju da se ne radi o tenzorskom produktu. Uvrstimo li u izraz (4.7) jednakost:

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial j}, \quad i, j = x, y, z, \tag{4.8}$$

on postaje

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}^L \cdot \mathbf{u} + \sum (\mathbf{b}_{i1} \mathbf{u})^* (\mathbf{b}_{i2} \mathbf{u}), \quad i = x, y, z. \tag{4.9}$$

U izrazu (4.9) indeksi 1 i 2 označavaju prvu odnosno drugu matricu u nelinearnim članovima deformacija prema izrazu (4.7).

Naprezanje  $\boldsymbol{\sigma}$  se dobije prema Hooke-ovu zakonu [26]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.10)$$

gdje  $\mathbf{D}$  predstavlja matricu elastičnih konstanti materijala.

Ovako dobivene matrice deformacije i naprezanja koriste se za određivanje unutarnje energije deformacije tijela.

### 12.1.3 Unutarnja energija deformacije i rad vanjskih sila

Unutarnja energija deformacije tijela koristeći izraz (4.10) može se zapisati kao:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (4.11)$$

Zamjenjujući izraz za deformaciju  $\boldsymbol{\varepsilon}$  njegovim linearnim i nelinearnim dijelom (prema jednadžbi (4.9) zanemarujući članove višeg reda, unutarnja energija postaje:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{L^T} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^L + 2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{L^T} \boldsymbol{\varepsilon}^N \right) dV. \quad (4.12)$$

Pri tome možemo smatrati da u linearnom dijelu vrijedi:

$$\boldsymbol{\sigma}^L = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^L. \quad (4.13)$$

Koristeći jednadžbu (4.9) izraz za unutarnju energiju deformacije poprima oblik:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[ \mathbf{u}^T \mathbf{b}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{b}^L \mathbf{u} + 2 \sum_i \boldsymbol{\sigma}^{L^T} (\mathbf{b}_{i1} \mathbf{u}) * (\mathbf{b}_{i2} \mathbf{u}) \right] dV. \quad (4.14)$$

Potencijalna energija vanjskog opterećenja se može zapisati kao:

$$W = -\int_A \Delta(x, y)q(x, y)dA = -\mathbf{u}^T \int_A \mathbf{a}^T q dA = -\mathbf{u}^T \mathbf{f}, \quad (4.15)$$

gdje je:

$q$  površinsko opterećenje koje se zadaje putem interpolacijske funkcije opterećenja.

Ukupna potencijalna energija sada glasi:

$$\Pi = U + W. \quad (4.16)$$

#### 12.1.4 Opći izraz za matrice krutosti konačne trake

Prema principu minimuma ukupne potencijalne energije vrijedi da je:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Ako u izraz (4.17) uvrstimo izraze (4.14) i (4.15) nakon sređivanja dobije se:

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}. \quad (4.18)$$

Jednadžba (4.18) predstavlja ravnotežu konačne trake. Njenim zapisivanjem u matričnom obliku dobije se:

$$\int_V \mathbf{b}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{b}^L dV \cdot \mathbf{u} + \int_V \sum_i (\mathbf{b}_{i1}^T \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{b}_{i2} + \mathbf{b}_{i2}^T \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{b}_{i1}) dV \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (4.19)$$

$\boldsymbol{\sigma}^D$  prikazan kao dijagonalna matrica.

Integrali u izrazu (4.19) predstavljaju elastičnu odnosno geometrijsku matricu krutosti konačne trake. Sukladno tome jednadžba (4.19) se može kraće zapisati kao:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G)\mathbf{u} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}, \\
\mathbf{k}_E &= \int_V \mathbf{b}^L{}^T \mathbf{D} \mathbf{b}^L dV, \\
\mathbf{k}_G &= \int_V \sum_i (\mathbf{b}_{i1}{}^T \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{b}_{i2} + \mathbf{b}_{i2}{}^T \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{b}_{i1}) dV.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Uočimo da je prema jednadžbi (4.20) geometrijska matrica krutosti ovisna o naprezanju. Kombiniranjem matrica krutosti pojedinih elemenata formira se globalna matrica krutosti konstrukcije:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G. \tag{4.21}$$

Analogno jednadžbi ravnoteže konačnog elementa, ravnotežu konstrukcije u globalnom koordinatnom sustavu možemo zapisati kao:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \tag{4.22}$$

gdje je:

- $\mathbf{U}$  vektor pomaka čvorova u globalnom koordinatnom sustavu,
- $\mathbf{F}$  vektor opterećenja u globalnom koordinatnom sustavu.

## 12.2 Analiza stabilnosti pomoću metode konačnih traka

Proračun stabilnosti elastične konačne trake pretpostavlja da se promjena geometrije trake, prije nego nastupi gubitak stabilnosti (izvijanje), nastala uslijed vanjskog opterećenja može zanemariti, [2]. U tome se slučaju nelinearne jednadžbe ravnoteže mogu djelomično linearizirati čime nastaje klasičan sustav jednadžbi čije rješenje daje kritično naprezanje izvijanja (*buckling eigenvalue problem*). U svrhu analize podobnosti konstrukcije zapišimo vektor opterećenja kao:

$$\mathbf{F} = \lambda \cdot \bar{\mathbf{F}}, \tag{4.23}$$

gdje su:

- $\lambda$  faktor proporcionalnosti,

$\bar{\mathbf{F}}$  normalizirani vektor vanjskog opterećenja.

Budući da je naprežanje  $\sigma$  proporcionalno zadanom opterećenju geometrijska matrica krutosti se može zapisati kao:

$$\mathbf{K}_G = \lambda \cdot \bar{\mathbf{K}}_G, \quad (4.24)$$

pri tome je:

$\bar{\mathbf{K}}_G$  geometrijska matrica krutosti za jedinično opterećenje.

Sukladno tome jednačba ravnoteže (4.22) prelazi u oblik:

$$(\mathbf{K}_E + \lambda \cdot \bar{\mathbf{K}}_G) \cdot \mathbf{U} = \lambda \cdot \bar{\mathbf{F}}, \quad (4.25)$$

Vektor pomaka se može pomoću jednačbe (4.25) napisati u obliku:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{K}_E + \lambda \cdot \bar{\mathbf{K}}_G)^{-1} \cdot \lambda \bar{\mathbf{F}}. \quad (4.26)$$

Vidimo da će čak i za beskonačno malu silu pomaci težiti u beskonačno ukoliko je determinanta sustava jednaka nuli:

$$\det(\mathbf{K}_E + \lambda \cdot \bar{\mathbf{K}}_G) = 0. \quad (4.27)$$

Budući da veliki pomaci zapravo znače izvijanje, a geometrijska matrica krutosti je normalizirana (dana za jedinično opterećenje), minimalna vrijednost faktora  $\lambda$  određuje kritično opterećenje izvijanja. Ona se u praksi najčešće izračunava rješavanjem homogenog linearnog sustava jednačbi nekim od standardnih rješavača vlastiti vrijednosti. Taj sustav glasi:

$$(\mathbf{K}_E + \lambda \cdot \bar{\mathbf{K}}_G) \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

Program FIST koristi standardnu matematičku biblioteku koja se isporučuje zajedno s programom *Compaq Visual Fortran v.6.6b* u kojem je sam kod i napisan. Proizvođač same biblioteke je *Visual Numerics*, [27].

### 12.3 Odabir funkcije oblika

Ovisno o problemu za koji će se koristiti konačne trake, posebnu pažnju potrebno je obratiti odabiru funkcije oblika. Pogrešno odabrana funkcija oblika će gotovo uvijek davati nelogične rezultate. Ponekad se može dogoditi da pogrešno odabrana funkcija oblika povećanjem broja konačnih traka konvergira, ali k pogrešnom rješenju što može dovesti do zabune da se radi o ispravnom rješenju. Da bi se osigurala točnost i konvergencija rješenju potrebno je ispuniti sljedeće zahtjeve:

13. analitička funkcija  $A_m(y)$  (interpolacijska funkcija  $B_m(y)$ ) mora zadovoljavati rubne uvjete problema koji se rješava,
14. polinom  $P_m(x)$  mora moći opisati stanje konstantne deformacije u poprečnom smjeru ( $x$ ) i
15. funkcija oblika mora zadovoljavati uvjete kompatibilnosti pomaka u smjeru ( $y$ ) na granici dviju susjednih traka.

#### 15.1.1 Odabir analitičke funkcije

Svojstvo derivabilnosti trigonometrijskih funkcija čini ih najčešćim analitičkim funkcijama koje se koriste za opisivanje pomaka konačne trake u uzdužnom smjeru. Najopćenitiji oblik trigonometrijske funkcije kojom se opisuje polje pomaka trake je prema [3]:

$$A_m(y) = C_1 \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_3 \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_4 \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (4.29)$$

Konstante  $C_1, \dots, C_4$  određuju se na temelju rubnih uvjeta problema koji se analizira.

U nastavku su opisane analitičke funkcije koje opisuju četiri najčešća karakteristična slučaja rubnih uvjeta.

### Slobodno oslonjeni krajevi

Ovo je najjednostavniji slučaj rubnih uvjeta, ali ujedno i najčešći u praksi. Koristi se za opisivanje ponašanja oplata između ukrepa. Analitička funkcija  $A_m(y)$  za taj slučaj mora zadovoljiti rubne uvijete (progib i zakrivljenost) na pozicijama  $y = 0$  i  $y = a$ :

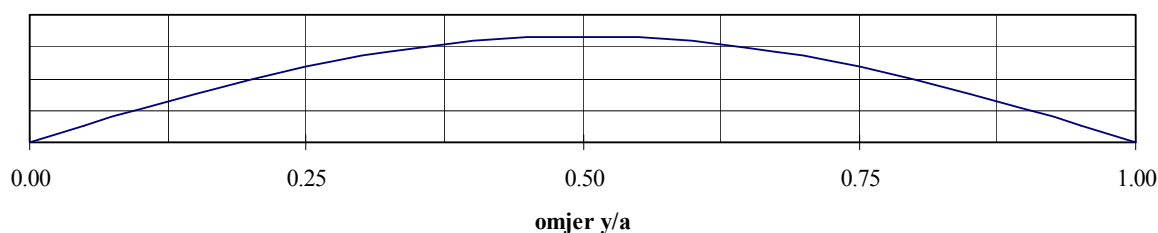
$$A_m(0) = 0, \quad A_m''(0) = 0, \quad A_m(a) = 0, \quad A_m''(a) = 0. \quad (4.30)$$

Prema (4.1) za analitičku funkciju za ovaj slučaj rubnih uvjeta glasi:

$$A_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (4.31)$$

Pri tome je  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

Izgled analitičke funkcije za ovaj slučaj rubnih uvjeta dan je na sl. 32.



sl. 32 Analitička funkcija za slučaj slobodno oslonjenih krajeva

Zbog svoje jednostavnosti te svojstava ortogonalnosti koje posjeduju trigonometrijske funkcije ova je analitička funkcija najprikladnija za izvođenje matrica krutosti konačne trake.



**Jedan uklješten kraj, a drugi slobodan**

Rubni uvjeti koje analitička funkcija  $A_m(y)$  mora zadovoljiti nalažu da progib i nagib u mjestu uklještenja  $y = 0$  moraju biti jednaki nuli. Zakrivljenost i njena prva derivacija na mjestu slobodnog kraja  $y = a$  također moraju biti jednaki nuli.

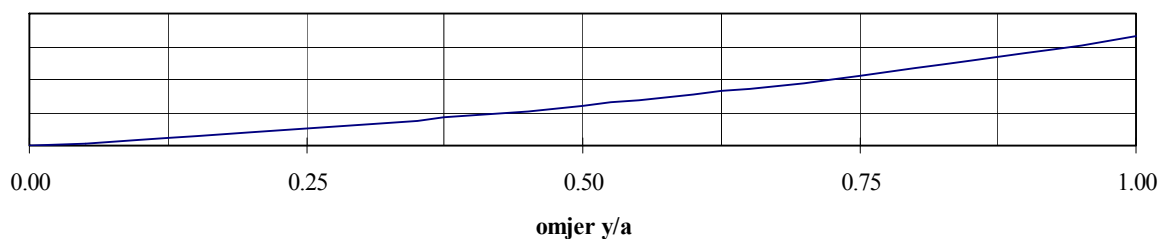
$$A_m(0) = 0, \quad A_m'(0) = 0, \quad A_m''(a) = 0, \quad A_m'''(a) = 0. \quad (4.32)$$

Prema [3] za ovaj slučaj rubnih uvjeta analitička funkcija glasi:

$$A_m(y) = \sin\left(\frac{2m-1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{2m-1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) - C \left( \cos\left(\frac{2m-1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) - \cosh\left(\frac{2m-1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) \right), \quad (4.33)$$

gdje je:  $C = \frac{\sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi\right) + \sinh\left(\frac{2m-1}{2} \pi\right)}{\cos\left(\frac{2m-1}{2} \pi\right) + \cosh\left(\frac{2m-1}{2} \pi\right)}$ .

Pri tome je  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Izgled analitičke funkcije dan je na sl. 33.



sl. 33 Analitička funkcija za konzolu

**Jedan kraj slobodno oslonjen, a drugi ukliješten**

Dio oplata koji se nalazi između jakog nosača i ukrepe odgovara ovom slučaju rubnih uvjeta. Sama analitička funkcija  $A_m(y)$  mora zadovoljiti kombinaciju uvjeta za ukliješten i slobodno oslonjen kraj koji glase:

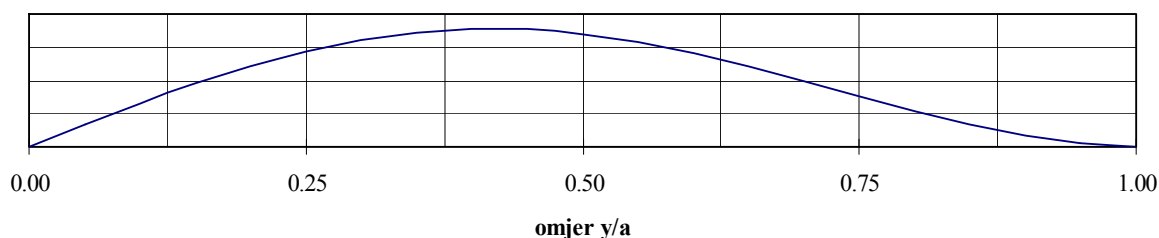
$$A_m(0) = 0, \quad A_m'(0) = 0, \quad A_m(a) = 0, \quad A_m''(a) = 0. \quad (4.34)$$

Analitička funkcija koja odgovara tim rubnim uvjetima je prikazana na sl. 34:

$$A_m(y) = \sin\left(\frac{4m+1}{4} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) - C \sinh\left(\frac{4m+1}{4} \cdot \frac{\pi y}{a}\right), \quad (4.35)$$

gdje je  $C = \frac{\sin\left(\frac{4m+1}{4} \pi\right)}{\sinh\left(\frac{4m+1}{4} \pi\right)}$ .

Pri tome je  $m = 1, 2, 3, \dots$



sl. 34 Prvi kraj slobodno oslonjen, drugi ukliješten

**Oba kraja ukliještena**

U slučaju kada su oba kraja ukliještena analitička funkcija  $A_m(y)$  mora zadovoljiti kriterije uklještenja na mjestu  $y = 0$  i  $y = a$  koji podrazumijevaju nulti progib i nagib.

$$A_m(0) = 0, \quad A_m'(0) = 0, \quad A_m(a) = 0, \quad A_m'(a) = 0. \quad (4.36)$$

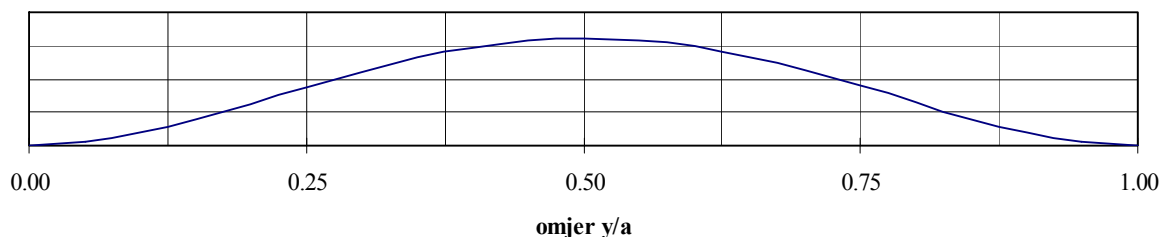
Analitička funkcija koja zadovoljava te rubne uvijete, a može se izvesti iz jednadžbe (4.1) glasi:

$$A_m(y) = \sin\left(\frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) - C \left( \cos\left(\frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) - \cosh\left(\frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\pi y}{a}\right) \right), \quad (4.37)$$

gdje je  $C = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2} \pi\right) - \sinh\left(\frac{2m+1}{2} \pi\right)}{\cos\left(\frac{2m+1}{2} \pi\right) - \cosh\left(\frac{2m+1}{2} \pi\right)}$ .

Pri tome je  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

Prikaz analitičke funkcije u ovisnosti o relativnoj duljini konačne trake dan je na sl. 35.



sl. 35 Izgled analitičke funkcije za oba ukliještena kraja

### 15.1.2 Odabir polinoma

Polinom  $P_m(x)$  opisuje polje pomaka poprečnog presjeka trake između dviju čvornih linija  $i$  i  $j$ , sl. 31. Izraz (4.1) koji opisuje polje pomaka konačne trake može se zapisati na slijedeći način:

$$\Delta(x, y) = \sum_{m=1}^r A_m(y) \cdot \sum_{k=1}^q [P_k(x)] \quad (4.38)$$

gdje je:  $m = 1, 2, 3, \dots, r$  i  $k = 1, 2, 3, \dots, q$ .

Koristeći se metodologijom metode konačnih elemenata, pomaci trake u poprečnom smjeru se mogu izraziti preko funkcije oblika  $\mathbf{N}_1(x)$  i vektora pomaka čvorova  $\mathbf{u}_m$ :

$$P_k(x) = \mathbf{N}_1(x) \mathbf{u}_m. \quad (4.39)$$

Funkcija oblika je definirana tako da ima jediničnu vrijednost u odgovarajućem čvoru i vrijednost nula u svim ostalim čvorovima (analogno funkciji oblika metode konačnih elemenata).

### Obična konačna traka

Ova konačna traka podrazumijeva stupnjeve slobode definirane samo u čvorovima. Najjednostavniji slučaj je kada su u čvorovima definirani samo pomaci  $\mathbf{u}^T = \{u_1 \ u_2\}$ . Tada funkcija oblika glasi:

$$\mathbf{N}_1(x) = \left[ \left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad \left(\frac{x}{b}\right) \right]. \quad (4.40)$$

Ukoliko u čvorove dodamo još i kutove zaokreta  $\mathbf{u}^T = \{u_1 \ u_2 \ \varphi_1 \ \varphi_2\}$  (npr. savijanje), funkcija oblika izgleda:

$$\mathbf{N}_1(x) = \left[ \left(1 - 3\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{b}\right)^3\right) \quad x \left(1 - 2\frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right) \right. \\ \left. \left(3\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{b}\right)^3\right) \quad x \left(-\frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right) \right] \quad (4.41)$$

### Konačna traka s jednim dodatnim čvorom

Funkcija oblika kada su u čvorovima definirani samo pomaci  $\mathbf{u}^T = \{u_1 \ u_{12} \ u_2\}$ , glasi:

$$\mathbf{N}_1(x) = \left[ \left( 1 - 3\frac{x}{b} + 2\left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \quad \left( 4\frac{x}{b} - 4\left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \quad \left( -\frac{x}{b} + 2\left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \right] \quad (4.42)$$

U slučaju da u čvorovima postoje pomaci i deformacije  $\{u\}^T = \{u_1 \quad u_{12} \quad u_2 \quad \varphi_1 \quad \varphi_{12} \quad \varphi_2\}$ , funkcija oblika glasi:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(x) = & \left[ \left( 1 - 23\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 66\left(\frac{x}{b}\right)^3 - 68\left(\frac{x}{b}\right)^4 + 24\left(\frac{x}{b}\right)^5 \right) \right. \\ & x \left( 1 - 6\frac{x}{b} + 13\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 12\left(\frac{x}{b}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{b}\right)^4 \right) \\ & \left( 16\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 32\left(\frac{x}{b}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{b}\right)^4 \right) \\ & x \left( -8\frac{x}{b} + 32\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 40\left(\frac{x}{b}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{b}\right)^4 \right) \\ & \left( 7\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 34\left(\frac{x}{b}\right)^3 + 52\left(\frac{x}{b}\right)^4 - 24\left(\frac{x}{b}\right)^5 \right) \\ & \left. x \left( -\frac{x}{b} + 5\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{b}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{b}\right)^4 \right) \right] \quad (4.43) \end{aligned}$$

## 15.2 Pravokutna konačna traka za savijanje tankih ploča s dvije čvorne linije

Izvodi dani u ovom poglavlju zasnivaju se na klasičnoj teoriji ploča u kojoj su uvedene pretpostavke koje nam omogućuju tretiranje konačne trake kao dvodimenzijskog problema. Te pretpostavke su:

16. normale na srednju ravninu u toku deformiranja ostaju ravne i okomite na elastičnu plohu  $w = w(x, y)$ ,
17. elastična ploha je ujedno i neutralna ploha ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ),
18. u ploči vlada dvoosno stanje naprezanja ( $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ ,  $\sigma_z \cong 0$ ).

Ove pretpostavke su ispunjene u slučaju tankih ploča ( $t/a_{\min} \leq 0.05$ ).

### 18.1.1 Pomaci i deformacije trake

Na sl. 36 prikazana je obična konačna traka s dva stupnja slobode po čvornoj liniji (pomak u smjeru osi  $z$ ,  $w$  i rotacija oko osi  $y$ ,  $\varphi$ ). Polje pomaka  $w(x, y)$  se može zapisati kao:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^r \mathbf{N}_m \cdot \mathbf{u}_m, \quad (4.44)$$

gdje su:

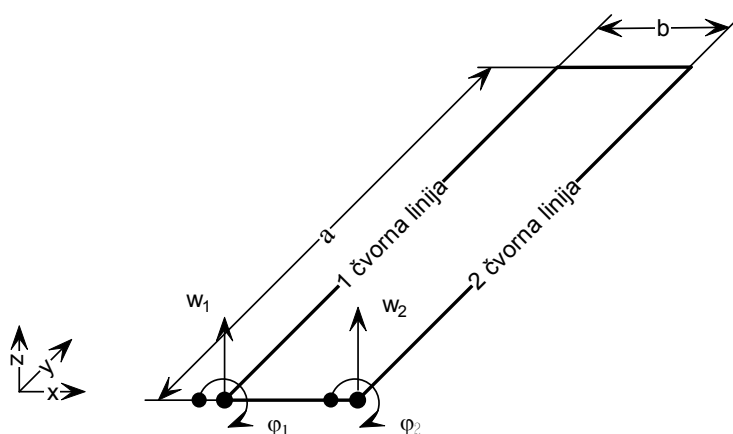
$$\mathbf{u}_m^T = \{w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2\},$$

$$\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_{1m} \cdot A_m.$$

Za slučaj savijanja  $\mathbf{N}_{1m}$  dan je izrazom (4.41), dok analitička funkcija  $A_m$  ovisi o rubnim uvjetima problema.

Rotacija u čvorovima dana je kao derivacija pomaka:

$$\varphi_i(x, y) = - \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_i \quad (4.45)$$



sl. 36 Pravokutna konačna traka za savijanje s četiri stupnja slobode

Uvažavajući pretpostavke za savijanje ploča, izraz za deformaciju (4.3) prelazi u oblik:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.46}$$

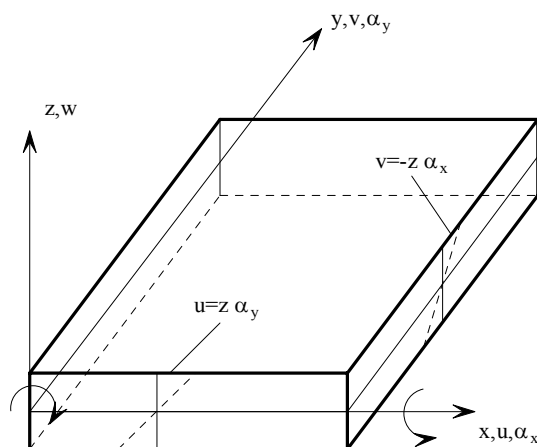
### Geometrijska analiza

Promotrimo diferencijalni element ploče u opterećenom stanju (sl. 37). Budući da su po pretpostavci kutovi zaokreta oko koordinatnih osi  $\alpha_x$  i  $\alpha_y$  mali za razmatrane kriterije možemo pisati:

$$\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \alpha_y = -\frac{\partial w}{\partial x}.
 \tag{4.47}$$

Također je vidljivo da je:

$$u = z \cdot \alpha_y, \quad v = -z \cdot \alpha_x.
 \tag{4.48}$$



sl. 37 Geometrijska analiza deformiranja elementa ploče pri savijanju

Uvrštavanjem jednakosti (4.47) i (4.48) u izraz za deformaciju (4.3) dobivamo:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
 \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
 \varepsilon_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

Uočimo u izrazu (4.49) linearni i nelinearni dio deformacije.

### 18.1.2 Elastična matrica krutosti

Linearni dio izraza (4.49) se može pomoću (4.44) zapisati kao:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{N}_m}{\partial x^2} = -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathbf{N}_{1m} A_m) \\
 \varepsilon_{yy} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{N}_m}{\partial y^2} = -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mathbf{N}_{1m} A_m) \\
 \varepsilon_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_m}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mathbf{N}_{1m} A_m)
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

Nakon deriviranja, na temelju izraza (4.41) linearni dio matrice deformacije prelazi u oblik:

$$\mathbf{b}_m^L = \begin{bmatrix}
 \left( \frac{6}{b^2} - \frac{12x}{b^3} \right) \cdot A_m & \left( \frac{4}{b} - \frac{6x}{b^2} \right) \cdot A_m & \left( \frac{-6}{b^2} + \frac{12x}{b^3} \right) \cdot A_m & \left( \frac{2}{b} - \frac{6x}{b^2} \right) \cdot A_m \\
 \left( -1 + \frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) \cdot A_m & \left( -x + \frac{2x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right) \cdot A_m & \left( -\frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) \cdot A_m & \left( \frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right) \cdot A_m \\
 \left( \frac{-12x}{b^2} + \frac{12x^2}{b^3} \right) \cdot A_m & \left( 2 - \frac{8x}{b} + \frac{6x^2}{b^2} \right) \cdot A_m & \left( \frac{12x}{b^2} - \frac{12x^2}{b^3} \right) \cdot A_m & \left( -\frac{4x}{a} + \frac{6x^2}{a^2} \right) \cdot A_m
 \end{bmatrix}
 \tag{4.51}$$

Veza između napreznaja i deformacija dana je izrazom:



$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \sum_{m=1}^r \mathbf{b}^L_m \mathbf{u}_m. \quad (4.52)$$

Za izotropan materijal matrica  $\mathbf{D}$  ima oblik:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Elastična matrica krutosti za slučaj savijanja prema (4.20) može se zapisati kao:

$$\mathbf{k}_E = \frac{t^3}{12} \int_A \mathbf{b}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{b}^L dA. \quad (4.54)$$

Na temelju jednadžbe (4.44) može se zaključiti da će matrica krutosti ovisiti o rubnim uvjetima ( $A_m$ ). Međutim, integraciju po širini trake moguće je provesti neovisno o rubnim uvjetima. Nakon te integracije dobije se općeniti izraz za linearni dio matrice krutosti konačne trake s dvije čvorne linije (4 DOF) koji je prikazan u Tab. 4.2. Integrali  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  dani su izrazom:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a A_m A_n dy & I_4 &= \int_0^a A_m'' A_n'' dy \\ I_2 &= \int_0^a A_m'' A_n dy & I_5 &= \int_0^a A_m' A_n' dy \\ I_3 &= \int_0^a A_m A_n'' dy \end{aligned} \quad (4.55)$$

Za svaki  $m \neq n$  vrijedi da je  $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0$ .

Tab. 4.2 Matrica krutosti na savijanje - linearni dio

$\mathbf{K}_{mn} = \frac{1}{420b^3} \cdot$	5040 $D_x$ $I_1$	2520 $b$ $D_x$ $I_1$	- 5040 $D_x$ $I_1$	2520 $b$ $D_x$ $I_1$
	- 504 $b^2$ $D_1$ $I_2$	- 462 $b^3$ $D_1$ $I_2$	504 $b^2$ $D_1$ $I_2$	- 42 $b^3$ $D_1$ $I_2$
	- 504 $b^2$ $D_1$ $I_3$	- 42 $b^3$ $D_1$ $I_3$	504 $b^2$ $D_1$ $I_3$	- 42 $b^3$ $D_1$ $I_3$
	156 $b^4$ $D_y$ $I_4$	22 $b^5$ $D_y$ $I_4$	54 $b^4$ $D_y$ $I_4$	- 13 $b^5$ $D_y$ $I_4$
	2016 $b^2$ $D_{xy}$ $I_5$	168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$	- 2016 $b^2$ $D_{xy}$ $I_5$	168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$
	2520 $b$ $D_x$ $I_1$	1680 $b^2$ $D_x$ $I_1$	- 2520 $b$ $D_x$ $I_1$	840 $b^2$ $D_x$ $I_1$
	- 462 $b^3$ $D_1$ $I_2$	- 56 $b^4$ $D_1$ $I_2$	42 $b^3$ $D_1$ $I_2$	14 $b^4$ $D_1$ $I_2$
	- 42 $b^3$ $D_1$ $I_3$	- 56 $b^4$ $D_1$ $I_3$	42 $b^3$ $D_1$ $I_3$	14 $b^4$ $D_1$ $I_3$
	22 $b^5$ $D_y$ $I_4$	4 $b^6$ $D_y$ $I_4$	13 $b^5$ $D_y$ $I_4$	- 3 $b^6$ $D_y$ $I_4$
	168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$	224 $b^4$ $D_{xy}$ $I_5$	- 168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$	- 56 $b^4$ $D_{xy}$ $I_5$
	- 5040 $D_x$ $I_1$	- 2520 $b$ $D_x$ $I_1$	5040 $D_x$ $I_1$	- 2520 $b$ $D_x$ $I_1$
	504 $b^2$ $D_1$ $I_2$	42 $b^3$ $D_1$ $I_2$	- 504 $b^2$ $D_1$ $I_2$	462 $b^3$ $D_1$ $I_2$
	504 $b^2$ $D_1$ $I_3$	42 $b^3$ $D_1$ $I_3$	- 504 $b^2$ $D_1$ $I_3$	42 $b^3$ $D_1$ $I_3$
	54 $b^4$ $D_y$ $I_4$	13 $b^5$ $D_y$ $I_4$	156 $b^4$ $D_y$ $I_4$	- 22 $b^5$ $D_y$ $I_4$
	- 2016 $b^2$ $D_{xy}$ $I_5$	- 168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$	2016 $b^2$ $D_{xy}$ $I_5$	- 168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$
	2520 $b$ $D_x$ $I_1$	840 $b^2$ $D_x$ $I_1$	- 2520 $b$ $D_x$ $I_1$	1680 $b^2$ $D_x$ $I_1$
	- 42 $b^3$ $D_1$ $I_2$	14 $b^4$ $D_1$ $I_2$	462 $b^3$ $D_1$ $I_2$	- 56 $b^4$ $D_1$ $I_2$
	- 42 $b^3$ $D_1$ $I_3$	14 $b^4$ $D_1$ $I_3$	42 $b^3$ $D_1$ $I_3$	- 56 $b^4$ $D_1$ $I_3$
	- 13 $b^5$ $D_y$ $I_4$	- 3 $b^6$ $D_y$ $I_4$	- 22 $b^5$ $D_y$ $I_4$	4 $b^6$ $D_y$ $I_4$
	168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$	- 56 $b^4$ $D_{xy}$ $I_5$	- 168 $b^3$ $D_{xy}$ $I_5$	224 $b^4$ $D_{xy}$ $I_5$

Pri tome su konstante dane izrazima  $D_x = D_y = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $D_1 = \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $D_{xy} = \frac{Et^3}{24(1+\nu)}$ .

### 18.1.3 Geometrijska matrica krutosti

U procesu određivanja nelinearnog dijela matrice krutosti za savijanje pretpostavljeno je da samo nelinearni izrazi koji sadrže  $\nu, w$  određuju matricu krutosti. To se objašnjava činjenicom da su progibi u ravnini ploče znatno manji od onih izvan same ravnine. Nadalje, pretpostavlja se da je naprezanje u srednjoj ravnini ploče neovisno o  $x, y$  koordinatama te da je smično naprezanje u srednjoj ravnini jednako nuli. Uvažavajući ove pretpostavke geometrijska matrica krutosti (4.20) postaje:

$$\mathbf{k}_G = \sigma_{xx} \int_{dV} \mathbf{b}_{zx}^T \mathbf{b}_{zx} dV + \sigma_{yy} \int_{dV} \mathbf{b}_{zy}^T \mathbf{b}_{zy} dV. \quad (4.56)$$

Pri tome je:

$$\mathbf{b}_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}_{1m} A_m)$$

$$\mathbf{b}_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{N}_{1m} A_m)$$
(4.57)

Nakon integracije po širini trake dobije se općeniti izraz za nelinearni dio matrice krutosti konačne trake s dvije čvorne linije (4 DOF) koji je prikazan u Tab. 4.3. Integrali  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  dani su izrazom (4.35).

**Tab. 4.3** Matrica krutosti na savijanje - nelinearni dio

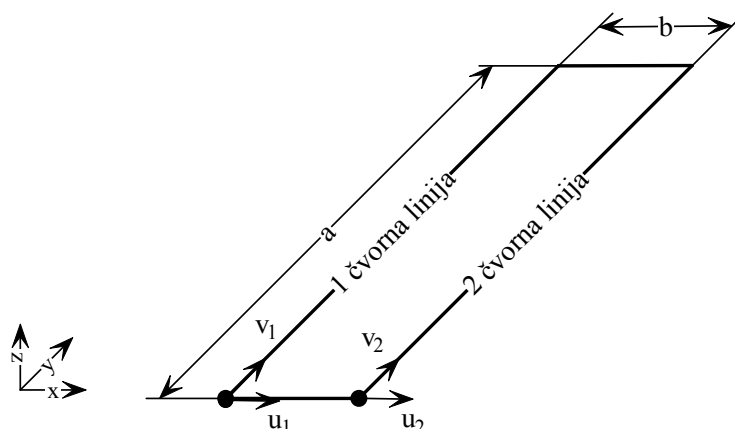
$\mathbf{K}_{mn} = \frac{1}{840b}$	504	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 42	$b$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 504	$\sigma_{xx}$	$I_1$	42	$b$	$\sigma_{xx}$	$I_1$		
	156	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	22	$b^3$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	54	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	- 13	$b^3$	$\sigma_{yy}$	$I_5$
	- 42	$b$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	56	$b^2$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 42	$b$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 14	$b^2$	$\sigma_{xx}$	$I_1$
	22	$b^3$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	4	$b^4$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	13	$b^3$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	- 3	$b^4$	$\sigma_{yy}$	$I_5$
	- 504	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 42	$b$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	504	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 504	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 504	$\sigma_{xx}$	$I_1$
	54	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	13	$b^3$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	156	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	- 22	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$
	42	$b$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 14	$b^2$	$\sigma_{xx}$	$I_1$	- 504	$\sigma_{xx}$	$I_1$	56	$\sigma_{xx}$	$I_1$		
	- 13	$b^3$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	- 3	$b^4$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	- 22	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$	4	$b^2$	$\sigma_{yy}$	$I_5$

## 18.2 Pravokutna konačna traka za analizu ravninskog stanja naprezanja s dvije čvorne linije

Ovo poglavlje prikazuje izvod konačne trake s dvije čvorne linije za slučaj ravninskog stanja naprezanja. Tako dobivene matrice krutosti se uz manje korekcije mogu koristiti i za slučaj ravninskog stanja deformacije. Izvodi su bazirani na pretpostavkama danim na početku poglavlja.

### 18.2.1 Pomaci i deformacije trake

Na sl. 38 prikazana je obična konačna traka za analizu membranskih naprezanja ravnih ploča. Karakteriziraju je po dva stupnja slobode u čvoru (pomak u smjeru osi  $x$ ,  $u$  i pomak u smjeru osi  $y$ ,  $v$ ).



sl. 38 Pravokutna konačna traka (membrana) s četiri stupnja slobode

Polje pomaka čvorova se može zapisati kao, [20]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot A_m & 0 & \left(\frac{x}{b}\right) \cdot A_m & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \frac{a}{\mu_m} A'_m & 0 & \left(\frac{x}{b}\right) \cdot \frac{a}{\mu_m} A'_m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.58)$$

Konstanta  $\frac{a}{\mu_m}$  se pojavljuje da bi poništila konstantu koja nastaje deriviranjem funkcije  $A_m$ .

Primjenjujući odgovarajuće derivacije linearni dio matrice deformacije postaje:

$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} \frac{-1}{b} \cdot A_m & 0 & \frac{1}{b} \cdot A_m & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \frac{a}{\mu_m} A''_m & 0 & \left(\frac{x}{b}\right) \cdot \frac{a}{\mu_m} A''_m \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

### 18.2.2 Elastična matrica krutosti

Ukoliko provedemo integraciju po širini trake, smjer  $x$ , prema (4.20), elastični dio matrice krutosti poprima oblik prikazan u Tab. 4.4. Vrijednosti integrala  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  su dani u jednadžbi (4.55).

Tab. 4.4 Membranski dio matrice krutosti konačne trake - linearni dio

$\mathbf{K}_{mn} = \frac{1}{6b}$	$6 C_1$	$K_x$	$I_1$	$-3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_3$	$-6 C_1$	$K_x$	$I_1$	$-3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_3$		
	$2 C_1$	$b^2$	$K_{xy}$	$I_5$	$-3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$	$C_1$	$b^2$	$K_{xy}$	$I_5$	$3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$
	$-3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_3$	$2 C_1^2$	$b^2$	$K_y$	$I_4$	$3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_2$	$2 C_1^2$	$b^2$	$K_y$	$I_4$
	$-3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$	$6 C_1^2$		$K_{xy}$	$I_5$	$3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$	$-6 C_1^2$		$K_{xy}$	$I_5$
	$-6 C_1$	$K_x$	$I_1$	$3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_2$	$6 C_1$	$K_x$	$I_1$	$3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_3$		
	$C_1$	$b^2$	$K_{xy}$	$I_5$	$3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$	$2 C_1$	$b^2$	$K_{xy}$	$I_5$	$3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$
	$-3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_3$	$2 C_1^2$	$b^2$	$K_y$	$I_4$	$3 C_1$	$b$	$K_1$	$I_3$	$2 C_1^2$	$b^2$	$K_y$	$I_4$
	$3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$	$-6 C_1^2$		$K_{xy}$	$I_5$	$3 C_1$	$b$	$K_{xy}$	$I_5$	$6 C_1^2$		$K_{xy}$	$I_5$

Konstante materijala su:

$$K_x = K_y = \frac{tE}{1-\nu^2}, \quad K_1 = \frac{t\nu E}{1-\nu^2}, \quad K_{xy} = \frac{tE}{2(1+\nu)}.$$

$C_1 = \frac{a}{\mu_m}$  predstavlja inverznu vrijednost konstante koja se dobije derivacijom argumenta trigonometrijske funkcije koja se koristi.

### 18.2.3 Geometrijska matrica krutosti

Nelinearni membranski pomaci se u slučaju globalnog izvijanja ne mogu zanemariti spram onih uslijed savijanja. Vrijednosti koeficijenata matrica krutosti izračunate prema (4.20) nisu detaljno testirane stoga nisu prikazane u ovom radu.

### 18.2.4 Vrijednosti koeficijenata matrica krutosti za različite rubne uvjete

Da bih lakše shvatili koeficijente prikazane u prethodnim tablicama, u nastavku je dan izvod tih koeficijenata na primjeru slobodno oslonjene ploče. Za ovaj slučaj su prema (4.31) analitička funkcija  $A_m(y)$  i njene derivacije dane izrazom:

$$\begin{aligned}
A_m(y) &= \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \\
A'_m(y) &= \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \\
A''_m(y) &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Na temelju svojstava trigonometrijskih funkcija može se dokazati da vrijedi:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 0, \quad m \neq n. \tag{4.61}$$

Matrica krutosti  $\mathbf{K}$  poprima oblik:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Za slučaj kada je  $m = n = 1, 2, \dots, r$  integrali  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  poprimaju vrijednosti:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^a \left( \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)^2 dy = \frac{a}{2} \\
I_2 &= \int_0^a -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left( \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)^2 dy = -\frac{m^2 \pi^2}{2a} \\
I_3 &= \int_0^a -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left( \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)^2 dy = -\frac{m^2 \pi^2}{2a} \\
I_4 &= \int_0^a \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \left( \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)^2 dy = \frac{m^4 \pi^4}{2a^3} \\
I_5 &= \int_0^a \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left( \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)^2 dy = \frac{m^2 \pi^2}{2a}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Kao poseban slučaj promotrimo slobodno oslonjenu traku napravljenu od izotropnog materijala. Matrica elastičnosti za izotropne materijale dana je izrazom (4.53). Matrica krutosti  $\mathbf{K}$  koja uključuje elastične i geometrijske matrice nakon sređivanja se može zapisati kao:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{mm} = & \frac{m^2 \pi^2}{10080} \frac{Ebt^3}{1-\nu^2} \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{m^2 \pi^2}{360} \frac{Et^3}{b(1-\nu^2)} \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 36 & (3+15\nu)b & -36 & 3b \\ (3+15\nu)b & 4b^2 & -3b & -b^2 \\ -36 & -3b & 36 & -(3+15\nu)b \\ 3b & -b^2 & -(3+15\nu)b & 4b^2 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{24} \frac{Et^3}{b^3(1-\nu^2)} a \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{60} \frac{t}{b} \sigma_{yy} a \begin{bmatrix} 36 & 3b & -36 & 3b \\ 3b & 4b^2 & -3b & -b^2 \\ -36 & -3b & 36 & -3b \\ 3b & -b^2 & -3b & 4b^2 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{840} m^2 \pi^2 bt \frac{\sigma_{xx}}{a} \begin{bmatrix} 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Vrijednosti integrala  $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5$  za različite slučajeve rubnih uvjeta za slučaj izotropnog materijala dane su u Tab. 4.5.

Ukoliko se konačne trake koriste za analizu naprezanja onda se u skladu s (4.1) mora uzeti više članova sume ( $m$ ) te kreirati elastičnu matricu krutosti prema Tab. 4.2 i Tab. 4.3. Kod proračuna izvijanja faktor  $m$  predstavlja broj poluvalova izvijanja, a poprima vrijednosti  $m = 1, \dots, r$ . Pri tome je  $r$  pretpostavljeni maksimalni broj poluvalova u uzdužnom smjeru.

Kombiniranjem jednadžbe (4.20) u skladu s relacijom (4.25) dobije se sustav jednadžbi:

$$\left( \mathbf{K}_{E1} + \mathbf{K}_{E2} + \mathbf{K}_{E3} + \sigma_{yy} \left( \mathbf{K}_{G1} + \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}} \mathbf{K}_{G2} \right) \right) \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.65)$$

Pri tome su  $K_{E1}, K_{E2}, K_{E3}, K_{G1}, K_{G2}$  redom matrice sustava (4.64) koji odgovara sustavu (4.28). Rješenjem sustava (4.65) kao vlastita vrijednost dobije se kritično naprezanje  $\sigma_{xx}$  za dani odnos naprezanja  $\sigma_{xx} / \sigma_{yy}$ .

**Tab. 4.5** Vrijednosti integrala za razne rubne uvijete i broj poluvalova izvijanja

Vrijednost integrala	Broj poluvalova izvijanja	Simply Supported	Clamped Free	Clamped S. Supp.	Clamped Clamped
$I_1 \cdot \frac{2}{a}$	$m = 1$	1.000	4.000	0.999	1.000
	$m = 2$	1.000	1.921	1.000	1.000
	$m = 3$	1.000	2.003	1.000	1.000
	$m = 4$	1.000	2.000	1.000	1.000
$-I_2 \cdot \frac{m^2}{\pi^2} \cdot 2a$	$m = 1$	1.000	0.400	1.166	1.233
	$m = 2$	1.000	0.652	1.087	1.183
	$m = 3$	1.000	1.035	1.059	1.135
	$m = 4$	1.000	1.253	1.044	1.087
$-I_3 \cdot \frac{m^2}{\pi^2} \cdot 2a$	$m = 1$	1.000	0.400	1.166	1.233
	$m = 2$	1.000	0.652	1.087	1.183
	$m = 3$	1.000	1.035	1.059	1.135
	$m = 4$	1.000	1.253	1.044	1.087
$I_4 \cdot \frac{m^4}{\pi^4} \cdot 2a^3$	$m = 1$	1.000	0.470	2.440	5.025
	$m = 2$	1.000	0.617	1.602	2.442
	$m = 3$	1.000	1.966	1.377	1.853
	$m = 4$	1.000	1.172	1.274	1.602
$I_5 \cdot \frac{m^2}{\pi^2} \cdot 2a$	$m = 1$	1.000	2.000	1.166	1.233
	$m = 2$	1.000	2.654	1.087	1.183
	$m = 3$	1.000	2.470	1.059	1.135
	$m = 4$	1.000	2.364	1.044	1.087



Kako bi olakšali formiranje matrica krutosti unutar samoga programskog koda vrijednosti integrala za različite rubne uvjete normirane su sa vrijednostima za slučaj slobodno oslonjenih nasuprotnih krajeva. Vrijednosti korekcijskih faktora su prikazane u Tab. 4.5. Na primjer, vrijednost integrala  $I_2$  za slučaj kada je jedan kraj konačne trake upet, a drugi slobodno oslonjen (CS) pri čemu je broj poluvalova izvijanja 2 (osjenčana vrijednost u tablici) dobije se:

$$I_{2,CS} = 1.087 I_{2,SS}, \quad (4.66)$$

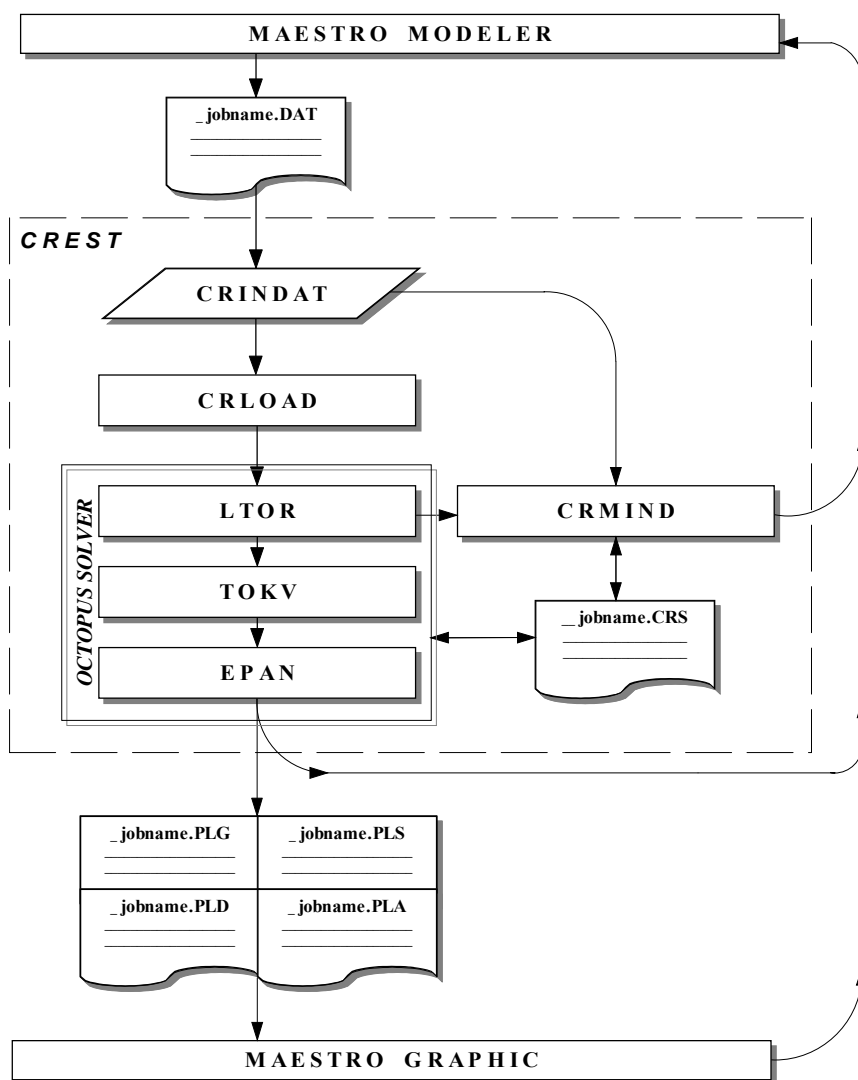
gdje je:

$I_{2,SS}$  vrijednost integrala za slučaj slobodno oslonjenih krajeva prema (4.63).

Usporedba rezultata za pojedine rubne uvijete i omjere duljina stranica ploča, te primjena na praktičnom primjeru ukrepljenog panela kao cjeline dana je u nastavku.

## 19. PROCEDURA PRORAČUNA PODOBNOSTI

Navedeni kriteriji za analizu podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije sastavljeni od analitičkih i semi-analitičkih procedura, predstavljaju jednu kariku u lancu proračuna podobnosti. Sam proračun podobnosti podrazumijeva određivanje sposobnosti neke konstrukcije da za dane slučajevne opterećenja i rubne uvjete potpuno funkcionalno obavlja one zadaće za koje je projektirana. Proceduru proračuna podobnosti opisati ćemo na primjeru programa CREST (Croatian Register Evaluation of SStructures) koji je razvijen u suradnji s Hrvatskim registrom brodova. Svrha mu je provjera podobnosti 2D presjeka brodskog trupa u skladu s pravilima HRB-a.



sl. 39 Organizacija programa CREST

Na sl. 39 prikazana je organizacijska struktura programa CRS CREST koja ujedno opisuje samu proceduru za analizu podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije, [6].

Proračun podobnosti konstrukcije može se podijeliti u nekoliko koraka:

- Modeliranje konstrukcije (MAESTRO Modeler),
- Zadavanje opterećenja i rubnih uvjeta (CRLOAD),
- Proračun odziva konstrukcije metodom konačnih elemenata (LTOR - uzdužna čvrstoća, TOKV - poprečna čvrstoća),
- Proračun podobnosti pojedinih elemenata konstrukcije (EPAN, FISTCOM),
- Prikaz rezultata i njihova interpretacija (EPAN Tablice, MAESTRO Graphics).

Modeliranje konstrukcije je prvi korak u proceduri proračuna podobnosti. Tijekom samog postupka modeliranja potrebno se pridržavati napomena danih u drugom poglavlju. Tu se prvenstveno misli na odabir tipova elemenata, gustoće mreže i prikladnosti pojedinih elemenata da točno opišu dani fizikalni model. U današnje vrijeme za modeliranje se koriste napredni grafički alati kojima se može kvalitetno opisati i vizualno prikazati realna konstrukcija što je posebno važno jer se zna da su u većini slučajeva greške u proračunu posljedica pogrešnog unosa podataka u model (npr. pogrešnu unesene vrijednosti debljina, karakteristika materijala itd.).

Prilikom zadavanja opterećenja i rubnih uvjeta potrebno je voditi računa da se što realnije prenese stvarno opterećenje konstrukcije na matematički model te ponašanje samih veza konstrukcije koja se analizira s njenom okolinom (rubni uvjeti). Opterećenje i rubni uvjeti pored samog matematičkog modela konstrukcije direktno utječu na odziv konstrukcije (proračunata naprezanja, pomake, oblike izvijanja itd.). Kvaliteta nekog programa za zadavanje opterećenja ogleda se u njegovoj mogućnosti da opiše različite vrste opterećenja (npr. hidrostatski tlak ili raspodjelu tlaka na krilu itd.) odnosno da ih grafički prikaže kako bi se lakše mogla potvrditi ispravnost zadanog opterećenja.

Sam proračun odziva vrši se metodom konačnih elemenata. Karakteristike samih rješavača definirane su veličinom problema kojega mogu riješiti, brojem različitih tipova elemenata koje sadrže kao i ostalim svojstvima konačnih elemenata odnosno makroelemenata (konvergencija, mogućnost opisivanja pomaka krutog tijela itd.).

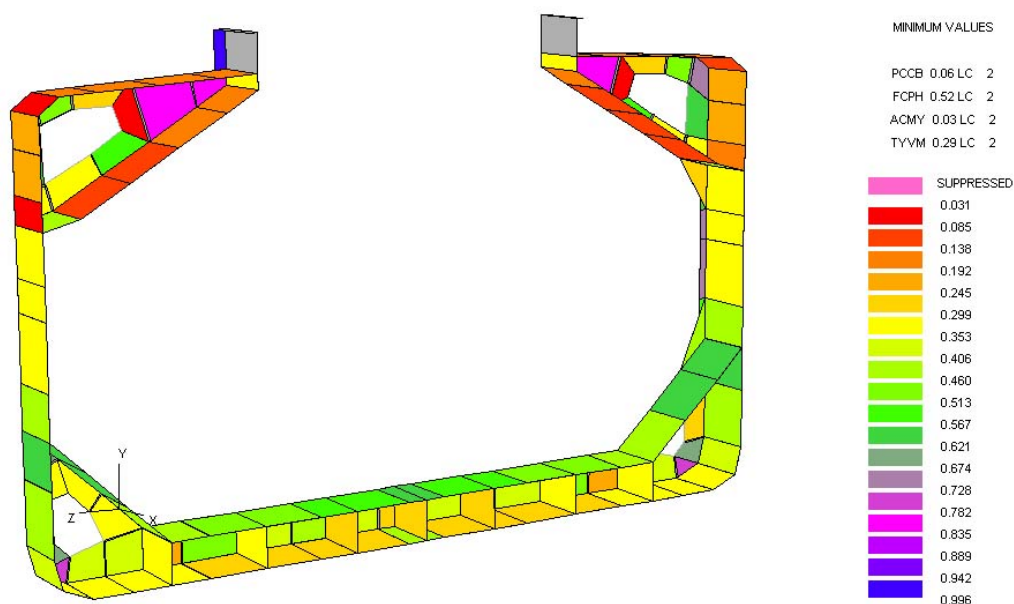
Proračun podobnosti elemenata obuhvaća određivanje izdržljivosti (*Capability*) pojedinih elemenata ili dijelova konstrukcije) te zajedno s proračunatim odzivom određivanje parametara podobnosti za dane slučajeve opterećenja i zahtijevane sigurnosti. Pored broja kriterija koje sadrži ključna za dobru biblioteku ograničenja jest njihova stabilnost i brzina izvođenja. Naime, u procesu optimiranja konstrukcija kriteriji biblioteke ograničenja izvršavaju se nekoliko milijuna puta.

Prikaz rezultata i njihova interpretacija ključni su pogotovo kod složenih konstrukcija. Tu ponovo do izražaja dolaze grafičke mogućnosti programa koji se za to koristi. Ukoliko se prihvati normalizirani faktor podobnosti kao što je to objašnjeno u prethodnom poglavlju ( $-1 \leq g \leq +1$ ), onda se tablični prikaz s ugrađenim filtrom nameće kao idealno rješenje kako za očitavanje kritičnih mjesta tako i za detaljnu analizu odziva konstrukcije.

Neovisno o programu koji se koristi za proračun odziva i analizu podobnosti konstrukcije općenito se može reći da većina njih vodi korisnika korak po korak kroz proceduru bilo direktno (npr. CREST, naredbe *Next*, *Back*) ili indirektno (npr. MSC NASTRAN rasporedom izbornika i podizbornika). Program CREST čiji je ovaj rad dio predviđa tri koraka u analizi rezultata proračuna podobnosti. To su:

- a) lociranje kritičnih mjesta konstrukcije,
- b) pronalaženje slučajeva opterećenja koji odgovaraju kritičnim mjestima i
- c) uvid u detaljnu sliku zahtijeva i odziva za pojedini kritični slučaj.

Ad. a) Lociranje kritičnih mjesta konstrukcije sa stanovišta analize podobnosti u programu CREST se može vršiti prikazujući grafički faktore podobnosti, sl. 40, [6] (MG- *Minimal Value All Load Cases*). Drugi način je da se tablično prikažu najmanje proračunate vrijednosti faktora sigurnosti za sve elemente i slučajeve opterećenja. Pri tome su odgovarajući elementi čiji je faktor sigurnosti  $g < 0$  ispisani crvenom bojom, sl. 41. Ovaj korak nam služi da dobijemo globalan uvid u podobnost konstrukcije i na temelju njega ne možemo donijeti precizan sud o pojedinim dijelovima strukture.



sl. 40 MG prikaz vrijednosti faktora podobnosti

Ad. b) Kojim slučajevima opterećenja zapravo odgovaraju pojedine vrijednosti faktora podobnosti možemo saznati ako rezultate faktora podobnosti prikažemo za dani slučaj opterećenja (MG - *Minimal Values Load Case*). Prikazom tablice *Given Element - All Criteria - All Load Cases* u programu CREST se za pojedini element prikazu vrijednosti svih kriterija u ovisnosti o slučaju opterećenja.

Ad. c) Detaljan prikaz faktora podobnosti grafički je moguće ostvariti odabirom pojedinog elementa (MG - *Inquire/Adequacy Parameters*). Osim toga u programu CREST također prikazano u tablici mogu se gledati točne vrijednosti zahtijeva i odziva koji su korišteni pri proračunu danog faktora podobnosti. Nadalje, uobičajeno je u FEM paketima prikazivanje točnog iznosa naprezanja po samom elementu ispisom vrijednosti na element (npr. MSC NASTRAN, *Criteria Plot*).

STRAKE		PLATE BETWEEN STIFFENERS							
NUMBER	TYPE	PLB_SA	PCiLe	PCES	S-UCS	U-UCS	S-ES	U-ES	S-ULL
1	BOTTOM	0.5942	0.8619	0.9855	-0.2982	-0.2982	0.9860	0.9860	0.4812
2	BOTTOM	0.2656	0.2068	0.9208	-0.4940	-0.4940	0.9247	0.9249	0.2590
3	BOTTOM	0.3018	0.8779	0.8780	-0.4686	-0.4686	0.8839	0.8842	0.2590
4	BOTTOM	0.1785	0.2059	0.8780	-0.5707	-0.5707	0.8839	0.8842	0.2590
5	BOTTOM	0.9301	0.1135	0.8709	0.2614	0.8886	0.8732	0.8732	0.6991
6	BOTTOM	0.9593	0.1538	0.8524	0.8748	0.8748	0.8573	0.8574	0.4845
7	SIDE	0.9174	0.1047	0.8426	0.1532	0.1532	0.8453	0.8453	0.7466
8	OTHER	-0.0573	0.2116	0.8788	-0.5335	-0.5335	0.8873	0.8886	1.0000
9	OTHER	0.3672	0.8500	0.9359	-0.1180	-0.1180	0.9406	0.9413	1.0000
10	OTHER	0.6186	0.2253	0.9593	0.0377	0.0377	0.9615	0.9617	1.0000
11	DECK	0.8630	0.1278	0.9014	0.4385	0.4385	0.9061	0.9063	1.0000
12	DECK	0.8374	0.8500	0.9061	0.4459	0.4459	0.9114	0.9117	1.0000
13	DECK	0.6620	0.8205	0.9142	0.0452	0.0452	0.9191	0.9194	1.0000
14	DECK	0.6746	0.1961	0.8884	0.0765	0.0765	0.8946	0.8950	0.8196
15	DECK	0.6365	0.1880	0.9409	0.0237	0.0237	0.9443	0.9445	0.8196
16	DECK	0.5365	0.1900	0.9933	-0.1266	-0.1266	0.9937	0.9937	0.8196
17	SIDE	0.6493	0.1688	0.7942	-0.0660	-0.0660	0.8037	0.8041	0.6704
18	SIDE	0.5524	0.1736	0.7951	-0.2498	-0.2498	0.8040	0.8044	0.7355
19	SIDE	0.3682	0.1687	0.6766	-0.5253	-0.5253	0.6879	0.6883	0.6238
20	OTHER	-0.0111	0.8577	0.7337	-0.4438	-0.4438	0.7519	0.7558	1.0000
21	OTHER	-0.2666	0.2468	0.6886	-0.5667	-0.5667	0.7095	0.7163	1.0000
22	OTHER	0.5802	0.1098	0.7294	-0.3067	-0.3067	0.7392	0.7394	1.0000
23	DECK	0.5275	0.2735	0.8652	0.2403	0.2403	0.8750	0.8769	0.7008
24	DECK	0.6823	0.2014	0.8716	0.2647	0.2647	0.8793	0.8799	0.7957
25	DECK	0.5691	0.1873	0.9977	-0.0331	-0.0331	0.9979	0.9979	0.7957
26	DECK	0.4830	0.1961	0.9988	-0.1619	-0.1619	0.9989	0.9989	0.7957
27	SIDE	0.3877	0.2155	0.6032	0.1989	0.1989	0.6284	0.6337	0.5774
28	SIDE	0.3506	0.8299	0.6151	0.2146	0.3448	0.6391	0.6430	0.6840
29	DECK	0.2951	0.2372	0.8688	0.0883	0.4216	0.8782	0.8801	0.7008
30	DECK	0.5215	0.1961	0.8918	0.4462	0.4477	0.8983	0.8989	0.7957
31	DECK	0.5226	0.2235	0.9281	-0.0543	-0.0543	0.9325	0.9329	0.7957

sl. 41 CREST prikaz vrijednosti faktora podobnosti

Na kraju ovog poglavlja još jednom ćemo navesti radnje koje je poželjno napraviti tijekom postupka određivanja podobnosti konstrukcije kako bih se izbjeglo dobivanje pogrešnih rezultata:

- Provjeru materijala, debljina i ostalih dimenzija novonastalog odnosno izmijenjenog modela konstrukcije,
- Verifikaciju zadanog opterećenja i rubnih uvjeta,
- Provjeru odziva konstrukcije za jednostavan slučaj opterećenja i rubnih uvjeta kako bi se verificirala ispravnost modela što podrazumijeva i provjeru mase konstrukcije te reakcije u osloncima,
- Analizu reagiranja karakterističnih kriterija na različite slučajeve opterećenja (npr. postoji li pojava izvijanja u vlačno opterećenim elementima i slično).

## 20. PRIMJERI PRIMJENE

U prethodnim poglavljima predstavljene su analitičke, semi-analitičke i numeričke metode za analizu podobnosti orebrenih tankostjenih konstrukcija. Da bi se konkretnim primjerima potkrijepilo neke iznesene činjenice u nastavku je dana međusobna usporedba prikazanih metoda i kriterija ograničenja na praktičnim primjerima orebrenih tankostjenih konstrukcija. Tu se prvenstveno misli na usporedbu analitičkih i semi-analitičkih kriterija s metodom konačnih elemenata.

Da bi se uopće stekao dojam točnosti pojedinih kriterija odnosno metoda u prvom primjeru je obrađeno izvijanje ravnih ploča u slučaju jednoosnog i dvoosnog tlačnog opterećenja. Ono je tim više značajno budući da kod većine orebrenih tankostjenih konstrukcija upravo izvijanje ploče između ukrepljenja određuje kritično naprezanje lokalnog izvijanja samog elementa, [28]. Drugi primjer obrađuje izvijanje ravne ploče ukrućene T profilima opterećene konstantnim aksijalnim opterećenjem. Uspoređuje se post-kritično ponašanje pomoću linearnog (*buckling*) i nelinearnog (*Nonlinear Static*) proračuna metodom konačnih elemenata (MSC NASTRAN). U trećem primjeru je obrađeno lokalno i globalno izvijanje sendvič panela što predstavlja karakterističnu zrakoplovnu konstrukciju. Primjer uporabe biblioteke kriterija za praktične proračune te direktna usporedba istovjetnih odnosno sličnih kriterija sadržanih u programu CRS CREST dani su na primjeru presjeka Ro-Ro broda.

### 20.1 Primjer izvijanja ravne ploče

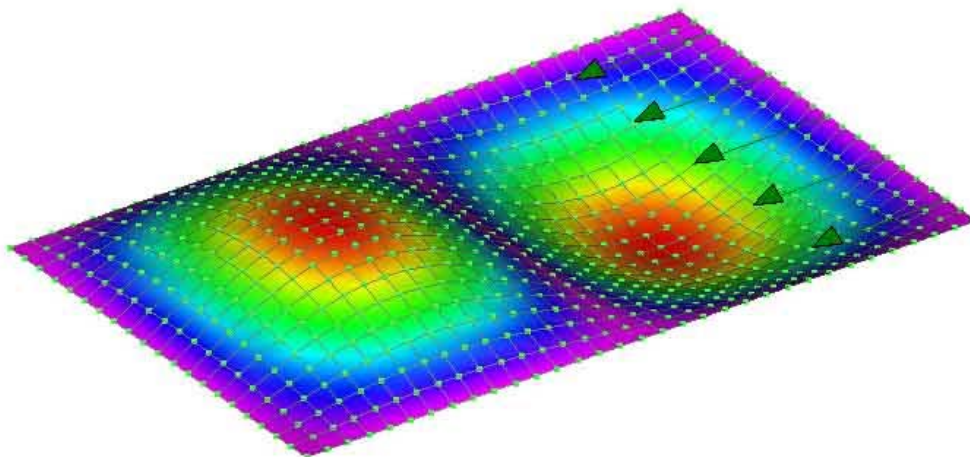
Izvijanje ravne ploče odnosno oplata između ukrepa je najčešće prvi oblik pojave velikih deformacija kod orebrene tankostjene konstrukcije opterećene tlačnim opterećenjem. Ono zapravo predstavlja lokalno izvijanje i ne mora nužno voditi potpunom kolapsu strukture. Najčešći slučaj rubnih uvjeta kao što je to već ranije spomenuto je onaj u kojemu su sve stranice ploče slobodno oslonjene. On je sa stanovišta proračuna podobnosti najznačajniji jer daje najmanje kritično naprezanje izvijanja. Dimenzije ploče i karakteristike materijala su dane u Tab. 20.1. S obzirom na dimenzije ova ploča spada u prijelazne (vitkost ploče  $\beta = 2.46$ ). To je važno istaći jer će kritična naprezanja izvijanja biti blizu ili iznad granice tečenja što znači da ih je

potrebno korigirati. U numeričkom i semi-analitičkom proračunu analiza je izvršena uz pretpostavku linearno elastičnog materijala.

**Tab. 20.1** Karakteristike analiziranog modela ravne ploče

RAVNA PLOČA		
Dimenzije, [mm]	$a$	960
	$b$	600
	$t$	10
Materijal, [N, mm]	$E$	210000.0
	$\nu$	0.3
	$\sigma_0$	355.0
FEM, [s]	$NP$	694
	$NE$	641
	$T$	79
FIST, [s]	$NP$	9
	$NE$	8
	$T$	2

Na sl. 42 prikazan je MSC NASTRAN FEM model ravne ploče slobodno oslonjene na svim krajevima koji je korišten za usporedbu rezultata u slučaju jednoosnog i dvoosnog tlačnog opterećenja.



sl. 42 Druga forma izvijanja slobodno oslonjene ploče (*Linear Buckling*)



Tab. 20.2 daje usporedbu rezultata za slučaj jednoosnog tlačnog opterećenja konstantnog iznosa. Rezultati su dobiveni semi-analitičkim proračunom (FIST), metodom konačnih elemenata (NASTRAN) odnosno očitavanjem iz dijagrama, sl. 23.

**Tab. 20.2** Usporedba rezultata za ravnu ploču - jednoosno tlačno opterećenje

RUBNI UVJETI		KRITIČNO NAPREZANJE IZVIJANJA		
uzdužni smjer	poprečni smjer	FIST	NASTRAN	Dijagram
Slobodno oslonjeno, SS	FF	19.2	19.3	-
	SF	42.5	42.1	41.1
	CF	67.6	66.9	64.3
	SC	285.2	281.9	281.0
	SS	221.5	219.2	222.5
	CC	385.2	380.3	382.2
Upeto, CC	FF	82.5	80.1	-
	SF	105.7	103.2	93.85
	CF	127.3	123.0	131.8
	SC	363.3	351.4	342.7
	SS	298.9	280.1	292.9
	CC	450.1	465.1	439.4
Slobodno oslonjeno, upeto SC	FF	41.7	40.3	-
	SF	64.8	63.3	-
	CF	87.3	84.3	-
	SC	317.5	301.0	-
	SS	257.9	233.4	-
	CC	410.1	382.4	-
Upeto, slobodno, CF	FF	4.4	4.9	-
	SF	26.8	25.3	-
	CF	71.2	49.5	-
	SC	171.9	158.7	-
	SS	125.1	120.0	-
	CC	244.7	200.0	-

Vidljivo je da je za slučaj slobodno oslonjene ploče poklapanje rezultata dobro. Manja odstupanja mogu biti posljedica greške prilikom očitavanja iz dijagrama. Za ostale slučajeve rubnih uvjeta odstupanje je ispod 10%. Samo odstupanje semi-analitičkog rješenja je time manje

što je odnos dulje i kraće stranice veći. U граничном slučaju kada odnos stranica  $a/b \rightarrow \infty$  odstupanja su minimalna.

U slučaju dvoosnog opterećenja glavno naprezanje  $\sigma_y$  je tlačno, dok se naprezanje u smjeru osi  $x$  mijenja u rasponu od  $-0.4\sigma_y \leq \sigma_x \leq 0.4\sigma_y$ . Treća kolona (analitički) predstavlja rezultate dobivene pomoću analitičkog kriterija S-BCES (vidi Prilog B odnosno poglavlje 3.3.4).

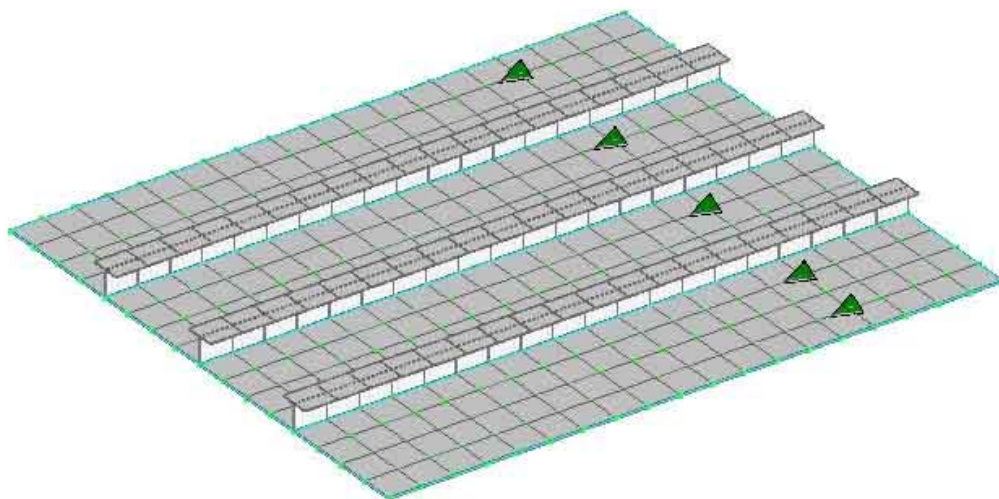
**Tab. 20.3** Usporedba rezultata za ravnu ploču - dvoosno opterećenje

		KRITIČNO NAPREZANJE IZVIJANJA		
RUBNI UVJETI	Sig_X/Sig_Y	FIST	NASTRAN	Analitički
Slobodno oslonjeno, SSSS	-0.4	297.8	294.5	-
	-0.3	274.1	271.2	-
	-0.2	254.7	251.3	-
	-0.1	236.9	234.1	-
	0.0	220.4	219.2	210.9
	0.1	207.5	206.0	208.8
	0.2	172.6	171.4	158.6
	0.3	147.6	146.6	107.0
	0.4	129.0	128.0	56.2
Upeto, CCCC	-0.4	572.8	534.3	-
	-0.3	554.0	537.7	-
	-0.2	517.7	508.4	-
	-0.1	482.2	453.2	-
	0.0	450.1	428.1	-
	0.1	422.1	404.9	-
	0.2	397.3	383.6	-
	0.3	375.1	364.1	-
	0.4	355.1	346.1	-

Podudaranje rezultata je dobro i za ovaj slučaj i kreće se u granicama od 7%. Veća odstupanja se javljaju kod većih kritičnih naprezanja.

## 20.2 Usporedba linearne i nelinearne analize ukrućenog panela

U primjeru u nastavku analizirano je postkritično ponašanje T profilom ukrućene ravne ploče te uspoređeno s klasičnim linearnim odzivom (*buckling* analiza). Dimenzije modela odgovaraju tipičnom palubnom voju brodske konstrukcije.



sl. 43 T profilom ukrućena ravna ploča

Sama konstrukcija je modelirana u MSC NASTRAN-u, pločastim konačnim elementima s 5 stupnjeva slobode, sl. 43. Ukrepljenje je zamijenjeno ekscentričnom gredom odgovarajućeg T profila. Model je slobodno oslonjene na sve četiri strane (oduzet pomak okomito na ravninu ploče), spriječen pomak u uzdužnom smjeru na strani koja je nasuprotna opterećenju. U jednoj točki modela spriječeni su svi ostali pomaci da se onemogući pomicanje modela kao krutog tijela. Opterećen je jednoliko kontinuiranim linijskim opterećenjem u oplati. Zbog početnog ekscentriciteta opterećenja (težište modela se ne nalazi u oplati) model će osim tlačno biti i opterećen na savijanje. Dimenzije modela su zajedno s ostalim podacima dane u Tab. 20.4.

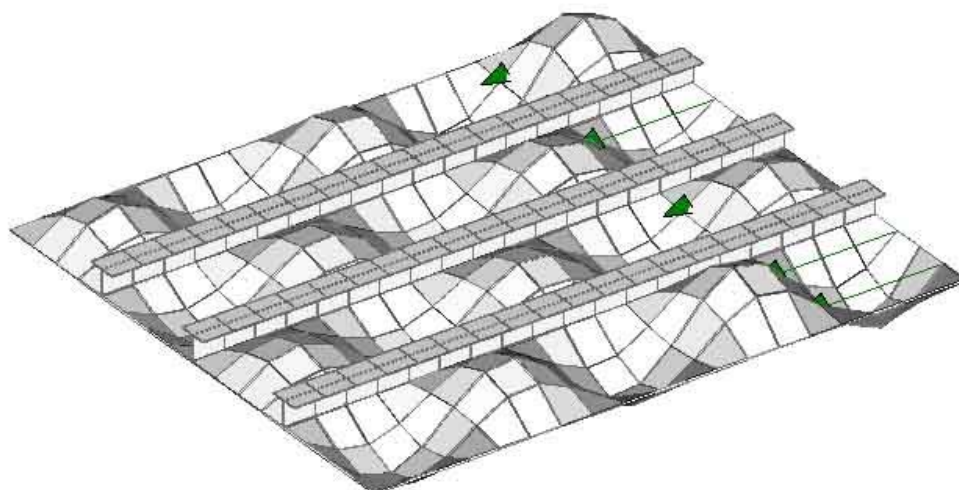
Za tako opterećen i učvršćen model najprije se računalo kritično naprezanje izvijanja pomoću linearne analize izvijanja (*Linear buckling*) koja kao rezultat daje kritično naprezanje izvijanja. Iz načina deformiranja strukture, sl. 44, vidljivo je da se radi o lokalnom izvijanju oplata između ukrepa. Pri tome je proračunato kritično naprezanje izvijanja  $\sigma_{cr} = 238.9 \text{ N/mm}^2$ .

Na sl. 44 nije korektno prikazano ponašanje samih ukrepa. Razlog tome je način prikaza ukrepa. Realna slika bi bila da one prate deformaciju same ploče između ukrepa.

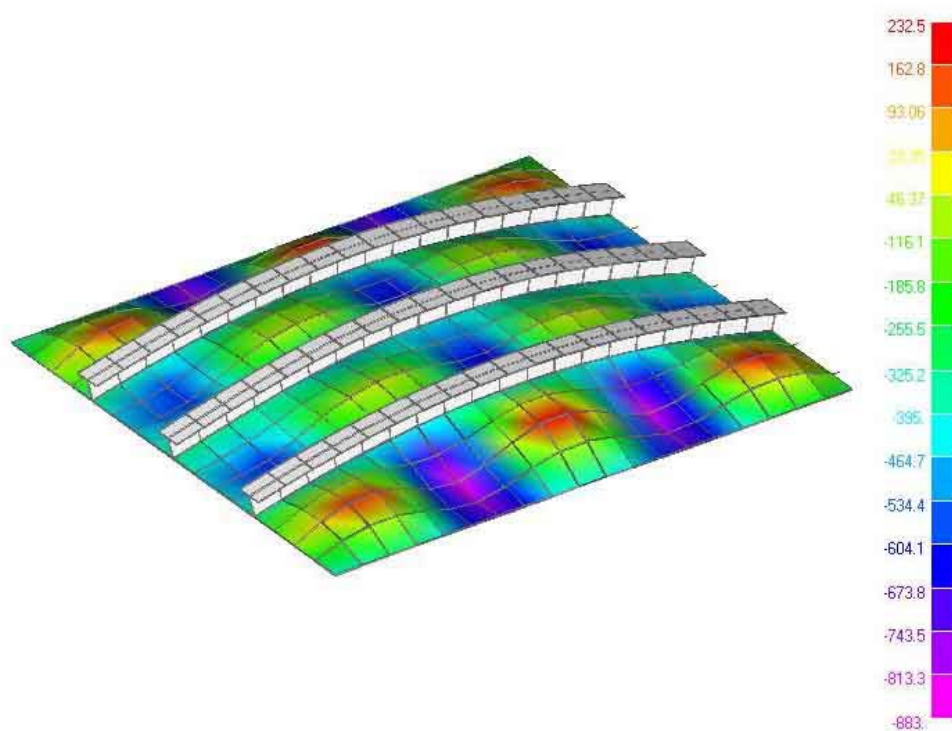
**Tab. 20.4** Karakteristike analiziranog modela ploče ukrućene T profilom

UZDUŽNO UKRUĆENA RAVNA PLOČA		
Dimenzije ploče i ukrepa, [mm]	$a$	2800
	$b$	2440
	$t$	10
	$n_s$	3
	$h_{sw}$	120
	$t_{sw}$	6
	$b_{sf}$	140
	$t_{sf}$	10
Materijal, [N, mm]	$E$	210000.0
	$\nu$	0.3
	$\sigma_0$	355.0
FEM, [s]	$NP$	879
	$NE$	665
	$T_{LB}$	73.7
	$T_{NL}$	251.3
	$T_{MNL}$	92.9

Druga provedena analiza konstrukcije je geometrijski nelinearna. Uz pretpostavku linearno elastičnog materijala zadano je opterećenje povećavano inkrementalno u 8 jednakih dijelova do konačnog iznosa od  $5000 N/m$  što odgovara konstantnom naprezanju ravne ploče iste debljine od  $500 N/mm^2$ . Za rješavanje problema se koristila modificirana Newton-Raphson-ova metoda koja je inače standardna opcija nelinearne analize MSC NASTRAN-a. Sam postupak je konvergirao do 71.56% zadanog opterećenja. Na sl. 45 je uz deformaciju prikazano naprezanje u smjeru ukrepa. Vidljivo je da oblik izvijanja odgovara onome kod linearne analize. Detaljnim uvidom u pomake elemenata da se ustvrditi da do pojave lokalnog izvijanja dolazi pri otprilike 48% zadanog opterećenja što iznosi  $240 N/mm^2$ , a to je rezultat koji odgovara linearnom izvijanju. Osim toga treba uočiti izuzetno velike iznose naprezanja na mjestima udubljenja, sl. 45 ( $883 N/mm^2$ ) što je zapravo za ovaj materijal daleko iznad granice plastičnosti. Iz toga se da zaključiti da je za ovaj slučaj opterećenja nužno uzeti u obzir materijalnu nelinearnost.



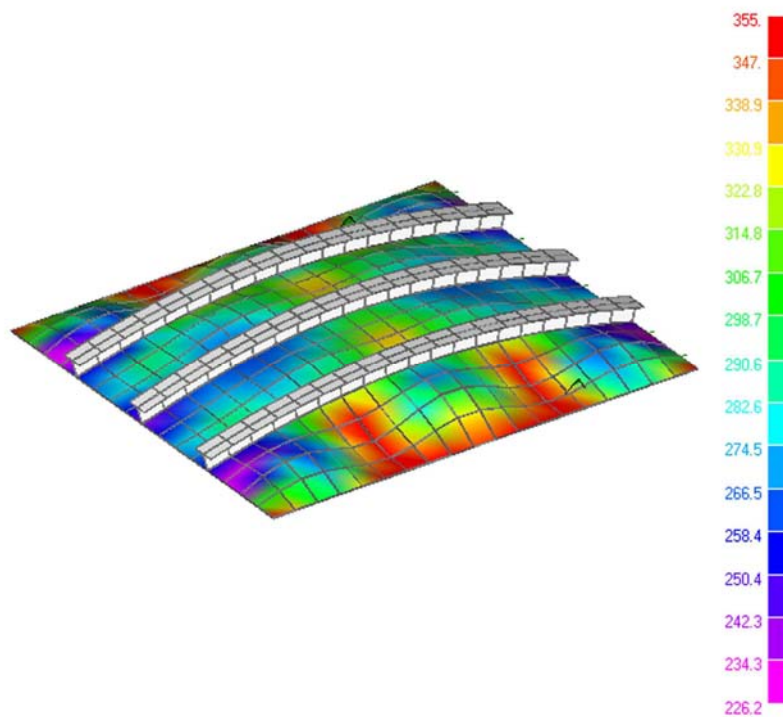
sl. 44 Prva forma izvijanja uzdužno ukrepljene ravne ploče



sl. 45 Geometrijski nelinearna analiza ukrućene ploče

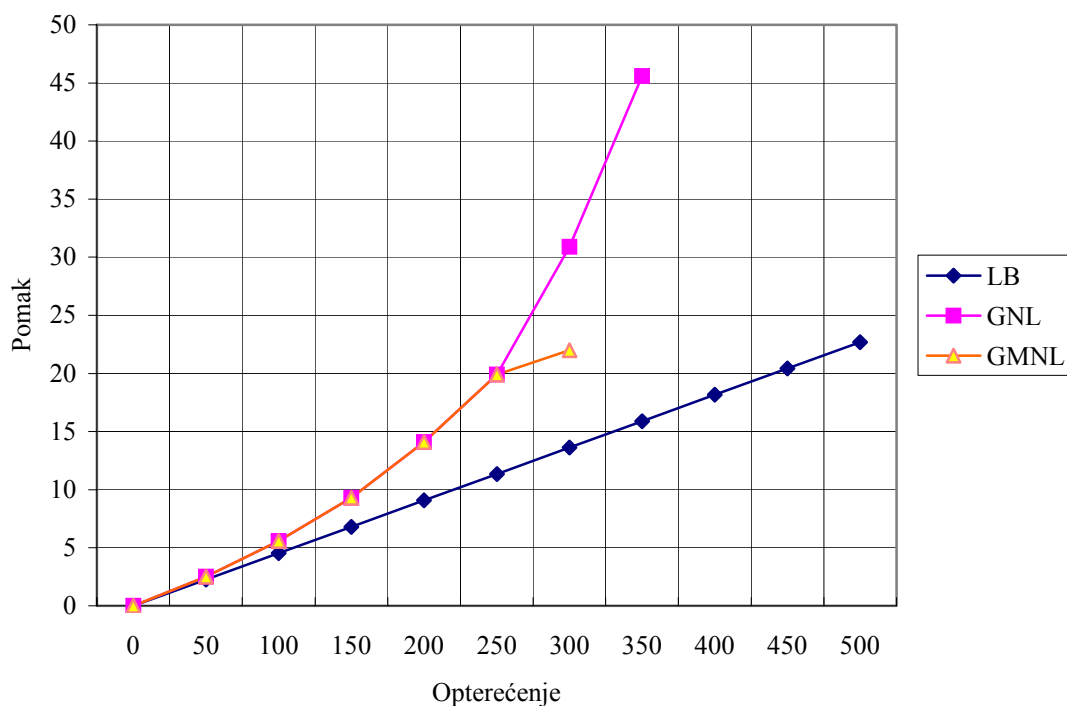
Treća analiza modela je geometrijski i materijalno nelinearna. Materijal je opisan kao elastičan idealno plastičan. Kriterij plastičnosti korišten u proračunu je Von Miseses. Sam postupak proračuna je isti kao i u prethodnom slučaju. Deformacije konstrukcije su prikazane na sl. 46. Osim toga prikazano je Von Miseses naprežanje po modelu. Crvena područja predstavljaju mjesta na kojima je Von Miseses naprežanje doseglo vrijednost granice popuštanja materijala (355

$N/mm^2$ ). Konvergencija je u postupku rješavanja problema bila ispunjena do približno 54% zadanog opterećenja što odgovara naprezanju od  $270 N/mm^2$ .



sl. 46 Geometrijski i materijalno nelinearna analiza ukrucene ploče

Ako pogledamo što se događa s maksimalnim pomakom konstrukcije, sl. 47, vidimo da se za slučaj linearne analize (LB) vrijednosti pomaka poklapaju s nelinearnom analizom samo za vrlo male iznose opterećenja. Geometrijski nelinearna analiza (GNL) i geometrijski i materijalno nelinearna analiza (GMNL) se podudaraju do pojave prvih valova izvijanja. To zapravo odgovara i prvim pojavama plastičnih područja. Nakon toga nastupa postkritično ponašanje koje je u slučaju GNL analize vidno nestabilno. U realnom slučaju kada su svi efekti uključeni pojavom plastificiranih područja dolazi do naglog popuštanja elemenata odnosno do pojava velikih deformacija što uzrokuje matematičku nestabilnost modela, a time i prestanak konvergencije nešto ranije.



sl. 47 Ovisnost maksimalnog pomaka o opterećenju

### 20.3 Izvijanje sendvič panela

Sendvič konstrukcije imaju izuzetno povoljan odnos između čvrstoće i mase pa se uglavnom koriste u zrakoplovnoj i industriji svemirskih letjelica. Kao materijali za njihovu izradu najčešće se koriste aluminijske i titanove legure te kompozitni materijali. Kriteriji razvijeni u ovom poglavlju kao i metoda konačnih traka pisani su samo za izotropne materijale. Na sl. 48 dan je shematski prikaz sendvič konstrukcije analizirane u ovom primjeru.

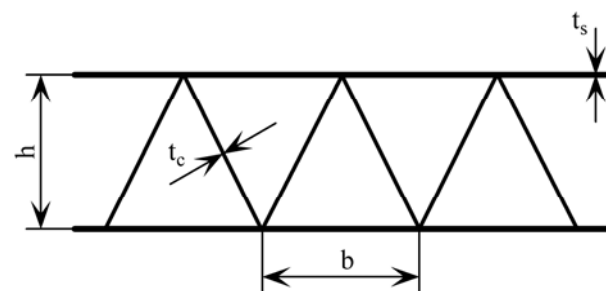
Ovisno o tome analizira li se lokalno ili globalno ponašanje konstrukcije i sam model za semi-analički proračun se razlikuje. Prilikom proračuna lokalnog izvijanja potrebno je voditi računa o sljedećem:

- Ravni segmenti oplata mogu se ponašati kao slobodno oslonjena ploča između spojnih mjesta, (čvorovi na sl. 48) odnosno kao upeta ploča. U skladu s tim je potrebno definirati rubne uvjete na tim mjestima. Najpouzdanije je riješiti problem za oba slučaja te odabrati manje naprezanje kao kritično.

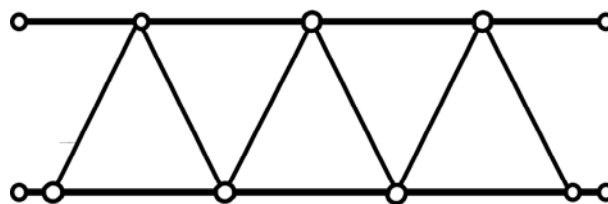
- U model se uključuju samo stupnjevi slobode koji odgovaraju pomaku izvan ravnine ploče i zakretu oko čvornih linija.
- Broj elemenata unutar segmenta oplata mora biti takav da je u stanju opisati poluval izvijanja.
- Broj poluvalova izvijanja u uzdužnom smjeru mora biti  $1 \leq m \leq a/b_{\min}$ , pri čemu je  $b_{\min}$  dimenzija najužeg segmenta.
- Elementi koji se pojavljuju na rubu moraju biti odabrani tako da su znatno krući od elemenata koji se analiziraju kako njihova kritična naprezanja ne bi bila mjerodavna. Taj uvjet je ispunjen ako je odnos  $t/b$  za te elemente veći od odnosa za sve ostale segmente.

Suprotno tome, kod analize globalnog izvijanja sendvič konstrukcije potrebno je ispuniti sljedeće uvjete:

- U model uključiti sve stupnjeve slobode; pomake u i izvan ravnine i sve zakrete koje konačne trake mogu opisati,
- Svaki segment ravne ploče opisuje se samo s jednim elementom tako da ne bude u stanju opisati lokalni mod izvijanja.
- Broj poluvalova izvijanja u uzdužnom smjeru mora biti  $1 \leq m \leq a/B$ , pri čemu je  $B$  ukupna širina ukrepljenog panela.



a) geometrija



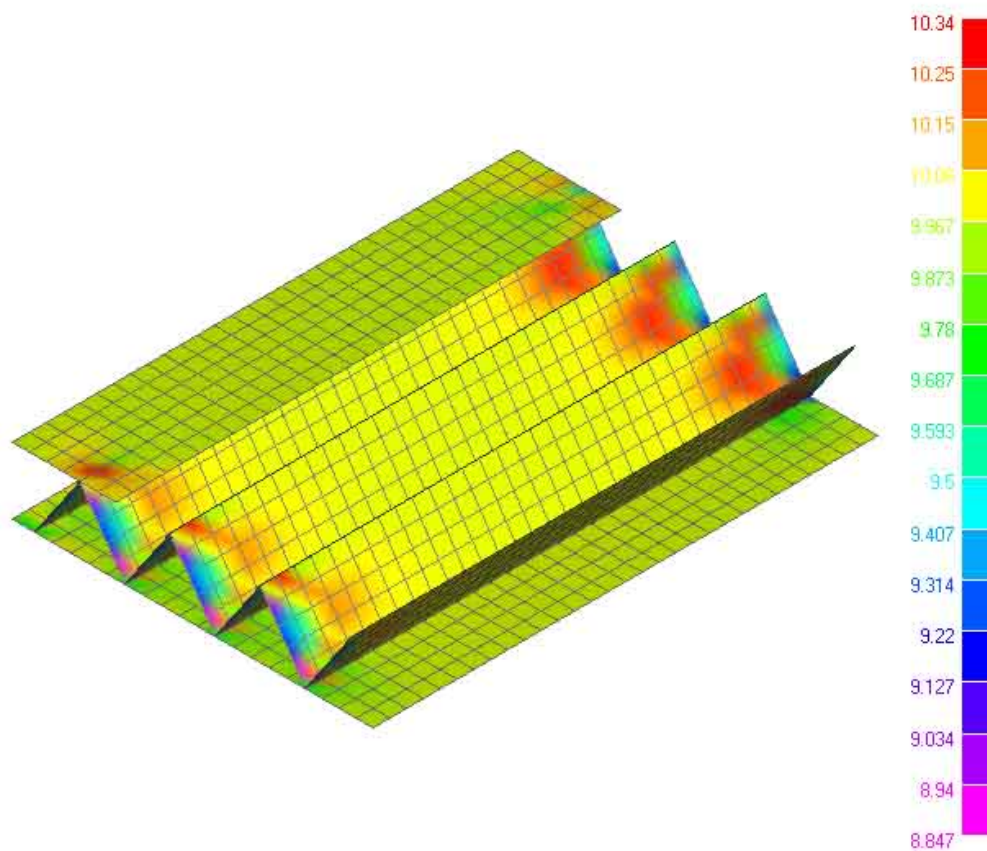
b) FIST model za globalnu analizu

sl. 48 Shematski prikaz sendvič panela



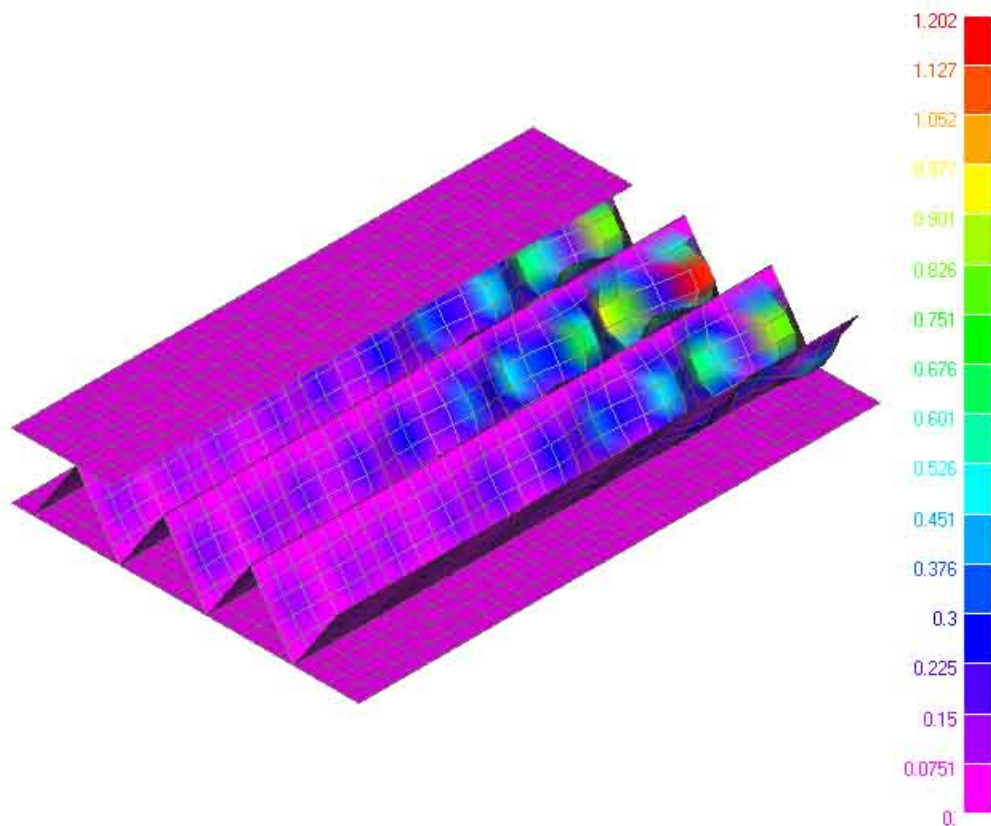
Tab. 20.5 Karakteristike analiziranog modela sendvič konstrukcije

SENDVIČ KONSTRUKCIJA		
Dimenzije ploče i ukrepljenja, [mm]	$b$	200
	$h$	150
	$t_s$	5
	$t_c$	2
Materijal, [N, mm]	$E$	68258.0
	$\nu$	0.33
FEM ( <i>buckling</i> ), [s]	$NP$	2852
	$NE$	2250
	$T$	120
FIST, [s]	$NP$	55
	$NE$	60
	$T$	5



sl. 49 Inicijalno opterećenje modela sendvič panela (dio gornje oplate nije prikazan)

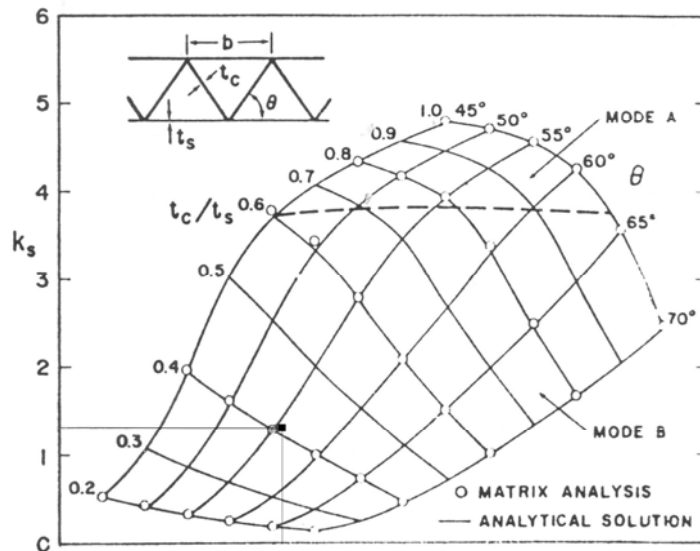
Na sl. 49 je dan model analizirane sendvič konstrukcije čije su dimenzije dane u Tab. 20.5. Prikazano naprezanje predstavlja odziv konstrukcije na jednoosno tlačno opterećenje konstantnog iznosa  $10 \text{ N/mm}^2$  koje se koristi kao inicijalno opterećenje za proračun izvijanja. Proračunato naprezanje izvijanja dobiveno pomoću MSC NASTRAN-a, *Linear buckling* analiza iznosi  $53.3 \text{ N/mm}^2$  (sl. 50) dok je program FIST dao vrijednost  $53.8 \text{ N/mm}^2$  i to za slučaj kada je u čvornim mjestima pretpostavljen slučaj slobodno oslonjenih rubnih uvjeta. Sama vremena proračuna (aktivno vrijeme računanja) za oba programa su dana u Tab. 20.5.



sl. 50 Lokalno izvijanje sendvič panela

Na sl. 50 je prikazana ovisnost koeficijenta izvijanja sendvič panela za različite odnose debljina opločenja i ukrućenja te kutove postavljanja ukrućenja, [2]. Za analizirani primjer se može očitati koeficijent izvijanja  $k_s = 1.3$  što u skladu s relacijom (4.6) daje vrijednost od približno  $55 \text{ N/mm}^2$  što u potpunosti odgovara prethodno proračunatim vrijednostima (na sl. 50 označen ■).

$$\sigma_{cr} = k_s E \left( \frac{t_s}{b} \right)^2 \quad (20.1)$$



sl. 51 Vrijednosti koeficijenta izvijanja sendvič panela, [2]

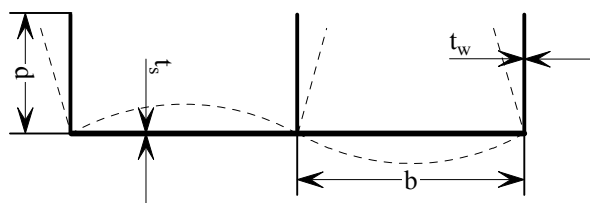
Ako se uvažuje upute s početka poglavlja za globalno izvijanje ovoga panela pomoću programa FIST se dobije kritično naprezanje od  $629 \text{ N/mm}^2$ . Vidljivo je da je to naprezanje znatno iznad kritičnog naprezanja lokalnog izvijanja. Isto tako ono je i znatno iznad granice popuštanja većine materijala pa je za očekivati druge tipove kolapsa prije nego što će se pojaviti globalno izvijanje. No ovdje treba napomenuti da je zapravo interesantniji podatak od kritičnog naprezanja izvijanja koliko opterećenje odnosno silu može prenijeti naš sendvič prije nego što se izvije. Ukoliko kritično naprezanje izvijanja pomnoži s površinom presjeka sendviča dobije se iznos od približno  $6.34 \cdot 10^6 \text{ N}$ . Naravno, to vrijedi za slučaj da ne dođe do kolapsa modela uslijed lokalnog izvijanja ili popuštanja.

## 20.4 Analiza podobnosti ravnim trakama ukrućene ploče

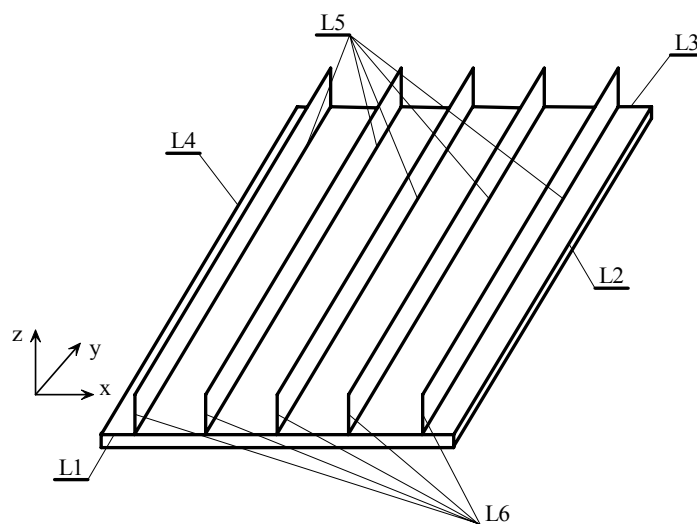
Ravnim trakama ukrućena ploča (*Flat Bar Stiffened Panel*) čest je element u zrakoplovnim i brodskim konstrukcijama. Kao i ostale orebrene tankostjene konstrukcije karakterizira je velik

odnos čvrstoće i mase. Ukoliko su tlačno opterećene takve konstrukcije su sklone pojavama lokalnog i globalnog izvijanja. U ovom primjeru prikazana je parametarska studija proračuna kritičnog naprezanja izvijanja dobivena pomoću semi-analičkog pristupa (Program FIST) te uspoređena s numeričkim rezultatima (Program NASTRAN) i odgovarajućim analitičkim formulama (EPAN).

Na sl. 52 je dan shematski prikaz dijela modela koji će biti analiziran u ovom primjeru. Puni model se sastoji od 5 ukrepa (vidi sl. 53). Opterećenje modela je zadano tako da uzrokuje kontinuirano tlačno naprezanje po presjeku u smjeru ukrepa iznosa  $400 \text{ N/mm}^2$ , a da pri tome ne izaziva savijanje panela. Materijal modela je identičan onom u prvom primjeru. Rubni uvjeti su u skladu s Tab. 20.6, sl. 53.



sl. 52 Shematski prikaz ravnim trakama ukrućene ploče



sl. 53 Analizirani model ukrućene ploče

**Tab. 20.6** Rubni uvjeti analiziranog modela ravnim trkama ukrućene ploče

Linija	L1	L2	L3	L4	L5	L6
Spriječen pomak	- 2 3 - - -	- - - - 5 -	- - 3 - - -	- - - - 5 -	- - - - - -	1 2 - - - -

**Tab. 20.7** Dimenzije analiziranih MSC NASTRAN modela ravnim trakama ukrućene ploče

Br.	NAZIV MODELA	DIMENZIJE, [mm]			
		b	t <sub>s</sub>	d	t <sub>w</sub>
1	Model_1_2_5.mod	250.0	5.0	50.0	2.5
2	Model_1_3_5.mod	250.0	5.0	50.0	3.5
3	Model_1_5_0.mod	250.0	5.0	50.0	5.0
4	Model_1_7_0.mod	250.0	5.0	50.0	7.0
5	Model_1_10_0.mod	250.0	5.0	50.0	10.0
6	Model_2_2_5.mod	250.0	5.0	100.0	2.5
7	Model_2_3_5.mod	250.0	5.0	100.0	3.5
8	Model_2_5_0.mod	250.0	5.0	100.0	5.0
9	Model_2_7_0.mod	250.0	5.0	100.0	7.0
10	Model_2_10_0.mod	250.0	5.0	100.0	10.0
11	Model_3_2_5.mod	250.0	5.0	150.0	2.5
12	Model_3_3_5.mod	250.0	5.0	150.0	3.5
13	Model_3_5_0.mod	250.0	5.0	150.0	5.0
14	Model_3_7_0.mod	250.0	5.0	150.0	7.0
15	Model_3_10_0.mod	250.0	5.0	150.0	10.0
16	Model_4_2_5.mod	250.0	5.0	200.0	2.5
17	Model_4_3_5.mod	250.0	5.0	200.0	3.5
18	Model_4_5_0.mod	250.0	5.0	200.0	5.0
19	Model_4_7_0.mod	250.0	5.0	200.0	7.0
20	Model_4_10_0.mod	250.0	5.0	200.0	10.0
21	Model_5_2_5.mod	250.0	5.0	250.0	2.5
22	Model_5_3_5.mod	250.0	5.0	250.0	3.5
23	Model_5_5_0.mod	250.0	5.0	250.0	5.0
24	Model_5_7_0.mod	250.0	5.0	250.0	7.0
25	Model_5_10_0.mod	250.0	5.0	250.0	10.0

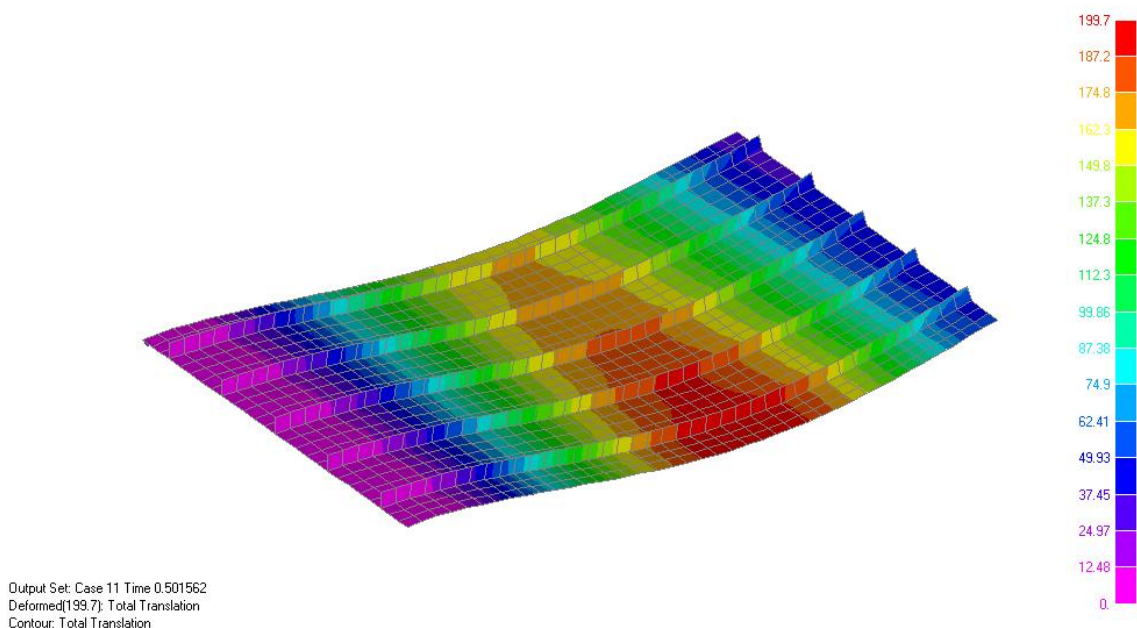
Rezultati proračuna kritičnog naprezanja izvijanja analiziranog modela normalizirani su s zadanim iznosom naprezanja ( $400 \text{ N/mm}^2$ ) i prikazani u tablicama u nastavku.

Kako bi što lakše mogli interpretirati rezultate dane u tablicama koje slijede opisati ćemo postupak analiziranja samih modela. Prvi blok analiza pojedinog modela sačinjava provjera kritičnog naprezanja izvijanja pomoću bifurkacijske analize izvijanja (*Linear buckling* MSC NASTRAN). Pri tome je prikazano prvih 9 oblika izvijanja.

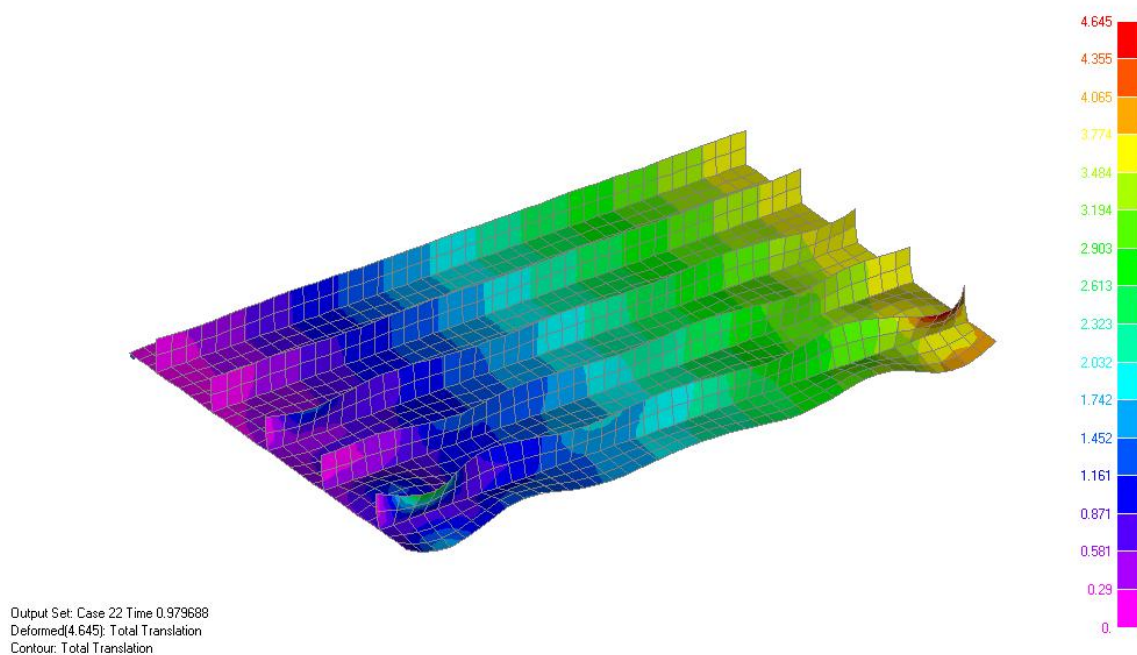
Druga analiza modela uključuje geometrijski i materijalno nelinearnu inkrementalnu statičku analizu (*Nonlinear Static*). Opterećenje je povećavano u 20 inkremenata. Pri tome je dopušteno maksimalno 25 iteracija pri svakom inkrementu kako bi se ostvarila konvergencija koja je bila definirana za pomake 0.1 mm i za opterećenje od 0.1 N/mm<sup>2</sup>. Sama metoda rješavanja bila je postavljena na automatski odabir što znači da program sam odabire način rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi.

U FIST modelu korištene su četiri konačne trake za opisivanje ponašanja oplata između ukrepa i tri konačne trake za opisivanje samog ukrepljenja. Radi testiranja programa napravljen je model s 5 ukrepa i model s jednom ukrepom. Rezultati su bili potpuno isti što samo potvrđuje da je slaganje matrica krutosti korektno napravljeno te da je sam matematički model stabilan.

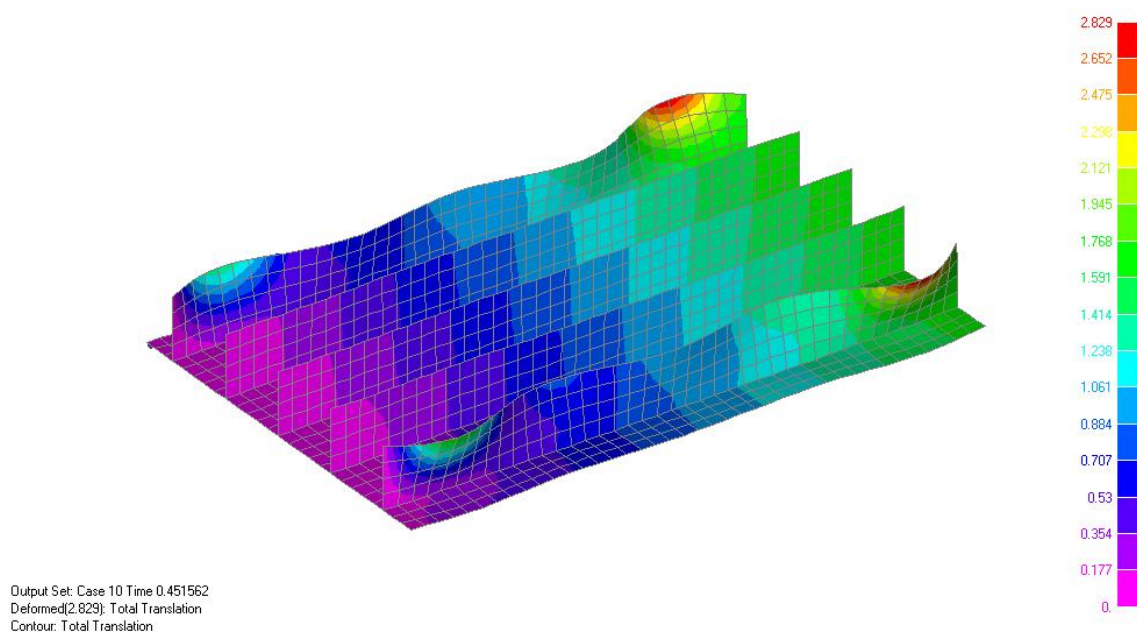
U Tab. 20.8 osjenčani su rezultati koji prema nekom proračunu opisuju kritično ponašanje modela. Generalni zaključak koji se nameće uvidom u tablicu je da su analitičke formule najstrože, dok semi-analitički pristup nešto blaži, ali u svakom slučaju daje manje kritično naprezanje od onoga dobivenog FEM proračunom. Isto tako vidljivo je da je trend analitičkih formula i semi-analitičkog proračuna odgovaraju onima dobivenim FEM proračunom. U nastavku su dane slike deformiranih modela (ukupni pomak) koje opisuju karakteristična ponašanja na ukrepljenog panela. Pregled ostalih slika dan je na CD-u (vidi Prilog C).



sl. 54 Kolaps uslijed globalnog izvijanja - Model 3



sl. 55 Stanje deformacije kod kod prestanka konvergencije - Model 8



sl. 56 Stanje deformacije kod kod prestanka konvergencije - Model 18

Na sl. 54 vidljiv je globalni kolaps cjelokupnog panela što je zapravo posljedica male visine ukrepa. Kod srednjih visina ukrepa, sl. 55, može se zaključiti da je tendencija modela lokalno izvijanje oplata i ukrepa. Na sl. 56 prikazan je model ploče s izrazito visokim ukrepljenjem. Tu je izražena pojava lokalnog izvijanja, ali dominira izvijanjej ukrepe zbog njenog slobodnog kraja.

**Tab. 20.8** Rezultati parametarske analize modela ravnim trakama ukrućene ploče (normalizirani s 400 N/mm<sup>2</sup>)

		MSC NASTRAN									EPAN			FIST
MODEL		Bifurkacijska analiza			GMNL			GNL			S_UCLLS	S_UCS	U_TFB	Oplata, Ukrepe
Br.	Datoteka	Globalno	Oplata	Ukrepe	Globalno	Oplata	Ukrepe	Globalno	Oplata	Ukrepe	Globalno	Oplata	Ukrepe	
<b>MODEL 1 250/5/50/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>														
1	Model_1_2_5.mod	0.1889	0.7536	0.7536	0.4016	-	-	0.4016	-	-	0.0687	0.6683	0.5213	0.6850
2	Model_1_3_5.mod	0.2463	0.7714	0.7714	0.4516	-	-	0.4516	-	-	0.0898	0.6683	0.6704	0.7028
3	Model_1_5_0.mod	0.3194	0.8243	0.8243	0.5000	-	-	0.5016	-	-	0.1167	0.6683	0.6715	0.7525
4	Model_1_7_0.mod	0.3978	0.9405	0.9405	0.6016	-	-	0.6016	-	-	0.1455	0.6683	0.6713	0.8598
5	Model_1_10_0.mod	0.4855	1.1119	1.1119	0.6516	-	-	0.6516	-	-	0.1776	0.6683	0.6711	0.9893
<b>MODEL 2 250/5/100/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>														
6	Model_2_2_5.mod	-	-	0.3483	-	-	0.4500	0.4516	-	0.4500	0.4317	0.6683	0.1573	0.2063
7	Model_2_3_5.mod	-	0.5800	0.5800	0.7016	0.7016	0.6500	0.7016	0.7016	0.6500	0.5069	0.6683	0.3241	0.3683
8	Model_2_5_0.mod	-	0.7276	0.7276-	-	-	0.8641	-	0.9797	0.9797	0.5717	0.6683	0.5717	0.5150
9	Model_2_7_0.mod	-	0.9166	0.9166	-	-	-	-	-	-	0.6095	0.6683	0.6303	0.6418
10	Model_2_10_0.mod	-	0.9166	0.9166	-	-	-	-	-	-	0.6357	0.6683	0.6451	0.7578
<b>MODEL 3 250/5/150/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>														
11	Model_3_2_5.mod	-	-	0.1579	-	-	0.3000	-	-	0.3016	0.6982	0.6683	0.0774	0.0910
12	Model_3_3_5.mod	-	-	0.2828	-	-	0.4516	-	-	0.4516	0.7263	0.6683	0.1591	0.1698
13	Model_3_5_0.mod	-	0.4920	0.4920	-	0.6766	0.6766	-	0.6766	0.6766	0.7463	0.6683	0.3127	0.2818
14	Model_3_7_0.mod	-	0.6590	0.6590	-	0.8266	0.8266	-	0.8266	0.8266	0.7582	0.6683	0.4834	0.4083
15	Model_3_10_0.mod	-	1.0200	1.0200	-	-	-	-	-	-	0.7655	0.6683	0.5762	0.5105



Tab. 6.8 Nastavak

		MSC NASTRAN									EPAN			FIST
MODEL		Bifurkacijska analiza			GMNL			GNL			S_UCLLS	S_UCS	U_TFB	Oplata, Ukrepe
Br.	Datoteka	Globalno	Oplata	Ukrepe	Globalno	Oplata	Ukrepe	Globalno	Oplata	Ukrepe	Globalno	Oplata	Ukrepe	Oplata, Ukrepe
<b>MODEL 4 250/5/200/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>														
16	Model_4_2_5.mod	-	-	0.0895	-	0.2016	-		0.2016	-	0.7850	0.6683	0.0464	0.0513
17	Model_4_3_5.mod	-	-	0.1643	-	-	0.3000		-	0.3016	0.7976	0.6683	0.0940	0.0960
18	Model_4_5_0.mod	-	0.2811	0.2811	-	0.4516	0.4516		0.4516	0.4516	0.8061	0.6683	0.1841	0.1670
19	Model_4_7_0.mod	-	0.4349	0.4349	-	0.5766	0.5766		0.5766	0.5766	0.8110	0.6683	0.3044	0.2558
20	Model_4_10_0.mod	-	0.7053	0.7053	-	0.7578	0.7578		0.8266	0.8266	0.8141	0.6683	0.4355	0.3523
<b>MODEL 1 250/5/250/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>														
21	Model_5_2_5.mod	-	-	0.0604	-	-	0.1266	-	-	0.1266	0.8229	0.6683	0.0309	0.0338
22	Model_5_3_5.mod	-	-	0.1112	-	0.2250	0.2250	-	0.2266	0.2266	0.8294	0.6683	0.0615	0.0625
23	Model_5_5_0.mod	-	0.1963	0.1963	-	0.3250	0.3250	-	0.3266	0.3266	0.8338	0.6683	0.1188	0.1090
24	Model_5_7_0.mod	-	0.3127	0.3127	-	0.4266	0.4266	-	0.4266	0.4266	0.8365	0.6683	0.2006	0.1693
25	Model_5_10_0.mod	-	0.5092	0.5092	-	0.5875	0.5875	-	0.6266	0.6266	0.8385	0.6683	0.3077	0.2510

**Tab. 20.9** Usporedba rezultata analize modela ravnim trakama ukrućene ploče (normalizirani s 400 N/mm<sup>2</sup>)

MODEL		MSC NASTRAN				EPAN			FIST	USPOREDBA		
		Bifurkacijska analiza		GMNL analiza		S_UCLLS	S_UCS	U_TFB	Lokalno (SA)			
Br.	Datoteka	Globalno (B1)	Lokalno (B2)	Globalno	Lokalno	Globalno (A1)	Oplata (A2)	Ukrepe (A3)		B2/A	B2/SA	A/SA
<b>MODEL 1 250/5/50/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>												
1	Model_1_2_5.mod	0.1889	0.7536	0.4016	-	0.0687	0.6683	0.5213	0.6850	1.4455	1.1001	0.7611
2	Model_1_3_5.mod	0.2463	0.7714	0.4516	-	0.0898	0.6683	0.6704	0.7028	1.1542	1.0976	0.9510
3	Model_1_5_0.mod	0.3194	0.8243	0.5000	-	0.1167	0.6683	0.6715	0.7525	1.2334	1.0955	0.8881
4	Model_1_7_0.mod	0.3978	0.9405	0.6016	-	0.1455	0.6683	0.6713	0.8598	1.4073	1.0939	0.7773
5	Model_1_10_0.mod	0.4855	1.1119	0.6516	-	0.1776	0.6683	0.6711	0.9893	1.6637	1.1240	0.6756
<b>MODEL 1 250/5/100/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>												
6	Model_2_2_5.mod	-	0.3483	-	0.45	0.4317	0.6683	0.1573	0.2063	2.2149	1.6887	0.7624
7	Model_2_3_5.mod	-	0.58	0.7016	0.65	0.5069	0.6683	0.3241	0.3683	1.7896	1.5748	0.8800
8	Model_2_5_0.mod	-	0.7276	-	0.8641	0.5717	0.6683	0.5717	0.5150	1.2727	1.4128	1.1100
9	Model_2_7_0.mod	-	0.9166	-	-	0.6095	0.6683	0.6303	0.6418	1.4541	1.4281	0.9821
10	Model_2_10_0.mod	-	0.9166	-	-	0.6357	0.6683	0.6451	0.7578	1.7688	1.5057	0.8512
<b>MODEL 1 250/5/150/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>												
11	Model_3_2_5.mod	-	0.1579	-	0.3	0.6982	0.6683	0.0774	0.0910	2.0395	1.7353	0.8508
12	Model_3_3_5.mod	-	0.2828	-	0.4516	0.7263	0.6683	0.1591	0.1698	1.7778	1.6653	0.9367
13	Model_3_5_0.mod	-	0.492	-	0.6766	0.7463	0.6683	0.3127	0.2818	1.5738	1.7461	1.1095
14	Model_3_7_0.mod	-	0.659	-	0.8266	0.7582	0.6683	0.4834	0.4083	1.3633	1.6140	1.1839
15	Model_3_10_0.mod	-	1.02	-	-	0.7655	0.6683	0.5762	0.5105	1.7703	1.9980	1.1286

A=min(A2,A3) - analitičko rješenje

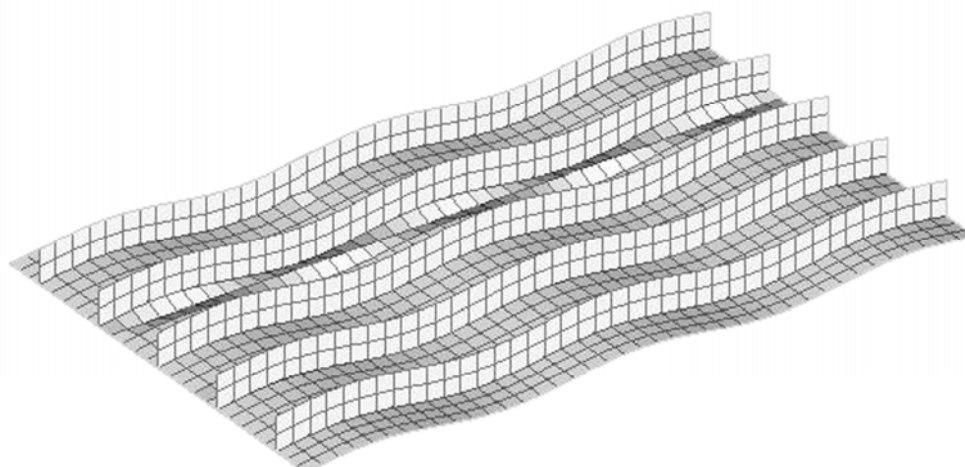
Tab. 6.9 Nastavak

MODEL		MSC NASTRAN				EPAN			FIST	USPOREDBA		
		Bifurkacijska analiza		GMNL analiza		S_UCLLS	S_UCS	U_TFB	Lokalno (SA)			
Br.	Datoteka	Globalno (B1)	Lokalno (B2)	Globalno	Lokalno	Globalno (A1)	Oplata (A2)	Ukrepe (A3)		B2/A	B2/SA	A/SA
<b>MODEL 1 250/5/200/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>												
16	Model_4_2_5.mod	-	0.0895	-	0.2016	0.7850	0.6683	0.0464	0.0513	1.9295	1.7452	0.9045
17	Model_4_3_5.mod	-	0.1643	-	0.3	0.7976	0.6683	0.0940	0.0960	1.7478	1.7110	0.9789
18	Model_4_5_0.mod	-	0.2811	-	0.4516	0.8061	0.6683	0.1841	0.1670	1.5271	1.6835	1.1024
19	Model_4_7_0.mod	-	0.4349	-	0.5766	0.8110	0.6683	0.3044	0.2558	1.4285	1.7000	1.1901
20	Model_4_10_0.mod	-	0.7053	-	0.7578	0.8141	0.6683	0.4355	0.3523	1.6198	2.0021	1.2360
<b>MODEL 1 250/5/250/(2.5) (3.5) (5.0) (7.0) (10.0)</b>												
21	Model_5_2_5.mod	-	0.0604	-	0.1266	0.8229	0.6683	0.0309	0.0338	1.9590	1.7880	0.9127
22	Model_5_3_5.mod	-	0.1112	-	0.225	0.8294	0.6683	0.0615	0.0625	1.8101	1.7797	0.9832
23	Model_5_5_0.mod	-	0.1963	-	0.325	0.8338	0.6683	0.1188	0.1090	1.6523	1.8005	1.0897
24	Model_5_7_0.mod	-	0.3127	-	0.4266	0.8365	0.6683	0.2006	0.1693	1.5591	1.8468	1.1846
25	Model_5_10_0.mod	-	0.5092	-	0.5875	0.8385	0.6683	0.3077	0.2510	1.6547	2.0286	1.2260

A=min(A2,A3) - analitičko rješenje

### 20.4.1 Utjecaj početnog ekscentriciteta oplata i ukrepa na izvijanje

U drugom dijelu primjera analiziran je utjecaj početnog ekscentriciteta oplata i ukrepa na kritično naprezanje izvijanja takvog panela. Za usporedbu uzet je panel pod rednim brojem 8, Tab. 20.8. Analizirane su tri skupine po osam modela. Prvu skupinu čine modeli koji imaju zadan početni ekscentricitet u oplati, drugu skupina oni s ekscentricitetom ukrepa dok su u trećoj skupini modeli koji su imali zadan ekscentricitet i u oplati i u ukrepi. Svi su modeli imali zadan početni ekscentricitet u obliku sinusne funkcije (vidi sl. 57) amplitude 2 mm (1 ‰ raspona) i brojem poluvalova između 1 i 8.



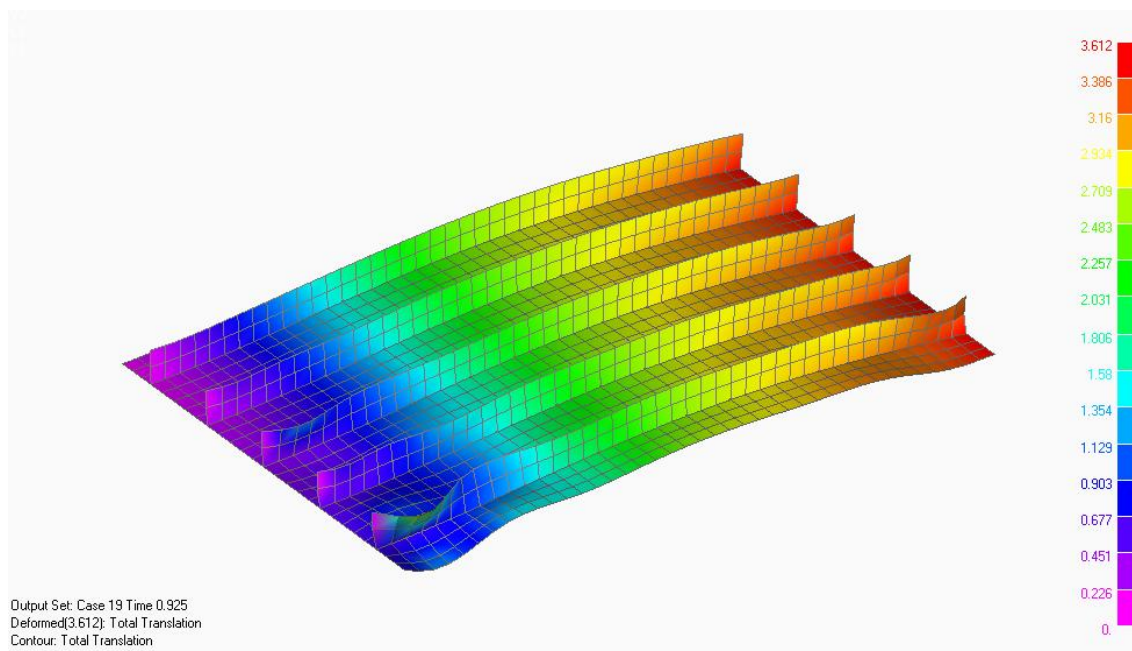
sl. 57 Ravna ploča s početnom imperfekcijom (5 poluvalova, uvećanje 10 puta)

Opći zaključak koji se može izvući iz rezultata prikazanih u Tab. 20.10 je da početna nepravilnost bez obzira na oblik povećava sklonost konstrukcije izvijanju. Isto tako inicijalna imperfekcija u oplati više je smanjila kritično naprezanje od inicijalne imperfekcija ukrepa. Kada je narinuta imperfekcija i u oplatu i u ukrepe, kritično naprezanje je bilo veće nego u slučaju kada je imperfekcija bila samo u oplati. To se može objasniti činjenicom da smjer imperfekcije ukrepa nije bio u skladu s trendom deformacije oplata.

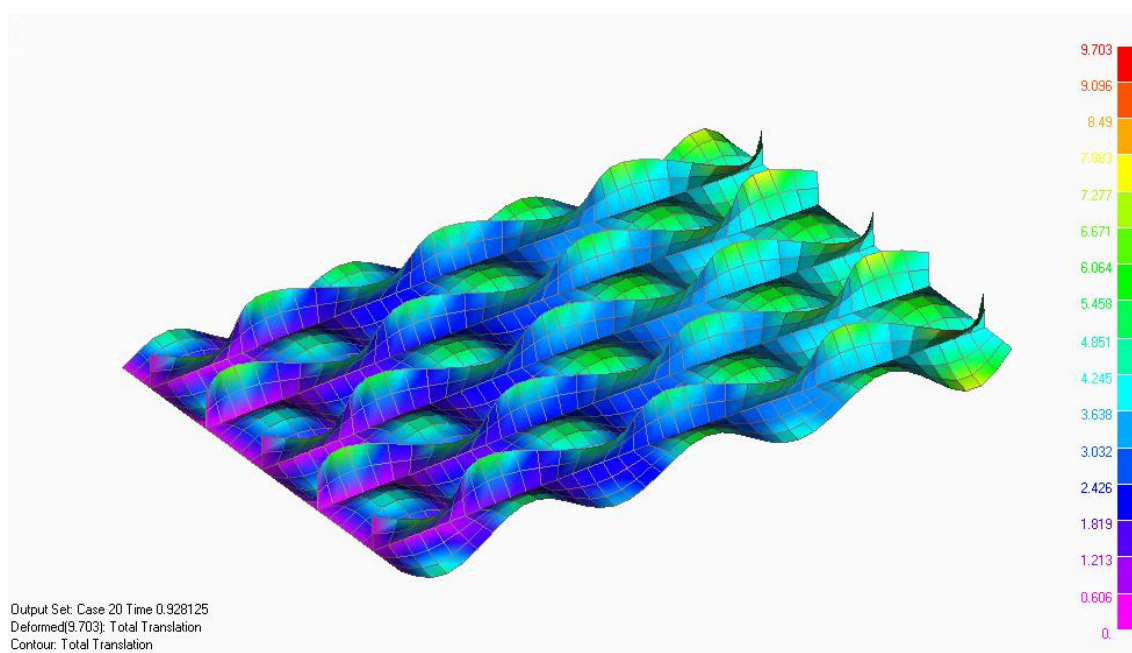
Što se tiče osjetljivosti samog tipa analize, vidljivo je da broj poluvalova kojima je opisana početna nepravilnost različito djeluje na bifurkacijsku analizu od nelinearne analize izvijanja. Bifurkacijska analiza izvijanja je pokazala manje kritično naprezanje za manji broj poluvalova

dok je nelinearna inkrementalna analiza pokazala suprotne rezultate. U nastavku su prikazana tri analizirana modela u deformiranom stanju (Tab. 20.10.) koji zajedno opisuju propagaciju deformacija do kolapsa modela.

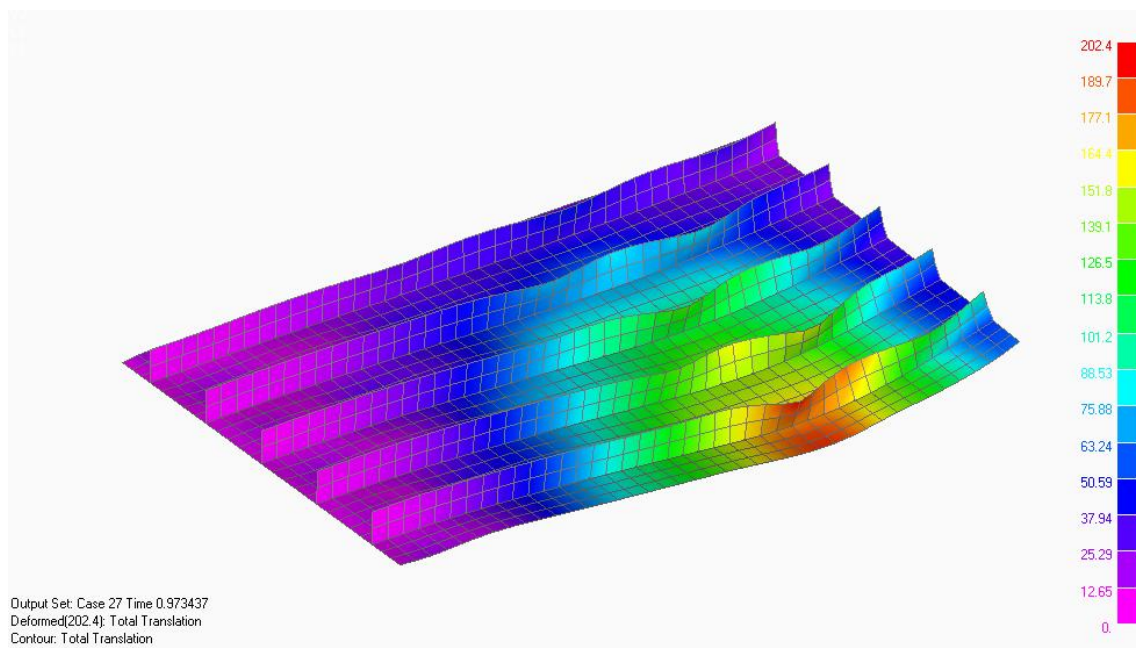
Vrijednosti prikazane na skali i iscrtane deformacije odgovaraju ukupnom pomaku čvorova modela.



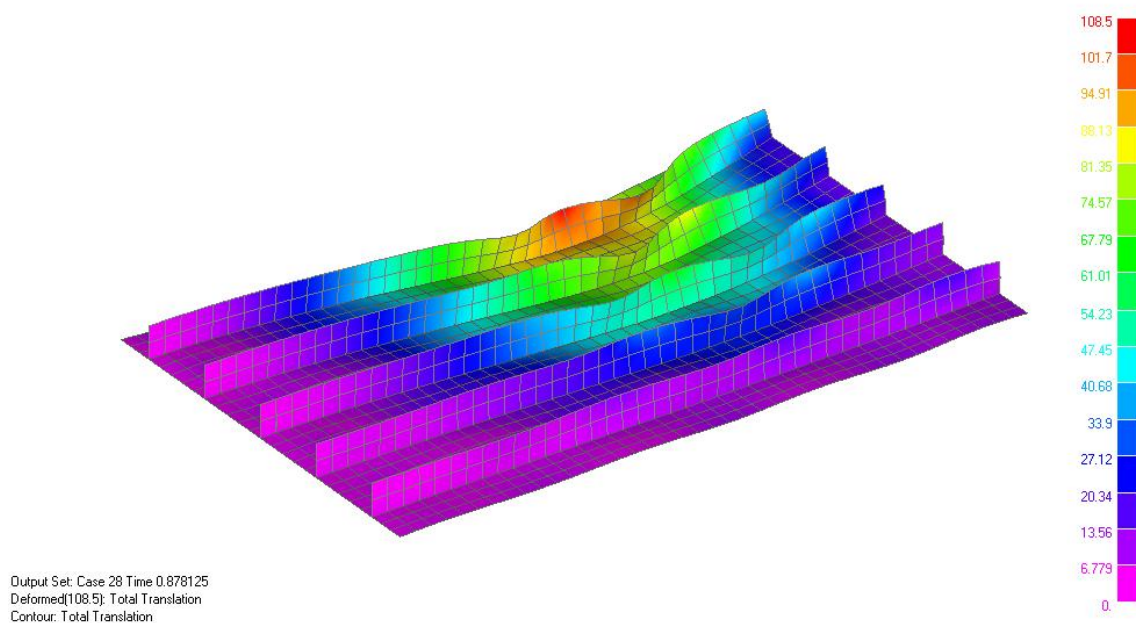
sl. 58 Predkritično deformirano stanje ravnim trakama ukrućenog panela - Model 2



sl. 59 Lokalni kolaps ravnim trakama ukrućenog panela - Model 2



sl. 60 Globalni kolaps ravnim trakama ukrućenog panela - Model 2



sl. 61 Globalni kolaps ravnim trakama ukrućenog panela - Model 13

Modeli na sl. 58, sl. 59, sl. 60 imali su zadanu inicijalnu imperfekciju oplatae u obliku jednog poluvala amplitude 2 mm dok je model na sl. 61 imao zadanu imperfekciju ukrepe u obliku 4 poluvala amplitude 2mm.

**Tab. 20.10** Usporedba rezultata analize modela ravnim trakama ukrućene ploče s početnim ekscentricitetom (normalizirani s 400 N/mm<sup>2</sup>)

MODEL			BIFURKACIJSKA ANALIZA			NELINEARNA ANALIZA			KOMENTAR
Br.	Datoteka	Br. poluv.	Globalno	Oplata	Ukrepe	Global	Oplata	Ukrepe	
1	Model_2_02_id_0_0_hwl.mod	0	-	0.7276	0.7276	-	-	0.9797	Izvija se u 7 poluvalova. Nema gl. kolapsa.
<b>Inicijalna imperfekcija u oplati, amplituda 2 mm, 1-8 poluvalova</b>									
2	Model_2_02_id_2_1_hwl.mod	1	-	0.6032	0.6032	0.9734	0.9281	0.9281	Zadana inicijalna imperfekcija u oplati.
3	Model_2_02_id_2_2_hwl.mod	2	-	0.6223	0.6223	0.9266	0.9266	0.9250	
4	Model_2_02_id_2_3_hwl.mod	3	-	0.6326	0.6326	-	0.9781	0.9500	
5	Model_2_02_id_2_4_hwl.mod	4	-	0.6492	0.6492	0.8594	0.8281	0.8281	
6	Model_2_02_id_2_5_hwl.mod	5	-	0.6598	0.6598	-	0.9797	0.9797	
7	Model_2_02_id_2_6_hwl.mod	6	-	0.6549	0.6549	-	0.8766	0.8766	
8	Model_2_02_id_2_7_hwl.mod	7	-	0.6657	0.6657	0.9891	0.8633	-	
9	Model_2_02_id_2_8_hwl.mod	8	-	0.7002	0.7002	0.8828	0.8500	0.8500	
<b>Inicijalna imperfekcija ukrepa, amplituda 2 mm, 1-8 poluvalova</b>									
10	Model_2_02_idu_2_1_hwl.mod	1	-	0.7283	0.7283	-	0.9797	0.9797	Zadana inicijalna imperfekcija u ukrepi.
11	Model_2_02_idu_2_2_hwl.mod	2	-	0.7267	0.7267	-	0.9765	0.9765	
12	Model_2_02_idu_2_3_hwl.mod	3	-	0.7288	0.7288	-	0.9266	0.9266	
13	Model_2_02_idu_2_4_hwl.mod	4	-	0.7287	0.7287	0.8781	0.8516	0.8516	
14	Model_2_02_idu_2_5_hwl.mod	5	-	0.7321	0.7321	0.8641	0.8500	0.8500	
15	Model_2_02_idu_2_6_hwl.mod	6	-	0.7343	0.7343	0.8141	0.7719	-	
16	Model_2_02_idu_2_7_hwl.mod	7	-	0.7423	0.7423	0.7813	0.8109	0.7500	
17	Model_2_02_idu_2_8_hwl.mod	8	-	0.7381	0.7381	0.7328	0.7328	-	

Tab. 6.10 Nastavak

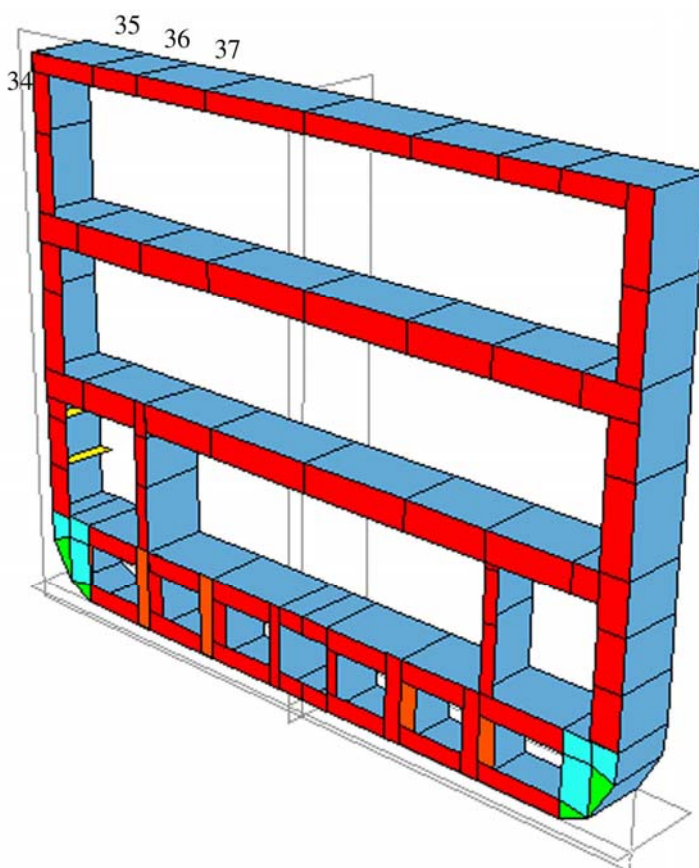
MODEL			BIFURKACIJSKA ANALIZA			NELINEARNA ANALIZA			KOMENTAR
Br.	Datoteka	Br. poluv.	Globalno	Oplata	Ukrepe	Global	Oplata	Ukrepe	
1	Model_2_02_id_0_0_hwl.mod	0	-	0.7276	0.7276	-	-	0.9797	Nema inicijalne imperfekcije.
<b>Inicijalna imperfekcija zadana u oplati i ukrepama, amplituda 2 mm, 1-8 poluvalova</b>									
18	Model_2_02_idup_2_1_hwl.mod	1	-	0.6039	0.6039	-	0.9391	0.9391	Zadana inicijalna imperfekcija u ploči i ukrepi.
19	Model_2_02_idup_2_2_hwl.mod	2	-	0.6197	0.6197	-	0.8781	0.8781	
20	Model_2_02_idup_2_3_hwl.mod	3	-	0.6351	0.6351	-	0.8250	0.8250	
21	Model_2_02_idup_2_4_hwl.mod	4	-	0.6486	0.6486	-	0.7750	0.7750	
22	Model_2_02_idup_2_5_hwl.mod	5	-	0.6617	0.6617	0.8375	0.8250	0.8250	
23	Model_2_02_idup_2_6_hwl.mod	6	-	0.6585	0.6585	0.8156	-	-	
24	Model_2_02_idup_2_7_hwl.mod	7	-	0.6697	0.6697	0.7688	-	-	
25	Model_2_02_idup_2_8_hwl.mod	8	-	0.7113	0.7113	0.7375	-	-	



## 20.5 Proračun podobnosti 2D presjeka RO-RO broda

U ovome će primjeru biti prikazana analiza podobnosti konstrukcije na primjeru segmenta poprečnog presjeka 2D RO-RO broda prikazanog na sl. 62, [11]. Sama analiza će se provoditi pomoću programa CREST u kojeg je osim kriterija za analizu podobnosti Hrvatskog registra brodova ugrađena i većina kriterija obrađenih u ovome radu. Detaljni nazivi pojedinih kriterija i njihovi opisi dani su u Prilogu B. Osim toga biti će uspoređeni istovjetni kriteriji odnosno oni koji se mogu uspoređivati kako bi se uvidjela njihova razlika.

Opterećenje i rubni uvjeti modela su preuzeti iz [11]. Od 5 slučajeva opterećenja za usporedbu će se koristiti samo prvi kojega karakterizira puno opterećenje i valni moment za slučaj progiba (*Full Load + Sagging*) prema pravilima Hrvatskog registra brodova. Ovaj slučaj opterećenja je potpuno simetričan. Za usporedbu će se koristiti samo dio elemenata strukture i to vojevi 34-37 (vidi sl. 62). Karakteristike uspoređivanih elemenata su dane u Tab. 20.11.



sl. 62 CREST FEM model presjeka RO-RO broda

Tab. 20.11 Karakteristike uspoređivanih elemenata strukture (vojeva)

		VOJ 34	VOJ 35	VOJ 36	VOJ 37
Materijal, [N, mm]	$E$	206000	206000	206000	206000
	$\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3
	$\sigma_0$	355	355	355	355
Dimenzije, [mm]	$a$	2880	2880	2880	2880
	$b$	3200	3520	2350	3660
	$t$	12	11	11	11
Ukrepljenje, [mm]	TIP	ekv. T	ekv. T	ekv. T	ekv. T
	$n_s$	4	5	3	5
	$d^s$	106.6	142.9	142.9	142.9
	$t^w$	7	7	7	7
	$b^f$	22.61	26.83	26.83	26.83
	$t^f$	17.5	17.5	17.5	17.5

Proračunati odziv konstrukcije na tako zadano opterećenje dobiven pomoću programa TORO i TOKV dan je u Tab. 20.12. Ti su programi kao moduli ugrađeni u program CREST, sustav OCTOPUS. Programi TORO i TOKV daju finu raspodjelu naprezanja po makroelementu, a u prikazane su vrijednosti u oplati na mjestima gdje su postavljene ukrepe.

Glavno uzdužno naprezanje u elementima je tlačno dok naprezanje u drugom smjeru varira. To omogućava provjeru najvažnijih kriterija izvijanja. Najprije će se usporediti kriteriji koji se odnose na oplatu između ukrepa. Tu se uspoređuju rezultati dobiveni prema [8], [18], [19], semi-analitički rezultati i vrijednosti definirane pravilima HRB-a, [22]. Opis skraćena naziva kriterija dan je u Prilogu B. Usporedba je napravljena za slučaj jednoosnog i dvoosnog stanja naprezanja (*j.s.n.* i *d.s.n.*).

**Tab. 20.12** Proračunati odziv, ulaz u biblioteku kriterija

	ČVOR	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\sigma_{vm}$	$\sigma_{fr}$	$\tau_{frw}$
Element 34	1	-152.5	4.3	20.2	163.0	-30.1	19.3
	2	-148.0	-3.6	21.0	154.6	-17.2	16.5
	3	-143.5	-10.2	21.7	147.1	-6.3	13.6
	4	-138.9	-15.5	22.4	140.5	2.4	10.6
	5	-134.4	-19.5	23.0	134.7	8.9	7.5
Element 35	1	-141.1	-3.8	17.3	144.2	-19.9	-5.9
	2	-143.6	-1.2	18.1	148.3	-25.4	-7.3
	3	-146.1	1.8	18.9	152.6	-32.1	-8.6
	4	-148.5	5.4	19.7	157.3	-39.8	-9.9
	5	-151.0	9.5	20.5	162.3	-48.6	-11.2
	6	-153.5	14.1	21.3	167.7	-58.6	-12.5
Element 36	1	-147.4	-7.0	14.0	161.2	-13.1	0.9
	2	-133.5	-7.1	14.8	133.9	-12.9	-0.4
	3	-136.0	-6.6	15.7	137.0	-13.9	-1.8
	4	-138.6	-5.6	16.5	140.4	-16.0	-3.2
Element 37	1	-115.5	-17.5	7.7	110.1	16.7	-2.4
	2	-118.1	-16.4	8.5	113.3	14.0	-3.8
	3	-120.6	-14.9	9.4	116.7	10.2	-5.2
	4	-123.2	-12.9	10.2	120.3	5.2	-6.5
	5	-125.8	-10.5	11.0	124.2	-1.0	-7.9
	6	-144.9	-7.7	11.8	161	-8.4	-9.3

**Tab. 20.13** Faktori podobnosti oplata između ukrepa,  $\sigma_x$  ili  $\sigma_y$

Element	PCLB		S_UCS		U_UCS	
	j.s.n.	d.s.n.	j.s.n.	d.s.n.	j.s.n.	d.s.n.
34	0.2077	0.2077	0.2353	0.1279	0.2786	0.1279
35	0.2061	0.2061	0.2322	0.2322	0.2755	0.2755
36	0.2343	0.1840	0.2564	0.2274	0.3101	0.2820
37	0.2702	0.1880	0.2920	0.1761	0.3445	0.1761

U Tab. 20.13 dane su vrijednosti naprezanja za kriterije koji promatraju ploču između ukrepa opterećenu najprije naprezanjem  $\sigma_x$  kao glavnim tlačnim (j.s.n.). Zatim se u slučaju d.s.n. naprezanja izmjenjuju  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  kao glavna naprezanja. Vidimo da je u nekim slučajevima manje tlačno naprezanje u  $y$  smjeru kritično zbog odnosa duljina stranica. Osim toga vidljivo je da je faktor podobnosti za graničnu čvrstoću (kriterij U-UCS) uvijek veći od vrijednosti dobivene za slučaj klasičnog proračuna kritičnog naprezanja (*Serviceability Limit State*). Također se iz tablice vidi da je kriterij HRB-a, uvijek daje manju vrijednost faktora podobnosti. Razlog tome je što on pretpostavlja koeficijent izvijanja za ravnu ploču  $k_c = 4.0$  neovisno o odnosu duljina stranica zadržavajući se tako na strani sigurnosti.

**Tab. 20.14** Faktori podobnosti oplate između ukrepa,  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$

Element	S_BCES		U_BCES		PLB_SA	
	j.s.n.	d.s.n.	j.s.n.	d.s.n.	j.s.n.	d.s.n.
34	0.2353	0.0750	0.2786	0.0931	0.2677	0.2517
35	0.2322	0.1403	0.2755	0.2261	0.2619	0.2174
36	0.2564	0.2080	0.3101	0.2800	0.2754	0.2236
37	0.2920	0.1827	0.3445	0.1538	0.3106	0.2285

U **Tab. 20.14** prikazani su faktori podobnosti kada se za kriterije koji uzimaju u obzir dvoosno stanje naprezanja. Tu je vidljivo da su kriteriji prema [8], [18], [19] znatno stroži od semi-analitičkog proračun za koga je pokazano izuzetno dobro poklapanje s numeričkim rezultatima (Poglavlje 20.1).

**Tab. 20.15** Faktori podobnosti za slučaj smičnog izvijanja oplate između ukrepa

Element	PCES	S_ES	U_ES
34	0.7686	0.7843	0.7868
35	0.7837	0.7985	0.8008
36	0.8262	0.8386	0.8408
37	0.8721	0.8815	0.8831

Za slučaj smičnog opterećenja uspoređeni su rezultati prema HRB-u, kriterij PCES s onima prema [8], za slučaj granične uporabljivosti (S-ES) i graničnog nosivog stanja (U-ES). Na

osnovu proračunatih vrijednosti može se konstatirati da odstupanja pojedinih kriterija nisu značajna.

U nastavku je prikazana analiza podobnosti samog ukrepljenja postavljenog na analizirane elemente. Uspoređena su tri kriterija. U\_CB [8] je kriterij koji analiziraju izvijanje ukrepe bez rotacije poprečnih presjeka (*column buckling*). SBCSR [22] i U\_TFB [8] uzimaju u obzir rotacije poprečnih presjeka. Vidljivo je da kriterij SBCSR HRB-a daje manje vrijednosti faktora podobnosti od onih vrijednosti kriterija U\_TFB dok se za ove odnose dimenzija faktora podobnosti prema kriteriju ograničenja U\_CB nešto manje od od onih dobivenih prema kriteriju U\_TFB što nije bio slučaj u primjeru izvijanja ravnim trakama ukrućene ploče (prethodni primjer).

**Tab. 20.16** Faktori podobnosti  $g$  za slučaj smičnog izvijanja oplata između ukrepa

Element	U_CB	SBCSR	U_TFB
34	0.3876	0.2941	0.3811
35	0.3535	0.2729	0.3670
36	0.3981	0.3199	0.4109
37	0.4303	0.3544	0.4426

Vežano za izvijanje ukrepa potrebno je naglasiti da se kod njih uvijek promatra granično nosivo stanje jer ono daje pravu sliku budući da će se ukrepljeni panel nakon što ukrepe kolapsiraju ponašati kao obična ploča bez ukrepljenja što može bitno promijeniti postkritično ponašanje.

## 21. ZAKLJUČAK

Analiza podobnosti orebrene tankostjene konstrukcije nezaobilazna je faza u procesu projektiranja i optimalizacije novih konstrukcija te provjeri razine sigurnosti postojećih konstrukcija. U tu su svrhu razvijene analitičke formule, semi-analitički i numerički postupci te neke eksperimentalne metode. Ako izostavimo eksperiment, koji bi zapravo trebao biti najpouzdanija ocjena podobnosti konstrukcije, međusobnom usporedbom ostale tri tehnike za analizu podobnosti konstrukcije mogu se izvesti sljedeći zaključci:

- analitičke formule koje se koriste u zrakoplovstvu i brodogradnji, a nisu proizišle direktno iz teorije elastičnosti (uključuju neka pojednostavljena) su generalno gledano konzervativne (velike margine sigurnosti),
- semi-analitički proračuni se u većini slučajeva poklapaju s ekvivalentnim numeričkim proračunima (tu se misli na *linear buckling* analize) i manje su konzervativni,
- numerički proračuni su znatno pouzdaniji, ali i kod njih postoji bitno odstupanje s obzirom na tehniku proračuna konstrukcije (znatne razlike između linearne i nelinearne analize s velikim pomacima).

Uspoređujemo li tehnike analize podobnosti konstrukcije sa stanovišta brzine pripreme modela i vremena trajanja proračuna tada je metoda konačnih traka apsolutni pobjednik kada je u pitanju lokalno izvijanje. Kod globalnog izvijanja izvedene matrice krutosti koje opisuju membranske pomake su jako krute i tako dobivene vrijednosti kritičnih naprezanja su znatno iznad točnih vrijednosti. Osim toga, proračun izvijanja orebrene tankostjene konstrukcije metodom konačnih traka zamjenjuje više analitičkih kriterija (lokalno izvijanje, izvijanje ukrepe kao štapa, postrano izvijanje ukrepa...), a stvarno ponašanje konstrukcije se lako može vizualizirati.

Utjecaj početnih nepravilnosti (inicijalnih imperfekcija) na stabilnost matematičkog modela i na kritično naprezanje izvijanja je znatan. Kako je u praksi gotovo nemoguće naći idealno ravne modele, nužno je razmotriti najčešće oblike imperfekcija i njima prilagoditi proračunske modele. Pri tome treba razgraničiti imperfekcije od velikih inicijalnih deformacija modela jer općenito velike deformacije mogu često djelovati kao stabilizirajući faktor (kritična naprezanja zakrivljenih ploča su znatno veća od kritičnih naprezanja ravnih segmenata).

Kao opći zaključak može se reći da u konceptualnom i preliminarnom projektiranju analitičke formule i semi-analitički postupci daju dobre premda konzervativne rezultate. Ono što je važno naglasiti je činjenica da te formule dobro opisuju trendove promjena odnosa dimenzija konstrukcije. Vrijeme računanja im je kratko tako da su pogodni i za optimalizaciju konstrukcija.

Sa programerskog stanovišta sama biblioteka ograničenja nije neki logički zahtijevan kod, ali u postupcima optimalizacije (podrazumijeva višestruko izvršavanje pojedinih kriterija) svaka minimalna ušteda vremena je od izrazitog značaja. Posebno treba obratiti pažnju na računalno vrijeme potrebno da se obavi neka operacija i izbjegavati višestruko ponavljanje istih operacija. Osim toga za primjenu u optimalizacijskim procedurama izrazito je važna stabilnost samih kriterija biblioteke ograničenja te mogućnost proračuna derivacija kriterija podobnosti s obzirom na ulazne parametre (projektne varijable).

Buduće istraživanje moglo bi biti usmjereno na izvod ekscentričnog grednog elementa te korekcije membranskih matrica krutosti koji bi omogućili tretiranje globalnog izvijanja orebrene tankostjene konstrukcije.

**LITERATURA**

- [1] Jane's Informations: *All the World's Aircrafts*, Jane's Information Group Limited, Coulsdon, UK, 2000.
- [2] J. S. Przemieniecki: *Finite Element Structural Analysis of Local Instability*, AIAA Journal, vol 11, str. 33-39, siječanj, 1973.
- [3] Cheung, Y. K.: *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1976.
- [4] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, vol. 1, 2, McGraw-Hill Book Company, London, 2000.
- [5] S. H. Lee: *MSC/NASTRAN Handbook for Nonlinear Analysis*, Macneal-Schwendler Corporation, Los Angeles, 1992.
- [6] Žanić, V., Jančijev, T., Rogulj, A., Bralić, S., Hozmec, J., Frank, D.: Programska dokumentacija računalnog programa CREST za provjeru i analizu brodske konstrukcije sukladno tehničkim pravilima Hrvatskog Registra Brodova, II izdanje, Zagreb, 2003.
- [7] V. Žanić, P. K. Das, Y. Pu, D. Faulkner: *Multiple Criteria Synthesis Techniques Applied to Reliability-Based Design of Ship Structures*, EMAS Scientific Publication, pp. 387-415, 1993.
- [8] N. Naranča, *Formuliranje matematičkog modela za konceptualno projektiranje konstrukcije*, Magistarski rad, Zagreb, 1996
- [9] V. Žanić, J. André, D. Frank: *Structural Optimization Method for the Concept Design of Ship Structures*, International Marine Design Conference-IMDC, 2003, Athens, Greece, 2003, (rad prihvaćen).
- [10] V. Žanić, A. Rogulj, T. Jančijev, S. Bralić, J. Hozmec: *Methodology for Evaluation of Ship Structural Safety*, Proceedings of the 10th International Congress IMAM 2002, p. 54+CD pp.1-8, Hellas, Crete, 2002.
- [11] J. Andrić: *Procedura projektiranja brodskih konstrukcija putničkih i Ro-Ro brodova*, Magistarski rad, Zagreb, 2003.
- [12] C. Felippa: *Introduction to Finite Element Methods*, University of Colorado at Boulder, 2002.
- [13] H. T. Yang, S. Saigal, A. Masud, R. K. Kapania: *A survey on recent shell finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 47, str. 101-127, siječanj, 2000.



- [14] V. Žanić, T. Jančijev, S. Bralić, D. Frank, J. Hozmec: *CRS CREST, Teoretski priručnik*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2000.
- [15] V. Žanić, *Program BULL*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1986.
- [16] Proteus Engineering, *MAESTRO Modeler Manual v. 8.5.1*, Stevensville, USA, 2003.
- [17] G. Gerard, H. Becker: *Handbook of Structural Stability, Part I, Buckling of Flat Plates*, NACA, Technical Note 3781, Washington, 1957.
- [18] A. E. Mansour: *Approximate Formulae for Preliminary Design of Stiffened Plates*, Proceedings OMAE, Tokyo, 1986, str. 427-434
- [19] O. F. Huges, *Ship Structural Design*, SNAME, New Jersey, 1988.
- [20] I. Alfirević, *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Golden Marketing, Zagreb, 2003.
- [21] F. Szepan: *Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung grosser Formänderungen unter Berücksichtigung der termomechanischen Kopplung*, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1989.
- [22] *Rules for Technical Supervision of Sea-Going Ships, Part 2*, Hrvatski registar brodova, Split 1999.
- [23] P. Lengyel, A. R. Cusens: *A Finite Strip Method for the Geometrically Nonlinear Analysis of Plate Structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, str. 331-340, siječanj, 1983.
- [24] Z. G. Azizian, D. I. Dawe: *Geometrically Nonlinear Analysis of Rectangular Mindlin Plates Using Finite Strip Method*, Computers & Structures, vol. 21, str. 423-436, 1985.
- [25] S. C. W. Lau, G. J. Hancock: *Buckling of Thin Flat-Walled Structure by Spline Finite Strip Method*, Thin Wall Structures, vol. 4, str. 269-294, 1986.
- [26] I. Alfirević, *Linearna analiza konstrukcija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1999.
- [27] ..., Visual Numerics: *IMSL Math Library*, Volume 1,2, San Ramon, USA
- [28] W. L. Ko, R. H. Jackson: *Compressive Buckling Analysis of Hat-Stiffened Panel*, NASA Technical Memorandum 4310, Dryden Flight Research Facility, Edwards, California
- [29] Hrvatski registar brodova: *Pravila za provjeru broskog trupa*, HRB, Split, 1999.
- [30] C. Felippa: *Nonlinear Finite Element Methods*, University of Colorado at Boulder, 2002.
- [31] D. Faulkner: *A Riview of Effective Plating to be Used in the Analysis of Stiffened Plating in Bending and Compression*, MIT Cambridge, 1973.
- [32] J. Sorić, *Odabrana poglavlja iz teorije ljustaka*, Podloge za predavanja, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1993.

- [33] J. Sorić, *Opća teorija ploča*, Inženjerski priručnik, poglavlje 7.12.5, Zagreb
- [34] J. Sorić, *Linearna i nelinearna teorija ljusaka u tenzorskoj formulaciji-odabrana poglavlja*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1993.
- [35] Y. Basar, *Modelling of Shells; Tensor Analysis-Bending Theory*, Cahiers de Mechanique, Lille, 1993.
- [36] Y. Basar, W.B. Krätzig, *Theory of Shell Structures*, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [37] N. Vranković, *Varijacijski račun*, Inženjerski priručnik, poglavlje 1.12, Zagreb
- [38] Smojver, I.: *Konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija iz višeslojnih kompozitnih materijala*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Magistarski rad, Zagreb, 1994.
- [39] Yang, H. T. Y, Saigal, S., Masud, A., Kapania, R. K.: *A survey on recent shell finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, str. 101-127, 2000.
- [40] Basar, Y., Ding, Y., Schultz, R.: *Refined Shear-Deformation Models for Composite Laminates with Finite Rotations*, International Journal for Solids Structures, Vol. 30, No. 19, str. 2611-2638, 1993.
- [41] Basar, Y., Montag, U., Ding, Y.: *On a isoparametric finite-element for composite laminates with finite rotations*, Computational Mechanics, Vol. 12, str. 329-348, 1993.
- [42] Dorninger, K., Rammerstorfer, G.: *A Layered Composite Shell Element for Elastic and Thermoelastic Stress and Stability Analysis at Large Deformations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, str. 833-858, 1990.
- [43] Kulikov, G. M., Plotnikova, S. V.: *Simple and effective elements based upon Timoshenko-Mindlin shell theory*,
- [44] Kulikov, G. M., Plotnikova, S. V.: *Efficient mixed Timoshenko-Midlin shell elements*,
- [45] Kulikov, G. M., Plotnikova, S. V.: *Non-linear analysis of multilayered shells under initial stress*,
- [46] Kulikov, G. M., Plotnikova, S. V.: *Variational Equation for nonlinear multilayered anisotropic shell of variable stiffness*,
- [47] Guo, Y., Ortiz, M., Belytschko, T., Repetto, E.: *Triangular composite finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, str. 287-316, 2000.
- [48] Wisniewski, K.: *Finite rotation quadrilateral element for multi-layer beams*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, str. 405-431, 1999.

- [49] William, L.: *Thermal and Mechanical Buckling Analysis of Hypersonic Aircraft Hat-Stiffened Panels with Varying Face Sheet Geometry and Fiber Orientation*, NASA Technical Memorandum 4770, December, 1996.
- [50] Collier, C. S.: *Thermoelastic Formulation of Stiffened, Unsymmetric Composite Panels for Finite Element Analysis of High Speed Aircraft*, AIAA, 35th Structure, Dynamics and Material Conference, 1994.
- [51] Buckling and postbuckling behaviour of stiffened composite panels, NRC Institute for Aerospace Research, Canada
- [52] William, L. K., Raymond, H. J.: *Shear Buckling Analysis of Hat Stiffened Panel*, NASA Technical Memorandum 4644

## **ŽIVOTOPIS**

Svemir Bralić rođen je 08. lipnja 1975. godine u Splitu kao prvo dijete u obitelji. Djetinjstvo je proveo s obitelji u Perkoviću gdje je završio osnovnu školu. Na jesen 1989. godine upisao se u srednju Tehničku školu u Šibeniku, smjer strojarški tehničar. Školske godine 1993/94. upisao je Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu. U Zagreb dolazi 1995. godine gdje nastavlja školovanje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje. U sklopu strojarskih konstrukcija upisuje tada vojni smjer Zrakoplov i motor kojega završava u siječnju 1998. Dobitnik je nagrade fakulteta za uspjeh na studiju.

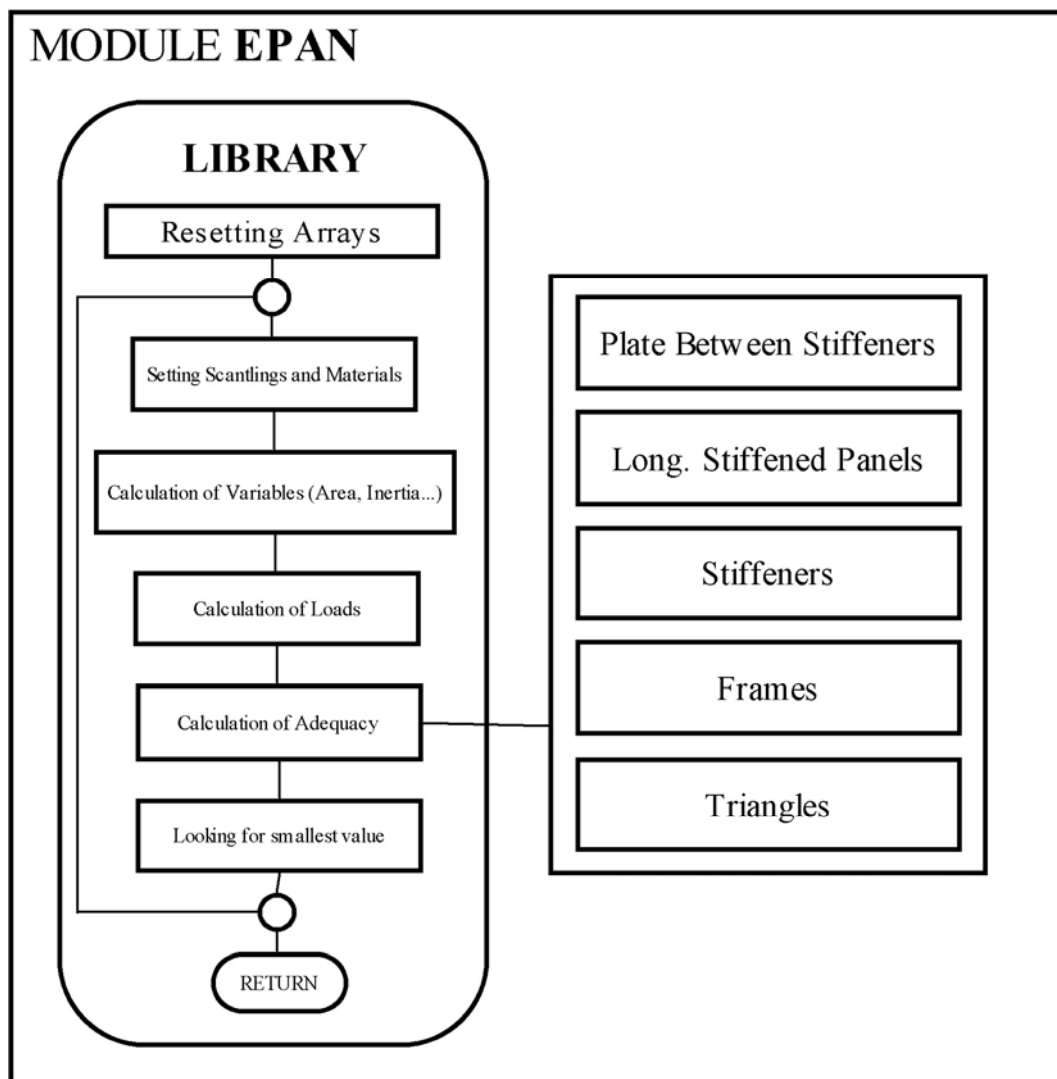
U lipnju 1998. godine se zaposlio kao znanstveni novak na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku. Poslijediplomski studij Teorija konstrukcija, usmjerenje Čvrstoća konstrukcija upisao je 1998/99.

U okviru projekata Ministarstva znanosti i tehnologije RH "Višekriterijski projektni modeli u osnivanju broda" te "Višekriterijski projektni modeli u osnivanju i konstrukciji broda" bavi se strukturnom analizom te metodama proračuna podobnosti tankostjenih konstrukcija.

Kao koautor objavio je 2 znanstvena i 4 stručna rada u međunarodnim i domaćim časopisima, te zbornicima s međunarodnih i domaćih skupova. Suradivao na 2 stručne studije te 1 elaboratu analize brodskih konstrukcija metodom konačnih elemenata. Član je projektnog tima za razvoj računalnog programskog sustava Hrvatskog Registra Brodova za analizu i odobravanje brodske konstrukcije. Sudjeluje u nastavi iz kolegija Čvrstoća i pouzdanost nosivih konstrukcija i Helikopteri I. Služi se engleskim jezikom. Oženjen je i ima kćer.

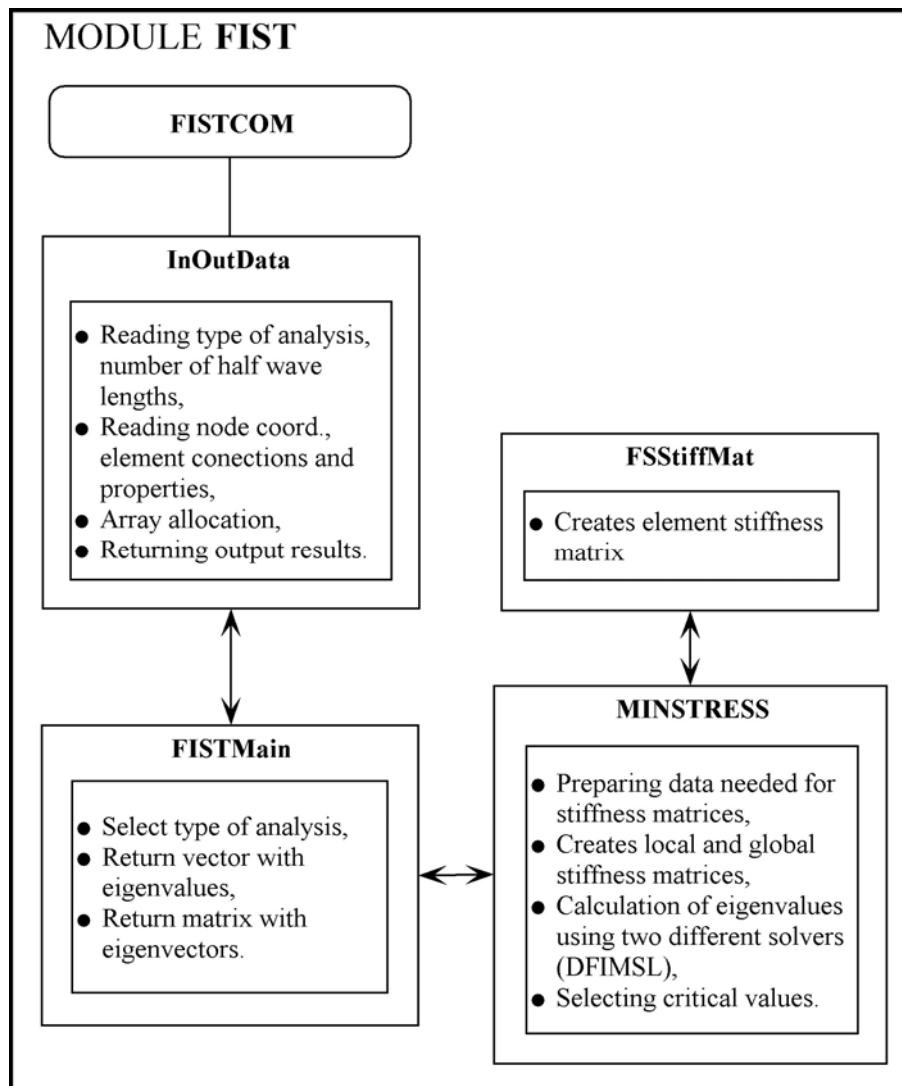
## PRILOG A

Ovaj prilog ukratko opisuje strukturu dvaju modula koji su sastavni dio ovoga rada. Biblioteka analitički zadanih projektnih kriterija obrađena u ovom radu sadržana je u sklopu programa CREST, modul EPAN kao što je to prikazano na sl. 39. Kako bi se zornije prikazala organizacija samog modula na sl. 63 je prikazana njegova struktura. Sam programski kod napisan je u FORTRAN-u 77, tako da se može izvršavati na bilo kojem operativnom sustavu. Za Windows operativne sustave dostupan je u obliku dinamički povezive biblioteke (*Epan.dll*) koja mu omogućava jednostavno povezivanje s bilo kojom Windows aplikacijom (npr. MS Excel, Visual Studio itd.)



sl. 63 Organizacija modula EPAN

Na sl. 64 prikazana je struktura programa FIST koji koristi semi-analitički pristup (detaljno obrazložen u u poglavlju 4) za proračun kritičnog naprezanja izvijanja. On je također napisan u FORTRAN 77 tako da se može koristiti na proizvoljnim operativnim sustavima. Za Microsoft Windows operativne sustave postoji COM server inačica u obliku dinamički povezive biblioteke *FIST.dll*. Osim toga u Microsoft Excel-u je napravljen ulazno/izlazni modul koji komunicira s **InOutData** modulom samog programa.



sl. 64 Organizacija programa FIST

Osim standardnih aplikacija i gore opisanih modula za uspješnu realizaciju samog rada bilo je potrebno napraviti još neke manje module. Tako je za potrebe pripreme i interpretacije rezultata modula FIST napravljeno okruženje u obliku *MS Excel* predloška.

Da bi se moglo analizirati utjecaj početnih nepravilnosti na odziv konstrukcije napravljen je program *RDGN4W* koji omogućava zadavanje inicijalne imperfekcije proizvoljnim čvorovima

*MSC NASTRAN* FEM modela. Imperfekciju je moguće zadati u obliku sinusne funkcije ili kao slučajnu deformaciju zadane amplitude. *RDGN4W* čita *MSC NASTRAN \*.neu* datoteku, zatim u njoj locira koordinate čvorova te za raspon čvorova koje korisnik označi generira inicijalne imperfekcije u skladu s odabranom funkcijom.

Osim toga napravljen je i program *RDE* koji omogućava da se unutar *WINDOWS* operativnog sustava postavi slijed radnji koje korisnik želi da se izvršavaju kroz duži period vremena kako bi smanjio potrebu za interakcijom s računalom. Tu se prvenstveno misli na parametarske analize koje su rađene programom *MSC NASTRAN*. Pojedinačna analiza traje cca. 30 minuta, nakon čega je potrebno izvršiti učitavanje rezultata i odabir drugog modela za analizu te pokretanje nove analiza (cca. 5 minuta). S obzirom da se radi o desetcima analiza izrada takvog programa se pokazala potpuno opravdana jer je omogućila da se veliki dio posla odvija na više računala 24 sata na dan.

## PRILOG B

U ovom prilogu je dan popis kriterija sadržanih u program CREST, modul EPAN. Osim toga za kriterije obrađene u ovom radu naznačeno je poglavlje u kojem su opisani. Detaljni izvodi ostalih kriterija su dani u [6], [8], [17], [18], [19],[22].

**Tab. B.1** Popis kriterija za oplatu između ukrepa sadržanih u programu CREST

OPLATA IZMEĐU UKREPA				
NAZIV	OPIS	POGLAVLJE	NO.	REFERENCA
PCMY	PANEL COLLAPSE MEMBRANE YIELD (VON MISES)	MR* 3.2	1	[20], P** 8.3.2
PCLB	PANEL COLAPSE LOCAL BUCKLING	-	2	[22], P 4.6.2
PCES	PANEL COLAPSE EDGE SHEAR	-	3	[22], P 4.6.4
PLB_SA	PANEL LOCAL BUCKLING SEMI-ANALITICAL	MR 4	4	[2], [3] P 2.2
PCrLe	PANEL CRITICAL LENGTH	MR 4	5	[2], [3] P 2.2
S_UCS	SERVICEABILITY LIMIT STATE, UNIAXIAL COMPRESSIVE STRESS	MR 3.3.1	6	[8], P 5.1.1
U_UCS	ULTIMATE LIMIT STATE, UNIAXIAL COMPRESSIVE STRESS	MR 3.4.2	7	[8], P 5.1.2
S_ES	SERVICEABILITY LIMIT STATE - EDGE SHEAR	MR 3.3.2	8	[8], P 5.1.3
U_ES	ULTIMATE LIMIT STATE - EDGE SHEAR	MR 3.4.3	9	[8], P 5.1.4
S_ULL	SERVICEABILITY LIMIT STATE - UNIFORM LATERAL LOAD	-	10	[8], P 5.1.5
U_ULL	ULTIMATE LIMIT STATE - UNIFORM LATERAL LOAD	-	11	[8], P 5.1.6
S_BCES	SERVICEABILITY LIMIT STATE - BIAXIAL COMPRESSION	MR 3.3.4	12	[8], P 5.1.7
U_BCES	ULTIMATE LIMIT STATE - BIAXIAL COMPRESSION	MR 3.4.4	13	[8], P 5.1.8
S_BCAES	SERVICEABILITY LIMIT STATE - BIAXIAL COMPRESSION AND EDGE SHEAR	MR 3.3.5	14	[8], P 5.1.9
U_BCAES	ULTIMATE LIMIT STATE - BIAXIAL COMPRESSION AND EDGE SHEAR	MR 3.4.5	15	[8], P 5.1.10
PCAPS	PANEL COLLAPSE ARCHED PLATE - SIGMAX (SIGMAY)	-	16	[22], P 4.6.2
PCAPT	PANEL COLLAPSE ARCHED PLATE - EDGE SHEAR	-	17	[22], P 4.6.2
PCYLS	PANEL COLLAPSE LONGITUDINAL STRESS	-	18	-

\*MR označava poglavlje u Magistarskom radu, \*\*P označava poglavlje u prethodno navedenoj referenci



**Tab. B.2** Popis kriterija za uzdužno ukrepljene panele

<b>UZDUŽNO UKREPLJENI PANELI</b>				
<b>NAZIV</b>	<b>OPIS</b>	<b>POGLAVLJE</b>	<b>Br.</b>	<b>REFERENCA</b>
<b>S_UCLLS</b>	SERVICEABILITY LIMIT STATE FOR UNIAXIAL COMPRESSIVE LOAD	MR 3.6.1	37	[19], P 13.1
<b>S_BCSSLs</b>	SEVICEABILITY LIMIT STATE FOR BIAXIAL COMPRESSIVE AND SHEAR LOAD	MR 3.6.2	38	[19], P 13.4
<b>U_CBCLLS</b>	ULTIMATE LIMIT STATE FOR COMBINED BIAXIAL LOAD AND LATERAL LOAD	MR 3.6.3	39	[19], P 14.2

**Tab. B.3** Popis kriterija za poprečne okvire

<b>POPREČNI OKVIRI</b>				
<b>NAZIV</b>	<b>OPIS</b>	<b>POGLAVLJE</b>	<b>Br.</b>	<b>REFERENCA</b>
<b>FYCF</b>	FRAME YIELD COMPRESSION FLANGE (CRS)	-	32	[22], P 8.1
<b>FYTF</b>	FRAME YIELD TENSION FLANGE (CRS)	-	33	[22], P 8.1
<b>FYCP</b>	FRAME YIELD COMPRESSION PLATE (CRS)	-	34	[22], P 8.1
<b>FYTP</b>	FRAME YIELD TENSION PLATE (CRS)	-	35	[22], P 8.1
<b>FYSW</b>	FRAME YIELD SHEAR WEB (CRS)	-	36	[22], P 4.6.2

Tab. B.4 Popis kriterija za ukrepe

<b>UKREPE</b>				
<b>NAZIV</b>	<b>OPIS</b>	<b>POGLAVLJE</b>	<b>Br.</b>	<b>REFERENCA</b>
<b>SYCF</b>	STIFFENER YIELD COMPRESSION FLANGE	-	19	[22], P 2.2
<b>SYTF</b>	STIFFENER YIELD TENSION FLANGE	-	20	[22], P 2.2
<b>SYCP</b>	STIFFENER YIELD COMPRESSION PLATE	-	21	[22], P 2.2
<b>SYTP</b>	STIFFENER YIELD TENSION PLATE	-	22	[22], P 2.2
<b>SLBSCW</b>	STIFFENER LOCAL BUCKLING SHEAR (COMPRESSION) WEB	-	23	[22], P 4.6.2
<b>STBCL</b>	STIFFENER BUCKLING	-	24	[22], P 4.6.2
<b>SBCSR</b>	STIFFENER BUCKLING ACCORDING TO CRS 4.6.2.2.2	-	25	-
<b>U_CB</b>	ULTIMATE LIMIT STATE STIFFENER COLUMN BUCKLING	MR 3.5.2	26	[8], P 5.2.2
<b>U_BCB</b>	ULTIMATE LIMIT STATE STIFFENER COLUMN BUCKLING	MR 3.5.3	27	[8], P 5.2.3
<b>U_TFB</b>	ULTIMATE LIMIT STATE TORSIONAL-FLEXURAL BUCKLING	MR 3.5.4	28	[8], P 5.2.4
<b>M_PB</b>	MAXIMUM LINE LOAD PLASTIC BENDING	MR 3.5.5	29	[8], P 5.2.5
<b>STFL</b>	STIFFENER FLANGE DIMENSIONS AND CRITICAL COMPR. STRESS	-	30	[22], P 4.6.2
<b>STWB</b>	STIFFENER WEB DIMENSIONS AND CRITICAL COMPRESSION STRESS	-	31	[22], P 4.6.2

## PRILOG C

Kako bi pisani dio rada ostao u razumnim granicama, a ipak čitatelju bila dostupna većina onoga što je napravljeno, priložen je i CD. Na njemu su osim elektronske forme samog rada i svi ostali podaci koji su na bilo koji način vezani uz temu koja se obrađuje i bili su korišteni tijekom izrade rada. Tu se prvenstveno misli na korištene matematičke modele prikazane u primjerima te izvorne kodove programa koji su korišteni u ovom radu. Osim toga u Tab C.1 je dan detaljan opis aplikacija koje su korištene prilikom kreiranja rada kako bi se maksimalno olakšalo svako njegovo daljnje korištenje.

**Tab. C.1** Dokumentacija magistarskog rada

TIP DATOTEKA	VRSTA	NAZIV	LOKACIJA
DOKUMENTI	MS Word	Rad.doc	CD:\Magistarski rad\Poglavlja
		Uvod.doc	
		Metodologija_modeliranja.doc	
		BO_ravne_ploce.doc	
		BO_ukrepe.doc	
		BO_ukrepljeni_paneli.doc	
		Metoda_konacnih_traka.doc	
		Procedura_proracuna.doc	
		Primjer_primjene.doc	
		Prilog_A.doc	
		Prilog_B.doc	
		Prilog_C.doc	
	MS Excel	Flat_Plate.xls	CD:\Magistarski rad\Primjeri
		FBS_1st.xls	
		FBS_5st.xls	
		SPanel.xls	
	MS Power Point	Rad.ppt	CD:\Magistarski rad\Prezentacija
	JPEG	sl_1.jpg do sl_57.jpg	CD:\Magistarski rad\Slike
	GIF	Anim_*.gif	CD:\Magistarski rad\Prezentacija\Animacije
SmartDraw	sl_*.sdr	CD:\Magistarski rad\Slike	

TIP DATOTEKA	VRSTA	NAZIV	LOKACIJA
EKSPERIMENTI	MSC NASTRAN CRS CREST MS Excel	PRIMJER 1	CD:\Magistarski rad\Primjer_1
		PRIMJER 2	CD:\Magistarski rad\Primjer_2
		PRIMJER 3	CD:\Magistarski rad\Primjer_3
		PRIMJER 4	CD:\Magistarski rad\Primjer_4
		PRIMJER 5	CD:\Magistarski rad\Primjer_5
PROGRAMSKI KOD	FIST	FISTCOM.dsw sa svim potrebnim datotekama	CD:\Magistarski rad\FISTCOM
	CREST/EPAN	CREST.dsw sa svim potrebnim datotekama	CD:\CRS\Crest\Epan

U je dan abecedni popis svih korištenih standardnih aplikacija kako bi se bez većih teškoća omogućila kasnija uporaba sadržaja CD-a.

**Tab. C.2** Korišteni standardni programski paketi

Br.	Naziv programa	Proizvođač	Verzija	Napomena
1	CREST	CRS & FSB	4.05	kompatibilno s ver. 4.03 i novijim
2	FORTRAN	Compaq	6.6	izvorni kod kompatibilan sa svim ver. FORTRAN 77 i novijim, <i>workspace</i> kompatibilan s ver. 6.6 i novijim
3	MAESTRO	Proteus Engineering	8.5	kompatibilno sa svim ver. 8
4	MathType	Design Science	4.0b	nije kompatibilan s <i>Equation Editor</i> -om ugrađenim u MS Office
5	NASTRAN for Windows	MSC	2001	kompatibilno s ver. 2001 i novijim
6	Office/Word Office/Excel Office/PowerPoint	Microsoft	XP	kompatibilno s ver. 2000 i novijim
7	Photoshop	Adobe	7.0	kompatibilno s ver. 5.0 i novijim
8	SmartDraw	SmartDraw.com	5.02	trial