

# Fizikalno utemeljen pojednostavljeni model ćelije aktivnog metamaterijala

---

**Krivačić, Daniel**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:054938>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Daniel Krivačić**

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**

Mentori:

Doc. dr. sc. Neven Alujević, dipl. ing.

Student:

Daniel Krivačić

Zagreb, 2020

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Nevenu Alujeviću na pomoći, savjetima i kritikama koje mi je pružio prilikom izrade ovog rada.

Također se zahvaljujem svim prijateljima koji su mi uljepšali vrijeme tijekom studija i svojoj obitelji na pruženoj pomoći i podršci prilikom studiranja.

Najviše bih se htio zahvaliti samome sebi što sam vjerovao u sebe, što sam napravio sav taj naporan rad da dođem do ovdje, što nikad nisam odustao i što sam uvijek bio spreman pomoći ljudima oko sebe.

Daniel Krivačić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
 Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
 procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602 - 04 / 20 - 6 / 3	
Ur. broj: 15 - 1703 - 20 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Daniel Krivačić Mat. br.: 0035209539

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Fizikalno utemeljen pojednostavljeni model ćelije aktivnog metamaterijala**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Physics-based reduced model of an active metamaterial cell**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno analizirati i diskutirati rezultate dobivene pojednostavljenim diskretnim modelom ćelije aktivnog metamaterijala. Potrebno je pretpostaviti ćeliju aktivnog metamaterijala geometrije pogodne za 3D ispis jednostavnim uređajem: cijev pravokutnog poprečnog presjeka koja je naizmjenice isprekidana dvostrukim membranama. Između membrana smješta se aktuator koji može razviti silu okomito na površinu membrana, odupirući se o dvije susjedne membrane. Na terminale aktuatora sile pričvršćeni su senzori koji mogu mjeriti brzinu vibriranja. Signal brzine vibriranja koristi se za zatvaranje jednostavnih direktnih povratnih veza tako da sila razvijena aktuatorom bude proporcionalna brzini vibriranja membrane. Ako se koristi samo jedan od dvaju senzora po aktuatoru moguće je postići aktivno prigušenje generirano povratnom vezom takvo da matricu prigušenja sustava čini asimetričnom. To će kao rezultat imati gubitak akustičke recipročnosti kada zvuk prolazi kroz ćeliju aktiviranog metamaterijala. Međutim potrebno je osigurati stabilnost takvog aktivnog sustava.

U radu je dakle potrebno izvesti jednadžbe gibanja i odgovarajuće prijenosne funkcije za diskretni linearni dinamički model za cijev s dva para membrana i dva aktuatora pretpostavljajući da se dinamika svake od membrana i pravokutnih akustičkih šupljina između njih može aproksimirati njihovim prvom formom vibriranja tj. sustavom masa-opruga za membranu, a opruga-prigušivač za akustičku šupljinu. Tako dobiveni model s četiri stupnja slobode potrebno je analizirati i diskutirati obzirom na stabilnost para povratnih veza koristeći Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti. Nadalje, potrebno je kvantificirati gubitak recipročnosti u širokom spektru frekvencija uspoređujući odgovarajuće parove od ukupno 16 izvedenih prijenosnih funkcija između sila i brzina vibriranja svake od četiriju masa u sustavu. U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan: Datum predaje rada: Predvideni datumi obrane:  
 15. svibnja 2020. **2. rok (izvanredni):** 1. srpnja 2020. **2. rok (izvanredni):** 3.7.2020.  
**3. rok:** 17. rujna 2020. **3. rok:** 21.9. - 25.9.2020.

Zadatak zadao: Predsjednik Povjerenstva:

doc.dr. Neven Alujević

Prof. dr. sc. Igor Balen

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA.....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA.....	IV
SAŽETAK.....	V
SUMMARY.....	VI
1. UVOD.....	1
1.1. Aktivni akustički metamaterijali.....	3
1.1.1. Ne-Hermitianski akustički metamaterijali.....	3
1.1.2. Izvana moderirani aktivni AMM-i.....	4
2. AKTIVNI AKUSTIČKI METAMATERIJALI S NE-KOLOCIRANIM SENZORIMA I AKTUATORIMA.....	6
3. MATEMATIČKI MODEL.....	8
4. BEZDIMENZIJSKI PARAMETRI I KARAKTERISTIČNE JEDNADŽBE.....	12
5. STABILNOST SUSTAVA.....	15
5.1. Karakteristični polinom $D1$ .....	16
5.2. Karakteristični polinom $D2$ .....	18
5.3. Bezdimenzijski parametri pasivnog sustava za postizanje stabilnosti aktivnog sustava.....	20
6. PERFORMANSE.....	22
7. ZAKLJUČAK.....	28

## POPIS SLIKA

Slika 1. Akustički metamaterijali s ekstremnim konstitutivnim parametrima .....	2
Slika 2. Ne-Hermittianski akustički metamaterijali .....	4
Slika 3. Struktura aktivne ćelije akustičkog metamaterijala za n recipročnu kontrolu prijenosa zvuka .....	6
Slika 4. 2D Shema jedne ćelije aktivnog AMM s rasporedom senzora i aktuatora.....	7
Slika 5. Presjek 3D sheme jedne ćelije aktivnog AMM s rasporedom senzora i aktuatora.....	7
Slika 6. Model diskretnog parametra jedne ćelije aktivne AMM strukture .....	9
Slika 7. Ovisnost determinanti $H_{ij}$ (navedeni u tekstu) o bezdimenzijskom pojačanju $\lambda$ .....	20
Slika 8. Amplitude prijenosnih funkcija $Y_{1,4}$ i $Y_{4,1}$ za $\lambda = 0$ izražene u decibelima .....	22
Slika 9. Amplitude prijenosnih funkcija $Y_{1,4}$ i $Y_{4,1}$ za $\lambda = 0$ i za $\lambda \neq 0$ izražene u decibelima .....	23
Slika 10. Fazni kut prijenosnih funkcija $Y_{1,4}$ i $Y_{4,1}$ za $\lambda = 0$ i za $\lambda \neq 0$ izražen u stupnjevima .....	24
Slika 11. Prosječna kinetička energija prijenosnih funkcija $Y_{1,4}$ i $Y_{4,1}$ u ovisnosti o $\lambda$ izražena u decibelima .....	25
Slika 12. Amplitude prijenosnih funkcija $Y_{1,2}$ i $Y_{2,1}$ za $\lambda = 0$ izražene u decibelima .....	26
Slika 13. Amplitude prijenosnih funkcija $Y_{1,2}$ i $Y_{2,1}$ za $\lambda = 0$ i za $\lambda \neq 0$ izražene u decibelima ...	26
Slika 14. Fazni kutovi prijenosnih funkcija $Y_{1,2}$ i $Y_{2,1}$ za $\lambda = 0$ i za $\lambda \neq 0$ izraženi u stupnjevima .....	27
Slika 15. Prosječna kinetička energija prijenosnih funkcija $Y_{1,2}$ i $Y_{2,1}$ u ovisnosti o $\lambda$ .....	27

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Vrijednosti bezdimenzijskih parametara.....21



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$x_i(t)$	[m]	pomak pojedine mase gdje je $i = 1,2,3,4$
$\dot{x}_i(t)$	[ms <sup>-1</sup> ]	brzina pojedine mase gdje je $i = 1,2,3,4$
$\ddot{x}_i(t)$	[ms <sup>-2</sup> ]	akceleracija pojedine mase gdje je $i = 1,2,3,4$
$F_i(t)$	[N]	sila koja djeluje na pojedinu masu gdje je $i = 1,2,3,4$
$k_{a12}$	[Nm <sup>-1</sup> ]	krutost zraka između bližih membrana
$k_{a21}$	[Nm <sup>-1</sup> ]	krutost zraka između udaljenijih membrana
$c_{a12}$	[Nsm <sup>-1</sup> ]	koeficijent viskoznog prigušenja
$k_i$	[Nm <sup>-1</sup> ]	modalna krutost membrana gdje je $i = 1,2$
$m_i$	[kg]	modalna masa membrana gdje je $i = 1,2$
$f$	[N]	sila aktuatora
<b>M</b>	[kg]	matrica masa
<b>C</b>	[kgs <sup>-1</sup> ]	matrica prigušenja
<b>K</b>	[kgs <sup>-2</sup> ]	matrica krutosti
$\hat{\mathbf{F}}$	[N]	amplituda uzbudne sile
$\hat{\mathbf{x}}$	[m]	amplituda odziva
$j$	[-]	imaginarna jedinica
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	kružna frekvencija
$s$	[s <sup>-1</sup> ]	Laplaceova varijabla
$Y_{ij}$	[N <sup>-1</sup> m]	dimenzijska prijenosna funkcija sustava gdje je $i = 1,2,3,4$ i $j = 1,2,3,4$
$Y_{i,j}$	[-]	bezdimenzijska prijenosna funkcija sustava gdje je $i = 1,2,3,4$ i $j = 1,2,3,4$
$\alpha$	[-]	bezdimenzijski parametar kvadratnih omjera prirodnih frekvencija $\Omega_{a12}$ i $\Omega_1$
$\beta$	[-]	bezdimenzijski parametar kvadratnih omjera prirodnih frekvencija $\Omega_2$ i $\Omega_1$
$\delta$	[-]	bezdimenzijski parametar kvadratnih omjera prirodnih frekvencija $\Omega_{a21}$ i $\Omega_1$
$\eta$	[-]	bezdimenzijski parametar omjera prigušenja $c_{a12}$ i kritičnog prigušenja
$\lambda$	[-]	bezdimenzijski parametar omjera pojačanja $g$ i prigušenja $c_{a12}$
$\mu$	[-]	bezdimenzijski parametar omjera masa $m_1$ i $m_2$
$\Omega$	[-]	bezdimenzijski parametar omjera $\omega$ i $\Omega_1$
$\Omega_i$	[Nm <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]	vlastita kružna frekvencija mase $i$ gdje je $i = 1,2$
$\Omega_{a12}$	[Nm <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]	vlastita kružna frekvencija mase $m_2$ i krutosti $k_{a12}$
$\Omega_{a21}$	[Nm <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]	vlastita kružna frekvencija mase $m_2$ i krutosti $k_{a21}$

---

$\Omega$	[-]	bezdimenzijski parametar omjera kružne frekvencije $\omega$ i vlastite kružne frekvencije mase $m_1$
$S$	[-]	bezdimenzijska Laplaceova varijabla
$D$	[-]	karakteristična jednačba 8. reda
$D_i$	[-]	polinom 4. reda gdje je $i = 1,2$
$\mathbf{H}_1$	[-]	Hurwitzova matrica polinoma $D_1$
$a_i$	[-]	koeficijenti polinoma $D_1$ gdje je $i = 0,1,2,3,4$
$H_{1i}$	[-]	determinante polinoma $D_1$ gdje je $i = 1,2,3,4$
$\mathbf{H}_2$	[-]	Hurwitzova matrica polinoma $D_2$
$d_i$	[-]	koeficijenti polinoma $D_2$ gdje je $i = 0,1,2,3,4$
$H_{2i}$	[-]	determinante polinoma $D_2$ gdje je $i = 1,2,3,4$
$A_i$	[-]	koeficijenti determinanti

## SAŽETAK

U radu su analizirani i diskutirani rezultati dobiveni pojednostavljenim diskretnim modelom jedne ćelije aktivnog metamaterijala. Pretpostavljena je ćelija aktivnog metamaterijala geometrije pogodne za 3D ispis jednostavnim uređajem: cijev pravokutnog poprečnog presjeka koja je naizmjenice isprekidana dvostrukim membranama. Izvedene su jednadžbe gibanja i odgovarajuće prijenosne funkcije za diskretni linearni dinamički model za cijev s dva para membrana i dva aktuatora pretpostavljajući da se dinamika svake od membrana i pravokutnih akustičkih šupljina između njih može aproksimirati njihovim prvom formom vibriranja tj. sustavom masa-opruga za membranu, a opruga-prigušivač za akustičku šupljinu. Tako dobiveni model s četiri stupnja slobode je analiziran i diskutiran obzirom na stabilnost para povratnih veza koristeći Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti. Određeni su parametri pasivnog sustava koji jamče stabilnost aktivnog sustava s dvije povratne veze. Nadalje, za stabilne sustave je pokazan i kvantificiran gubitak akustičke recipročnosti u širokom spektru frekvencija uspoređujući odgovarajuće parove od ukupno 16 izvedenih prijenosnih funkcija između sila i brzina vibriranja svake od četiriju masa u diskretnom mehaničkom sustavu. Zato se očekuje da bi i rezultati dobiveni simulacijama na sustavu s distribuiranim parametrima, kao i eksperimentalno dobiveni rezultati, potvrdili značajan gubitak akustičke recipročnosti.

Ključne riječi: *Zvuk, Vibracije, Akustički metamaterijali, Aktivni akustički metamaterijali, Automatska regulacija zvuka i vibracija*

## SUMMARY

In this thesis results obtained by a simplified discrete model of a single cell of an active metamaterial are analysed and discussed. The active metamaterial cell of geometry suitable for 3D printing with a simple device is assumed: a tube of rectangular cross-section periodically intermitted by a number of double membranes. Equations of motion and the corresponding transfer functions for the discrete linear dynamic model for a tube with two double membranes and two actuators are derived, assuming that the dynamics of each of the membranes and rectangular acoustic cavities between them can be approximated by their first vibration mode only, i.e. by a mass-spring system for the membrane and a spring-damper system for the acoustic cavity. The obtained four DOF (degree of freedom) model is analysed and discussed with respect to the stability of the feedback loop using the Routh-Hurwitz stability criterion. Parameters of the passive system which guarantee the stability of the active system when the two feedback loops are closed have been determined. Furthermore, for stable systems, a loss of acoustic reciprocity in a wide range of frequencies is shown. The reciprocity loss is quantified by comparing the corresponding pairs of a total of 16 derived transfer functions between forces and vibration velocities of each of the four masses in the discrete mechanical system. Therefore, it is expected that the future results obtained by simulations on an active vibroacoustic system with distributed parameters, as well as experimentally obtained results, would confirm a significant loss of acoustic reciprocity.

*Key words: Sound, Vibration, Acoustic Metamaterials, Active Acoustic Metamaterials, Active Control of Sound and Vibration.*

## 1. UVOD

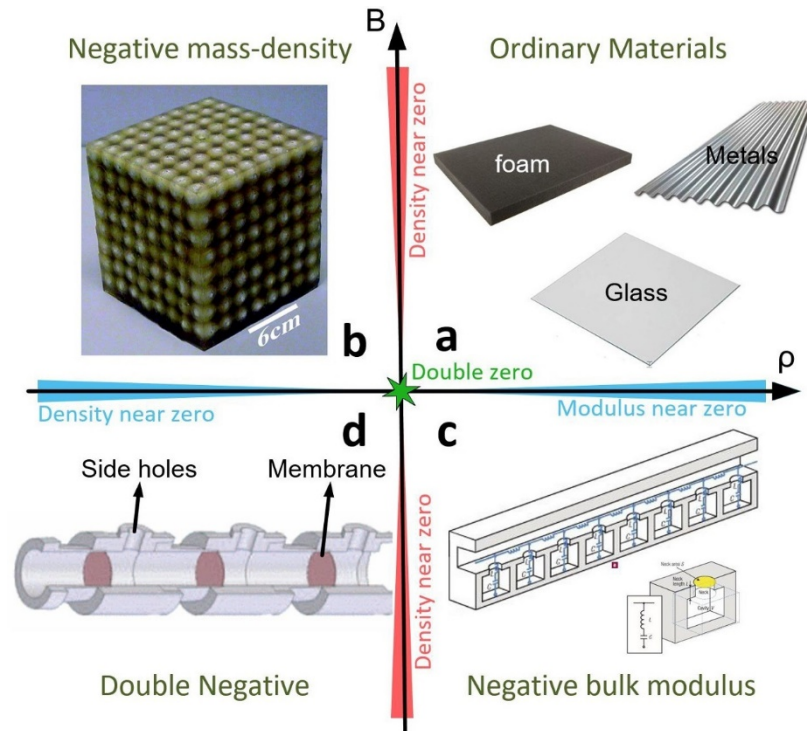
Akustički metamaterijali (AMM) uzbudljivo su i rapidno rastuće područje fizikalne akustike unutar kojeg se već dulje od 15 godina istražuju i proučavaju egzotični valni fenomeni. Manipulacija načinom širenja valova je inženjerski izazov relevantan još od početka modernih civilizacija kad su rani znanstvenici koristili leće izrađene od pravilno oblikovanih komada stakla za fokusiranje, savijanje ili uvećavanje slika koje prenosi svjetlost [1]. Međutim, manipuliranje ponašanjem valova materijalima koji se lako nalaze u prirodi dolazi s nekoliko bitnih ograničenja. Naime, iako u načelu zakoni fizike omogućavaju ekstremne valne funkcionalnosti poput prikrivanja (engl. cloaking [2], tj. prikrivanje predmeta od akustičke detekcije) ili fokusiranja na izrazito malo valne duljine (engl. subwavelength focusing [3], tj. stvaranje žarišta manjeg od granica difrakcije), nijedan prirodni materijal ne daje odgovarajuće vrijednosti konstitutivnih parametara potrebnih za postizanje ovakvih učinaka. Tome je tako zbog toga što prirodni materijali pokrivaju samo mali dio fizikalno dopuštenog prostora parametara materijala.

U posljednjih 15-tak godina razvoj metamaterijala ponudio je do sada neviđen razvoj tehnika za kontroliranje širenja valova, bili oni elektromagnetske ili mehaničke prirode. Metamaterijali (MM) su racionalno dizajnirani kompoziti sastavljeni od mezoskopskih rezonantnih uključaka smještenih u matricu metamaterijala, a sve skupa smješteno u akustički medij. Ti „meta-atomi“ su manji od ili usporedivi s valnom duljinom u akustičkom mediju te kolektivno, tj. makroskopski postižu željeno svojstvo, što često (ali ne i uvijek) može biti opisano efektivnim makroskopskim parametrima materijala. Takve umjetne strukture otvorile su put prema ostvarivanju korisnih funkcionalnosti za manipuliranje valova valovima, gdje te funkcionalnosti mogu biti prividno u nesuglasju sa zakonima difrakcije kao npr. akustičko prikrivanje, odnosno sprječavanje akustičke detekcije predmeta.

Metamaterijal je dakle bilo koji materijal s pažljivo dizajniranom geometrijskom strukturom takvom da rezultira svojstvom koje se ne nalazi u prirodnim monolitnim materijalima ili standardno korištenim kompozitima. Mogu se izraditi od sklopova višestrukih elemenata izrađenih od kompozitnih materijala, metala ili plastike. Metamaterijali su obično sastavljeni od ponavljajućih uzoraka, i obično u omjerima manjim od valnih duljina fenomena na koje utječu. Metamaterijali

dobivaju svoja svojstva ne iz svojstava osnovnih materijala, već iz geometrije novo dizajniranih struktura.

Njihov precizan oblik, geometrija, veličina, orijentacija i raspored daju im poželjna svojstva kojima se može manipulirati elektromagnetskim valovima blokiranjem, apsorpiranjem, pojačavanjem ili savijanjem kako bi se postigle prednosti u odnosu na ono što je moguće s uobičajenim materijalima.



Slika 1. Akustički metamaterijali s ekstremnim konstitutivnim parametrima

Na Slici 1. su prikazani akustički metamaterijali s ekstremnim konstitutivnim parametrima. U prvom kvadrantu (a) su prikazani obični materijali koji se nalaze u prirodi jer obično imaju pozitivnu gustoću  $\rho$  i modul elastičnosti  $B$ . Drugi kvadrant (b) prikazuje realizaciju „single-negative“ akustičkog metamaterijala koji pokazuje negativnu efektivnu gustoću mase. Takav metamaterijal može biti izgrađen od rezonatora (meta-atoma) izrađenih od metalnih sfera, obloženih mekim slojem silikonske gume. Treći kvadrant (c) prikazuje 1D akustički metamaterijal koji ima negativni modul elastičnosti, sastavljen od usmjerivača valova, u čijim su zidovima smješteni Helmholtzovi rezonatori. Četvrti kvadrant (d) prikazuje dvostruko negativne AMM-e: akustički usmjerivači valova popunjeni i sa strukturnim rezonatorima membrane (što dovodi do

negativne efektivne gustoće) i s Helmholtzovim rezonatorima (odgovornim za negativni modul elastičnosti).

U prirodnim medijima parametri  $\rho$  i  $B$ , koji označavaju gustoću i modul elastičnosti, mogu poprimati samo pozitivne vrijednosti (Slika 1.a, prvi kvadrant). Nasuprot tome, AMM-i mogu se izraditi i prilagoditi na takav način da pokazuju proizvoljne efektivne konstitutivne parametre, nudeći ekstremni raspon ne samo pozitivnih vrijednosti (poput vrlo velikih ili vrlo malih), već i negativnih vrijednosti. Upravo to omogućuje AMM-ima podršku različitih fizičkih fenomena koji se mogu koristiti za kontrolu širenja zvuka na neviđene načine.

## 1.1. Aktivni akustički metamaterijali

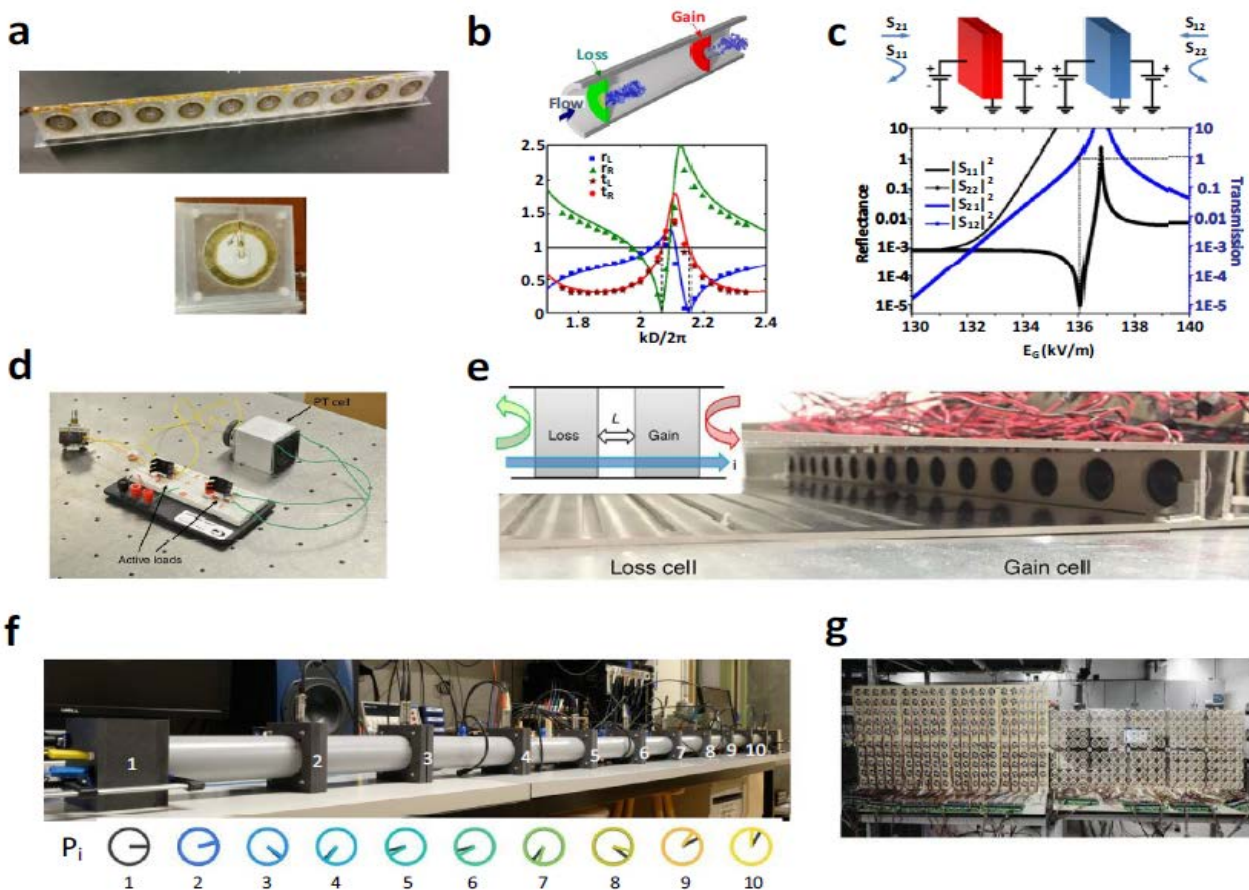
U vrlo širokom smislu, sve aktivne AMM-e moguće je podijeliti u dvije kategorije ovisno o tome daje li neki vanjski čimbenik energiju valu ili ne: (i) ne-Hermittianski AMM-i koji uključuju akustičko pojačanje i (ii) izvana moderirani AMM-i, koji omogućuju ili posebno svojstvo od interesa ili mogućnost rekonfiguriranja, ali bez razmjene energije s valom.

### 1.1.1. Ne-Hermittianski akustički metamaterijali

Ne-Hermittianski metamaterijali posjeduju efektivne parametre sa značajno pozitivnim imaginarnim dijelovima, što znači da je u materijalu prisutno aktivno pojačanje ili aktivna atenuacija i da takav materijal može jako izmijeniti način širenja valova. Ovakve vrste metamaterijala nude više slobode u dizajnu novih funkcionalnosti, iskorištavanjem interakcije između atenuacije, pojačanja i sprezanja pojedinih rezonantnih efekata. Često se oslanjaju na akustičko pojačanje. Učinkoviti mehanizmi za dobivanje akustičkog pojačanja su upotreba elektroakustičkih krugova, spajanje zvuka s hidrodinamičkim nestabilnostima ili termo-akustički efekti.

Na Slici 2. su prikazani neki ne-Hermittianski metamaterijali. Pod (a) je prikazan 1D akustički metamaterijali čija se efektivna svojstva kontroliraju pomoću vanjskog napona primijenjenog na piezoelektrične membrane. Slika pod (b) prikazuje akustički PT (engl. parity time) simetrični sustav od 2 sustava dijafragmi. Čitav sustav je napravljen i ugođen tako da omogućuje jednosmjernu nevidljivost. Akustički PT simetrični sustav (c) postignut je pomoću piezoelektričnih poluvodiča koji omogućuju jednosmjernu potisnutu refleksiju. Akustični PT

simetrični meta-atom (d), koji se sastoji od para zvučnika spojenih na električne krugove, demonstrira mogućnost jednosmjernog akustičkog prikrivanja. Pod (e) je prikazana optimizacija udaljenosti između elemenata pojačanja i atenuacije u PT simetričnom sustavu što omogućava širu kontrolu pristupa optimalnim točkama uvođenjem dodatnog stupnja slobode. Pod (f) je prikazan ne-Hermittianski akustički metamaterijal koji podržava tlačne valove stalnih amplituda unatoč prisutnosti Hermittianskog poremećaja. Aktivna akustička metapovršina (g) napravljena je od kružnih elastičnih membrana koje su ispunjene malim magnetnim diskovima, a koristi se za kontrolu ječnih zvučnih polja.



Slika 2. Ne-Hermittianski akustički metamaterijali

### 1.1.2. Izvana moderirani aktivni AMM-i

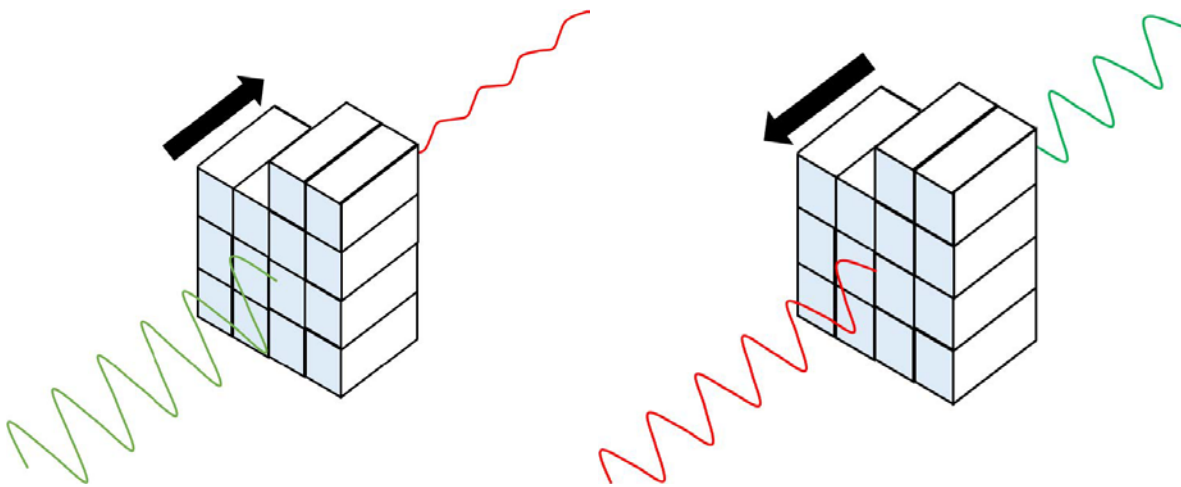
Reciprocitet je temeljno, ali ne uvijek i poželjno svojstvo širenja valova: kad se izvor stavi u točku A, detektirano polje u točki B ima istu magnitudu i fazu kao što bi imalo i u točki A ako bi



izvor bio postavljen u točki B. Za razliku od elektromagnetskih valova, gdje se mogu koristiti konvencionalni feromagnetski materijali za induciranje neregipročnih efekata u mikrovalnom području, akustički neregiprocitet nije lako postići budući da zvučni valovi u zraku ne stupaju u interakciju s magnetskim poljima. Dakle, pristupi suzbijanju akustičke recipročnosti zvuka uglavnom su se oslanjali na nelinearne efekte koji su, nažalost, popraćeni neželjenim značajkama kao što su glomazne strukture, velika potrošnja energije i velika izobličnost signala. Međutim, izvana moderirani aktivni AMM-i mogu suzbiti efekt reciprociteta iskorištavajući spregu strukturne matrice metamaterijala s prstenastim uključinama ispunjenim rotirajućim fluidom, gdje brzina rotacije fluida u uključinama predstavlja „polugu“ za vanjsko moderiranje svojstava metamaterijala. Naime, brzina rotacije fluida zbog Coriolisovog efekta rezultira podjelom energije vibracija na parove degeneriranih kontrarotirajućih formi vibriranja prstenaste šupljine ispunjene fluidom. Time nastaje značajan gubitak recipročnosti zbog interferencije degeneriranih formi vibriranja.

## 2. AKTIVNI AKUSTIČKI METAMATERIJALI S NE-KOLOCIIRANIM SENZORIMA I AKTUATORIMA

U okviru ovog rada istražiti će se aktivni akustički metamaterijal s ne-kolociranim parovima senzora i aktuatora kojima se uspostavlja više neovisnih povratnih veza po brzini vibracija. Metamaterijal je zamišljen kao ponavljajuća struktura koja se sastoji od više jednakih ćelija koje se mogu sastaviti u jednu metamaterijalnu prepreku (Slika 3). Svojstvo koje se želi postići ovakvom konfiguracijom, a koje se inače ne nalazi kod prirodnih materijala je gubitak akustičke recipročnosti.

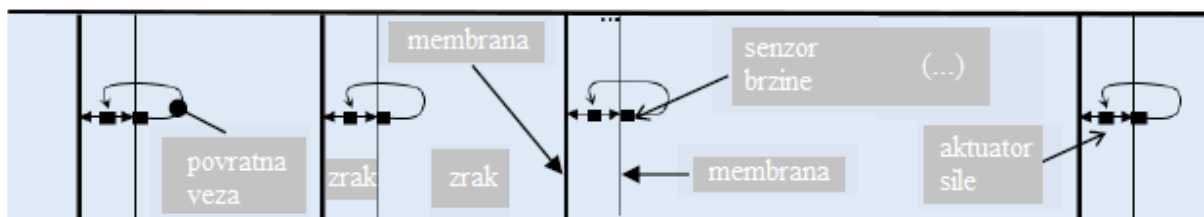


**Slika 3. Struktura aktivne ćelije akustičkog metamaterijala za nerekipročnu kontrolu prijenosa zvuka**

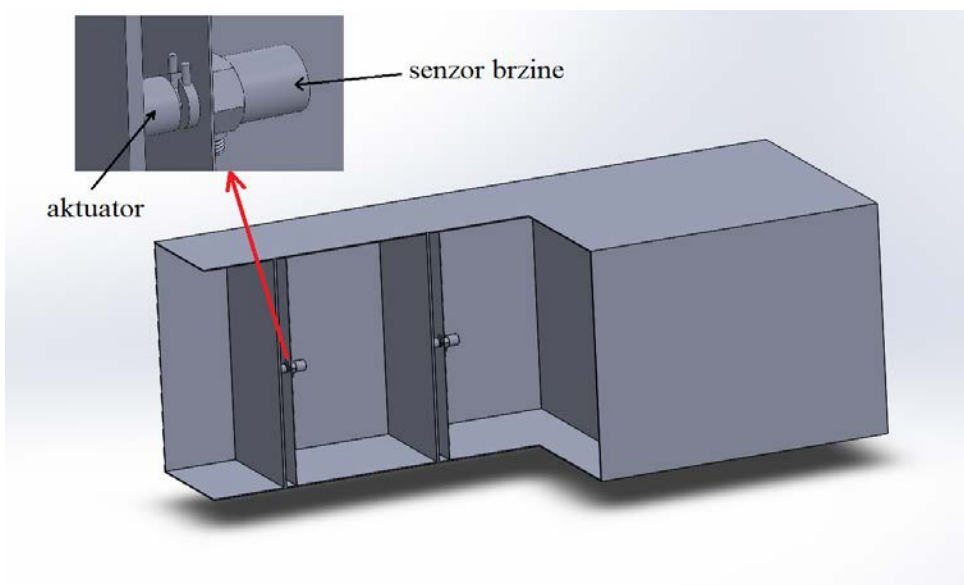
Ako se povratna veza po brzini vibracija primijeni u nekoj konstrukciji pomoću senzora i aktuatora bez kolokacije, u nekim je slučajevima moguće postići stabilne regulacijske petlje unatoč tomu što nema kolokacije između senzora i aktuatora. Kolociranjem senzora i aktuatora se inače postiže garantirana stabilnost regulacijskog sustava. Zato pasivna konstrukcija prije kontrole mora zadovoljiti određene kriterije da bi se ipak postigla stabilnost sustava [1]. U tom slučaju, raspored senzora i aktuatora bez kolokacije stvorit će dijagonalno asimetričnu matricu prigušenja. Ta asimetrija u matrici prigušenja aktivne konstrukcije bi mogla biti osnova je za gubitak akustičke recipročnosti u slučaju da konstrukcija provodi zvuk.

Shema jedne ćelije predviđene strukture aktivnog akustičnog metamaterijala prikazana je na Slici 2. Sama ćelija je cijev pravokutnog presjeka, ispunjena akustičkim medijem, u kojem su periodično raspoređena po dvije membrane. Aktuator djeluje na obje membrane, no s jednim

aktuatorom upotrebljava se samo jedan senzor brzine. S takvim rasporedom, moglo bi biti moguće pojačati učinak gubitka reciprociteta i povećati učinkovitost automatske regulacije transmisije zvuka ponavljanjem aktivne membrane uzduž cijevi u nizu.



Slika 4. 2D Shema jedne ćelije aktivnog AMM s rasporedom senzora i aktuatora



Slika 5. Presjek 3D sheme jedne ćelije aktivnog AMM s rasporedom senzora i aktuatora

### 3. MATEMATIČKI MODEL

Vibroakustičko ponašanje aktivne ćelije AMM-a analizirat će se pomoću modela s diskretnim parametrima jedne ćelije u kojem će se forme vibriranja višeg reda za ovu strukturu zanemariti tako da se jedna ćelija aktivnog AMM prikaže kao mehanički spregnuti diskretni sustav masa, opruga, prigušivača i idealiziranih parova aktuatora/senzora [*Slika 4*]. U tom se slučaju pretpostavlja da je stjenka cijevi idealno kruta te da se svaka membrana može aproksimirati pločom pravokutnog poprečnog presjeka s jednostavno oslonjenim rubovima, gdje se dinamika te ploče pojednostavljuje tako da se u obzir uzima samo njena prva forma vibriranja. Nadalje, dinamika akustičke šupljine također se pojednostavljuje tako da se uzima u obzir samo njena nulta (0,0,0) forma vibriranja tj. uniformni porast/pad akustičkog tlaka unutar cijele šupljine. U tom slučaju jedna akustička šupljina se daje reprezentirati unutar modela s diskretnim parametrima jednom oprugom odgovarajuće krutosti, a jedna membrana sustavom masa-opruga.

Na Slici 3  $x_i(t)$  predstavlja odziv pojedine mase gdje je  $i = 1,2,3,4$ ,  $F_i(t)$  predstavlja silu koja djeluje na pojedinu masu gdje je  $i = 1,2,3,4$ ,  $k_{a12}$  predstavlja krutost zraka (krute: susjedne bliske membrane),  $k_{a21}$  predstavlja krutost zraka (mekane: susjedne udaljene membrane),  $c_{a12}$  predstavlja koeficijent prigušenja,  $k_1$  i  $k_2$  predstavljaju modalnu krutost membrana,  $m_1$  i  $m_2$  predstavljaju modalnu masu membrana,  $f$  predstavlja silu aktuatora, dok  $v$  predstavlja brzinu vibriranja membrane u točki prihvata aktuatora, mjerenu senzorom brzine. Koeficijent prigušenja  $c_{a12}$  u najvećoj mjeri odgovara prigušenju koje u sustav donosi aktuator.

Prva forma vibriranja lijevo pozicionirane ploče se aproksimira masom  $m_1$  i oprugom krutosti  $k_1$ . Analogno, prva forma vibriranja desno pozicionirane ploče se aproksimira masom  $m_2$  i oprugom krutosti  $k_2$ . Zanemaruju se više forme vibriranja manje akustičke šupljine te se u modelu diskretnog parametra aproksimira oprugom krutosti  $k_{a12}$ . Također se zanemaruju više forme vibriranja veće akustičke šupljine i aproksimira se oprugom krutosti  $k_{a21}$ . Pretpostavka je da će se koristiti elektromagnetski aktuator koji između magneta i zavojnice zbog potrebe za jakim elektromagnetskim poljem ima vrlo malu zračnost, pa strujanje zraka između magneta i zavojnice izaziva dosta veliko prigušenje. Modalna prigušenja vezana uz prve forme vibriranja obiju ploča su zanemariva u odnosu na prigušenje aktuatora sile. Model diskretnog parametra mehaničkog sustava sastoji se od dviju masa, mase  $m_1$  spojene oprugom za čvrstu podlogu i mase  $m_2$  spojene sa oprugom  $k_2$  za čvrstu podlogu. Prigušivač se nalazi na strani povratne veze između masa  $m_1$  i



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{a12} & -c_{a12} - g & 0 & 0 \\ -c_{a12} & c_{a12} + g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{a12} & -c_{a12} - g \\ 0 & 0 & -c_{a12} & c_{a12} + g \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{a12} & -k_{a12} & 0 & 0 \\ -k_{a12} & k_2 + k_{a12} + k_{a21} & -k_{a21} & 0 \\ 0 & -k_{a21} & k_1 + k_{a12} + k_{a21} & -k_{a12} \\ 0 & 0 & -k_{a12} & k_2 + k_{a12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{bmatrix} \quad (10, 11)$$

Može se primijetiti da je zbog pojačanja  $g$  matrica krutosti  $\mathbf{C}$  asimetrična. Pretpostavlja se jednostavna harmonijska uzbuda i odziv stacionarnog stanja u obliku

$$\mathbf{F}(t) = \widehat{\mathbf{F}}e^{j\omega t}, \quad \mathbf{x}(t) = \widehat{\mathbf{x}}e^{j\omega t} \quad (12, 13)$$

Jednadžba (6) se prema tome može napisati kao

$$\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{F}(j\omega) \quad (14)$$

gdje  $\mathbf{S}(j\omega)$  predstavlja matricu dinamičke krutosti oblika

$$\mathbf{S}(j\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (15)$$

Rješenje jednadžbe (14) može se dobiti množenjem objiju strana jednadžbe s lijeve strane inverzom matrice  $\mathbf{S}(j\omega)$

$$\mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{S}^{-1}(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) \quad (16)$$

Deriviranjem jednadžbe (16) mogu se dobiti tražene brzine

$$\dot{\mathbf{x}}(j\omega) = \mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) \quad (17)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{x}}(j\omega) = j\omega \mathbf{x}(j\omega)$  vektor brzine vibriranja, a  $\mathbf{Y}(j\omega) = j\omega \mathbf{S}^{-1}(j\omega)$  matrica koja sačinjava 16 frekvencijskih prijenosnih funkcija između brzina i sila. Daljnji zapis će se izvoditi u Laplaceovoj domeni pomoću supstitucije

$$s = j\omega \quad (18)$$

Elementi matrice  $\mathbf{Y}$  su

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & Y_{1,3} & Y_{1,4} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & Y_{2,3} & Y_{2,4} \\ Y_{3,1} & Y_{3,2} & Y_{3,3} & Y_{3,4} \\ Y_{4,1} & Y_{4,2} & Y_{4,3} & Y_{4,4} \end{bmatrix} \quad (19)$$

gdje je  $Y_{1,1}$  prijenosna funkcija sustava brzine prve mase  $m_1$  kao posljedica sile koja djeluje na prvu masu  $m_1$ ,  $Y_{1,2}$  prijenosna funkcija sustava brzine prve mase  $m_1$  kao posljedica sile koja djeluje na prvu masu  $m_2$ ,  $Y_{1,3}$  prijenosna funkcija sustava brzine prve mase  $m_1$  kao posljedica sile koja djeluje na drugu masu  $m_2$  itd. Ako je  $i = j$ , onda se frekvencijska prijenosna funkcija zove „driving point mobility“, a ako nije, onda se zove „transfer mobility“. Kasnije će nam od velikog interesa biti prijenosne funkcije  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  kao i  $Y_{2,3}$  i  $Y_{3,2}$  tako da će se u kasnijem poglavlju samo one promatrati.

#### 4. BEZDIMENZIJSKI PARAMETRI I KARAKTERISTIČNE JEDNADŽBE

##### Bezdimenzijski parametri

Budući da u radu imamo dosta parametara s različitim mjernim jedinicama te zbog lakšeg proračuna, koristit će se odnosi tih parametara, tj. bezdimenzijski parametri. Svi bezdimenzijski parametri su definirani kao pozitivne veličine.

$$\alpha = \left( \frac{\Omega_{a12}}{\Omega_1} \right)^2 \quad (20)$$

$$\beta = \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2 \quad (21)$$

$$\delta = \left( \frac{\Omega_{a21}}{\Omega_1} \right)^2 \quad (22)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (23)$$

$$\eta = \frac{c_{a12}}{2\sqrt{m_1 k_1}} \quad (24)$$

$$\lambda = \frac{g}{c_{a12}} \quad (25)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\Omega_1} \quad (26)$$

U jednadžbama (20) - (26)  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\delta$  predstavljaju kvadratne omjere prirodnih frekvencija,  $\eta$  predstavlja omjer prigušenja  $c_{a12}$  i kritičnog prigušenja,  $\lambda$  predstavlja omjer pojačanja  $g$  i prigušenja  $c_{a12}$ ,  $\mu$  predstavlja omjer masa  $m_1$  i  $m_2$ . Svi bezdimenzijski parametri, kao i njihovi elementi, su pozitivni. Navedene vlastite frekvencije u prethodnim jednadžbama se mogu zapisati kao

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (27)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (28)$$



$$\Omega_{a12} = \sqrt{\frac{k_{a12}}{m_2}} \quad (29)$$

$$\Omega_{a21} = \sqrt{\frac{k_{a21}}{m_2}} \quad (30)$$

Svaka prijenosna funkcija u bezdimenzijskom obliku  $Y_{i,j}$  dobiva se koristeći supstitucije od (20) - (30), a veza između bezdimenzijske i njene pripadne dimenzijske prijenosne funkcije dana je izrazom (31) tako da se prijenosna funkcija u dimenzijskom obliku  $Y_{i,j}$  pomnoži s masom  $m_1$  i frekvencijom  $\Omega_1$

$$Y_{i,j}(S) = m_1 \Omega_1 Y_{i,j}(s), \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (31)$$

gdje se  $S$  uvodi kasnije u izrazu (32). Pretpostavlja se da su masa  $m_1$  i frekvencija  $\Omega_1$  konstantne vrijednosti te se mogu koristiti za prikaz svih prijenosnih funkcija u prikladnom bezdimenzijskom obliku.

### Karakteristične jednadžbe

Karakteristična jednadžba sustava je nazivnik bilo koje od prijenosnih funkcija. Malo boljim pogledom se zaključilo da se karakteristična jednadžba 8. reda može prikazati kao umnožak dvaju polinoma 4. reda.

Za daljnji proračun su se pojedinačno analizirali oba polinoma 4. reda te se koristila sljedeća supstitucija

$$S = j\Omega \quad (32)$$

$$D = D_1 D_2 \quad (33)$$

$$D_1(S) = S^4 \mu + (2\eta \mu + 2\eta(\lambda + 1)) S^3 + ((\beta + \alpha) \mu^2 + (\beta + \alpha + \delta + 1) \mu) S^2 + (2\eta(\delta + (\lambda + 2) \beta) \mu + 2\eta(\lambda + 1)) S + ((2\beta + \delta) \alpha + \beta \delta) \mu^2 + (\beta + \alpha + \delta) \mu \quad (34)$$

$$D_2(S) = S^4 \mu + (2\eta \mu + 2\eta(\lambda + 1)) S^3 + (\mu^2 \alpha + (\alpha + \delta + 1) \mu) S^2 + (2\eta \delta \mu + 2\eta(\lambda + 1)) S + \alpha \delta \mu^2 + (\alpha + \delta) \mu \quad (35)$$

gdje  $D_1$  označava prvi polinom 4. reda, a  $D_2$  drugi polinom 4. reda. Navedeni polinomi će se u sljedećem poglavlju detaljnije razmatrati.

Tako se prijenosne funkcije koje ćemo kasnije promatrati u bezdimenzijskom obliku mogu prikazati kao

$$Y_{1,4} = \frac{N_{1,4}}{D} \quad (36)$$

gdje je  $N_{1,4} = S \delta \mu (2\eta(\lambda + 1)S + \mu\alpha)^2$

$$Y_{4,1} = \frac{N_{4,1}}{D} \quad (37)$$

gdje je  $N_{4,1} = S(2S\eta + \mu\alpha)^2 \delta \mu$

$$Y_{1,2} = \frac{N_{1,2}}{D} \quad (38)$$

gdje je

$$N_{1,2} = \left( \begin{array}{l} S^4 \mu + 2\eta(\mu + \lambda + 1)S^3 + \mu((\alpha + \delta)\mu + \beta + \alpha + 1)S^2 \\ + 2((\beta + (\lambda + 1)\delta)\mu + \lambda + 1)\eta S + ((\beta + \delta)\alpha + \beta\delta)\mu + \beta + \alpha \end{array} \right) S(2\eta(\lambda + 1)S + \mu\alpha)$$

$$Y_{2,1} = \frac{N_{2,1}}{D} \quad (39)$$

$$\text{gdje je } N_{2,1} = S(2S\eta + \mu\alpha) \left( \begin{array}{l} ((\alpha + \delta)S^2 + (\beta + \delta)\alpha + \beta\delta)\mu^2 \\ + \left( \begin{array}{l} S^4 + 2S^3\eta + (\alpha + \beta + 1)S^2 \\ + 2(\beta + (\lambda + 1)\delta)\eta S + \beta + \alpha \end{array} \right) \mu + 2S\eta(S^2 + 1)(\lambda + 1) \end{array} \right)$$

## 5. STABILNOST SUSTAVA

### Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti

Analiza stabilnosti sustava će se provesti po Routh-Hurwitzovom kriteriju stabilnosti.

Recimo da imamo karakteristični polinom sustava oblika

$$a_0 B^n + a_1 B^{n-1} + a_2 B^{n-2} + \dots + a_{n-1} B + a_n = 0 \quad (40)$$

Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti je jedna od metoda kojom se može dokazati da svi korijeni karakteristične jednadžbe imaju negativne realne dijelove [2] i time diskutirati stabilnost sustava bez rješavanja same jednadžbe.

Korijeni jednadžbe (40) se mogu lako izračunati ako je  $n = 2$  i čak u slučajevima dok je  $n \geq 3$ . U drugim slučajevima rješavanje navedene jednadžbe predstavlja veliki problem. Norveški matematičar Niels Henrik Abel je dokazao teorem prema kojemu se algebarska jednadžba reda  $n \geq 5$  ne može riješiti koristeći četiri opće aritmetičke operacije, tj. za polinom 5. reda i više nije moguće pronaći analitičke izraze za korijene polinoma.

Nužan uvjet stabilnosti će biti zadovoljen ako su svi koeficijenti veći od nule ( $a_i > 0$ ). Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti nam je važan zbog toga što je pomoću njega moguće izraziti korijene polinoma analitički samo do maksimuma polinoma 4. reda. Budući da je karakteristični polinom (33) 8. reda, ali se da prikazati kao umnožak dvaju polinoma 4. reda, korijeni jednog od tih dvaju polinoma su četiri od ukupno osam korijena polinoma 8. reda, a četiri korijena drugog polinoma su preostala četiri korijena polinoma 8. reda. Kako bi svih osam korijena polinoma 8. reda imali negativni realni dio moraju korijeni polinoma  $D_1$  i  $D_2$  imati negativan realni dio tako da nam to uvjetno omogućava da koristimo Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti za polinom 8. reda. Kako bi korijeni polinoma 8. reda svi imali negativni realni dio, korijeni dvaju polinoma 4. reda moraju istovremeno imati zadovoljene uvjete za negativni realni dio. Analogno prethodno navedenom, provesti će se analiza stabilnosti pojedinačno za  $D_1$  i za  $D_2$ .

### 5.1. Karakteristični polinom $D_1$

Hurwitzova matrica se piše tako da se na glavnoj dijagonali nalaze koeficijenti  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Prvi stupac sadrži koeficijente čiji su indeksi neparni ( $a_1, a_3, \dots$ ). U svakom redu, gledano s lijeva na desno, indeks sljedećeg koeficijenta je za 1 manji od njegovog prethodnika. Svi ostali koeficijenti  $a_i$  s indeksima većima od  $n$  ili manjima od 0 zamijenjeni su sa nulama. Rezultat je matrica oblika

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Budući da imamo matricu  $\mathbf{H}_1$ , moguće je odrediti svih 4 determinanti matrice. Svi korijeni jednadžbe (40) će imati negativne realne dijelove ako i samo ako su sve determinantne Hurwitzove matrice pozitivne.

Koeficijenti su kako slijedi

$$a_0 = \mu \quad (42)$$

$$a_1 = 2\eta\mu + 2\eta(\lambda + 1) \quad (43)$$

$$a_2 = (\alpha + \delta)\mu^2 + (\alpha + \beta + \delta + 1)\mu \quad (44)$$

$$a_3 = (2\delta\eta\mu + 2\eta)\lambda + 2\beta\eta\mu + 4\delta\eta\mu + 2\eta \quad (45)$$

$$a_4 = (\alpha\beta + 2\alpha\delta + \beta\delta)\mu^2 + (\alpha + \beta + \delta)\mu \quad (46)$$

Sada se mogu izračunati determinante

$$H_{11} = a_1 = A_1\lambda + A_0 \quad (47)$$

gdje je  $A_0 = 2\eta(\mu + 1)$ ,  $A_1 = 2\eta$ ,

$$H_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = A_3\lambda + A_2 \quad (48)$$

gdje je  $A_2 = 2((\alpha + \delta)\mu^2 + (1 + 2\alpha)\mu + \beta + \alpha + \delta)\eta\mu$ ,  $A_3 = 2(\alpha\mu + \alpha + \beta + \delta)\mu\eta$ ,

$$H_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = A_6\lambda^2 + A_5\lambda + A_4 \quad (49)$$

gdje je  $A_4 = 4\eta^2((\beta - 1)^2 + (2\mu^2 + 2)\delta^2 - 2(\beta - 1)(\mu - 1)\delta)\mu^2$ ,

$$A_5 = 4\eta^2((\mu^2 + 3)\delta^2 + (\mu - 1)(\mu\alpha + \alpha - 2\beta + 2)\delta - (\beta - 1)(\mu\alpha + \alpha - \beta + 1))\mu^2,$$

$$A_6 = 4\eta^2(\delta^2 + \alpha(\mu - 1)\delta - \alpha(\beta - 1))\mu^2,$$

$$H_{14} = |\mathbf{H}_1| = A_9\lambda^2 + A_8\lambda + A_7 \quad (50)$$

gdje je  $A_9 = 4(\delta^2 + \alpha(\mu - 1)\delta - \alpha(\beta - 1))\mu^3((1 + (\beta + 2\alpha)\mu)\delta + \mu\beta\alpha + \beta + \alpha)\eta^2$

$$A_8 = 4((\mu^2 + 3)\delta^2 + (\mu - 1)(\mu\alpha + \alpha - 2\beta + 2)\delta - (\beta - 1)(\mu\alpha + \alpha - \beta + 1))\mu^3$$

$$((1 + (\beta + 2\alpha)\mu)\delta + \mu\beta\alpha + \beta + \alpha)\eta^2$$

$$A_7 = 4((2\mu^2 + 2)\delta^2 - (-\beta + 1)(\beta - 1) + (\mu - 1)(-2\beta + 2)\delta)\mu^3$$

$$((1 + (\beta + 2\alpha)\mu)\delta + \mu\beta\alpha + \beta + \alpha)\eta^2$$

Može se pokazati da je  $H_{14}$  proporcionalna  $H_{13}$  s koeficijentom proporcionalnosti  $L_1$

$$L_1 = \mu(\mu\beta\alpha + 2\alpha\delta\mu + \beta\delta\mu + \alpha + \beta + \delta) \quad (51)$$

Zbog te činjenice  $H_{14}$  neće se gledati pri sljedećim razmatranjima.

## 5.2. Karakteristični polinom $D_2$

Hurwitzova matrica za karakterističnu jednadžbu  $D_2$  će se napisati analogno prema pravilima navedenima u Poglavlju 5.1. Rezultat je matrica oblika

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} d_1 & d_0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & d_4 & d_3 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Uz pomoć matrice  $\mathbf{H}_2$  moguće je odrediti svih 4 determinanti matrice. Koeficijenti su kako slijedi

$$d_0 = \mu \quad (53)$$

$$d_1 = 2\eta\mu + 2\eta(\lambda + 1) \quad (54)$$

$$d_2 = \mu^2\alpha + (\alpha + \beta + 1)\mu \quad (55)$$

$$d_3 = 2\beta\eta\mu + 2\eta\lambda + 2\eta \quad (56)$$

$$d_4 = \alpha\beta\mu^2 + (\alpha + \beta)\mu \quad (57)$$

Sada se mogu izračunati determinante

$$H_{21} = H_{11} = d_1 = A_1\lambda + A_0 \quad (58)$$

gdje je  $A_0 = 2\eta(\mu + 1)$ ,  $A_1 = 2\eta$  budući da je identičan determinanti  $H_{11}$ ,

$$H_{22} = \begin{vmatrix} d_1 & d_0 \\ d_3 & d_2 \end{vmatrix} = A_{11}\lambda + A_{10} \quad (59)$$

gdje je  $A_{10} = 2\mu((\mu + 1)^2\alpha + \mu + \beta)\eta$ ,  $A_{11} = 2\mu((\mu + 1)\alpha + \beta)\eta$ ,

$$H_{23} = \begin{vmatrix} d_1 & d_0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 \\ 0 & d_4 & d_3 \end{vmatrix} = A_{14}\lambda^2 + A_{13}\lambda + A_{12} \quad (60)$$

gdje je  $A_{12} = -4\mu^2(\beta-1)(-\beta+1)\eta^2$ ,  $A_{13} = -4\mu^2(\beta-1)(-\beta+1+(\mu+1)\alpha)\eta^2$ ,  
 $A_{14} = -4\mu^2(\beta-1)\alpha\eta^2$ ,

$$H_{24} = |\mathbf{H}_2| = A_{17}\lambda^2 + A_{16}\lambda + A_{15} \quad (61)$$

gdje je  $A_{15} = -4\mu^3(-\beta+1)(\beta-1)((\mu\alpha+1)\beta+\alpha)\eta^2$ ,  
 $A_{16} = -4\mu^3(-\beta+1+(\mu+1)\alpha)(\beta-1)((\mu\alpha+1)\beta+\alpha)\eta^2\lambda$ ,  
 $A_{17} = -4\mu^3\alpha(\beta-1)((\mu\alpha+1)\beta+\alpha)\eta^2\lambda^2$ .

Također se i kod ove karakteristične jednadžbe može pokazati da je  $H_{24}$  proporcionalna  $H_{23}$  s koeficijentom proporcionalnosti  $L_2$

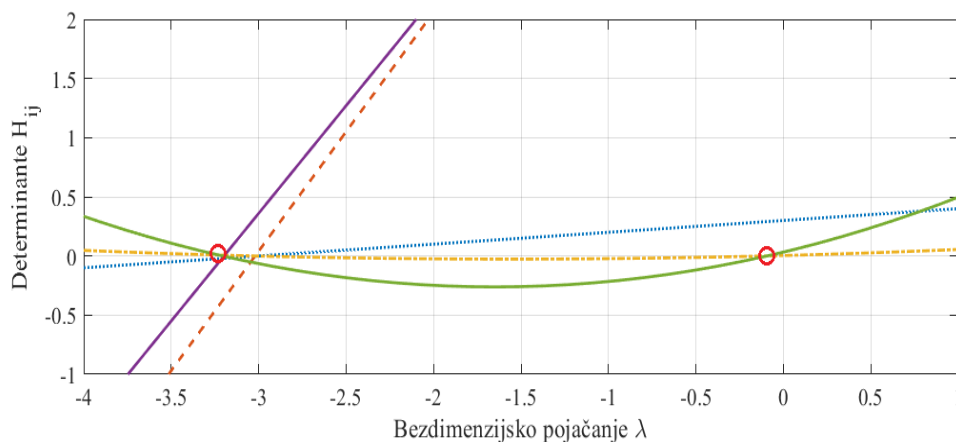
$$L_2 = \mu(\mu\beta\alpha + \alpha + \beta) \quad (62)$$

Zbog te činjenice  $H_{24}$  se također neće gledati pri sljedećim razmatranjima.

### 5.3. Bezdimenzijski parametri pasivnog sustava za postizanje stabilnosti aktivnog sustava

Kao što je prije spomenuto, svi bezdimenzijski parametri kao i njihovi elementi su pozitivni. S tom činjenicom, i činjenicom da sve determinante dvaju polinoma  $D_1$  i  $D_2$  moraju biti pozitivne kako bi se zadovoljio Routh-Hurwitzov kriterij, analiziramo koje vrijednosti bezdimenzijskih parametara zadovoljavaju te uvjete.

Analiziranjem determinanti te grupiranjem njihovih članova po parametru  $\lambda$  zaključuje se da su determinante  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$  pravci koji svi sijeku apscisu na njenom negativnom dijelu i imaju pozitivan nagib. Time se dokazuje da su svi imaju pozitivne vrijednosti za  $\lambda > 0$ . Za determinante  $H_{13}$ ,  $H_{23}$  se dokazalo, prema jednadžbama (49) i (60), da su parabole koje su ovisne o 5 bezdimenzijskih parametara. Glavni cilj je dobiti parametre tako da aktivni sustav bude stabilan. Time se zaključuje da želimo da oblik parabola bude konkavan kako ne bi bilo granice količini pojačanja koju je moguće upotrijebiti. Zbog toga su se primarno gledali koeficijenti uz  $\lambda^2$ . Analizom koeficijenata  $A_6$  i  $A_{14}$  došlo se do zaključka da bezdimenzijski parametar  $\beta$  mora biti manji od jedan ( $\beta < 1$ ), a da bezdimenzijski parametar  $\mu$  mora biti veći od jedan ( $\mu > 1$ ). To bi fizikalno značilo da prva membrana mora imati vlastitu frekvenciju veću od vlastite frekvencije druge membrane i, s druge strane, da modalna masa druge membrane mora biti veća od modalne mase prve membrane. Uz sve te spoznaje, nacrtan je graf koji pokazuje ovisnost promatranih determinanti od bezdimenzijskom pojačanju  $\lambda$



Slika 7. Ovisnost determinanti  $H_{ij}$  (navedeni u tekstu) o bezdimenzijskom pojačanju  $\lambda$



gdje ljubičasta, narančasta i svjetloplava linija prikazuju determinante  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$ , a zelena i žuta linija prikazuju determinante  $H_{13}$ ,  $H_{23}$ . Vrijednosti bezdimenzijskih parametara korištene za crtanje grafa dane su u sljedećoj tablici

**Tablica 1. Vrijednosti bezdimenzijskih parametara**

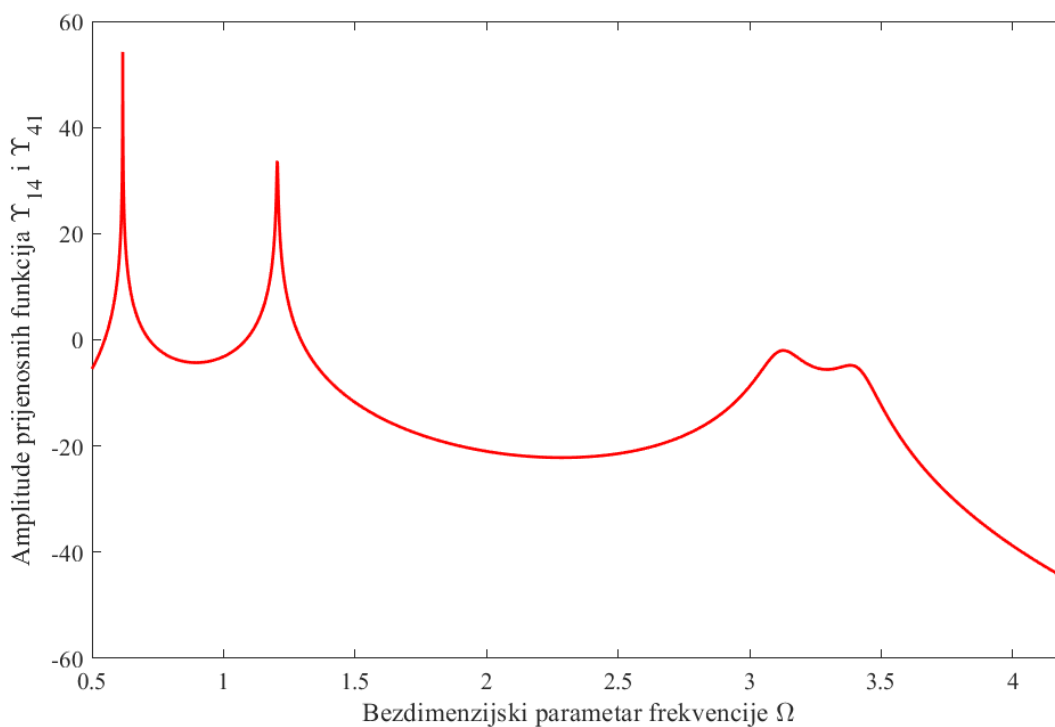
$\alpha$	$\beta$	$\mu$	$\eta$	$\delta$
3	0.1	2	0.05	1

Nultočke parabola se nalaze na negativnom dijelu osi apscisa (crveni kružići) te je time dokazano da za pozitivne vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja  $\lambda$  ona ima pozitivne vrijednosti. U slučaju da se sjecišta parabola i pravaca nalaze na pozitivnom dijelu osi apscisa to ne bi bilo fizikalno, tj. za  $\lambda = 0$  bi imali nestabilan sustav, a  $\lambda = 0$  je pasivan sustav i kao takav ne može biti nestabilan.

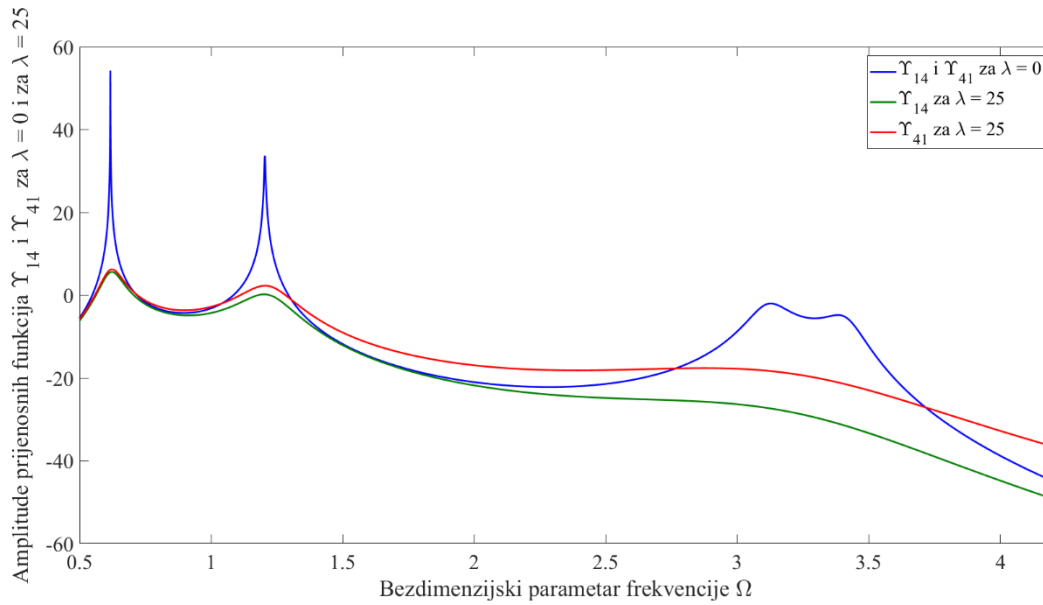
Time je dokazano da su za izabrane vrijednosti bezdimenzijskih parametara za proučavane determinante pozitivne te time sustav zadovoljava Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti.

## 6. PERFORMANSE

U ovom poglavlju se promatraju bezdimenzijske prijenosne funkcije (36) - (39). Prijenosne funkcije  $\Upsilon_{1,4}$  i  $\Upsilon_{4,1}$  se prikazuju kako bi se pokazao intenzitet gubitka reciprociteta između dva para membrana, a prijenosne funkcije  $\Upsilon_{1,2}$  i  $\Upsilon_{2,1}$  za pokazivanje intenziteta gubitka reciprociteta između jednog para membrana. Vrijednosti bezdimenzijskih parametara korištene za crtanje grafova su navedene u Tablici 1.

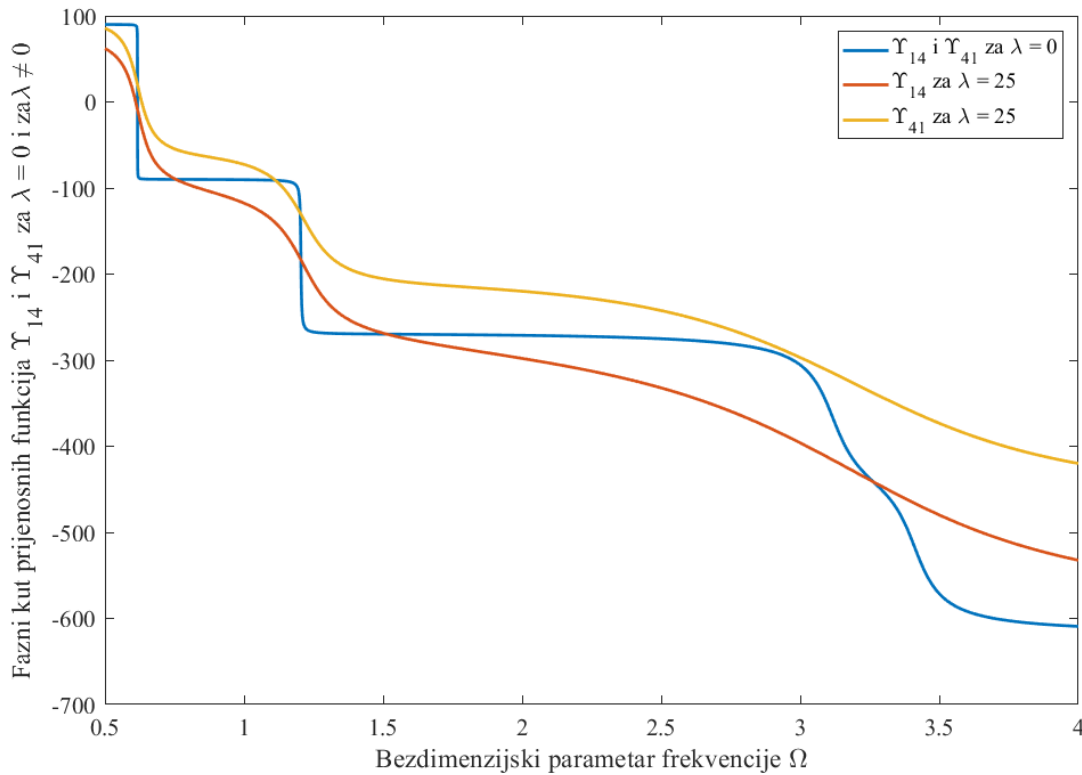


Slika 8. Amplitude prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,4}$  i  $\Upsilon_{4,1}$  za  $\lambda = 0$  izražene u decibelima



**Slika 9. Amplitude prijenosnih funkcija  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  za  $\lambda = 0$  i za  $\lambda \neq 0$  izražene u decibelima**

Na Slici 8 je prikazan graf amplitude prijenosnih funkcija  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  za slučaj dok je pojačanje  $\lambda$  jednako nuli. Prema toj slici se vidi da prijenosne funkcije imaju četiri vrha (engl. peak) što dokazuje činjenicu da sustav ima četiri stupnja slobode gibanja i prema tome ima četiri različite rezonancije. Na grafu se vidi samo jedna krivulja zato što su prijenosne funkcije u slučaju da je  $\lambda = 0$  jednake što je poznato kao princip reciprociteta. Slika 9 prikazuje opet grafove amplituda prijenosnih funkcija  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$ , ali je uzet i slučaj da je  $\lambda = 25$ . Na grafu se vidi da za proizvoljnu vrijednost  $\lambda$  različitu i veću od nula, prijenosne funkcije  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  će se razlikovati. Slika 10 prikazuje fazne kutove datih prijenosnih funkcija za slučaj kada je  $\lambda = 0$  i kada je  $\lambda \neq 0$ .



Slika 10. Fazni kut prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,4}$  i  $\Upsilon_{4,1}$  za  $\lambda = 0$  i za  $\lambda \neq 0$  izražen u stupnjevima

Površina ispod svih krivulja kvadrata amplituda prijenosnih funkcija je prosjek kvadrata brzine vibriranja mase  $m_2$  i proporcionalan je prosječnoj kinetičkoj energiji mase  $m_2$  kao posljedica djelovanja uzbudne sile na masu  $m_1$  gdje je spektralna gustoća snage sile na masu  $m_1$  jednaka jedinici (sila ima karakteristiku bijelog šuma).

Integral prosjeka kvadrata brzine vibriranja se može zapisati kao

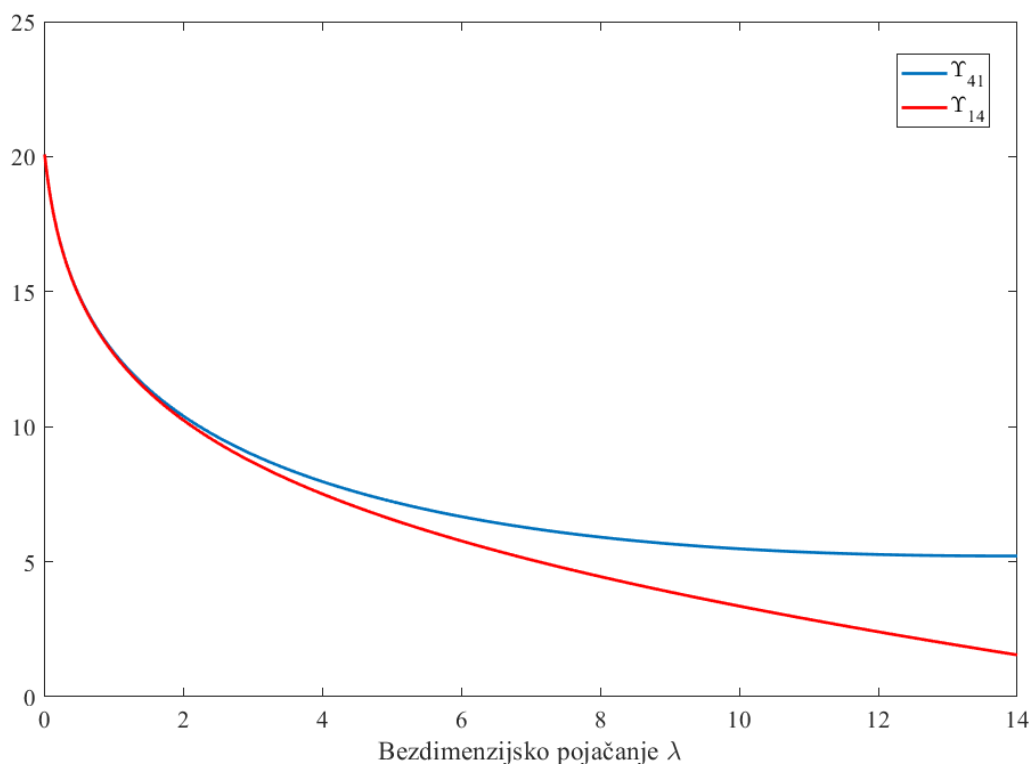
$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} |\Upsilon_{i,j}(\Omega)|^2 d\Omega \quad (63)$$

gdje je  $\Upsilon_{i,j}$  prije uveden, no zapisat će se u sljedećem obliku

$$\Upsilon_{i,j} = \frac{B_0 + (j\Omega)B_1 + (j\Omega)^2 B_2 + \dots + (j\Omega)^{n-1} B_{n-1}}{A_0 + (j\Omega)A_1 + (j\Omega)^2 A_2 + \dots + (j\Omega)^n B_n} \quad (64)$$

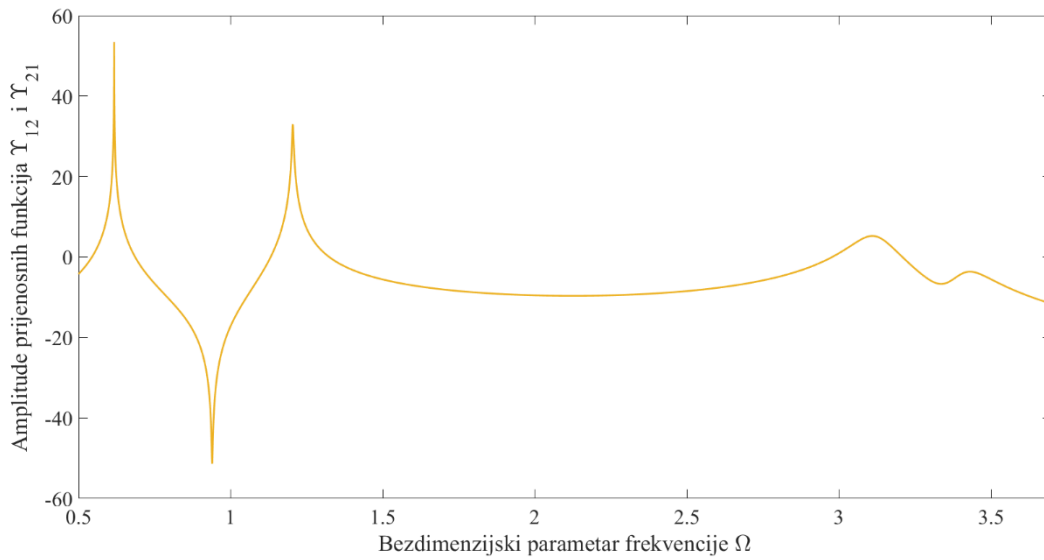
Integral (63) može se izračunati analitički znajući koeficijente polinoma u brojniku i nazivniku jednadžbe (64) pomoću integracijskih jednadžbi danih u [10]. Tako se izračunala funkcija ovisnosti

prosječna kinetičke energije o  $\lambda$  te se dobio graf na Slici 11. Na Slici 11 se vidi da je što je veći  $\lambda$  to je veća razlika prosječne kinetičke energije mase 4 (druga masa  $m_2$ ) kao posljedica uzbude bijelim šumom na masu 1 (prva masa  $m_1$ ) i mase 1 (prva masa  $m_1$ ) kao posljedica uzbude bijelim šumom na masu 4 (druga masa  $m_2$ ).



**Slika 11. Prosječna kinetička energija prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,4}$  i  $\Upsilon_{4,1}$  u ovisnosti o  $\lambda$  izražena u decibelima**

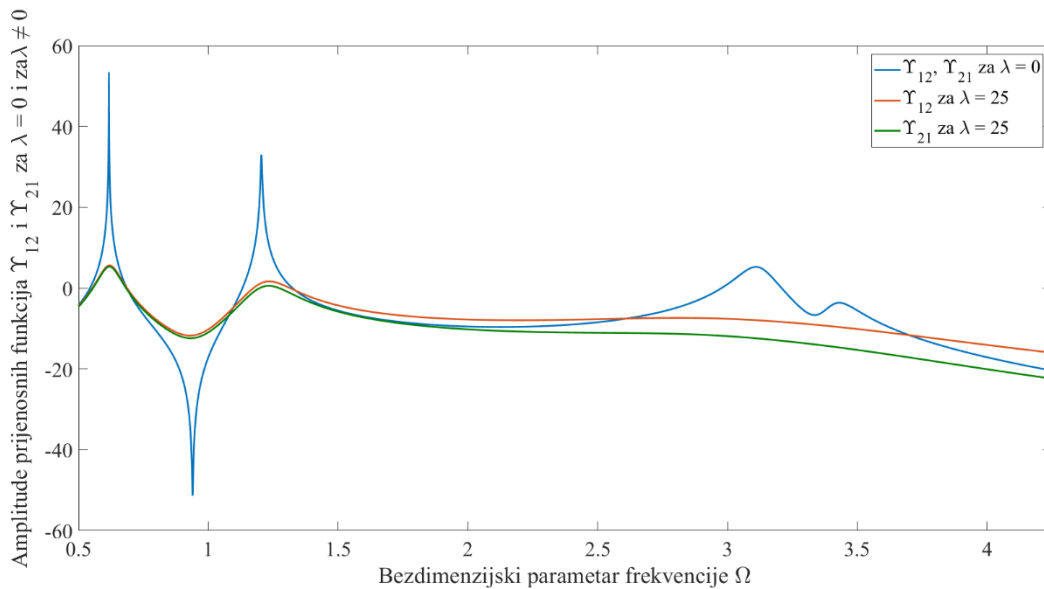
Ista se analiza provela i za prijenosne funkcije  $\Upsilon_{1,2}$  i  $\Upsilon_{2,1}$  te su time dobiveni sljedeći grafovi.



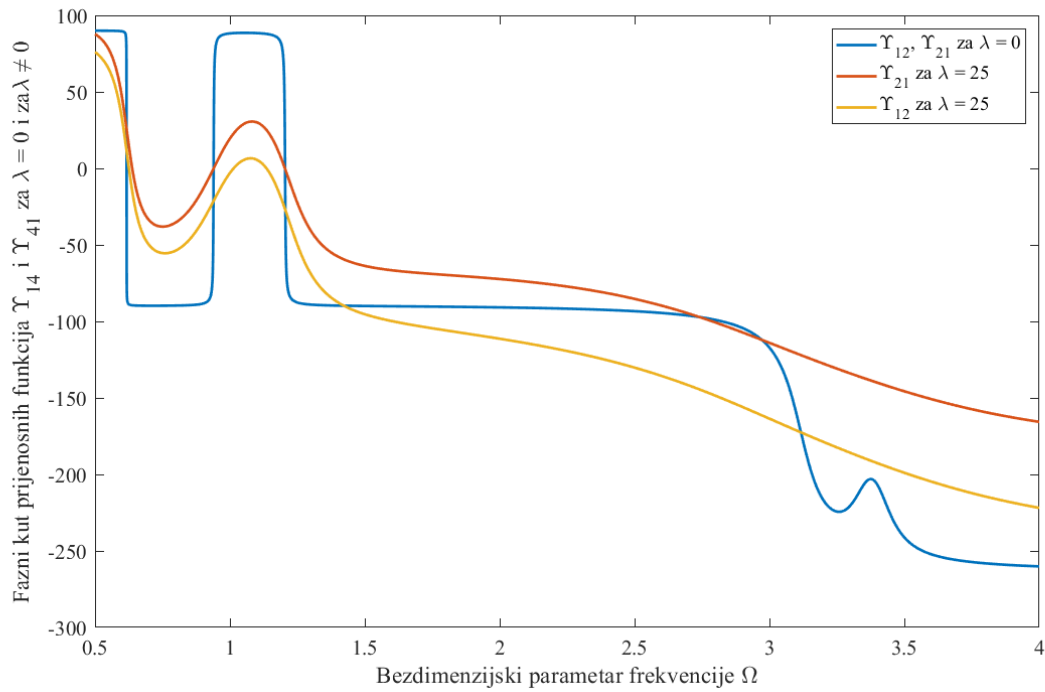
**Slika 12. Amplitude prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,2}$  i  $\Upsilon_{2,1}$  za  $\lambda = 0$  izražene u decibelima**

Iz Slike 12 možemo vidjeti da postoji jedna antirezonancija između prvih dviju rezonancija.

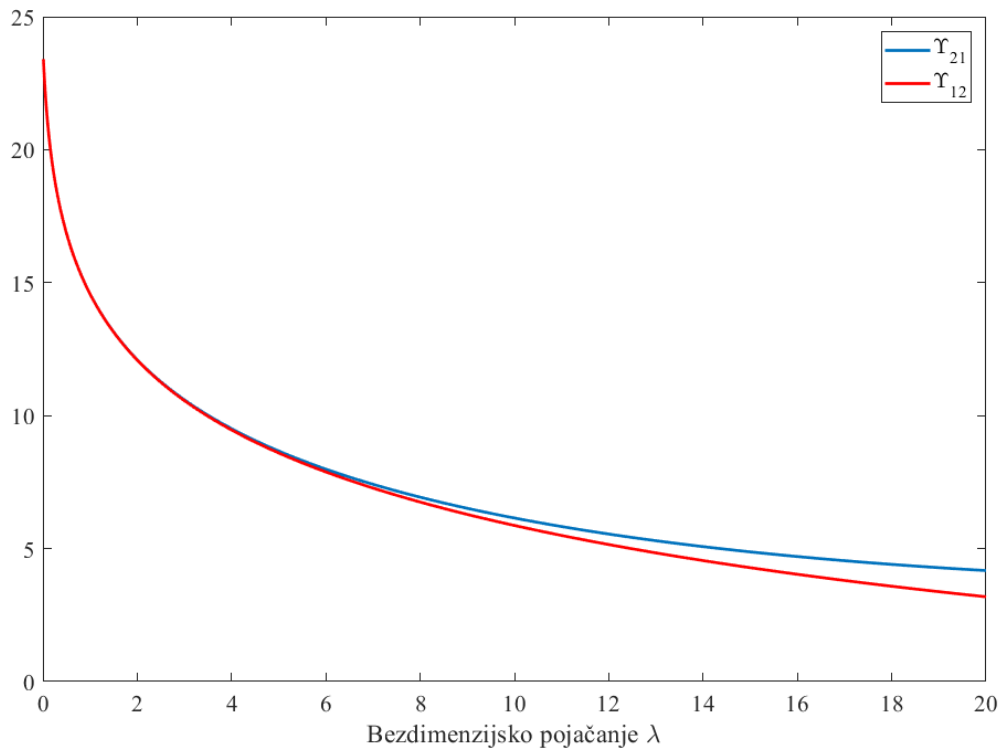
Prema tome najveća razlika između rezonancije i antirezonancije iznosi otprilike 105 dB.



**Slika 13. Amplitude prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,2}$  i  $\Upsilon_{2,1}$  za  $\lambda = 0$  i za  $\lambda \neq 0$  izražene u decibelima**



Slika 14. Fazni kutovi prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,2}$  i  $\Upsilon_{2,1}$  za  $\lambda = 0$  i za  $\lambda \neq 0$  izraženi u stupnjevima



Slika 15. Prosječna kinetička energija prijenosnih funkcija  $\Upsilon_{1,2}$  i  $\Upsilon_{2,1}$  u ovisnosti o  $\lambda$

## 7. ZAKLJUČAK

U radu je izveden model s diskretnim parametrima jedne ćelije aktivnog akustičkog metamaterijala. Pretpostavljena ćelija metamaterijala je aktivirana neovisnim decentraliziranim sustavom povratnih veza po brzini vibracija konstrukcije s nepotpunom kolokacijom senzora brzine vibriranja i aktuatora koji generira regulacijsku silu. Pokazano je da matrica prigušenja sustava zbog korištenja senzora i aktuatora bez kolokacije nije dijagonalno simetrična što je osnova za gubitak strukturne dinamičke recipročnosti. Međutim, kako nije korištena tehnika kolociranja senzora i aktuatora, tako nema garancije stabilnosti sustava. Zbog toga je provedena detaljna analiza stabilnosti sustava s dva senzora i dva aktuatora, odnosno s dvije neovisne regulacijske petlje. Pokazano je da je moguće postići stabilnost sustava unatoč korištenju nekolociranih parova senzora i aktuatora ako se pasivna struktura dizajnira na određen način. Konkretno, potrebno je osigurati da membrana o koju se odupire regulacijski aktuator, a na kojoj nema senzora brzine vibracija, ima višu fundamentalnu vlastitu frekvenciju nego membrana na koju je smješten senzor. Nadalje, potrebno je osigurati da membrana na koju je smješten senzor ima višu modalnu masu od druge membrane. Ako se pasivna struktura dizajnira uz ova dva uvjeta moguće postići bezuvjetno stabilne povratne veze i narinuti visoke vrijednosti pojačanja u povratnim vezama. Analizom performansi sustava automatske regulacije pokazano je da se na taj način postižu velike atenuacije vibracija membrana u rezonancijama poradi generiranog aktivnog prigušenja (regulacijska sila je suprotna brzini vibracija u točki prihvata aktuatora). Osim toga, pokazan je i značajan gubitak recipročnosti s porastom pojačanja u povratnim vezama. Gubitak recipročnosti demonstriran je razlikom u kinetičkim energijama membrana ćelije metamaterijala u širokom spektru frekvencija u slučaju da uzbuda i odziv zamijene mjesta. Također je pokazano da ta razlika postaje to veća što je veće pojačanje u dvije povratne veze decentraliziranog sustava za automatsku regulaciju. Zato se očekuje da bi i budući rezultati dobiveni simulacijama na vibroakustičkom sustavu s distribuiranim parametrima, kao i eksperimentalno dobiveni rezultati, potvrdili značajan gubitak akustičke recipročnosti.



## LITERATURA

- [1] D. Brewster, On an account of a rock-crystal lens and decomposed glass found in Niniveh, *Die Fortschritte der Physik im Jahre*, (1852), pp. 355–356.
- [2] J. Pendry, Trend: taking the wraps off cloaking, *Physics 2* (2009) 95.
- [3] J.B. Pendry, Negative refraction makes a perfect lens, *Phys. Rev. Lett.* 85 (18) (2000) 3966.
- [4] N. Alujević, D. Čakmak, H. Wolf, M. Jokić: Passive and active vibration isolation systems using inerter, 2018.
- [5] Petrić, J.: Automatska regulacija: uvod u analizu i sintezu, Zagreb, 2012.
- [6] Farzad Zangeneh-Nejad, Romain Fleury: Active times for acoustic metamaterials, 2019.
- [7] Pustaić, D., Wolf. H., Tonković, Z.: Mehanika III: uvod u analitičku mehaniku s osnovama teorije vibracija, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb 2005.
- [8] L E Kinsler, A R Frey, A B Coppins and J V Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, 4th Edition, pp. 560. ISBN 0-471-84789-5. Wiley-VCH, December 1999.
- [9] *Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications*, Second Edition  
Editors(s): István L. Vér, Leo L. Beranek  
First published: 12 December 2007  
Print ISBN: 9780471449423 | Online ISBN: 9780470172568  
DOI: 10.1002/9780470172568  
Copyright 2006 John Wiley & Sons, Inc.
- [10] D.E. Newland, *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*, third ed., Dover Publications Inc, New York, 2005.]
- [11] [https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic\\_metamaterial](https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_metamaterial)
- [12] <https://www.mathworks.com/help/matlab/language-fundamentals.html>
- [13] [https://www.maplesoft.com/documentation\\_center/maple18/usermanual.pdf](https://www.maplesoft.com/documentation_center/maple18/usermanual.pdf)