

Razvoj postupka određivanja materijalnih parametara hiperelastičnog modela iz pokusa istezanje - tlak

Knapp, Iskra

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:279084>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Iskra Knapp

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.

Student:

Iskra Knapp

Zagreb, 2020.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru, Prof. dr. sc. Igoru Karšaju, te asistentima Toniju Škugoru, Mag. Ing., Lani Virag, Dr. sc. i Mariji Smoljkić, Dr. sc. na pomoći, savjetima, razumijevanju i izdvojenom vremenu tijekom izrade ovog rada.

Posebno se zahvaljujem roditeljima i cijeloj obitelji na velikoj podršci i razumijevanju tijekom preddiplomskog i diplomskog studija.

Zahvaljujem se također kolegama i prijateljima koji su uvijek olakšavali i uljepšavali studentske dane. Velika zahvala i kolegici Tini Panić na pomoći prilikom izrade ovoga rada.

Iskra Knapp



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602 - 04 / 20 - 6 / 3	
Ur. broj: 15 - 1703 - 20 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Iskra Knapp** Mat. br.: 0035198380

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Razvoj postupka određivanja materijalnih parametara hiperelastičnog modela iz pokusa istezanje - tlak**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Mechanical characterization of hyperelastic material model from extension – inflation test**

Opis zadatka:

Test istezanje – tlak je eksperimentalno ispitivanje u kojem se cilindrična geometrija osno isteže te potom opterećuje unutarnjim tlakom. Tijekom izvođenja eksperimentalnog ispitivanja bilježe se promjena promjera cilindra, unutarnjeg tlaka i aksijalne sile. Zatim se, iz podataka dobivenih eksperimentalnim ispitivanjem, određuju materijalni parametri modela. Ovakav tip ispitivanja najčešće se provodi za različita biološka meka tkiva te elastomere.

Razvojem biomedicinskog inženjerstva, pomoću metode vremenski razlučene 3D fazno kontrastne magnetske rezonance (4D pcMRI), moguće je bilježiti promjenu promjera arterija kod čovjeka. Uz dodatno mjerenje tlaka tijekom srčanog ciklusa, i podatke o promjeru tijekom istog, moguće je odrediti materijalne parametre koji daju mehaničku karakterizaciju određene arterije. Prednost ove metode je u neinvazivnosti što znači da nije potreban uzorak tkiva za eksperimentalno ispitivanje iz kojeg bi se odredili materijalni parametri.

U ovom radu potrebno je, koristeći podatke iz numeričkih simulacija, razviti postupak određivanja materijalnih parametara za različite hiperelastične modele. Istovremeno je potrebno ispitati utjecaj različitih eksperimentalnih parametara (nepoznato aksijalno predistezanje, točnost mjerenja tlaka i sl.) na točnost određivanja parametara materijala.

Literatura i potrebni podaci bit će dodijeljeni od strane mentora prilikom izrade diplomskog rada.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

24. rujna 2020.

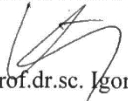
Datum predaje rada:

26. studenoga 2020.

Predviđeni datum obrane:

30.11. – 4.12.2020.

Zadatak zadao:


Prof. dr. sc. Igor Karšaj

Predsjednica Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	IV
POPIS TABLICA.....	VII
POPIS OZNAKA	VIII
SAŽETAK.....	X
SUMMARY	XI
1. Uvod	1
2. Krvožilni sustav	2
3. Struktura arterijske stijenke	3
3.1. Intima	3
3.2. Medija	4
3.3. Adventicija	4
3.4. Mehanička svojstva arterijske stijenke	5
4. Cilj rada	7
5. Osnove mehanike kontinuuma	8
5.1. Tenzor gradijenta deformiranja.....	9
5.2. Tenzori deformiranosti.....	10
5.3. <i>Cauchyev</i> tenzor naprezanja.....	10
5.4. Arterijska stijenka opterećena unutarnjim tlakom i aksijalnom silom.....	11
5.5. Hiperelastični materijalni modeli.....	13
5.6. <i>Neo-Hooke</i> materijalni model	14
5.7. <i>Mooney-Rivlin</i> materijalni model.....	14
5.8. <i>Holzapfel-Gasser-Ogden</i> materijalni model	15
6. Postupak određivanja materijalnih parametara.....	17
6.1. Funkcija cilja.....	18

6.1.1.	Izvod tlaka P po materijalnim modelima	18
6.1.1.1.	Modelirani tlak za <i>Neo-Hooke</i> funkciju energije deformiranja	18
6.1.1.2.	Modelirani tlak za <i>Mooney-Rivlin</i> funkciju energije deformiranja.....	20
6.1.1.3.	Modelirani tlak za HGO funkciju energije deformiranja.....	21
6.1.2.	Izvod aksijalne sile N i reducirane sile F po materijalnim modelima.....	23
6.1.2.1.	Modelirana reducirana aksijalna sila za <i>Neo-Hooke</i> funkciju energije deformiranja.....	23
6.1.2.2.	Modelirana reducirana aksijalna sila za <i>Mooney-Rivlin</i> funkciju energije deformiranja.....	24
6.1.2.3.	Modelirana reducirana aksijalna sila za <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> funkciju energije deformiranja	25
6.1.3.	Konačni izrazi za izračun tlakova i sila po materijalnim modelima.....	26
7.	Metoda konačnih elemenata	28
7.1.	Heksaedarski konačni element.....	28
8.	Simulacija eksperimenta.....	30
8.1.	Postupak zadavanja simulacije.....	30
8.1.1.	Geometrija.....	31
8.1.2.	Materijalni parametri.....	31
8.1.3.	Koraci predistezanja i opterećenja	33
8.1.4.	Rubni uvjeti.....	34
8.1.5.	Predistezanje i opterećenje.....	34
8.1.6.	Mreža konačnih elemenata.....	36
8.2.	Konvergencija	37
8.2.1.	Utjecaj broja konačnih elemenata po debljini stijenke na konačni rezultat.....	37
8.2.2.	Utjecaj broja konačnih elemenata po obodu stijenke na konačan rezultat	39
8.2.3.	Iznos tlaka na unutarnjoj stijenci	41
9.	Određivanje materijalnih parametara	43

9.1. Određivanje materijalnih parametara za <i>Neo-Hooke</i>	43
9.1.1. Rezultati simulacije.....	43
9.1.2. Izračunati materijalni parametar	46
9.1.3. Utjecaj promjene λ_z	46
9.1.4. Utjecaj promjene λ_θ	47
9.1.5. Utjecaj promjene λ_z i λ_θ	49
9.2. Određivanje materijalnih parametara za <i>Mooney-Rivlin</i>	49
9.2.1. Rezultati simulacije.....	50
9.2.2. Izračunati materijalni parametar	52
9.2.3. Utjecaj promjene λ_z	52
9.2.4. Utjecaj promjene λ_θ	54
9.2.5. Utjecaj promjene λ_z i λ_θ	55
9.3. Određivanje materijalnih parametara za <i>Holzapfel-Gasser-Ogden</i>	56
9.3.1. Rezultati simulacije.....	57
9.3.2. Izračunati materijalni parametar	59
9.3.3. Utjecaj promjene λ_z	60
9.3.4. Utjecaj promjene λ_θ	62
9.3.5. Utjecaj promjene λ_z i λ_θ	64
10. Zaključak	66
LITERATURA.....	68

POPIS SLIKA

Slika 1. Krvožilni sustav [1].....	2
Slika 2. Prikaz slojevite strukture stijenke arterije [3]	3
Slika 3. Dijagram naprezanje - deformacija za aortu prema dobnim skupinama [8].....	6
Slika 4. Deformiranje tijela iz referentne u trenutnu konfiguraciju [10]	8
Slika 5. Dijagram naprezanja - deformacije za elastične i hiperelastične materijale	13
Slika 6. Oznake geometrije u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji.....	17
Slika 7. Heksaedarski konačni element [12]	29
Slika 8. Prikaz zadane geometrije i opterećena.....	30
Slika 9. Zadavanje geometrije <i>Neo-Hooke</i> materijalnog modela.....	31
Slika 10. Zadavanje materijalnih parametara za a) <i>Neo-Hooke</i> , b) <i>Mooney-Rivlin</i> i c) <i>Holzapfel-Gasser-Ogden</i> materijalni model	32
Slika 11. Zadavanje lokalnog cilindričnog koordinatnog sustava.....	33
Slika 12. Zadavanje koraka	33
Slika 13. Model sa zadanim rubnim uvjetima.....	34
Slika 14. Zadavanje pomaka u aksijalnom smjeru za <i>Neo-Hooke</i> materijalni model.....	35
Slika 15. Zadavanje intraluminarnog tlaka	36
Slika 16. Mreža konačnih elemenata.....	36
Slika 17. Rezultati analize za promjenu broja konačnih elemenata po debljini stijenke: a)20, b)50, c)100 i d)200	38
Slika 18. Graf greške u odnosu na broj konačnih elemenata po debljini stijenke.....	39
Slika 19. Rezultati analize za promjenu broja konačnih elemenata po obodu	40
Slika 20. Graf greške u odnosu na broj konačnih elemenata po obodu stijenke.....	41
Slika 21. Graf greške u odnosu na broj konačnih elemenata po obodu i debljini stijenke	42
Slika 22. Pomak u radijalnom smjeru - <i>Neo-Hooke</i> materijalni model	44
Slika 23. Pomak u aksijalnom smjeru - <i>Neo-Hooke</i> materijalni model	44
Slika 24. Raspodjela radijalnog naprezanja - <i>Neo-Hooke</i> materijalni model	44

Slika 25. Rezultantna aksijalna sila - <i>Neo-Hooke</i> materijalni model.....	45
Slika 26. <i>Neo-Hooke</i> model bez opterećenja i nakon a) aksijalnog predistezanja b) aksijalnog predistezanja i tlaka	45
Slika 27. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_1	47
Slika 28. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istezanja na materijalni parametar C_1	48
Slika 29. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_1	49
Slika 30. Pomak u radijalnom smjeru - <i>Mooney-Rivlin</i> materijalni model.....	50
Slika 31. Pomak u aksijalnom smjeru - <i>Mooney-Rivlin</i> materijalni model.....	50
Slika 32. Raspodjela radijalnog naprežanja - <i>Mooney-Rivlin</i> materijalni model.....	51
Slika 33. Rezultantna aksijalna sila - <i>Mooney-Rivlin</i> materijalni model	51
Slika 34. <i>Mooney-Rivlin</i> model bez opterećenja i nakon a) aksijalnog predistezanja b) aksijalnog predistezanja i tlaka.....	51
Slika 35. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_1	53
Slika 36. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_2	53
Slika 37. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istezanja na materijalni parametar C_1	54
Slika 38. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istezanja na materijalni parametar C_2	55
Slika 39. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_1	56
Slika 40. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_2	56
Slika 41. Pomak u radijalnom smjeru - <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> materijalni model	57
Slika 42. Pomak u aksijalnom smjeru - HGO materijalni model.....	57
Slika 43. Raspodjela radijalnog naprežanja - HGO materijalni model	58
Slika 44. Rezultantna aksijalna sila - HGO materijalni model	58
Slika 45. <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> model bez opterećenja i nakon a) aksijalnog predistezanja b) aksijalnog predistezanja i tlaka	58
Slika 46. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_1	60
Slika 47. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar k_1	61
Slika 48. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar k_2	61

Slika 49. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar C_1	62
Slika 50. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar k_1	63
Slika 51. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar k_2	63
Slika 52. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_1	64
Slika 53. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar k_1	64
Slika 54. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar k_2	65

POPIS TABLICA

Tablica 1. Materijalni modeli s odgovarajućim izrazima za P^{mod} i F^{mod}	26
Tablica 2. Referentna geometrija po materijalnim modelima.....	31
Tablica 3. Materijalni parametri po materijalnim modelima	32
Tablica 4. Pretpostavljeno istezanje u aksijalnom smjeru za svaki materijalni model	35
Tablica 5. Greška s obzirom na broj elemenata po debljini stijenke.....	38
Tablica 6. Greška s obzirom na broj elemenata po obodu stijenke.....	41
Tablica 7. Greška s obzirom na broj elemenata po obodu i debljini stijenke	42
Tablica 8. Ulazni podaci <i>Neo-Hooke</i> materijalnog modela	43
Tablica 9. Konačna geometrija <i>Neo-Hooke</i> materijalnog modela	45
Tablica 10. Izračunati materijalni parametar <i>Neo-Hooke</i> materijalnog modela	46
Tablica 11. Ulazni podaci <i>Mooney-Rivlin</i> materijalnog modela.....	49
Tablica 12. Konačna geometrija <i>Mooney-Rivlin</i> materijalnog modela.....	52
Tablica 13. Izračunati materijalni parametri <i>Mooney-Rivlin</i> materijalnog modela	52
Tablica 14. Ulazni podaci <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> materijalnog modela	56
Tablica 15. Konačna geometrija <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> materijalnog modela	59
Tablica 16. Izračunati materijalni parametri <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> materijalnog modela	59

POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis
A	Unutarnji referentni radijus stijenke arterije
a	Unutarnji trenutni radijus stijenke arterije
B	Vanjski referentni radijus stijenke arterije
b	Vanjski trenutni radijus stijenke arterije
A^{mod}	Trenutna površina presjeka
\mathbf{b}	Lijevi <i>Cauchy-Green</i> tenzor deformiranosti
\mathbf{C}	Desni <i>Cauchy-Green</i> tenzor deformiranosti
C_1	Materijalna konstanta <i>Neo-Hooke</i> i <i>Mooney-Rivlin</i> materijalnog modela
C_2	Materijalna konstanta <i>Mooney-Rivlin</i> materijalnog modela
\mathbf{F}	Tenzor gradijenta deformiranja
F^{FEM}	Reducirana aksijalna sila dobivena eksperimentalno
F^{mod}	Izračunata reducirana aksijalna sila
\mathbf{I}	Jedinična matrica
I_{ib}	Invarijante lijevog <i>Cauchy-Green</i> tenzora deformiranosti
J	Jakobijan
k_1, k_2	Materijalne konstante <i>Holzappel-Gasser-Ogden</i> materijalnog modela
L	Referentna duljina modela arterije
l	Trenutna duljina modela arterije
N	Aksijalna sila
\mathbf{P}	Prvi <i>Piola-Kirchoffov</i> tenzor naprezanja

p^{FEM}	Tlak dobiven eksperimentalno
p^{mod}	Izračunati tlak
\mathbf{u}	Vektor pomaka
W	Funkcija energije deformiranja
W_{aniso}	Anizotropni dio funkcije energije deformiranja HGO materijalnog modela
W_{iso}	Izotropni dio funkcije energije deformiranja HGO materijalnog modela
\mathbf{X}	Vektor položaja u referentnom koordinatnom sustavu
\mathbf{x}	Vektor položaja u trenutnom koordinatnom sustavu
λ	Istezanje
λ_r	Istezanje u radijalnom smjeru
λ_θ	Istezanje u cirkularnom smjeru
λ_z	Istezanje u aksijalnom smjeru
$\boldsymbol{\sigma}$	<i>Cauchyev</i> tenzor naprezanja

SAŽETAK

U ovom radu analiziran je utjecaj eksperimentalnih parametara na točnost određivanja materijalnih parametara prilikom pokusa istezanje - tlak na modelu arterije. Napravljena je simulacija eksperimenta istezanje - tlak, u programskom paketu *Abaqus*, za nestlačivi model arterije opterećen na intraluminarni tlak i aksijalnu silu, odnosno pomak u aksijalnom smjeru koji predstavlja predistezanje arterije. Simulacija je napravljena za tri hiperelastična materijalna modela od kojih dva opisuju izotropno ponašanje, *Neo-Hooke* i *Mooney-Rivlin*, te *Holzappel-Gasser-Ogden* koji opisuje anizotropno ponašanje. Iz simulacije eksperimenta dobiveni su podaci promjene unutarnjeg i vanjskog radijusa stijenke arterije, unutarnjeg tlaka i aksijalne sile. Podaci dobiveni iz simulacije uspoređeni su s izračunatim podacima za sva tri materijalna modela, te su pomoću metode najmanjih kvadrata, za odgovarajuću funkciju cilja, određeni materijalni parametri za sva tri slučaja. Određivanje materijalnih parametara provedeno je pomoću programskog paketa *Octave*. Nakon što je potvrđena točnost simulacije eksperimenta i korištenog proračuna, ispitan je utjecaj promjene aksijalnog predistezanja i cirkularnog istezanja na određivanje materijalnih parametara, te su prikazani rezultati analize za sva tri materijalna modela.

Ključne riječi: arterije, hiperelastičnost, materijalni parametri, metoda konačnih elemenata, Neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Holzappel-Gasser-Ogden

SUMMARY

In this paper, the influence of experimental parameters on the accuracy of determination of material parameters during the extension - inflation experiment on an artery model is analyzed. A simulation of the extension - inflation experiment was made, in the *Abaqus* software package, for an incompressible artery model loaded with intraluminal pressure and axial force, i.e. a displacement in the axial direction which represents the prestretch of the artery. The simulation was made for three hyperelastic material models of which two describe isotropic behavior, *Neo-Hooke* and *Mooney-Rivlin*, and *Holzappel-Gasser-Ogden* describing anisotropic behavior. From the simulation of the experiment, data regarding the change of the inner and outer radii of the artery wall, internal pressure and axial force were obtained. The data obtained from the simulation were compared with the calculated data for all three material models, and using the minimizing method, for the corresponding objective function, the material parameters for all three cases were determined. The determination of material parameters was performed using the *Octave* software package. After confirming the accuracy of the simulation and the calculation used, the influence of the change in axial prestretch and circular stretching on the determination of material parameters was examined, and the results of the analysis for all three material models were presented.

Key words: arteries, hyperelasticity, material parameters, finite element method, Neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Holzappel-Gasser-Ogden

1. Uvod

Krvne žile odgovorne su za prenošenje svih nužnih tvari za normalno funkcioniranje ljudskog organizma. Kako se osoba razvija i raste, tako se razvijaju i rastu krvne žile. Mijenjaju se zajedno s tijelom, ali kako osoba može oboljeti, mogu oboljeti i krvne žile.

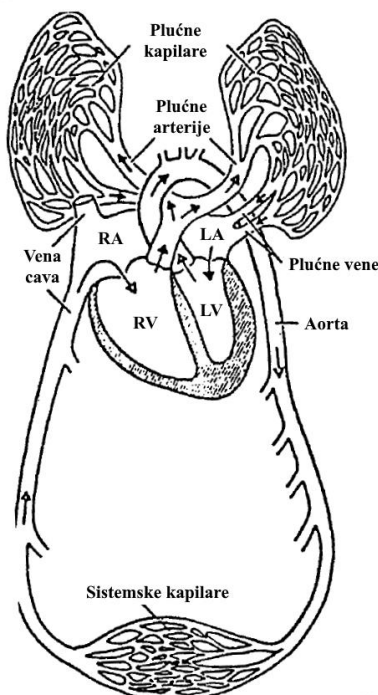
U slučajevima oboljenja krvnih žila, često dolazi do potrebe za operacijskim zahvatom. Kako se razvija tehnologija, tako se danas numeričkim simulacijama mogu predivdjeti određene pojave i potencijalni problemi pri izvođenju operativnih zahvata.

Krvne žile su vrlo specifične gledano s mehaničkog stajališta, njihova struktura je vrlo kompleksna, a sama materijalna svojstva krvne žile ovise od osobe do osobe. Najčešće se ta svojstva ispituju invazivnim eksperimentima, no kada bi neinvazivni eksperimenti sa sigurnošću davali točna materijalna svojstva, postojala bi opcija numeričke simulacije upravo one krvne žile za koju je potrebna operacija. Problem neinvazivnih eksperimenata je ta da ne postoji mogućnost mjerenja aksijalnog predistezanja krvne žile.

U ovom radu, pomoću podataka iz numeričkih simulacija, prikazan je postupak određivanja materijalnih parametara za različite hiperelastične materijalne modele. Ispitan je utjecaj nepoznatog aksijalnog predistezanja za svaki od materijalnih modela, te je uspoređena točnost izračunatih materijalnih svojstava s onima zadanim u numeričkoj simulaciji.

2. Krvožilni sustav

Srce, arterijski sustav, venski sustav i mikrocirkulacijski sustavi zajedno s neuro-humoralnim djelovanjem tvore cijeli cirkulacijski sustav, odnosno cirkulaciju [1]. Svaki dio sustava je važan i nezamjenjiv. Zahvaljujući njegovoj rasprostranjenosti kroz tijelo, kisik, hormoni i hranjive tvari dolaze do svake stanice, dok se štetne tvari uklanjaju. Srce osigurava energiju koja je potrebna za cirkulaciju [1]. Ilustraciju krvožilnog sustava prikazuje Slika 1.



Slika 1. Krvožilni sustav [1]

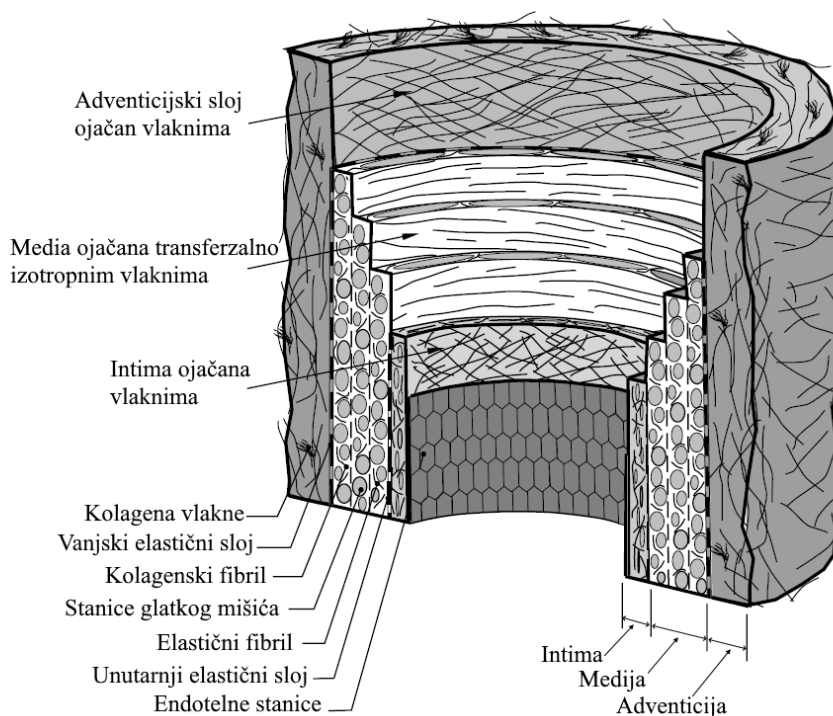
Srce se sastoji od desne pretklijetke (RA - *Right Atria*), desne klijetke (RV - *Right Ventricle*), lijeve pretklijetke (LA - *Left Atria*) i lijeve klijetke (LV - *Left Ventricle*) (Slika 1), te nije spojeno niti na jednu kost. Lijeve klijetke pumpa krv u aortu, dok desna klijetka pumpa krv prema plućima.

Arterije su krvne žile kroz koje krv teče pod visokim tlakom. One prenose krv iz srca, kroz sve manje arterije, preko arteriola i dalje do razine kapilara [2]. Vene provode krv iz kapilara natrag u srce, krv u venama je pod puno manjim tlakom u odnosu na onu u arterijama. U bilo kojem trenutku oko 20% ukupnog volumena krvi prolazi arterijama, a oko 7% kapilarama [2]. Čak 75% ukupnog volumena krvi nalazi se u venama, razlog tome je puno veći broj, a time i puno veći ukupni volumen vena u odnosu na arterije [1]. Vene, arterije i kapilare razlikuju se u strukturi jer su specijalizirane za obavljanje svoje funkcije perfuzije, izmjene i kapacitivnosti. Međutim, unutarnji sloj svih krvnih žila obložen je jednim slojem endotelnih stanica [2].

3. Struktura arterijske stijenke

Arterije se generalno mogu podijeliti u dvije skupine: elastične i mišićne, iako postoje i arterije koje su po svojoj strukturi između dvije navedene skupine. Elastične arterije su prema svojim dimenzijama veće od mišićnih, uglavnom se nalaze bliže srcu, dok su mišićne arterije smještene na periferiji (osim u slučaju koronarnih arterija). U ovom poglavlju će detaljnije biti opisana stijenka arterija koje se sastoje od tri različita sloja: intime, medije i adventicije. Slika 2 prikazuje slojevitú strukturu stijenke arterije.

Stjenka arterije sastoji se od fibroblasta, unutarnje i vanjske lamine, endotelnih stanica, no s mehaničkog stajališta, najvažniji konstituenti stijenke su elastin, kolagen i glatke mišićne stanice. Elastin daje arteriji elastičnost, dok krući kolagen u većoj mjeri prenosi vlačno opterećenje. Glatke mišićne stanice se skupljaju ili opuštaju kao odgovor na mehaničke, kemijske i druge podražaje.



Slika 2. Prikaz slojevite strukture stijenke arterije [3]

3.1. Intima

Intima ili unutarnji sloj arterijske stijenke sastoji se uglavnom od jednog sloja endotelnih stanica koje oblažu arterijsku stjenku, naslonjenu na tanku membranu i subendotelni sloj različite debljine (ovisno o lokaciji, starosti i bolesti) [3]. Endotel ima važnu ulogu u mehanici protoka krvi, zgrušavanja krvi i adheziji leukocita [2]. Iako endotelni sloj ne pridonosi

značajnije čvrstoći stijenke, subendotelni sloj može utjecati na čvrstoću stijenke. Debljina subendotelnog sloja kreće se od gotovo nepostojeće do geometrijski dominantne. Visok sadržaj kolagena u subendotelnom sloju, sugerira njegovu mehaničku dominaciju [3].

Orijentacija kolagenih vlakana u subendotelnom sloju po debljini stijenke nije jednolična. Također, u subendotelnom sloju prisutan je i elastin u obliku mreže elastičnih vlakana [3].

Lokalno može doći do zadebljanja i veće krutosti intime uslijed ateroskleroze, što uključuje taloženje masnih stanica, kalcija, kolagenih vlakana i staničnih otpadnih tvari, čime su uzrokovane promjene u geometriji i mehaničkim svojstvima arterijske stijenke. Uslijed navedenih promjena, oboljeli sloj intime može dominirati, u mehaničkom pogledu, u odnosu na ostale slojeve, te počinje preuzimati većinski dio opterećenja [3].

3.2. Medija

Medija je srednji sloj arterijske stijenke i sastoji se od kompleksne trodimenzijske mreže glatkih mišićnih stanica, elastina i snopova kolagenih vlakana [3]. Prema Rhodinu (1980) [4], elastični slojevi razdvajaju dijelove medije u više slojeva ojačanih koncentričnim vlaknima kolagena. Kako se promatra struktura arterija od srca prema periferiji, sloj medije se smanjuje te u perifernim mišićnim arterijama gotovo nije ni prisutan.

Sloj medija je od intime i adventicije odvojen unutarnjim elastičnim slojem, odnosno vanjskim elastičnim slojem. U mišićnim arterijama ovi elastični slojevi pojavljuju se kao istaknute strukture te ih je lako prepoznati.

Vazokonstrikcija je riječ koja se koristi za opisivanje smanjenja promjera krvne žile uslijed mišićne kontrakcije. Kada se glatki mišići u tunici mediji opuštaju, promjer krvne žile povećava se pri određenom tlaku. Ovo povećanje omogućuje veći protok krvi za isti tlak, a taj je proces poznat kao vazodilatacija [2].

Elastin, snopovi kolagenih vlakana i glatke mišićne stanice unutar medije čine strukturirani raspored koji joj daje sposobnost da se odupire velikim opterećenjima u cirkularnom (obodnom) smjeru [3]. Kod manjih tlakova, sloj medije je taj koji određuje mehaničko ponašanje arterije.

3.3. Adventicija

Adventicija je vanjski sloj stijenke arterije i sastoji se uglavnom od guste mreže kolagenih vlakana, elastina, fibroblasta i fibrocita [3]. Adventicija je od medije odvojena

vanjskim elastičnim slojem [5], dok je vanjski sloj adventicije neprekidno okružen opuštenim veznim tkivom [3]. Debljina adventicije je jako povezana s fiziološkom funkcijom krvne žile te njezinim položajem u arterijskom stablu. Smatra se da kolagena vlakna koja se nalaze u adventiciji služe kao zaštitni sloj te značajno doprinose stabilnosti i čvrstoći arterijske stijenke.

Raspored kolagenih vlakana u adventiciji je takav da je njezina krutost kod manjih tlakova manja u odnosu na krutost medije. Kod pojave većih tlakova, sloj adventicije postaje značajnije opterećen, sprječavajući prekomjerno rastezanje i pucanje arterije [3].

Kod pojave ateroskleroze, za razliku od intime gdje dolazi do velikih promjena, sloj adventicije ne pokazuje veliku razliku između zdrave i oboljele arterije, odnosno nema značajnije razlike u raspodjeli kolagenih vlakana [3].

3.4. Mehanička svojstva arterijske stijenke

Iako se mehanička svojstva stijenke arterija mijenjaju duž arterijskog stabla, opće mehaničke značajke, koje pokazuju arterije, su jednake.

Arterijska stijenka je slojevita i sastoji se od raznih konstituenata, heterogena je, što utječe na njena mehanička svojstva [6]. U mnogim radovima stijenka arterije smatra se homogenom, što je dovoljno precizno za većinu eksperimentalnih i teorijskih studija [3]. U tim uvjetima arterije se ponašaju kao gotovo nestlačive [3]. Zbog pojednostavljenja, u nastavku rada i za vrijeme provođenja analize, arterije će biti promatrane kao homogene i nestlačive.

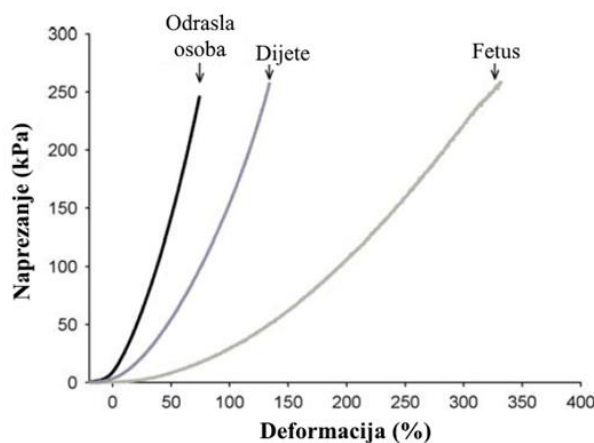
Arterijska struktura je slična strukturi kompozita što arterije čini anizotropnima [6]. Spiralna orijentacija kolagenih vlakana osigurava njihov doprinos u cirkularnom i aksijalnom smjeru. Međutim, vlakna su gotovo kružno orijentirana zbog malog koraka zavojnice [6], što rezultira krućim odzivom tkiva u obodnom smjeru. U nastavku ovog rada, arterije će za jedan dio analize biti promatrane kao izotropne, dok će zadnji promatrani materijalni model biti anizotropan.

Kod arterija, naprezanje raste mnogo brže od deformacije. Ovo nelinearno ponašanje arterije je uglavnom uzrokovano kolagenim vlaknima [6]. Kako se valovita vlakna istežu, postaju ravna i kruća. Takvo ponašanje kolagenih vlakana sprječava prekomjerno rastezanje ili pucanje arterija.

Arterije također pokazuju viskoelastično ponašanje, odnosno vremenski ovisnu deformaciju, što rezultira različitim odzivom tkiva kada se primjenjuju različite brzine opterećenja [6]. Viskoelastično ponašanje je općenito povezano s mišićnim arterijama [6].

Međutim, arterijski zid se često, radi pojednostavljenja, smatra hiperelastičnim [3], pa će se u skladu s tim u nastavku ovog rada koristiti hiperelastični materijalni modeli.

Razna istraživanja otkrila su da prilikom rezanja arterije dolazi do njezinog skraćivanja, zbog čega se može pretpostaviti postojanje aksijalnog predistezanja [7]. Dokazano je da se to aksijalno predistezanje povećava gotovo linearno s godinama tijekom postnatalnog razvoja, te je sugerirano da se to događa uslijed rasta i razvoja osobe te uslijed promjena u sastavu stijenke krvnih žila [7]. Elastin se proizvodi isključivo tijekom prenatalnog razvoja, te se sa starenjem razgrađuje [8]. Kako osoba stari, smanjuje se količina elastina u krvnim žilama, te se odnos elastičnog elastina i krutog kolagena konstantno mijenja [8]. Slika 3 prikazuje dijagram naprezanja - deformacije za aortu prema dobnim skupinama.



Slika 3. Dijagram naprezanje - deformacija za aortu prema dobnim skupinama [8]

Kolagen i glatke mišićne stanice se obnavljaju za razliku od elastina, time, s vremenom, dolazi do puno većeg predistezanja elastina u odnosu na vlakna kolagena i glatkog mišića [7].

Kada se uklone sva vanjska opterećenja (koja uključuju intraluminalni tlak i aksijalno predistezanje), u arterijskoj stijenci i dalje postoji naprezanje [6]. Ovo naprezanje naziva se zaostalim naprezanjem. Pretpostavlja se da zaostalo naprezanje povećava cirkularno naprezanje, ali homogenizira ukupnu raspodjelu naprezanja po debljini stijenke i poboljšava performanse arterije [6]. Eksperimentalno se zaostalo naprezanje mjeri rezanjem arterijskog uzorka po dužini i mjerenjem kuta otvaranja. Ova metoda ne oslobađa sva zaostala naprezanja prisutna u tkivu, ali se obično koristi zbog svoje jednostavnosti [6].

4. Cilj rada

Prilikom provođenja operativnih zahvata na krvnim žilama, sve češće u pripremu kirurga za operaciju ulazi i numerička simulacija iz koje se mogu predvidjeti moguće komplikacije i opći uvjeti same operacije. Kako bi se mogla provesti numerička simulacija, potrebno je poznavanje svojstva materijala za koji se želi provesti numerička simulacija.

Materijalna svojstva stjenke krvne žile najčešće se određuju pomoću eksperimenata, ali osim invazivnih metoda, moguće je neinvazivnim mjerenjem tlaka i promjera također odrediti materijalna svojstva. Problem neinvazivnih mjerenja je nepoznavanje aksijalnog predistezanja krvnih žila.

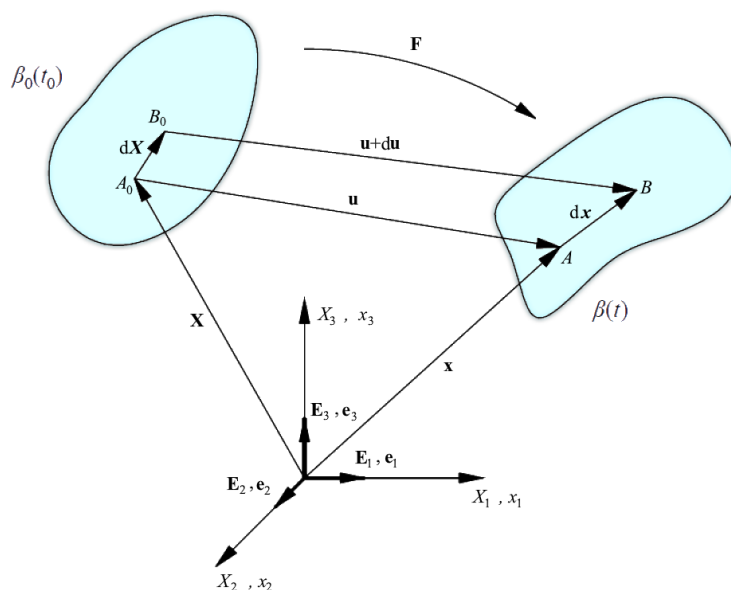
Cilj ovog rada je proučiti utjecaj aksijalnog predistezanja, odnosno koliko će točno ili netočno pretpostavljena vrijednost aksijalnog predistezanja, utjecati na dobivena svojstva materijala. Osim utjecaja promjene aksijalnog predistezanja, promatran je i utjecaj promjene cirkularnih istezanja.

5. Osnove mehanike kontinuuma

Mehanika kontinuuma je dio mehanike koja se bavi promatranjem gibanja čvrstih, tekućih i plinovitih tijela na makroskopskoj razini [9]. Iako se u mehanici kontinuuma ne razmatra atomska struktura, uvodi se pojam neprekidne sredine ili materijalnog kontinuuma. Materijalno tijelo dio je prostora, kontinuuma koje ima volumen te je omeđen plohom koja ga odvaja od ostatka kontinuuma i u potpunosti je ispunjeno materijom koja mu daje masu. Pretpostavlja se da je tijelo jednoliko ispunjeno materijalom i da posjeduje masu m .

Prilikom djelovanja opterećenja na materijalno tijelo, dolazi do njegovog gibanja i promjene položaja i oblika. Da bi se jednostavnije pratila promjena položaja i oblika tijela uvodi se pojam konfiguracije tijela β . Razlikujemo referentnu konfiguraciju β_0 i trenutnu konfiguraciju $\beta(t)$. Referentna konfiguracija β_0 odnosi se na nedeformirani oblik (najčešće $t = t_0$), dok se trenutna konfiguracija $\beta(t)$ odnosi na tijelo nakon djelovanja opterećenja. Razlikujemo također i referentni koordinatni sustav (označen velikim slovima) i trenutni koordinatni sustav (označen malim slovima).

Za jednoznačan opis gibanja i deformiranja, potrebno je za svaku česticu odrediti vektor položaja. Takav pristup naziva se *Lagrangeov* opis gibanja. Kada se razmatra deformiranje krutih tijela, kao referentna konfiguracija uzima se prirodni, nedeformirani oblik u tzv. materijalnim koordinatama. Početni vektor položaja neke čestice unutar tijela definiran je s tri koordinate u referentnom Kartezijevom koordinatnom sustavu X_1, X_2 i X_3 . Slika 4 prikazuje materijalno tijelo u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji.



Slika 4. Deformiranje tijela iz referentne u trenutnu konfiguraciju [10]

Nakon deformiranja, čestica dolazi u novi položaj koji se definira koordinatama trenutnog koordinatnog sustava x_1, x_2 i x_3 , odnosno vektorom položaja \mathbf{x} , koji je funkcija vremena i početnog vektora položaja [9]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (1)$$

Izraz (1) može se zapisati i indeksnim zapisom, pri čemu vrijedi $i = 1, 2, 3$:

$$x_i = x(X_i, t). \quad (2)$$

Vektor koji spaja položaj čestice u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji, odnosno vektor pomaka, označava se slovom \mathbf{u} (Slika 4). Vektor pomaka može se definirati kao:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (4)$$

5.1. Tenzor gradijenta deformiranja

Veza između elementarne dužine u referentnoj konfiguraciji $d\mathbf{X}$ i elementarne dužine u trenutnoj konfiguraciji $d\mathbf{x}$ definirana je jednadžbom:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \quad (5)$$

Izraz (5) se može zapisati kao:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (6)$$

gdje \mathbf{F} predstavlja gradijent deformiranja koji u indeksnom zapisu glasi:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (7)$$

Raspisivanjem izraza (7) po indeksima $i = 1, 2, 3$ i $j = 1, 2, 3$, dolazi se do:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Za cilindrične koordinate koje će biti korištene u ovom radu gradijent deformiranja glasi:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R\partial\theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r\frac{\partial\varphi}{\partial R} & r\frac{\partial\varphi}{R\partial\theta} & r\frac{\partial\varphi}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Gradijent deformiranja \mathbf{F} je dvostruki tenzor, što znači da se istovremeno odnosi i na referentnu i na trenutnu konfiguraciju, što ga čini nepraktičnim za upotrebu.

5.2. Tenzori deformiranosti

Zbog navedene nepraktičnosti gradijenta deformiranja uvode se desni *Cauchy-Greenov* tenzor deformiranosti \mathbf{C} i lijevi *Cauchy-Greenov* tenzor deformiranosti \mathbf{b} . Oni povezuju kvadrat diferencijalnog elementa materijalne duljine u trenutnoj konfiguraciji s kvadratom diferencijalnog elementa duljine u referentnoj konfiguraciji.

Desni *Cauchy-Greenov* tenzor deformiranosti \mathbf{C} odnosi se na referentnu konfiguraciju te izraz za njegovo računanje glasi:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (10)$$

Lijevi *Cauchy-Greenov* tenzor deformiranosti \mathbf{b} odnosi se na trenutnu konfiguraciju te izraz za njegovo računanje glasi:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (11)$$

5.3. Cauchyev tenzor naprezanja

Cauchyev tenzor naprezanja je simetričan tenzor koji predstavlja stvarno naprezanje i odnosi se na trenutnu konfiguraciju. Za razliku od često korištenog inženjerskog naprezanja (prvi *Piola-Kirchhoffov* tenzor naprezanja \mathbf{P}) odnosi se na površinu poprečnog presjeka u trenutnoj konfiguraciji koja se mijenja s vremenom. Izraz za *Cauchyev* tenzor naprezanja u dijadnom zapisu glasi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (12)$$

gdje su \mathbf{e}_i i \mathbf{e}_j jedinični vektori u trenutnoj konfiguraciji.

Za računanje naprezanja kod hiperelastičnih materijala, koristi se sljedeći izraz za *Cauchyev* tenzor naprezanja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (13)$$

ako se radi o nestlačivom materijalu, odnosno, gradijent deformiranja je simetričan, jednačba glasi:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial I_{1b}} \cdot \mathbf{b} - \frac{\partial W}{\partial I_{2b}} \cdot \mathbf{b}^{-1} \right) - p \mathbf{I}, \quad (14)$$

gdje su I_{1b} i I_{2b} prva i druga invarijanta tenzora naprežanja, \mathbf{b} lijevi *Cauchy – Greenov* tenzor deformiranosti, dok p predstavlja *Lagrangeov* multiplikator koji osigurava nestlačivost.

W u jednačbama (13) i (14) predstavlja funkciju energije deformiranja koja se računa ovisno o tome na koji materijalni model se odnosi te će biti detaljnije objašnjena u sljedećim poglavljima.

5.4. Arterijska stijenka opterećena unutarnjim tlakom i aksijalnom silom

U ovom poglavlju navedeni su izrazi koji se odnose isključivo na slučaj koji se proučava u ovom radu. Radi se o modelu arterije, odnosno cilindričnom modelu, definiranom u cilindričnom lokalnom koordinatnom sustavu, opterećenom na unutarnji tlak i aksijalnu silu, odnosno pomak u aksijalnom smjeru u svrhu predistezanja arterije. Promatrana arterija smatra se hiperelastičnom i nestlačivom.

Za opisani slučaj, polje pomaka u cilindričnom koordinatnom sustav glasi:

$$\begin{aligned} r &= \lambda_r \cdot R, \\ \varphi &= \lambda_\theta \cdot \Theta, \\ l &= \lambda_z \cdot L, \end{aligned} \quad (15)$$

gdje su λ_r , λ_θ i λ_z istežanja u pojedinim smjerovima koordinatnog sustava. Uvrštavanjem polja pomaka (15) u gradijent deformiranja (9), dolazi se do konačnog izraza za gradijent deformiranja u cilindričnom koordinatnom sustavu za promatrani slučaj opterećenja:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (16)$$

U slučaju koji se promatra nema kutne deformacije iz čega slijedi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = 1, \quad (17)$$

kada se izraz (17) uvrsti u jednačbu (9), odnosno (16), dolazi se do:

$$\lambda_\theta = \frac{r}{R}, \quad (18)$$

gdje r predstavlja trenutni polumjer, a R početni polumjer. Istezanje u aksijalnom smjeru iz jednadžbe (15) glasi:

$$\lambda_z = \frac{l}{L}. \quad (19)$$

Arterija je definirana kao nestlačiva, odnosno ne dolazi do promjene volumena prilikom deformiranja, pa vrijedi:

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1. \quad (20)$$

Uvrštavanjem izraza (16) u jednadžbu (20) dolazi se do:

$$\lambda_r \cdot \lambda_\theta \cdot \lambda_z = 1. \quad (21)$$

Ako se jednadžbe (18) i (19) uvrste u jednadžbu (21), dolazi se do izraza za λ_r koji glasi:

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_\theta \cdot \lambda_z}, \quad (22)$$

$$\lambda_r = \frac{1}{\frac{r}{R} \cdot \frac{l}{L}}. \quad (23)$$

Uvrštavanjem tenzora deformiranja za navedeni slučaj (16) u izraze za lijevi i desni *Cauchy-Green* tenzor deformiranosti (10) i (11), njihove jednadžbe postaju jednake i glase:

$$\mathbf{C} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Za računanje naprezanja kod hiperelastičnih nestlačivih materijala, koristi se izraz za *Cauchyev* tenzor naprezanja (14). Prva invarijanta tenzora naprezanja I_{1b} računa se prema jednadžbi:

$$I_{1b} = \text{tr}(\mathbf{b}), \quad (25)$$

i za cilindrični koordinatni sustav, odnosno lijevi *Cauchy – Greenov* tenzor deformiranosti prema izrazu (24) iznosi:

$$I_{1b} = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2. \quad (26)$$

Druga invarijanta tenzora naprezanja I_{2b} računa se prema izrazu:

$$I_{2b} = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{b})^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2)]. \quad (27)$$

i za lijevi *Cauchy – Greenov* tenzor deformiranosti prema izrazu (24) iznosi:

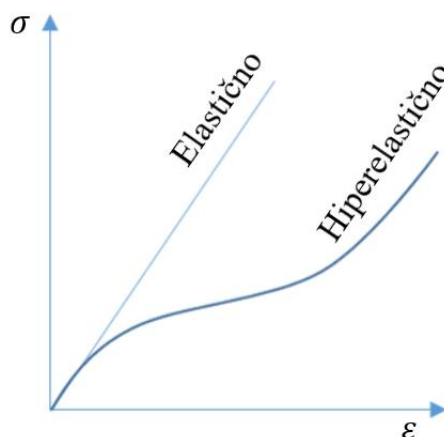
$$I_{2b} = \frac{1}{2} \left[\left(\text{tr} \begin{bmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{bmatrix} \right)^2 - \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{bmatrix}^2 \right) \right], \quad (28)$$

$$I_{2b} = \frac{1}{2} \left((\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2)^2 - (\lambda_r^4 + \lambda_\theta^4 + \lambda_z^4) \right), \quad (29)$$

$$I_{2b} = \lambda_r^2 \lambda_\theta^2 + \lambda_r^2 \lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 \lambda_z^2. \quad (30)$$

5.5. Hiperelastični materijalni modeli

Hiperelastični materijali pokazuju izrazito nelinearnu krivulju naprezanja i deformacije. Prilikom pojave velikih deformacija ponašanje hiperelastičnih materijala je elastično. Na temelju fenomenološkog pristupa, ovi se materijali tretiraju kao kontinuum, a gustoća energije deformiranja W smatra se opisom njihovog hiperelastičnog ponašanja. Slika 5 prikazuje dijagram naprezanja - deformacije za elastične i hiperelastične materijale.



Slika 5. Dijagram naprezanja - deformacije za elastične i hiperelastične materijale

Hiperelastični materijalni modeli se najčešće koriste za opisivanje ponašanja elastomera i bioloških mekih tkiva. Kao što je već navedeno, ponašanje hiperelastičnih materijala opisuje se pomoću funkcije energije deformiranja W (eng. *strain energy function*) koja je funkcija desnog *Cauchyevog* tenzora deformiranosti $W = W(\mathbf{C})$ i razlikuje se ovisno o materijalnom modelu. U nastavku rada, ponašanje arterija biti će proučavano pomoću tri hiperelastična materijalna modela, od kojih dva izotropna: *Neo-Hooke* i *Mooney-Rivlin*, te anizotropni *Holzappel-Gasser-Ogden* (HGO) materijalni model. *Neo-Hooke* i *Mooney-Rivlin* su fenomenološki materijalni modeli, odnosno nisu bazirani na mikrostrukтури, dok je *Holzappel-Gasser-Ogden* strukturalni materijalni model koji ima uporište u mikrostrukтури.

5.6. Neo-Hooke materijalni model

Prvi materijalni model koji će se koristiti u ovom radu je *Neo-Hooke* materijalni model. Opći oblik funkcije energije deformiranja za nestlačivi *Neo-Hooke* materijalni model glasi:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3), \quad (31)$$

gdje I_1 predstavlja prvu invarijantu desnog *Cauchy – Green* tenzora deformiranosti \mathbf{C} , a C_1 parametar materijala. U izrazu (14) za izračun *Cauchyevog* tenzora naprezanja, funkcija energije deformiranja derivira se po prvoj i drugoj invarijanti, pa će te derivacije iznositi:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1, \quad (32)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0. \quad (33)$$

Uvrštavanjem derivacija (32) i (33) u jednadžbu (14), dolazi se do izraza za izračun *Cauchyevog* tenzora naprezanja za *Neo-Hooke* materijalni model koji glasi:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \mathbf{b}. \quad (34)$$

5.7. Mooney-Rivlin materijalni model

Drugi korišteni materijalni model je *Mooney-Rivlin* materijalni model. *Mooney-Rivlin* model, kojeg su predstavili Merlin Mooney i Ronald Rivlin, je kao i *Neo-Hooke*, hiperelastični materijalni model. Funkcija energije deformiranja W sadrži dvije invarijante (I_1 i I_2) desnog *Cauchy-Green* tenzora deformiranosti \mathbf{C} . Razlika između *Mooney-Rivlin* i *Neo-Hooke* materijalnih modela je ta da *Mooney-Rivlin* materijalni model ima dvije materijalne konstante C_1 i C_2 , dok *Neo-Hooke* materijalni model sadrži samo jednu.

Funkcija energije deformiranja za nestlačive *Mooney-Rivlin* materijale glasi:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3). \quad (35)$$

U izrazu (14) za izračun *Cauchyevog* tenzora naprezanja, funkcija energije deformiranja derivira se po prvoj i drugoj invarijanti, pa će te derivacije izraza (35) iznositi:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1, \quad (36)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_2, \quad (37)$$

iz čega slijedi izraz za računanje *Cauchyevog* tenzora naprezanja za *Mooney-Rivlin* materijalni model:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \cdot C_1 \cdot \mathbf{b} - 2 \cdot C_2 \cdot \mathbf{b}^{-1} - p\mathbf{I} \quad (38)$$

5.8. Holzapfel-Gasser-Ogden materijalni model

Do sad navedeni hiperelastični materijalni modeli, *Neo-Hooke* i *Mooney-Rivlin*, ne uzimaju u obzir anizotropno ponašanje arterija. Zato je u ovom radu kao treći materijalni model korišten *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalni model u kojem je funkcija energije deformiranja podijeljena na izotropni dio matrice koja je većinom građena od elastina i anizotropni dio koji se odnosi na kolagena vlakana [6]:

$$W = W_{\text{iso}} + W_{\text{aniso}} \quad (39)$$

Za opis izotropnog ponašanja matrice materijala koristi se funkcija energije deformiranja *Neo-Hooke* materijalnog modela [6]:

$$W_{\text{iso}} = C_1 \cdot (I_1 - 3), \quad (40)$$

gdje je prva invarijanta I_1 jednaka izrazu (26), a C_1 materijalni parametar krutosti matrice materijala.

Anizotropno ponašanje povezano je s kolagenim vlaknima te je opisano funkcijom energije deformiranja koja glasi [6]:

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp\{k_2[(\kappa I_1 + (1 - 3\kappa)I_i) - 1]^2\} - 1 \}, \quad (41)$$

$$I_{4,6} = \lambda_\theta^2 \cos^2 \alpha + \lambda_z^2 \sin^2 \alpha, \quad (42)$$

gdje su $I_{4,6}$ invarijante jednake kvadratu istezanja u smjeru kolagenih vlakana [6]. Suma se koristi zbog dvije familije vlakana postavljene pod kutovima od 45° i -45° u odnosu na aksijalnu os. Ako vlakna u oba smjera imaju ista svojstva, kako je pretpostavka za *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalni model, ove dvije invarijante su jednake [3]. k_1 predstavlja krutost kolagenih vlakana, dok parametar k_2 nema mjernu jedinicu te se povezuje s povećanjem krutosti vlakana kod većih tlakova [6]. *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalni model uzima u obzir disperziju vlakana dodatnim parametrom κ . κ može imati vrijednost između 0 i $\frac{1}{3}$ za slučajeve bez disperzije i za izotropnu disperziju. U promatranom slučaju smatra se da disperzije nema te je parametar $\kappa = 0$, iz čega slijedi pojednostavljena funkcija energije deformiranja za anizotropno ponašanje materijala:

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp\{k_2[I_i - 1]^2\} - 1 \}. \quad (43)$$

Uzimajući u obzir da su invarijante $I_{4,6}$ jednake, izraz (43) se može zapisati:

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left\{ k_2 [I_{4,6} - 1]^2 \right\} - 1 \right\}. \quad (44)$$

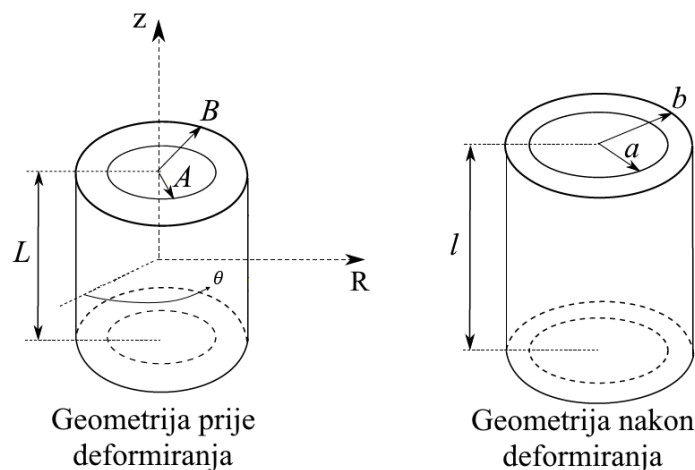
Konačna funkcija energije deformiranja za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model koji će se koristiti u ovom radu glasi:

$$W = W_{\text{iso}} + W_{\text{aniso}}, \quad (45)$$

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + \frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left\{ k_2 [I_{4,6} - 1]^2 \right\} - 1 \right\}. \quad (46)$$

6. Postupak određivanja materijalnih parametara

Pristup prilikom određivanja materijalnih parametara je takav da se u iterativnom procesu minimizira razlika između izmjerenih vrijednosti (iz eksperimenta, odnosno simulacije), te vrijednosti dobivenih pomoću konstitutivnih modela. Određivanje materijalnih parametara se provodi pomoću programa *Octave*, s funkcijom *lsqnonlin* koja služi za traženje minimalne razlike metodom najmanjih kvadrata za nelinearne funkcije. Korišten pristup odnosi se na invazivno ispitivanje, gdje je pretpostavljeno da su eksperimenti provedeni *in vitro* te su iz mjerenja poznati tlak, promjer i aksijalna sila. Radi lakšeg razumijevanja, Slika 6 prikazuje oznake za unutarnji radijus prije deformiranja A (u referentnoj konfiguraciji) i nakon deformiranja a (u trenutnoj konfiguraciji), vanjski radijus prije deformiranja B i nakon deformiranja b , te duljinu uzorka prije deformiranja L i nakon deformiranja l .



Slika 6. Oznake geometrije u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji

Smatra se da je stjenka arterije nestlačiva te zadržava cilindrični oblik tijekom deformiranja (uslijed primjene unutarnjeg tlaka i aksijalnog opterećenja), pa se deformacije mogu opisati jednadžbama [11]:

$$r^2 = a^2 + \lambda_z^{-1} \cdot (R^2 - A^2), \quad (47)$$

$$\theta = \theta, \quad (48)$$

$$z = \lambda_z \cdot Z, \quad (49)$$

gdje su R, θ, Z cilindrične koordinate u referentnoj konfiguraciji, a r, θ, z cilindrične koordinate u deformiranoj konfiguraciji. Jednadžba kojom su povezani unutarnji radijus a i vanjski radijus b glasi [11]:

$$b^2 = a^2 + \lambda_z^{-1} \cdot (B^2 - A^2). \quad (50)$$

6.1. Funkcija cilja

U ovom slučaju, koji spada u invazivnu metodu, za određivanje materijalnih parametara potrebno je koristiti funkciju cilja [6]:

$$\min \sum_{j=1}^n \left[(P_j^{mod} - P_j^{FEM})^2 + \left(\frac{F_j^{mod}}{A_j^{mod}} - \frac{F_j^{FEM}}{A_j^{mod}} \right)^2 \right], \quad (51)$$

gdje n predstavlja ukupan broj eksperimentalnih podataka koji se promatraju (u ovom slučaju su to inkrementi numeričke simulacije), dok j predstavlja podatak koji odgovara određenom trenutku. P^{FEM} predstavlja tlak dobiven eksperimentalno odnosno simulacijom, a P^{mod} izračunati tlak konstitutivnog modela prema formuli [6]:

$$P^{mod} = \int_a^b \lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} \frac{dr}{r}. \quad (52)$$

F^{FEM} predstavlja reduciranu aksijalnu silu dobivenu eksperimentalno odnosno simulacijom, a F^{mod} izračunatu reduciranu aksijalnu silu konstitutivnog modela prema formuli [6]:

$$F^{mod} = N - \pi \cdot a^2 \cdot P^{mod}, \quad (53)$$

gdje N predstavlja aksijalnu silu koja se računa prema izrazu [6]:

$$N = \pi \cdot \int_a^b \left(2 \cdot \lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} - \lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} \right) r \, dr + \pi \cdot a^2 \cdot P^{mod}. \quad (54)$$

A^{mod} je trenutna površina presjeka te se računa jednadžbom [6]:

$$A_j^{mod} = \pi \left[(B \lambda_{B,j})^2 - (A \lambda_{A,j})^2 \right], \quad (55)$$

gdje su $\lambda_{B,j}$ i $\lambda_{A,j}$ vanjsko i unutarnje trenutno cirkularno istezanje.

6.1.1. Izvod tlaka P po materijalnim modelima

Prema izrazu (52) jasno je da će se formula za tlak razlikovati ovisno o materijalnom modelu koji se koristi. Prema tome će u nastavku biti izvedeni izrazi za računanje tlaka za *Neo-Hooke*, *Mooney-Rivlin* i *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model.

6.1.1.1. Modelirani tlak za Neo-Hooke funkciju energije deformiranja

Da bi se lakše došlo do rješenja jednadžbe za tlak P^{mod} , započinje se s članom $\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta}$, poznato je da je funkcija energije deformiranja W jednaka:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3), \quad (56)$$

također je poznat izraz (26) za prvu invarijantu I_1 . Uvrštavanjem izraza (26) u jednadžbu (56) dolazi se do:

$$W = C_1 \cdot (\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 3). \quad (57)$$

U prethodnoj jednadžbi λ_r se može zamijeniti s jednadžbom (22), pa će ona tada glasiti:

$$W = C_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^2} + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 3 \right), \quad (58)$$

$$W = C_1 \cdot (\lambda_\theta^{-2} \cdot \lambda_z^{-2} + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 3).$$

Parcijalnim deriviranjem $\frac{\partial}{\partial \lambda_\theta}$ jednadžbe (58) dolazi se do:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_\theta - 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_z^{-2} \cdot \lambda_\theta^{-3},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_\theta - \lambda_z^{-2} \cdot \lambda_\theta^{-3}), \quad (59)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_z^2 \cdot \lambda_\theta^3} \right).$$

Da bi se dobio cijeli član koji se nalazi pod integralom u jednadžbi (52), jednadžbu (59) potrebno je pomnožiti s λ_θ , te će ona tada glasiti:

$$\lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_z^2 \cdot \lambda_\theta^2} \right). \quad (60)$$

Iz jednadžbe (18) poznato je da je $\lambda_\theta = r/R$, uvrštavanjem u jednadžbu (60) dolazi se do:

$$\lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 \cdot r^2} \right). \quad (61)$$

Vraćanjem jednadžbe (61) u jednadžbu (52) dolazi se do:

$$p^{mod} = \int_a^b 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 \cdot r^2} \right) \frac{dr}{r}, \quad (62)$$

$$p^{mod} = 2 \cdot C_1 \cdot \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 \cdot r^2} \right) \frac{dr}{r}, \quad (63)$$

$$p^{mod} = 2 \cdot C_1 \cdot \int_a^b \left(\frac{\lambda_z^2 \cdot r^4 - R^4}{R^2 \cdot \lambda_z^2 \cdot r^3} \right) dr. \quad (64)$$

U jednadžbi (64) potrebno je R izraziti preko r prema jednadžbi (47):

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{\lambda_z} \cdot (R^2 - A^2), \quad (65)$$

$$R^2 - A^2 = (r^2 - a^2) \cdot \lambda_z, \quad (66)$$

$$R^2 = (r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2. \quad (67)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (67) u jednadžbu (64) dolazi se do konačnog izraza kojim će se računati tlak za *Neo-Hooke* materijalni model:

$$p^{mod} = 2 \cdot C_1 \cdot \int_a^b \left(\frac{\lambda_z^2 \cdot r^4 - [(r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2]^2}{[(r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2] \cdot \lambda_z^2 \cdot r^3} \right) dr. \quad (68)$$

6.1.1.2. Modelirani tlak za Mooney-Rivlin funkciju energije deformiranja

Kako bi bilo moguće raspisati jednadžbu (52), potrebno je prvo raspisati izraz za *Mooney-Rivlin* funkciju energije deformiranja W koja glasi:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3). \quad (69)$$

Prva invarijanta I_1 i druga varijanta I_2 raspisane su u prethodnim poglavljima izrazima (26) i (30), uvrštavanjem navedenih jednadžbi u izraz za funkciju energije deformiranja W dolazi se do:

$$W = C_1 \cdot (\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 3) + C_2 \cdot (\lambda_r^2 \lambda_\theta^2 + \lambda_r^2 \lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - 3). \quad (70)$$

Potrebno je u jednadžbi (70) supstituirati λ_r jednadžbom (22):

$$W = C_1 \cdot (\lambda_\theta^{-2} \lambda_z^{-2} + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 3) + C_2 \cdot (\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \lambda_\theta^{-2} + \lambda_z^{-2} - 3). \quad (71)$$

Slijedeći korak je parcijalna derivacija W (71) po λ_θ :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_\theta - 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_\theta^{-3} \lambda_z^{-2} + 2 \cdot C_2 \cdot \lambda_\theta \lambda_z^2 - 2 \cdot C_2 \cdot \lambda_\theta^{-3}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_\theta - \lambda_\theta^{-3} \lambda_z^{-2}) + 2 \cdot C_2 \cdot (\lambda_\theta \lambda_z^2 - \lambda_\theta^{-3}), \quad (73)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\lambda_\theta \lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^3} \right). \quad (74)$$

Ako želimo dobiti cijeli član pod integralom iz jednadžbe (52), potrebno je jednadžbu (74) pomnožiti s λ_θ :

$$\lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2} \right). \quad (75)$$

Iz jednadžbe (18) poznato je da je $\lambda_\theta = r/R$, uvrštavanjem u jednadžbu (75) dolazi se do:

$$\lambda_{\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta}} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad (76)$$

nadalje, potrebno je R^2 zamijeniti s jednadžbom (67), pa će jednadžba (76) sada glasiti:

$$\lambda_{\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta}} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{r^2}{(r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2} - \frac{(r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{(r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2} - \frac{(r^2 - a^2) \cdot \lambda_z + A^2}{r^2} \right). \quad (77)$$

Jednadžba (77) uvrštava se u jednadžbu (52) čime se dolazi do konačne jednadžbe za računanje tlaka za *Mooney-Rivlin* materijalni model:

$$p^{mod} = 2C_1 \int_a^b \left(\frac{r}{(r^2 - a^2)\lambda_z + A^2} - \frac{(r^2 - a^2)\lambda_z + A^2}{r^3 \lambda_z^2} \right) dr + 2C_2 \int_a^b \left(\frac{r \lambda_z^2}{(r^2 - a^2)\lambda_z + A^2} - \frac{(r^2 - a^2)\lambda_z + A^2}{r^3} \right) dr. \quad (78)$$

6.1.1.3. Modelirani tlak za HGO funkciju energije deformiranja

Izvod za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model je u odnosu na prethodna dva nešto kompleksniji, ponovno se kreće od funkcije energije deformiranja, no u ovom slučaju odvojeno se promatraju izotropni i anizotropni dio:

$$W = W_{iso} + W_{aniso}. \quad (79)$$

Krene li se od izotropnog dijela funkcije energije deformiranja *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela koja glasi:

$$W_{iso} = C_1 \cdot (I_1 - 3), \quad (80)$$

lako je primijetiti da je ona jednaka funkciji energije deformiranja *Neo-Hooke* materijalnog modela. Prema tome, izraz za računanje tlaka izotropnog dijela funkcije energije deformiranja *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela glasi:

$$p_{iso}^{mod} = 2 \cdot C_1 \cdot \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 \cdot r^2} \right) \frac{dr}{r}. \quad (81)$$

U izrazu (81) potrebno je R^2 , kao i u prethodnim slučajevima, zamijeniti s jednadžbom (67), no zbog pojednostavljenja će taj dio ovdje biti izostavljen.

Anizotropni dio funkcije energije deformiranja *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela glasi:

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left[k_2 (I_{4,6} - 1)^2 \right] - 1 \right\}. \quad (82)$$

Raspisivanjem jednadžbe (82) i uvrštavanjem izraza (42) za invarijantu $I_{4,6}$ i kuta $\alpha = 45^\circ$ dolazi se do:

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left[k_2 (I_{4,6}^2 - 2I_{4,6} + 1) \right] - 1 \right\}, \quad (83)$$

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left[k_2 \left(\frac{1}{4} \lambda_\theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \lambda_\theta^2 - \lambda_z^2 + 1 \right) \right] - 1 \right\}, \quad (84)$$

odnosno:

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \lambda_\theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \lambda_\theta^2 - \lambda_z^2 + 1 \right)} - 1. \quad (85)$$

Parcijalnim deriviranjem $\frac{\partial}{\partial \lambda_\theta}$ jednadžbe (85) dolazi se do:

$$\frac{\partial W_{\text{aniso}}}{\partial \lambda_\theta} = k_1 \lambda_\theta \cdot (\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 2) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \lambda_\theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \lambda_\theta^2 - \lambda_z^2 + 1 \right)}. \quad (86)$$

Da bi se dobio cijeli član koji se nalazi pod integralom u jednadžbi (52), jednadžbu (86) potrebno je pomnožiti s λ_θ , te će ona tada glasiti:

$$\lambda_\theta \frac{\partial W_{\text{aniso}}}{\partial \lambda_\theta} = k_1 \lambda_\theta^2 \cdot (\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 2) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \lambda_\theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \lambda_\theta^2 - \lambda_z^2 + 1 \right)}. \quad (87)$$

Iz jednadžbe (22) poznato je da je $\lambda_\theta = r/R$, uvrštavanjem u jednadžbu (87) ona će glasiti:

$$\lambda_\theta \frac{\partial W_{\text{aniso}}}{\partial \lambda_\theta} = k_1 \frac{r^2}{R^2} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)}. \quad (88)$$

Vračanjem jednadžbe (88) u jednadžbu (52) dolazi se do izraza za računanje tlaka anizotropnog dijela funkcije energije deformiranja *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela:

$$P_{\text{aniso}}^{\text{mod}} = \int_a^b \left(k_1 \frac{r^2}{R^2} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)} \right) \frac{dr}{r}. \quad (89)$$

U izrazu (89) potrebno je R^2 , kao i u prethodnim slučajevima, zamijeniti s jednadžbom (67), no zbog pojednostavljenja će taj dio ovdje biti izostavljen.

6.1.2. Izvod aksijalne sile N i reducirane sile F po materijalnim modelima

Kao i kod tlaka, izrazi za aksijalnu silu N i reduciranu aksijalnu silu F ovise o materijalnom modelu za koji se koriste. Prema tome će u nastavku biti izvedeni izrazi za računanje aksijalne sile N i reducirane aksijalne sile F za *Neo-Hooke*, *Mooney-Rivlin* i *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model. Iz izraza (60) vidljivo je da je drugi član jednadžbe za aksijalnu silu, $\lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta}$, jednak podintegralnom članu jednadžbe za tlak P (52), pa će u nastavku ovog proračuna koncentracija biti na prvom članu jednadžbe za aksijalnu silu, odnosno $\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z}$.

6.1.2.1. Modelirana reducirana aksijalna sila za *Neo-Hooke* funkciju energije deformiranja

Parcijalnom derivacijom funkcije energije deformiranja *Neo-Hooke* materijalnog modela (57) po λ_z , dolazi se do:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_z - 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_\theta^{-2} \cdot \lambda_z^{-3}, \quad (90)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_z - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^3} \right). \quad (91)$$

Kako bi dobili prvi član integrala jednadžbe (52), potrebno je jednadžbu (91) pomnožiti s λ_z :

$$\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^2} \right). \quad (92)$$

Ponovno je potrebno zamijeniti član λ_θ s r/R , pa će jednadžba (92) glasiti:

$$\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right). \quad (93)$$

Sada je moguće u jednadžbu (57) uvrstiti jednadžbe (61) i (93) te se dolazi do konačnog izraza za računanje aksijalne sile kod *Neo-Hooke* materijalnog modela:

$$N = 2 \cdot C_1 \cdot \pi \int_a^b \left(2 \cdot \lambda_z^2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r \, dr + \pi \cdot a^2 \cdot P. \quad (94)$$

Također je moguće prema izrazu (53) napisati konačan izraz za računanje reducirane aksijalne sile kod *Neo-Hooke* materijalnog modela koji glasi:

$$F^{mod} = 2 \cdot C_1 \cdot \pi \int_a^b \left(2 \cdot \lambda_z^2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r \, dr. \quad (95)$$

6.1.2.2. Modelirana reducirana aksijalna sila za Mooney-Rivlin funkciju energije deformiranja

Parcijalnom derivacijom funkcije energije deformiranja za *Mooney-Rivlin* materijalni model (70) po λ_z dolazi se do:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_z - 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_z^{-3} \lambda_\theta^{-2} + 2 \cdot C_2 \cdot \lambda_z \lambda_\theta^2 - 2 \cdot C_2 \cdot \lambda_z^{-3}, \quad (96)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_z - \lambda_z^{-3} \lambda_\theta^{-2}) + 2 \cdot C_2 \cdot (\lambda_z \lambda_\theta^2 - \lambda_z^{-3}), \quad (97)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_z - \frac{1}{\lambda_z^3 \lambda_\theta^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\lambda_z \lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_z^3} \right). \quad (98)$$

Kako bi došli do prvog člana pod integralom u jednadžbi (54) potrebno je jednadžbu (98) pomnožiti s λ_z :

$$\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_z^2 \lambda_\theta^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\lambda_z^2 \lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_z^2} \right). \quad (99)$$

Potrebno je λ_θ zamijeniti s r/R prema jednadžbi (22), pa će jednadžba (99) sada glasiti:

$$\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = 2 \cdot C_1 \cdot \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{1}{\lambda_z^2} \right). \quad (100)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (76) i (100) u jednadžbu (54) dolazi se do konačnog izraza za aksijalnu silu N za *Mooney-Rivlin* materijalni model:

$$\begin{aligned} N = \pi \int_a^b & \left(4C_1 \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) + 4C_2 \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{1}{\lambda_z^2} \right) \right. \\ & \left. - 2C_1 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) - 2C_2 \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \right) r \, dr \\ & + \pi a^2 P. \end{aligned} \quad (101)$$

Također je moguće prema izrazu (53) napisati konačan izraz za računanje reducirane aksijalne sile kod *Mooney-Rivlin* materijalnog modela koji glasi:

$$F^{mod} = \pi \int_a^b \left(4C_1 \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) + 4C_2 \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{1}{\lambda_z^2} \right) - 2C_1 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) - 2C_2 \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \right) r dr. \quad (102)$$

6.1.2.3. Modelirana reducirana aksijalna sila za Holzapfel-Gasser-Ogden funkciju energije deformiranja

Za Holzapfel-Gasser-Ogden materijalni model ponovno će se krenuti od funkcije energije deformiranja, no u ovom slučaju će se odvojeno promatrati izotropni i anizotropni dio. Kao i za tlak, i u ovom slučaju je izotropni dio funkcije energije deformiranja jednak funkciji energije deformiranja za Neo-Hooke materijalni model, pa će jednadžba za aksijalnu silu izotropnog dijela funkcije energije deformiranja glasiti:

$$N_{iso} = 2 \cdot C_1 \cdot \pi \int_a^b \left(2 \cdot \lambda_z^2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r dr + \pi \cdot a^2 \cdot P. \quad (103)$$

Iz čega slijedi konačna jednadžba za reduciranu aksijalnu silu izotropnog dijela funkcije energije deformiranja Holzapfel-Gasser-Ogden materijalnog modela:

$$F_{iso}^{mod} = 4\pi C_1 \int_a^b \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r dr - 2\pi C_1 \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r dr.$$

Anizotropni dio funkcije energije deformiranja Holzapfel-Gasser-Ogden materijalnog modela prema izrazu (85) potrebno je derivirati po λ_z :

$$\frac{\partial W_{aniso}}{\partial \lambda_z} = k_1 \lambda_z \cdot (\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 2) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \lambda_\theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \lambda_\theta^2 - \lambda_z^2 + 1 \right)}. \quad (104)$$

Kako bi dobili prvi član integrala jednadžbe (53), potrebno je jednadžbu (104) pomnožiti s λ_z :

$$\lambda_z \frac{\partial W_{aniso}}{\partial \lambda_z} = k_1 \lambda_z^2 \cdot (\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 - 2) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \lambda_\theta^4 + \frac{1}{2} \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \lambda_\theta^2 - \lambda_z^2 + 1 \right)}. \quad (105)$$

Ponovno je potrebno zamijeniti član λ_θ s r/R , pa će jednadžba (105) glasiti:

$$\lambda_z \frac{\partial W_{aniso}}{\partial \lambda_z} = k_1 \lambda_z^2 \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)}. \quad (106)$$

Sada je moguće u jednadžbu (53) uvrstiti jednadžbe (88) i (106) te se dolazi do konačnog izraza za računanje aksijalne sile anizotropnog dijela funkcije energije deformiranja kod *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela.

Također, moguće je izvesti izraz za računanje reducirane aksijalne sile *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela za anizotropni dio W :

$$\begin{aligned}
 F_{\text{aniso}}^{\text{mod}} = & 2\pi \int_a^b \left(k_1 \lambda_z^2 \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \right. \\
 & \cdot e^{k_2 \left(\frac{1r^4}{4R^4} + \frac{1r^2}{2R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)} \Big) r \, dr \\
 & - \pi \int_a^b \left(k_1 \frac{r^2}{R^2} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \right. \\
 & \cdot e^{k_2 \left(\frac{1r^4}{4R^4} + \frac{1r^2}{2R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)} \Big) r \, dr .
 \end{aligned} \tag{107}$$

6.1.3. Konačni izrazi za izračun tlakova i sila po materijalnim modelima

Radi lakšeg razumijevanja, u Tablici 1, navedeni su svi korišteni materijalni modeli te odgovarajuće formule za izračun tlaka P^{mod} i reducirane aksijalne sile F^{mod} , koji se koriste za funkciju cilja (51).

Tablica 1. Materijalni modeli s odgovarajućim izrazima za P^{mod} i F^{mod}

Neo-Hooke
$P^{\text{mod}} = 2 \cdot C_1 \cdot \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 \cdot r^2} \right) \frac{dr}{r}$
$F^{\text{mod}} = 2 \cdot C_1 \cdot \pi \int_a^b \left(2 \cdot \lambda_z^2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r \, dr$
Mooney-Rivlin
$P^{\text{mod}} = 2C_1 \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) \frac{dr}{r} + 2C_2 \int_a^b \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \frac{dr}{r}.$
$F^{\text{mod}} = \pi \int_a^b \left(4C_1 \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) + 4C_2 \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{1}{\lambda_z^2} \right) - 2C_1 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \lambda_z^2} \right) \right. \\ \left. - 2C_2 \left(\frac{r^2 \lambda_z^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \right) r \, dr$

Holzapfel-Gasser-Ogden

$$P_{\text{iso}}^{\text{mod}} = 2 \cdot C_1 \cdot \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 \cdot r^2} \right) \frac{dr}{r}$$

$$P_{\text{aniso}}^{\text{mod}} = \int_a^b \left(k_1 \frac{r^2}{R^2} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1r^4}{4R^4} + \frac{1r^2}{2R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)} \right) \frac{dr}{r}$$

$$P^{\text{mod}} = P_{\text{iso}}^{\text{mod}} + P_{\text{aniso}}^{\text{mod}}$$

$$F_{\text{iso}}^{\text{mod}} = 4\pi C_1 \int_a^b \left(\lambda_z^2 - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r \, dr - 2\pi C_1 \int_a^b \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2 \cdot \lambda_z^2} \right) r \, dr$$

$$F_{\text{aniso}}^{\text{mod}} = 2\pi \int_a^b \left(k_1 \lambda_z^2 \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1r^4}{4R^4} + \frac{1r^2}{2R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)} \right) r \, dr$$

$$- \pi \int_a^b \left(k_1 \frac{r^2}{R^2} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} + \lambda_z^2 - 2 \right) \cdot e^{k_2 \left(\frac{1r^4}{4R^4} + \frac{1r^2}{2R^2} \lambda_z^2 + \frac{1}{4} \lambda_z^4 - \frac{r^2}{R^2} - \lambda_z^2 + 1 \right)} \right) r \, dr$$

$$F^{\text{mod}} = F_{\text{iso}}^{\text{mod}} + F_{\text{aniso}}^{\text{mod}}$$

U svim navedenim izrazima (Tablica 1) potrebno je R^2 zamijeniti s jednadžbom (67).

7. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja je nezaobilazna u inženjerskim proračunima [12]. Danas postoji veliki broj računalnih programa temeljenih na metodi konačnih elemenata, koji inženjerima omogućuju analizu konstrukcija. Metoda konačnih elemenata približna je numerička metoda [12]. Rješenja dobivena programima za analizu konstrukcija su približna, a njihova točnost ovisi će o izboru odgovarajućeg proračunskog modela te o pravilno odabranim konačnim elementima koji mogu realno opisati proces deformiranja.

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma [12]. Kada se razmatra kontinuum, radi se o tijelu s beskonačno stupnjeva slobode gibanja. Diskreditacijom kontinuuma, tijelo s beskonačno stupnjeva slobode zamjenjuje se diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Tim postupkom razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata. Konačni elementi povezani su točkama na konturi koje se nazivaju čvorovi [12].

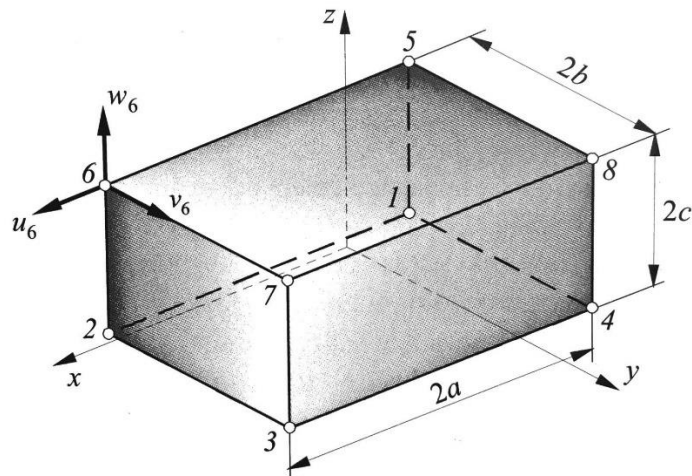
Polje pomaka, deformacije, naprezanja i sl., opisuju se pomoću interpolacijskih funkcija. Te funkcije moraju zadovoljavati odgovarajuće uvjete da bi se diskretizirani model što više približio ponašanju kontinuiranog sustava [12]. Povećanjem broja konačnih elemenata, točnost rješenja će biti viša.

Kada je potrebno opisati ponašanje mekih biološka tkiva i elastomernih materijala, koriste se hiperelaslični materijalni modeli te za njih vrijedi pretpostavka o nestalčivosti. Konačni elementi koji se koriste za opis nestlačivog ponašanja materijala izvedeni su pomoću hibridne formulacije [10].

Za rješavanje složenih konstrukcija primjenom metode konačnih elemenata nužna je primjena računala odnosno odgovarajućih računalnih programa. U ovom radu za numeričku analizu metodom konačnih elemenata koristit će se programski paket *Abaqus*.

7.1. Heksaedarski konačni element

Heksaedarski konačni elementi su elementi u obliku paralelopipeda s osam čvorova i po tri stupnja slobode u svakom od njih, ukupno 24 stupnja slobode. Stupnjevi slobode gibanja predstavljaju pomake u smjeru koordinatnih osi u , v i w . Ishodište koordinatnog sustava najčešće se postavlja u težište elementa [12]. Slika 7 prikazuje heksaedarski konačni element s pripadnim stupnjevima slobode za čvor 6.



Slika 7. Heksaedarski konačni element [12]

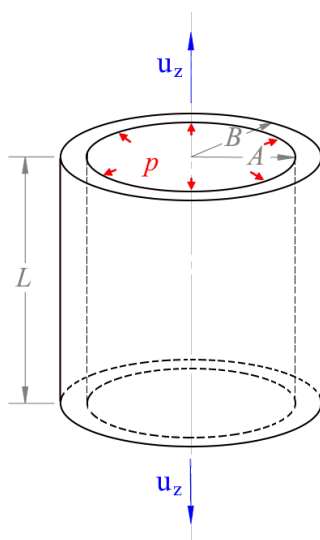
Raspodjela pomaka kod heksaedarskog konačnog elementa opisana je nepotpunim polinomom trećeg stupnja, takva raspodjela omogućuje zadovoljavanje svih potrebnih kriterija za monotonu konvergenciju rješenja [12].

U programskom paketu *Abaqus*, oznaka heksaedarskog konačnog elementa izvedenog hibridnom formulacijom je C3D8H.

8. Simulacija eksperimenta

Kako bi mogao biti proveden postupak određivanja materijalnih parametara opisan u poglavlju 6, osim izračunatih vrijednosti tlakova P^{mod} i sila F^{mod} , potrebno je iz eksperimenta dobiti vrijednosti P^{FEM} i F^{FEM} , ali i unutarnje i vanjske radijuse (a i b) te duljinu modela (l) u trenutnoj (deformiranoj) konfiguraciji. U ovom radu je umjesto stvarnog eksperimenta biti će korištena simulacija eksperimenta u programskom paketu *Abaqus*.

U nastavku će detaljnije biti objašnjen postupak zadavanja i provođenja simulacije u programskom paketu *Abaqus*. Postupak se ponavlja za svaki materijalni model te su rubni uvjeti i opterećenje isti u sva tri slučaja, dok se početna geometrija i predistezanje u aksijalnom smjeru (zadano u obliku pomaka) razlikuju, što će naknadno za svaki materijalni model biti detaljnije objašnjeno. Slika 8 prikazuje model cilindra, pomake u aksijalnom smjeru i opterećenje na tlak kakvo će biti zadano u simulaciji unutar programa *Abaqus*.



Slika 8. Prikaz zadane geometrije i opterećena

Za sva tri materijalna modela koristi će se osmina modela, a tlak kojim će intraluminarno biti opterećen model arterije iznosi:

$$p = 120 \text{ mmHg} = 16 \text{ kPa} = 0,016 \text{ MPa} \quad (108)$$

8.1. Postupak zadavanja simulacije

U nastavku će biti opisan postupak zadavanja i provođenja simulacije u programskom paketu *Abaqus* prema kategorijama zadavanja geometrije, materijalnih parametara, koraka, rubnih uvjeta i opterećenja te mreže konačnih elemenata.

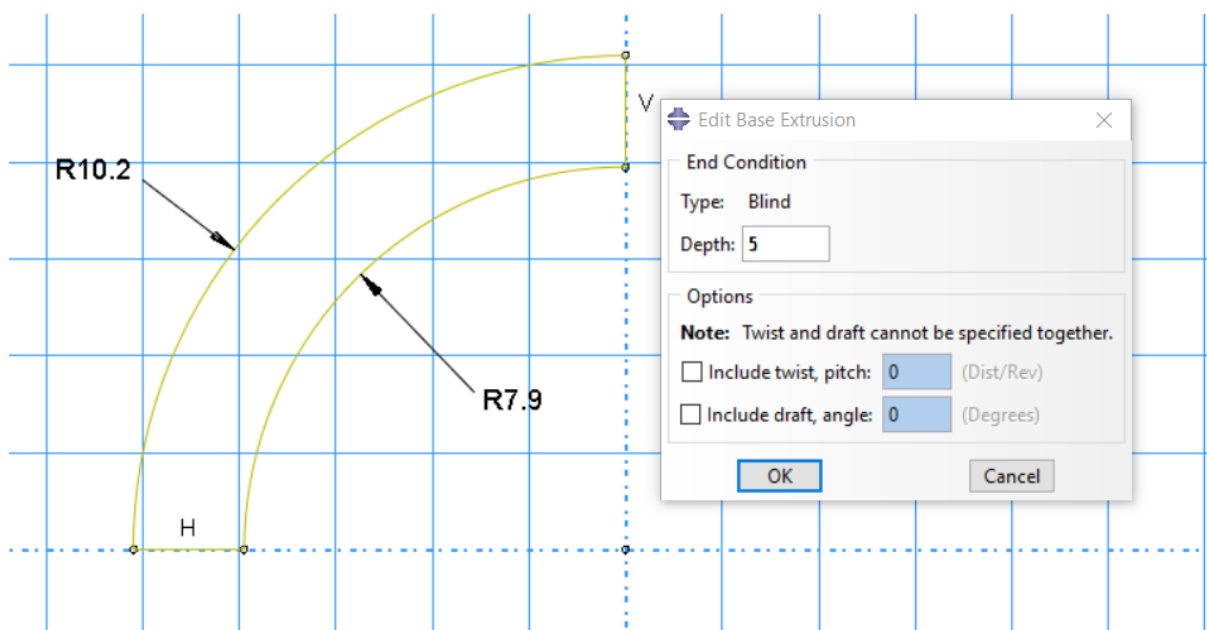
8.1.1. Geometrija

Prvi korak u zadavanju simulacije je zadavanje početne geometrije. Kako je već navedeno, za sva tri materijalna modela korištena je osmina modela, no početne dimenzije unutarnjih i vanjskih radijusa se razlikuju od modela do modela, dodijeljene su od strane mentora te su bazirane na pojednostavljenju modela opisanog u [13]. Tablica 2 prikazuje početne (referentne) unutarnje i vanjske radijuse za svaki korišteni materijalni model. Početna duljina L je ista za sva tri slučaja i iznosi 10 mm.

Tablica 2. Referentna geometrija po materijalnim modelima

Materijalni model	Referentni unutarnji radijus A	Referentni vanjski radijus B	Referentna duljina L
<i>Neo-Hooke</i>	7,9 mm	10,2 mm	10 mm
<i>Mooney-Rivlin</i>	7,39 mm	9,897 mm	10 mm
<i>Holzappel-Gasser-Ogden</i>	8,856 mm	10,8 mm	10 mm

Slika 9 prikazuje zadavanje geometrije za *Neo-Hooke* materijalni model. Postupak je isti za sva tri materijalna modela.



Slika 9. Zadavanje geometrije *Neo-Hooke* materijalnog modela

8.1.2. Materijalni parametri

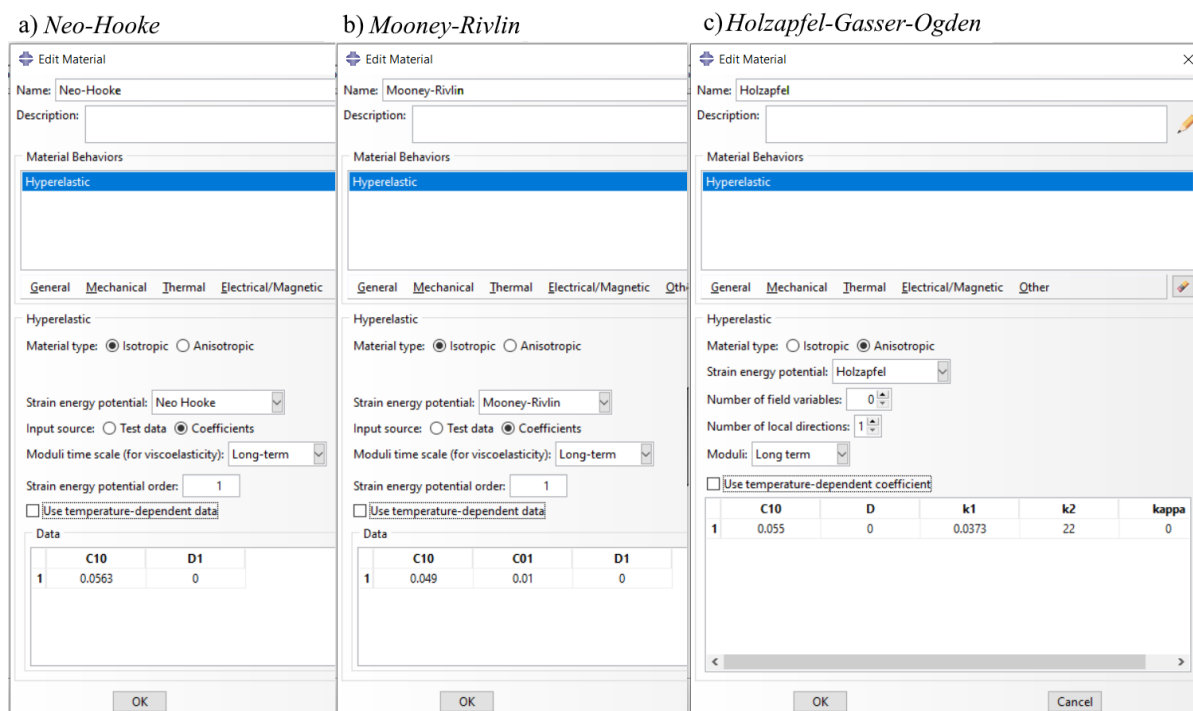
Nakon geometrije, dolazi red na zadavanje materijala i materijalnih parametara. Materijalni parametri razlikuju se ovisno o materijalnom modelu koji se koristi. *Neo-Hooke*

materijalni model ima jednu materijalnu konstantu C_1 , *Mooney-Rivlin* dvije C_1 i C_2 , dok *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model ima tri materijalne konstante C_1 , k_1 i k_2 . Za sva ti materijalna modela radi se o nestlačivom materijalu, pa će se prilikom zadavanja materijalnih konstanti za parametar $D_1(D)$ upisati vrijednost 0, kojom se definira to svojstvo. Tablica 3 prikazuje vrijednosti materijalnih parametara po materijalnim modelima.

Tablica 3. Materijalni parametri po materijalnim modelima

Materijalni model	Materijalni parametri
<i>Neo-Hooke</i>	$C_1 = 0,0563$ MPa
<i>Mooney-Rivlin</i>	$C_1 = 0,049$ MPa , $C_2 = 0,01$ MPa
<i>Holzappel-Gasser-Ogden</i>	$C_1 = 0,055$ MPa, $k_1 = 0,0373$ MPa , $k_2 = 22$

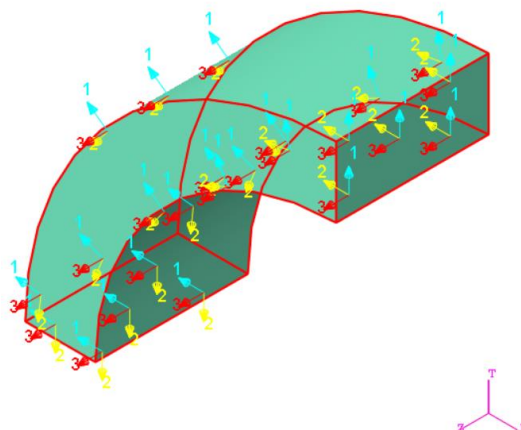
Slika 10 prikazuje zadavanje materijalnih parametara za svaki materijalni model.



Slika 10. Zadavanje materijalnih parametara za a) *Neo-Hooke*, b) *Mooney-Rivlin* i c) *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model

Iz postupka zadavanja materijalnih parametara *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela koji prikazuje Slika 10 c), može se primijetiti da se osim navedenih parametara C_1 , k_1 i k_2 , zadaje i parametar κ . U promatranom slučaju smatra se da disperzije vlakana kolagena nema, te je parametar $\kappa = 0$.

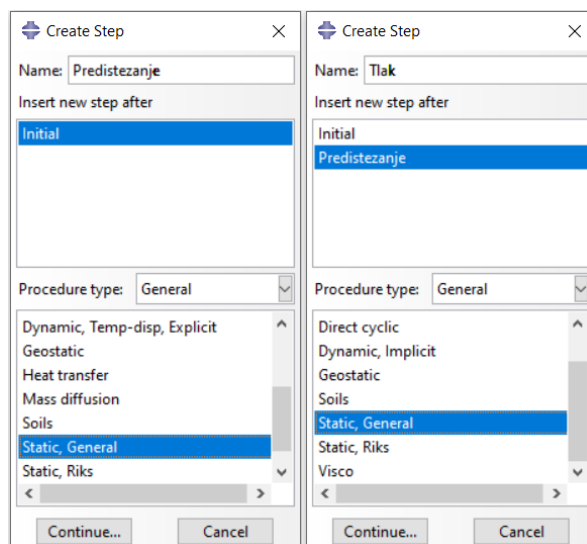
Osim navedenih parametara, potrebni je zadati i lokalni cilindrični koordinatni sustav, koji će za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model bit zaokrenut pod kutom $\alpha = 45^\circ$. Slika 11 prikazuje zadavanje lokalnog cilindričnog koordinatnog sustava.



Slika 11. Zadavanje lokalnog cilindričnog koordinatnog sustava

8.1.3. Koraci predistezanja i opterećenja

U realnom *in vivo* stanju, arterija je predistegnuta u aksijalnom smjeru. U simulaciji će se takvo stanje postići u prvom koraku u kojem će se model produljiti u aksijalnom smjeru za određeni λ_z , dok će u drugom koraku na model arterije uz predistezanje djelovati i intraluminarni tlak. Slika 12 prikazuje zadavanje prvog koraka "Predistezanje" i drugog koraka "Tlak".



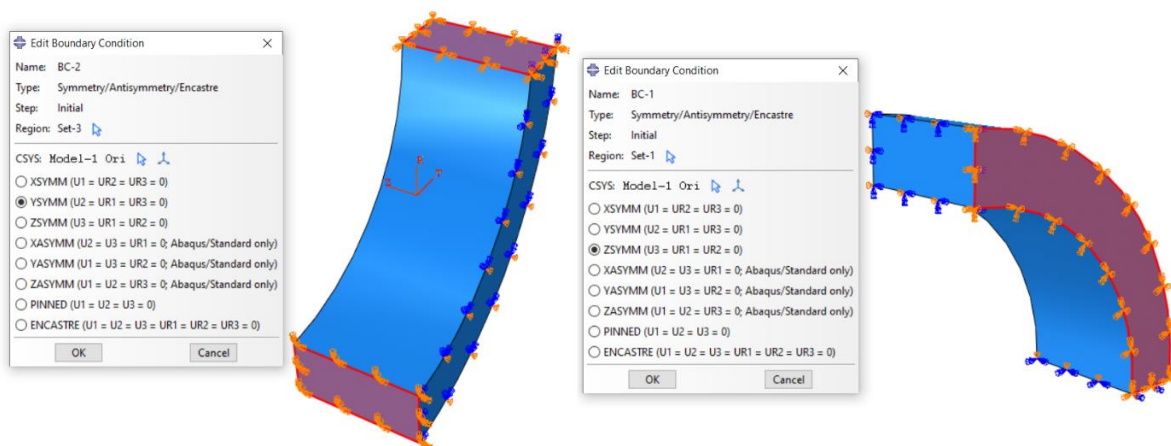
Slika 12. Zadavanje koraka

U sva tri slučaja koristi se teorija velikih deformacija (*nlgeom*) i broj inkremenata u koraku "Tlak", za sva tri materijalna modela, zadan je na 100. Broj inkremenata bit će bitan u

postupku određivanja materijalnih parametara, kako broj konačnih elemenata utječe na točnost rezultata, tako će i broj inkremenata doprinijeti većoj preciznosti prilikom određivanja materijalnih parametara.

8.1.4. Rubni uvjeti

S obzirom da se simulacija provodi za osminu modela, potrebno je postaviti rubne uvjete simetrije. Rubne uvjete potrebno je postaviti u inicijalnom koraku ili u koraku "Predistezanje". Potrebno je postaviti x-simetriju, y-simetriju i z-simetriju, odnosno ako se radi o lokalnom cilindričnom koordinatnom sustavu, postavljaju se dvije simetrije u cirkularnom smjeru i jedna u aksijalnom smjeru. Slika 13 prikazuje model sa zadanim rubnim uvjetima u lokalnom cilindričnom koordinatnom sustavu. Za sva tri materijalna modela, zadavanje rubnih uvjeta provodi se na isti način.



Slika 13. Model sa zadanim rubnim uvjetima

8.1.5. Predistezanje i opterećenje

U sva tri slučaja, na model arterije djeluje istežanje u aksijalnom smjeru i tlak. Kao što je ranije navedeno, za sva tri materijalna modela, tlak će biti jednak i iznosi $p = 0,016$ MPa, dok će predistežanje biti drugačije. Za *Neo-Hooke* materijalni model pretpostavljena vrijednost istežanja u aksijalnom smjeru iznosi:

$$\lambda_z = \frac{l}{L} = 1,2, \quad (109)$$

gdje je poznata početna duljina uzorka L jednaka:

$$L = 10 \text{ mm}, \quad (110)$$

trenutna vrijednost duljine uzorka l može se izračunati:

$$l = \lambda_z \cdot L, \quad (111)$$

$$l = 1,2 \cdot 1 = 12 \text{ mm}. \quad (112)$$

Nakon što su poznate početna i konačna duljina, potrebno je izračunati pomak u aksijalnom smjeru koji iznosi:

$$l_{\Delta} = l - L, \quad (113)$$

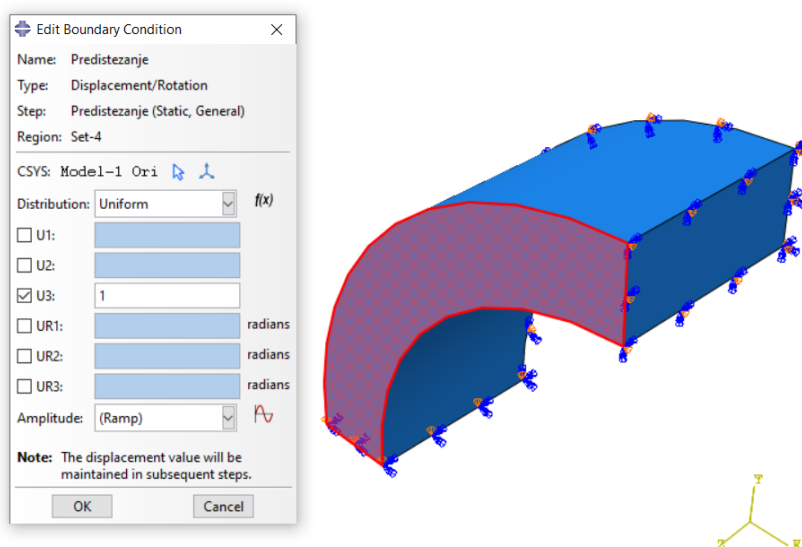
$$l_{\Delta} = 12 - 10 = 2 \text{ mm}. \quad (114)$$

S obzirom da se u *Abaqusu* ne koristi cijeli model, već samo osmina sa simetrijom u aksijalnom smjeru, potrebno je za predistezanje unijeti samo polovicu pomaka, odnosno 1 mm. Tablica 4 prikazuje odabrana vrijednost istežanja u aksijalnom smjeru za svaki materijalni model i odgovarajući pomak koji se zadaje.

Tablica 4. Pretpostavljeno istežanje u aksijalnom smjeru za svaki materijalni model

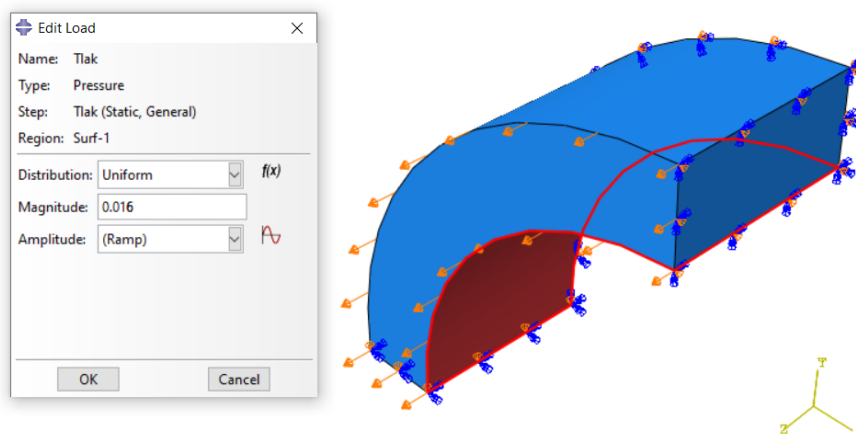
Materijalni model	Istežanje u aksijalnom smjeru	Pomak koji se zadaje u aksijalnom smjeru
<i>Neo-Hooke</i>	$\lambda_z = 1,2$	1 mm
<i>Mooney-Rivlin</i>	$\lambda_z = 1,2$	1 mm
<i>Holzappel-Gasser-Ogden</i>	$\lambda_z = 1,1$	0,5 mm

Predistezanje, odnosno pomak u aksijalnom smjeru, zadaje se u obliku rubnog uvjeta pomaka u koraku "Predistezanje". Slika 14 prikazuje zadavanje predistezanja za *Neo-Hooke* materijalni model, postupak je jednak za sva tri slučaja, razlikuju se samo zadane vrijednosti pomaka. Pomak je zadan u lokalnom cilindričnom koordinatnom sustavu.



Slika 14. Zadavanje pomaka u aksijalnom smjeru za *Neo-Hooke* materijalni model

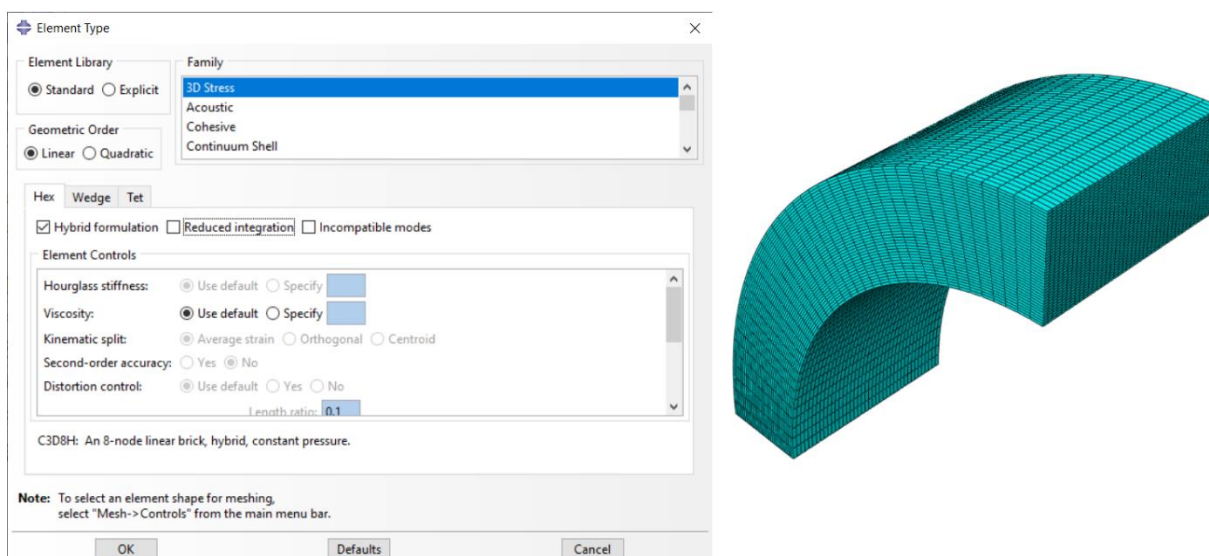
Zadavanje opterećenja na tlak jednako je za sva tri materijalna modela, prilikom tog postupka nije potrebno odabrati određeni koordinatni sustav, no potrebno je opterećenje zadati u koraku "Tlak". Vrijednost tlaka koja se upisuje prilikom zadavanja opterećenja je 0,016 MPa. Slika 15 prikazuje zadavanje intraluminalnog tlaka na modelu arterije.



Slika 15. Zadavanje intraluminalnog tlaka

8.1.6. Mreža konačnih elemenata

U poglavlju 7.1, opisan je heksaedarski konačni element izveden hibridnom formulacijom. Konačni elementi izvedeni hibridnom formulacijom koriste se za opisivanje ponašanja hiperelastičnih nestlačivih materijala. Oznaka opisanog elementa u programskom paketu *Abaqus* je C3D8H. Za sva tri materijalna modela postupak zadavanja mreže konačnih elemenata odvija se na isti način. Slika 16 prikazuje zadanu mrežu konačnih elemenata za model arterije.



Slika 16. Mreža konačnih elemenata

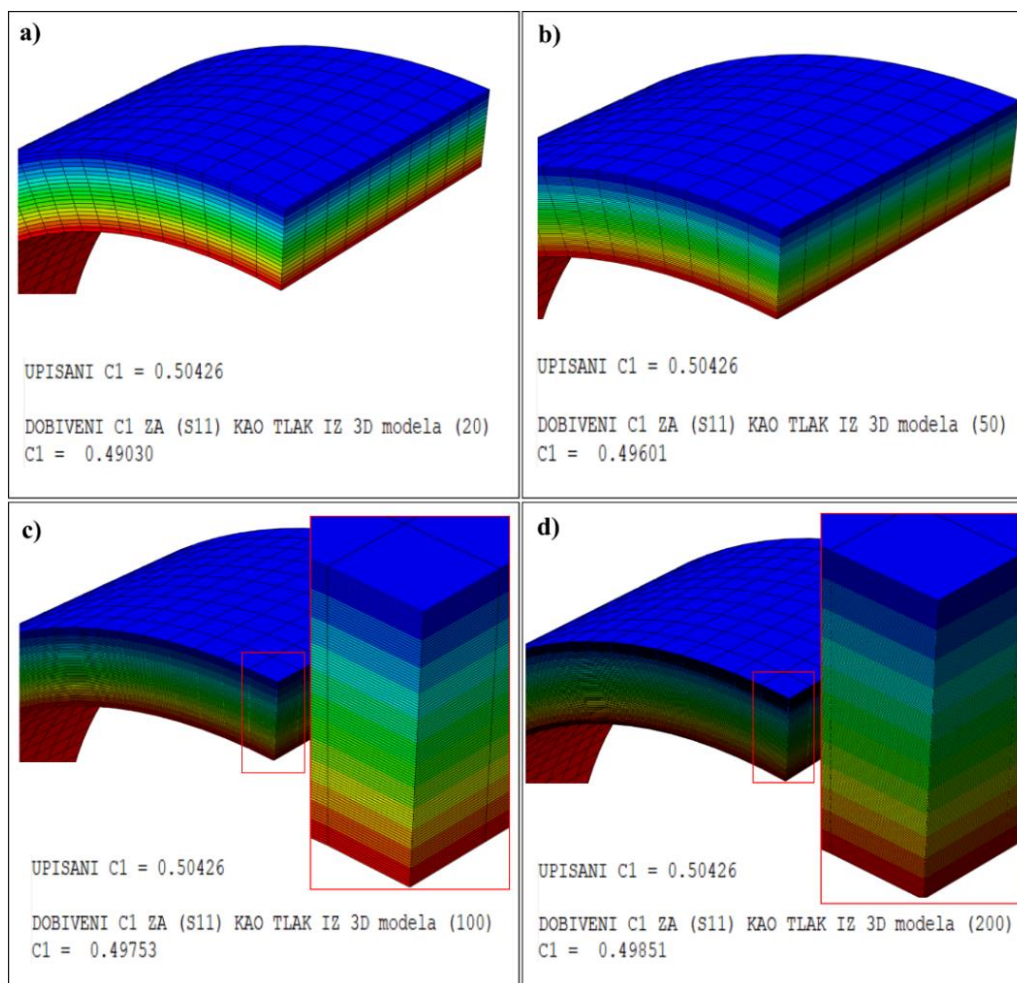
Broj konačnih elemenata igra veliku ulogu u točnosti rješenja, što je broj konačnih elemenata veći to je rješenje točnije, no veći broj elemenata uzrokovati će i duže vrijeme proračuna konstrukcije. Potrebno je naći optimalan broj konačnih elemenata za točno rješenje uz prihvatljivo vrijeme trajanja simulacije, o čemu će više biti rečeno u sljedećem poglavlju.

8.2. Konvergencija

Kao što je prethodno navedeno, potrebno je pronaći optimalan broj konačnih elemenata za točno rješenje uz prihvatljivo vrijeme trajanja simulacije. Optimalan broj konačnih elemenata moguće je odrediti promatranjem konvergencije rješenja. U nastavku će biti mijenjan broj konačnih elemenata po debljini stijenke i po obodu te će biti promatran utjecaj broja konačnih elemenata na točnost rješenja.

8.2.1. Utjecaj broja konačnih elemenata po debljini stijenke na konačni rezultat

Napravljena su četiri modela arterije, *Neo-Hooke* materijalnog modela, u programu *Abaqus*, gdje je broj konačnih elemenata po debljini stijenke postavljen na 20, 50, 100 i 200. Radi jednostavnosti, za potrebe promatranja konvergencije, dovoljno je model opteretiti na tlak bez predistezanja. Vrijednost zadanog materijalnog parametra u ovom slučaju će iznositi $C_1 = 0,50426$ MPa. Rezultati svake simulacije uneseni su u program *Octave*, gdje je za svaki od slučajeva, metodom najmanjih kvadrata, izračunat materijalni parametar C_1 . Slika 17 prikazuje rezultate ove analize.

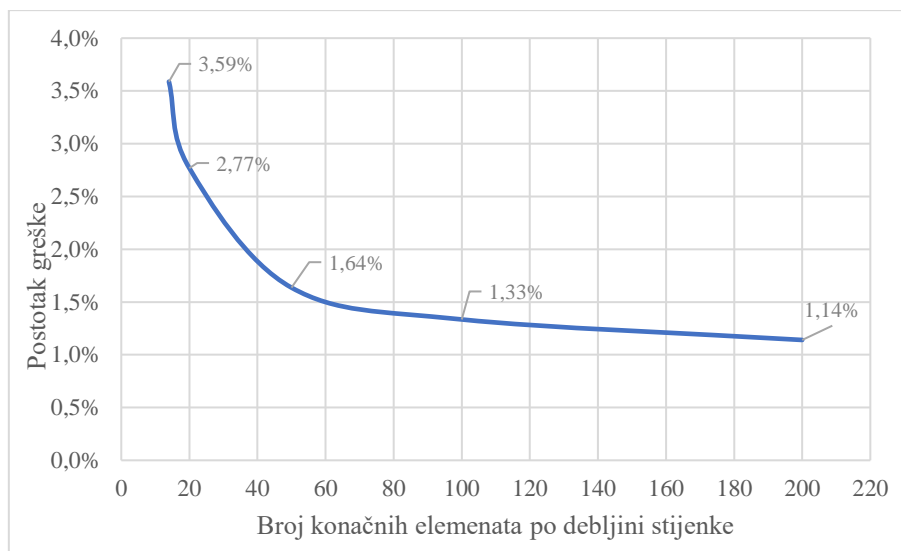


Slika 17. Rezultati analize za promjenu broja konačnih elemenata po debljini stijenke: a)20, b)50, c)100 i d)200

Iz prikazanih rezultata lako je izračunati postotak greške za svaki slučaj, postotak greške prikazuje Tablica 5. Slika 18 prikazuje graf konvergencije greške u odnosu na broj konačnih elemenata.

Tablica 5. Greška s obzirom na broj elemenata po debljini stijenke

Broj konačnih elemenata po debljini stijenke	20	50	100	200
Izračunati C_1 [MPa]	0,49030	0,49601	0,49753	0,49851
Greška u odnosu na upisani $C_1 = 0,50426$ MPa	2,77 %	1,64 %	1,33 %	1,14 %



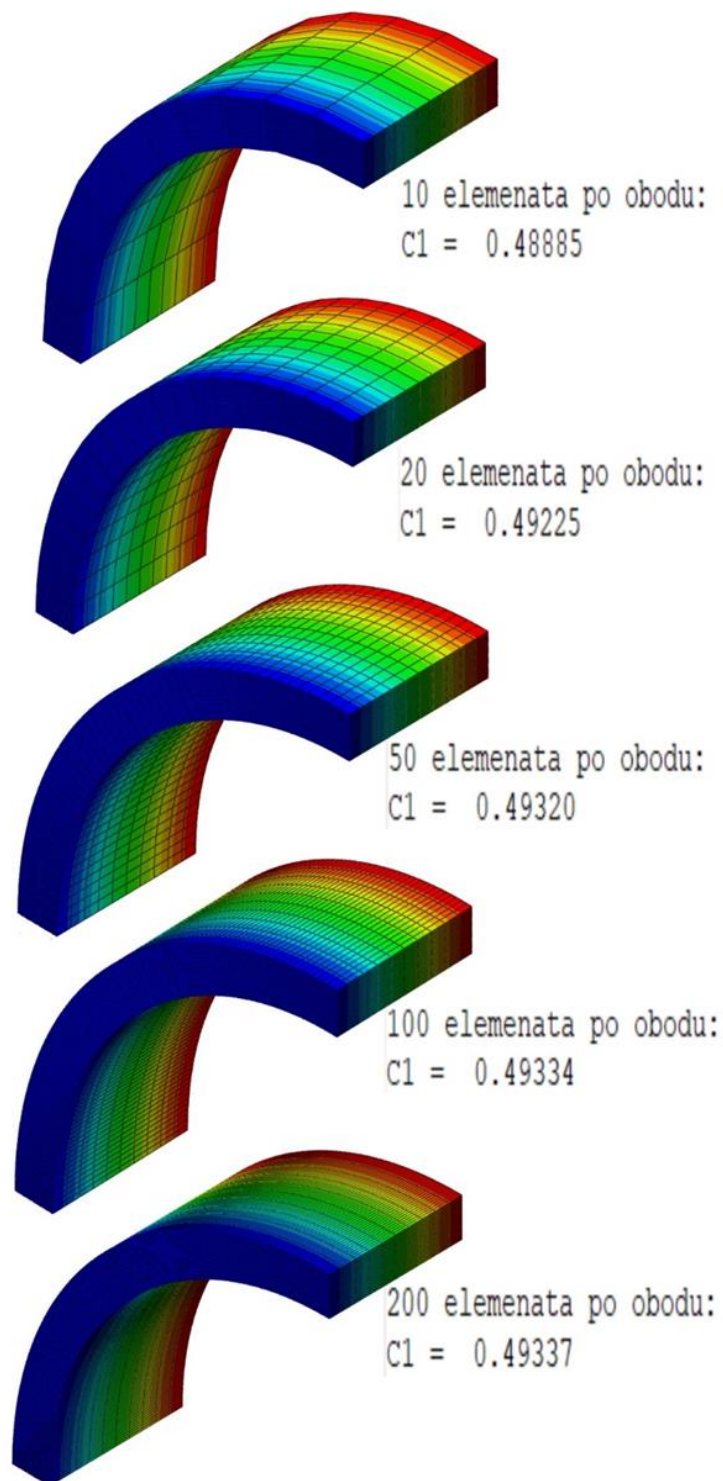
Slika 18. Graf greške u odnosu na broj konačnih elemenata po debljini stijenke

Iz prikazanog grafa (Slika 18) vidljivo je da se greška drastično smanjila između 20 i 50 konačnih elemenata po debljini stijenke, što potvrđuje ranije navedeni zaključak. Daljnjim povećanjem broja konačnih elemenata tendencija smanjenja greške se nastavlja, no puno blaže ili čak neznatno. S obzirom da se vrijeme izračuna simulacije drastično povećava sa porastom broja konačnih elemenata, valja zaključiti da je 50 optimalan broj konačnih elemenata po debljini stijenke koji će dati zadovoljavajući rezultat uz prihvatljivo vrijeme simulacije.

8.2.2. Utjecaj broja konačnih elemenata po obodu stijenke na konačan rezultat

Kako je u prethodnom poglavlju povećavan broj konačnih elemenata po debljini stijenke te je prikazana konvergencija rezultata, tako će u ovom poglavlju biti prikazano povećanje broja konačnih elemenata po obodu stijenke, te kako ta promjena utječe na rezultat.

Napravljeno je pet modela, za *Neo-hooke* materijalni model, opterećenih na tlak, gdje je broj konačnih elemenata po obodu stijenke postavljen na 10, 20, 50, 100 i 200, s konstantnih 30 konačnih elemenata po debljini stijenke i 10 u aksijalnom smjeru. Zadani materijalni parametar iznosi $C_1 = 0,50426$ MPa. Rezultati analize uneseni su u program *Octave* gdje je ponovno izračunat parametar materijala C_1 . Slika 19 prikazuje rezultate ove analize.

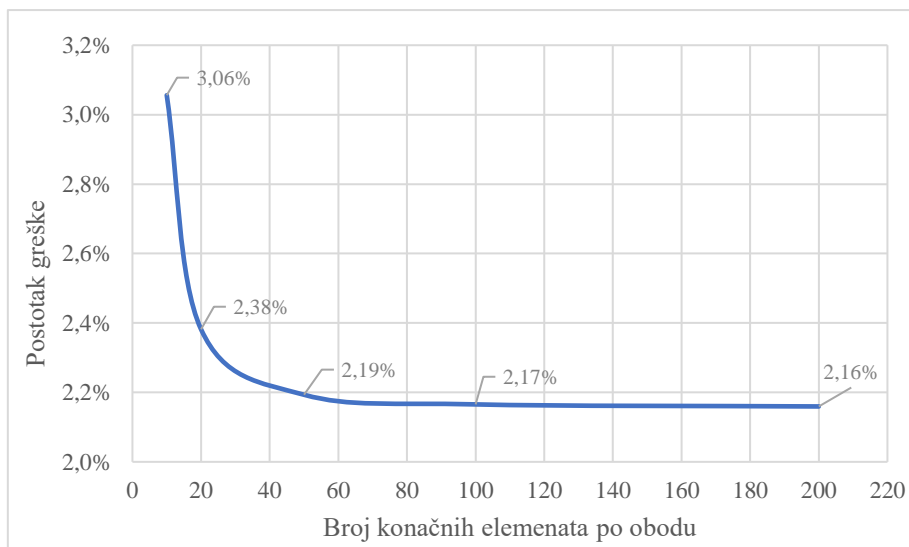


Slika 19. Rezultati analize za promjenu broja konačnih elemenata po obodu

Iz prikazanih rezultata izračunat postotak greške za svaki slučaj, rezultate prikazuje Tablica 6. Slika 20 prikazuje graf konvergencije greške u odnosu na broj konačnih elemenata.

Tablica 6. Greška s obzirom na broj elemenata po obodu stijenke

Broj konačnih elemenata po obodu stijenke	10	20	50	100	200
Izračunati C_1 [MPa]	0,48885	0,49225	0,49320	0,49334	0,49334
Greška u odnosu na upisani $C_1 = 0.50426$ MPa	3,06 %	2,38 %	2,19 %	2,17 %	2,16 %

**Slika 20. Graf greške u odnosu na broj konačnih elemenata po obodu stijenke**

Iz grafa koji prikazuje Slika 20 vidljivo je da rezultat konvergira prema upisanoj vrijednosti te da između 50 konačnih elemenata i 200 konačnih elemenata po obodu stijenke nema velike razlike u točnosti rezultata, svega 0,03%. Prema ovdje navedenim rezultatima i rezultatima iz prethodne analize za promjenu broja konačnih elemenata po debljini stijenke, može se zaključiti da će za 50 konačnih elemenata i po debljini i po obodu stijenke, rezultat imati minimalnu grešku uz prihvatljivo vrijeme za izračun simulacije.

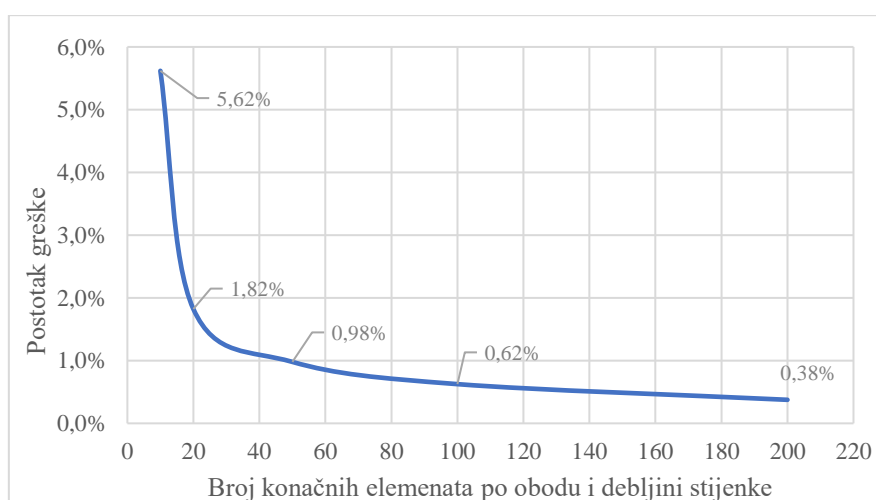
8.2.3. Iznos tlaka na unutarnjoj stijenci

Budući da simulacija služi umjesto stvarnog eksperimenta, naprezanje na unutarnjoj stijenci σ_{rr} u zadnjem koraku opterećenja, mora bi biti jednako zadanoj vrijednosti tlaka, koja je za sva tri materijalna modela jednaka $p = 0,016$ MPa. Osim prethodno navedenih konvergencija, moguće je provjeriti i konvergenciju vrijednosti naprezanja σ_{rr} s obzirom na broj konačnih elemenata. Napravljeno je pet modela, po uzoru na dva prethodna slučaja, gdje je broj konačnih elemenata po obodu i debljini stijenke zadan na 10, 20, 50, 100 i 200. Tablica

7 prikazuje postotak greške za svaki od navedenih slučajeva. Slika 21 prikazuje graf konvergencije greške u odnosu na broj konačnih elemenata.

Tablica 7. Greška s obzirom na broj elemenata po obodu i debljini stijenke

Broj konačnih elemenata po obodu i debljini stijenke	10	20	50	100	200
Naprezanje σ_{rr} na unutarnjoj stijenci [MPa]	0,0151	0,0157	0,01584	0,0159	0,01594
Greška u odnosu na zadani tlak $p = 0,016$ MPa	5,62 %	1,82 %	0,98 %	0,62 %	0,38 %



Slika 21. Graf greške u odnosu na broj konačnih elemenata po obodu i debljini stijenke

Iz grafa koji prikazuje Slika 21 vidljivo je da rezultat konvergira prema upisanoj vrijednosti. Vidljivo je da se greška drastično smanjila između 20 i 50 konačnih elemenata po obodu i debljini stijenke. Na 50 konačnih elemenata, greška pada ispod 1%, iako daljnjim povećavanjem broja konačnih elemenata greška nastavlja padati, vrijeme izračuna se drastično povećava. Ovdje navedeni rezultati potvrđuju zaključak prethodne dvije analize, u kojima je 50 optimalan broj elemenata po obodu i debljini stijenke, uz prihvatljivo vrijeme provođenja simulacije. Broj konačnih elemenata postavljenih po duljini modela (u aksijalnom smjeru) nema veliki utjecaj na rezultat simulacije, zbog čega ovdje nije detaljnije analiziran. Za sva tri materijalna modela, broj konačnih elemenata po duljini modela arterije postavljen je na 40.

Ovom analizom dokazana je i valjanost simulacije koja se koristi umjesto eksperimenta, odnosno, potvrđeno je da su vrijednosti iz simulacije, koje se koriste kao ulazni podaci za određivanje materijalnih parametara, ispravni i da je minimiziran utjecaj eventualne greške na konačni rezultat.

9. Određivanje materijalnih parametara

Nakon što je u prethodnim poglavljima opisan postupak izrade modela arterije u programskom paketu *Abaqus* te je izveden postupak kojim će se pomoću funkcije cilja određivati materijalni parametri u programskom paketu *Octave*, u ovom poglavlju biti će prikazani rezultati simulacije i određivanja materijalnih parametara. Također, promatran je i utjecaj krivo pretpostavljenih ulaznih podataka aksijalnog istežanja λ_z i cirkularnog istežanja λ_θ .

9.1. Određivanje materijalnih parametara za *Neo-Hooke*

U programskom paketu *Abaqus* napravljen je model arterije za *Neo-Hooke* materijalni model s ulaznim podacima koje prikazuje Tablica 8.

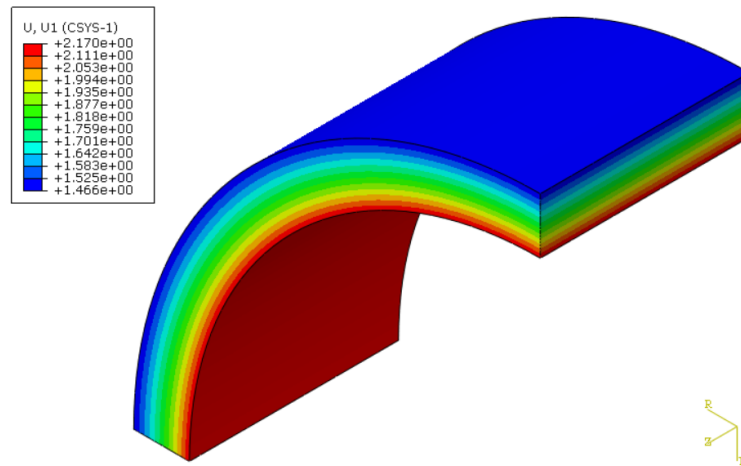
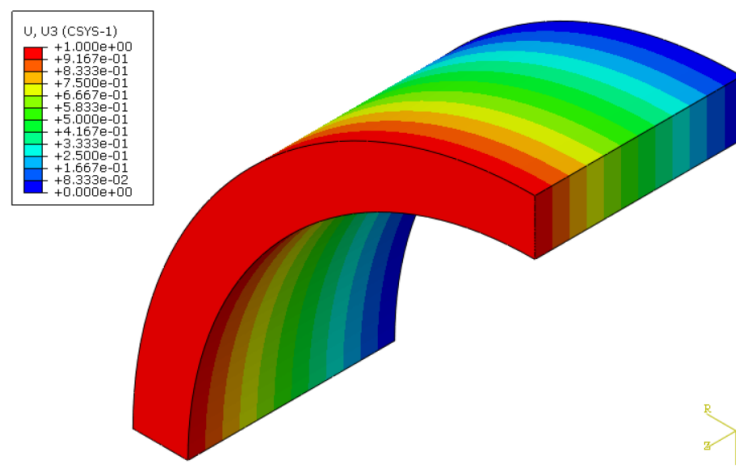
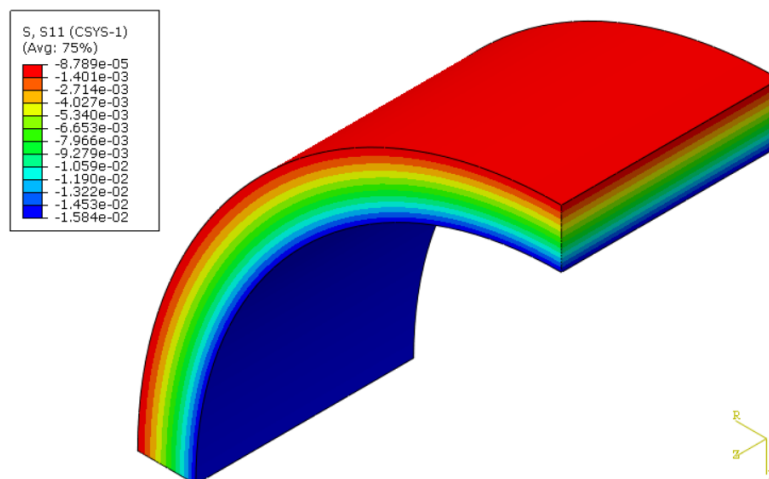
Tablica 8. Ulazni podaci *Neo-Hooke* materijalnog modela

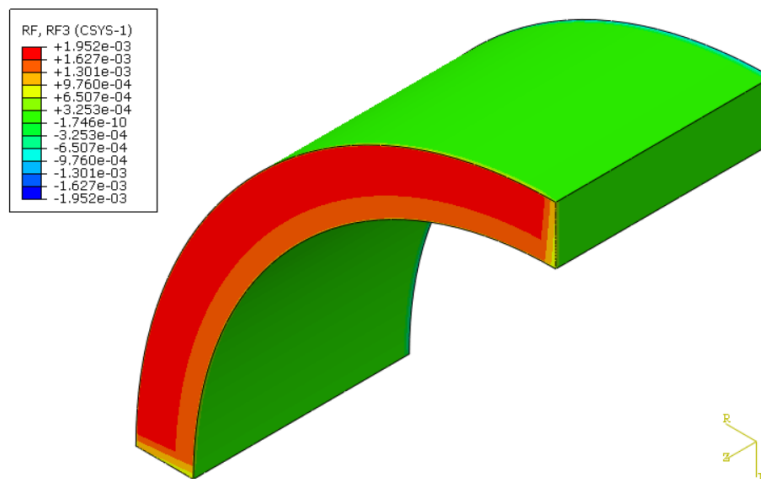
Unutarnji radijus [mm]	Vanjski radijus [mm]	Duljina [mm]	Materijalni parametar	Aksijalno predistežanje	Tlak [MPa]
$A = 7,9$	$B = 10,2$	$L = 10$	$C_1 = 0,0563$ MPa	$\lambda_z = 1,2$	$p = 0,016$

Simulacija je provedena u dva koraka, "Predistežanje" i "Tlak", te je u drugom koraku analiza napravljena za 100 inkremenata, kako bi se omogućilo što preciznije određivanje materijalnog parametra C_1 .

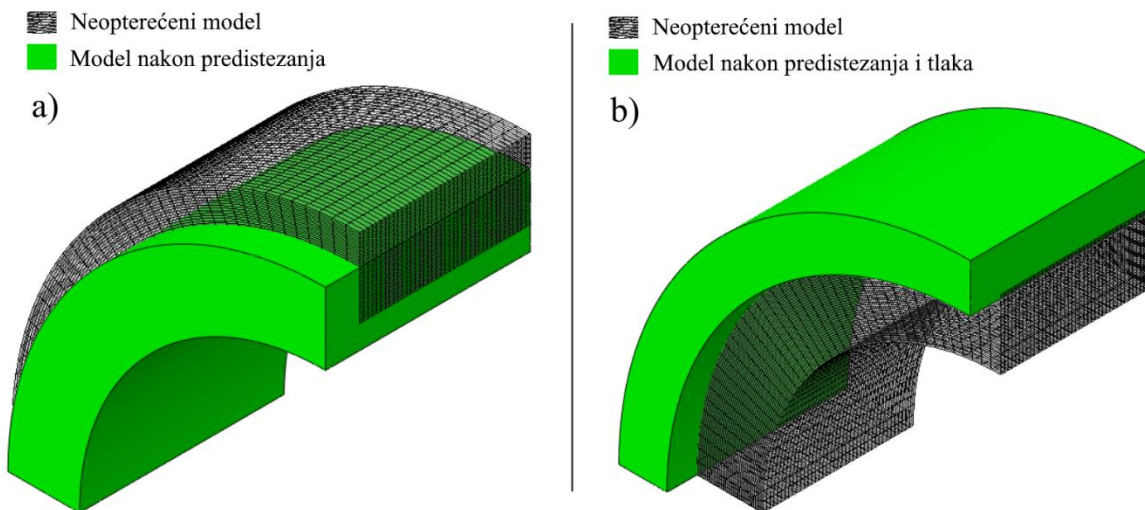
9.1.1. Rezultati simulacije

Rezultati provedene simulacije prikazani su u nastavku. Pomake u radijalnom smjeru prikazuje Slika 22, a pomake u aksijalnom smjeru Slika 23. Raspodjelu naprezanja u radijalnom smjeru prikazuje Slika 24, dok Slika 25 prikazuje resultantnu aksijalnu silu. Slika 26 prikazuje model prije početka simulacije i nakon provođenja simulacije. Svi rezultati prikazani su u lokalnom cilindričnom koordinatnom sustavu.

Slika 22. Pomak u radijalnom smjeru - *Neo-Hooke* materijalni modelSlika 23. Pomak u aksijalnom smjeru - *Neo-Hooke* materijalni modelSlika 24. Raspodjela radijalnog naprezanja - *Neo-Hooke* materijalni model



Slika 25. Rezultantna aksijalna sila - Neo-Hooke materijalni model



Slika 26. Neo-Hooke model bez opterećenja i nakon a) aksijalnog predistezanja b) aksijalnog predistezanja i tlaka

Tablica 9 prikazuje konačne vrijednosti unutarnjeg i vanjskog radijusa, te duljine:

Tablica 9. Konačna geometrija Neo-Hooke materijalnog modela

Konačni unutarnji radijus	$a = 10,07 \text{ mm}$
Konačni vanjski radijus	$b = 11,67 \text{ mm}$
Konačna duljina	$l = 12 \text{ mm}$

Iz prikazanih vrijednosti (Tablica 9) može se zaključiti da je došlo do produljenja uzorka uslijed istezanja, te do širenja uslijed djelovanja intraluminalnog tlaka, zbog čega dolazi do smanjenja debljine stjenke.

9.1.2. Izračunati materijalni parametar

Nakon što je u programu *Abaqus* provedena analiza, iz simulacije su u program *Octave* učitani podaci za radijalni pomak unutarne i vanjske površine stjenke, aksijalni pomak, radijalno naprezanje na unutarnjoj površini stjenke P^{FEM} i resultantna aksijalna sila N^{FEM} , pomoću koje je izračunata reducirana aksijalna sila F^{FEM} , koja se koristi u funkciji cilja (51). U programu *Octave* proveden je proračun opisan u poglavlju 6 te je pomoću funkcije za rješavanje problema najmanjih kvadrata *lsqnonlin* izračunati materijalni parametar C_1 za *Neo-Hooke* materijalni model, Tablica 10 prikazuje rezultat proračuna.

Tablica 10. Izračunati materijalni parametar *Neo-Hooke* materijalnog modela

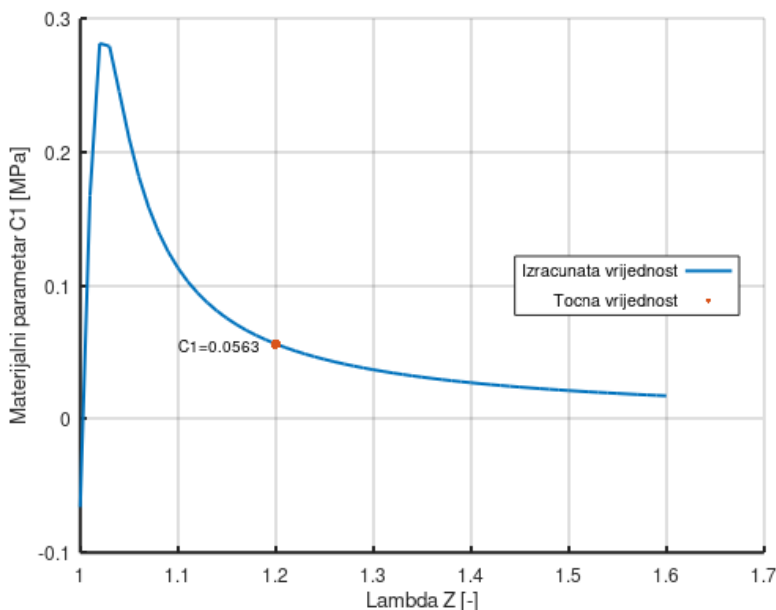
Upisani parametar	Izračunati parametar
$C_1 = 0,0563$ MPa	$C_1 = 0,0564163$ MPa

Tablica 10 prikazuje rezultat, odnosno izračunati materijalni parametar $C_1 = 0,0564163$ MPa koji se od upisanog materijalnog parametra razlikuje za 0,2 %, čime je potvrđena točnost simulacije i proračuna, te je moguće nastaviti s promjenom podataka za aksijalno istezanje λ_z i cirkularno istezanje λ_θ .

9.1.3. Utjecaj promjene λ_z

Nakon što je potvrđena točnost simulacije i proračuna, promatra se utjecaj promjene aksijalnog istezanja na konačni rezultat, u proračunu unutar programa *Octave*. Pitanje na koje se želi odgovoriti je kako bi pogrešno pretpostavljeno aksijalno predistezanje, utjecalo na konačan rezultat određivanja materijalnog parametra. Zadani λ_z u programu *Abaqus* je pretpostavljena vrijednost predistezanja, promjenom njegove vrijednosti u proračunu promatrano je ponašanje materijalnog parametra, uz nepromijenjene vrijednosti ostalih ulazni podataka.

Aksijalno predistezanje λ_z podijeljeno je na skali od vrijednosti $\lambda_z = 1$ do $\lambda_z = 1,6$, te je za svaku vrijednost izračunat parametar materijala C_1 . Slika 27 prikazuje dijagram $\lambda_z - C_1$ za navedenu skalu vrijednosti aksijalnog predistezanja.



Slika 27. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_1

Iz dijagrama koji prikazuje Slika 27, vidljivo je da će za točnu vrijednost λ_z , izračunati C_1 odgovarati točnom materijalnom parametru, no bez poznavanja točne vrijednosti, ponašanje krivulje ne ukazuje na točan rezultat. Vidljivo je da dolazi do ekstrema na području gdje je vrijednost λ_z između 1 i 1,1, te se to područje u daljnjoj analizi može isključiti, no time ne dolazi do velikog smanjivanja raspona mogućih vrijednosti aksijalnog istezanja. Može se primijetiti da će veće vrijednosti λ_z imati manji utjecaj na izračunati materijalni parametar C_1 , u odnosu na manje vrijednosti λ_z .

9.1.4. Utjecaj promjene λ_θ

Nakon promatranja utjecaja promjene aksijalnog predistezanja λ_z na konačni rezultat, u ovom poglavlju na isti način promatrat će se utjecaj promjene cirkularnog istezanja λ_θ na konačni rezultat, u proračunu unutar programa *Octave*, uz nepromijenjene vrijednosti ostalih ulazni podataka.

Podaci koji se iz programa *Abaqus* učitavaju u program *Octave* odnose se na korak "Tlak", odnosno 100 inkremenata čiji je prvi inkrement početak djelovanja tlaka, a u zadnjem inkrementu vrijednost tlaka dolazi do vrijednosti zadanog $p = 0,016$ MPa. S obzirom da je predistezanje u koraku "Tlak" konstantno i iznosi $\lambda_z = 1,2$, za svih 100 inkremenata λ_z je konstantan te njegova promjena ne zahtjeva podjelu po inkrementima. S druge strane, cirkularno istezanje λ_θ mijenja se s promjenom tlaka, tako da je prilikom promatranja utjecaja

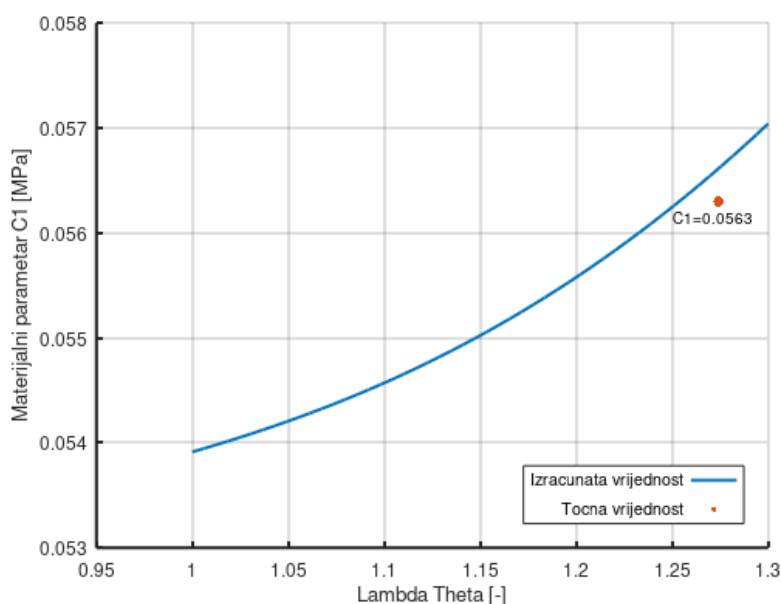
promjene λ_θ na konačni rezultat, potrebno izračunati odgovarajuću vrijednost cirkularnog istežanja za svaki inkrement.

Promatranje utjecaja promjene vrijednosti cirkularnog istežanja λ_θ provedeno je tako da je λ_θ zadan na skali od $\lambda_\theta = 1$ do $\lambda_\theta = 1,3$. Za prvi inkrement zadane su vrijednosti radijusa dobivene nakon predistežanja a_1 i b_1 , dok se konačni radijus (unutarnji i vanjski) računaju za svaki λ_θ na skali prema formulama:

$$a_{101} = \lambda_\theta \cdot A, \quad (115)$$

$$b_{101} = \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{\lambda_z} + a_{101}^2}. \quad (116)$$

Potom se vrijednosti izračunatog unutarnjeg i vanjskog radijusa podjele na 100 inkremenata linearnom raspodjelom, odnosno za unutarnji radijus od a_1 do a_{101} , za vanjski radijus od b_1 do b_{101} , za svaki zadani λ_θ , za koje se potom računa materijalni parametar C_1 . Slika 28 prikazuje dijagram $\lambda_\theta - C_1$ za navedenu skalu cirkularnog istežanja.



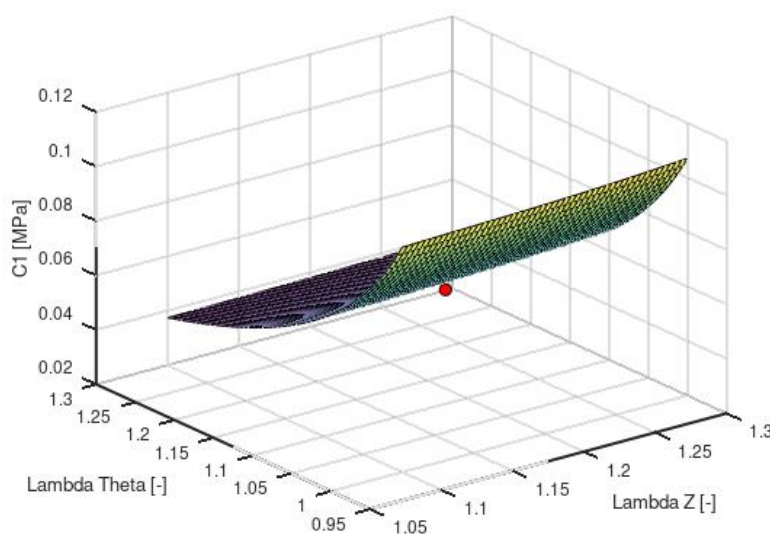
Slika 28. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar C_1

Iz dijagrama koji prikazuje Slika 28, vidljivo je da za točnu vrijednost λ_θ , C_1 ima maleno odstupanje od točnog materijalnog parametra, to odstupanje posljedica je linearne raspodjele radijusa po inkrementima, što u stvarnosti nije slučaj. Iako dolazi do malog odstupanja rezultata, valjanost dijagrama nije umanjena. Vidljivo je da, za razliku od prethodnog dijagrama, ovdje ne dolazi do ekstrema te nije moguće niti jedno područje na skali λ_θ proglasiti netočnim.

9.1.5. Utjecaj promjene λ_z i λ_θ

Po uzoru na prethodna dva poglavlja, u ovom slučaju će se promatrati utjecaj promjene aksijalnog predistezanja λ_z i u isto vrijeme promjene cirkularnog istežanja λ_θ na konačni rezultat.

Aksijalno predistezanje λ_z podijeljeno je na skali od vrijednosti $\lambda_z = 1,1$ do $\lambda_z = 1,3$, dok je λ_θ zadan na skali od $\lambda_\theta = 1$ do $\lambda_\theta = 1,3$, te je za svaku kombinaciju vrijednosti izračunat materijalni parametar C_1 . Slika 29 prikazuje $\lambda_z - \lambda_\theta - C_1$ dijagram.



Slika 29. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_1

Crvena točkica na prikazanom dijagramu (Slika 29) označava točnu vrijednost materijalnog parametra C_1 . Kao i u prethodnom slučaju, prisutno je malo odstupanje izračunate i točne vrijednosti, što je posljedica linearne raspodjele radijusa po inkrementima uslijed promjene vrijednosti cirkularnog istežanja.

9.2. Određivanje materijalnih parametara za *Mooney-Rivlin*

U programskom paketu *Abaqus* napravljen je model arterije za *Mooney-Rivlin* materijalni model s ulaznim podacima koje prikazuje Tablica 11.

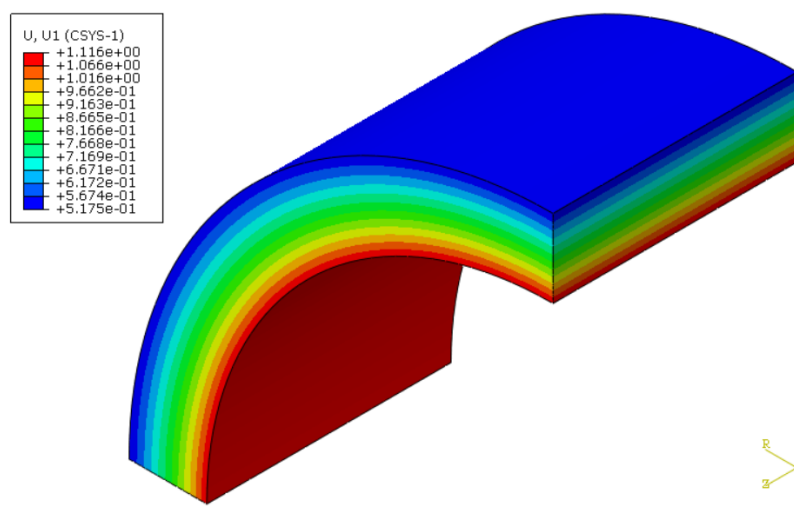
Tablica 11. Ulazni podaci *Mooney-Rivlin* materijalnog modela

Unutarnji radijus [mm]	Vanjski radijus [mm]	Duljina [mm]	Materijalni parametri	Aksijalno predistezanje	Tlak [MPa]
$A = 7,39$	$B = 9,897$	$L = 10$	$C_1 = 0,049$ MPa $C_2 = 0,01$ MPa	$\lambda_z = 1,2$	$p = 0,016$

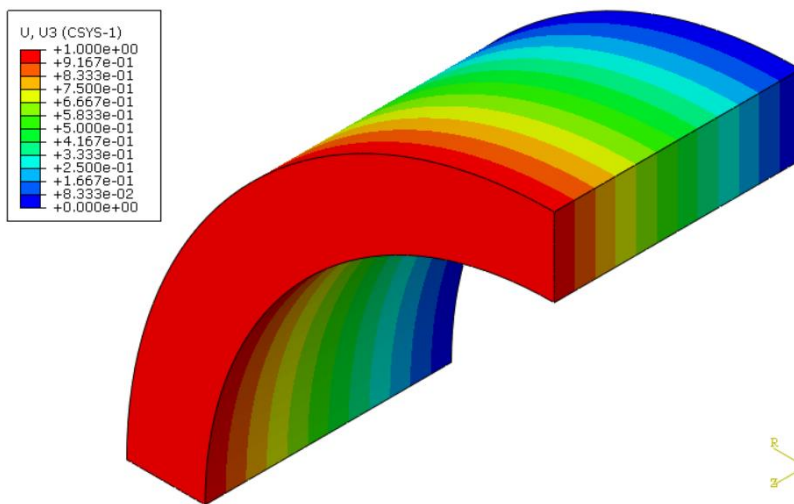
Simulacija je provedena u dva koraka, "Predistezanje" i "Tlak", te je u drugom koraku analiza napravljena za 100 inkremenata, kako bi se omogućilo što preciznije određivanje materijalnih parametara C_1 i C_2 .

9.2.1. Rezultati simulacije

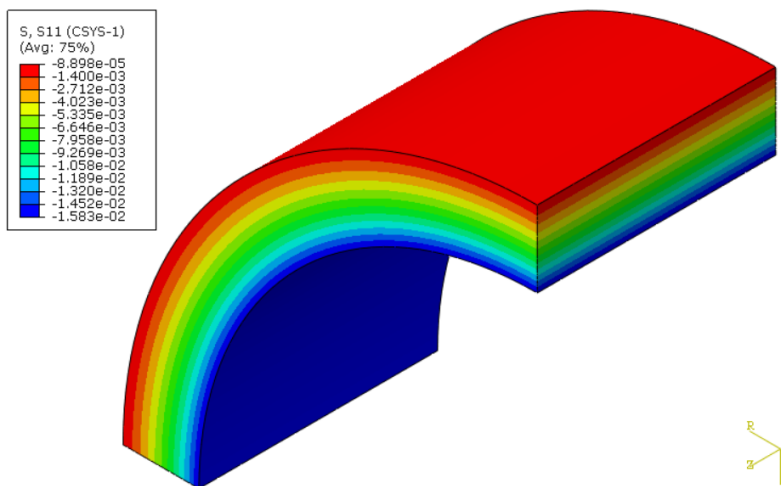
Rezultati provedene simulacije prikazani su u nastavku. Pomake u radijalnom smjeru prikazuje Slika 30, a pomake u aksijalnom smjeru Slika 31. Raspodjelu radijalnog naprezanja prikazuje Slika 32, dok Slika 33 prikazuje rezultatnu aksijalnu silu. Slika 34 prikazuje model prije početka simulacije i nakon provođenja simulacije. Svi rezultati prikazani su u lokalnom cilindričnom koordinatnom sustavu.



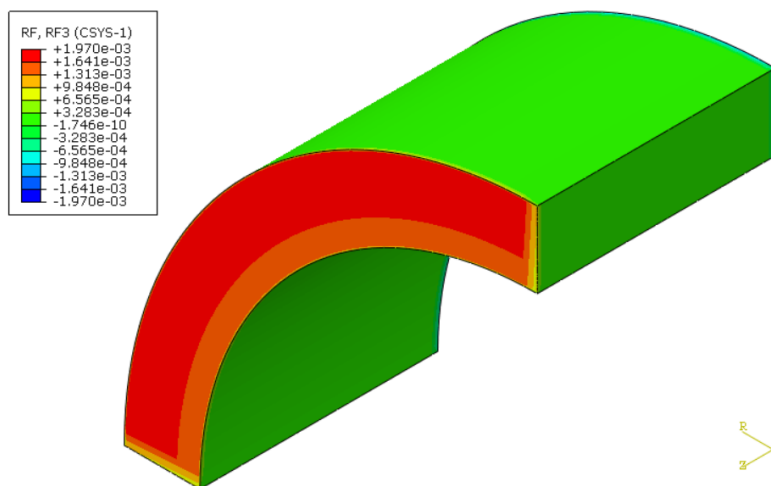
Slika 30. Pomak u radijalnom smjeru - *Mooney-Rivlin* materijalni model



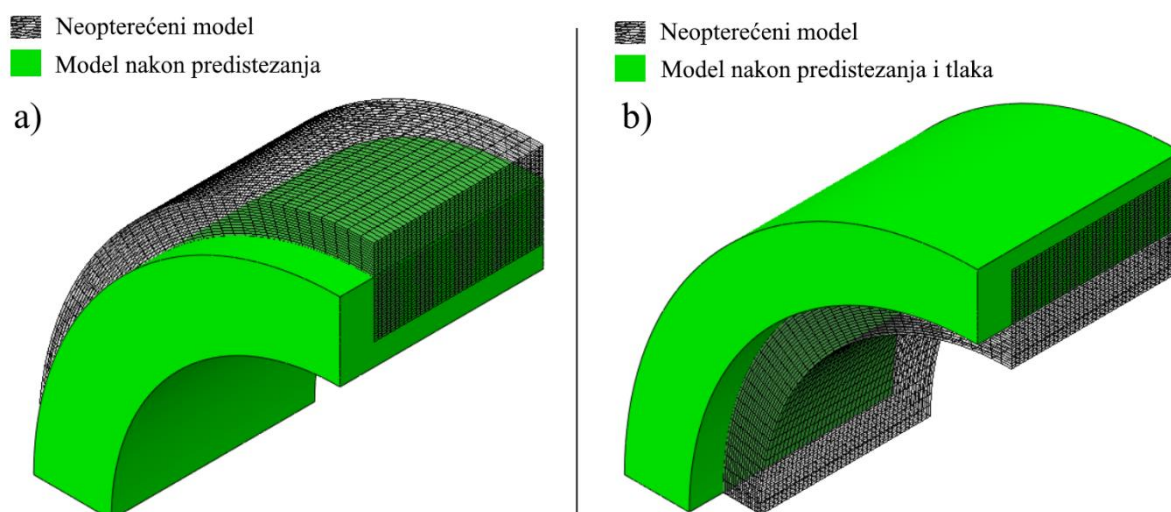
Slika 31. Pomak u aksijalnom smjeru - *Mooney-Rivlin* materijalni model



Slika 32. Raspodjela radijalnog napreznja - *Mooney-Rivlin* materijalni model



Slika 33. Rezultantna aksijalna sila - *Mooney-Rivlin* materijalni model



Slika 34. *Mooney-Rivlin* model bez opterećenja i nakon a) aksijalnog predistezanja b) aksijalnog predistezanja i tlaka

Tablica 12 prikazuje konačne vrijednosti unutarnjeg i vanjskog radijusa, te duljine:

Tablica 12. Konačna geometrija *Mooney-Rivlin* materijalnog modela

Konačni unutarnji radijus	$a = 8,506 \text{ mm}$
Konačni vanjski radijus	$b = 10,415 \text{ mm}$
Konačna duljina	$l = 12 \text{ mm}$

Iz prikazanih rezultata može se zaključiti da je došlo do produljenja uzorka uslijed istezanja te do širenja uslijed djelovanja intraluminalnog tlaka, zbog čega dolazi do smanjenja debljine stjenke.

9.2.2. Izračunati materijalni parametar

Nakon što je u programu *Abaqus* provedena analiza, iz simulacije su u program *Octave* učitani podaci za radijalni pomak unutarnje i vanjske površine stjenke, aksijalni pomak, radijalno naprežanje na unutarnjoj površini stjenke P^{FEM} i rezultatna aksijalna sila N^{FEM} , pomoću koje je izračunata reducirana aksijalna sila F^{FEM} , koja se koristi u funkciji cilja (51). U programu *Octave* proveden je proračun opisan u poglavlju 6, te su izračunati materijalni parametri C_1 i C_2 za *Mooney-Rivlin* materijalni model, Tablica 13 prikazuje rezultat proračuna.

Tablica 13. Izračunati materijalni parametri *Mooney-Rivlin* materijalnog modela

Upisani parametar	Izračunati parametar
$C_1 = 0,049 \text{ MPa}$	$C_1 = 0,049253 \text{ MPa}$
$C_2 = 0,01 \text{ MPa}$	$C_2 = 0,0098136 \text{ MPa}$

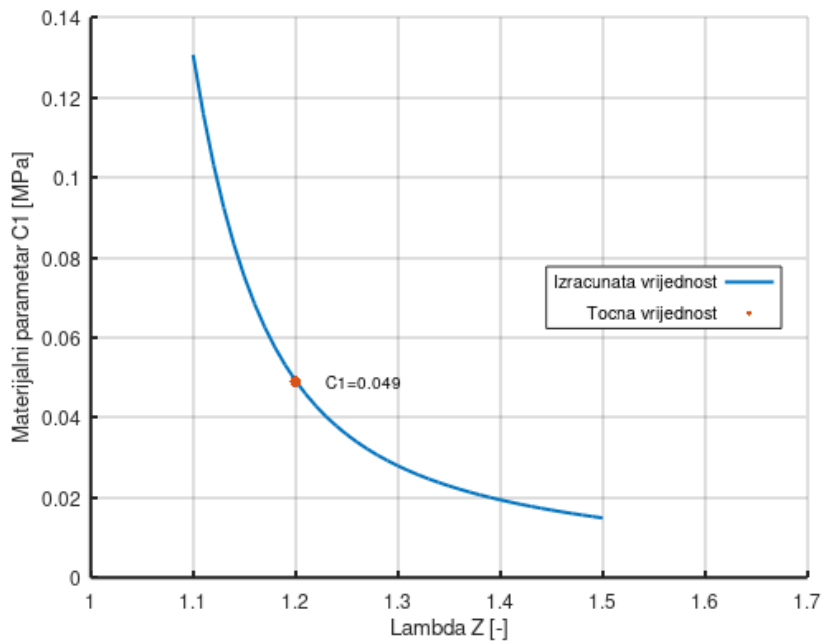
Vidljivo je (Tablica 13) da je za upisanu vrijednost prvog materijalnog parametra $C_1 = 0,049 \text{ MPa}$, pomoću metode najmanjih kvadrata dobivena vrijednost $C_1 = 0,049253 \text{ MPa}$, a za upisanu vrijednost $C_2 = 0,01 \text{ MPa}$, dobivena je vrijednost $C_2 = 0,0098136 \text{ MPa}$. Greška izračunatih materijalnih parametara u odnosu na upisane materijalne parametre je manje od 1 % za C_1 , te oko 1,8 % za C_2 . Ovakva greška je prihvatljiva te je moguće nastaviti s promjenom podataka za λ_z i λ_θ .

9.2.3. Utjecaj promjene λ_z

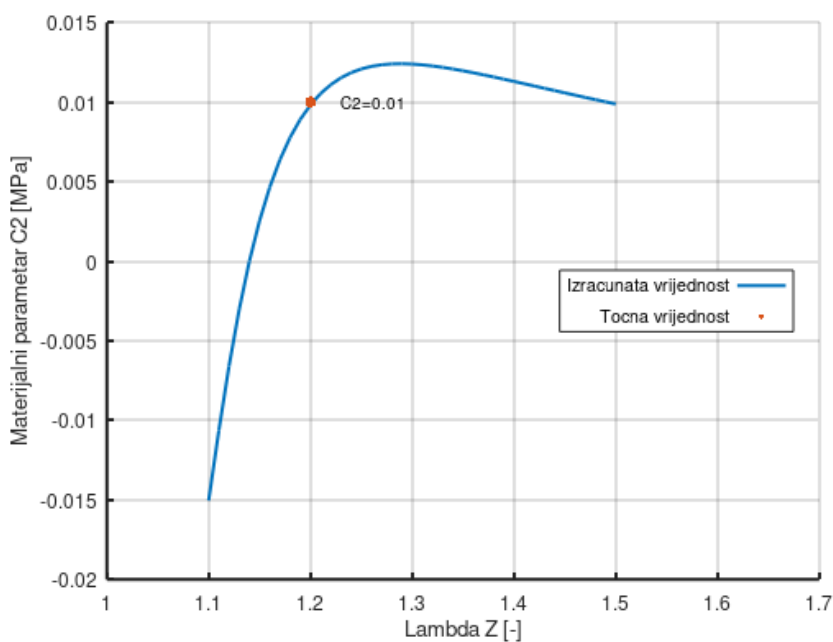
Nakon što je potvrđena točnost simulacije i proračuna, promatra se utjecaj promjene aksijalnog istezanja na konačni rezultat, u proračunu unutar programa *Octave* uz

nepromijenjene vrijednosti ostalih ulazni podataka. Cilj ovog postupka opisan je ranije u poglavlju 9.1.3.

Aksijalno predistezanje λ_z podijeljeno je na skali od $\lambda_z = 1,1$ do $\lambda_z = 1,5$, te su za svaku vrijednost izračunati materijalni parametri C_1 i C_2 . Slika 35 prikazuje dijagram $\lambda_z - C_1$, a Slika 36 dijagram $\lambda_z - C_2$ za navedenu skalu vrijednosti aksijalnog predistezanja.



Slika 35. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_1



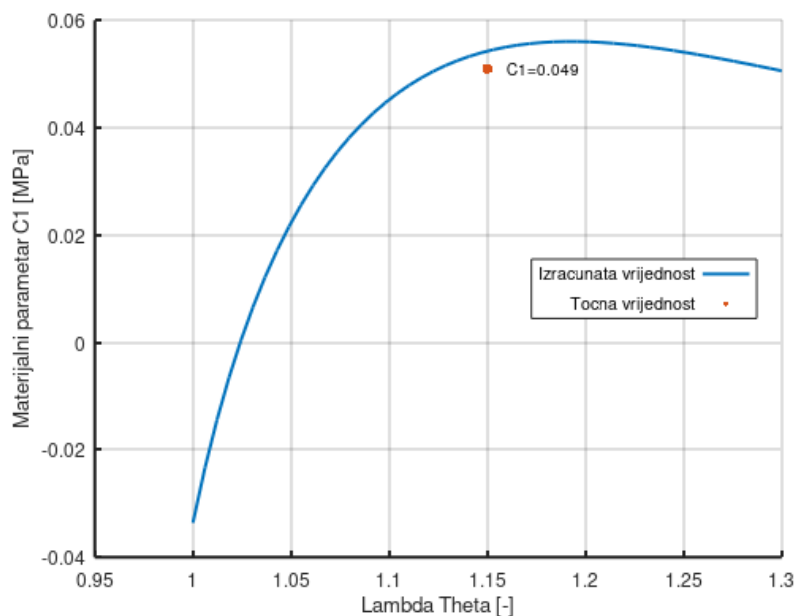
Slika 36. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istezanja na materijalni parametar C_2

Iz dijagrama koje prikazuju Slika 35 i Slika 36, vidljivo je da će za točnu vrijednost λ_z , izračunati C_1 i C_2 odgovarati točnim vrijednostima materijalnih parametara. Na dijagramu $\lambda_z - C_1$ (Slika 35) vidljivo je da funkcija nema diskontinuitet te nije moguće isključiti niti jedno područje vrijednosti λ_z na korištenoj skali. Na dijagramu $\lambda_z - C_2$, nakon prelaska točne vrijednosti, C_2 nastavlja rasti te ubrzo dolazi do pada vrijednosti, odnosno uočen je maksimum u blizini točne vrijednosti, što bi mogao biti indikator točne vrijednosti λ_z . Može se primijetiti i da će manje vrijednosti λ_z imati veći utjecaj na izračunate materijalne parametre, u odnosu na veće vrijednosti λ_z .

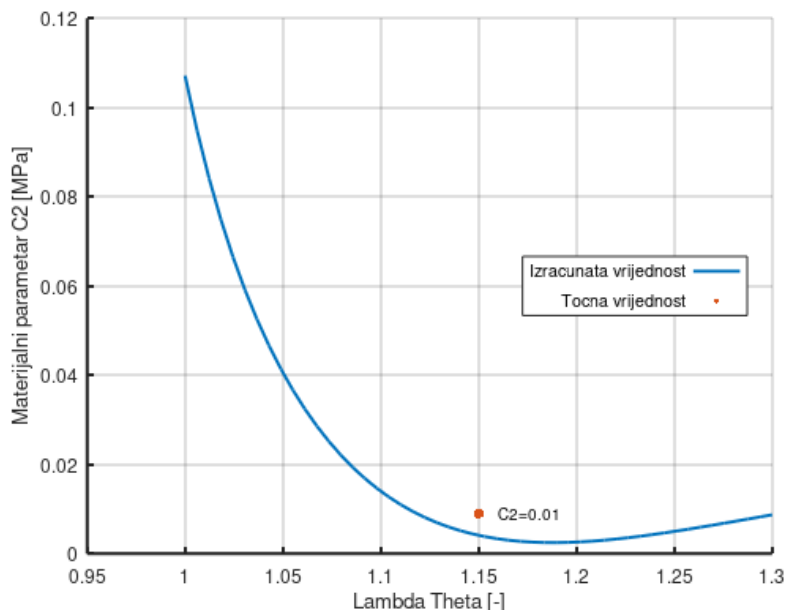
9.2.4. Utjecaj promjene λ_θ

Nakon promatranja utjecaja promjene aksijalnog predistezanja λ_z na konačni rezultat, u ovom poglavlju na isti način promatrat će se utjecaj promjene cirkularnog istežanja λ_θ na konačni rezultat, u proračunu unutar programa *Octave*, uz nepromijenjene vrijednosti ostalih ulazni podataka. Postupak promjene vrijednosti λ_θ detaljno je opisan u poglavlju 9.1.4.

Cirkularno istežanje λ_θ podijeljeno je na skali od $\lambda_\theta = 1$ do $\lambda_\theta = 1,3$, te su za svaku vrijednost izračunati materijalni parametri C_1 i C_2 . Slika 37 prikazuje dijagram $\lambda_\theta - C_1$, a Slika 38 dijagram $\lambda_\theta - C_2$ za navedenu skalu vrijednosti cirkularnog istežanja.



Slika 37. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar C_1



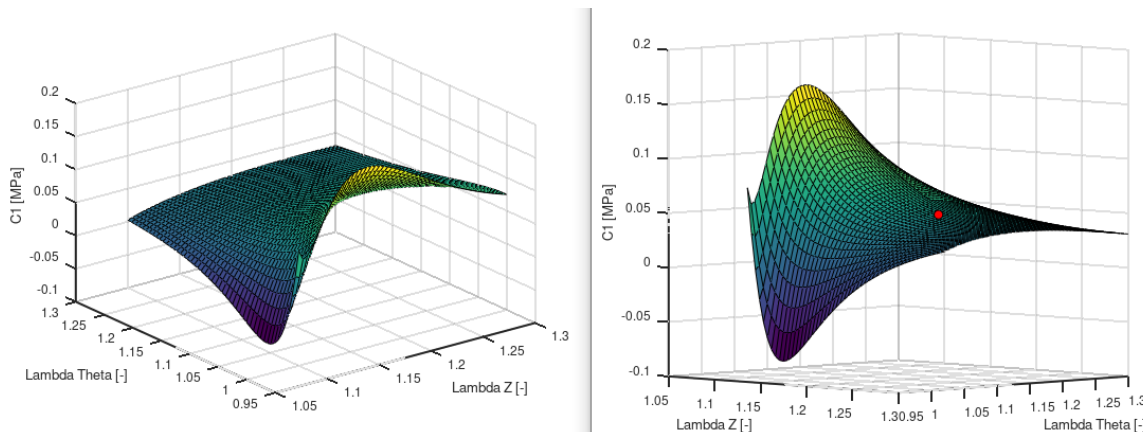
Slika 38. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar C_2

Kao i u poglavlju 9.1.4, može se primijetiti lagano odstupanje točne vrijednosti materijalnih parametara u odnosu na izračunatu vrijednost (Slika 37, Slika 38). Do odstupanja dolazi uslijed linearne raspodjele radijusa po inkrementima, što u stvarnoj situaciji nije slučaj. Iako dolazi do određene greške, one su za promatranje rezultata utjecaja promjene cirkularnog naprežanja zanemarive. Oba dijagrama, koje prikazuju Slika 37 i Slika 38, nemaju zamjetne skokove, no pokazuju određene minimume i maksimume na zadanoj skali λ_θ , blizu kojih se nalaze točne vrijednosti parametara. Ovim variranjem λ_θ može se odrediti maksimum i minimum funkcije, koji bi sugerirao točnu vrijednost cirkularnog istežanja.

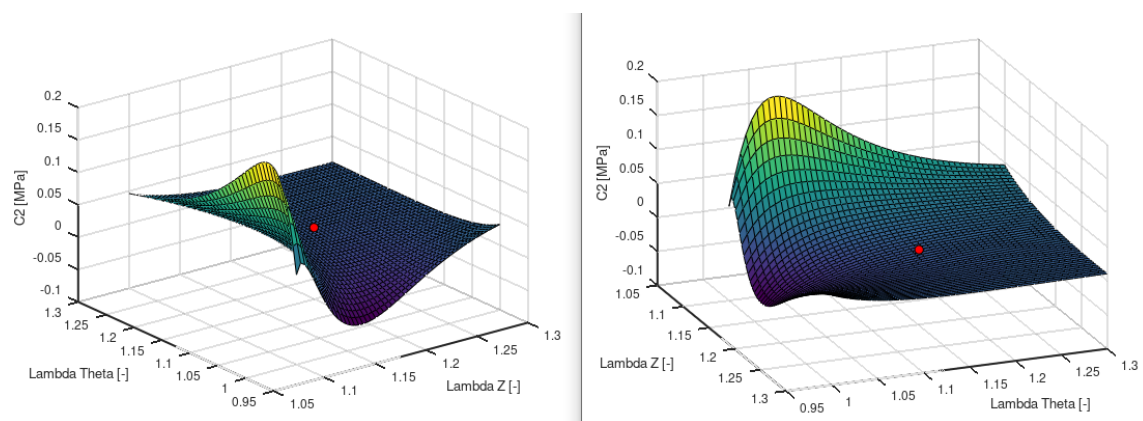
9.2.5. Utjecaj promjene λ_z i λ_θ

Po uzoru na prethodna dva poglavlja, u ovom slučaju se promatra utjecaj promjene aksijalnog predistežanja λ_z i u isto vrijeme promjene cirkularnog istežanja λ_θ na konačni rezultat.

Aksijalno predistežanje λ_z podijeljeno je na skali od vrijednosti $\lambda_z = 1,1$ do $\lambda_z = 1,3$, dok je λ_θ zadan na skali od $\lambda_\theta = 1$ do $\lambda_\theta = 1,3$, te su za svaku kombinaciju vrijednosti izračunati materijalni parametri C_1 i C_2 . Slika 39 prikazuje $\lambda_z - \lambda_\theta - C_1$ dijagram, a Slika 40 prikazuje $\lambda_z - \lambda_\theta - C_2$.



Slika 39. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_1



Slika 40. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_2

Crvena točkica na prikazanim dijagramima (Slika 39, Slika 40) označava točnu vrijednost materijalnih parametara. Kao i u prethodnom slučaju, prisutno je lagano odstupanje izračunate i točne vrijednosti, što je najvjerojatnije posljedica linearne raspodjele radijusa po inkrementima uslijed promjene vrijednosti cirkularnog istezanja.

9.3. Određivanje materijalnih parametara za *Holzappel-Gasser-Ogden*

U programskom paketu *Abaqus* napravljen je model arterije za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model s ulaznim podacima koje prikazuje Tablica 14.

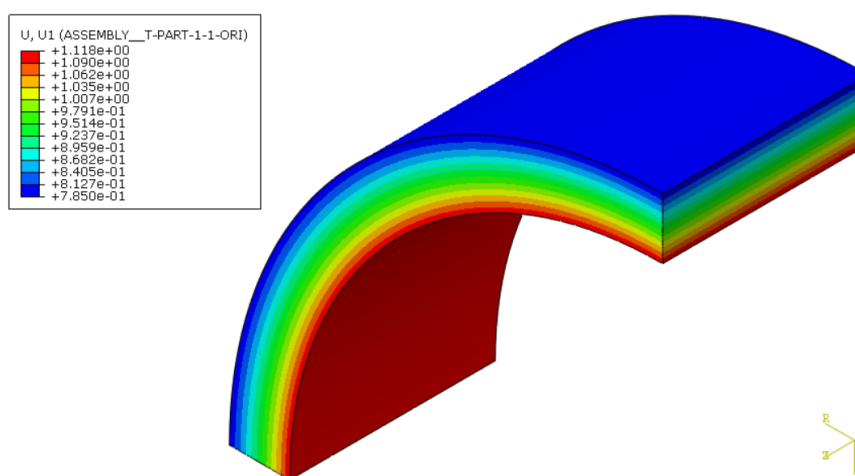
Tablica 14. Ulazni podaci *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela

Unutarnji radijus [mm]	Vanjski radijus [mm]	Duljina [mm]	Materijalni parametri	Aksijalno predistezanje	Tlak [MPa]
$A = 8,856$	$B = 10,8$	$L = 10$	$C_1 = 0,055$ MPa $k1 = 0,0373$ MPa $k2 = 22$	$\lambda_z = 1,1$	$p = 0,016$

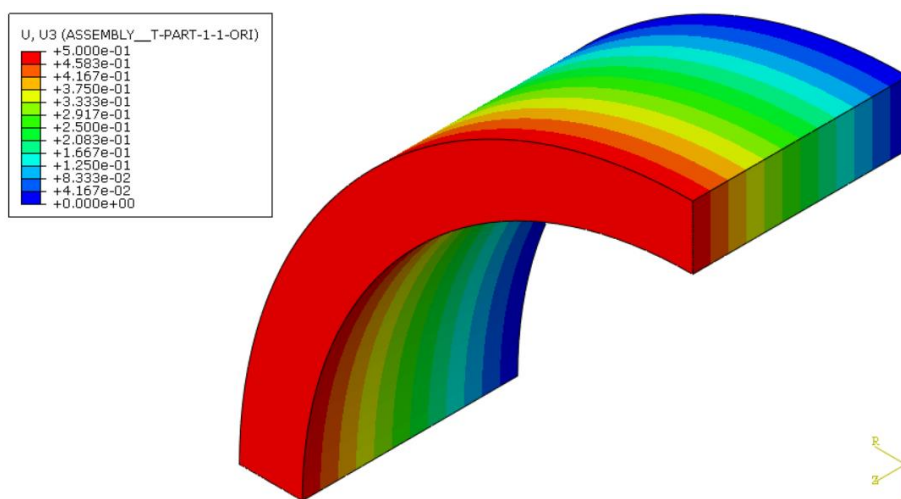
Simulacija je provedena u dva koraka, "Predistezanje" i "Tlak", te je u drugom koraku analiza napravljena za 100 inkremenata, kako bi se omogućilo što preciznije određivanje materijalnih parametara C_1 , k_1 i k_2 .

9.3.1. Rezultati simulacije

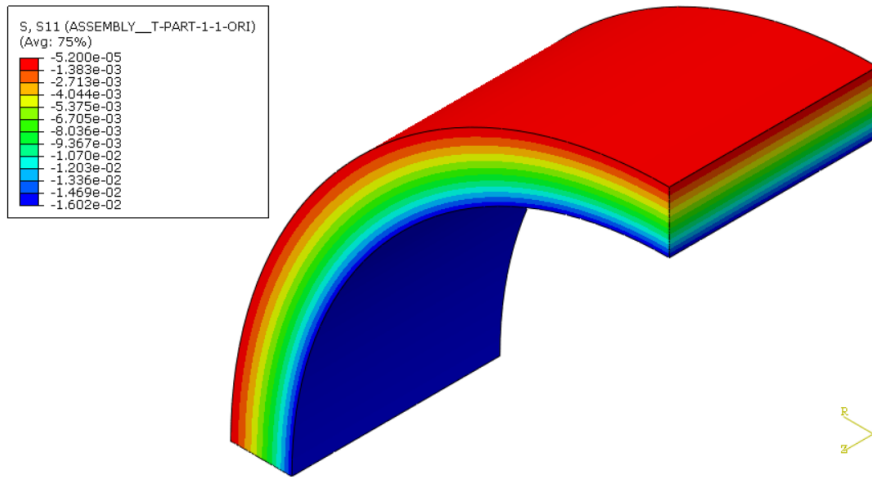
Rezultati provedene simulacije prikazani su u nastavku. Pomake u radijalnom smjeru prikazuje Slika 41, a pomake u aksijalnom smjeru Slika 42. Raspodjelu radijalnog napreznja prikazuje Slika 43, dok Slika 44 prikazuje resultantnu aksijalnu silu. Slika 45 prikazuje model prije početka simulacije i nakon provođenja simulacije. Svi rezultati prikazani su u lokalnom cilindričnom koordinatnom sustavu.



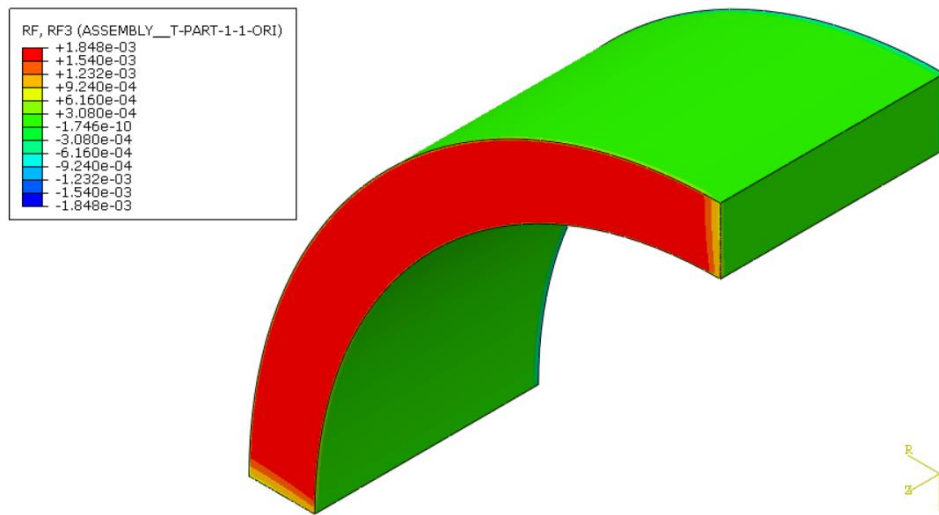
Slika 41. Pomak u radijalnom smjeru - *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalni model



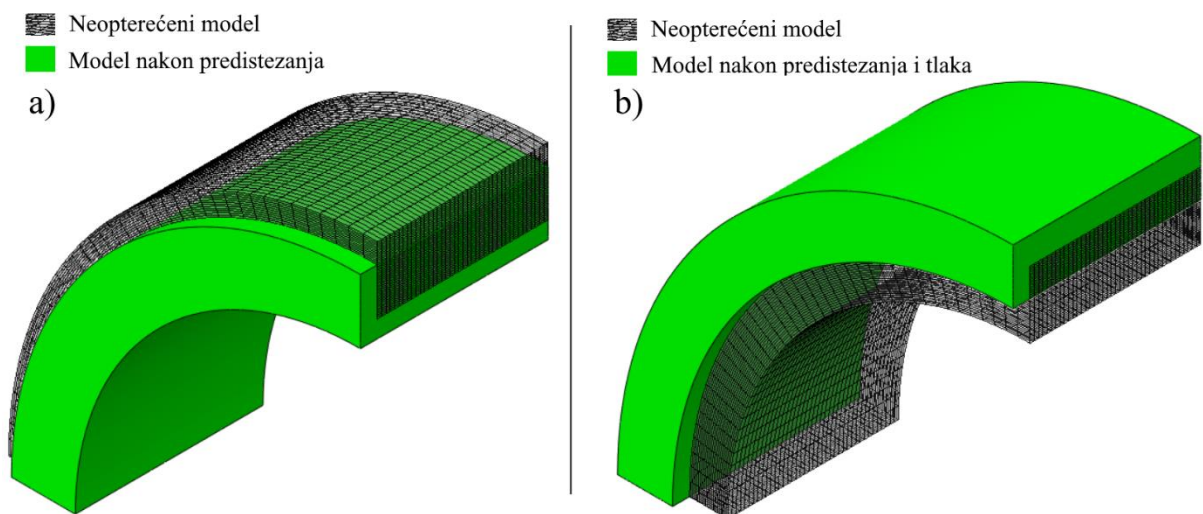
Slika 42. Pomak u aksijalnom smjeru - HGO materijalni model



Slika 43. Raspodjela radijalnog napreznja - HGO materijalni model



Slika 44. Rezultantna aksijalna sila - HGO materijalni model



Slika 45. Holzapfel-Gasser-Ogden model bez opterećenja i nakon a) aksijalnog predistezanja b) aksijalnog predistezanja i tlaka

Tablica 15 prikazuje konačne vrijednosti unutarnjeg i vanjskog radijusa, te duljine:

Tablica 15. Konačna geometrija *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalnog modela

Konačni unutarnji radijus	$a = 9,974$ mm
Konačni vanjski radijus	$b = 11,585$ mm
Konačna duljina	$l = 11$ mm

Iz prikazanih rezultata (Tablica 15) može se zaključiti da je došlo do produljenja uzorka uslijed istezanja, te do širenja uslijed djelovanja intraluminalnog tlaka, zbog čega dolazi do smanjenja debljine stjenke.

9.3.2. Izračunati materijalni parametar

Nakon što je u programu *Abaqus* provedena analiza, iz simulacije su u program *Octave* učitani podaci za radijalni pomak unutarnje i vanjske površine stjenke, aksijalni pomak, radijalno naprezanje na unutarnjoj površini stjenke P^{FEM} i rezultatna aksijalna sila N^{FEM} , pomoću koje je izračunata reducirana aksijalna sila F^{FEM} , koja se koristi u funkciji cilja (51). U programu *Octave* proveden je proračun opisan u poglavlju 6, te su izračunati materijalni parametri C_1 , k_1 i k_2 za *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalni model, Tablica 16 prikazuje rezultat proračuna.

Tablica 16. Izračunati materijalni parametri *Holzapfel-Gasser-Ogden* materijalnog modela

Upisani parametar	Izračunati parametar
$C_1 = 0,055$ MPa	$C_1 = 0,054995$ MPa
$k_1 = 0,0373$ MPa	$k_1 = 0,037942$ MPa
$k_2 = 22$	$k_2 = 21,610$

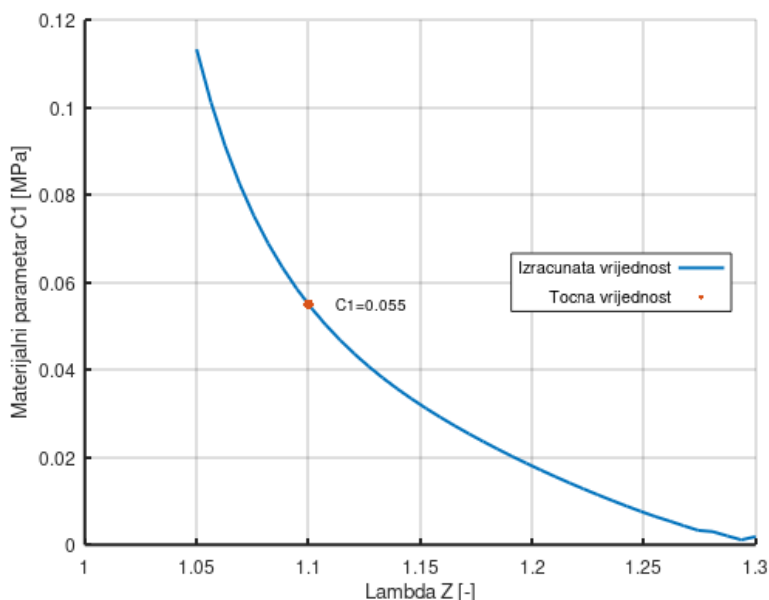
Iz prikazanih rezultata (Tablica 16), vidljivo je da za upisani materijalni parametar $C_1 = 0,055$ MPa, izračunati materijalni parametar iznosi $C_1 = 0,054995$ MPa, što je greška manja od 1 %. Za upisani materijalni parametar $k_1 = 0,0373$ MPa, izračunata vrijednost iznosi $k_1 = 0,037942$ MPa, iz čega se može izračunati greška od 1,7 %. I za zadnji upisani materijalni parametar $k_2 = 22$, izračunata vrijednost iznosi $k_1 = 21,610$, odnosno greška iznosi 1,8 %.

Ovakva greška u proračunu je prihvatljiva te je moguće nastaviti s promjenom podataka za λ_z i λ_θ .

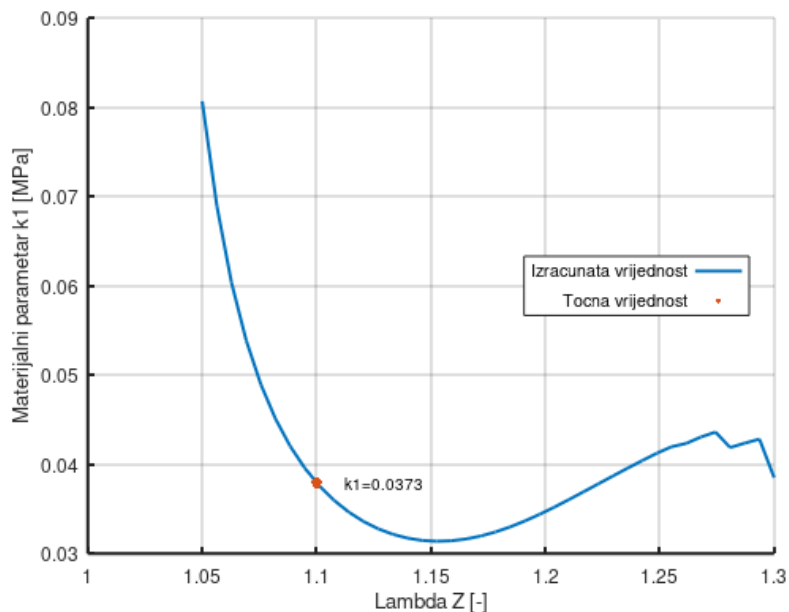
9.3.3. Utjecaj promjene λ_z

Nakon što je potvrđena točnost simulacije i proračuna, promatra se utjecaj promjene aksijalnog istežanja na konačni rezultat, u proračunu unutar programa *Octave* uz nepromijenjene vrijednosti ostalih ulazni podataka. Cilj ovog postupka opisan je ranije u poglavlju 9.1.3.

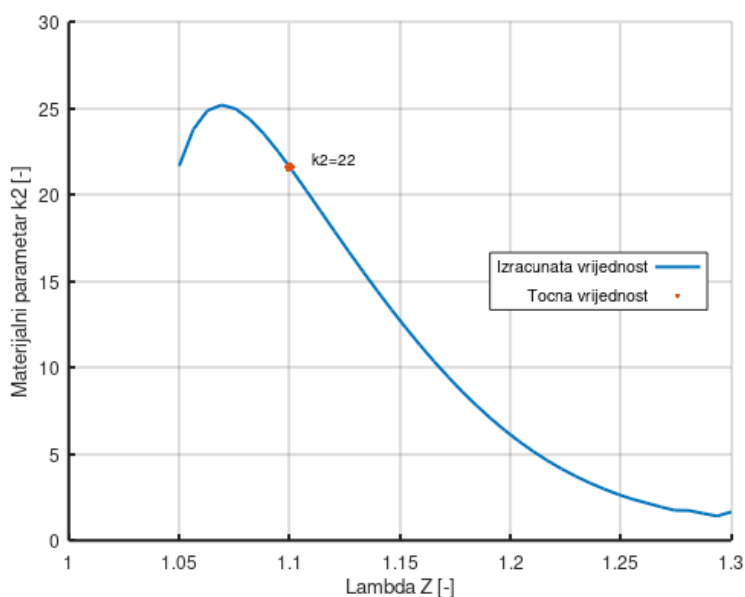
Aksijalno predistezanje λ_z podijeljeno je na skali od $\lambda_z = 1,05$ do $\lambda_z = 1,3$, te su za svaku vrijednost izračunati materijalni parametri C_1 , k_1 i k_2 . Slika 46 prikazuje dijagram $\lambda_z - C_1$, Slika 47 dijagram $\lambda_z - k_1$, a Slika 48 dijagram $\lambda_z - k_2$, za navedenu skalu vrijednosti aksijalnog predistezanja.



Slika 46. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istežanja na materijalni parametar C_1



Slika 47. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istežanja na materijalni parametar k_1



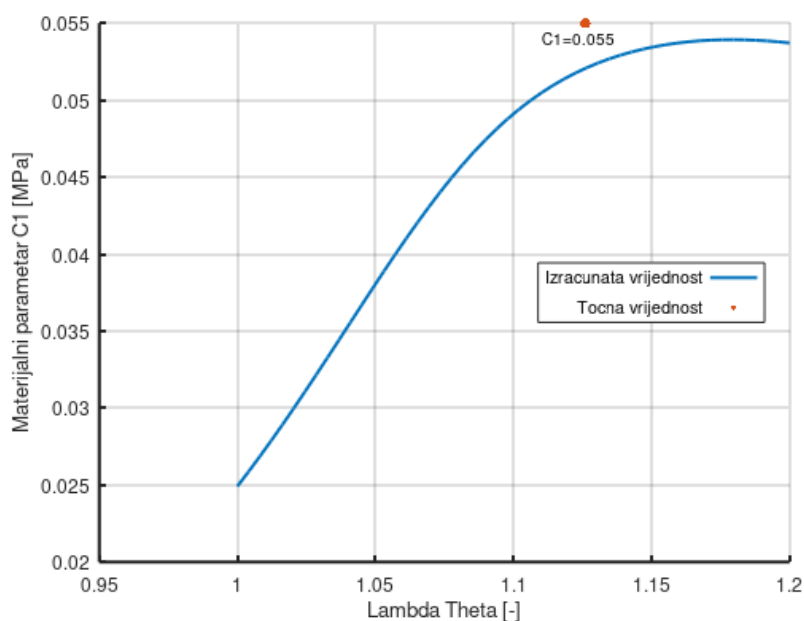
Slika 48. Utjecaj promjene vrijednosti aksijalnog istežanja na materijalni parametar k_2

Za razliku od prethodnih slučajeva promjene vrijednosti aksijalnog istežanja λ_z prikazanih u poglavljima 9.1.3 i 9.2.3, na prikazanim dijagramima u ovom poglavlju (Slika 46, Slika 47 i Slika 48) dolazi do jasnih lokalnih ekstrema prilikom promjene vrijednosti λ_z . Na dijagramu $\lambda_z - k_2$ koji prikazuje Slika 48, vidljivo je da k_2 ima maksimum za približnu vrijednost $\lambda_z = 1,07$ i nakon toga počinje padati, dok na dijagramu $\lambda_z - k_1$ (Slika 47) možemo primijetiti da k_1 ima minimum na $\lambda_z = 1,15$ i nakon toga počinje rasti. Prema navedenom ponašanju k_1 i k_2 , pretpostavljena vrijednost λ_z može se ograničiti između 1,07 i 1,15.

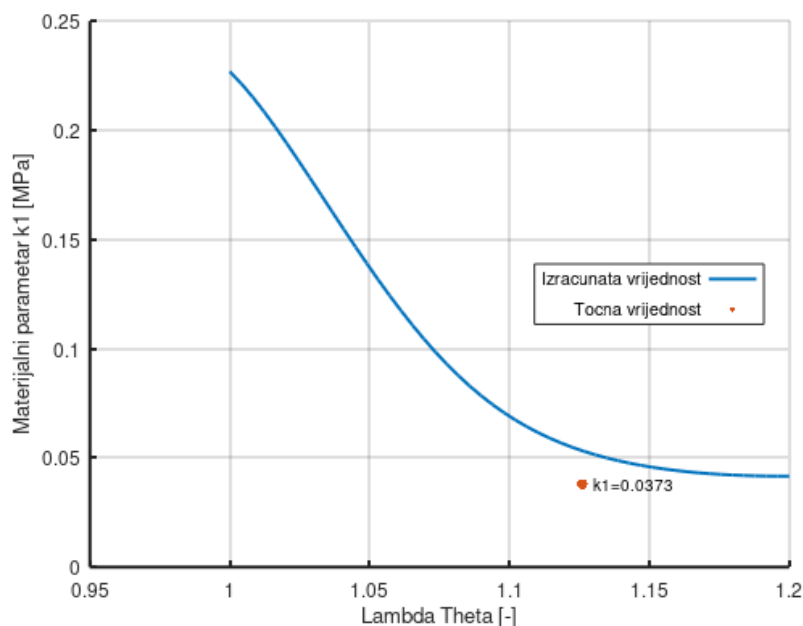
9.3.4. Utjecaj promjene λ_θ

Nakon promatranja utjecaja promjene aksijalnog predistezanja λ_z na konačni rezultat, u ovom poglavlju promatrat će se utjecaj promjene cirkularnog istezanja λ_θ na konačni rezultat, u proračunu unutar programa *Octave*, uz nepromijenjene vrijednosti ostalih ulazni podataka. Postupak promjene vrijednosti λ_θ detaljno je opisan u poglavlju 9.1.4.

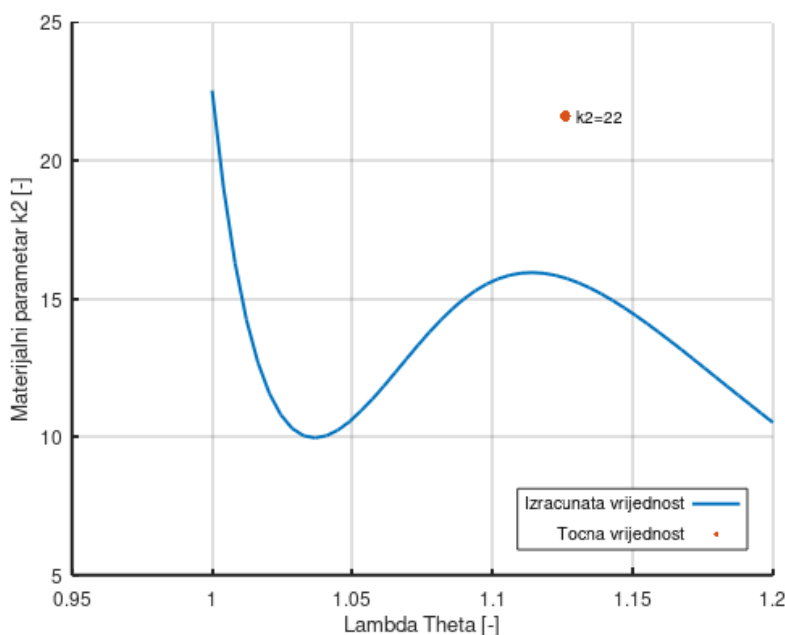
Cirkularno istezanje λ_θ podijeljeno je na skali od $\lambda_\theta = 1$ do $\lambda_\theta = 1,2$, te su za svaku vrijednost izračunati materijalni parametri C_1 , k_1 i k_2 . Slika 49 prikazuje dijagram $\lambda_\theta - C_1$, Slika 50 dijagram $\lambda_\theta - k_1$, a Slika 51 dijagram $\lambda_\theta - k_2$, za navedenu skalu vrijednosti cirkularnog istezanja.



Slika 49. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istezanja na materijalni parametar C_1



Slika 50. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar k_1



Slika 51. Utjecaj promjene vrijednosti cirkularnog istežanja na materijalni parametar k_2

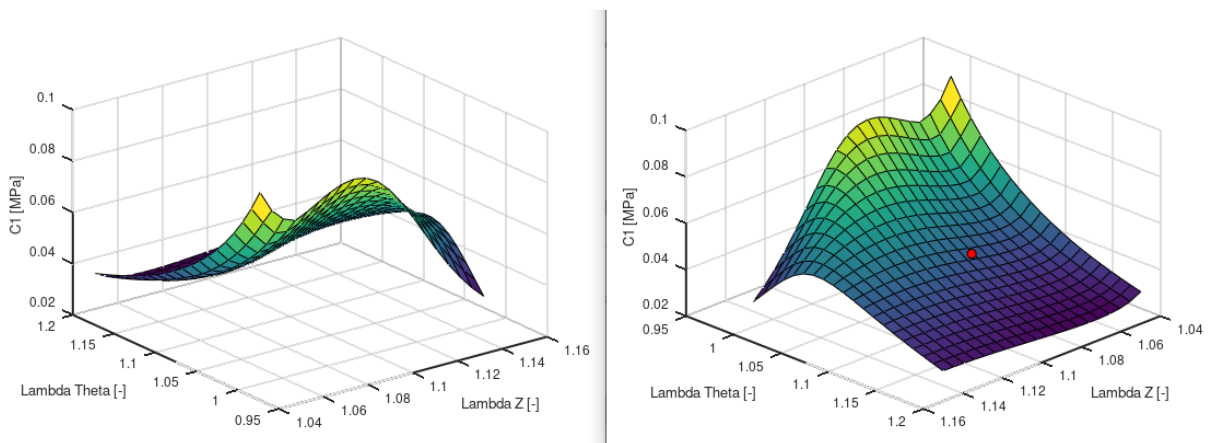
Iz prikazanih dijagrama (Slika 49, Slika 50), vidljivo je da za parametra C_1 i k_1 dolazi do laganog odstupanja izračunate vrijednosti u odnosu na točnu, što je najvjerojatnije posljedica linearne raspodjele promjene radijusa po inkrementima. Iako je odstupanje materijalnog parametra k_2 od točne vrijednosti nešto veće (Slika 51), može se zamijetiti prisutnost lokalnog minimuma za vrijednost $\lambda_\theta = 1,04$. S obzirom na prikazane rezultate, vidljivo je da se u blizini točnih vrijednosti nalaze lokalni ekstremi što bi ukazivalo na točnu

vrijednost cirkularnog istežanja. Parametar k_2 pokazuje lokalni minimum i maksimum, na osnovu čega se može izbaciti područje prije minimuma.

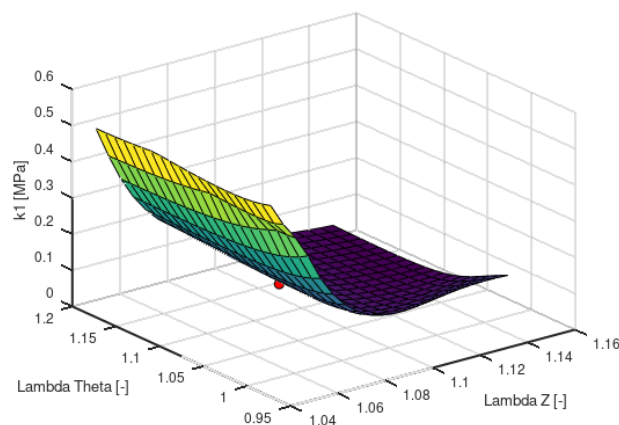
9.3.5. Utjecaj promjene λ_z i λ_θ

Po uzoru na prethodna dva poglavlja, u ovom slučaju se promatra utjecaj promjene aksijalnog predistežanja λ_z i u isto vrijeme promjene cirkularnog istežanja λ_θ na konačni rezultat.

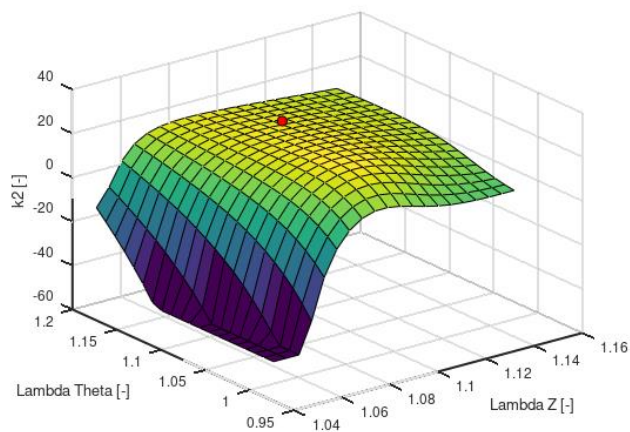
Aksijalno predistežanje λ_z podijeljeno je na skali od vrijednosti $\lambda_z = 1,05$ do $\lambda_z = 1,15$, dok je λ_θ zadan na skali od $\lambda_\theta = 1$ do $\lambda_\theta = 1,2$, te su za svaku kombinaciju vrijednosti izračunati materijalni parametri C_1 , k_1 i k_2 . Slika 52 prikazuje $\lambda_z - \lambda_\theta - C_1$ dijagram, Slika 53 prikazuje $\lambda_z - \lambda_\theta - k_1$ dijagram, a Slika 54 prikazuje $\lambda_z - \lambda_\theta - k_2$.



Slika 52. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar C_1



Slika 53. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar k_1



Slika 54. Utjecaj promjene vrijednosti λ_z i λ_θ na materijalni parametar k_2

Crvena točkica na prikazanim dijagramima (Slika 52, Slika 53 i Slika 54) označava točnu vrijednost materijalnih parametara.

10. Zaključak

Simulacije eksperimenta istezanje - tlak u programskom paketu *Abaqus* pokazale su se valjanima za sva tri promatrana materijalna modela. Većinska potvrda tome je konvergencija radijalnog naprezanja na unutarnjoj stijenci arterije. S odgovarajućim odabirom konačnog elementa, heksaedarski konačni element izveden pomoću hibridne formulacije, te odgovarajućim brojem konačnih elemenata po obodu i debljini stijenke, postignuto je stanje naprezanja u simulaciji jednako onome u realnom *in vitro* eksperimentu. Kod sva tri materijalna modela došlo je do produljenja i proširenja modela arterije, a time i do stanjene arterijske stijenke. U sva tri slučaja zadano aksijalno predistezanje je pretpostavljeno.

Pomoću mehanike kontinuuma definirani su izrazi za računanje tlaka i reducirane aksijalne sile tri promatrana materijalna modela *Neo-Hooke*, *Mooney-Rivlin* i *Holzappel-Gasser-Ogden* (HGO). Navedeni izrazi korišteni su u funkciji cilja u kojoj su metodom najmanjih kvadrata uspoređene izračunate i simulacijom dobivene vrijednosti tlaka i reducirane aksijalne sile, radi određivanja materijalnih parametara. Određivanje materijalnih parametara provedeno je pomoću programskog paketa *Octave*, gdje je potvrđena točnost proračuna i simulacije za sva tri materijalna modela.

Nakon što je potvrđena točnost simulacije eksperimenta i proračuna za određivanje materijalnih parametara, bilo je moguće promatrati utjecaj promjene aksijalnog predistezanja λ_z na rezultat, odnosno materijalne parametre. Prilikom neinvazivnih eksperimenata, aksijalno predistezanje nije poznato te je potrebno proučiti utjecaj krivo pretpostavljenog predistezanja na izračunata materijalna svojstva. Za sva tri materijalna modela promatrano je ponašanje materijalnih parametara za promjenu vrijednosti aksijalnog predistezanja na određenoj skali. Za *Mooney-Rivlin* materijalni model, na dijagramima $\lambda_z - C_1$ (Slika 35) i $\lambda_z - C_2$ (Slika 36), vidljivo je da funkcija nema diskontinuitet, no za materijalni parametar C_2 uočen je maksimum u blizini točne vrijednosti, što bi mogao biti indikator točne vrijednosti λ_z . Za *Neo-Hooke* materijalni model, na dijagramu $\lambda_z - C_1$ (Slika 27), primijećen je ekstrem pomoću kojeg je moguće suziti raspon vrijednosti aksijalnog predistezanja, ali ne značajno. Kod *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela na dijagramima $\lambda_z - C_1$ (Slika 46), $\lambda_z - k_1$ (Slika 47) i $\lambda_z - k_2$ (Slika 48), vidljivo je da dolazi do određenih ekstrema vrijednosti materijalnih parametara, te je u ovom slučaju moguće značajnije suziti raspon vrijednosti mogućeg aksijalnog predistezanja.

Osim utjecaja aksijalnog predistezanja promatran je i utjecaj promjene cirkularnog istezanja λ_θ za sva tri materijalna modela. U sva tri slučaja došlo je do odstupanja izračunate vrijednosti materijalnih parametara u odnosu na točnu vrijednost. Razlog tome je linearna raspodjela promjene unutarnjeg i vanjskog radijusa po inkrementima, prilikom promjene vrijednosti λ_θ , što u stvarnosti nije slučaj. Vidljiva su veća odstupanja za *Holzappel-Gasser-Ogden* model, u usporedbi s druga dva materijalna modela, odnosno radi se o osjetljivijoj funkciji. Iz prikazanih dijagrama za *Neo-Hooke* materijalni model (Slika 28), vidljivo je da nije došlo do lokalnih ekstrema te nije moguće suziti raspon vrijednosti cirkularnog istezanja. Za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model (Slika 49 - Slika 51), vidljivo je da se u blizini točnih vrijednosti nalaze lokalni ekstrema što bi ukazivalo na točnu vrijednost cirkularnog istezanja. Za materijalni model *Mooney-Rivlin*, dijagrami $\lambda_\theta - C_1$ (Slika 37) i $\lambda_\theta - C_2$ (Slika 38), pokazuju određene minimume i maksimume, koji bi sugerirali točnu vrijednost cirkularnog istezanja.

Prikazano je da kod *Mooney-Rivlin* i *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela dolazi do pojave ekstrema u čijoj blizini se nalaze točne vrijednosti materijalnih parametara te se time olakšava pretpostavljanje vrijednosti aksijalnog predistezanja kod neinvazivnih eksperimenata na arterijama.

LITERATURA

- [1] J. K.-J. Li, Dynamics of the Vascular System, Rutgers University, USA: World Scientific Publishing Co. Re. Ltd., 2004.
- [2] L. Waite and J. Fine, Applied Biofluid Mechanics, New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2007.
- [3] T. C. Gasser, R. W. Ogden and G. A. Holzapfel, "Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations," *Journal of The Royal Society Interface*, pp. 15-35, 2006.
- [4] J. A. G. Rhodin, »Architecture of the Vessel Wall,« *Comprehensive Physiology*, pp. 1-31, 1980.
- [5] Z. Tomić, »Modeliranje mehaničkog ponašanja karotidne arterije višekomponentnim 3D ispisom,« Fakultet Strojarsstva i Brodogradnje, Zagreb, 2019.
- [6] M. Smoljkić, Doctoral Thesis - In vivo assessment of the mechanical properties of arterial tissue, Leuven: Faculty of Engineering Science, 2016.
- [7] L. Cardamone, A. Valentín, J. F. Eberth i J. D. Humphrey, Origin of Axial Prestretch and Residual Stress in Arteries, *Biomech Model Mechanobiol*, 2009.
- [8] S. M. Wells i E. J. Walter, »Changes in the Mechanical Properties and Residual Strain of Elastic Tissue in the Developing Fetal Aorta,« u *Annals of Biomedical Engineering*, Springer, 2009, p. 345–356.
- [9] I. Alfirević, Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Zagreb: Golden marketing, 2003.
- [10] T. Škugor, Diplomski rad - Numeričko optimiranje geometrije kolagena za 3D ispis, Zagreb: Fakultet Strojarsstva i Brodogradnje, 2018.
- [11] G. A. Holzapfel i R. W. Ogden, Biomechanics: Trends in Modeling and Simulation, Springer, 2017.
- [12] J. Sorić, Metoda konačnih elemenata, Zagreb: Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.
- [13] L. Virag, Numerical Modeling of Abdominal Aortic Aneurysm Expansion, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2017.