Planiranje leta borbenog aviona primjenom modela gibanja u ravnotežnom letu

Zovak, Ivan

Scientific master's theses / Magistarski rad

2011

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:330903

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

PLANIRANJE LETA BORBENOG AVIONA PRIMJENOM MODELA GIBANJA U RAVNOTEŽNOM LETU

MAGISTARSKI RAD

Ivan Zovak

Zagreb, 2011.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

PLANIRANJE LETA BORBENOG AVIONA PRIMJENOM MODELA GIBANJA U RAVNOTEŽNOM LETU

MAGISTARSKI RAD

Mentor:
Dr.sc. Milan Vrdoljak, doc.

Ivan Zovak, dipl.ing. aeronautike

Zagreb, 2011.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 629.7.07(075.8): 533.6(075.8)

Ključne riječi: model leta, ravnotežni let, gibanje središte mase, polijetanje, slijetanje, planiranje leta

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Zrakoplovstvo, raketna i svemirska tehnika

Institucija u kojoj je rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

Mentor rada: Dr.sc. Milan Vrdoljak, doc.

Broj stranica: 99

Broj slika: 31

Broj tablica: 3

Broj korištenih bibliografskih jedinica: 19

Datum obrane: 06.12.2011.

Povjerenstvo: Dr.sc. Milan Vrdoljak, doc.

Dr. sc. Zdravko Terze, red. prof.

Dr. sc. Ernest Bazijanac, red. prof. Fakulteta prometnih znanosti, Zagreb

Institucija u kojoj je rad pohranjen: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Poslijediplomski znanstveni studij
Smjer **TEORIJA KONSTRUKCIJA**

Zagreb, 29. lipnja 2011.

Zadatak za magistarski rad

Kandidat: Ivan Zovak, dipl.ing. aeronautike

Naslov zadatka: **PLANIRANJE LETA BORBENOG AVIONA PRIMJENOM MODELA GIBANJA U RAVNOTEŽNOM LETU**

Sadržaj zadatka:

Prilikom planiranja leta borbenog aviona, pilot mora imati pregled glavnih parametara leta i navigacije kako bi osigurao provođenje misije koja mu je zadana (let po navigacijskoj ruti, prelet na drugi aerodrom, let u zoni za uvježbavanje, presretanje...). Za planiranje leta bitni su parametri: brzina, visina leta te vrijeme i količina goriva potrebna za dolazak u karakteristične točke misije uključujući i konačno odredište te vrijeme odnosno količina goriva raspoloživa za zadržavanje u zoni čekanja ili u zoni za uvježbavanje.

Model gibanja zrakoplova u ravnotežnom stanju opisuje trajektoriju središta mase letjelice za koju se pretpostavlja da je uvijek u ravnotežnom letu. Primjena numeričkih simulacija, temeljenih na poznatom modelu gibanja zrakoplova u ravnotežnom letu te modelu polijetanja i slijetanja, omogućila bi brže, preciznije i sveobuhvatnije planiranje leta.

U radu je potrebno:

- prilagoditi i primijeniti postojeći model gibanja zrakoplova u ravnotežnom letu za simulaciju uobičajenih misija borbenog aviona, a u svrhu planiranja leta;
- prilagoditi postojeći model polijetanja i slijetanja za planiranje leta;
- primjenom navedenih modela provesti numeričke simulacije koje obuhvaćaju sve faze pojedine misije od polijetanja do slijetanja, uz mogućnost analize optimalnih režima leta za zadane uvjete;
- numeričke simulacije provesti za mlazni lovac, nalik avionu *MIG21-bis*, za koji su poznate inercijske i aerodinamičke značajke za različite konfiguracije podvjesnog tereta te značajke motora;
- dobivene rezultate simulacija ukupne misije ili njene pojedine faze usporediti s dostupnim podatcima.

Zadatak zadan: 12. 07. 2011.

Rad predan:

Mentor:
Doc.dr.sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Odbora za poslijediplomske studije:
Prof.dr.sc. Jurica Sorić

Voditelj smjera:
Prof.dr.sc. Jurica Sorić

ZAHVALA

Zahvaljujem svom mentoru Doc.dr.sc. Milanu Vrdoljaku na uloženom trudu i svesrdnoj pomoći koju mi je pružio pri izradi ovog magistarskog rada.

Posebnu zahvalu dajem svojim roditeljima i svim kolegama iz eskadrile borbenih aviona koji su mi pružali podršku tijekom studija.

Najveću potporu i motivaciju za završetak studija pružila mi je moja obitelji, supruga Silvija i sin Jakov.

SADRŽAJ

Popis slika III
Popis tablica IV
Popis oznaka V
Predgovor VII
Sažetak rada IX
Ključne riječi IX
Summary XI
Key Words XI
1. UVOD
1.1. Uvodna razmatranja 1
1.2. Pregled literature 3
1.3. Opis teme 5
1.4. Pregled rada 6
1.5. Koordinatni sustavi 7
2. MODEL POLIJETANJA I SLIJETANJA
2.1. Jednadžbe gibanja u polijetanju i slijetanju 9
2.2. Značajke modela zrakoplova 11
2.3. Model polijetanja 12
2.3.1. Prva faza - faza zaleta 13
2.3.2. Druga faza - propinjanje zrakoplova 15
2.3.3. Treća faza - uzlet 16
2.3.4. Četvrta faza - pravocrtno penjanje 16
2.4. Model slijetanja 17
2.4.1. Prva faza - pravocrtno spuštanje 18
2.4.2. Druga faza - vertikalni zaokret 18
2.4.3. Treća faza - rotacija zrakoplova 19
2.4.4. Četvrta faza - usporenje zrakoplova 20
3. MODEL RAVNOTEŽNOG LETA
3.1. Definicija ravnotežnog leta 21
3.2. Jednadžbe gibanja u ravnotežnom letu 23
3.3. Penjanje 24
3.4. Horizontalni let 26

3.5. Horizontalni zaokret 28
3.6. Spuštanje 30
3.7. Optimalni režimi leta 31
4. NUMERIČKI MODEL
4.1. Opći numerički model 33
4.2. Numerički model polijetanja 37
4.3. Numerički model ravnotežnog leta 40
4.4. Numerički model slijetanja 43
5. PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA
5.1. Analiza polijetanja 45
5.1.1. Numerička analiza polijetanja 45
5.1.2. Usporedba numeričkog modela polijetanja sa analitičkim rješenjima 54
5.2. Analiza horizontalnog leta 56
5.3. Analiza misije 60
5.3.1. Provjera rezultata numeričkog modela 65
6. ZAKLJUČAK 67
7. PRILOZI
Prilog 1: Zrakoplov MiG-21 bis 69
Prilog 2: Tablica za proračun potrošnje goriva na zrakoplovu MiG-21 bis 71
8. LITERATURA 73
ŽIVOTOPIS 75
BIOGRAPHY 77

POPIS SLIKA

Slika 1-1 Koordinatni sustav
Slika 2-1 Faze polijetanja zrakoplova
Slika 2-2 Sile i momenti na zrakoplov u fazi zaleta
Slika 2-3 Faze slijetanja zrakoplova
Slika 3-1 Izgled *V-n* dijagrama
Slika 3-2 Penjanje zrakoplova do zadane visine
Slika 3-3 Raspoloživa i potrebna sila na visini 3000 m
Slika 3-4 Ravnoteža sila u horizontalnom zaokretu
Slika 3-5 Horizontalni zaokret na navigacijskoj točki
Slika 3-6 Spuštanje zrakoplova do visine početka slijetanja
Slika 4-1 Blok-shema numeričkog modela leta
Slika 4-2 Blok-shema numeričkog modela polijetanja
Slika 4-3 Blok-shema numeričkog modela ravnotežnog leta
Slika 4-4 Blok-shema numeričkog modela slijetanja
Slika 5-1 Polijetanje na aerodromu Pleso (LDZA)
Slika 5-2 Promjena brzine zrakoplova i otpora oslonca tijekom prve faze polijetanja
Slika 5-3 Promjena brzine zrakoplova, kuta penjanja γ i kutne brzine q
Slika 5-4 Promjena brzine i visine zrakoplova tijekom polijetanja
Slika 5-5 Kut penjanja γ i kurs A tijekom polijetanja
Slika 5-6 Utjecaj funkcije autopilot na promjenu kuta propinjanja θ
Slika 5-7 Promjena aerodinamičkih koeficijenata tijekom polijetanja
Slika 5-8 Horizontalni let na navigacijskoj ruti
Slika 5-9 Horizontalna projekcija putanje rute
Slika 5-10 Promjena parametara (V, h, Φ, n) tijekom leta
Slika 5-11 Promjena kutova (α, θ, γ) i otklona kormila visine δ_m
Slika 5-12 Navigacijska ruta
Slika 5-13 Horizontalna projekcija navigacijske rute
Slika 5-14 Promjena parametara tijekom leta po navigacijskoj ruti
Slika 5-15 Promjena kutova (α, θ, γ) i otklona kormila visine δ_m po ruti
Slika 5-16 Promjena ukupne mase zrakoplova tijekom leta
Slika 7-1 MiG-21 bisD

POPIS TABLICA

Tablica 5-1 Koordinate navigacijskih točaka

Tablica 7-1 Taktičko-tehničke karakteristike zrakoplova MiG-21 bis

Tablica 7-2 Tablica za proračun potrošnje goriva

POPIS OZNAKA

a	*brzina zvuka*
A	*azimut, kurs*
c_A	*duljina srednje aerodinamičke tetive*
C_D	*aerodinamički koeficijent otpora*
C_L	*aerodinamički koeficijent uzgona*
C_m	*aerodinamički koeficijent momenta propinjanja*
C_T	*koeficijent potrošnje goriva*
D	*aerodinamička sila otpora*
h	*visina zrakoplova*
h_{obs}	*visina nadvisivanja prepreka*
I_y	*moment inercije oko poprečne osi zrakoplova*
kp	*vertikalna udaljenost osi prednjeg kotača od središta mase*
ks	*vertikalna udaljenost osi zadnjeg kotača od središta mase*
L	*aerodinamička sila uzgona*
lp	*horizontalna udaljenost osi prednjeg kotača od središta mase*
ls	*horizontalna udaljenost osi zadnjeg kotača od središta mase*
m	*masa*
M	*moment propinjanja*
Ma	*Machov broj*
n	*koeficijent normalnog opterećenja*
p	*tlak zraka*
q	*kutna brzina oko poprečne osi zrakoplova*
R	*radijus zaokreta*
R_K	*sila otpora oslonca kotača*
s	*prijeđeni put*
S_{ref}	*površina krila*
t	*vrijeme*

T	*sila potiska*
T_A	*raspoloživa sila potiska*
T_R	*potrebna sila potiska*
V	*aerodinamička brzina*
V_i	*instrumentalna brzina*
V_K	*brzina leta*
V_R	*brzina odvajanja prednjeg kotača od površine piste*
V_{TO}	*brzina uzleta*
W	*težina*
x	*položaj zrakoplova u odnosu na x os*
y	*položaj zrakoplova u odnosu na y os*
α	*napadni kut*
γ	*kut penjanja*
δ_f	*otklon komande zakrilaca*
δ_m	*otklon komande kormila visine*
δ_P	*otklon komande gasa*
ε	*kut između potisne sile i putanje leta*
θ	*kut propinjanja*
μ	*koeficijent otpora kotrljanja kotača po pisti*
ρ	*gustoća zraka*
Φ	*kut valjanja*
χ	*kut skretanja*
ψ	*kut zanosa*

PREDGOVOR

Navigacijsko planiranje je sastavni dio pripreme leta i vrlo važan postupak koji se mora provesti prije izvođenja svakog leta. Kvalitena navigacijska priprema osigurava sigurno i uspješno izvršenje zadanih misija. Problematika navigacijskog planiranja i pripreme leta je u vojnom zrakoplovstvu, a posebice kod borbenih zrakoplova, nešto složenija iz razloga što se većina misija ne sastoji samo od preleta iz jedne u drugu točku po ustaljenim navigacijskim rutama. Misije borbenih zrakopova se često odvijaju po novim, nepoznatim rutama za koje je potrebno izvršiti navigacijske proračune. Osim toga mnoge misije se dijelom odvijaju u posebnim zonama (zone za uvježbavanje, zone za presretanje) u kojima je let zrakoplova vrlo teško isplanirati zato jer se sastoji od složenih manevara sa velikim promjenama visine i brzine leta, te sa čestim promjenama režima rada motora.

Navigacijski proračuni mogu pri planiranju leta oduzeti dosta vremena, što znači da ostaje manje vremena za pripremu ostalih ključnih elemenata misije zbog kojih se uostalom misija i provodi. U Hrvatskom ratnom zrakoplovstvu se postupak planiranja i pripreme leta provodi na klasičan način, odnosno navigacijska priprema leta je osobna zadaća svakog pilota. Navigacijski proračuni se provode ručno korištenjem karte, pilotskih navigacijskih pomagala, te tablica za proračun potrošnje goriva.

Postojanje računalne aplikacije za navigacijske proračune uvelike bi olakšalo i ubrzalo postupke navigacijske pripreme leta. Da bi se takva aplikacija izradila, potrebno je najprije izraditi matematički model gibanja zrakoplova koji će vjerno simulirati stvarno gibanje zrakoplova u letu.

SAŽETAK

Ovaj magistarski rad se bavi problematikom planiranja leta borbenog aviona pomoću simulacije gibanja na računalu. S obzirom da nas zanimaju samo performanse zrakoplova, let aviona se promatra kao gibanje središta mase u ravnotežnom letu.

Za opis gibanja koristi se matematički model koji se sastoji od niza diferencijalnih jednadžbi čiju integraciju provodimo numerički. Kao rješenje integracije diferencijalnih jednadžbi dobivamo vektor stanja koji sadrži podatke o gibanju središtu mase zrakoplova.

Izvedeni numerički model leta, koji se sastoji od tri glavna dijela: modela polijetanja, modela ravnotežnog leta i modela slijetanja, koristi se za simulaciju leta po navigacijskoj ruti. Dobiveni rezultati se uspoređuju sa analitičkim rješenjima, te sa podacima iz tehničkih uputstava zrakoplova.

Rezultati numeričkog modela pokazuju zadovoljavajuću podudarnost izlaznih podataka u odnosu na stvarni zrakoplov, a njegova odstupanja u praktičnoj primjeni nemaju značajan učinak. Iz tog se razloga ovaj model može upotrijebiti kao osnova za razvoj računalne aplikacije za planiranje letenja.

KLJUČNE RIJEČI

model leta, ravnotežni let, gibanje središte mase, polijetanje, slijetanje, planiranje leta

SUMMARY

This master's thesis is dealing with problems of planning a mission for a fighter aircraft using computer simulations. Since we are only interested in aircraft performance, we are observing the aircraft's flight as a motion of a point mass model in steady flight.

For describing this motion we use mathematical model that is composed of several differential equations which are numerically integrated. As a solution of differential equations integration we have a state vector which contains data about motion of point mass.

Derived numerical flight model which consists of three main parts: the take-off model, the steady flight model and the landing model, is used to simulate flight along navigational flight route. Obtained results are compared with analytical solutions and data from aircraft's technical manuals.

Results which are given by this numerical model show satisfactory match of output data compared to the real aircraft, and its variance have no significant effect in practical use. By that reason this model can be used as a basis for developing a flight-planning computer application.

KEY WORDS

flight model, steady flight, motion of point mass model, take-off, landing, flight planning

1. UVOD

1.1. Uvodna razmatranja

Kvalitetna priprema leta je jedan od najvažnijih čimbenika za sigurno i uspješno obavljanje svakog leta. Sastavni dio svake pripreme leta je navigacijska priprema, koja ujedno predstavlja i temu ovog magistarskog rada. Navigacijska priprema leta obuhvaća određivanje navigacijskih točaka rute (aerodrom polijetanja, prekretne točke ili orijentiri, te aerodrom slijetanja), određivanje elemenata rute po etapama (visina leta, brzina leta) i izračun navigacijskih elemenata (kurs, vrijeme trajanja pojedine etape odnosno vrijeme dolaska u pojedine točke rute). Svakako jedan od važnijih dijelova navigacijske pripreme je izračun potrošnje goriva. Kod letenja borbenih aviona izračun potrošnje goriva je posebno važan, zato jer određuje taktičke karakteristike aviona za pojedine misije (ukupan dolet, borbeni radijus, maksimalno vrijeme trajanja leta).

Uobičajeno je da vrijeme pripreme leta traje i do nekoliko puta više od trajanja samog leta. Kako je već spomenuto, navigacijska priprema je samo dio ukupne pripreme leta, dok se ostalo vrijeme pripreme koristi za razradu postupaka i procedura koji su svojstveni za određenu misiju. Poželjno je stoga navigacijsku pripremu koja je zapravo rutinski postupak, na neki način ubrzati i olakšati kako bi se veći dio vremena mogao posvetiti ključnim elementima misije.

Kao i u drugim područjima znanosti i ljudske djelatnosti, pojava elektroničkih računala je kod postupka navigacijske pripreme leta omogućila znatno olakšanje pri provedbi proračuna koji su se do tada morali raditi ručno. Danas u ponudi software-a možemo naći mnoge aplikacije (ponajprije za primjenu u civilnom letenju) koje su namijenjene za navigacijsku pripremu leta. Ono što pokreće svaku od tih aplikacija je matematički model koji opisuje gibanje odnosno let zrakoplova. Pouzdanost i primjenjivost aplikacije ovisi o tome koliko točno taj matematički model opisuje stvarno gibanje zrakoplova.

Za potrebe navigacijskog planiranja dovoljno nam je samo poznavanje trajektorije zrakoplova. Iz tog razloga možemo promatrati let zrakoplova kao gibanje njegovog središta mase. Pri tome pretpostavljamo da se središte mase uvijek nalazi u ravnoteži, tj. da je suma momenta oko središta mase uvijek jednaka nuli. Iz tog razloga ovaj model nazivamo modelom gibanja u ravnotežnom letu.

Matematički model gibanja možemo podijeliti na dva glavna dijela. Prvi dio čine jednadžbe gibanja središta mase, i te jednadžbe vrijede općenito za sve zrakoplove. Drugi dio je matematički model zrakoplova koji je zbroj nekoliko različitih modela (aerodinamički model, model motora, inercijski model), a njega određujemo za svaki tip zrakoplova posebno.

Jednadžbe gibanja se sastoje od niza diferencijalnih (i algebarskih) jednadžbi čije se rješavanje provodi numeričkim metodama. Varijable u tim jednadžbama su: brzina i položaj zrakoplova, zatim kutovi koji opisuju putanju zrakoplova u koordinatnom sustavu, te prijeđeni put i masa zrakolova. Uz ove glavne varijable dodaje se još i kut propinjanja zrakoplova, te kutna brzina oko poprečne osi zrakoplova (ili osi zadnjih kotača).

Varijable koje računamo funkcija su vremena t, i one se uglavnom mijenjaju tijekom čitavog leta, no u određenim situacijama ili fazama lete neke od njih imaju konstantnu vrijednost.

Da bismo lakše analizirali performanse zrakoplova tijekom leta, možemo čitavu misiju podijeliti u tri glavne cjeline: polijetanje, ravnotežni let i slijetanje. Svaku od ovih cijelina možemo dalje podijeliti u nekoliko karakterističnih faza. Zatim za svaku fazu definiramo poseban set diferencijalnih jednadžbi koje su svojstvene za tu fazu. Na ovaj način možemo analizirati ili čitavu misiju, ili samo neki njen dio koji nam je trenutno od interesa.

Za potvrdu točnosti rezultata dobivenih numeričkim modelom zrakoplova, potrebno je izvršiti usporedbu sa analitičkim rješenjima, sa podacima koji su definirani službenim tehničkim uputstvima zrakoplova, te sa podacima koji su dobiveni pokusom ili mjerenjem (npr. podaci sa radarske slike leta ili podaci iz "crne kutije" zrakoplova).

1.2. Pregled literature

U performanse zrakoplova ubrajamo maksimalni dolet zrakoplova, maksimalno trajanje leta, najveći kut penjanja, najmanji kut spuštanja (bez pogonske sile), najmanji polumjer horizontalnog i vertikalnog zaokreta, itd [1].

Prilikom proučavanja performansi zrakoplova uobičajeno je uvesti pretpostavku da nema vjetra, odnosno da se aerodinamičke sile nalaze u ravnini simetrije zrakoplova. Druga pretpostavka je da se radi o ravnotežnom letu, što znači da je za vrijeme leta aerodinamiči moment jednak nuli. Posljednja pretpostavka je da se pri računanju performansi zrakoplova ne uzima u obzir zakrivljenost i rotacija Zemlje [1].

Mehanika leta proučava gibanje letjelice unutar Zemljine atmosfere [2]. Ako se ograničimo samo na analizu performansi letjelice, tada pratimo gibanje središta mase letjelice pod utjecajem različitih sila (pogonskih, aerodinamičkih, gravitacijskih). U tu svrhu potrebni su nam podaci o vektoru položaja letjelice $\mathbf{r}$, vektoru brzine letjelice $\mathbf{V}$, te o njenoj masi m, odnosno promjeni mase u vidu potrošnje goriva.

Područje visina i brzina koje se proučavaju dozvoljavaju pretpostavku da je gravitacijsko ubrzanje konstantno [2]. Tip letjelice koji se razmatra u ovoj literaturi [2] je letjelica sa krilima koja ima ravninu simetrije. Njena putanja leta sastoji se od polijetanja sa horizontalne piste, penjanja do određene visine, horizontalnog leta, zaokreta, spuštanja i slijetanja.

Uobičajena je praksa da se pri izračunima koristi inercijalni koordinatni sustav vezan za Zemlju [2].

Za izračun putanje letjelice potrebno je sedam nelinearnih diferencijalnih jednadžbi, tri za komponente vektora položaja, tri za komponente vektora brzine i jedna za masu. Prvo se izvode jednadžbe za gibanje letjelice iznad zakrivljene površine Zemlje koja rotira. Zatim se jednadžbe pojednostavljuju uvodeći pretpostavku ravne Zemljine površine [2], [3].

Za određene elemente putanje kao što su polijetanje, slijetanje, penjanje, spuštanje i horizontalan let, gibanje letjelice može se ograničiti samo na vertikalnu ravninu [3], [4], [5]. U tom slučaju dovoljne su samo četiri (pet) jednadžbe za opis gibanja.

Kako se let borbenih aviona često odvija pri visoko podzvučnim ili čak nadzvučnim brzinama, važno je pri analizi performansi uzeti u obzir i utjecaj Machovog broja [2]. Kako Machov broj ovisi o brzini zvuka, odnosno visini leta, za potrebe analize najčešće se uzima tzv. standardna atmosfera.

Obzirom da je kut između potisne (ili pogonske) sile i putanje leta ε uglavnom vrlo malen, za potrebe analize performansi letjelice uobičajeno je da se potisna sila postavlja u pravcu putanje leta ($\varepsilon = 0$) [5].

Polijetanje započinje u trenutku kada se zrakoplov počne gibati po pisti, a završava kada zrakoplov nakon uzleta i uvlačenja konfiguracije uspostavi stabilno penjanje. Polijetanje se može podijeliti u dvije faze: faza zaleta i faza nakon uzleta [6]. Prva faza započinje u trenutku $t = 0$ kada se zrakoplov počne gibati po pisti i završava u trenutku kada se zrakoplov odvoji od piste odnosno kada je uzgon jednak težini zrakoplova. Druga faza traje od trenutka uzleta do trenutka kada zrakoplov dostigne sigurnosnu visinu nadvisivanja prepreka [6].

Ukupna duljina piste potrebne za polijetanje računa se kao zbroj četiri duljine: duljina potrebna za zalet, duljina tijekom rotacije, duljina tijekom vertikalnog zaokreta i duljina potrebna za penjanje do sigurnosne visine [6]. Ova duljina se obično računa analitičkim putem.

Slijetanje je podijeljeno na faze slično kao i kod polijetanja. Ovdje se također ukupna duljina piste računa analitičkim putem. I kod polijetanja i kod slijetanja se obično zanemaruje promjena mase sa vremenom, pa ta jednadžba ne ulazi u opis gibanja zrakoplova [6].

Proučavanje gibanja središta mase može se upotijebiti za optimiziranje trajektorije zrakoplova tijekom leta. Ovo je posebno važno prilikom planiranja misija kod kojih je gorivo ograničavajući čimbenik [7]. Isto tako model gibanja središta mase se koristi kod sustava za upravljanje zračnim prometom [8].

1.3. Opis teme

Pod pojmom planiranja leta u nazivu teme magistarskog rada podrazumijevamo navigacijsku pripremu leta, odnosno proračun navigacijskih elemenata (kurs, duljina etape, vrijeme trajanja leta, proračun goriva). S obzirom da nas pri tome zanima samo trajektorija zrakoplova, let zrakoplova pratimo kao gibanje njegovog središta mase. Pretpostavljamo da se središte mase uvijek nalazi u ravnotežnom stanju, odnosno da je suma momenata oko središta mase uvijek jednaka nuli. Iznimka za ovo pravilo su dijelovi polijetanja i slijetanja kada promatramo rotaciju zrakoplova oko osi zadnjih kotača, o čemu će biti riječi u drugom poglavlju.

Model gibanja središta mase opisujemo diferencijalnim jednadžbama koje možemo primjeniti za sve faze leta. Međutim u pojedinim fazama leta se određene veličine ne mijenjaju ili nam nisu od interesa (npr. kurs u polijetanju, ili kut penjanja u horizontalnom letu), tako da će svaka faza leta imati svoj poseban set diferencijalnih jednadžbi.

Rješenja diferencijalnih jednadžbi tražimo numeričkim metodama, pri čemu kao rješenje dobivamo vektor stanja sa veličinama koje opisuju gibanje i položaj središta mase. Jedan od najvažnijih podataka koji dobivamo ovim modelom je podatak o promjeni mase zrakoplova, odnosno potrošnji goriva na osnovu kojeg možemo zaključiti da li je određena misija izvodiva u pogledu ograničenja količine goriva.

Numerički model nam daje i neke karakteristične podatke tijekom leta (kao npr. potrebna duljina zaleta u polijetanju, brzina odvajanja nosnog kotača, brzina uzleta) kao i mogućnost izračuna optimalnih režima leta (maksimalni dolet i maksimalno trajanje leta) u bilo kojem trenutku misije.

O ovom pojednostavljenom modelu nije uzeta u obzir zakrivljenost Zemljine površine s obzirom da se misije odvijaju na relativno malom području. Isto tako je uzeta pretpostavka da se letovi odvijaju u uvjetima standardne atmosfere, bez vjetra. Utjecaj vjetra također nije uzet u razmatranje iz razloga što njegov učinak na let zrakoplova MiG-21 (u navigacijskom smislu) u praksi nema veliki značaj.

1.4. Pregled rada

Prije samog početka opisa jednadžbi gibanja središta mase i numeričkog modela leta moramo ponajprije reći nekoliko riječi o koordinatnim sustavima. Ta tema je obrađena u zadnjem dijelu ovog poglavlja.

Opis modela gibanja započinjemo u drugom poglavlju modelom polijetanja i slijetanja, gdje najprije postavljamo opće jednadžbe gibanja koje vrijede za sve faze leta. Nakon toga navodimo osnovne značajke modela zrakoplova, pri čemu mislimo na njegovu aerodinamiku, model motora, te inercijske karakteristike. Zatim obrađujemo model gibanja u svakoj fazi polijetanja i slijetanja posebno, navodeći njihove karakteristike i posebnosti.

U trećem poglavlju je opisan model ravnotežnog leta. Poglavlje također započinje postavljanjem općih jednadžbi gibanja, a zatim se obrađuju pojedine faze ravnotežnog leta. U te faze ubrajamo penjanje zrakoplova do zadane visine rute, horizontalni let po ruti sa horizontalnim zaokretima na točkama rute, te spuštanje zrakoplova sa zadane visine rute do visine početka slijetanja. Na kraju trećeg poglavlja su opisane jednadžbe za izračun optimalnih režima leta.

Sljedeće poglavlje obrađuje numerički model leta koji se može primjeniti u nekom od postojećih računalnih programa ili programskih jezika. Numerički model je podijeljen po fazama leta, počevši od polijetanja preko ravnotežnog leta i na kraju slijetanja.

Peto poglavlje sadrži primjenu numeričkog modela, te analizu na primjerima polijetanja, slijetanja i jedne čitave misije. Analiza se provodi usporedbom numeričkog modela sa analitičkim rješenjima, te sa dostupnim podacima iz tehničkih uputstava zrakoplova.

Na kraju rada donosimo zaključak o valjanosti i ispravnosti izvedenog numeričkog modela, te predstavljamo mogućnost da taj model posluži kao osnova razvoja računalne aplikacije za planiranje letenja koja bi se mogla korisiti i u stvarnoj letačkoj praksi.

1.5. Koordinatni sustavi

Prije nego započnemo sa opisom jednadžbi gibanja zrakoplova, trebamo odabrati odgovarajući koordinatni sustav u kojem ćemo definirati te jednadžbe. U području mehanike leta zrakoplova koristi se nekoliko koordinatnih sustava [1]. Svaki od tih koordinatnih sustava je desni, odnosno za svaki je dovoljno definirati dvije osi, dok treća čini desni trijedar.

Za analizu i proračun performansi zrakoplova koristi se **lokalni koordinatni sustav**. Ovaj koordinatni sustav nije propisan ISO standardima, te se njegovo ishodište, kao i orijentacija koordinatnih osi može odabrati u ovisnosti o problemu koji se proučava. U našem slučaju ovaj sustav je definiran na način da se ishodište nalazi u točki polijetanja zrakoplova, os x je usmjerena prema istoku, os y prema sjeveru, a os z je vertikalna u smjeru prema gore.

Drugi sustav koji se koristi je **nošeni koordinatni sustav**. On ima ishodište u središtu mase letjelice, os x_O je u horizontalnoj ravnini, a os z_O je vertikalna u smjeru prema dolje. Obično se nošeni koordinatni sustav postavlja paralelno sa lokalnim, tako da ostaje paralelan sa lokalnim koordinatnim sustavom tijekom cijelog leta i putuje sa središtem mase zrakoplova.

Sljedeći je **koordinatni sustav letjelice** kojeg čine glavne centralne osi tromosti zrakoplova. Njegovo ishodište je u središtu mase zrakoplova, os x se nalazi u ravnini simetrije zrakoplova duž tijela u smjeru leta, os z je usmjerena prema dolje, a os y je okomita na ravninu simetrije. U odnosu na nošeni koordinatni sustav određen je pomoću tri kuta:

- kut zanosa ψ, u horizontalnoj ravnini oko osi z_O,

- kut propinjanja θ, u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi $\tilde{y}$,

- kut valjanja letjelice Φ, oko osi x.

Kod izračunavanja performansi zrakoplova razlikujemo dvije brzine. Prva je brzina zrakoplova u odnosu na Zemlju, a druga je brzina zrakoplova u odnosu na zrak.

Brzinu zrakoplova u odnosu na Zemlju nazivamo brzina leta i označavamo je sa V_K. Ona je određena svojim intenzitetom i pomoću dva kuta u odnosu na os nošenog koordinatnog sustava:

- kut skretanja χ, kut u horizontalnoj ravnini oko osi z_O od osi x_O do horizontalne projekcije brzine,

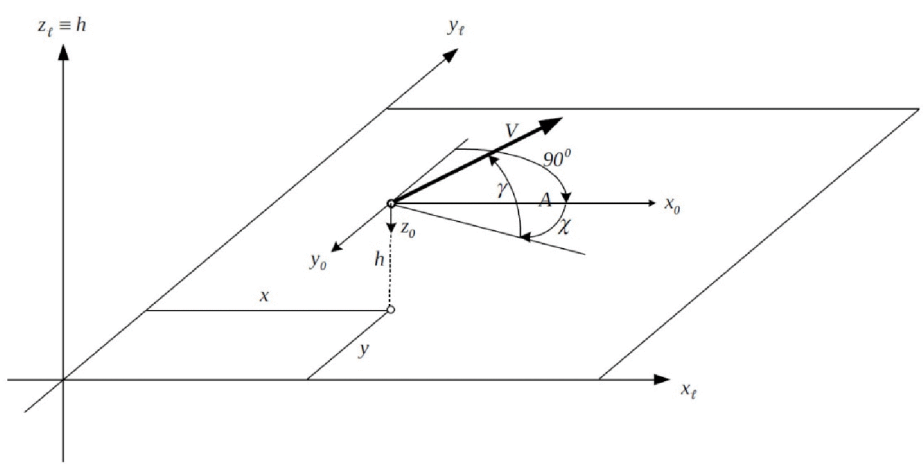
- kut penjanja γ, kut u vertikalnoj ravnini od horizontalne projekcije do brzine leta.

U radu ćemo koristit azimut A lokalnog koordinatnog sustava koji je jednak $A = \chi + \pi/2$.

Sada možemo definirati **brzinski koordinatni sustav** koji ima os x_V u pravcu i smjeru brzine leta V_K, os z_V mu je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu leta prema dolje.

Brzinu zrakoplova u odnosu na zrak nazivamo aerodinamička brzina V i o njenom intenzitetu i položaju ovise aerodinamičke sile i momenti. Pomoću ove brzine definiramo **aerodinamički koordinatni sustav** koji ima ishodište u središtu mase zrakoplova, os x_A je u pravcu i smjeru aerodinamičke brzine, a os z_A je u ravnini simetrije zrakoplova.

Ovisno o potrebi možemo koristiti neki od navedenih koordinatnih sustava. Ako poznajemo veze između ovih koordinatnih sustava, odnosno kuteve između odgovarajućih osi, tada možemo komponente bilo kojeg vektora prebaciti iz jednog u drugi koordinatni sustav koristeći se matricama transformacije [1].



Slika 1-1: Koordinatni sustav

2. MODEL POLIJETANJA I SLIJETANJA

2.1. Jednadžbe gibanja u polijetanju i slijetanju

Prije nego započnemo sa opisom modela polijetanja i slijetanja postavit ćemo opće jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova koje vrijede u svim fazama polijetanja i slijetanja. Ovdje se nećemo baviti izvodom ovih jednadžbi [1], nego ćemo samo opisati veličine koje se u njima pojavljuju. Napomenimo da ovaj model polijetanja razmatramo samo u vertikalnoj ravnini ($dA/dt = 0$, odnosno $d\chi/dt = 0$), te nam iz tog razloga za sada nije potrebna y koordinata, no ona će biti kasnije uključena u cjelovitom modelu leta. Za sve faze polijetanja i slijetanja možemo primjeniti sljedeće jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt} &= T\cos\theta - D - \mu \cdot R_K - W\sin\gamma \\
mV\frac{d\gamma}{dt} &= L - W\cos\gamma \\
\frac{dx}{dt} &= V\cos\gamma\cos\chi \\
\frac{dy}{dt} &= V\cos\gamma\sin\chi \\
\frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma \\
\frac{dq}{dt} &= \frac{M + M^R}{I_y} \\
\frac{d\theta}{dt} &= q \\
\frac{ds}{dt} &= V \\
\frac{dm}{dt} &= -C_T T
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

Prva jednadžba nam opisuje promjenu aerodinamičke brzine V (s obzirom da pretpostavljamo kako nema vjetra, brzina leta i aerodinamička brzina su jednake $V_K = V$) tijekom polijetanja i slijetanja.

Druga jednadžba opisuje promjenu kuta γ koji u polijetanju zovemo kut penjanja, a u slijetanju kut poniranja. Ako pretpostavimo da uzletno-sletna pista nema nikakav nagib (kao što je slučaj u našem modelu), odnosno da je njena nadmorska visina cijelom svojom dužinom jednaka, tada ovu jednadžbu tijekom faze zaleta u polijetanju i tijekom faze zaustavljanja u slijetanju možemo zanemariti.

Sljedeće dvije jednadžbe prate promjenu koordinata zrakoplova, tj. središta njegove mase u lokalnom koordinatnom sustavu. Kako smo već napomenuli, promatramo situaciju bez utjecaja bočnog vjetra, te podrazumijevamo da se polijetanje i slijetanje odvijaju u vertikalnoj ravnini bez skretanj i promjene kursa. Iz tog razloga za sada izostavljamo koordinatu y.

Peta i šesta jednadžba su nam od interesa samo tijekom faza polijetanja i slijetanja kada zrakoplov rotira oko osi zadnjih kotača. Ovo je jedini slučaj kada uz ravnotežni let uvodimo i gibanje oko središta mase. Ove faze zajedno ne traju duže od desetak sekundi, što je vrlo malo u odnosu na trajanje čitavog leta, no ove jednadžbe su nam svejedno potrebne kako bi što bolje prikazali njihov utjecaj na aerodinamiku zrakoplova.

Predzadnja jednažba nam koristi za računanje prijeđenog puta, što će nam biti posebno korisno za izračun ukupno potrebne duljine piste u polijetanju. Isto tako kod slijetanja ovu jednadžbu koristimo za računanje potrebne duljine piste za zaustavljanje zrakoplova. Ovaj podatak će biti sastavni dio analize polijetanja i slijetanja u petom poglavlju.

Posljednja jednadžba opisuje promjenu mase zrakoplova kao posljedicu potrošnje goriva. Promjena mase je opisana u ovisnosti o koeficijentu potrošnje C_T i potiska zrakoplovnog mlaznog motora T. Koeficijent potrošnje C_T ovisi prvenstveno o režimu rada motora, odnosno položaju komande gasa δ_P, ali je isto tako i funkcija brzine i visine leta zrakoplova.

Napomenimo kako će se u nastavku teksta radi lakšeg uspoređivanja sa stvarnim procedurama na zrakoplovu MiG-21, brzine leta zrakoplova izražavati u *km/h*.

2.2. Značajke modela zrakoplova

Da bismo mogli pratiti gibanje središte mase zrakoplova, potrebno je poznavati model zrakoplova čije gibanje opisujemo. Model zrakoplova možemo podijeliti u nekoliko komponenti, a to su: **aerodinamički model**, **model motora** i **inercijski model**.

Aerodinamički model zrakoplova [9] opisuju njegove glavne aerodinamičke karakteristike. Tu spadaju aerodinamička sila uzgona L (*engl. lift*), aerodinamička sila otpora D (*engl. drag*) i aerodinamički moment M. Aerodinamičke sile i momente određujemo posebno za svaku aerodinamičku konfiguraciju zrakoplova. Pod pojmom aerodinamičke konfiguracije podrazumijevamo uključenost (ili izvučenost) različitih uređaja na zrakoplovu (kotači, zakrilca, zračne kočnice), te različite varijante nošenog podvjesnog tereta. Aerodinamičke sile i momenti su funkcija Machovog broja, gustoće zraka i odgovarajućih aerodinamičkih koeficijenata C_L, C_D i C_m, koje računamo prema sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{Lq}q^* + C_{L\delta_m}\delta_m \\ C_D &= C_{Dmin} + K(C_L - C_{Lmin})^2 \\ C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{mq}q^* + C_{m\delta_m}\delta_m \end{aligned} \tag{2-2}$$

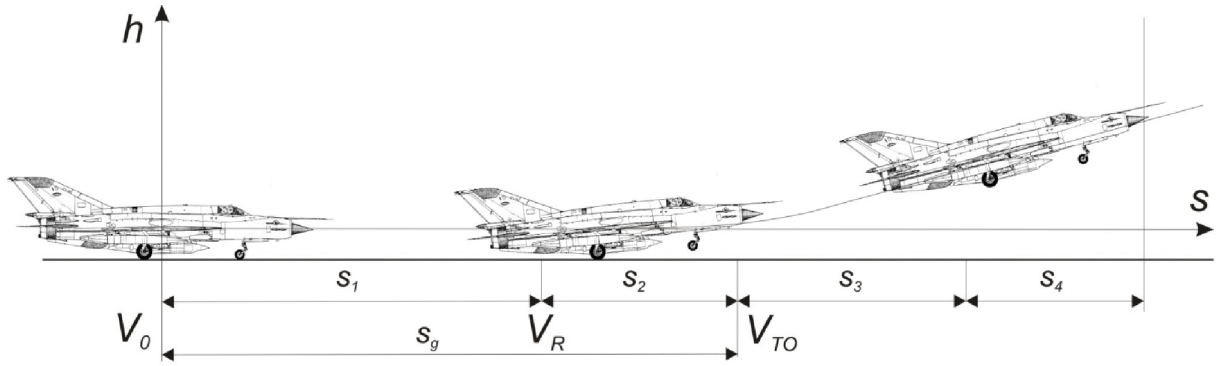
Raspoloživa pogonska sila koju zrakoplov može imati u letu određen je pomoću modela motora [10], [11], [12]. Ovaj model obuhvaća sve režime rada motora. U našem slučaju je opisan normalni režim rada motora (od položaja ručice gasa "SPS" do položaja "MAKSIMAL") i režim rada motora sa naknadnim sagorijevanjem tzv. "forsaž" (*engl. afterburn*). Željeni režima rada motora odabire se otklonom komande gasa δ_P, a dobivena raspoloživa sila je funkcija visine leta i Machovog broja.

Različite aerodinamičke konfiguracije zrakoplova, kao i različite konfiguracije nošenog podvjesnog tereta, definiraju inercijski model zrakoplova [13]. Inercijski model je određen masom zrakoplova, položajem središta mase u odnosu na srednju aerodinamičku tetivu, te momentima inercije. Inercijske karakteristike zrakoplova se mijenjanju svaki put kad zrakoplov tijekom leta promjeni svoju aerodinamičku konfiguraciju (npr. uvlačenje ili izvlačenje kotača i zakrilaca). Isto tako se potrošnjom goriva, odnosno promjenom ukupne mase zrakoplova, mijenjanju njegove inercijske karakteristike kroz čitavi let.

2.3. Model polijetanja

Polijetanjem započinje svaki let zrakoplova i ono se, kao i slijetanje zrakoplova, razlikuje od ostatka leta u nekoliko važnih detalja. Kao prvo zrakoplov je preko svojih kotača u kontaktu sa površinom piste, odnosno postoji otpor trenja između kotača i piste koji se određuje pomoću koeficijenta kotrljanja kotača po pisti μ. Druga bitna razlika je u aerodinamičkoj konfiguraciji zrakoplova koji prilikom polijetanja ima izvučene kotače i uređaje za polijetanje/slijetanje (zakrilca, pretkrilca). Oni proizvode, u kombinaciji sa utjecajem tla, različite aerodinamičke koeficijente od onih koje zrakoplov ima tijekom ostatka leta (odnosno u "čistoj" konfiguraciji). Proces polijetanja može se podijelliti u četiri faze (slika 2-1). Svaka od ovih faza posjeduje posebnu skupinu jednadžbi koje opisuju gibanje zrakoplova:

- prva faza je faza zaleta u kojoj zrakoplov ubrzava od svoje početne aerodinamičke brzine V_0 do aerodinamičke brzine V_R (odvajanje prednjeg kotača od piste),
- druga faza je propinjanje u kojoj zrakoplov ubrzava od aerodinamičke brzine V_R do aerodinamičke brzine V_{TO} pri kojoj dolazi do uzleta zrakoplova,
- treću fazu čini vertikalni zaokret od aerodinamičke brzine V_{TO} do postizanja željenog kuta penjanja γ,
- posljednja četvrta faza sastoji se od pravocrtnog penjanja do propisane visine h_{obs}, koju zovemo visina nadvisivanja prepreka (*obstacle clearance altitude*).



Slika 2-1: Faze polijetanja zrakoplova

2.3.1. Prva faza - faza zaleta

Završetak prve faze nastaje kada zrakoplov dostigne aerodinamičku brzinu V_R pri kojoj je otpor oslonca prednjeg kotača jednak nuli ako otklonimo kormilo visine za δ_{mTO}. Da bismo odredili kraj prve faze potrebno je napisati jednadžbu ravnoteže momenata prema d'Alemberovom principu koji kaže da suma momenata za točku rotacije mora biti jednaka nuli.

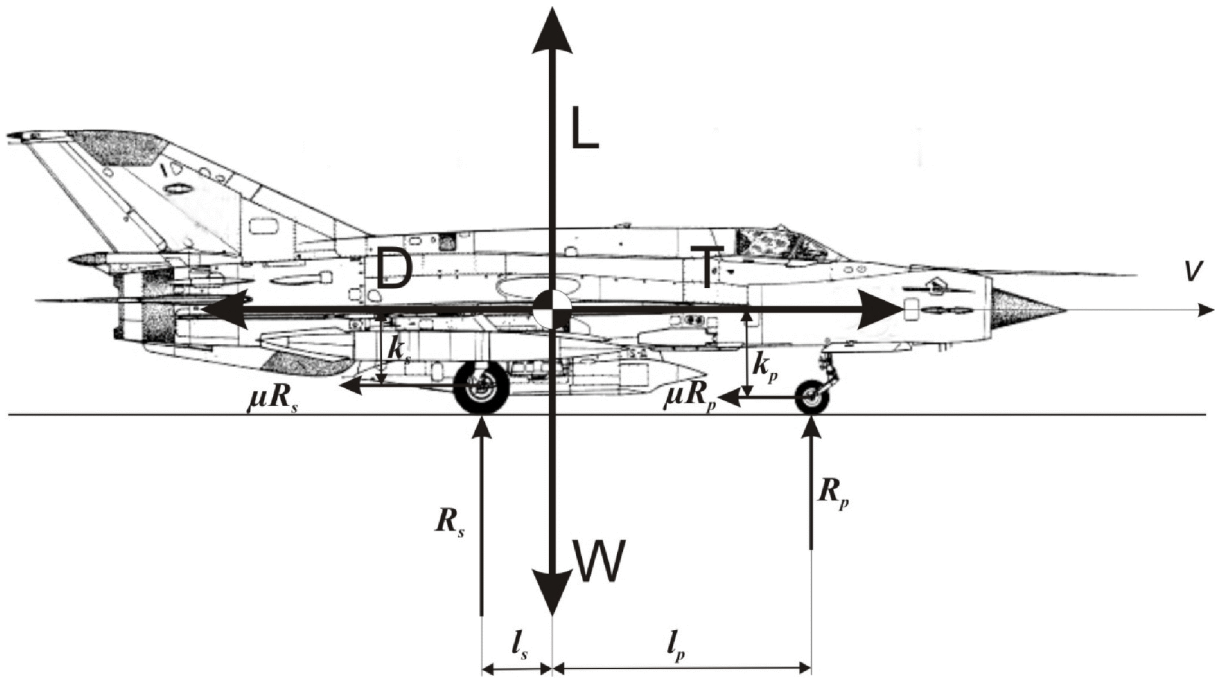
Da bismo odredili sve momente koje djeluju na zrakoplov u tom trenutku, moramo definirati veličine prema slici (slika 2-2). To su:

- horizontalna udaljenost osi prednjeg kotača od središta mase l_p,

- horizontalna udaljenost osi zadnjeg kotača od središta mase l_s,

- vertikalna udaljenost osi prednjeg kotača od središta mase k_p,

- vertikalna udaljenost osi zadnjeg kotača od središta mase k_s.



Slika 2-2: Sile i momenti na zrakoplov u fazi zaleta

Suma momenata prema slici 2-2 glasi:

$$M + L \cdot l_s + D \cdot k_s - T \cdot k_s - W \cdot l_s + [T - D - \mu(W - L)] \cdot k_s = 0$$

ili nakon sređivanja:

$$M + L \cdot (l_s + \mu k_s) - W \cdot (l_s + \mu k_s) = 0$$

Jednadžbe za aerodinamički moment M i silu uzgona L glase:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\rho V_R^2}{2} S_{ref} c_A C_m \\ L &= \frac{\rho V_R^2}{2} S_{ref} C_L \end{aligned} \tag{2-3}$$

Sada možemo izračunati brzinu V_R u trenutku odvajanja prednjeg kotača od piste:

$$V_R = \sqrt{\frac{2W(l_s + \mu k_s)}{\rho S_{ref}[c_A C_m + C_L \cdot (l_s + \mu k_s)]}} \tag{2-4}$$

Brzina V_R označava aerodinamičku brzinu pri kojoj pilot treba postaviti otklon kormila visine za δ_{mTO}, kojem u ravnotežnom stanju odgovara napadni kut α_{TO}.

Gibanje središta mase u prvoj fazi polijetanja opisuju sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= T - D - \mu \cdot R_K \\ L - W + R_K &= 0 \\ \frac{ds}{dt} &= V \end{aligned} \tag{2-5}$$

Pogonska sila T je funkcija aerodinamičke brzine i visine leta zrakoplova, R_K je otpor oslonca kotača, a μ je koeficijent kotrljanja kotača po pisti. Vrijednost koeficijenta kotrljanja μ ovisi o vrsti podloge na pisti.

2.3.2. Druga faza - propinjanje zrakoplova

U drugoj fazi polijetanja dolazi do propinjanja zrakoplova, pri čemu se zrakoplov okreće oko osi zadnjih kotača. Kut propinjanja zrakoplova θ pri tome raste od 0 do α_{TO}.

Model gibanja zrakoplova u drugoj fazi polijetanja opisan je sa sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{T\cos\theta - D - \mu R_K}{m} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{M + M^R}{I_y} \\ \frac{d\theta}{dt} &= q \\ \frac{ds}{dt} &= V \end{aligned} \tag{2-6}$$

Za razliku od prve faze, ovdje imamo dvije nove jednažbe. Prva opisuje promjenu kutne brzine propinjanja, odnosno okretanja zrakoplova oko osi zadnjeg kotača. Ta promjena ovisi o sumi aerodinamičkog momenta M i momenta otpora oslonca M^R, te o momentu inercije I_y. Moment otpora oslonca za središte mase izračunava se pomoću izraza:

$$M^R = -R_K r \cdot [\cos(\theta + \varepsilon) + \mu \sin(\theta + \varepsilon)]$$

gdje su r i ε konstruktivne konstante zadnjeg kotača zadane izrazima:

$$r = \sqrt{{l_s}^2 + {k_s}^2}$$

$$\varepsilon = \arctan\frac{k_s}{l_s}$$

Druga nova jednadžba opisuje promjenu kuta propinjanja θ. Jednadžba za promjenu brzine se od prve faze razlikuje samo za član $T\cos\theta$, umjesto samo T.

Duljina piste koju zrakoplov prijeđe tijekom prve i druge faze ($s_g = s_1 + s_2$) može se izračunati analitičkim putem [1]. To će biti prikazano u petom poglavlju na primjeru, te će se dobiveni rezultati usporediti sa rezultatima numeričkog modela.

2.3.3. Treća faza - uzlet

Treća faza polijetanja sastoji se od zaokreta u vertikalnoj ravnini koji traje do trenutka dok zrakoplov ne postigne željeni kut penjanja γ. U ovoj fazi zrakoplov se nalazi u zraku, tj. više nije u kontaktu sa pistom. Uz pretpostavku da pri uzletu nema promjene kursa (A = *const.*) možemo definirati sljedeće jednadžbe koje opisuju gibanje središta mase u ovoj fazi polijetanja:

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= T - D - W\sin\gamma \\ mV\frac{d\gamma}{dt} &= L - W\cos\gamma \\ \frac{dx}{dt} &= V\cos\gamma \\ \frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma \end{aligned} \tag{2-7}$$

2.3.4. Četvrta faza - pravocrtno penjanje

Zrakoplov u četvrtoj fazi polijetanja uspostavlja pravocrtno penjanje sa željenim kutom penjanja γ. Prilikom penjanja zrakoplov ubrzava do željene brzine penjanja. Jednadžbe gibanja središta mase za ovu fazu polijetanja glase:

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= T - D - W\sin\gamma \\ \frac{dx}{dt} &= V\cos\gamma \\ \frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma \end{aligned} \tag{2-8}$$

Četvrta faza polijetanja završava kada zrakoplov dostigne visinu nadvisivanja prepreka hobs, koja za civilne standarde iznosi h_{obs} = 10.57 m (35 ft), a za vojne standarde iznosi h_{obs} = 15.2 m (50 ft).

2.4. Model slijetanja

Slijetanje zrakoplova je po modelu gibanja vrlo slično polijetanju. Zrakoplov ima izvučene kotače i uređaje za slijetanje (zakrilca/pretkrilca) u krajnje izvučenom položaju. Prilikom dolaska na slijetanje zrakoplov se spušta pod kutom γ_a i pri tome održava pravocrtno gibanje sa konstantnom aerodinamičkom brzinom koja bi trebala biti malo veća ili jednaka od $v_a = 1.3 \cdot v_{stall}$. Ovdje v_{stall} označava aerodinamičku brzinu sloma uzgona sa zadanom konfiguracijom za slijetanje.

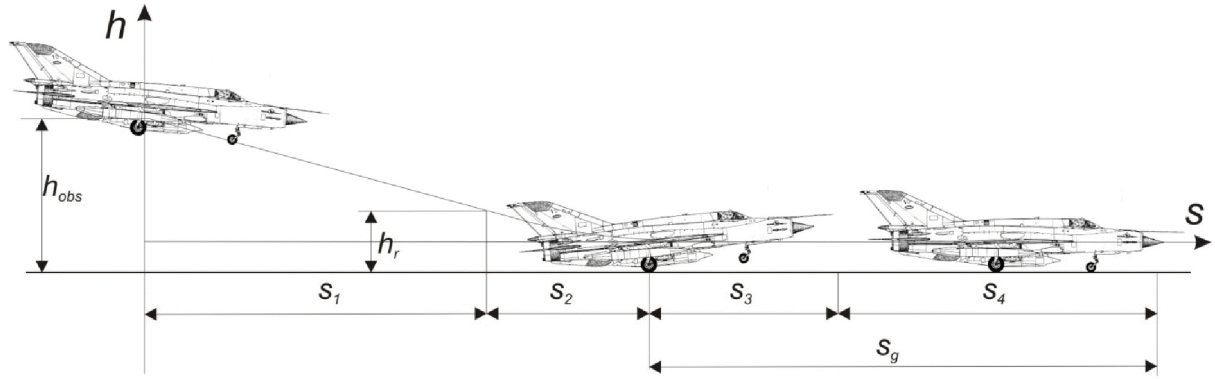
Kao sami početak procesa polijetanja možemo uzeti trenutak kada se zrakoplov u pravocrtnom spuštanju nalazi na visini nadvisivanja prepreka h_{obs}. Kao i kod polijetanja, proces slijetanja ćemo podijeliti u četiri faze (slika 2-3):

- prva faza je pravocrtno spuštanje konstantnom brzinom od visine h_{obs} do visine h_r na kojoj počinje vertikalni zaokret,

- druga faza je vertikalni zaokret od visine h_r do dodira zadnjih kotača sa površinom piste i na kraju ove faze kut poniranja γ_a je jednak nuli,

- u trećoj fazi zrakoplov rotira oko osi zadnjih kotača sve dok se prednji kotači ne spuste na pistu,

- posljednja četvrta faza slijetanja predstavlja usporavanje zrakoplova na pisti.



Slika 2-3: Faze slijetanja zrakoplova

2.4.1. Prva faza - pravocrtno spuštanje

Prva faza započinje od visine nadvisivanja prepreka h_{obs} i u toj fazi se zrakoplov nalazi u pravocrtnom spuštanju sa konstantnom aerodinamičkom brzinom prilaza. Ova faza traje do visine h_r u kojoj pilot treba započeti sa vertikalnim zaokretom. U ovoj fazi slijetanja vrijede iste jednadžbe za gibanje središta mase zrakoplova kao i u posljednjoj fazi polijetanja:

$$m\frac{dV}{dt} = T - D - W\sin\gamma$$

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\gamma \tag{2-9}$$

$$\frac{dh}{dt} = V\sin\gamma$$

Kao i kod polijetanja, pretpostavljamo da se proces slijetanja odvija samo u vertikalnoj ravnini, odnosno nema promjene kursa leta tj. kuta skretanja ($dA/dt = 0$, $d\chi/dt = 0$).

2.4.2. Druga faza - vertikalni zaokret

U drugoj fazi slijetanja zrakoplov izvodi vertikalni zaokret koji započinje na visini h_r sa kutom poniranja γ_a, a završava dodirom zadnjih kotača sa pistom, pri čemu kut poniranja γ_a treba biti jednak nuli. Da bi se to ostvarilo, potrebno je da se zrakoplov giba po vertikalnoj kružnici čiji polumjer R iznosi:

$$R = \frac{h_r}{1 - \cos\gamma_a} \tag{2-10}$$

Gibanje središta mase zrakoplova u ovoj fazi slijetanja određeno je sljedećim jednadžbama:

$$
\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt} &= T - D - W\sin\gamma \\
mV\frac{d\gamma}{dt} &= L - W\cos\gamma \\
\frac{dx}{dt} &= V\cos\gamma \\
\frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma
\end{aligned}
\tag{2-11}
$$

2.4.3. Treća faza - rotacija zrakoplova

Treća faza slijetanja sastoji se od rotacije zrakoplova oko osi zadnjih kotača do trenutka kada prednji kotač dodirne pistu. Ova faza je slična drugoj fazi polijetanja, samo se ovdje zrakoplov rotira u suprotnom smjeru. Iz tog razloga koristimo identične jednadžbe za gibanje središta mase kao i u fazi propinjanja kod polijetanja:

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{T\cos\theta - D - \mu R_K}{m} \\
\frac{dq}{dt} &= \frac{M + M^R}{I_y} \\
\frac{d\theta}{dt} &= q \\
\frac{ds}{dt} &= V
\end{aligned}
\tag{2-12}
$$

Uz ove četiri diferencijalne jednadžbe dodajemo također i algebarske jednadžbe:

$$R_K = W - L$$

$$M^R = -R_K r \cdot [\cos(\theta + \varepsilon) + \mu\sin(\theta + \varepsilon)]$$

2.4.4. Četvrta faza - usporenje zrakoplova

U četvrtoj fazi slijetanja zrakoplov se nalazi sa svim kotačima na pisti, te započinje proces zaustavljanja odnosno kočenja. U sile koje usporavaju zrakoplov ubrajamo aerodinamički otpor, otpor kotrljanja kotača po pisti, te silu kočenja koja se ostvaruje sa jednim ili više uređaja za zaustavljanje zrakoplova (kočenje obrnutim potiskom motora, kočeći padobran, aerodinamičke zračne kočnice, sustav kočenja na kotačima). Konačno za opis gibanja središta mase u četvrtoj fazi koristimo sljedeće jednadžbe:

$$m\frac{dV}{dt} = T_0 - D - \mu \cdot (W - L)$$
$$\frac{ds}{dt} = V \tag{2-13}$$

gdje smo sa T_0 označili ukupnu silu kočenja.

Koristeći jednadžbe za prijeđeni put iz treće i četvrte faze slijetanja, možemo odrediti ukupnu potrebnu duljinu piste za slijetanje ($s_g = s_3 + s_4$). Ova duljina se, kao i kod polijetanja, također može izračunati i analitičkim putem [1], što će biti prikazano na primjeru pri analizi slijetanja u petom poglavlju.

3. MODEL RAVNOTEŽNOG LETA

3.1. Definicija ravnotežnog leta

Prema definiciji zrakoplov se nalazi u ravnotežnom letu onda kada su momenti koji djeluju oko središta mase zrakoplova u ravnoteži, odnosno kada je rezultirajući moment jednak nuli. U ravnotežnom letu je ukupni moment propinjanja jednak zbroju aerodinamičkog i pogonskog momenta propinjanja.

$$M = M_0 + M_\alpha \alpha_{rav} + M_\delta \delta_m = 0 \tag{3-1}$$

Iz ove jednadžbe možemo izračunati ravnotežni napadni kut α_{rav}, koji u ravnotežnom letu odgovara postavljenom otklonu kormila visine δ_m.

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} \tag{3-2}$$

Sila uzgona u ravnotežnom letu određena je pomoću sljedećeg izraza:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m \tag{3-3}$$

Iz ovog izraza možemo zaključiti da uzgon u ravnotežnom letu ovisi isključivo o otklonu kormila visine .

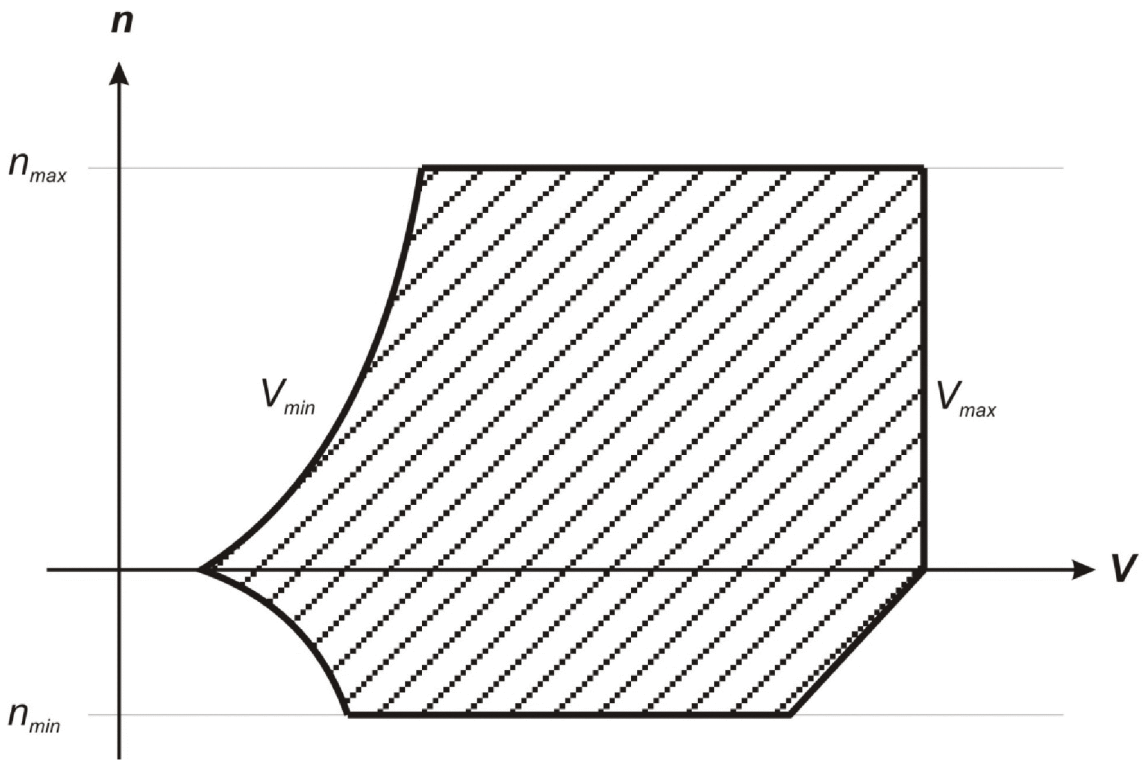
Veličina sile uzgona, odnosnosno sposobnost zrakoplova da ju mijenja tijekom leta omogućuje upravljanje zrakoplovom pomoću te sile. Odnos sile uzgona i težine zrakoplova nazivamo normalno opterećenje i ono se označava sa n.

$$n = \frac{L}{W}$$
$$n = \frac{\rho S_{ref}}{2W} V^2 C_L \tag{3-4}$$

Iz ovog izraza vidimo da faktor normalnog opterećenja ovisi o kvadratu brzine i o aerodinamičkom koeficijentu uzgona. Zbog čvrstoće konstrukcije zrakoplova faktor normalnog opterećenja ima svoja ograničenja, te je za svaki zrakoplov propisano maksimalno pozitivno i negativno opterećenje. Isto tako zbog koeficijenta uzgona koji ne može biti veći od C_{Lmax} (jer u protivnom nastupa slom uzgona), koeficijent normalnog opterećenja je za male brzine ograničen parabolom.

Područje u kojem je moguće održavati horizontalni ravnotežni let obično se za pojedine zrakoplove prikazuje sa *V-n* dijagramom. U tom dijagramu je prikazan raspon brzina koje zrakoplov može održavati, te vrijednosti maksimalnih koeficijenata opterećenja koja su vezana uz tu brzinu.

Na slici 3-1 je prikazan izgled jednog uobičajenog *V-n* dijagrama. Osjenčani dio dijagrama predstavlja područje u kojem je moguće održavati horizontalni ravnotežni let.



Slika 3-1: Izgled *V-n* dijagrama

3.2. Jednadžbe gibanja u ravnotežnom letu

U ovom modelu ravnotežnog leta zanemarujemo zakrivljenost Zemljine površine i Zemljinu rotaciju. Isto tako uvodimo pretpostavku da nema vjetra, pa je brzina leta jednaka aerodinamičkoj brzini $V_K = V$. Uzimajući u obzir ove pretpostavke, jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu glase:

$m\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha - D - W\sin\gamma$	(3-5)
$mV\frac{d\gamma}{dt} = L\cos\phi - W\cos\gamma$	
$mV\cos\gamma\frac{d\chi}{dt} = (L + T\sin\alpha)\sin\phi$	
$\frac{dx}{dt} = V\cos\gamma\cos\chi$	
$\frac{dy}{dt} = V\cos\gamma\sin\chi$	
$\frac{dh}{dt} = V\sin\gamma$	
$\frac{ds}{dt} = V$	
$\frac{dm}{dt} = -C_T T$	

Prve tri jednadžbe su opisane u brzinskom koordinatnom sustavu, dok su koordinate položaja zrakoplova (x, y, h) opisane u lokalnom koordinatnom sustavu.

Ove jednadžbe gibanja se koriste za sve faze leta (penjanje, penjući zaokret, horizontalni let, horizontalni zaokret, spuštanje, spuštajući zaokret). Sada ćemo opisati pojedine faze leta i posebnosti koje vrijede za određene faze. Spomenute faze promatrat ćemo uz specifičnosti za zrakoplov MiG-21.

3.3. Penjanje

Penjanje je faza leta u kojoj se zrakoplov kreće prema zadanoj visini rute. Prilikom penjanja zrakoplov istovremeno ubrzava do brzine koju će održavati na ruti, odnosno po kojoj je napravljen navigacijski proračun.

Penjanje započinje nakon zadnje faze polijetanja, odnosno od visine nadvisivanja prepreka. U samom trenutku početka penjanja dolazi do uvlačenja kotača. Zbog jednostavnosti modela uzimamo pretpostavku da se proces uvlačenja kotača događa trenutno. Činjenica da penjanje započinje sa uvučenim kotačima znači da je ovdje aerodinamička konfiguracija zrakoplova drugačija od one u procesu polijetanja, tj. u modelu gibanja pri izračunu aerodinamičkih sila moramo uzeti drugačije koeficijente sile uzgona i otpora.

Sljedeća točka u fazi penjanja je uvlačenje zakrilaca, za koje također uzimamo da se događa kao trenutna promjena. Ova točka je obično definirana nekakvom sigurnosnom visinom i razlikuje se za različite tipove zrakoplova (u našem slučaju iznosi $h = 150m$). Ovdje kao i u slučaju uvlačenja kotača dolazi do promjene aerodinamičke konfiguracije koju moramo uzeti u obzir pri izračunu modela gibanja.

Prvi dio penjanja u kojem zrakoplov ubrzava do zadane brzine može se definirati na dva načina. Prvi je da se odredi kut propinjanja koji zrakoplov mora održavati, a drugi je da se odredi kut penjanja odnosno zadana vertikalna brzina.

U slučaju našeg modela zrakoplov započinje penjanje održavajući kut penjanja od $\gamma = 9°$, a nakon uvlačenja kotača i zakrilaca održava kut penjanja od $\gamma = 7°$. Zrakoplov na ovaj način penje sve dok ne postigne brzinu koju će održavati po ruti.

Tijekom ovog prvog dijela penjanja sa ubrzanjem definirana je još jedna točka, a to je trenutak isključenja forsaža. Ovo se u našem slučaju događa kada zrakoplov pri ubrzanju dostigne instrumentalnu brzinu od $Vi = 600\ km/h$.

Kada zrakoplov ubrza do zadane brzine, tada započinje drugi dio penjanja u kojem se održava zadani kut penjanja γ. Na ovaj način zrakoplov penje do zadane visine po ruti.

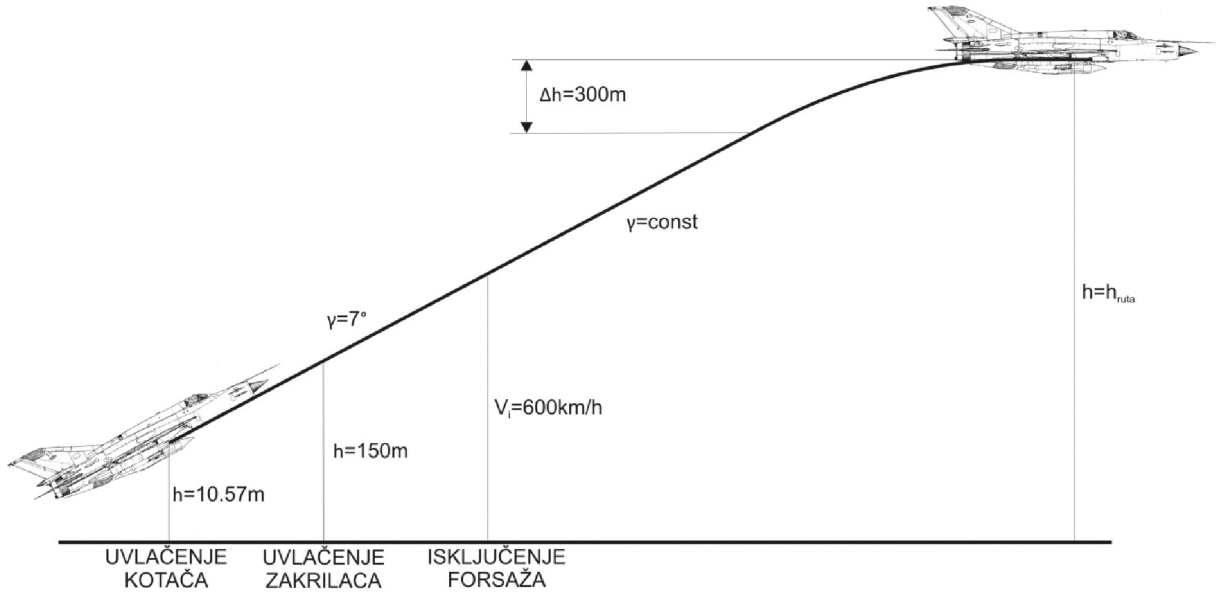
Ako se penjanje odvija samo u vertikalnoj ravnini (bez penjućeg zaokreta), što znači da je kut skretanja χ konstantan, a kut valjanja zrakoplova Φ je jednak nuli, tada u penjanju možemo koristiti jednadžbe:

$$m\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha - D - W\sin\gamma$$
$$mV\frac{d\gamma}{dt} = L - W\cos\gamma \tag{3-6}$$

Kako je u ovom dijelu penjanje pravocrtno ($\gamma = const$) i stacionarno ($V = const$), tada gornje jednadžbe prelaze u:

$$T\cos\alpha = D + W\sin\gamma$$
$$L = W\cos\gamma \tag{3-7}$$

Prije samog dolasaka do zadane visine ($\Delta h = 300m$) zrakoplov mora započeti vertikalni zakoret, odnosno postupno smanjivati kut penanja γ kao bi na zadanoj visini imao vrijednost $\gamma = 0$.



Slika 3-2: Penjanje zrakoplova do zadane visine

3.4. Horizontalni let

Kada dostigne zadanu visinu rute, zrakoplov se nastavlja gibati u pravocrtnom horizontalnom letu ($\gamma = 0$, $d\chi/dt=0$). Prema tome iz sljedećih jednadžbi gibanja

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= T\cos\alpha - D - W\sin\gamma \\ mV\frac{d\gamma}{dt} &= L\cos\phi - W\cos\gamma \\ mV\cos\gamma\frac{d\chi}{dt} &= (L + T\sin\alpha)\sin\phi \end{aligned} \tag{3-8}$$

slijedi da za horizontalni let vrijedi:

$$\begin{aligned} L\cos\phi &= W \\ (L + T\sin\alpha)\sin\phi &= 0 \end{aligned} \tag{3-9}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi da za pravocrtan horizontalan let kut valjanja Φ mora biti jednak nuli, a koeficijent normalnog opterećenja mora biti $n = 1$.

Ako uzmemo da je $\Phi=0$ i u prvu jednadžbu uvrstimo izraz za silu uzgona tada dobivamo

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L = W$$

Odavdje možemo izračunati brzinu V koja je potrebna za održavanje horizontalnog leta.

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_L}}$$

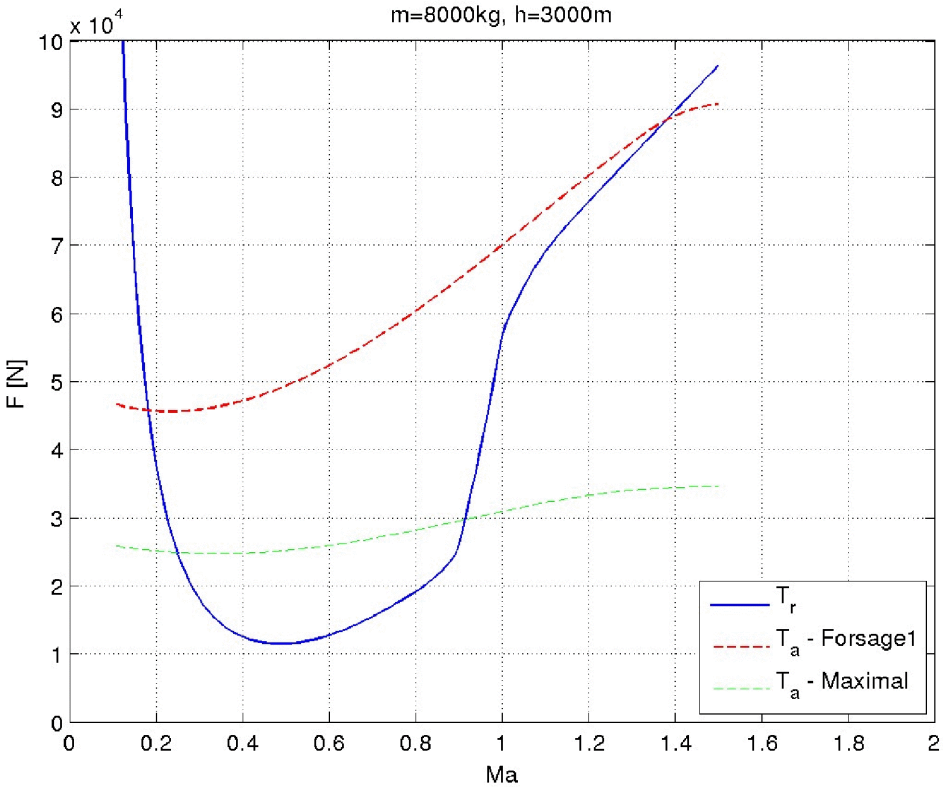
Kako koeficijent uzgona ne može biti veći od $C_{L\,max}$ pri maksimalnom napadnom kutu, onda možemo izračunati minimalnu brzinu V_{stall} sa kojom zrakoplov može letjeti horizontalno:

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{L\,max}}}$$

Uobičajeno je da se u navigacijskom letu po ruti horizontalni let odvija sa konstantnom brzinom. Uz taj uvjet prva jednadžba dobiva oblik

$$T \cos \alpha = D$$

odnosno pogonska sila mora biti jednaka sili otpora. Ovu pogonsku silu nazivamo još i potrebna pogonska sila i označavamo je sa T_r. Pogonsku silu koju motor zrakoplova može dati nazivamo raspoloživa pogonska sila i označavamo je sa T_a. Ona kod mlaznih motora prije svega zavisi o visini leta, ali isto tako i o brzini leta. Horizontalni let bit će moguć samo ako je ispunjen uvjet $T_a \geq T_r = D$.



Slika 3-3: Raspoloživa i potrebna sila na visini 3000 m

3.5. Horizontalni zaokret

Za zrakoplov koji se nalazi u horizontalnom zaokretu ($\gamma = 0$), sa konstantnom brzinom V i sa kutom valjanja Φ, vrijede sljedeće jednadžbe koje opisuju gibanje središta mase:

$$\begin{aligned} T\cos\alpha &= D \\ mV\frac{d\chi}{dt} &= (L + T\sin\alpha)\sin\phi \\ L\cos\phi &= W \end{aligned} \tag{3-10}$$

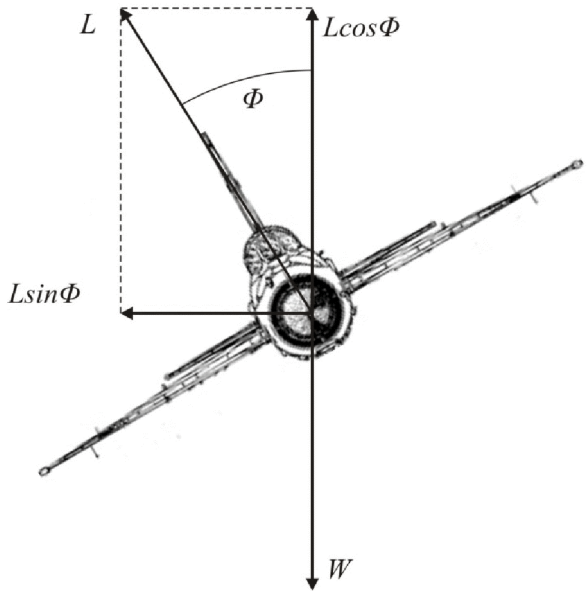
Iz zadnje jednadžbe slijedi izraz koji nam govori koliki nam je za određeni kut valjanja Φ, potreban normalni koeficijent opterećenja

$$n = \frac{1}{\cos\phi} \tag{3-11}$$

Opterećenje n i brzina zrakoplova u zaokretu V definiraju polumjer zaokreta R kojim će se zrakoplov kretati.

$$R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} \tag{3-12}$$

Slika 3-4 prikazuje sile koje djeluju na zrakoplov u horizontalnom zaokretu.



Slika 3-4: Ravnoteža sila u horizontalnom zaokretu

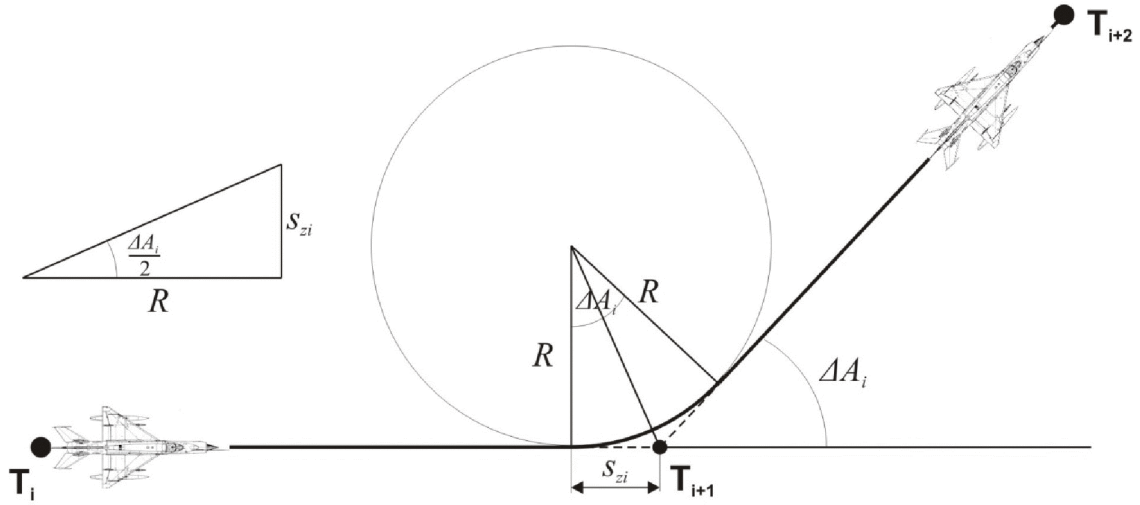
Kako bi zrakoplov pratio zadanu putanju po navigacijskoj ruti, određuju se posebna pravila po kojima zrakoplov izvodi horizontalne zaokrete na točkama rute kako bi zauzeo kurs sljedeće etape. Postoji nekoliko različitih pravila koja se primjenjuju, ovisno o vrsti letenja i brzini zrakoplova. U našem modelu primjenjivat ćemo pravilo po kojem zrakoplov počinje sa zaokretom prema kursu sljedeće etape prije samog dolaska na navigacijsku točku. Mjesto uvođenja u zaokret određuje se na način da se zrakoplov po završetku zaokreta, odnosno pri zauzimanju kursa nove etape, ponovno nalazi točno na putanji rute.

Za proračun mjesta uvođenja u zaokret potrebno je znati nekoliko parametara. Prvi je kut valjanja zrakoplova Φ kojim će se izvoditi horizontalni zaokret. On u našem slučaju može iznositi $\Phi = 45°$ (za promjene kursa do $90°$) ili $\Phi = 60°$ (za promjene kursa preko $90°$). Ostali parametri koji moramo poznavati je brzina zrakoplova u zaokretu i promjena kursa koju treba ostvariti da bi se zauzeo kurs sljedeće etape.

Kada uz pomoć kuta valjanja Φ (odnosno potrebnog normalnog opterećenja n) i brzine zrakoplova V odredimo radijus zaokreta R, tada iz sljedećeg izraza možemo izračunati udaljenost s_{zi} prije navigacijske točke na kojoj moramo započeti sa zaokretom.

$$s_{zi} = R \tan \frac{\Delta A_i}{2}$$

Ovdje je $\Delta A_i = A_i - A_{i+1}$ promjena kursa između trenutne i sljedeće etape rute. U horizontalnoj projekciji taj zaokret izgleda kao prema sljedećoj slici (slika 3-5).



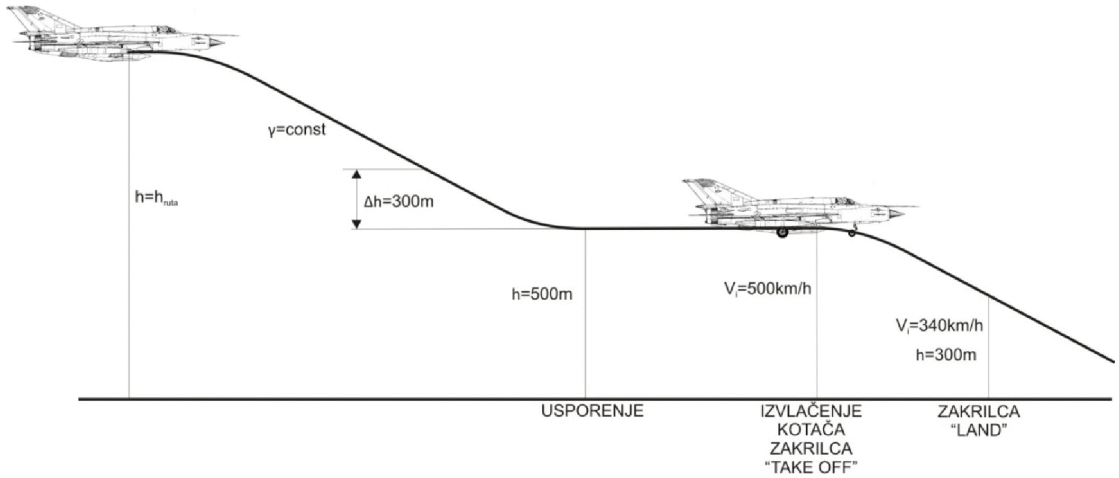
Slika 3-5: Horizontalni zaokret na navigacijskoj točki

3.6. Spuštanje

Spuštanje je faza leta koja se izvodi sa ciljem da se zrakoplov spusti sa zadane visine rute na visinu na kojoj započinje proces slijetanja. U našem modelu spuštanje sa sastoji dva dijela. Prvi dio je pravocrtno spuštanje do visine početka prilaza za slijetanje. Na toj visini zrakoplov usporava i priprema konfiguraciju za slijetanje (izvlačenje kotača i zakrilaca na poletni položaj). Drugi dio je prilaz za slijetanje u kojem se zrakoplov uz odgovarajuće podešavanje sletne konfiguracije (izvlačenje zakrilaca na položaj za slijetanje) i smanjenje brzine spušta do točke koju definiramo kao početak slijetanja.

Prvi dio spuštanja započinje na način da zrakoplov iz horizontalnog leta vertikalnim zaokretom prelazi u spuštanje sa konstantnim kutom poniranja γ, zadržavajući pritom stalnu brzinu. Zrakoplov zatim ponovno izvodi vertikalni zaokret ($\Delta h = 300m$) kako bi se doveo u horizontalni let na visini početka prilaza za slijetanje ($h = 500m$). Na ovoj visini zrakoplov usporava, te nakon smanjenja brzine ($Vi = 500\ km/h$) podešava konfiguraciju za slijetanje.

Prilaz za slijetanje započinje vertikalnim zaokretom i zatim spuštanjem sa izvučenim kotačima i zakrilcima na poletnom položaju. Zrakoplov u prilazu za slijetanje dodatno usporava na brzinu prilaženja ($Vi = 340\ km/h$), te na visini $h = 300m$ izvlači zakrilca na položaj za slijetanje. Dalje se spuštanje odvija sa konstantnom brzinom i stalnim kutom poniranja ($\gamma \approx -3°$). Tijekom čitave faze spuštanja vrijede iste jednadžbe za gibanje središta mase zrakoplova koje su vrijedile i za fazu penjanja.



Slika 3-6: Spuštanje zrakoplova do visine početka slijetanja

3.7. Optimalni režimi leta

Pod optimalnim režimima leta podrazumijevamo uvjete u kojima zrakoplov može ostvariti **maksimalni dolet** ili **maksimalno trajanje leta** sa raspoloživim gorivom. Uvjeti pod kojima se ovi režimi mogu ostvariti su određene brzine i visine leta zrakoplova.

Maksimalni dolet je vrlo bitan podatak kod planiranja misija, zato jer nam govori koliko dugačka može biti planirana ruta ili do kojih točaka se može doletjeti sa određenog aerodroma polijetanja. Ovi podaci su posebice važni kod planiranja borbenih misija. Maksimalno trajanje leta je važan podatak pri planiranju misija kod kojih je potreban što duži ostanak zrakoplova u zraku, a to su primjerice misije presretanja (*engl. intercept*) i misije zaštite određenog područja (*engl. CAP – combat air patrol*).

Optimalni režimi leta su vrlo važni i u izvanrednim situacijama. Primjerice kada zrakoplov zbog nekog otkaza ili nedostatka goriva mora dosegnuti određeni aerodrom za slijetanje, ili kada situacija u zračnom prostoru zahtjeva duži ostanak u zraku od planiranog.

Maksimalni dolet i maksimalno trajanje leta se određuju za određenu visinu leta. Maksimalni dolet R (*engl. range*) se za zrakoplove sa mlaznim motorom računa po jednadžbi [1]:

$$R = \frac{2}{gC_T}\frac{C_L}{C_D}(V_i - V_k) \tag{3-13}$$

Ovdje je C_T koeficijent potrošnje goriva, a V_i i V_k su početna (inicijalna) i krajnja brzina zrakoplova.

Maksimalno trajanje leta E (*engl. endurance*) se definira kao vrijeme potrebno da se masa zrakoplova smanji za masu goriva. Ono se za mlazne zrakoplove računa prema jednadžbi [1]:

$$E = \frac{1}{gC_T}\frac{C_L}{C_D} ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right) \tag{3-14}$$

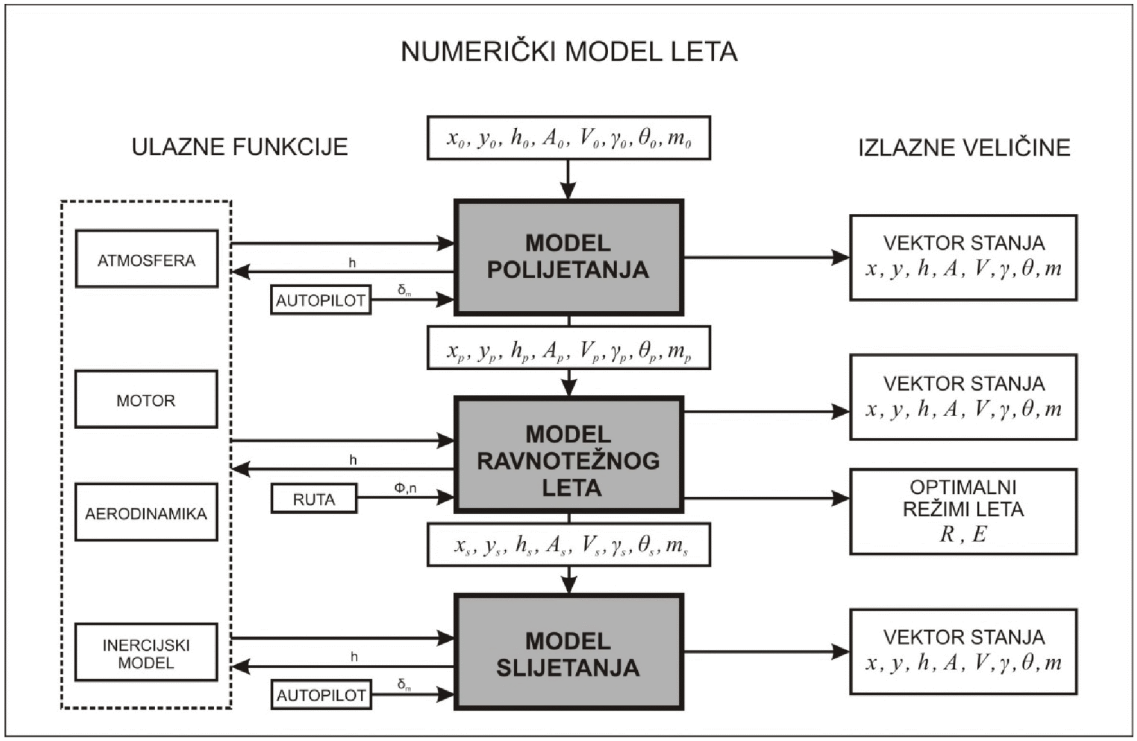
U ovom izrazu m_i i m_k predstavljaju početnu (inicijalnu) i krajnju masu zrakoplova.

4. NUMERIČKI MODEL LETA

4.1. Opći numerički model

U prethodnim poglavljima teorijski su opisane pojedine faze leta, te su dane jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova koje se primjenjuju u pojedinim fazama leta. Sada možemo pristupiti razradi numeričkog modela leta koji se uz uporabu odgovarajućeg software-a može primjeniti za izračun na računalu. U našem slučaju korišten je program MATLAB.

Numerički model leta je sastavljen od tri glavne cjeline koje se izvode redosljedom kako se odvija let zrakoplova. To znači da prvo imamo model polijetanja, zatim model ravnotežnog leta i na kraju model slijetanja. Za svaku od ovih cjelina postoje ulazne funkcije od kojih su neke identične za sve modele, a neke su specifične za određeni model. Isto tako svaka cjelina daje posebne izlazne veličine koje su svojstvene za određenu fazu leta.



Slika 4-1: Blok-shema numeričkog modela leta

Numerički model leta započinje sa numeričkim modelom polijetanja. Kao ulazne podatke model polijetanja koristi početne vrijednosti položaja zrakoplova (x_0, y_0, h_0), početne mase zrakoplova m_0, početnog kursa A_0 i početne brzine V_0.

Osim ulaznih podataka, model polijetanja koristi i nekoliko ulaznih funkcija. Prvo ćemo navesti ulazne funkcije koje se identične i za druga dva modela (model ravnotežnog leta i model slijetanja).

Prva ulazna funkcija je funkcija za izračun standardne atmosfere. Ona kao ulazni argument koristi visinu leta h, a kao izlazne argumente daje vrijednosti temperature zraka T, tlaka zraka p, gustoće zraka ρ i brzinu zvuka a. Te vrijednosti se za zadanu visinu leta računaju prema sljedećim formulama:

$$\begin{gathered} T = 288.15 - 0.0065 \cdot h \\ p = 101325 \cdot \left(1 - 0.02256 \cdot \frac{h}{1000}\right)^{5.256} \\ \rho = 0.003484 \cdot \frac{p}{T} \\ a = 20.05 \cdot \sqrt{T} \end{gathered} \tag{4-1}$$

Navedeni izrazi za izračun parametra standardne atmosfere vrijede samo u sloju atmosfere koji nazivamo troposfera. Troposfera je sloj Zemljine atmosfere koji se proteže od površine Zemlje pa do određene visine koja zavisi o geogafskoj širini. Tako primjerice u našim krajevima (srednji pojas) ona ide do visine od $h = 11000\ m$, dok u području ekvatora ide čak i do $h = 16000\ m$. Kako se najveći broj letova odvija u ovom pojasu, tada slobodno možemo koristiti navedene izraze za izračun atmosfere.

Sljedeća ulazna funkcija je funkcija motora, odnosno raspoložive pogonske sile. Ona za ulazne argumente koristi otklon komande gasa δ_p, visinu leta h i brzinu leta iskazanu preko Machovog broja Ma. Izlazni argumenti ove funkcije su rasploživa pogonska sila T_a i koeficijent potrošnje goriva C_T. Ova funkcija, ovisno o režimu rada motora, može imati dva osnovna oblika. Prvi je normalni režim rada motora (bez forsaža) u kojem imamo otklon komande gasa δ_p od položaja "SPS" do položaja "MAKSIMAL" (100%), a drugi je režim rada motora na forsažu [10], [11], [12].

Ulazne funkcije aerodinamike i inercijskog modela zajednički su određene prije svega konfiguracijom zrakoplova. Pri tome pod pojmom konfiguracije zrakoplova podrazumijevamo različite varijante vanjskog nošenog tereta, te različite varijante uključenosti pojedinih uređaja na zrakoplovu (izvučenost kotača, zakrilaca ili zračnih kočnica).

Aerodinamičke ulazne funkcije kao svoje ulazne argumente (osim kofiguracije) koriste još i položaj otklona kormila visine δ_m, Machov broj Ma, te napadni kut α. Kao izlaz aerodinamičke funkcije nam daju uzdužne aerodinamičke koeficijente uzgona (C_L), otpora (C_D) i propinjanja (C_m), budući da nas zanima samo gibanje u vertikalnoj ravnini (bez vjetra). Pomoću njih možemo izračunati odgovarajuće aerodinamičke sile uzgona L i otpora D, te moment propinjanja M.

Numerički model polijetanja kao ulaznu funkciju koristi i funkciju autopilot. Ova funkcija ima zadaću odrediti položaj otklona kormila visine δ_m, te odgovarajući kut propinjanja θ koji se koriste kao komande za upravljanje zrakoplovom tijekom polijetanja.

Kao izlaznu veličinu tijekom procesa polijetanja, numerički model polijetanja daje vektor stanja koji sadrži podatke o položaju zrakoplova (x, y, h), brzini leta V i kursu A, masi zrakoplova m, kutovima penjanja γ i propinjanja θ, kutnoj brzini q oko poprečne osi zrakoplova, te o prijeđenom putu s tijekom zaleta.

Po završetku procesa polijetanja, tj. dostizanjem visine nadvisivanja prepreka h_{obs}, numerički model polijetanja završava sa svojim izvođenjem, te kao izlaz daje početne podatke potrebne za pokretanje numeričkog modela ravnotežnog leta. To su isti podaci koje daje vektor stanja u modelu polijetanja, osim što nam više ne trebaju podaci o kutnoj brzini q , a podatak o prijeđenom putu s tijekom polijetanja sada postaje prijeđeni put tijekom leta po ruti.

Numerički model ravnotežnog leta koristi iste ulazne funkcije (atmosfera, motor, aerodinamika, inercija) kao i numerički model polijetanja. Ovaj model također koristi i ulaznu funkciju **ruta**, međutim ta funkcija se razlikuje od funkcije autopilota u polijetanja tako što kao izlazne argumente daje kut valjanja zrakoplova Φ, odnosno koeficijent normalnog opterećenja n. Ti podaci se u numeričkom modelu ravnotežnog leta koriste kao komande za upravljanje zrakoplovom.

Karakteristika ulazne funkcije **ruta** je u tome da su u njoj su sadržani navigacijski podaci o točkama i etapama navigacijske rute (položaji odnosno koordinate navigacijskih točaka, kursevi etapa). Kao izlaz ova funkcija nam daje podatke o promjenama kurseva između pojedinih etapa, te podatke o položaju točaka na kojima zrakoplov treba krenuti u zaokret da bi izašao u kurs sljedeće etape ili započeti određenu proceduru. Ova funkcija se poziva prije samog izvođenja numeričkog modela ravnotežnog leta i njena uloga je vođenje zrakoplova (*engl. guidance*) po navigacijskoj ruti.

Izlazne veličine numeričkog modela ravnotežnog leta čini vektor stanja koji sadrži podatke o položaju zrakoplova (x, y, h), brzini leta V i kursu A, masi zrakoplova m, kutovima penjanja γ, propinjanja θ, i valjanja Φ, koeficijentu normalnog opterećenja n, te o ukupnom prijeđenom putu s tijekom leta po navigacijskoj ruti.

Osim vekora stanja u ovom modelu kao izlaznu veličinu dobivamo i podatke o optimalnim režimima leta, odnosno vrijednosti potrebne brzine i visine leta za maksimalni dolet zrakoplova i za maksimalno trajanje leta. Optimalni režimi leta se mogu pozvati kao posebna funkcija u bilo kojem trenutku misije. Za njene ulazne argumente potrebni su nam podaci o trenutnoj brzini i visini zrakoplova, te podatak o trenutnoj masi zrakoplova, odnosno preostaloj količini goriva.

Početkom faze slijetanja započinje i numerički model slijetanja koji ulazne podatke dobija od modela ravnotežnog leta. Ovaj model ima identične ulazne funkcije kao i model polijetanja. Isto tako kao izlaznu veličinu daje vektor stanja koji sadrži iste podatke kao i kod polijetanja, sa razlikom što ovdje s predstavlja prijeđeni put prilikom zaustavljanja.

Numerički model leta možemo provoditi u cjelini i tako analizirati jednu čitavu misiju, ali isto tako možemo pozivati samo pojedine numeričke modele i analizirati samo dijelove misije koje nas trenutno zanimaju.

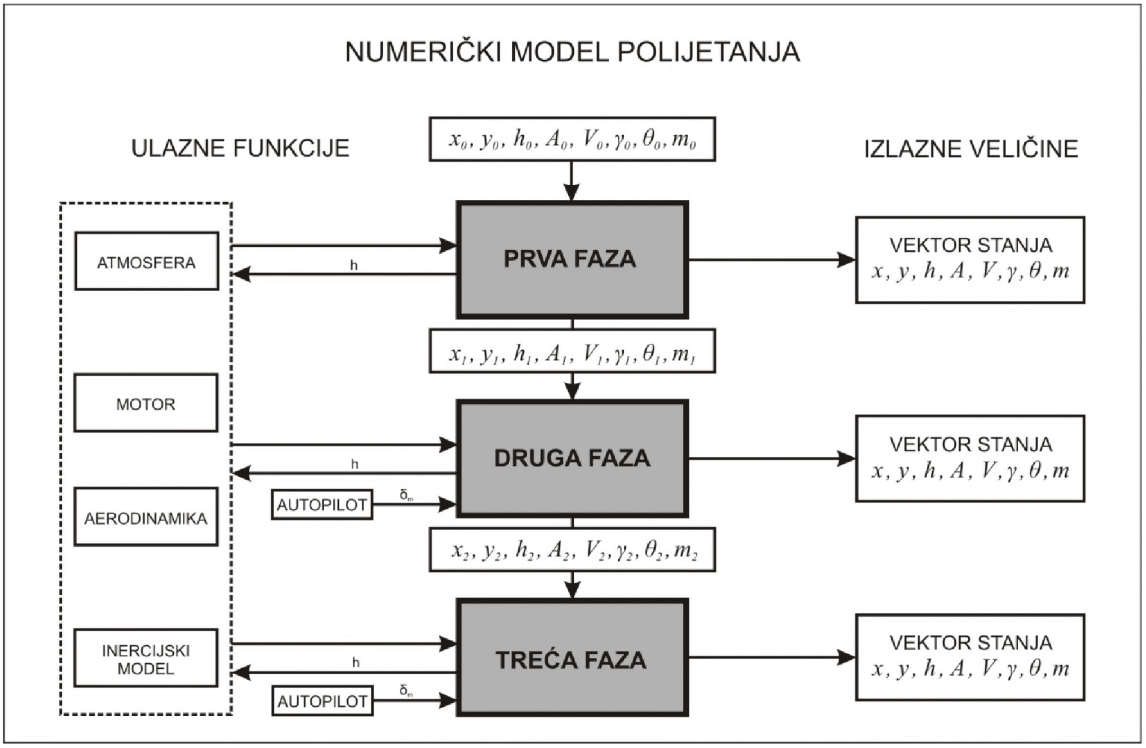
U nastavku rada ćemo detaljnije obraditi pojedine numeričke modele i naglasiti glavne faze od kojih su ti modeli sastavljeni.

4.2. Numerički model polijetanja

Prvi u nizu numeričkih modela koji se izvršavaju je model polijetanja. Kao što je već spomenuto, za njegov početak potrebni su početni ulazni podaci. Isto tako tijekom njegovog izvršavanja koriste se podaci dobiveni ulaznim funkcijama, a kao izlazna veličina dobiva se vektor stanja.

Numerički model polijetanja podijeljen je u tri glavne cjeline (prva faza, druga faza, treća faza) koje odgovaraju fazama u procesu polijetanja, s time što su treća i četvrta faza procesa polijetanja zajedno spojene u trećoj fazi numeričkog modela.

Prema slici (4-2) možemo vidjeti da model kroz sve tri faze koristi već spomenute ulazne funkcije (atmosfera, motor, aerodinamika, inercije). Važno je napomenuti da se ulazna funkcija autopilot koja daje komandu otklona kormila visine δ_m koristi u drugoj i trećoj fazi polijetanja, odnosno pri rotaciji i nakon uzleta zrakoplova, dok je u prvoj fazi taj otklon kormila visine određen unaprijed zadanom procedurom.



Slika 4-2: Blok-shema numeričkog modela polijetanja

Procedura po kojoj se izvodi polijetanje definirana je tehnikom pilotiranja u polijetanju za zrakoplov MiG-21 [14]. Prema toj proceduri je otklon kormila visine δ_m unaprijed zadan u prvoj fazi polijetanja. Konkretno u prvoj fazi, tj. u zaletu, komanda kormila visine se odmah u početku gibanja zrakoplova postavlja na 2/3 hoda pilotske palice, što odgovara otklonu kormila visine od -20°. Taj otklon se drži sve do trenutka odvajanja prednjeg kotača od piste (brzina V_R), kada se otklon kormila smanjuje na -5°.

Ulazne podatke za prvu fazu čine početne koordinate zrakoplova (x_0, y_0, h_0) koji se nalazi na pisti, a to je ujedno i ishodište našeg lokalnog koordinatnog sustava. Ovdje trebamo napomenuti kako se za početnu visinu uzima $h_0 = 0\ m$, a ne prava nadmorska visina piste, što je uostalom i praksa kod polijetanja i slijetanja sa zrakoplovom MiG-21. Zrakoplov ima svoju početnu brzinu $V_0 = 0$ (bez vjetra) i početnu masu polijetanja m_0, a početni kurs A_0 je jednak pravcu piste za polijetanje. Uz pretpostavku da je pista čitavom svojom dužinom horizontalna, odnosno da nema nagiba prema dolje ili gore, tada je $\gamma_0 = 0$. Početni kut propinjanja θ_0 i kutna brzina q su također jednaki nuli.

Tijekom izvođenja prve faze računaju se promjene brzine i prijeđenog puta pomoću jednadžbi (2-5), te promjene položaja zrakoplova i njegove mase prema (2-1). Istovremeno se računa i otpor oslonca prednjeg kotača R_{PK} prema izrazu:

$$R_{PK} = \frac{(l_s + \mu k_s) \cdot (W - L) - M}{l_s + l_p}$$

Uvjet završetka prve faze je kada otpor oslonca prednjeg kotača postane manji od nule, tj. kada se prednji kotač odvoji od piste. U tom trenutku t numerički model nam daje podatak o prijeđenom putu tijekom zaleta s_1 i brzinu odvajanja prednjeg kotača od piste V_R.

U drugoj fazi dolazi do rotacije zrakoplova oko osi zadnjih kotača, što znači da imamo pojavu kutne brzine q, a time i promjenu kuta propinjanja θ. Ovdje se promjene u izlaznom vektoru stanja računaju prema jednadžbama (2-6). Druga faza završava kada otpor oslonca zadnjih kotača R_{ZK}, koji je jednak razlici težine zrakoplova i sile uzgona, postane manji od nule. Pri završetku druge faze dobivamo izlazne podatke o prijeđenom putu tijekom rotacije s_2, ukupno prijeđenom putu po zemlji $s_g = s_1 + s_2$, brzini uzleta V_{TO} i kutu propinjanja θ. Kut propinjanja bi u trenutku uzleta trebao iznositi $\theta = 5\text{-}7°$.

Nakon uzleta zrakoplov započinje treću fazu koja se sastoji od vertikalnog zaokreta, povećavajući pri tome kut propinjanja θ. Za izračun vektora stanja u ovoj fazi koristimo jednadžbe (2-7). Karakteristika treće faze numeričkog modela je upravljačka funkcija **autopilota** koja na osnovu ulaznih podataka daje potrebni otklon kormila visine δ_m. Treća faza završava kada zrakoplov dostigne željeni kut propinjanja θ ($11° - 13°$), nakon čega numerički model daje podatke o ukupno prijeđenom putu pri polijetanju s_{uk}, brzini V.

Kao završetak numeričkog modela polijetanja dobivamo izlazni vektor stanja u trenutku završetka procesa polijetanja, a njegove veličine služe kao početni ulazni podaci za numerički model ravnotežnog leta.

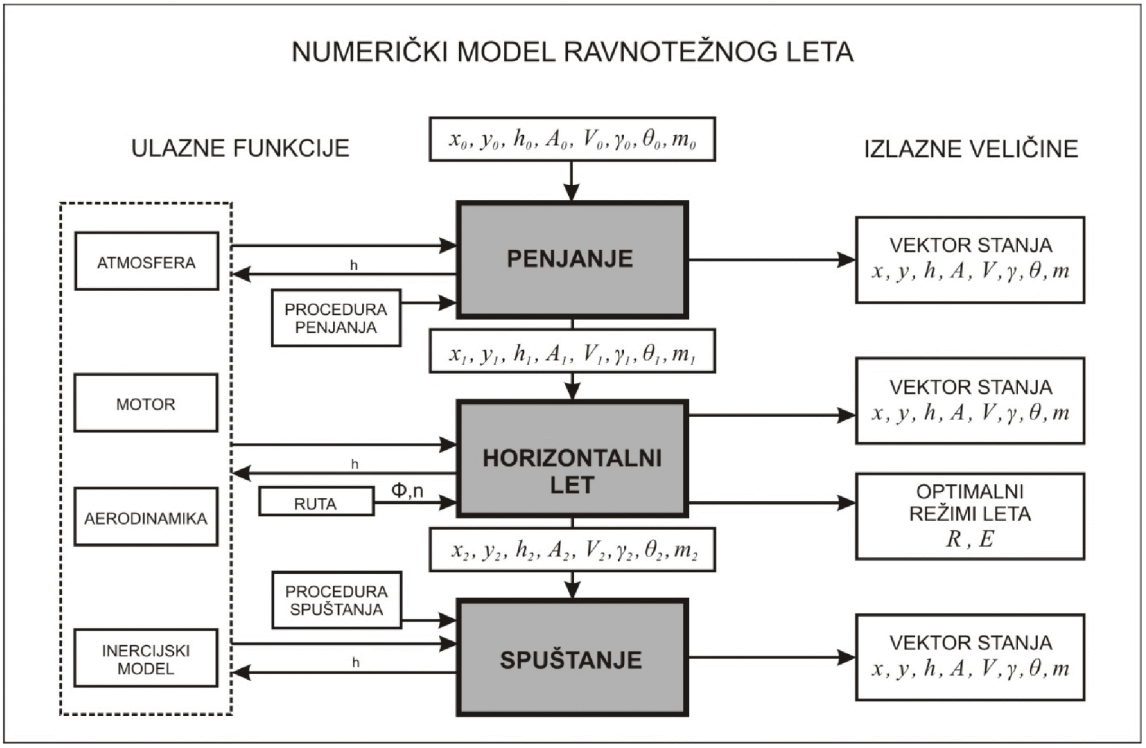
Za integraciju diferencijalnih jednadžbi koristi se numerička metoda Runge Kuta. Ova numerička metoda se koristi u svim fazama polijetanja, a isto tako i u druga dva numerička modela (ravnotežni let i slijetanje). Jedina razlika u pojedinim fazama prilikom korištenja ove metode je upotrijebljeni korak integracije. Za većinu faza tijekom leta dovoljno je koristiti veći korak ($h = 0.01$), dok je u fazama gdje imamo rotaciju zrakoplova oko poprečne osi, tj. pojavu kutne brzine q, potreban nešto manji korak ($h = 0.001$).

4.3. Numerički model ravnotežnog leta

Ulazni podaci za numerički model ravnotežnog leta se dobivaju iz vektora stanja koji daje numerički model polijetanja na kraju svog izvršenja. U tom trenutku zrakoplov se nalazi na nekoj visini h_p, sa kutom propinjanja $\theta = 11\text{-}13°$ i sa izvučenom konfiguracijom za polijetanje (izvučeni kotači i zakrilca u položaju za polijetanje $\delta_f = 25°$).

Numerički model ravnotežnog leta je podijeljen u tri glavne faze. Prva faza je penjanje zrakoplova do zadane visine rute, druga je horizontalni let po ruti sa horizontalnim zaokretima na navigacijskim točkama rute, i treća faza je spuštanje sa zadane visine rute do visine početka procesa polijetanja.

Osim već spomenutih ulaznih funkcija, ovdje imamo posebnu funkciju vođenja **ruta** koja na osnovu navigacijskih parametara rute određuje komande upravljanja zrakoplovm Φ i n kojima se izvodi zaokret. Ova funkcija vođenja se koristi samo u fazi horizontalnog leta, budući da u ovom pojednostavljenom modelu nemamo penjuće i spuštajuće zaokrete.



Slika 4-3: Blok-shema numeričkog modela ravnotežnog leta

Model započinje fazom penjanja na čijem se početku događa uvlačenje kotača. Ovu promjenu konfiguracije prikazujemo kao trenutnu, pa u numeričkom modelu penjanja počinjemo pratiti zrakoplov sa uvučenim kotačima. Zrakoplov penje sa kutom penjanja od $\gamma = 7°$ i pri tome nastavlja sa povećanjem brzine leta.

Sljedeća točka u ovoj fazi je uvlačenje zakrilaca koje se događa pri $h = 150\ m$. Isto kao i kod uvlačenja kotača, ovu promjenu konfiguracije prikazujemo kao trenutnu. Nakon uvlačenja zakrilaca zrakopolov povećava kut propinjanja, te dalje nastavlja sa penjanjem i ubrzavanjem.

Pri instrumentalnoj brzini Vi = 600 km/h zrakoplov isključuje forsaž i postavlja komandu gasa na "MAKSIMAL". Tada ulazna funkcija **motor** počinje davati podatke o potisnoj sili i potrošnji goriva u normalnom režimu rada motora (od položaja komande gasa "SPS" do položaja "MAKSIMAL"). Zrakoplov nastavlja sa ubrzanjem do brzine $V = 800\ km/h$ nakon čega slijedi ustaljeno pravocrtno penjanje sa konstantnim kutom penjanja γ prema zadanoj visini rute.

Prije dolaska do zadane visine ($\Delta h = 300m$) zrakoplov započinje prevođenje iz penjanja u horizontalni let, tj dovođenje kuta penjanja do vrijednosti $\gamma = 0$. Kako prilikom prevođenja zrakoplov treba zadržati stalnu brzinu od $V = 800\ km/h$, tako je potrebno istovremeno smanjivati snagu motora.

Proces odvijanja faze penjanja određen je ulaznom funkcijom vođenja **procedura penjanja**, koja ovisno o visini i brzini zrakoplova daje podatke u kojem trenutku treba podesiti konfiguraciju zrakoplova ili režim rada motora. Kroz čitavu fazu penjanja primjenjuju se jednadžbe (3-5) i (3-6) za određivanje vektora stanja.

Nakon što je zrakoplov preveden iz penjanja u horizontalni let, nastavlja se pravocrtan let po ruti sa konstantnom brzinom ($V = 800\ km/h$) prema prvoj navigacijskoj točki. Ovo je dakle faza horizontalnog leta sa horizontalnim zaokretima i u njoj se za proračun vektora stanja koriste jednadžbe (3-8) i (3-10). Zrakoplov kreće u zaokrete na navigacijskim točkama prema podacima koje dobiva iz ulazne funkcije vođenja **ruta**. U svakom trenutku leta po ruti moguće je pozvati funkciju za izračun optimalnih režima leta.

Prije dolaska na posljednju navigacijsku točku rute koja ujedno predstavlja i početnu točku prilaza za slijetanje, zrakoplov mora izvršiti spuštanje sa zadane visine rute. Svrha ovog spuštanja je usporenje zrakoplova i priprema konfiguracije za slijetanje (izvlačenje kotača i zakrilaca).

Fazu spuštanja možemo podijeliti u dva dijela. Prvi dio je spuštanje sa visine rute do visine usporenja i izvlačenja konfiguracije. Ova visina može iznositi $h = 500\ m$ (za vizualne prilaze) ili $h = 1000\ m$ (za instrumentalne prilaze). Drugi dio je spuštanje sa pripremljenom konfiguracijom za slijetanje do visine početka slijetanja.

Spuštanje započinje prevođenjem zrakoplova vartikalnim zaokretom iz horizontalnog leta u poniranje sa konstantnim kutom ($\gamma = const$), zadržavajući pritom stalno brzinu od $V = 800\ km/h$. Da ne bi došlo do ubrzanja zrakoplova prilikom poniranja, potrebno je istovremeno komandom ručice gasa δ_p smanjiti potisak motora. Prije dolaska do visine usporenja ($\Delta h = 300m$) zrakoplov ponovno izvodi vertikalni zaokret i prelazi u horizontalni let.

Zrakoplov započinje usporavanje u horizontalnom letu postavljajući snagu motora na minimum (položaj ručice gasa na "SPS"), a po potrebi koristeći se i zračnim kočnicama. Nakon što uspori do brzine $Vi = 500\ km/h$, zrakoplov nastavlja horizontalni let s tom brzinom i zatim izvlači kotače za slijetanje, a nakon toga i zakrilca u položaj za polijetanje ($\delta_f = 25°$).

Nakon početnog podešavanja konfiguracije za slijetanje, zrakoplov vertikalnim zaokretom kreće u ponovno spuštanje. Ovaj put zrakoplov lagano usporava, te na visini od $300\ m$ i pri brzini $Vi = 340\ km/h$ izvlači zakrilca u položaj za slijetanje ($\delta_f = 45°$). Spuštanje se dalje nastavlja pravocrtno sa konstantnom brzinom i konstantnim kutom poniranja.

Isto kao i kod penjanja nakon polijetanja, sve promjene aerodinamičkih konfiguracija se prikazuju kao trenutne. U cijeloj fazi spuštanja gibanje zrakoplova opisujemo jednadžbama (3-5) i (3-6). Čitav postupak spuštanja zrakoplova do visine početka slijetanja određen je ulaznom funkcijom vođenja **procedura spuštanja**.

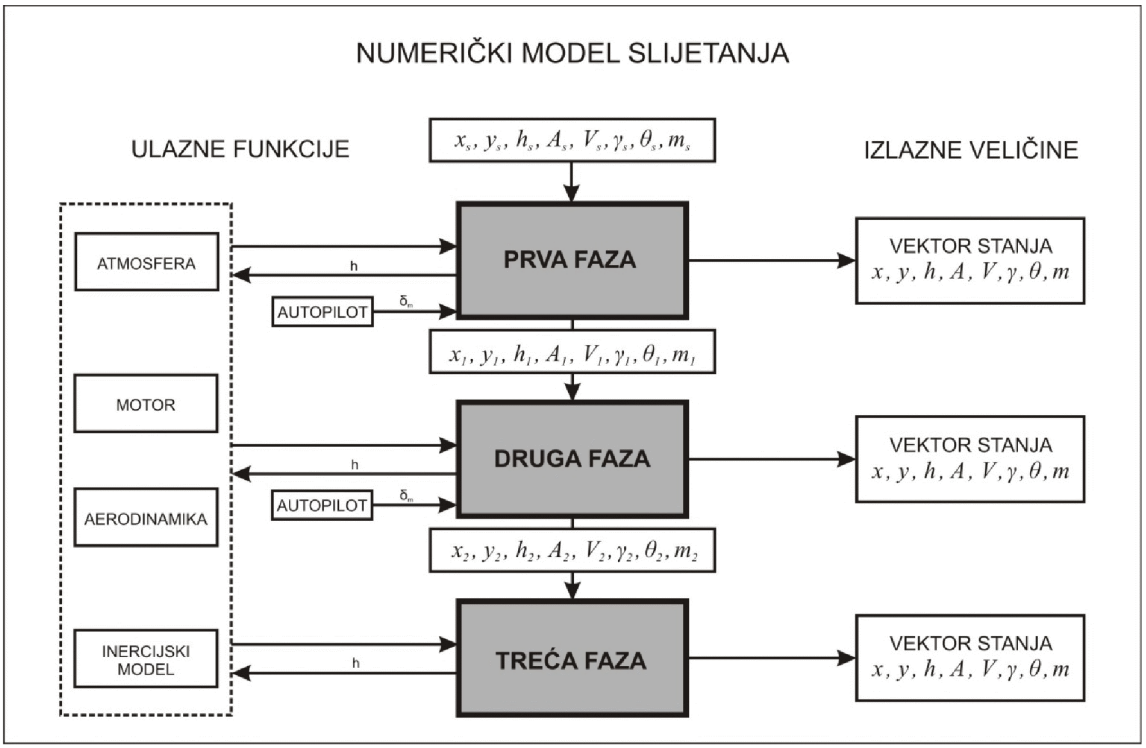
Numerički model ravnotežnog leta završava dolaskom zrakoplova do visine početka slijetanja i u tom trenutku izlazni vektor stanja sprema podatke koji će poslužiti kao početni ulazni podaci za numerički model slijetanja.

4.4. Numerički model slijetanja

Numerički model slijetanja započinje kada zrakoplov u prilazu, sa pripremljenom konfiguracijom za slijetanje, spusti do visine početka procesa slijetanja h_P. Ulazni podaci za ovaj numerički model dobivaju se iz izlaznog vektora stanja na kraju faze spuštanja u modelu ravnotežnog leta.

Ovaj numerički model sastoji se od tri faze, s time da su prva i druga faza slijetanja koje smo opisivali u poglavlju o modelu slijetanja, ovdje spojeni u prvu fazu numeričkog modela.

Na slici 4-4 je prikazana blok-shema numeričkog modela slijetanja. Vidimo da pored standardnih ulaznih funkcija (atmosfera, aerodinamika, motor, inercijski model) imamo i ulaznu funkciju autopilot koja djeluje samo na prvu fazu slijetanja. U ostale dvije faze otklon kormila visine δ_m određen je unaprijed zadanom procedurom slijetanja.



Slika 4-4: Blok-shema numeričkog modela slijetanja

U prvoj fazi slijetanja zrakoplov spušta sa konstantnom brzinom $Vi = 340\ km/h$ i konstantnim kutom poniranja γ_a od visine početka slijetanja h_S do visine h_r u kojoj treba započeti sa vertikalnim zaokretom. U ovoj fazi slijetanja se gibanje zrakoplova opisuje jednadžbama (2-9).

U trenutku kada zrakoplov spusti do visine h_r koja je definirana izrazom (2-10), zrakoplov izvodi vertikalni zaokret, pri čemu postupno smanjuje kut poniranja. Na završetku zaokreta zrakoplov treba imati kut poniranja $\gamma_a = 0$ (ako pista nema nagiba) i visinu $h = 0$, odnosno mora zadnjim kotačima dotaknuti površinu piste.

Ovdje treba napomenuti da je ovo matematički opis idealnog gibanja zrakoplova, te da je u stvarnoj praksi vrlo teško precizno izvesti ovakav manevar. Iz sigurnosnih razloga je visina na kraju ovog vertikalnog zaokreta veća od nule (za MiG-21 iznosi $h = 1\ m$).

Nakon što je zrakoplov zadnjim kotačima dotaknuo površinu piste, započinje druga faza slijetanja u kojoj dolazi do rotacije zrakoplova oko osi zadnjih kotača, odnosno spuštanja prednjeg kotača prema pisti. Opis gibanja zrakoplova u ovoj fazi izvodimo prema jednadžbama (2-12). Ovdje kako vidimo ponovno imamo kutnu brzinu q oko poprečne osi zrakoplova koja određuje brzinu smanjenja kuta propinjanja θ.

Druga faza slijetanja završava u trenutku kada prednji kotači dotaknu površinu piste. U tom trenutku je kut propinjanja $\theta = 0°$. Po završetku druge faze slijetanja numerički model nam daje duljinu s_2, odnosno prijeđenu duljinu piste tijekom rotacije.

Posljednja treća faza slijetanja počinje od trenutka dodira prednjih kotača sa pistom, pa sve do trenutka potpunog zaustavljanja zrakoplova, tj. do brzine $V = 0\ km/h$. U ovoj fazi gibanje opisujemo jednadžbama (2-13). Kod zrakoplova MiG-21 se u redovnom letenju za kočenje, odnosno zaustavljanje zrakoplova na pisti, koristi samo sustav kočenja na kotačima, dok se u izvanrednim situacijama može koristiti i kočeći padobran.

Završetak posljednje faze slijetanja u numeričkom modelu na izlazu daje prijeđeni put s_3, tj. prijeđenu duljinu piste tijekom zaustavljanja. Ona u zbroju sa duljinom s_2 daje ukupnu potrebnu duljinu piste za proces slijetanja $s_g = s_2 + s_3$.

5. PRIMJENA NUMERIČKOG MODELA

U ovom poglavlju ćemo obaviti analizu leta zrakoplova primjenom numeričkog modela leta, a zatim ćemo dobivene rezultate uspoređivati sa analitičkim podacima ili sa podacima iz tehničkih uputstava [14]. Zrakoplov koji ćemo analizirati je MiG-21 bis čiji su podaci i karakteristike dani u prilogu 1. Prvo ćemo obaviti analizu polijetanja i slijetanja, zatim analizu horizontalnog leta i na kraju analizu čitave jedne misije.

5.1. Analiza polijetanja

5.1.1. Numerička analiza polijetanja

Za numeričku analizu polijetanja ćemo upotrijebiti primjer polijetanja zrakoplova MiG-21 sa aerodroma Pleso (LDZA). Promatrani zrakoplov je u osnovnoj ("čistoj") konfiguraciji, odnosno bez ikakvog podvješenog vanjskog tereta. Aerodinamička konfiguracija za polijetanje podrazumijeva izvučene kotače i izvučena zakrilca u položaju za polijetanje ($\delta_f = 25°$).

Za polijetanje će se koristiti staza 23, što znači da će početni kurs (kurs polijetanja) biti $A_0 = 226°$. Polijetanje ćemo analizirati u standardnoj atmosferi bez utjecaja vjetra.

Napomenimo kako se nadmorska visina piste na aerodromu Pleso kreće od *103 m* na krajevima piste, do *105 m* na sredini piste. Ovu malu promjenu nadmorske visine od *2 m* možemo praktički zanemariti, te pretpostaviti da pista nema nikakav nagib.

Upotrijebit ćemo lokalni koordinatni sustav sa ishodištem u početnom položaju zrakoplova u mirovanju. Os x je usmjerena prema istoku, os y prema sjeveru, a os z okomito prema gore.

Za ulazni vektor stanja $X(t_0) = [x_0, y_0, h_0, V_0, A_0, \gamma_0, \theta_0, q_0, m_0]$ uzimamo sljedeće početne podatke:

$$X(t_o) = [0, 0, 0, 0, 226, 0, 0, 0, 8650]$$

Uz konfiguraciju za polijetanje i zadanu masu imamo sljedeće aerodinamičke karakteristike, te karakteristike inercijskog modela:

$$I_y = 58909\ kgm^2$$

$$c_A = 4.002\ m$$

$$\bar{h}_m = 0.295\ (29{,}5\ \%)$$

$$S_{ref} = 23\ m^2$$

$$l_s = 0.89\ m$$

$$l_p = 2.94\ m$$

$$k_s = 1.1\ m$$

Za zadanu početnu visinu $h_0 = 0\ m$ dobivamo podatke o standardnoj atmosferi:

$$T_0 = 288.15\ K$$

$$p_0 = 101325\ Pa$$

$$\rho_0 = 1.225\ kg/m3$$

$$a_0 = 340.35\ m/s$$

Podaci o pisti (uzletno-sletnoj stazi USS) su:

$$L_{USS} = 3252\ m$$

$$A_{USS} = 046°(RWY\ 05),\ 226°(RWY\ 23)$$

$$\gamma_{USS} = 0°$$

$$\mu_{USS} = 0.04$$

Uz ove početne podatke numerički model polijetanja daje sljedeće rezultate na kraju prve faze polijetanja:

$$V = 75.86\ m/s$$

$$s = 448\ m$$

$$m = 8631\ kg$$

$$t = 11.46\ s$$

Nakon rotacije, tj. pri uzletu dobivaju se ove vrijednosti:

$$V = 97.99\ m/s$$

$$s = 825\ m$$

$$m = 8624\ kg$$

$$\theta = 12.35\ °$$

$$t = 15.76\ s$$

I na kraju treće faze, odnosno po završetku polijetanja dobivamo:

$$h = 10\ m$$

$$V = 116.21\ m/s$$

$$s = 1380\ m$$

$$m = 8616\ kg$$

$$\theta = 10.89°$$

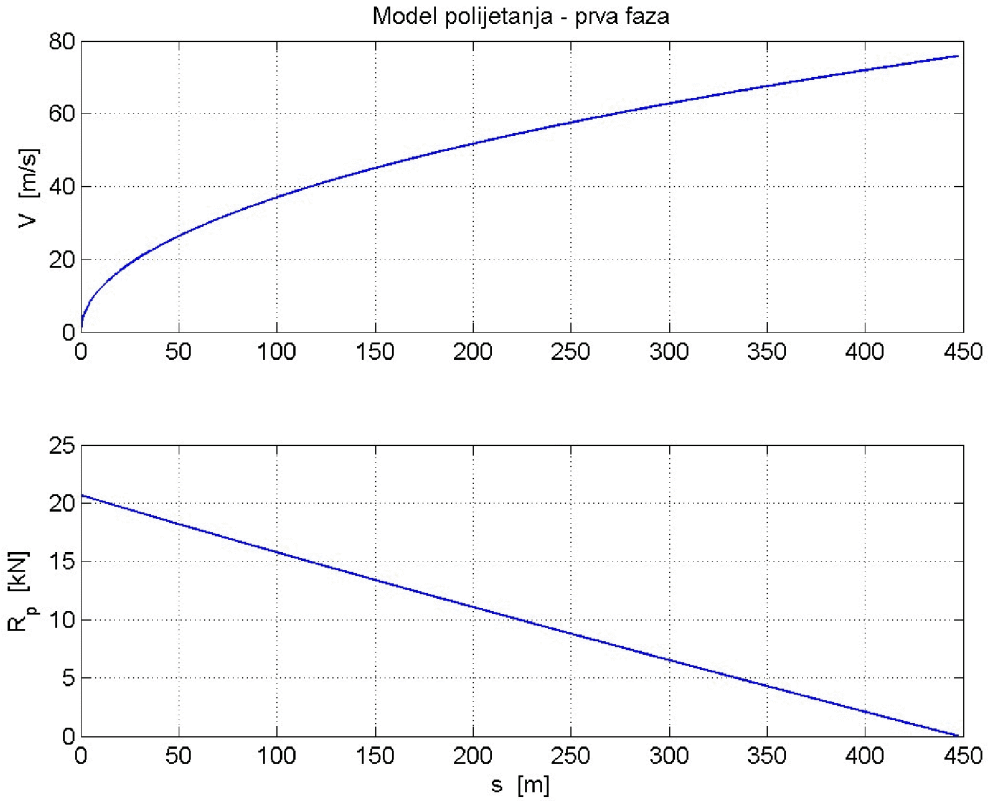
$$\gamma = 1.89°$$

$$t = 20.93\ s$$

Iz dobivenih rezultata slijedi da je pri navedenim uvjetima duljina piste potrebna za uzlet $s_g = 825\ m$, a ukupna potrebna duljina piste za polijetanje $s_{ukup} = 1380\ m$.

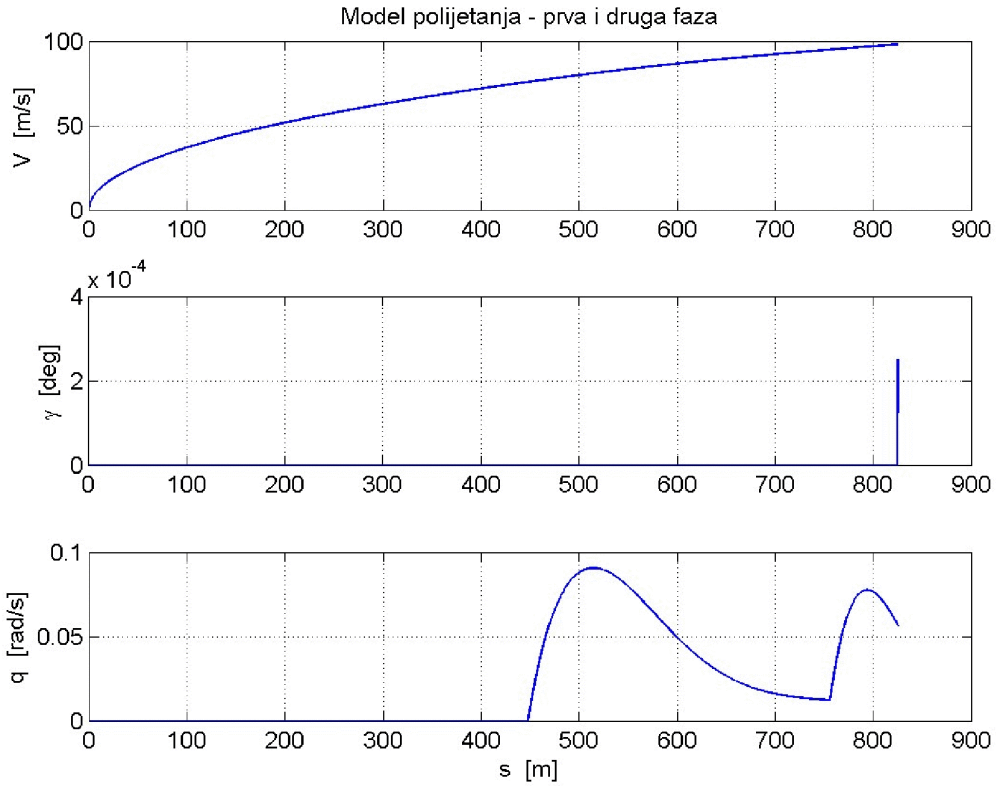
Slika 5-1: Polijetanje na aerodromu Pleso (LDZA)

Na sljedećim dijagramima su prikazane promjene karakterističnih veličina prilikom polijetanja u ovisnosti o prijeđenom putu *s*.



Slika 5-2: Promjena brzine zrakoplova i otpora oslonca tijekom prve faze polijetanja

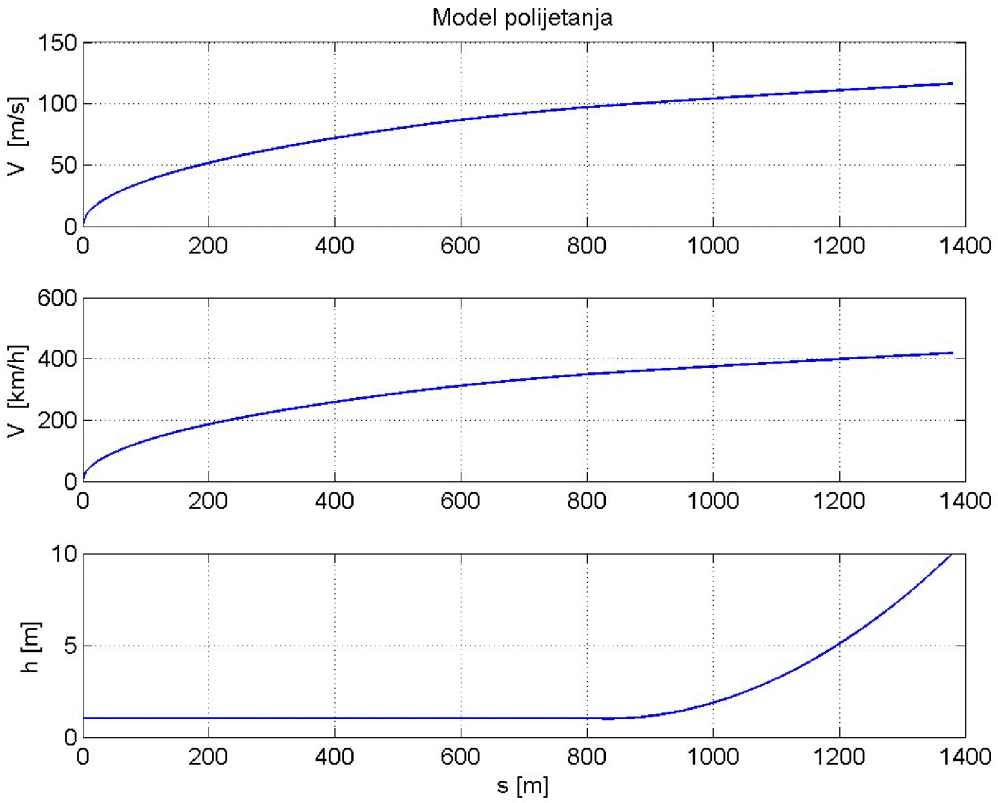
Na slici (5-2) možemo vidjeti prirast brzine zrakoplova do brzine $V_R = 75.86\ m/s$, te istovremeni pad otpora oslonca prednjeg kotača prema nuli, odnosno prema trenutku kada se odvaja od površine piste.



Slika 5-3: Promjena brzine zrakoplova, kuta penjanja γ i kutne brzine q

Na slici (5-3) je prikazan prirast brzine zrakoplova kroz prvu i drugu fazu polijetanja do brzine $V_{TO} = 97.88\ m/s$. Prema kutu penjanja γ možemo vidjeti da je on kroz čitavo vrijeme zaleta i rotacije jednak nuli (uz uvjet da pista nema nagib), te da tek nakon uzleta počinje rasti.

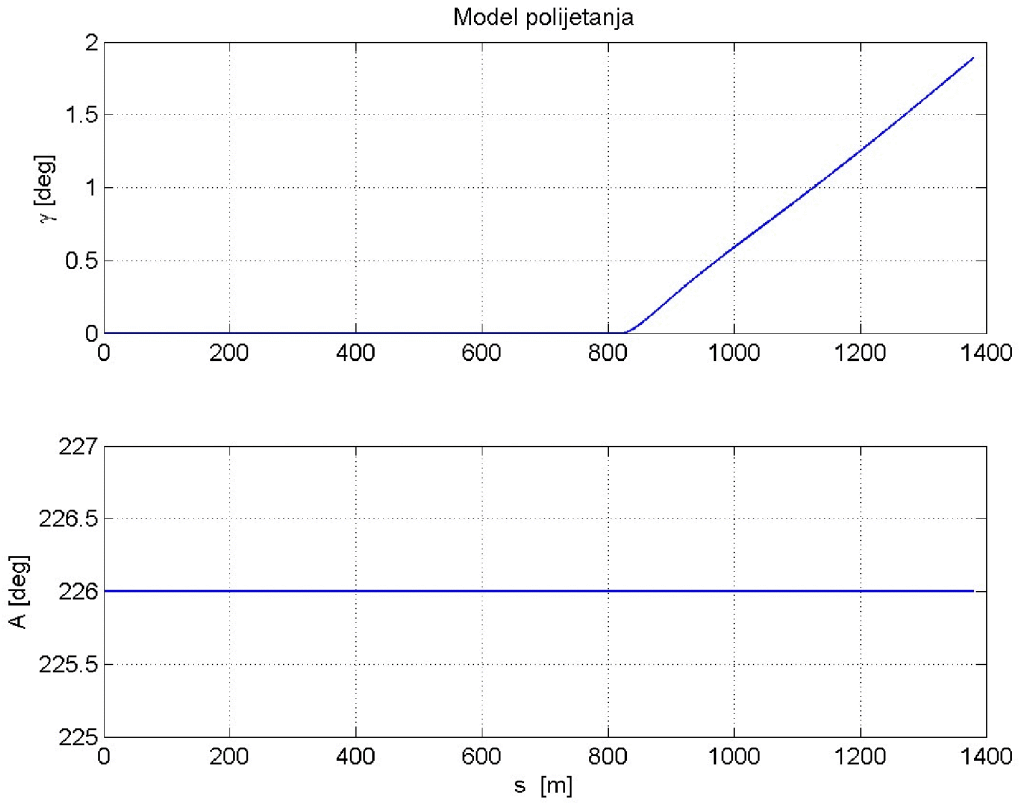
Na posljednjem dijagramu je prikazana promjena kutne brzine zrakoplova q oko osi zadnjih kotača. Vidimo da je tijekom zaleta ta brzina jednaka nuli, te da počne rasti u drugoj fazi prilikom početka rotacije zrakoplova, odnosno nakon odvajanja prednjeg kotača od površine piste.



Slika 5-4: Promjena brzine i visine zrakoplova tijekom polijetanja

Na slici (5-4) je prikazana promjena brzine i visine zrakoplova tijekom procesa polijetanja. Iz dijagrama se može očitati da zrakoplov na kraju procesa slijetanja ima brzinu od $V = 116.21\ m/s\ (\approx 420\ km/h)$ i visinu $h = 10\ m$. Ukupna dužina piste potrebne za polijetanje iznosi $s_{ukup} = 1380\ m$.

Sljedeća slika (5-5) prikazuje promjenu kuta penjanja γ i kurs polijetanja A. Kut penjanja počinje rasti nakon uzleta, dok je kurs polijetanja čitavo vrijeme konstantan i jednak je kursu piste ($A_{USS} = 226°$).

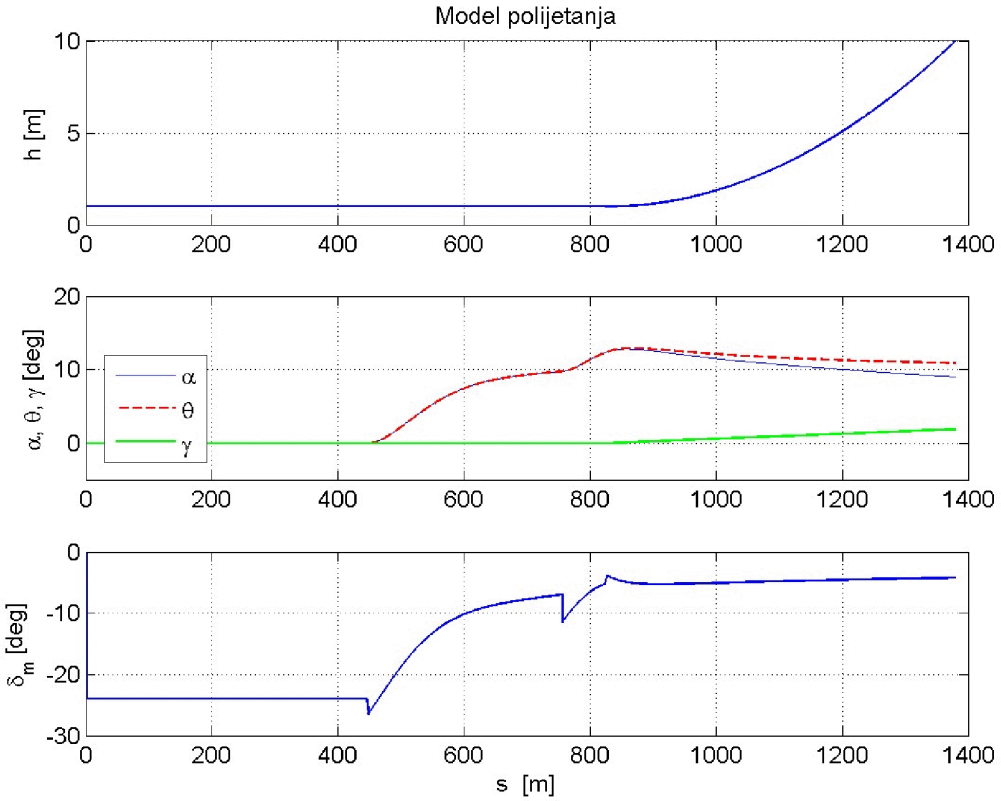


Slika 5-5: Kut penjanja γ i kurs A tijekom polijetanja

Na sljedećoj slici (5-6) su prikazani dijagrami koji pokazuju djelovanje ulazne funkcije **autopilot** na promjenu otklona kormila visine δ_m. Funkcija autopilota počinje djelovati na početku druge faze, a glavni joj je zadatak da preko sile uzgona kontrolira povećanje, odnosno promjenu kuta propinjanja θ.

Vidimo kako se tijekom rotacije, pred sam uzlet zrakoplova, kut propinanja stabilizira na približno $\theta \approx 10°$, da bi se pri uzletu povećao na otprilike $\theta \approx 12°$.

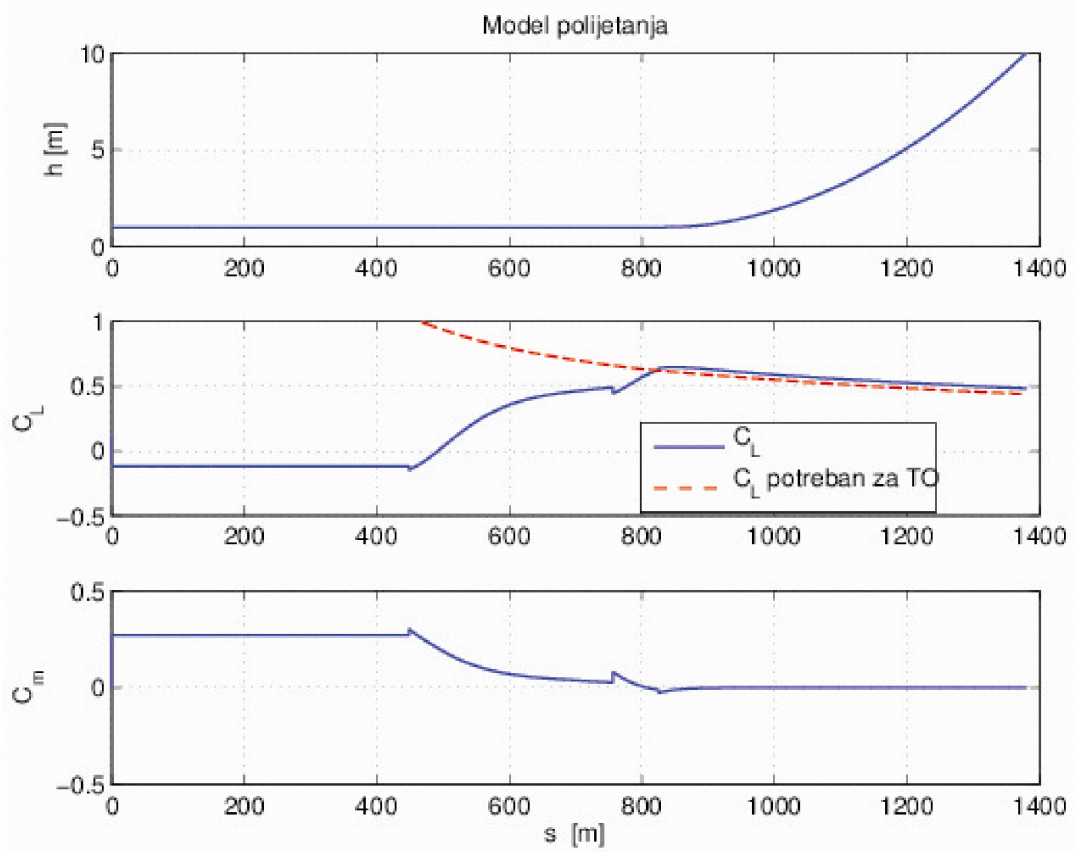
Nakon uzleta kut propinjanja počinje lagano opadati, što u usporedbi sa stvarnom situacijom polijetanja ne bi trebao biti slučaj. Ova mala greška numeričkog modela je posljedica funkcije autopilota.



Slika 5-6: Utjecaj funkcije autopilot na promjenu kuta propinjanja θ

Posljednja slika (5-7) prikazuje promjenu aerodinamičkih koeficijenata uzgona C_L i propinanja C_m tijekom polijetanja.

Na drugom dijagramu možemo vidjeti odnos koeficijenta uzgona C_L koji nastaje kao posljedica otklona kormila visine i koeficijenta uzgona koji je potreban za uzlet. Vidimo da uzlet zrakoplova nastupa kada se ove dvije krivulje presijeku, što se zatim vidi i na prvom dijagramu po povećanju visine.



Slika 5-7: Promjena aerodinamičkih koeficijenata tijekom polijetanja

5.1.2. Usporedba numeričkog modela polijetanja sa analitičkim rješenjima

Za analizu polijetanja analitičkim putem prema [1] potreban nam je podatak o brzini V_R koji računamo prema (2-4). Ovdje su nam potrebni podaci o koeficijentu uzgona i koeficijentu momenta propinjanja koji iznose $C_L = -0.008$ i $C_m = 0.23$. Brzina V_R u ovom slučaju iznosi:

$$V_R = \sqrt{\frac{2 \cdot 8650 \cdot 9.81 \cdot (0.89 + 0.04 \cdot 1.1)}{1.225 \cdot 23 \cdot [4.002 \cdot 0.23 - 0.008 \cdot (0.89 + 0.04 \cdot 1.1)]}} = 78.5\, m/s$$

Duljinu zaleta s_1 do odvajanja prednjeg kotača od piste, računamo prema sljedećoj formuli [1]:

$$s_1 = \frac{1}{2C} ln \frac{A + CV_R^2}{A + CV_0^2}$$

$$A = \frac{T_0}{m} - \mu g = \frac{60000}{8650} - 0.04 \cdot 9.81 = 6.544$$

$$C = -\frac{1.225 \cdot 23}{2 \cdot 8650} \cdot (0.0502 + 0.2631 \cdot (-0.008)^2 + 0.04 \cdot 0.008) = -0.0000823$$

$$s_1 = \frac{1}{2 \cdot (-0.0000823)} ln \frac{6.544 - 0.0000823 \cdot 78.5^2}{6.544 - 0.0000823 \cdot 0} = 490\, m$$

Ako uzmemo da je brzina uzleta $V_{TO} = 98\ m/s$, tada ukupnu duljinu piste s_g potrebnu za uzlet računamo prema sljedećoj formuli [1]:

$$s_g = s_1 + \frac{1}{2C} ln \frac{A + CV_{TO}^2}{A}$$

$$s_g = 490 + \frac{1}{2 \cdot (-0.0000823)} ln \frac{6.544 - 0.0000823 \cdot 98^2}{6.544} = 782\, m$$

Prema podacima iz tehničkog uputstva za zrakoplov MiG-21 [14], brzina pri kojoj treba doći do odvajanja prednjeg kotača od piste iznosi između *69.44 m/s* i *75 m/s* (*250km/h* i *270 km/h*), ovisno o početnoj konfiguraciji (masi) zrakoplova.

Brzina uzleta za početnu masu od *8650 kg* bi trebala iznositi *95.83 m/s* (*345 km/h*), a ukupna duljina potrebne piste do uzleta ($s_g = s_1 + s_2$) bi trebala iznositi *810 m*.

Ako bi se u formulu za analitičko rješenje duljine s_1 ubacila brzina V_R koju je dao naš numerički model, dobili bismo duljinu od *446 m* što je vrlo blizu numeričkog rezultata duljine od *448 m*. Razlika u duljini s_g je nešto veća, i to je zbog toga što se u analitičkom proračunu uzimaju prosječne vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata. U numeričkom modelu se aerodinamički koeficijenti mijenjaju tijekom zaleta i rotacije, te je zbog toga rezultat numeričkog modela bliži stvarnim podacima [14].

Usporedimo li analitička rješenja i podatke iz tehničkog uputstva [14] sa dobivenim numeričkim rezultatima, možemo zaključiti da numerički model polijetanja vrlo dobro opisuje stvarno gibanje zrakoplova u polijetanju.

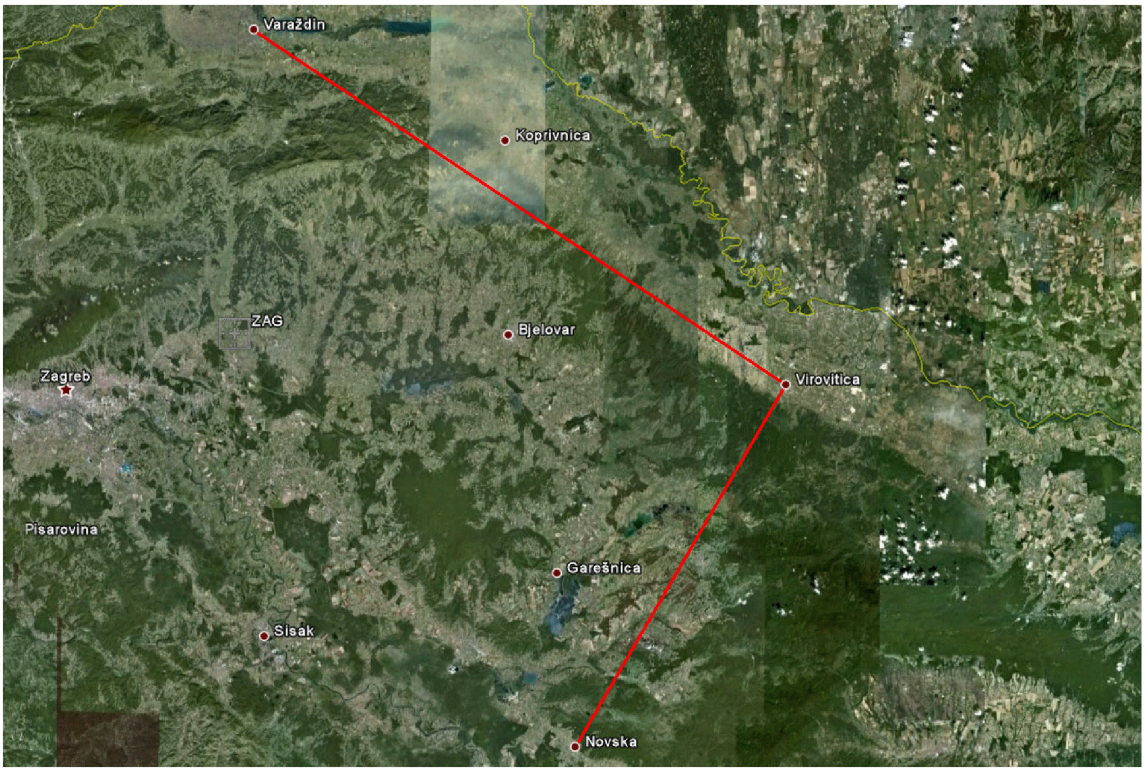
5.2. Analiza horizontalnog leta

Analizu numeričkog modela u horizontalnom modelu ćemo obaviti na dijelu navigacijskog leta kroz dvije etape navigacijske rute. Kao dio rute odabrat ćemo let po navigacijskim točkama Novska-Virovitica-Varaždin. Zadana visina rute je $h = 3000\ m$, a brzina po ruti je $V = 800\ km/h$.

Za ulazni vektor stanja $X(t_0) = [x_0,\ y_0,\ h_0,\ V_0,\ A_0,\ \gamma_0,\ \theta_0,\ q_0,\ m_0]$ uzimamo sljedeće početne podatke:

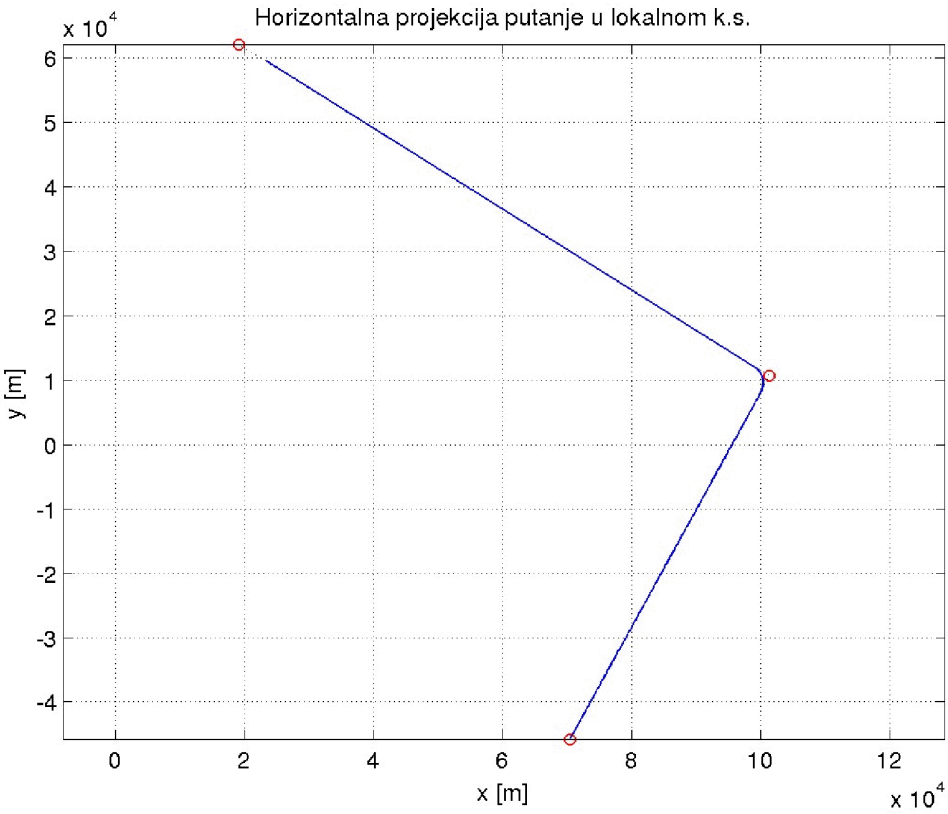
$$X(t_o) = [70448, -45749, 3000, 222.22, 30, 0, 0, 0, 8100]$$

Prva etapa rute je od Novske prema Virovitici u kursu $A_0 = 030°$, a duljina etape je $63.4\ km$. Druga etapa ide od Virovitice prema Varaždinu u kursu $A_1 = 304°$, sa duljinom etape od $97\ km$. Prije navigacijske točke Virovitica je potrebno izvesti lijevi horizontalni zaokret kako bi se izašlo u kurs sljedeće etape prema Varaždinu.



Slika 5-8: Horizontalni let na navigacijskoj ruti

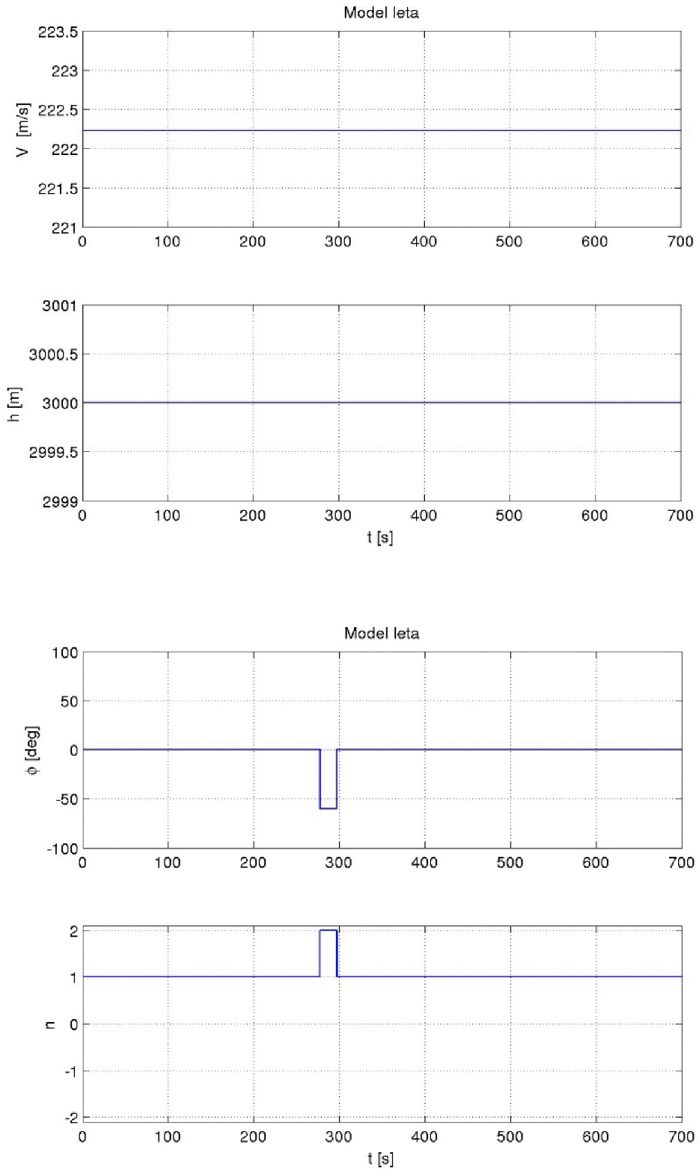
Primjenom numeričkog modela ravnotežnog leta dobiveni su rezultati koje prikazujemo u sljedećim dijagramima.



Slika 5-9: Horizontalna projekcija putanje rute

Na slici (5-9) je prikazana horizontalna projekcija putanje koja opisuje gibanje središta mase zrakoplova u numeričkom modelu ravnotežnog leta. Putanja je prikazana u lokalnom koordinatnom sustavu (koordinatni sustav radara) koji ima ishodište u točki polijetanja zrakoplova.

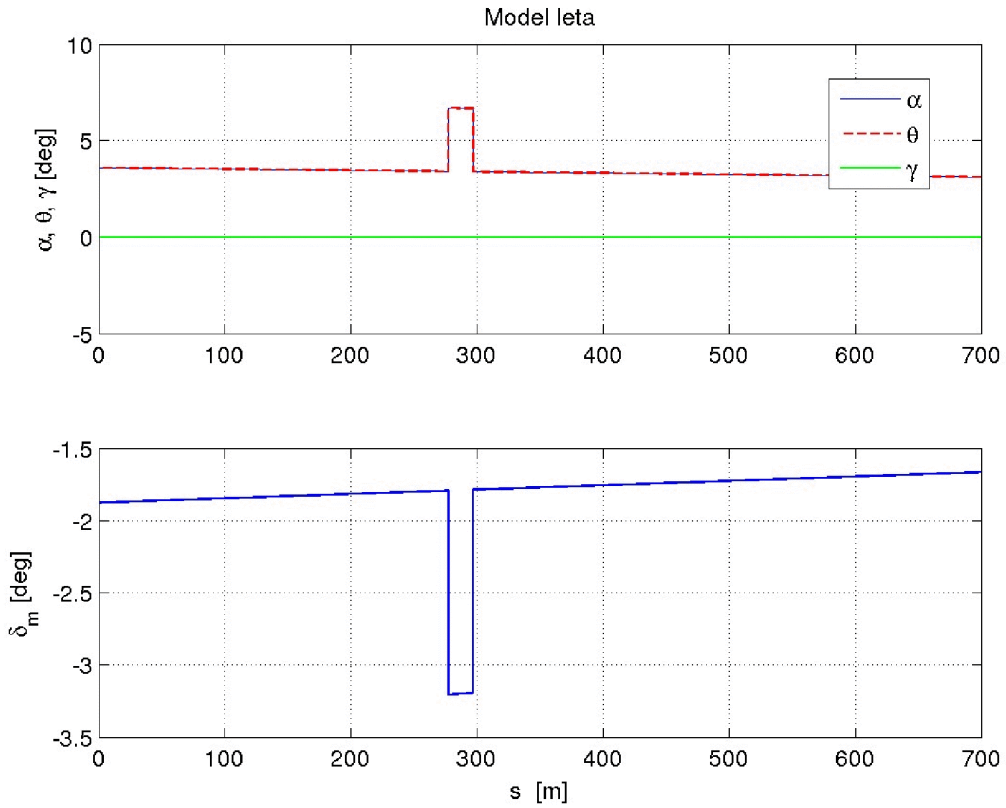
Može se uočiti kako zrakoplov prije dolaska na drugu navigacijsku točku (Virovitica) kreće u lijevi zaokret, kako bi izašao u kurs sljedeće etape prema trećoj navigacijskoj točki Varaždin.



Slika 5-10: Promjena parametara (*V, h, Φ, n*) tijekom leta

Slika (5-10) prikazuje promjenu parametara tijekom leta po ruti. Prva dva dijagrama pokazuju kako zrakoplov cijelo vrijeme održava horizontalni let bez promjene visine, održavajući konstantnu brzinu leta *V = 800 km/h* (*222.22 m/s*).

Na trećem i četvrtom dijagramu vidimo promjenu kuta valjanja *Φ* i koeficijenta opterećenja *n* u trenutku kada zrakoplov izvodi horizontalni zaokret.



Slika 5-11: Promjena kutova (α, θ, γ) i otklona kormila visine δ_m

Na gornjoj slici (5-11) možemo vidjeti kako se tijekom leta mijenja napadni kut α i kut propinjanja θ, dok kut penjanja ostaje konstantan ($\gamma = 0$). U vrijeme kada zrakoplov izvodi horizontalni zaokret imamo promjenu otklona kormila visine δ_m koji se povećava da bi se dobila veća sila uzgona potrebna u zaokretu. U istom trenutku nastupa i povećanje kuta propinjanja i napadnog kuta.

Tijekom leta se postepeno smanjuje otklona kormila visine δ_m, a to objašnjavamo činjenicom da s vremenom zrakoplov postaje lakši (zbog potrošnje goriva), te mu za manju masu treba i manja sila uzgona L.

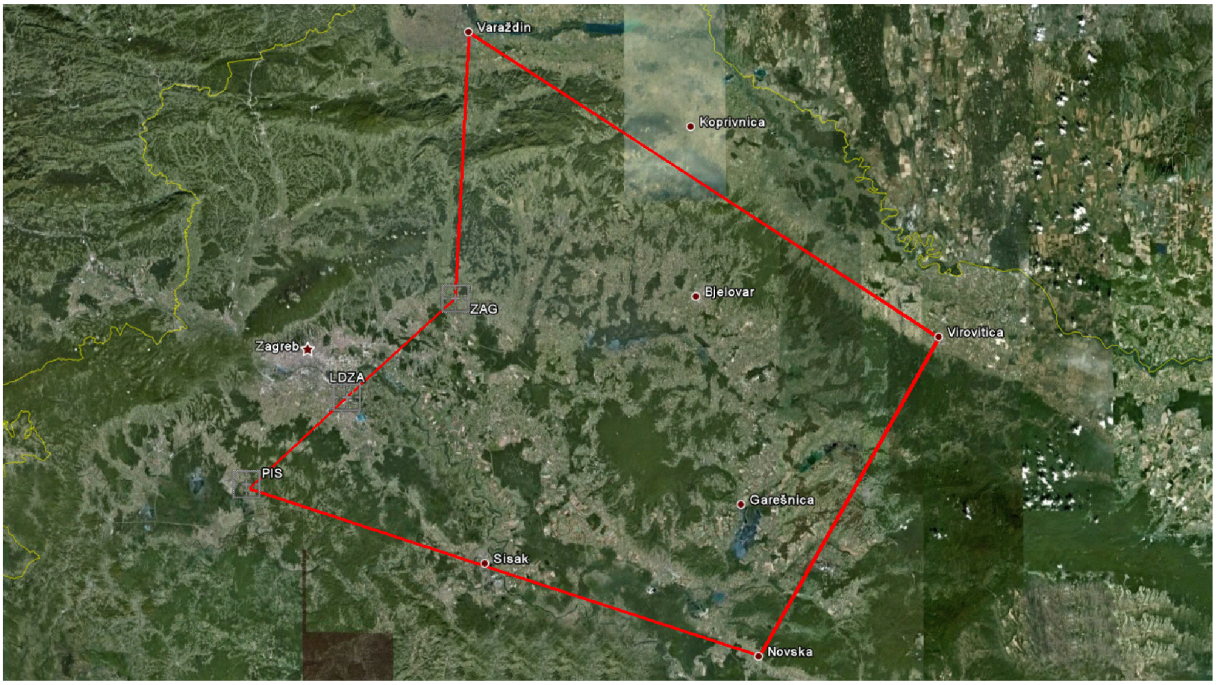
5.3. Analiza misije

U ovom primjeru ćemo izvršiti analizu numeričkog modela kroz čitavu jednu misiju. Zadana misija odvija se po sljedećoj navigacijskoj ruti:

LDZA – PIS NDB – Novska – Virovitica – Varaždin – ZAG VOR – LDZA

Zadana visina po navigacijskoj ruti je $h = 2000\ m$, sa zadanom brzinom leta zrakoplova $V = 800\ km/h$ ($222.22\ m/s$). Polijetanje se izvodi sa aerodroma Pleso (LDZA), a u upotrebi je staza 23 ($A_0 = 226°$). Nakon polijetanja zrakoplov penje u pravcu prema NDB PIS, u kursu $A = 226°$ sve do zadane visine rute i pri tome ubrzava do $V = 800\ km/h$.

Nakon postizanja zadane visine i brzine, zrakoplov dalje leti horizontalno po ruti održavajući stalnu brzinu, te izvodi horizontalne zaokrete na navigacijskim točkama rute. Nakon navigacijske točke Varaždin zrakoplov spušta na visinu $h = 500\ m$ prema točki ZAG VOR. Na toj visini zrakoplov priprema konfiguraciju za slijetanje i zatim nastavlja sa prilazom prema aerodromu Pleso za slijetanje na stazu 23.



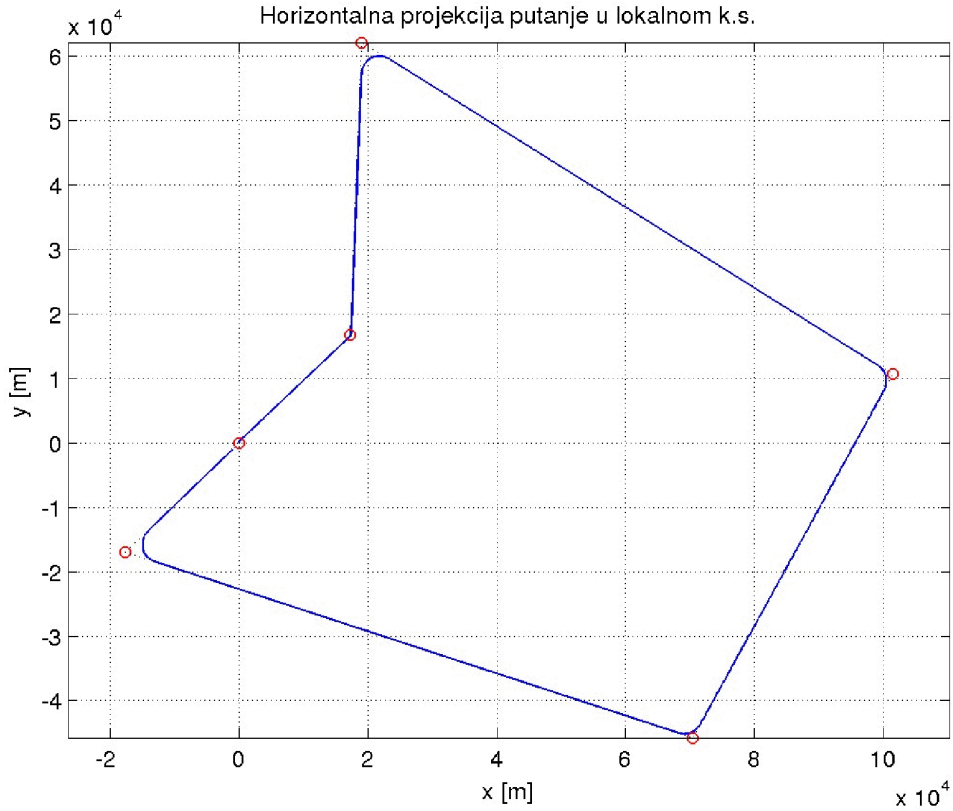
Slika 5-12: Navigacijska ruta

U sljedećoj tablici su za zadane navigacijske točke dani podaci o geografskim koordinatama, te odgovarajuće koordinate u lokalnom koordinatnom sustavu.

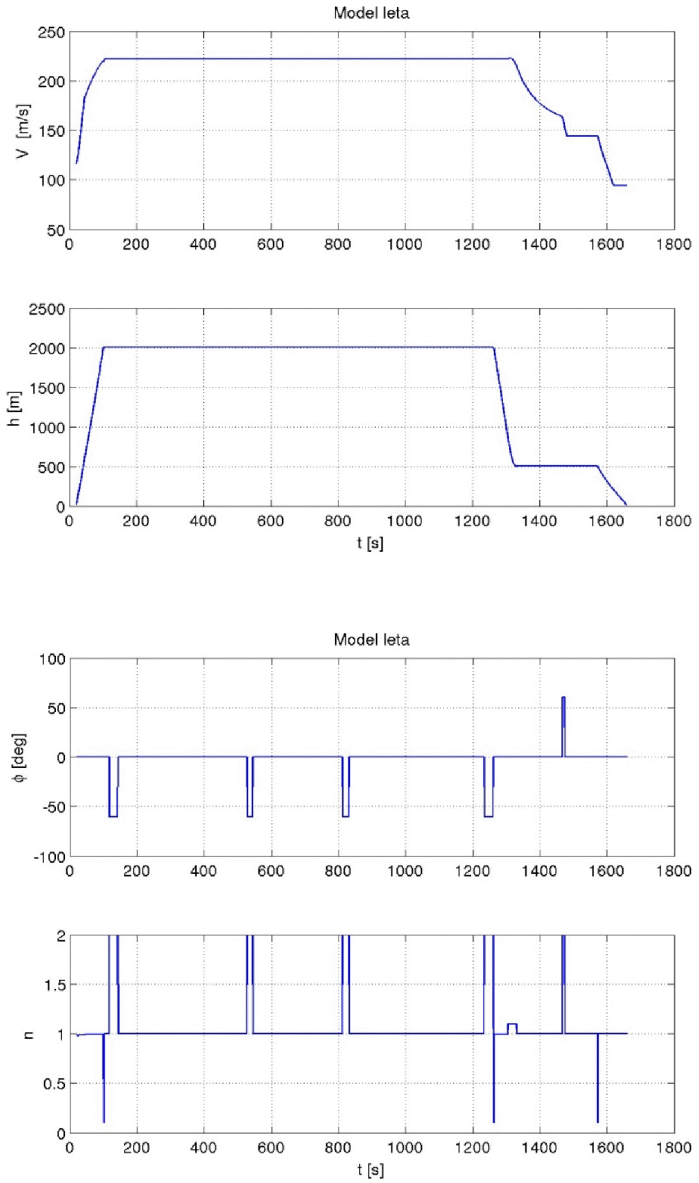
Tablica (5-1): Koordinate navigacijskih točaka

Nav. točka	geog. širina	geog. dužina	x_L (m)	y_L (m)
LDZA	45°44'57"	16°04'44"	0	0
NDB PIS	45°35'47"	15°51'15"	-17624	-17019
Novska	45°20'03"	16°58'42"	70448	-45749
Virovitica	45°50'11"	17°23'03"	101441	10662
Varaždin	46°18'28"	16°19'39"	19004	62160
VOR ZAG	45°53'56"	16°18'10"	17264	16672

Numerički model daje horizontalnu projekciju prema sljedećoj slici (5-13)

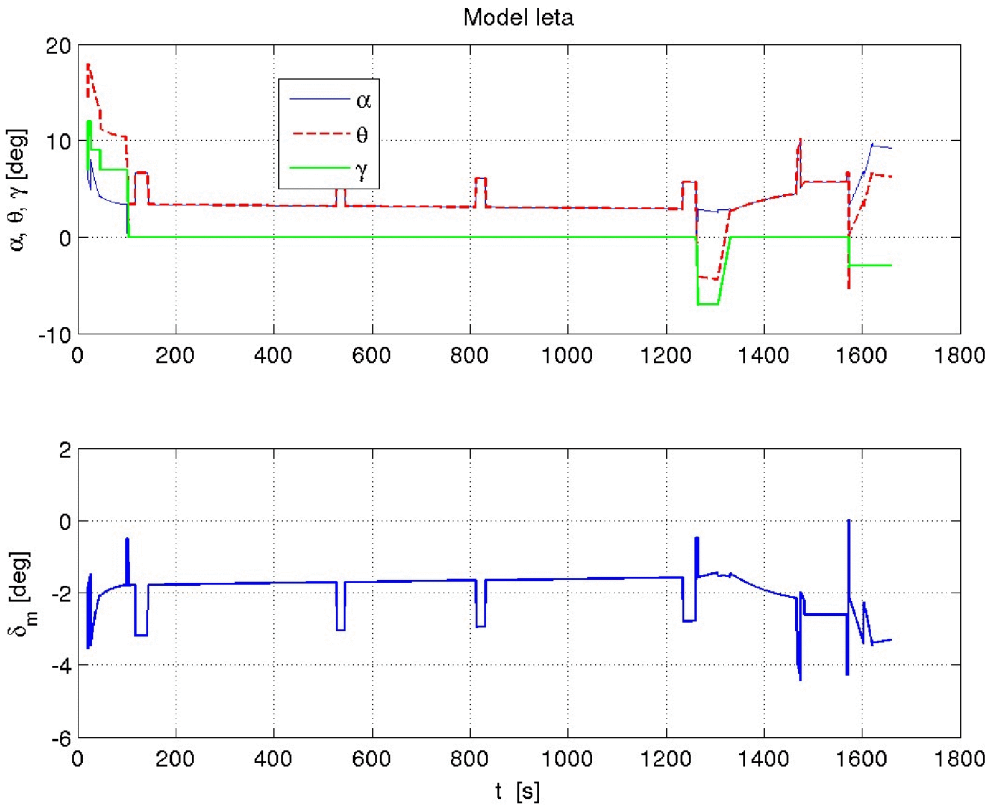


Slika 5-13: Horizontalna projekcija navigacijske rute



Slika 5-14: Promjena parametara tijekom leta po navigacijskoj ruti

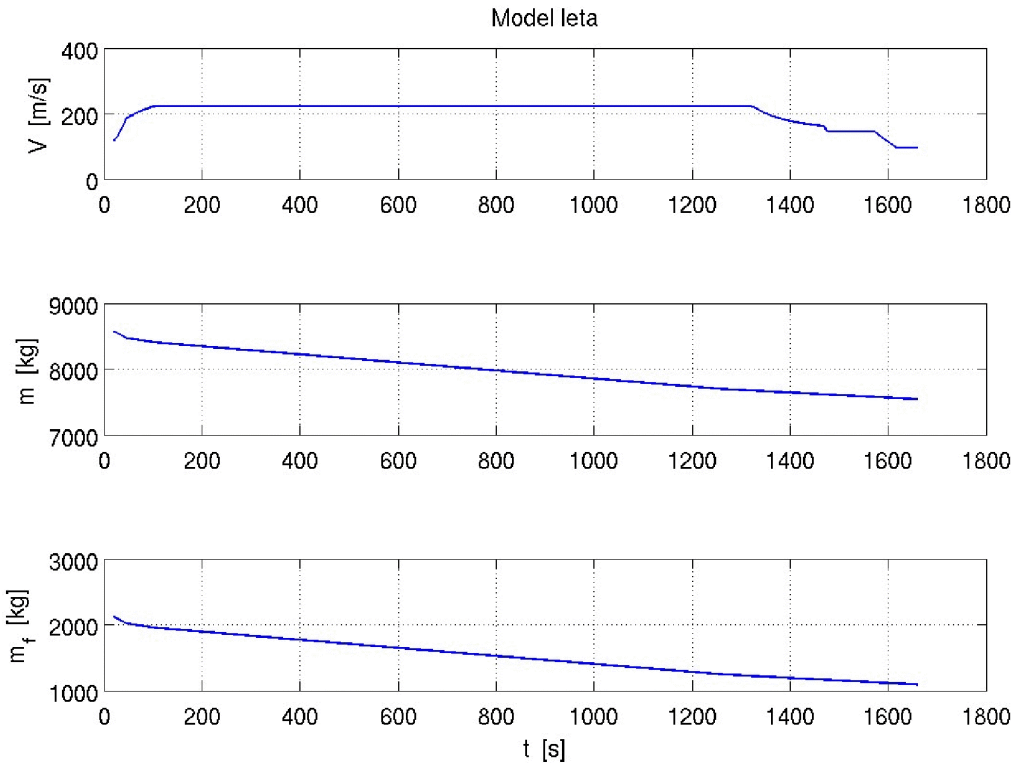
Slika (5-14) prikazuje promjenu parametara leta po navigacijskoj ruti sve do trenutka kada zrakoplov treba započeti proces slijetanja. Prva dva dijagrama pokazuju kako zrakoplov nakon penjanja na zadanu visinu održava horizontalni let sa stalnom brzinom, a zatim spušta do visine početka slijetanja. Treći i četvrti dijagram prikazuju promjenu kuta valjanja Φ i koeficijenta opterećenja n u trenutcima kada zrakoplov izvodi horizontalne zaokrete.



Slika 5-15: Promjena kutova (α, θ, γ) i otklona kormila visine δ_m po ruti

Gornja slika (5-15) prikazuje promjenu kutova (α, θ, γ) i otklona kormila visine δ_m tijekom leta po ruti. Veći otklon kormila visine δ_m i kutova α i θ nastaje u trenutcima kada zrakoplov izvodi horizontalni zaokret, jer je tada potrebna veća sila uzgona.

Otklon kormila visine δ_m se postepeno smanjuje, jer zbog potrošnje goriva zrakoplov s vremenom ima manju masu, pa mu je potrebna i manja sila uzgona za održavanje horizontalnog leta.



Slika 5-16: Promjena ukupne mase zrakoplova tijekom leta

Slika 5-16 prikazuje kako se tijekom leta mijenja ukupna masa zrakoplova, odnosno količina goriva (drugi dijagram). Na početku dijagrama, odnosno na samom početku leta, možemo primjetiti nešto veći pad mase. To je posljedica uporabe forsaža na polijetanju i u početnoj fazi penjanja, pri čemu je potrošnja goriva znatno veća (oko 50%)

Tijekom leta po ruti imamo gotovo konstantnu potrošnju goriva, budući da se održava konstantna brzina na stalnoj visini. Neznatno veću potrošnju imamo jedino tijekom izvođenja horizontalnih zaokreta kada je potrebna nešto veća snaga za održavanje visine.

U zadnjem dijelu leta se može primjetiti manja potrošnja goriva koja nastaje u pri spuštanju zrakoplova prema visini slijetanja. U tom spuštanju je snaga motora većinom na minimumu (položaj komande gasa na "SPS"), pa je stoga i potrošnja goriva vrlo mala.

5.3.1. Provjera rezultata numeričkog modela

Za provjeru rezultata numeričkog modela, napravit ćemo usporedbu sa proračunima koji se koriste u letačkoj praksi [14], [15]. Usporedit ćemo rezultate potrošnje goriva i vremena trajanja leta koje smo dobili numeričkim modelom sa podacima koje dobivamo tabličnim proračunima (prilog 2).

Ukupna duljina rute iznosi *349 km*, a po etapama duljine iznose: LDZA – NDB PIS *25 km*, NDB PIS – Novska *94 km*, Novska – Virovitica *63 km*, Virovitica – Varaždin *97 km*, Varaždin – VOR ZAG *46 km* i VOR ZAG – LDZA *24 km*. Za polijetanje i penjanje do visine $h = 2000\ m$ potrebno je *280 l* goriva, a tu visinu zrakoplov postigne za *1 min* i *45 sek* i pri tome prijeđe put od *8 km*. Za spuštanje je potrebno *13 l* goriva, vrijeme od *1 min* i *10 sek* i put od *10 km*.

Ukupna duljina rute koja se odvija na visini $h = 2000\ m$ je *331 km*. Potrošnja goriva po ruti na visini $h = 2000\ m$ i pri brzini $V = 800\ km/h$ iznosi:

$$331\ km \cdot 2.95\ l/km = 976.45\ l$$

Ukupna potrošnja goriva za čitavu misiju iznosi: $280\ l + 976.45\ l + 13\ l = 1269.45\ l$. Ako ovaj iznos pomnožimo sa gustoćom goriva $\rho_g = 0.8\ kg/m^3$ dobivamo masu goriva od *1015.56 kg*.

Ukupno trajanje leta na visini $h = 2000\ m$ iznosi *24 min* i *50 sek*. Ako tome dodamo vrijeme potrebno za penjanje i vrijeme potrebno za spuštanje, dobivamo ukupno trajanje leta od *27 min* i *45 sek*. Iako se u navedenim uputstvima [14], [15] koriste približni proračuni, njihova točnost je za praktičnu primjenu sasvim zadovoljavajuća.

Usporedimo li podatke numeričkog modela (potrošeno *1108 kg* goriva) sa podacima dobivenim tabličnim proračunima, možemo uočiti veliku podudarnost dobivenih rezultata. Razlika u rezultatu potrošenog goriva iznosi 9%, što je u granici točnosti sa kojom instrument za mjerenje potrošnje goriva pokazuje potrošnju u zrakoplovu.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu je opisan numerički model leta, te njegova primjena za planiranje misije borbenog zrakoplova. Numerički model opisuje trajektoriju središta mase zrakoplova tijekom njegovog leta. Pri opisu trajektorije središta mase korištene su jednadžbe gibanja u ravnotežnom letu.

Numerički model je sastavljen od tri dijela (polijetanje, ravnotežni let, slijetanje) i može se izvoditi u cjelini ili svaki dio zasebno. Primjenom i analizom numeričkog modela mogu se donijeti sljedeći zaključci:

- Numerički model polijetanja može dati podatke o brzini odvajanja prednjeg kotača V_R, brzini uzleta V_{TO}, te ukupnoj duljini piste s_g potrebnoj za uzlet zrakoplova.
- Tijekom cijelog leta iz modela se može dobiti izlazni vektor stanja sa podacima o: položaju, brzini leta, kursu, kutu penjanja/poniranja, kutu propinjanja, prijeđenom putu i masi zrakoplova.
- Numerički model slijetanja može dati podatke o brzini slijetanja i o ukupnoj duljini piste potrebnoj za slijetanje.
- Primjenjeni numerički model polijetanja uzima u obzir gibanje oko središta mase (oko poprečne osi), što se ne razmatra u drugoj literaturi, no za tu primjenu je potrebna upravljačka veličina (otklon kormila visine). Točnije poklapanje rezultata u polijetanju ostvarilo bi se boljom procjenom upravljačke veličine.
- U bilo kojem trenutku leta, numerički model može dati podatke o optimalnim režimima leta, tj. potrebnu brzinu i visinu za maksimalni dolet, i maksimalno trajanje leta sa preostalom količinom goriva. Isto tako mogu se dobiti podaci o iznosu makisimalnog doleta i iznosu maksimalnog trajanja leta.
- Usporedbom rezultata numeričkog modela sa analitičkim rješenjima, te sa poznatim podacima iz tehničkog uputstva zrakoplova [14], [15], može se ustvrditi zadovoljavajuća točnost numeričkog modela u opisu stvarnog gibanja zrakoplova.

- Prednost numeričke analize je u jednostavnosti i brzini pripreme navigacijske rute. Isto tako ona omogućava lagano unošenje izmjena u postojećim rutama, te računanje optimalnih režima u odabranim točkama rute.
- Numerički model leta može poslužiti kao osnova pri izradi računalne aplikacije za navigacijsko planiranje leta, koja bi u praktičnoj primjeni mogla olakšati i ubrzati cjelokupan proces pripreme leta.
- Čitav numerički model je napravljen modularno, što znači da se uz promjenu modela zrakoplova (aerodinamika, motor, inercijski model) može uz korištenje istih jednadžbi gibanja prilagoditi za neki drugi zrakoplov.

7. PRILOZI

PRILOG 1: Zrakoplov MiG-21 bis

Zrakoplov **MiG-21 bis** je nadzvučni lovac-presretač. Osnovna namjena mu je presretanje ciljeva u zraku u svim meteorolškim uvjetima, danju i noću. Po konstrukciji zrakoplov je potpuno metalni slobodno noseći srednjekrilac sa delta krilom, strelastim repnim površinama i upravljivim stabilizatorom.

Zrakoplov je ruske proizvodnje, a oznaka **bis** predstavlja posljednji model ovog lovca koji se proizvodio od 1972. godine. U sastavu Hrvatskog ratnog zrakoplovstva se nalazi inačica ovog zrakoplova pod oznakom **MiG-21 bisD**, koji je modernizirana verzija osnovnog **bis** modela. Modernizacija je provedena između 2001. i 2003. godine od strane rumunjske tvrtke Aerostar, a uključivala je uglavnom zamjenu zrakoplovnih instrumenata, avionike i navigacijskih uređaja. Konstrukcijske i aerodinamičke razlike (nove antene za navigacijske uređaje), te inercijske karakteristike (ukupna masa, položaj središta mase) su u odnosu na osnovni model **bis** zanemarive.

Slika 7-1: MiG-21 bisD

U sljedećoj tablici su prikazani osnovni podaci i taktičko-tehničke karakteristike zrakoplova MiG-21 bis.

Tablica 7-1: Taktičko-tehničke karakteristike zrakoplova MiG-21 bis

Osnovne karakteristike	
Posada	1 pilot
Duljina	15.0 m (sa pitot cijevi)
Raspon krila	7.154 m
Visina	4.125m
Površina krila	23 m^2
Težina prazan	5,339 kg
Težina na polijetanju	8,725 kg
Motor	Tumanskiy R25-300, potiska 40.21 kN (69.62 kN na forsažu)
Performanse zrakopova	
Maksimalna brzina	2237 km/h
Maksimalna brzina (Ma)	Mach 2.05
Dolet (unutarnji spremnici)	1,210 km
Plafon leta	17,800 m
Max. brzina uzdizanja	225 m/s
Max. koef. opterećenja	8 g
Naoružanje	
Ugrađeni top kalibra 23mm **GSh-23** sa 250 granata	
2 vanjska krilna nosača za nošenje vođenih i nevođenih raketa, bombi i spremnika goriva	
2 unutarnja krilna nosača za nošenje vođenih i nevođenih raketa, bombi	
1 podtrupni nosač za nošenje spremnika goriva	

Prilog 2: Tablica za proračun potrošnje goriva na zrakoplovu MiG-21 bis

Tablica 7-2: Tablica za proračun potrošnje goriva (lit/km)

H (m)			200		500		1000		2000		3000		5000		7000	
UM		bis	485		475		460		450		425		370		330	
8		9	3,61	3,68	3,52	3,58	3,40	3,43								
koef	Vs	13		3,97		3,85		3,72								
10	500	koef	3,72		3,65		3,53									
		17		4,25		4,15		3,98								
Vi (km/h)			590		575		560		540		510		450		405	
			3,48	3,56	3,37	3,43	3,22	3,31	3,03	3,04	2,85	2,77				
Vs				3,82		3,72		3,55		3,26		2,98				
600 km/h			3,60		3,51		3,35		3,16		2,97					
				4,16		4,05		3,87		3,56		3,25				
Vi (km/h)			690		670		650		630		595		535		480	
			3,42	3,52	3,31	3,36	3,13	3,22	2,87	2,94	2,62	2,67	2,25	2,27	1,93	
Vs				3,78		3,66		3,48		3,20		2,91		2,47		
700 km/h			3,56		3,45		3,27		3,00		2,73		2,35		2,06	
				4,15		4,01		3,82		3,50		3,17		2,71		
Vi (km/h)			785		765		745		720		680		615		550	
			3,43	3,50	3,35	3,38	3,17	3,25	2,89	2,95	2,60	2,63	2,18	2,22	1,86	1,91
Vs				3,86		3,73		3,56		3,22		2,88		2,42		2,13
800 km/h			3,58		3,48		3,31		3,01		2,71		2,30		1,97	
				4,25		4,12		3,91		3,55		3,18		2,70		2,35
Vi (km/h)			890		870		850		810		780		705		635	
			3,68	3,70	3,56	3,62	3,42	3,50	3,08	3,14	2,73	2,78	2,25	2,28	1,90	1,93
Vs				4,18		4,03		3,88		3,49		3,11		2,56		2,20
900 km/h			3,86		3,72		3,57		3,22		2,87		2,37		2,03	
				4,70		4,51		4,35		3,90		3,46		2,90		2,47

8. LITERATURA

[1] Slobodan Janković. Mehanika leta zrakoplova, Zagreb, 2001.

[2] Nguyen X. Vinh. Flight Mechanics of high-performance aircraft, New York, 1993.

[3] Nguyen X. Vinh. Integrals of the motion for optimal trajectories in atmospheric flight, AIAA 1972-931, Palo Alto, 1972.

[4] Barnes W. McCormick. Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics, 1995.

[5] Bandu N. Pamadi. Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes, 1998.

[6] Maido Saarlas. Aircraft Performance, New Jersey, 2007.

[7] Ulf Ringertz. Flight Testing an Optimal Trajectory for the Saab J35 Draken, J. Aircraft Vol. 37, No. 1, 2000., pp 187-189

[8] Angela Nuic, Chantal Poinsot, Mihai-George Iagaru. Advanced Aircraft Performance Modeling for ATM: Enchancements to the BADA Model, 24th Digital Avionics System Conference, Washington, 2005.

[9] Janković, S., Vrdoljak, M. Aerodinamički model nadzvučnog zrakoplova MiG21, STL-10-1100-01, Soko Z.I., Zagreb, 2002.

[10] Grganović, K. Model potiska zrakoplova Mig21, STL-10-2000-00, Soko Z.I., Zagreb, 2002.

[11] Grganović, K. Model potrošnje goriva zrakoplova Mig21, STL-10-2100-00, Soko Z.I., Zagreb, 2002.

[12] KARAKTERISTIKE KORIŠĆENJA MOTORA MM-16 I MM-17, Savezni sekretarijat za narodnu odbranu 1987

[13] Salai, I., Vrdoljak, M. Maseni model zrakoplova Mig21, STL-10-1200-00, Soko Z.I., Zagreb, 2008.

[14] Upravljanje avionom MiG-21 bis, Zagreb 2001.

[15] PRORAČUN DOLETA I TRAJANJE LETA AVIONA L-17 01.VTUP.009/02.01; Komanda ratnog vazduhoplovstva i protuvazdušne odbrane.

[16] J. B. Russel. Performance and Stability of Aircraft, 1996.

[17] John D. Anderson. Aircraft Performance and Design, 1999.

[18] David G. Hull. Fundamentals of Airplane Flight Mechanics, New York, 2007.

[19] Kazuhiro Horie, Bruce A. Conway. Optimization for Fighter Aircraft Vertical-Plane Maneuvering Using Poststall Flight, J. Aircraft Vol. 37, No. 6, 2000., pp 1017-1021

ŽIVOTOPIS

Ime i prezime:	Ivan Zovak
Datum rođenja:	25. Prosinac 1978.
Mjesto rođenja:	Kneževo, Hrvatska
Bračni status:	Oženjen
Osnovna škola:	1985.-1993.
	Beli Manastir, Samobor, Višnjevac
Srednja škola:	1993.-1997.
	"III. Gimnazija", Osijek
Vojni rok:	Aktivni pripadnik OSRH
Studij:	1997.-2002.
	Sveučilište u Zagrebu
	Fakultet prometnih znanosti
	Smjer: Aeronautika
Poslijediplomski studij:	2002.-
	Sveučilište u Zagrebu
	Fakultet strojarstva i brodogradnje
	Smjer: Teorija konstrukcija
Namještenje:	srpanj 2002.-
	Ministarstvo obrane RH, Hrvatsko ratno zrakoplovstvo
	Zaposlen kao vojni pilot
Znanje jezika:	Engleski

BIOGRAPHY

Name and surname:	Ivan Zovak
Date of birth:	25th December 1978.
Place of birth:	Kneževo, Croatia
Marital status:	Married
Elementary school:	1985.-1993.
	Beli Manastir, Samobor, Višnjevac
High school:	1993.-1997.
	"III. Gimnazija", Osijek
Military service:	Active member of military service
Study:	1997.-2002.
	University of Zagreb
	Faculty of Transport Engineering
	Study of Aeronautical Engineering
Postgraduate study:	2002.-
	University of Zagreb
	Faculty of Mechanical Engineering
	and Naval Architecture
Employment:	July 2002.-
	Ministry of Defence, Croatian Air Force
	Employed as military pilot
Language:	English