

# Analiza uzdužne granične nosivosti u konceptualnoj sintezi tankostjenih konstrukcija

---

**Kitarović, Stanislav**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2012**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:348479>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





**Sveučilište u Zagrebu**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

Stanislav Kitarović

**ANALIZA UZDUŽNE GRANIČNE  
NOSIVOSTI U KONCEPTUALNOJ  
SINTEZI TANKOSTJENIH  
KONSTRUKCIJA**

DOKTORSKI RAD

ZAGREB, 2012



**University of Zagreb**

**FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE**

Stanislav Kitarović

**ANALYSIS OF LONGITUDINAL  
ULTIMATE LOAD-CAPACITY IN  
CONCEPT SYNTHESIS OF  
THIN-WALLED STRUCTURES**

DOCTORAL THESIS

ZAGREB, 2012



**Sveučilište u Zagrebu**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

Stanislav Kitarović

**ANALIZA UZDUŽNE GRANIČNE  
NOSIVOSTI U KONCEPTUALNOJ  
SINTEZI TANKOSTJENIH  
KONSTRUKCIJA**

DOKTORSKI RAD

Mentor:  
Prof.dr.sc. Vedran Žanić

ZAGREB, 2012



**University of Zagreb**

**FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE**

Stanislav Kitarović

**ANALYSIS OF LONGITUDINAL  
ULTIMATE LOAD-CAPACITY IN  
CONCEPT SYNTHESIS OF  
THIN-WALLED STRUCTURES**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:

Prof. Vedran Žanić, NA, PhD

ZAGREB, 2012

## Podaci za bibliografsku karticu

<b>UDK:</b>	629.5.015.4:539.3
<b>Ključne riječi:</b>	Sigurnost konstrukcija, granično stanje nosivosti, granična čvrstoća, uzdužna granična nosivost, granični moment savijanja, smična granična nosivost, analiza progresivnog kolapsa, kolapsna sekvenca, poprečno ravno savijanje, deplanacija, izvijanje, popuštanje, monotone tankostjene konstrukcije, konceptualna sinteza.
<b>Znanstveno područje:</b>	Tehničke znanosti
<b>Znanstveno polje:</b>	Zrakoplovstvo, raketna i svemirska tehnika
<b>Institucija u kojoj je rad izrađen:</b>	Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje
<b>Mentor rada:</b>	Prof.dr.sc. Vedran Žanić
<b>Broj stranica:</b>	xxvi + 149
<b>Broj slika:</b>	121
<b>Broj tablica:</b>	13
<b>Broj bibliografskih jedinica:</b>	61
<b>Datum obrane:</b>	
<b>Povjerenstvo:</b>	Prof.dr.sc. Ilica Smojver, predsjednik Prof.dr.sc. Vedran Žanić, mentor Prof.dr.sc. Albert Zamarin, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet
<b>Institucija u kojoj je rad pohranjen:</b>	Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

## Zahvale

Želim se zahvaliti prvenstveno svome mentoru, Prof.dr.sc. Vedranu Žaniću, na pruženom znanju i potpori te uloženom trudu i angažmanu oko stvaranja stimulativnog međunarodnog konteksta provedbe istraživanja vezano uz ovaj rad.

Isto tako, zahvaljujem se i svim članovima Povjerenstva, kao i Prof.dr.sc. Jurici Soriću, koji su svojim primjedbama i sugestijama afirmativno utjecali na sadržaj i raspon ovim radom obuhvaćenih istraživanja te doprinijeli kvaliteti njihove artikulacije kroz ovaj rad.

Nadalje, želim se zahvaliti i svim svojim najbližim suradnicima i dragim prijateljima, naročito Doc.dr.sc Jerolimu Andriću, na sveukupnoj izravno i neizravno pruženoj pomoći i potpori tokom realizacije ovoga rada te na brojnim ugodnim i veselim trenucima u dosadašnjem zajedničkom radu i životu općenito.

Iskreno se zahvaljujem i svim ostalim kolegama i suradnicima na matičnom Zavodu i šire, koji su u značajnoj mjeri doprinijeli stvaranju ugodnog i motivirajućeg radnog ambijenta.

Na posljetku, želim se zahvaliti i svojoj obitelji, a naročito svojoj supruzi, koja mi je uvijek bila pouzdani oslonac i koja mi je uvijek pružala iskrenu i bezuvjetnu potporu u svim mojim životnim nastojanjima.

Autor

# Sadržaj

Predgovor.....	v
Sažetak.....	vi
Ključne riječi.....	vii
Summary.....	viii
Key words.....	ix
Popis oznaka.....	x
Popis slika.....	xviii
Popis tablica.....	xxv
Popis skraćenica.....	xxvi
<b>1 Uvod.....</b>	<b>1</b>
1.1 Obrazloženje razmatranog problema i motivacija za istraživanje.....	1
1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja.....	4
1.3 Cilj i hipoteze istraživanja.....	7
1.4 Metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada.....	8
<b>2 Uzdužna granična nosivost: Inkrementalno – iterativna metoda analize progresivnog kolapsa.....</b>	<b>11</b>
2.1 Teorijske osnove.....	12
2.2 Diskretizirani model.....	15
2.3 Krivulje prosječno normalno naprezanje – prosječna duljinska deformacija ( $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje).....	15
2.3.1 Elasto – plastični kolaps (popuštanje).....	17
2.3.2 Globalno gredno - štapno izvijanje.....	18
2.3.3 Globalno lateralano - uvojno izvijanje.....	20
2.3.4 Lokalno izvijanje struka ukrepe sa pojasom.....	21
2.3.5 Lokalno izvijanje struka ukrepe bez pojasa.....	22
2.3.6 Izvijanje oplata.....	23
2.4 Dijagram toka algoritma metode.....	24
2.5 Granični moment savijanja i kolapsna sekvenca.....	27



<b>3 Unapređenje inkrementalno – iterativne metode analize progresivnog kolapsa</b> .....	<b>30</b>
3.1 Efektivne materijalno-geometrijske mjere lokalne nosivosti .....	31
3.2 Ravno savijanje Euler-Bernoullijeve grede .....	33
3.3 Deplanacija poprečnih presjeka pri poprečnom ravnom savijanju .....	47
3.3.1 Određivanje raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka .....	49
3.3.2 Određivanje korigirane raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija..	56
3.4 Smična nosivost ravne oplate .....	60
3.4.1 Elastično smično izvijanje ravne oplate .....	60
3.4.2 Granična smična nosivost ravne oplate.....	70
3.5 Utjecaj (granične) smične nosivosti na uzdužnu (graničnu) nosivost .....	75
3.6 Predložena metoda analize progresivnog kolapsa .....	79
<b>4 Primjeri</b> .....	<b>85</b>
4.1 Inicijalne nesavršenosti.....	85
4.2 Čisto ravno savijanje ukrepljenih kutijastih tankostjenih nosača .....	88
4.2.1 Primjena NLMKE u kontekstu razmatranog problema .....	90
4.2.2 Usporedba rezultata .....	106
4.3 Poprečno ravno savijanje ukrepljenog kutijastog tankostjenog nosača.....	117
4.3.1 Razmatrani slučajevi raspodijeljenog poprečnog opterećenja .....	120
4.3.2 Usporedba rezultata .....	121
<b>5 Zaključak</b> .....	<b>140</b>
<b>Literatura</b> .....	<b>143</b>
<b>Životopis</b> .....	<b>148</b>
<b>Curriculum Vitae</b> .....	<b>149</b>

# Predgovor

Iako naslov ovog doktorskog rada jasno i koncizno izražava njegovu općenitu temu, smatram da je potrebno preciznije specificirati najznačajnije objekte i ograničenja razmatranja u okviru provedenog znanstveno-istraživačkog rada.

Tankostjene konstrukcije mogu se općenito definirati kao nosive konstrukcije sačinjene od jednog ili (češće) više po rubovima spojenih sastavnih elemenata jedne dimenzije (debljine) značajno manje u odnosu na ostale dvije (duljinu i/ili širinu). Upravo je ova vrsta nosivih konstrukcija najčešća na svim mikro/makro razinama prirode i tehnike - od membrana biljnih i životinjskih stanica do najvećih proizvoda građevinske, strojarske, brodograđevne i zrakoplovne industrije.

S obzirom da se naslovom rada možda preopćenito sugerira proizvoljni tip tankostjene konstrukcije kao objekt istraživanja, potrebno je naglasiti da se ovim radom razmatraju isključivo poluljuskaste (eng. *semi-monocoque*) i monotone tankostjene konstrukcije sastavljene od pločastih elemenata izotropnog materijala. Za razliku od ljuskaste (eng. *monocoque*) i/ili rešetkaste (eng. *truss*) tankostjene konstrukcije, ukupnoj nosivosti poluljuskaste konstrukcije doprinose kako elementi oplata tako i elementi primijenjenog ukrepljenja. Poluljuskasta izvedba naročito je pogodna za različite složene tankostjene konstrukcije ili njihove podcjeline koje karakterizira izraženost jedne (uzdužne) među protežnim dimenzijama (npr. trup zrakoplova, krilo zrakoplova, trup broda, itd.). Ukoliko duž uzdužne osi konstrukcije nema nagle promjene materijalnih i/ili geometrijskih svojstava poprečnih presjeka, konstrukcija se smatra monotonom.

Nadalje, ovim radom nastoji se unaprijediti analiza uzdužne granične nosivosti u najranijoj, tj. konceptualnoj fazi višekriterijskog projektiranja složenih (nosivih) tankostjenih konstrukcija. Pri tome je potrebno razmotriti mnogobrojne i različite podobne projektne varijante te u konačnici jednoznačno definirati fundamentalne aspekte optimalne osnove za sljedeću (preliminarnu) fazu projektiranja. S obzirom da je za to raspoloživ vremenski okvir uvijek ograničen, nameće se imperativ primjene što bržih, a time i jednostavnijih simulacijskih metoda. Stoga je vrlo važno da točnost i pouzdanost rezultata primijenjenih metoda bude na razini koja omogućava kvalitetnu potporu pri donošenju fundamentalnih i dalekosežnih odluka. Pored mnogih drugih i ovaj rad je nastao kao rezultat nastojanja da se ostvari doprinos u tom smislu.

Stanislav Kitarović, dipl.ing.zrak.

Zagreb, svibanj 2012.

## Sažetak

Ekonomski i ekološki aspekti gradnje i uporabe složenih tankostjenih konstrukcija (zrakoplov, brod, itd.) u današnje vrijeme uvjetuju sve izraženije zahtjeve za što većim smanjenjem pri tome utrošenog materijala i energije, tj. za iznalaženjem što racionalnijih i ekonomičnijih projektnih varijanti, koje stoga neminovno karakteriziraju i sve manje rezerve sigurnosti. U konceptualnoj sintezi nosivih konstrukcija razmatranje graničnih stanja omogućava neposredno razmatranje situacija u kojima konstrukcija, neki njen dio ili spoj, više ne može vršiti pridruženu funkciju, čime se omogućava utvrđivanje stvarne karakteristične razine i rezerve sigurnosti razmatrane konstrukcije.

S tim u vezi, provedenim istraživanjem nastojalo se razviti unaprijedenu metodu analize progresivnog kolapsa, tj. unaprijediti razmatranje graničnog stanja nosivosti pri konceptualnom projektiranju monotonih tankostjenih konstrukcija opterećenih tokom eksploatacije pretežno poprečnim (vertikalnim) savijanjem. Predloženom metodom se kroz obuhvaćanje različitih efekata raspodijeljenog opterećenja pri poprečnom savijanju omogućava kvalitetnije razmatranje uzdužne granične nosivosti (graničnog momenta savijanja) razmatrane konstrukcije te točnije i pouzdanije određivanje kritičnog poprečnog presjeka i njegove kolapsne sekvence uslijed ekstremnog savijanja. U tome smislu, uporaba predložene metode u okviru optimizacijske petlje konceptualne sinteze može rezultirati kvalitetnijom razinom i međuodnosom projektnih atributa (cijena, masa, sigurnost) nedominiranih projektnih varijanti, odnosno racionalnijim i ekonomičnijim preferiranim projektnim rješenjima.

Nakon opisa postojeće (polazne) inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa (zasnovane na Smithovom pristupu), prikazani su različiti aspekti njenog unapređenja, predloženi u okviru ovoga rada. Detaljnije je razmotrena geometrijski nelinearna kinematika ravnog savijanja Euler-Bernoullijeve grede s posebnim naglaskom na slučaj ravnog savijanja bez djelovanja vanjske uzdužne sile, a koji se može smatrati prikladnom idealizacijom većine zrakoplovnih (i brodograđevnih) konstrukcija. Razmotreni su različiti aspekti pojave deplanacije poprečnih presjeka pri poprečnom ravnom savijanju, pri čemu je opisana postojeća numerička metoda za određivanje (diskretne) raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka te je na temelju teorije Lockwood-Taylor izvedena metoda za određivanje korigirane raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija, prilagođena kontekstu razmatranog problema. Razmotreni su različiti aspekti smične nosivosti ravne oplate uključujući elastično smično izvijanje te različite načine njegovog odgađanja sukladno mogućnostima koje teorijski opis te pojave pruža. Izveden je kriterij osiguranja lokalnog smičnog izvijanja te su prikazane postojeće formulacije smične granične

nosivosti. Opisana je korištena formulacija utjecaja (granične) smične nosivosti na uzdužnu (graničnu) nosivost te je na posljeticu detaljno opisan dijagram toka algoritma unaprjeđene inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa, uz osvrt na ograničenja njene primjene te razlike s obzirom na polaznu metodu. Razina točnosti rezultata predložene metode prikazana je na nekoliko primjera monotonih tankostjenih ukrepljenih kutijastih nosača opterećenih različitim slučajevima (čistog i poprečnog) ravnog savijanja, pri čemu su prikazani i međusobno uspoređeni rezultati dobiveni polaznom i predloženom metodom, eksperimentalnim ispitivanjem te numeričkim simulacijama (NLMKE).

## Ključne riječi

Sigurnost konstrukcija, granično stanje nosivosti, granična čvrstoća, uzdužna granična nosivost, granični moment savijanja, smična granična nosivost, analiza progresivnog kolapsa, kolapsna sekvenca, poprečno ravno (vertikalno) savijanje, deplanacija, izvijanje, popuštanje, monotone tankostjene konstrukcije, konceptualna sinteza.

## Summary

Contemporary economical and ecological aspects of production and exploitation of the complex thin-walled structures (aircraft, ship, etc.) increasingly stimulate growing emphasis on reduction of the thereby consumed amount of material and energy. Compliance with this requirement demands contrivance of ever more rational and economically feasible design variants, which are consequently and imminently characterized by decreased inherent safety margins. Since evaluation of the structural limit states implies direct consideration of the situations when structure (or some of its components or joints) loses ability to perform its intended function, considerably accurate and reliable determination of true structural safety level and its corresponding safety margin might be employed in the process of structural concept synthesis.

In this respect, objective of the presented research is development of the improved progressive collapse analysis method and consequent enhancement of the ultimate limit state evaluation in the concept design of monotonous thin-walled structures subjected to predominantly transverse (vertical) flexural loads during exploitation. By subsumption of various distributed load effects, proposed method enables more sophisticated evaluation of longitudinal ultimate load-capacity (ultimate bending moment) and more accurate and reliable identification of the critical cross section and proprietary collapse sequence due to extreme bending. In that sense, implementation of the proposed method within framework of the optimization based conceptual synthesis can result in a higher quality level of design attributes (cost, mass, safety) for nondominated design variants and more rational and economically feasible preferred design solutions.

After detailed description and review of the existing incremental-iterative progressive collapse analysis method (based on Smith's approach), various aspects of the proposed methodological extensions are presented. Detailed discussion regarding geometrically nonlinear kinematics of Euler-Bernoulli beam is presented with special emphasis on the case of symmetric bending devoid of the longitudinal force action, since it could be considered as the appropriate idealization for the most of the aircraft and ship structures. Relevant aspects of the cross sectional warping due to transverse symmetric bending are discussed and existing numerical method for determination of the cross sectional (discrete) distribution of longitudinal warping displacements is described. Furthermore, a method for determination of the corrected normal (longitudinal) strain distribution based on Lockwood-Taylor theory is derived. Various aspects of shear load resistance of the plane plating are reviewed, including elastic shear buckling and various means of its deferment allowed by the current

theoretical description of that phenomena. Local shear buckling imminence criteria for plane stiffened panels is derived, various existing semi-empirical formulations of the ultimate shear strength are presented and accepted elliptical formulation of the interaction between (ultimate) shear strength and longitudinal (ultimate) strength is described. Finally, detailed description of the proposed incremental-iterative progressive collapse analysis method is given. Accuracy level of the proposed method is demonstrated on a few different examples of monotonous thin-walled stiffened box girders submitted to different load cases of (pure and transverse) symmetric bending and results obtained by the initial and proposed method, experimental testing and numerical simulations (NLFEM) are comparatively reviewed.

## Key words

Structural safety, ultimate limit state, ultimate strength, longitudinal ultimate load-capacity, ultimate bending moment, ultimate shear load-capacity, progressive collapse analysis, collapse sequence, transverse symmetric (vertical) bending, warping, buckling, yielding, monotonous thin-walled structures, structural concept synthesis.

## Popis oznaka

Oznaka	Opis
$A$	Površina;
$A_p$	Površina poprečnog presjeka oplata sunosive širine $b$ ;
$A_{pe}, A_{pef}$	Površina poprečnog presjeka oplata sunosive širine $b_e$ ili $b_{ef}$ ;
$A_s$	Površina poprečnog presjeka ukrepe;
$A^E$	Površina poprečnog presjeka diskretnog sastavnog elementa;
$a$	Duljina ploče;
<b>B</b>	Matrica derivacija funkcija oblika duljinskih konačnih elemenata;
$b$	Visina ili širina ploče;
$b_e, b_{ef}$	Efektivna ili sunosiva širina oplata;
$b_f$	Širina pojasa ukrepe;
$D$	Savojna krutost ploče;
$E$	Youngov modul elastičnosti;
$e$	Proizvoljni linijski konačni element;
$E^*$	Efektivni sekantni modul;
$E^{*e}$	Efektivni sekantni modul linijskog konačnog elementa;
$E^{CS}$	Efektivni Youngov modul elastičnosti poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije;
$\mathbf{E}_0$	Green-Lagrangeov tenzor deformacije (za progibnu liniju grede);
$E_{xx0}$	Komponenta Green-Lagrangeovog tenzora deformacije progibne linije grede u smjeru osi $x$ ;
$(EI_y)^*$	Efektivna savojna krutost razmatranog poprečnog presjeka gredom idealizirane konstrukcije (s obzirom na os $y$ );
$\bar{\mathbf{F}}_z$	Globalni vektor opterećenja diskretiziranog sustava normiran jediničnom poprečnom silom;
$\mathbf{F}_z^e$	Vektor opterećenja proizvoljnog linijskog konačnog elementa;
$\bar{\mathbf{F}}_z^e$	Vektor opterećenja proizvoljnog linijskog konačnog elementa normiran poprečnom silom;

$F_C^E$	Rezidualna (neuravnotežena) unutrašnja uzdužna sila proizvoljnog diskretnog sastavnog dijela razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije;
$G^*$	Efektivni smični modul;
$G^{*e}$	Efektivni smični modul linijskog konačnog elementa;
$H$	Visina;
$h_w$	Visina struka ukrepe;
$I_y$	Moment inercije poprečnog presjeka grede oko osi $y$ ;
$I^E$	Moment inercije diskretnog sastavnog dijela oko relevantne glavne osi inercije poprečnog presjeka;
$I^b$	Moment inercije oplata između ukrepa oko relevantne glavne osi inercije poprečnog presjeka;
<b>K</b>	Globalna matrica krutosti diskretiziranog sustava;
<b>K<sup>e</sup></b>	Matrica krutosti proizvoljnog linijskog konačnog elementa;
$K_\tau$	Koeficijent utjecaja smične na uzdužnu nosivost;
$k_\tau$	Koeficijent elastičnog smičnog izvijanja ploče;
$k_\tau^P$	Koeficijent elastičnog smičnog izvijanja ukrepljenog panela;
$L$	Duljina;
$l^E$	Duljina diskretnog sastavnog elementa;
$l^e$	Duljina linijskog konačnog elementa;
$M_y$	Moment savijanja oko osi $y$ ;
$M_{yC}$	Rezidualni (neuravnoteženi) moment unutrašnjih uzdužnih sila na razmatranom poprečnom presjeku konstrukcije;
<b>N</b>	Matrica funkcija oblika linijskih konačnih elemenata;
$N$	Unutrašnja uzdužna sila (u smjeru osi $x$ );
$NI$	Broj inkremenata fizikalne zakrivljenosti pri analizi progresivnog kolapsa;
$N^E$	Unutrašnja sila diskretnog sastavnog elementa u smjeru osi $x$ ;
$N_x^e$	Rezultantna sila uslijed različitih raspodjela uzdužnih normalnih naprezanja s prednje i stražnje strane proizvoljnog diskretnog dijela konstrukcije, u smjeru osi $x$ ;



$Q_z$	Unutrašnja poprečna sila (u smjeru osi $z$ );
$q_z$	Kontinuirano opterećenje (u smjeru osi $z$ ). U zrakoplovstvu i brodogradnji predstavlja sumu raspodjela sile uzgona i težine po jedinici duljine grede kojom se idealizira razmatrana konstrukcija;
$R$	Radijus zakrivljenosti progibne linije (kružnog luka) grede pri ravnom čistom savijanju;
$r$	Duljina tetive progibne linije grede;
$s$	Lučna duljina segmenta progibne linije grede;
$S^e$	Površina presjeka proizvoljnog linijskog konačnog elementa;
$s_{yz}$	Koordinata lokalnog koordinatnog sustava duž proizvoljnog linijskog konačnog elementa (usmjerena od prvog ka drugom čvoru elementa);
$t$	Debljina;
$t_f$	Debljina pojasa ukrepe;
$t_p$	Debljina oplata;
$t_w$	Debljina struka ukrepe;
$t^e$	Debljina proizvoljnog linijskog konačnog elementa;
$u$	Komponenta ukupnog pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka grede u smjeru osi $x$ ;
$U^e$	Unutrašnja energija za proizvoljni linijski konačni element;
$\mathbf{u}_0$	Vektor pomaka materijalne točke progibne linije grede;
$u_0$	Komponenta pomaka težišta poprečnog presjeka grede (materijalne točke progibne linije grede) u smjeru osi $x$ ;
$u_1$	Komponenta pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka grede uslijed rotacije oko težišta poprečnog presjeka, u smjeru osi $x$ ;
$\mathbf{u}_2$	Polje deplanacijskih uzdužnih pomaka po (diskretiziranom) poprečnom presjeku konstrukcije;
$u_2$	Deplanacijski (sekundarni) pomak proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka grede u smjeru osi $x$ ;
$\bar{\mathbf{u}}_2$	Globalni vektor deplanacijskih uzdužnih pomaka normiranih jediničnom poprečnom silom za razmatrani poprečni presjek konstrukcije;

$\bar{\mathbf{u}}_2^e$	Vektor normiranih deplanacijskih uzdužnih čvornih pomaka za proizvoljni linijski konačni element;
$\bar{\mathbf{u}}_{2s}^e$	Vektor normiranih deplanacijskih uzdužnih pomaka za proizvoljnu točku linijskog konačnog elementa;
$\bar{u}_{2i}$	Normirani deplanacijski čvorni (prvi čvor) pomak za proizvoljni linijski konačni element, u smjeru osi $x$ ;
$\bar{u}_{2j}$	Normirani deplanacijski čvorni (drugi čvor) pomak za proizvoljni linijski konačni element, u smjeru osi $x$ ;
$\bar{u}_2^E$	Deplanacijski pomak normiran jediničnom poprečnom silom za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije, u smjeru osi $x$ ;
$v$	Komponenta ukupnog pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka grede u smjeru osi $y$ ;
$v_0$	Komponenta pomaka težišta poprečnog presjeka grede (materijalne točke progibne linije grede) u smjeru osi $y$ ;
$V^e$	Volumen proizvoljnog linijskog konačnog elementa;
$w$	Komponenta ukupnog pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka grede u smjeru osi $z$ ;
$W^e$	Rad vanjskih sila za proizvoljni linijski konačni element;
$w_0$	Komponenta pomaka težišta poprečnog presjeka grede (materijalne točke progibne linije grede) u smjeru osi $z$ ;
$w_{0L}$	Komponenta pomaka težišta poprečnog presjeka grede (materijalne točke progibne linije grede) u smjeru osi $z$ dobiven dvostrukom integracijom linearizirane fizikalne zakrivljenosti;
$w_1$	Komponenta pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka grede uslijed rotacije oko težišta poprečnog presjeka, u smjeru osi $z$ ;
$x$	Uzdužna os ortogonalnog materijalnog koordinatnog sustava;
$y$	Lateralna os ortogonalnog materijalnog koordinatnog sustava;
$y^e$	$y$ -koordinata proizvoljne pozicije na linijskom konačnom elementu u globalnom koordinatnom sustavu;

$y_i^e$	$y$ -koordinata prvog čvora proizvoljnog linijskog konačnog elementa u globalnom koordinatnom sustavu;
$y_j^e$	$y$ -koordinata drugog čvora proizvoljnog linijskog konačnog elementa u globalnom koordinatnom sustavu;
$z$	Poprečna os ortogonalnog materijalnog koordinatnog sustava;
$z_{max}$	Udaljenost referentnog pojasa od neutralne osi poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta;
$z_{NA}$	Udaljenost neutralne osi poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta od proizvoljne referentne točke;
$z_{pe}$	Udaljenost položaja osi inercije ukrepe sa sunosivom širinom oplata $b_e$ s obzirom na najudaljeniji sloj oplata;
$z_{se}$	Udaljenost položaja osi inercije ukrepe sa sunosivom širinom oplata $b_e$ s obzirom na najudaljeniji sloj pojasa ukrepe;
$z^e$	$z$ -koordinata proizvoljne pozicije na linijskom konačnom elementu u globalnom koordinatnom sustavu;
$z_i^e$	$z$ -koordinata drugog čvora proizvoljnog linijskog konačnog elementa u globalnom koordinatnom sustavu;
$z_j^e$	$z$ -koordinata drugog čvora proizvoljnog linijskog konačnog elementa u globalnom koordinatnom sustavu;
$z_{ref}^E$	Udaljenost težišta površine poprečnog presjeka diskretnog sastavnog elementa od proizvoljne referentne točke;
$a$	Odnos stranica ploče (tzv. aspektni odnos ploče);
$\beta$	Vitkost ploče;
$\beta_{ef}$	Efektivna vitkost ploče sunosive širine $b$ ;
$\gamma_{xy}$	Kutna deformacija u ravnini $(x, y)$ ;
$\gamma_{xz}$	Kutna deformacija u ravnini $(x, z)$ ;
$\gamma_{xs}$	Kutna deformacija u ravnini $(x, s_{yz})$ ;
$\Upsilon_{xs}^e$	Matrica kutnih deformacija proizvoljnog linijskog konačnog elementa smještenog u ravnini $(x, s_{yz})$ ;

$\varepsilon_x$	Duljinska deformacija u smjeru osi $x$ uslijed fizikalne zakrivljenosti grede;
$\varepsilon_{xA}$	Prosječna duljinska deformacija diskretnog sastavnog elementa tankostjene konstrukcije u smjeru osi $x$ ;
$\varepsilon_{xL}$	Duljinska deformacija u smjeru osi $x$ uslijed linearizirane fizikalne zakrivljenosti grede;
$\varepsilon_{xW}$	Polje duljinskih deformacija uslijed deplanacije za razmatrani poprečni presjek konstrukcije;
$\varepsilon_{xW}$	Duljinska deformacija uslijed deplanacije u smjeru osi $x$ ;
$\varepsilon_Y$	Uzdužna duljinska deformacija pri popuštanju materijala;
$\varepsilon_{xW}^e$	Matrica uzdužnih duljinskih deformacija uslijed deplanacije za proizvoljni linijski konačni element;
$\varepsilon_{xW}^E$	Duljinska deformacija uslijed deplanacije za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije, u smjeru osi $x$ ;
$\varepsilon_{xW_i}^e$	Duljinska deformacija uslijed deplanacije za $i$ -ti čvor proizvoljnog linijskog konačnog elementa, u smjeru osi $x$ ;
$\varepsilon_{xW_j}^e$	Duljinska deformacija uslijed deplanacije za $j$ -ti čvor proizvoljnog linijskog konačnog elementa, u smjeru osi $x$ ;
$\eta$	Pomoćni bezdimenzijski koeficijent;
$\kappa, \kappa_{EB}$	Fizikalna zakrivljenost progibne linije Euler-Bernoulijeve grede;
$\kappa_C$	Korektivna fizikalna zakrivljenost progibne linije uslijed deplanacijskih efekata;
$\kappa_L$	Linearizirana fizikalna zakrivljenost progibne linije Euler-Bernoulijeve grede;
$\kappa_{max}$	Najveća razmatrana vrijednost fizikalne zakrivljenosti pri provedbi analize progresivnog kolapsa;
$\kappa_T$	Ukupna fizikalna zakrivljenost progibne linije grede;
$\nu$	Poissonov koeficijent;
$\xi$	Pomoćni bezdimenzijski koeficijent;
$\Pi$	Ukupna potencijalna energija diskretiziranog sustava;

$\Pi^e$	Ukupna potencijalna energija za proizvoljni linijski konačni element;
$\sigma_E$	Eulerovo kritično normalno naprezanje pri štapnom izvijaju;
$\sigma_{ET}$	Eulerovo kritično normalno naprezanje pri uvojnomo izvijaju;
$\sigma_C, \sigma_{CP}, \sigma_{CT}$	Kritično normalno naprezanje korigirano za utjecaj plastičnosti;
$\sigma_{xA}$	Prosječno normalno naprezanje u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xAC}$	Korigirano prosječno normalno naprezanje u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xAU}$	Granično prosječno normalno naprezanje, u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xAUC}$	Korigirano granično prosječno normalno naprezanje (korigirani maksimum odnosne $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje), u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_Y$	Donja granica popuštanja izotropnog materijala;
$\sigma_{Yp}$	Donja granica popuštanja izotropnog materijala sunosive širine oplata;
$\sigma_{Ys}$	Donja granica popuštanja izotropnog materijala ukrepe;
$\sigma_{xA}^E$	Prosječno normalno naprezanje za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije, u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xAC}^E$	Korigirano prosječno normalno naprezanje za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije, u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xAU}^E$	Granično prosječno normalno naprezanje za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije (maksimum odnosne $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje), u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xAUC}^E$	Korigirano granično prosječno normalno naprezanje za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije (korigirani maksimum odnosne $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje), u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_{xW}^E$	Prosječno normalno naprezanje uslijed deplanacije za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije, u smjeru osi $x$ ;
$\sigma_Y^{CS}$	Efektivna granica popuštanja poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije;
$\tau_A$	Prosječno smično naprezanje;

$\tau_E$	Kritično smično naprezanje ploče pri elastičnom smičnom izvijanju;
$\tau_{cr}$	Ekvivalentno kritično smično naprezanje ploče pri elastičnom smičnom izvijanju;
$\tau_U$	Granična smična čvrstoća smično opterećene ploče;
$\tau_Y$	Ekvivalentna smična granica popuštanja prema HMM (Huber-Mises-Hencky) uvjetu popuštanja za slučaj čistog smičnog ravninskog naprezanja u izotropnom materijalu;
$\tau_A^E$	Prosječno smično naprezanje za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije;
$\tau_U^E$	Granično prosječno smično naprezanje za proizvoljni diskretni sastavni element uzdužnog segmenta tankostjene konstrukcije;
$\tau_E^P$	Kritično smično naprezanje ukrepljenog panela pri elastičnom smičnom izvijanju;
$\tau_{xs}^e$	Matrica smičnih naprezanja proizvoljnog linijskog konačnog elementa smještenog u ravnini $(x, s_{yz})$ ;
$\Phi$	Deformacijski bezdimenzijski parametar;
$\varphi$	Prikloni kut koji određuje nagib tangente u proizvoljnoj točki progibne linije grede s obzirom na os $x$ ;
$\chi$	Kut zakreta poprečnog presjeka grede s obzirom na os $z$ ;
$\chi_2$	Kut vitoperenja elementarnog pravokutnika s obzirom na os $z$ ;
$\psi^e$	Kut koji proizvoljni linijski konačni element zatvara s osi $z$ ;

## Popis slika

Slika 2.1	Linearizirana kinematika ravnog savijanja Euler-Bernoullijeve grede. ....	13
Slika 2.2	Diskretizirani model tankostjenog kutijastog nosača.....	15
Slika 2.3	Primjer $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje za elasto-plastični kolaps. ....	17
Slika 2.4	Primjer $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje za globalno gredno-štapno izvijanje. ....	19
Slika 2.5	Primjer $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje za globalno lateralno-uvojno izvijanje.....	21
Slika 2.6	Primjer $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje za lokalno izvijanje struka ukrepe s pojasom....	22
Slika 2.7	Primjer $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje za lokalno izvijanje struka ukrepe bez pojasa. ....	23
Slika 2.8	Primjer $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje za izvijanje poprečno orebrene oplate. ....	24
Slika 2.9	Dijagram toka algoritma polazne metode analize progresivnog kolapsa. ....	26
Slika 2.10	$M-\kappa$ dijagram progresivnog kolapsa kritičnog uzdužnog segmenta trupa broda za prijevoz rasutog tereta.....	27
Slika 2.11	Raspodjele $\sigma_{xA}^E$ po visini poprečnog presjeka kritičnog uzdužnog segmenta broda za prijevoz rasutog tereta: a) Stanje progiba; b) Stanje pregiba. ....	28
Slika 2.12	Kolapsna sekvenca kritičnog uzdužnog segmenta broda za prijevoz rasutog tereta (stanje progiba): a) Neoštećeno stanje; b) Stanje pri $0.95M_U$ ; c) Stanje pri $M_U$ . ....	29
Slika 3.1	Efektivni sekantni modul pri jednoosnom uzdužnom (tlačnom) opterećenju diskretnog sastavnog elementa konstrukcije. ....	32
Slika 3.2	Efektivni sekantni modul i efektivni modul smicanja sukladno referentnoj $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulji diskretnog sastavnog elementa. ....	33
Slika 3.3	Poprečno ravno savijanje (jednostrano uklještene) monotone grede. ....	33
Slika 3.4	Veličine i geometrijski odnosi kinematike diferencijalnog segmenta grede. ....	35
Slika 3.5	Čisto ravno savijanje (jednostrano uklještene) monotone grede. ....	41
Slika 3.6	Raspodjele prvih šest članova reda u (3.34). ....	43
Slika 3.7	Raspodjele potpune i prvih šest parcijalnih suma reda u (3.34). ....	43
Slika 3.8	Relativno odstupanje poprečnog pomaka ( $w_0$ ) dobivenog potpunim i lineariziranim pristupom razmatranju ravnog čistog savijanja grede. ....	45
Slika 3.9	Opterećenje diferencijalnog segmenta grede pri poprečnom savijanju. ....	46
Slika 3.10	Raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka po rubnim presjecima diferencijalnog segmenta monotone tankostjene grede pri poprečnom savijanju.....	48
Slika 3.11	Geometrijski odnosi pri vitoperenju diferencijalnog pravokutnika. ....	49

Slika 3.12 Globalni i lokalni koordinatni sustav za proizvoljni linijski konačni element. ....	50
Slika 3.13 Diskretizirani model poprečnog presjeka uzdužnog segmenta monotone tankostjene konstrukcije.....	52
Slika 3.14 Međuodnos diskretnih sastavnih elemenata i linijskih konačnih elemenata. ....	55
Slika 3.15 Kvalitativna raspodjela korigiranih uzdužnih duljinskih deformacija po neuravnoteženom poprečnom presjeku razmatrane tankostjene konstrukcije.....	57
Slika 3.16 Kvalitativna raspodjela korigiranih uzdužnih duljinskih deformacija po uravnoteženom poprečnom presjeku razmatrane tankostjene konstrukcije. ....	60
Slika 3.17 Smično izvijanje zglobno oslonjene ploče. ....	61
Slika 3.18 Ovisnost koeficijenta elastičnog smičnog izvijanja o aspektnom odnosu ploče za različite rubne uvjete pomaka. ....	62
Slika 3.19 Kritično smično naprezanje za različite geometrijske karakteristike zglobno oslonjene izotropne ploče ( $E = 205\,800\text{ N/mm}^2$ ; $\nu = 0.3$ ; $\sigma_Y = 352.8\text{ N/mm}^2$ ).....	63
Slika 3.20 Relativno povećanje kritičnog smičnog naprezanja uzdužnim i/ili poprečnim ekvidistantnim ukrepljivanjem ploča različitog aspektnog odnosa. ....	64
Slika 3.21 Relativno smanjenje (relativnog) prirasta kritičnog smičnog naprezanja s obzirom na prethodni broj ekvidistantnih ukrepa. ....	64
Slika 3.22 Podobni prostor s obzirom na kriterij lokalnog smičnog izvijanja ukrepljenog panela. ....	67
Slika 3.23 Dodavanje iste količine materijala ukrepljivanjem i podebljavanjem ploče. ....	68
Slika 3.24 Relativno povećanje kritičnog smičnog naprezanja ukrepljivanjem i podebljavanjem oplata. ....	69
Slika 3.25 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa $a = 1$ . ....	73
Slika 3.26 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa $a = 2$ . ....	73
Slika 3.27 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa $a = 3$ . ....	74



Slika 3.28 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa $a = 4$ .....	74
Slika 3.29 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa $a = 5$ .....	75
Slika 3.30 Geometrijski prikaz korekcije prema (3.100).....	76
Slika 3.31 Kvalitativna raspodjela poprečnog opterećenja dijela trupa MTK.....	77
Slika 3.32 Kvalitativna raspodjela prosječne uzdužne duljinske deformacije po razmatranom poprečnom presjeku pri poprečnom savijanju MTK.....	78
Slika 3.33 Kvalitativni prikaz korekcije uzdužne nosivosti diskretnih sastavnih elemenata $E1$ i $E2$ : a) presjek A – A; b) presjek B – B.....	78
Slika 3.34 Dijagram toka algoritma predložene metode analize progresivnog kolapsa. ....	81
Slika 4.1 Idealizacija inicijalnih geometrijskih odstupanja sastavnih elemenata ukrepljenog panela. ....	86
Slika 4.2 Dimenzije modela P1. ....	88
Slika 4.3 Dimenzije modela P2. ....	89
Slika 4.4 Dimenzije modela P3. ....	89
Slika 4.5 Shematski prikaz instalacije korištene pri eksperimentalnom testiranju razmatranih konstrukcija opterećenih čistim ravnim savijanjem.....	90
Slika 4.6 Lateralne i poprečne komponente izmjerenih inicijalnih geometrijskih odstupanja oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1.....	91
Slika 4.7 Mjesta zadavanja rubnih uvjeta.....	92
Slika 4.8 Superpozicija različitih tipova inicijalnih geometrijskih nesavršenosti za model ukrepe sa sunosivom širinom oplata. ....	93
Slika 4.9 Normalizirane $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$ krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (mala razina /Smith/ IGO). ....	95
Slika 4.10 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (mala razina /Smith/ IGO). ....	95
Slika 4.11 Normalizirane $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$ krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (srednja razina /Pravila/ IGO). ....	96
Slika 4.12 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (srednja razina /Pravila/ IGO). ....	96
Slika 4.13 Normalizirane $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$ krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (srednja razina /Smith/ IGO). ....	97
Slika 4.14 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (srednja razina /Smith/ IGO). ....	97

Slika 4.15 Normalizirane $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (velika razina /Smith/ IGO). ....	98
Slika 4.16 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (velika razina /Smith/ IGO).....	98
Slika 4.17 Konvergencija rješenja za malu razinu (Smith) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 1-8. ....	99
Slika 4.18 Konvergencija rješenja za srednju razinu (Pravila) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 2A-8. ....	100
Slika 4.19 Konvergencija rješenja za srednju razinu (Smith) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 2B-8. ....	100
Slika 4.20 Konvergencija rješenja za veliku razinu (Smith) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 3-8. ....	100
Slika 4.21 Normalizirane $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje razmatranog modela sa i bez IGO.....	102
Slika 4.22 Karakteristike graničnog stanja nosivosti razmatranog modela s obzirom na razinu IGO.....	102
Slika 4.23 Promjena nosivosti s obzirom na različito uvjetovane lateralne pomake uzdužnih rubova razmatranog modela (za različite razine IGO). ....	103
Slika 4.24 Karakteristike graničnog stanja nosivosti s obzirom na različito uvjetovane lateralne pomake uzdužnih rubova razmatranog modela (za različite razine IGO). ....	103
Slika 4.25 Promjena nosivosti s obzirom na promjenu uzdužnog raspona razmatranog modela (za različite razine IGO). ....	104
Slika 4.26 Karakteristike graničnog stanja nosivosti s obzirom na različiti uzdužni raspon razmatranog modela (za različite razine IGO).....	104
Slika 4.27 Mjesta zadavanja ograničenja poopćenih pomaka i opterećenja za diskretizirani NLMKE model konstrukcije P1.....	105
Slika 4.28 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P1 pri čistom ravnom savijanju: a) polaznom/predloženom metodom; b) eksperimentalnim ispitivanjem. ....	106
Slika 4.29 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P2 pri čistom ravnom savijanju: a) polaznom/predloženom metodom; b) eksperimentalnim ispitivanjem. ....	107
Slika 4.30 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P3 pri čistom ravnom savijanju: a) polaznom/predloženom metodom; b) eksperimentalnim ispitivanjem. ....	107

Slika 4.31 Model uzdužnog segmenta (jedan uzdužni raspon između poprečnih okvirnih nosača) razmatranih konstrukcija: a) P1; b) P2; c) P3. ....	108
Slika 4.32 Mjesta zadavanja rubnih uvjeta: a) Kruti kut; b) Poprečno orebrena oplata. ....	109
Slika 4.33 Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1. ....	111
Slika 4.34 Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1. ....	111
Slika 4.35 Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1. ....	112
Slika 4.36 Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente donjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1. ....	112
Slika 4.37 Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente oplata struka konstrukcije P1. ....	113
Slika 4.38 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P1 pri čistom ravnom savijanju: a) predloženom metodom (IACS/NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje); b) NLMKE. ....	113
Slika 4.39 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: Ukupni pomaci (karikirani) [mm]. ....	115
Slika 4.40 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: Vertikalni pomaci (karikirani) [mm]. ....	115
Slika 4.41 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: $\sigma_x$ za središnju plohu (eng. <i>mid-plane</i> ) elemenata [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	116
Slika 4.42 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: Ekvivalentna (VonMises) naprezanja [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	116
Slika 4.43 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 opterećen raspodjelom R1 u graničnom stanju nosivosti (46.1 % opterećenja): $\tau_{xy}$ [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	118
Slika 4.44 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 opterećen raspodjelom R2 u graničnom stanju nosivosti (54.1 % opterećenja): $\tau_{xy}$ [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	118
Slika 4.45 Debljine oplata sastavnih elemenata modela konstrukcije P1A [mm]. ....	119

Slika 4.46	Kvantitativni prikaz poprečnog opterećenja sukladno raspodjeli R1. ....	120
Slika 4.47	Kvantitativni prikaz poprečnog opterećenja sukladno raspodjeli R2. ....	121
Slika 4.48	Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A.....	122
Slika 4.49	Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1A.....	122
Slika 4.50	Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A.....	123
Slika 4.51	Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente donjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A.....	123
Slika 4.52	Usporedba IACS i NLMKE $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulja za diskretne sastavne elemente oplata struka konstrukcije P1A. ....	124
Slika 4.53	Uzdužna (granična) nosivost konstrukcije P1A opterećene čistim savijanjem: a) različiti poprečni presjeci; b) kritični presjek ( $x/L = 0.367$ ). ....	124
Slika 4.54	Uzdužna (granična) nosivost konstrukcije P1A opterećene raspodjelom R1: a) različiti poprečni presjeci; b) kritični presjek ( $x/L = 0.193$ ). ....	126
Slika 4.55	Uzdužna nosivost konstrukcije P1A opterećene raspodjelom R2: a) različiti poprečni presjeci; b) kritični presjek ( $x/L = 0.320$ ). ....	126
Slika 4.56	Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (čisto savijanje): Ukupni pomaci (karikirani) [mm].....	127
Slika 4.57	Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (čisto savijanje): $\sigma_x$ za središnju plohu (eng. <i>mid-plane</i> ) elemenata [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	127
Slika 4.58	Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1): Ukupni pomaci (karikirani) [mm]. ....	128
Slika 4.59	Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1): $\sigma_x$ za središnju plohu (eng. <i>mid-plane</i> ) elemenata [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	128
Slika 4.60	Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1): Ekvivalentna (VonMises) naprezanja [N/mm <sup>2</sup> ]. ...	129
Slika 4.61	Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1): $\tau_{xy}$ [N/mm <sup>2</sup> ]. ....	129

Slika 4.62 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2): Ukupni pomaci (karikirani) [mm]. .....	130
Slika 4.63 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2): $\sigma_x$ za središnju plohu (eng. <i>mid-plane</i> ) elemenata [N/mm <sup>2</sup> ]. .....	130
Slika 4.64 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2): Ekvivalentna (VonMises) naprezanja [N/mm <sup>2</sup> ]. ...	131
Slika 4.65 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2): $\tau_{xy}$ [N/mm <sup>2</sup> ]. .....	131
Slika 4.66 Rezultati analize uzdužne granične nosivosti konstrukcije P1A pri poprečnom savijanju (raspodjela R1): a) polazna/predložena metoda; b) NLMKE. ....	134
Slika 4.67 Rezultati analize uzdužne granične nosivosti konstrukcije P1A pri poprečnom savijanju (raspodjela R2): a) polazna/predložena metoda; b) NLMKE. ....	134
Slika 4.68 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („unutrašnjih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R1. ....	136
Slika 4.69 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („vanjskih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R1. ....	136
Slika 4.70 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1A pri R1. ....	137
Slika 4.71 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A pri R1. ....	137
Slika 4.72 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („unutrašnjih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R2. ....	138
Slika 4.73 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („vanjskih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R2. ....	138
Slika 4.74 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1A pri R2. ....	139
Slika 4.75 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A pri R2. ....	139

## Popis tablica

Tablica 2.1 Načini gubitka nosivosti pojedinih diskretnih sastavnih elemenata. ....	16
Tablica 2.2 Relevantne geometrijske karakteristike profila ukrepe pri uvijanju. ....	20
Tablica 4.1 Geometrijske i materijalne karakteristike komponenti modela P1. ....	88
Tablica 4.2 Geometrijske i materijalne karakteristike komponenti modela P2. ....	89
Tablica 4.3 Geometrijske i materijalne karakteristike komponenti modela P3. ....	89
Tablica 4.4 Rubni uvjeti - opis čvornih ograničenja poopćenih pomaka. ....	92
Tablica 4.5 Oznake i karakteristike različitih modela studije konvergencije rješenja. ....	94
Tablica 4.6 Opis čvornih ograničenja pomaka za NLMKE model konstrukcije P1. ....	105
Tablica 4.7 Usporedba dobivenih rezultata s obzirom na eksperiment. ....	108
Tablica 4.8 Opis čvornih ograničenja pomaka (kruti kut). ....	110
Tablica 4.9 Opis čvornih ograničenja pomaka (poprečno orebrena oplata). ....	110
Tablica 4.10 Usporedba dobivenih rezultata s obzirom na eksperiment. ....	114
Tablica 4.11 Formulacije razmatranog poprečnog opterećenja. ....	120
Tablica 4.12 Usporedba rezultata za raspodjelu R1. ....	132
Tablica 4.13 Usporedba rezultata za raspodjelu R2. ....	132

## Popis skraćenica

CBM	<i>Coupled Beam Method;</i>
DNV	<i>Det Norske Veritas;</i>
IACS	<i>International Association of Classification Societies;</i>
IGO	Inicijalna geometrijska odstupanja;
ISFEM	<i>Intelligent Super-Size finite element method;</i>
ISUM	<i>Idealized Structural Unit Method;</i>
ISSC	<i>International Ship and Offshore Structures Congress;</i>
MAIB	<i>Marine Accident Investigation Branch;</i>
MTK	Monotona tankostjena konstrukcija;
MKE	Metoda konačnih elemenata;
NLFEM	<i>Nonlinear finite element method;</i>
NLMKE	Nelinearna metoda konačnih elemenata.

# 1 Uvod

## 1.1 Obrazloženje razmatranog problema i motivacija za istraživanje

U sintezi ili projektiranju nosivih konstrukcija nastoji se racionalnom definicijom materijalnih i geometrijskih karakteristika postići zadovoljavajuća izdržljivost s obzirom na sva relevantna opterećenja koja se javljaju pri obavljanju pridružene joj funkcije. Pri tome se općenito nastoje postići što učinkovitija rješenja, što je naročito izraženo kod složenih proizvoda za prijevoz ljudi i roba (npr. zrakoplov, brod, itd.), koji se stoga u pravilu realiziraju kao tankostjene konstrukcije. Pri tome, ekonomski i ekološki aspekti njihove gradnje i uporabe uvjetuju sve izraženije zahtjeve za što većim smanjenjem pritom potrošene količine materijala i energije. Zadovoljavanje tih zahtjeva podrazumijeva iznalaženje što racionalnijih i ekonomičnijih projektnih varijanti, koje stoga neminovno karakteriziraju i sve manje rezerve sigurnosti. Međutim, mogućnost smanjenja karakterističnih rezervi sigurnosti nužno je proporcionalna smanjenju nepoznatog u relevantnim spoznajama te mogućnosti ostvarenja sveobuhvatnijeg opisa razmatranog problema.

U modernim pristupima višekriterijskom projektiranju složenih tankostjenih konstrukcija znatno su više zastupljene metode analize zasnovane na numeričkom modeliranju i simulacijama nego eksperimentalna ispitivanja modela u naravnoj i/ili reduciranoj veličini. Uzrok tome mogu biti velike dimenzije te masa i cijena, a često i dugotrajna gradnja te nestandardiziranost raznih tipova spomenute vrste konstrukcija, tj. sve što može onemogućiti provedbu detaljnih testova prototipova u naravnoj veličini na razne tipove mogućih oštećenja.

Za sigurnost konstrukcija relevantna projektna ograničenja obično propisuju nadležne nacionalne i međunarodne regulatorne organizacije te njihove asocijacije. Pri tome su različiti aspekti procjene karakteristične razine i rezerve sigurnosti obrazloženi unutar obvezujućih pravila i/ili standarda kroz koje se često preskriptivno formuliraju prihvatljivi pristupi s tim u vezi.

Tradicionalni pristup, tj. pristup dopuštenog naprežanja (eng. *allowable stress*) zasniva se na usporedbi izračunate i dopuštene razine odziva konstrukcije (na projektna opterećenja), pri čemu se izračunati odziv nastoji svesti ispod dopuštene razine ustanovljene na osnovu uspješnih iskustava iz prošlosti uz primjenu (klasičnih) faktora sigurnosti.

S obzirom da na taj način nije moguće odrediti stvarnu karakterističnu rezervu sigurnosti razmatrane konstrukcije, u novije vrijeme prevladavaju pristupi zasnovani na razmatranju različitih graničnih stanja (eng. *limit states*), tj. situacija u kojoj razmatrana konstrukcija, neki njen dio ili spoj više ne može vršiti pridruženu



funkciju. Evaluaciju sigurnosti konstrukcije može se pri tome provesti za nekoliko različitih relevantnih aspekata:

- Granično stanje nosivosti (eng. *Ultimate limit state*);
- Granično stanje uporabljivosti (eng. *Serviceability limit state*);
- Granično stanje zamora (eng. *Fatigue limit state*);
- Granično stanje akcidentnosti (eng. *Accidental limit state*).

Kako bi se kod realnih nosivih konstrukcija minimizirala mogućnost pojave oštećenja tokom eksploatacije, pri projektiranju konstrukcije treba racionalno uzeti u obzir kako stohastičku narav svih relevantnih aspekata njene gradnje i uporabe, tako i razinu kvalitete analitičkih i sintetskih modela koji se pri tome koriste. U tome smislu, različite nesigurnosti uslijed prirodnih varijabilnosti, nesavršenosti različitih aspekata procesa gradnje i (ne)točnosti korištenih metoda za opis projektnih opterećenja i njihovih posljedica te izdržljivosti konstrukcije, mogu se korištenjem metoda analize pouzdanosti sažeto izraziti kroz parcijalne faktore sigurnosti. S ciljem osiguranja prihvatljive razine sigurnosti i/ili učinkovitosti, parcijalni faktori sigurnosti potom se mogu preskriptivno uključiti u različite projektne kriterije koji najčešće imaju sljedeći oblik:

$$D < C \quad \text{ili} \quad \frac{C}{D} > 1$$

gdje je  $D$  (eng. *demand*) ukupni odziv konstrukcije na projektna opterećenja općenito definiran na sljedeći način:

$$D = \gamma_0 \sum_{i=1}^n D_{ji}(F_{ji}, \gamma_{fi})$$

dok je  $C$  (eng. *capability, capacity*) izdržljivost konstrukcije općenito definirana na sljedeći način:

$$C = \frac{C_j}{\gamma_m \gamma_c}$$

U gornjim jednadžbama  $\gamma_0$  predstavlja parcijalni faktor sigurnosti kojim se ponderira suma karakterističnih mjera odziva za razmatrano ( $j$ -to) granično stanje s obzirom na moguće ekonomske i društvene posljedice i/ili posebne okolnosti u slučaju kolapsa konstrukcije. Pri tome se obzir uzima namjena konstrukcije, vrsta prevoženog tereta, interakcija razmatranog graničnog stanja s ostalima, itd.  $D_{ji}$  je karakteristična mjera odziva za  $i$ -ti tip opterećenja,  $F_{ji}$  je karakteristična mjera  $i$ -tog tipa opterećenja, dok je  $\gamma_{fi}$  parcijalni faktor sigurnosti kojim se obuhvaćaju neizvjesnosti vezano uz  $i$ -ti tip opterećenja.  $C_j$  je karakteristična mjera izdržljivosti s obzirom na razmatrano ( $j$ -to) granično stanje,  $\gamma_m$  je parcijalni faktor sigurnosti kojim se obuhvaćaju nesigurnosti

vezano uz relevantna svojstva materijala, dok je  $\gamma_c$  parcijalni faktor sigurnosti kojim se obuhvaćaju nesigurnosti vezano uz čimbenike koji utječu na izdržljivost konstrukcije (npr. kvaliteta gradnje, korozija, točnost metode za određivanje izdržljivosti, itd.).

Općenito, može se reći da primjena pristupa zasnovanih na razmatranju graničnih stanja omogućava točnije i pouzdanije utvrđivanje karakteristične razine i rezerve sigurnosti konstrukcije s obzirom na projektna opterećenja, što značajno utječe na mogućnost iznalaženja racionalnijih i ekonomičnijih projektnih varijanti nosivih konstrukcija.

Ovim radom razmatra se isključivo granično stanje nosivosti, tj. kolaps konstrukcije progresivnim gubitkom nosivosti njenih sastavnih elemenata. Pri tome, izdržljivost s obzirom na globalna savojna opterećenja ima dominantni značaj u razmatranju graničnog stanja nosivosti raznih vrsta složenih tankostjenih konstrukcija (npr. trup i krilo zrakoplova, trup broda, itd.), tj. pri određivanju njihovih karakterističnih razina i rezervi sigurnosti. U tom smislu, granična nosivost izražena u obliku graničnog momenta savijanja može se smatrati fundamentalnom globalnom mjerom sigurnosti u konceptualnom višekriterijskom projektiranju mnogih tankostjenih nosivih konstrukcija.

U tu svrhu najtočniji rezultati mogu se postići primjenom metode konačnih elemenata nad trodimenzionalnim diskretiziranim modelom cijele konstrukcije, te provođenjem geometrijski i materijalno nelinearne analize kako bi se simulirao i evaluirao statički odziv konstrukcije pri raznim razinama narinutog opterećenja. Iako intenzivna dinamika razvoja računalnog očvrsta omogućava značajna smanjenja vremena potrebnog za izvršavanje i najzahtjevnijih numeričkih simulacija, angažman potreban za uspješnu provedbu cjelokupnog postupka NLMKE analize (naročito za faze pred/poslije-procesiranja) još uvijek zahtijeva značajnu količinu vremena, znanja i iskustva. Ove značajke onemogućavaju automatizaciju u implementaciji svih faza NLMKE analize te je čine neadekvatnom za primjenu u konceptualnoj fazi projektiranja, što je naročito izraženo ukoliko se donošenje odluka pri tome zasniva na optimizacijskim procedurama koje podrazumijevaju višestruka i automatska izvršavanja analize za mnogobrojne i različite varijante projekata.

Stoga se nameće potreba za razvojem novih i/ili unaprjeđivanjem postojećih alternativnih metoda analize koje bi jednako tako omogućile razmatranje svih aspekata predmetne problematike, ali s minimalnim utroškom računalnog vremena i s razinom točnosti prikladnom za konceptualnu fazu projektiranja. Alternativne metode trebale bi u što većoj mjeri obuhvatiti utjecaj svih relevantnih čimbenika razmatranog problema, te podržavati što veći broj mogućih načina gubitka nosivosti sastavnih elemenata konstrukcije (kao i njihove interakcije) te omogućiti na taj način što točniju predikciju sekvence progresivnog kolapsa njenih sastavnih elemenata,

uzimajući u obzir njihovo kolapsno i poslije-kolapsno ponašanje (naročito elemenata koji su opterećeni tlačno). Isto tako, spomenuti realni uvjeti operativne primjene u konceptualnoj sintezi konstrukcija, tj. višestruka izvršavanja unutar projektne petlje zahtijevaju implementaciju metoda kroz stabilne, robusne i zadovoljavajuće brze algoritme, pogodne za što lakšu integraciju sa raznim računalnim projektnim sustavima, npr. [1], gdje se unutar višekriterijske projektne ljuske uz uobičajene ciljeve (minimizacija mase i cijene) uvodi i maksimizacija mjere poprečne granične nosivosti (determinističkom nelinearnom metodom) te mjere pouzdanosti konstrukcije s obzirom na oštećenja (statističkim pristupom). Složenost pri tome razmatranog problema uvjetovala je primjenu paralelnog procesiranja (40 procesora), dok je tada razvijeni softver predstavljao prvu inačicu računalnog projektnog sustava OCTOPUS. Unutar najnovije inačice istog sustava [30] implementirana je i metoda analize uzdužne granične nosivosti razvijena kroz ovaj rad.

## 1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja

U današnje vrijeme je raspon istraživačkih aktivnosti vezano uz područje analize granične nosivosti složenih tankostjenih konstrukcija i/ili njihovih sastavnih elemenata vrlo širok [2], a naročito je intenzivan u području brodogradnje [3]. Pri tome je dosadašnja istraživanja moguće podijeliti u nekoliko osnovnih cjelina: relevantna svojstva i opis korištenih materijala, granična nosivost sastavnih elemenata konstrukcija i njihovih spojeva, granična nosivost složenih tankostjenih konstrukcija, inherentne nesigurnosti kod analize granične nosivosti, itd. Isto tako, unutar svake spomenute cjeline mogu se razlučiti brojne podcjeline u okviru kojih se razmatraju različiti relevantni čimbenici. S obzirom da se ovim radom predlaže unapređenje jedne od metoda analize uzdužne granične nosivosti složenih tankostjenih konstrukcija, u okviru ovoga poglavlja daje se pregled radova relevantnih za isključivo taj dio područja.

Do danas je predloženo nekoliko fundamentalno različitih metoda za proračun uzdužne granične nosivosti složenih tankostjenih konstrukcija, pri čemu neke među njima pristupaju razmatranoj problematici na sofisticiraniji, a neke na pojednostavljeni način. Među pojednostavljene metode spadaju: metoda inicijalnog popuštanja, elastična analiza te metode pretpostavljene raspodjele naprezanja (Caldwellova i slične metode), dok se među sofisticiranije metode ubrajaju: metode analize progresivnog kolapsa (Smithova i izvedene i/ili slične metode), metoda idealiziranih elemenata konstrukcije (ISUM), metoda spregnutih greda (CBM) te NLMKE.

Pristup inicijalnog popuštanja implicira mogućnost aproksimacije uzdužne granične nosivosti s vrijednošću nosivosti pri inicijalnom popuštanju, izražene u

obliku momenta savijanja kao produkta momenta otpora i granice popuštanja materijala poprečnog presjeka razmatranog dijela konstrukcije.

Elastična analiza podrazumijeva identičan pristup, pri čemu se umjesto s granicom popuštanja materijala moment otpora poprečnog presjeka množi s kritičnim naprezanjem (elastičnog) izvijanja ukrepljene ili neukrepljene oplata gornjeg ili donjeg pojasa globalnog nosača.

Metode pretpostavljene raspodjele naprezanja podrazumijevaju idealizaciju ukrepljenog tankostjenog presjeka razmatrane konstrukcije neukrepljenim presjekom ekvivalentne debljine oplata. Uzimajući u obzir utjecaj izvijanja u tlačnoj zoni presjeka uporabom faktora redukcije naprezanja (koji se množi s granicom popuštanja odnosnog materijala) računa se rezultirajući vertikalni moment savijanja, koji se smatra graničnim. Modernije formulacije [4] omogućavaju razmatranje dvoosnog savijanja i utjecaja akcidentnog oštećenja te uporabu preciznijih vrijednosti faktora redukcije naprezanja uslijed izvijanja, nedovoljno istraženih u vrijeme nastanka izvorne metode [5], te uvode efekt preraspodjele nosivosti među sastavnim elementima konstrukcije uslijed smanjenja njihove čvrstoće u poslije-kritičnom području. Zanimljivo je ovog efekta, osim što je uzrokovalo optimistični karakter rezultata izvorne metode, fizikalno pogrešno implicira i nepostojanje kolapsne sekvence (svi elementi konstrukcije dolaze u granično stanje nosivosti istovremeno), dok stvarne distribucije deformacija po presjeku uvjetuju progresivni karakter kolapsa realnih konstrukcija.

Smithova metoda [6] smatra se rodonačelnom među metodama analize progresivnog kolapsa jer je prva omogućila naprednije razmatranje kolapsne sekvence i poslije-kritične nosivosti elemenata tankostjene konstrukcije opterećene savijanjem, iako je u području zrakoplovstva znatno ranije predložena nešto jednostavnija, ali načelno vrlo slična metoda [7]. Do danas je predloženo nekoliko u osnovi vrlo sličnih metoda zasnovanih na Smithovom pristupu [8], [9], [10], a među njima i nekolicina kojima se pojednostavljuje izvorna metoda [11], [12], [13]. U području brodogradnje pravila mnogih klasifikacijskih društava, kao i IACS-ova Združena pravila za konstrukciju [14], [15] propisuju korištenje inkrementalno-iterativnih procedura zasnovanih na Smithovoj metodi. S obzirom da se i ovim doktorskim radom predlaže inkrementalno-iterativna metoda analize progresivnog kolapsa, u glavi 2 ovoga rada detaljnije su obrazloženi svi relevantni aspekti ovakvoga pristupa analizi uzdužne granične nosivosti MTK.

Metoda idealiziranih elemenata konstrukcije (ISUM) [16] razvijena je kao koncept zasnovan na MKE, ali uz značajno smanjenje broja čvorova (tj. stupnjeva slobode) i iterativnih kalkulacija potrebnih za rješavanje nelinearnih jednadžbi. Na ovaj način nastoji se značajno smanjiti računalno vrijeme potrebno za analizu ali i zadržati pritom razumnu razinu točnosti rezultata. U okviru ove metode se svaka

veća logička cjelina razmatrane konstrukcije (npr. čitav ukrepljeni panel) idealizira diskretnim elementom čija je (granična) nosivost definirana analitičkim izrazom koji uzima u obzir veliku elastičnu deformaciju i plastičnost materijala. Pri formulaciji odzivnih izraza koriste se teorijske, numeričke i eksperimentalne metode, a pritom se u obzir mogu uzeti i relevantni utjecajni čimbenici (npr. inicijalne nesavršenosti). Za razliku od Smithove i izvedenih metoda koje razmatraju savijanje kao dominantni način opterećenja razmatrane konstrukcije, ISUM pristup omogućava razmatranje osnovog, savojnog, smičnog i uvojnog opterećenja, odnosno bilo koje kombinacije među njima. Ipak, s tim u vezi, treba napomenuti da se još uvijek ulažu napor u daljnji razvoj sofisticiranijih elemenata kako bi se postigli rezultati zadovoljavajuće razine točnosti. U razvoju ISUM pristupa ističe se najnovija formulacija [17] nazvana Inteligentna metoda super-velikih konačnih elemenata (ISFEM). U odnosu na klasičnu ISUM formulaciju, ISFEM omogućava izbor načina diskretizacije razmatrane konstrukcije koristeći super-velike elemente oplata (četiri čvora sa šest stupnjeva slobode u svakom čvoru) i ukrepe (dva čvora sa šest stupnjeva slobode u svakom čvoru) te njihovo kombiniranje u sklopove super-velikih elemenata. Isto tako ISFEM koristi isključivo NLMKE za formulaciju nelinearnog odziva elemenata konstrukcije te uzima u obzir interakcije efekata lokalnog kolapsa individualnih komponenti sklopa i globalnog kolapsa sklopa.

Metoda spregnutih greda (CBM) [18], [19] predložena je za proračun uzdužne (granične) čvrstoće složenih višepalubnih i neprizmatičnih konfiguracija konstrukcije broda s diskontinuitetima. Pri tome se razmatrana konstrukcija diskretizira skupom grednih elemenata koji su međusobno spregnuti posredstvom nelinearnih opruga koje omogućavaju uključivanje efekata smičnog opterećenja u razmatranja. Osim kvantifikacije granične nosivosti, metoda omogućava i uvid u uzdužne i poprečne pomake te prosječne deformacije i naprezanja elemenata konstrukcije tokom procesa opterećivanja.

Kako je već prethodno spomenuto, uporaba NLMKE omogućava najtočniji uvid u odziv konstrukcije pri svim razinama opterećenja. Međutim, pri tome dobiveni rezultati analize jako ovise o ispravnosti primijenjenih tehnika opisa i idealizacije razmatrane konstrukcije (geometrijska i materijalna svojstva diskretiziranog modela) i rubnih uvjeta (opterećenja i ograničenja poopćenih pomaka). Iako je uvijek poželjno razmatrati model cijele konstrukcije, često se pri analizi razmatraju parcijalni modeli radi ograničene količine raspoloživog računalnog vremena i/ili vremena za pred/poslije-procesiranje, pri čemu još više dolazi do izražaja osjetljivost rezultata analize na idealizaciju realnih rubnih uvjeta. Iako finije mreže ljuskastih konačnih elemenata (veći broj elemenata manjih dimenzija) uvijek rezultiraju i točnijim rješenjima, neumjereno profinjavanje mreže može vrlo lako rezultirati pretjeranim brojem stupnjeva slobode modela, tj. neprihvatljivom količinom računalnog vremena

potrebnog za analizu. S tim u vezi često se provode studije konvergencije rješenja nad reprezentativnim modelima kritičnih dijelova razmatrane konstrukcije, kako bi se odredila optimalna (najveća) rezolucija mreže konačnih elemenata s obzirom na (zadovoljavajuću) razinu točnosti rezultata i računalnog vremena potrebnog za analizu. Nadalje, korišteni materijalni modeli trebaju što točnije definirati odnose između naprezanja i deformacije u pred-kolapsnom, kolapsnom i poslije-kolapsnom režimu, a na odgovarajući način treba uzeti u obzir i utjecaj svih relevantnih inicijalnih nesavršenosti razmatrane konstrukcije [20], [21], [22], [23], koje u znatnoj mjeri mogu utjecati na iznos izračunate granične nosivosti. Kako bi se u konačnici dobili fizikalno korektni odzivi konstrukcije, pozornost treba posvetiti i redosljedu primjene komponenti složenih opterećenja. Svi prethodno spomenuti aspekti primjene NLMKE uvjetuju njenu vrlo rijetku primjenu u svrhu određivanja granične nosivosti složenih tankostjenih konstrukcija pri njihovom konceptualnom projektiranju. Njena primjena u kontekstu predmetne problematike svodi se uglavnom na analize parcijalnih modela (npr. [24], [25], [26], [27]) s ciljem verifikacije alternativnih proračunskih metoda, ili rjeđe potpunih modela konstrukcija (npr. [28], [29]) u svrhu određivanja uzroka i rekonstrukcije okolnosti stvarnih događaja kolapsa konstrukcije tokom eksploatacije.

Svaku od gore spomenutih metoda karakterizira specifična kombinacija komparativnih svojstava (prednosti i nedostataka) koja može o(ne)mogućiti primjenu svake od njih ovisno o: specifičnostima razmatrane konstrukcije, vrsti zadane aktivnosti (analiza ili konceptualna sinteza konstrukcije) te vremenu raspoloživom za njenu provedbu. Razmatrajući relevantna karakteristična svojstva svake od spomenutih metoda (mogućnost kvalitetnog razmatranja relevantnih čimbenika, razina točnosti rezultata, vrijeme potrebno za provedbu analize, prihvaćenost od strane relevantne regulative, rasprostranjenost primjene i dostupnost relevantne literature), metode analize progresivnog kolapsa nametnule su se kao optimalna osnova za provedeno istraživanje.

### **1.3 Cilj i hipoteze istraživanja**

Prethodno opisana motivacija za istraživanje razmatrana u kontekstu aktualnog stanja razvoja predmetnog područja uvjetuje smjernice za definiciju cilja istraživanja provedenog u okviru ovoga rada.

Cilj ovoga rada je daljnji razvoj inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa MTK, koja bi kroz sveobuhvatniji pristup u razmatranju utjecaja efekata realnih raspodjela opterećenja pri poprečnom savijanju (moment savijanja, smična sila i kontinuirano opterećenje) omogućila kvalitetnije razmatranje svih aspekata predmetnog problema. U tome smislu, hipoteze istraživanja su:

- Unaprijeđena analiza progresivnog kolapsa MTK može omogućiti: kvalitetniji uvid u kolapsnu sekvencu, pouzdaniju identifikaciju kritičnog uzdužnog segmenta konstrukcije te točniju kvantifikaciju karakteristične razine i rezerve sigurnosti konstrukcije;
- Unaprijeđena analiza progresivnog kolapsa MTK može omogućiti točniju kvantifikaciju mjere sigurnosti u kontekstu ograničenja i/ili cilja u višekriterijskoj konceptualnoj sintezi MTK, što omogućava iznalaženje kvalitetnijih preferiranih projektnih rješenja unutar ograničenog vremenskog okvira.

#### 1.4 Metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada

U inicijalnoj fazi istraživanja obuhvaćenih ovim radom je osim detaljnog upoznavanja s relevantnom literaturom provedena i softverska realizacija inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa (u daljnjem tekstu: polazna metoda) prema [14] i [15] u obliku analitičkog modula inkorporiranog unutar računalne aplikacije OCTOPUS [30]. Pri tome su korišteni razvojni alati Microsoft Visual Studio i Compaq Visual Fortran, dok se definicija geometrijskih i materijalnih karakteristika modela razmatranih konstrukcija vrši upotrebom računalne aplikacije MAESTRO [31]. Softverska implementacija procedure je validirana, a sam inkrementalno-iterativni algoritam verificiran usporedbom dobivenih rezultata za nekoliko različitih primjera iz literature [32]. Na ovaj način stvorena je pouzdana, otvorena i potpuno kontrolabilna algoritamska osnova u okviru koje je implementirana metodologija razvijena u narednoj fazi istraživanja.

U okviru sljedeće faze istraživanja provedena je identifikacija, razvoj i objedinjavanje relevantnih znanja i iskustava kako bi se razvila teorijska osnova točnije analize uzdužne granične nosivosti MTK kroz potpuniju formulaciju relevantnih čimbenika, tj. korekciju uzdužne nosivosti pri savojnom opterećenju za utjecaj raspodijeljenog poprečnog opterećenja. U sljedećem koraku ove faze istraživanja konceptualiziran je i realiziran novi inkrementalno-iterativni numerički algoritam, pri čemu ga se nastojalo učiniti što stabilnijim, robusnijim i bržim (efikasnijim). Nakon ekstenzivne validacije kojom se utvrdila konačnost, točna definiranost i ostale nužne karakteristike funkcionalnog algoritma, pristupilo se verifikaciji točnosti i fizikalne korektnosti rezultata primjene kroz algoritam implementirane metode, kako na razini razmatranog presjeka konstrukcije (rezultirajuće granično opterećenje), tako i na razini sastavnih elemenata konstrukcije. Pri tome su kao referenca korišteni eksperimentalni rezultati istraživanja provedenih nad prizmatičnim tankostjenim nosačima zatvorenog presjeka [33], [34], [35], dok su pri usporedbi rezultata prikazani i rezultati primjene NLMKE nad razmatranim modelima dobiveni korištenjem računalne aplikacije FEMAP/NX

Nastran [36]. Isti primjeri korišteni su i pri usporedbi predložene i polazne metode, tj. pri kvantifikaciji napretka u razini točnosti rezultata postignutog predloženom metodom.

U prvoj, uvodnoj glavi doktorskog rada opisana je motivacija za provedeno istraživanje te su obrazloženi osnovni pojmovi i različiti aspekti razmatranog problema. Prikazan je pregled dosadašnjih istraživanja vezano uz temu rada te je koncizno i jasno definiran cilj, kao i hipoteze istraživanja. Na posljepku je opisana metodologija istraživanja te struktura doktorskog rada.

Unutar druge glave doktorskog rada razmatraju se različiti aspekti evaluacije uzdužne granične nosivosti pri ekstremnom savijanju monotoničkih tankostjenih konstrukcija primjenom inkrementalno-iterativne (numeričke) metode analize progresivnog kolapsa. Pri tome su opisane relevantne teorijske osnove metode te način diskretizacije uzdužno nosivog materijala razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije. Opisane su korištene formulacije nosivosti različitih vrsta diskretnih sastavnih elemenata razmatranog poprečnog presjeka, koje su definirane u nelinearnoj elasto-plastičnoj domeni pomoću fenomenoloških  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja. Prikazan je i detaljno opisan dijagram toka algoritma metode te su razmotreni različiti aspekti rezultata njene primjene (granični moment savijanja i kolapsna sekvenca).

U okviru treće glave razmatraju se različiti aspekti unapređenja inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa predloženi u okviru ovoga rada. Koncizno su definirane efektivne materijalno-geometrijske karakteristike nosivosti diskretnih sastavnih elemenata (efektivni sekantni modul i efektivni modul smicanja), neophodne za formulaciju utjecaja efekata raspodijeljenog (savojnog) opterećenja na uzdužnu (graničnu) nosivost u kontekstu metodologije primijenjene u okviru ovoga rada. Detaljno je razmotrena geometrijski nelinearna kinematika ravnog savijanja Euler-Bernoullijeve grede, pri čemu je izveden potpuni izraz za raspodjelu uzdužne duljinske deformacije za opći slučaj ravninskog savojnog i/ili osnog opterećenja. Posebno je naglašeno i diskutirano rješenje vezano uz opći slučaj ravnog savijanja bez djelovanja vanjske uzdužne sile, relevantno za većinu zrakoplovnih (i brodograđevnih) konstrukcija. Potom su razmotreni različiti aspekti deplanacije poprečnih presjeka pri poprečnom ravnom savijanju. Opisana je postojeća numerička metoda za određivanje (diskretne) raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka te je na temelju teorije Lockwood-Taylor izvedena metoda za određivanje korigirane raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija, prilagođena kontekstu razmatranog problema. Razmotreni su različiti aspekti smične nosivosti ravne oplata uključujući elastično smično izvijanje te različite načine njegovog odgađanja sukladno mogućnostima koje teorijski opis te pojave pruža. Izveden je kriterij osiguranja lokalnog smičnog izvijanja te su prikazane postojeće formulacije smične granične nosivosti. Opisana je korištena formulacija utjecaja (granične) smične nosivosti na



uzdužnu (graničnu) nosivost te je na posljepku detaljno opisan dijagram toka algoritma unaprjeđene inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa, uz osvrt na ograničenja njene primjene te razlike s obzirom na polaznu metodu.

U okviru četvrte glave prikazana je razina točnosti rezultata predložene metode na nekoliko primjera monotoničkih tankostjenih ukrepljenih kutijastih nosača opterećenih različitim slučajevima (čistog i poprečnog) ravnog savijanja, pri čemu su usporedno prikazani rezultati dobiveni polaznom i predloženom metodom, eksperimentalnim ispitivanjem te numeričkim simulacijama (NLMKE). Pored toga, prikazana je i formulacija inicijalnih geometrijskih odstupanja korištena pri izradi razmatranih NLMKE modela te su opisani i komentirani različiti aspekti primjene NLMKE analize u kontekstu razmatranog problema.

U petoj glavi dana su zaključna razmatranja doktorskog rada, pri čemu je istaknut znanstveni doprinos rada te su predložene smjernice za daljnja istraživanja.

## 2 Uzdužna granična nosivost: Inkrementalno – iterativna metoda analize progresivnog kolapsa

Kolaps nosive konstrukcije općenito se može definirati kao granično stanje nosivosti pri kojem konstrukcija gubi sposobnost otpora narinutom vanjskom opterećenju (vlačenje/tlačenje, savijanje, smik, uvijanje). Ovim radom obuhvaćene složene trodimenzionalne MTK najčešće se sastoje od prizmatičnih uzdužnih segmenata međusobno odijeljenih okvirnim poprečno nosivim sastavnim elementima koji su ortogonalni u odnosu na uzdužno nosive sastavne elemente. U tome smislu se i različiti načini globalnog kolapsa MTK mogu okarakterizirati kao uzdužni i poprečni. Do uzdužnog globalnog kolapsa dolazi gubitkom nosivosti uzdužno orijentiranih nosivih elemenata konstrukcije pri čemu dolazi do značajnog smanjenja krutosti konstrukcije pri osnom opterećenju, savijanju, smiku ili uvijanju, dok do poprečnog globalnog kolapsa dolazi gubitkom nosivosti poprečnog orebrenja pri čemu dio uzdužnih elemenata gubi oslonac. Uzdužni i poprečni globalni kolaps u općem slučaju nisu nezavisni, jer moguće je primjerice da uzdužni globalni kolaps obuhvati jedan ili više poprečnih okvira, tj. dva ili više susjednih uzdužnih segmenata konstrukcije. Pri tome je analizom graničnog stanja nosivosti potrebno obuhvatiti mnogobrojne i različite moguće kombinacije gubitka uzdužne i poprečne nosivosti sastavnih elemenata razmatrane konstrukcije, što u pravilu nije moguće ostvariti u realno ograničenom vremenskom okviru konceptualne faze višekriterijskog projektiranja. Stoga se pri projektiranju konstrukcije uvode dodatna ograničenja vezano uz geometrijske i materijalne karakteristike poprečnih okvirnih nosača kako bi se osigurala izvjesnost pojave između-okvirnog kolapsa (eng. *interframe collapse*) uzdužno nosivih elemenata prije pojave bilo kojeg složenijeg načina kolapsa koji bi obuhvatio više od jednog uzdužnog segmenta konstrukcije. Na ovaj način ostvaruje se mogućnost raspregnutog razmatranja uzdužnog i poprečnog globalnog kolapsa te je moguće analizirati svaki uzdužni segment zasebno. Ukoliko je pri tome konstrukcija monotona, dovoljno je provesti samo analize najopterećenijih među njima.

Na uzdužni globalni kolaps mnogih MTK najveći utjecaj ima savojno opterećenje te se stoga uzdužna granična nosivost izražava kao najveći iznos momenta unutrašnjih uzdužnih sila kojega je moguće ostvariti na poprečnom presjeku kritičnog uzdužnog segmenta razmatrane MTK. Ukoliko intenzitet narinutog savojnog opterećenja dosegne na taj način formuliranu graničnu razinu nosivosti konstrukcije, smatra se da dolazi do uzdužnog globalnog kolapsa konstrukcije, tj. da je progresivnim gubitkom nosivosti sastavnih elemenata kritičnog uzdužnog segmenta savojna krutost njegovog presjeka smanjena na graničnu razinu. Pri tome do

progresivnog gubitka nosivosti sastavnih elemenata dolazi popuštanjem tlačno i vlačno (uzdužno) opterećenih elemenata i/ili različitim načinima (globalnog i lokalnog) izvijanja tlačno (uzdužno) opterećenih elemenata. Pri analizi progresivnog kolapsa najčešće se uzdužni segment MTK na poziciji najvećeg momenta savijanja identificira kao kritični te se razmatra promjena njegove nosivosti pri promjeni (povećanju) intenziteta (jednoosnog) savijanja kao najznačajnijeg načina opterećenja konstrukcije. Utjecaj efekata ostalih momenata (savijanja i uvijanja), smičnih sila te lokalnog opterećenja (tlaka) pri tome se zanemaruje.

## 2.1 Teorijske osnove

Jedan od značajnih aspekata izvjesnosti pojave između-okvirnog kolapsa prije svih ostalih tipova globalnog kolapsa je što se time osigurava i gredni karakter ponašanja konstrukcije tokom čitavog kolapsnog procesa. Teorije grede ili gredni modeli [37], [38] često se koriste u svrhu idealizacije različitih konstrukcija kojima je jedna od protežnih dimenzija znatno izraženija u odnosu na ostale dvije. U okviru metoda analize progresivnog kolapsa razmatrana MTK idealizira se Euler-Bernoullijevom gredom složenog tankostjenog poprečnog presjeka, pri čijem (statičkom) savijanju vrijedi:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right) = -q_z(x) \quad (2.1)$$

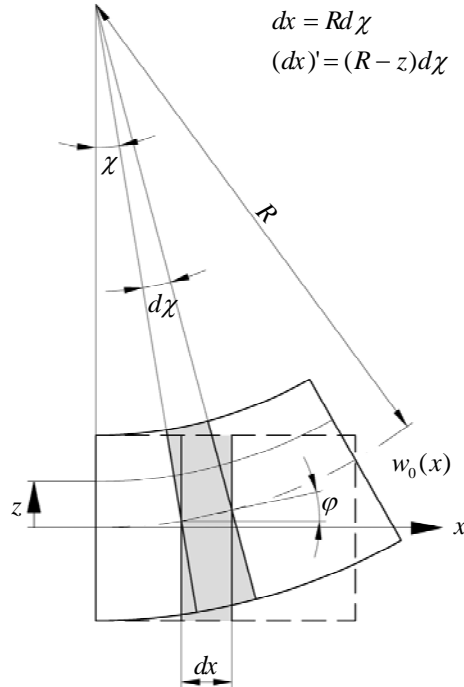
Jednadžba (2.1) predstavlja (lineariziranu) diferencijalnu jednadžbu savijanja monotone, homogene i izotropne Euler-Bernoullijeve grede gdje je  $q_z(x)$  uzdužna raspodjela kontinuiranog opterećenja u smjeru poprečne osi  $z$ . Pri tome integral od  $q_z(x)$  po duljini grede predstavlja uzdužnu raspodjelu smične sile  $Q_z(x)$ , čijim se integriranjem po duljini dobiva uzdužna raspodjela momenta savijanja  $M_y(x)$  oko lateralne osi  $y$ . Pri tome produkt unutar zagrade u (2.1) zapravo predstavlja uzdužnu raspodjelu momenta unutrašnjih uzdužnih sila poprečnih presjeka grede koja uravnotežava uzdužnu raspodjelu narinutog momenta savijanja duž konstrukcije:

$$M_y(x) = -EI_y \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \quad (2.2)$$

Pri tome  $EI_y$  predstavlja savojnu krutost poprečnog presjeka, dok je druga derivacija poprečnog pomaka  $w_0$  po uzdužnoj koordinati jednaka lineariziranoj fizikalnoj zakrivljenosti grede  $\kappa_L$ , što proizlazi iz razmatranja (lineariziranih) kinematičkih odnosa pri savijanju sukladno Euler-Bernoullijevoj hipotezi. Pri tome se zanemaruje pojava uzdužnih pomaka, a duljina neutralnog sloja diferencijalnog uzdužnog segmenta grede  $dx$  (Slika 2.1) jednaka je u deformiranom i nedeformiranom

stanju. S obzirom da u deformiranom stanju razmatrani segment neutralnog sloja poprima oblik kružnog luka, može se uočiti da vrijedi  $dx = Rd\chi$ . Separacijom varijabli uz uvažavanje jednakosti kuta zakreta i priklonog kuta  $\chi = \varphi$  te da za mali prikloni kut  $\varphi$  vrijedi  $\varphi = \tan \varphi = dw_0 / dx$ , u konačnici se dobiva:

$$\kappa_L = \frac{1}{R} = \frac{d\chi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \quad (2.3)$$



Slika 2.1 Linearizirana kinematika ravnog savijanja Euler-Bernoullijeve grede.

Razmatranjem duljine proizvoljnog sloja diferencijalnog uzdužnog segmenta grede (na udaljenosti  $z$  od neutralnog sloja grede) u nedeformiranom i deformiranom stanju, može se odrediti poprečna raspodjela uzdužnih duljinskih deformacija po visini grede:

$$\varepsilon_{xL}(x, z) = \frac{(dx)' - dx}{dx} = \frac{(R - z)d\chi - Rd\chi}{Rd\chi} = -\frac{z}{R} \quad (2.4)$$

Uvrštavanjem (2.3) u (2.4) dobiva se veza između linearizirane fizikalne zakrivljenosti grede i raspodjele uzdužne duljinske deformacije:

$$\varepsilon_{xL}(x, z) = -z\kappa_L \quad (2.5)$$

dok se uvrštavanjem (2.3) u (2.2) dobiva veza između linearizirane fizikalne zakrivljenosti grede i raspodjele momenta savijanja:

$$M_y(x) = -EI_y \kappa_L \quad (2.6)$$

S obzirom da za tijelo u stanju ravnoteže vrijedi da je i svaki njegov dio u stanju ravnoteže, razmatranja uzdužnog odziva pri promjeni linearizirane fizikalne zakrivljenosti mogu se ograničiti na jedan izdvojeni uzdužni segment grede ograničen okvirnim poprečnim nosačima sa svoje prednje i stražnje strane. Pri tome različite razine zakrivljenosti prema (2.5) uzrokuju i različite (linearne) raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija po poprečnom presjeku razmatranog uzdužnog segmenta. Ukoliko je za svaki diferencijalni element razmatranog poprečnog presjeka  $dA$  poznata veza između uzdužne duljinske deformacije i njoj odgovarajućeg uzdužnog normalnog naprezanja, može se za svaki diferencijalni sastavni element odrediti i unutrašnja uzdužna sila  $dN = \sigma_x dA$ . S obzirom da pri tome analitički uvjeti ravnoteže uvjetuju nultu vrijednost integrala svih diferencijalnih unutrašnjih uzdužnih sila, tj. jednakost rezultanti vlačne i tlačne zone, može se jednoznačno odrediti položaj relevantne neutralne osi razmatranog poprečnog presjeka bez obzira na (ne)linearno (ne)elastični režim pri različitim razinama opterećenja. Nadalje, kako je hvatište proizvoljne diferencijalne unutrašnje uzdužne sile (težište površine  $dA$ ) udaljeno od neutralne osi presjeka za iznos  $z$ , integriranjem svih produkata diferencijalnih sila i pripadajućih krakova po površini uravnoteženog poprečnog presjeka dobiva se ukupni moment unutrašnjih uzdužnih sila oko trenutne neutralne osi:

$$M_y(x) = \int_A \sigma_x z dA \quad (2.7)$$

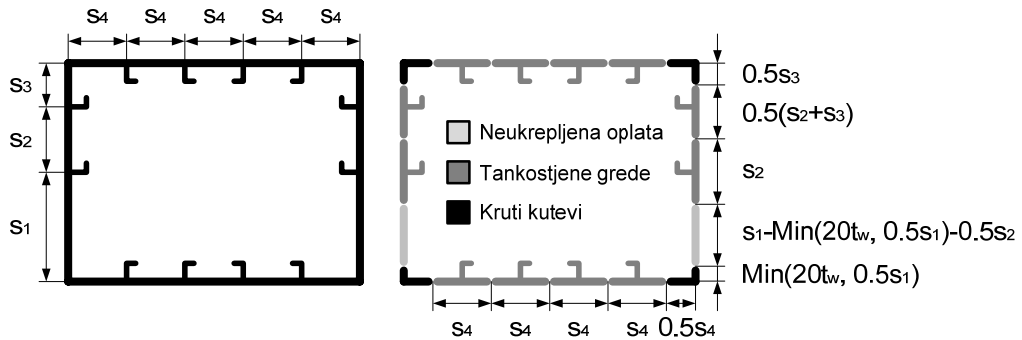
Pri većim vrijednostima razmatranog raspona linearizirane fizikalne zakrivljenosti nužno se izlazi van okvira linearno elastičnog režima te je stoga vezu između uzdužne duljinske deformacije i uzdužnog normalnog naprezanja potrebno definirati u (ne)linearnoj elasto-plastičnoj domeni uzimajući u obzir graničnu uzdužnu nosivost te poslije-kolapsno smanjenje uzdužne nosivosti sastavnih elemenata. Kako promjena uzdužne nosivosti sastavnih elemenata uvjetuje i promjenu rezultirajućeg momenta unutrašnjih uzdužnih sila pri različitim razinama narinute zakrivljenosti, tako pri tome niti odnos između narinute zakrivljenosti i odgovarajućeg momenta neće biti linearno proporcionalan unutar razmatranog raspona intenziteta savijanja. S obzirom da se pri progresivnom povećanju zakrivljenosti prirast momenta unutrašnjih uzdužnih sila sve više smanjuje (te nakon dosezanja granične vrijednosti postaje negativan), pri tome se prema (2.6) progresivno smanjuje i savojna krutost razmatranog poprečnog presjeka.

## 2.2 Diskretizirani model

U okviru metoda analize progresivnog kolapsa MTK sav se materijal razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije koji sudjeluje u uzdužnoj nosivosti diskretizira sa tri vrste međusobno raspregnutih diskretnih sastavnih elemenata:

- grede tankostjenog presjeka, koje obuhvaćaju sve uzdužne ukrepe sa pridruženom sunosivom širinom oplata;
- kruti kutovi, kojima se diskretiziraju spojevi uzdužne oplata koja ne leži u istoj ravnini i koja pri tome zatvara pozitivni ili negativni kut od najviše 270 stupnjeva. Ovim elementima diskretiziraju se vrlo kruti dijelovi presjeka za koje se smatra da će bez obzira na predznak (vlak/tlak) i intenzitet uzdužnog opterećenja nosivost izgubiti isključivo popuštanjem materijala;
- poprečno orebrena oplata (uzdužno neukrepljena oplata kojoj poprečno orebrenje određuje relevantni uzdužni raspon).

Duljina svih elemenata određena je uzdužnim rasponom razmatranog uzdužnog segmenta između jakih poprečnih nosača i/ili relevantnim poprečnim elementima unutar tog raspona. Slika 2.2 ilustrira proces diskretizacije razmatranog poprečnog presjeka na primjeru tankostjenog kutijastog nosača te pravila vezano uz pridruživanje odgovarajuće širine oplata pojedinim karakterističnim elementima.



Slika 2.2 Diskretizirani model tankostjenog kutijastog nosača.

## 2.3 Krivulje prosječno normalno naprezanje – prosječna duljinska deformacija ( $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$ krivulje)

Na temelju raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija, određene prema (2.5), određuje se odgovarajuće uzdužno normalno naprezanje nezavisno za svaki diskretni sastavni element korištenjem skupa različitih fenomenoloških [39]  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja (eng. *average stress – average strain curves, load – end shortening curves*). Pri tome se pretpostavlja da je uzdužna duljinska deformacija (koja vrijedi za poziciju težišta poprečnog presjeka razmatranog elementa) jednoliko raspodijeljena po čitavom

presjeku elementa, tj. tretira se kao prosječna, jednako kao i rezultirajuće prosječno (uzdužno) normalno naprezanje.  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljama definirana je nosivost elemenata u (ne)linearnoj elasto-plastičnoj domeni, pri čemu svaka krivulja odgovara nekom od podržanih karakterističnih načina gubitka nosivosti diskretnih sastavnih elemenata konstrukcije:

- Elasto-plastični kolaps – popuštanje (eng. *elasto-plastic collapse - yielding*);
- Globalno gredno-štapno izvijanje (eng. *beam-column buckling*);
- Globalno poprečno/lateralno-uvojno izvijanje (eng. *lateral-torsional buckling*);
- Lokalno izvijanje struka ukrepe s pojasom (eng. *flanged web local buckling*);
- Lokalno izvijanje struka ukrepe bez pojasa (eng. *flatbar local buckling*);
- Izvijanje oplata (eng. *plate buckling*).

$\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje mogu se generirati analizom nosivosti reprezentativnih modela elemenata konstrukcije pri uzdužnom opterećenju pomoću nelinearnih numeričkih (najčešće; npr. [40], [41], [42]), analitičkih (rjeđe; npr. [12]) ili eksperimentalnih (vrlo rijetko) metoda, pri čemu je značajan utjecaj razmatranja rubnih uvjeta i inicijalnih nesavršenosti (geometrijska odstupanja, zaostala naprezanja, korozija i sl.) uvjetovanih realnim uvjetima gradnje i eksploatacije konstrukcija. Tablica 2.1 prikazuje pregled podržanih načina gubitka nosivosti za pojedine diskretne sastavne elemente.

Tablica 2.1 Načini gubitka nosivosti pojedinih diskretnih sastavnih elemenata.

Vrsta diskretnog sastavnog elementa:	Mogući način(i) gubitka nosivosti:
Vlačno/tlačno opterećena tankostjena greda, kruti kut, neukrepljena oplata.	Elasto-plastični kolaps (popuštanje).
Tlačno opterećena tankostjena greda.	Elasto-plastični kolaps (popuštanje); Globalno gredno-štapno izvijanje; Globalno lateralno-uvojno izvijanje; Lokalno izvijanje struka ukrepe s pojasom; Lokalno izvijanje struka ukrepe bez pojasa.
Tlačno opterećena oplata.	Izvijanje oplata.

Vrlo detaljni teorijski opisi i formulacije različitih načina gubitka nosivosti elemenata tankostjenih konstrukcija mogu se naći u [7], [23], [47] i [51], dok se u nastavku ovog poglavlja prikazuju formulacije  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja definirane u [14] i [15] te korištene u okviru ovoga rada.

### 2.3.1 Elasto – plastični kolaps (popuštanje)

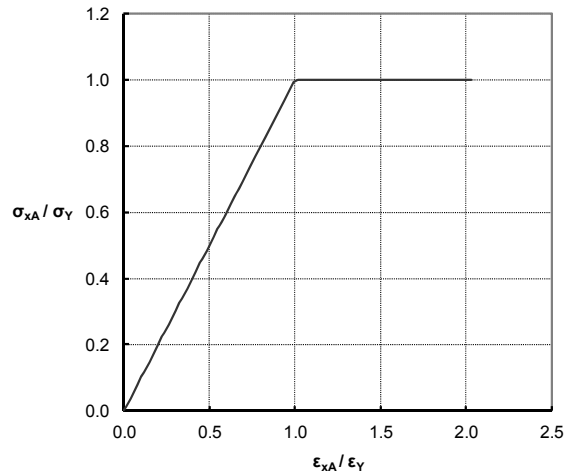
$\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja koja opisuje nosivost (uzdužno) vlačno i/ili tlačno opterećenih diskretnih sastavnih elemenata sukladno ovom načinu kolapsa određena je sljedećom jednačbom:

$$\sigma_{xA}^E = \Phi \sigma_Y \quad (2.8)$$

gdje je  $\sigma_Y$  ekvivalentna donja granica popuštanja izotropnog materijala razmatranog elementa. Ukoliko je materijal ukrepe različit od materijala sunosive širine oplata vrijedi:

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_{Yp} A_p + \sigma_{Ys} A_s}{A_p + A_s}$$

gdje je  $A_p$  površina poprečnog presjeka sunosive širine oplata  $b$  ( $A_p = bt_p$ ),  $A_s$  je površina poprečnog presjeka ukrepe ( $A_s = h_w t_w + bt_f$ ), dok su  $\sigma_{Yp}$  i  $\sigma_{Ys}$  donje granice popuštanja izotropnih materijala oplata i ukrepe.



Slika 2.3 Primjer  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za elasto-plastični kolaps.

$\Phi$  predstavlja deformacijski parametar definiran na sljedeći način:

$$\Phi = \begin{cases} -1 & \text{za } \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} < -1 \\ \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} & \text{za } -1 \leq \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \leq 1 \\ 1 & \text{za } \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} > 1 \end{cases} \quad (2.9)$$



gdje je  $\varepsilon_{xA}$  prosječna uzdužna deformacija razmatranog diskretnog sastavnog elementa određena prema (2.5), dok je  $\varepsilon_Y$  uzdužna duljinska deformacija pri popuštanju:

$$\varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E}$$

gdje je  $E$  Youngov modul elastičnosti.

### 2.3.2 Globalno gredno - štapno izvijanje

$\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja koja opisuje nosivost (uzdužno) tlačno opterećenih greda tankostjenog presjeka sukladno ovom načinu kolapsa određena je sljedećom jednadžbom:

$$\sigma_{xA}^E = \Phi \sigma_C \frac{A_s + A_{pef}}{A_s + A_p} \quad (2.10)$$

gdje je  $A_{pef}$  površina poprečnog presjeka sunosive širine oplata  $b_{ef}$  ( $A_{pef} = b_{ef}t_p$ ), pri čemu se sunosiva širina oplata  $b_{ef}$  određuje na sljedeći način:

$$b_{ef} = \begin{cases} b \left( \frac{2.25}{\beta_{ef}} - \frac{1.25}{\beta_{ef}^2} \right) & \text{za } \beta_{ef} > 1.25 \\ b & \text{za } \beta_{ef} \leq 1.25 \end{cases}$$

gdje je  $\beta_{ef}$  vitkost oplata širine  $b$ :

$$\beta_{ef} = \frac{b}{t_p} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xA}^E \sigma_{Yp}^E}{\varepsilon_Y E}}$$

$\Phi$  predstavlja deformacijski parametar definiran prema (2.9), dok je  $\sigma_C$  kritično normalno naprezanje korigirano za utjecaj plastičnosti prema Johnson-Ostenfeldovoj korekciji sa razdjelnom točkom na  $\sigma_Y/2$  [12]:

$$\sigma_C = \begin{cases} \frac{\sigma_E \varepsilon_Y}{\varepsilon_{xA}^E} & \text{za } \sigma_E \leq \frac{\sigma_Y}{2} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \\ \sigma_Y \left( 1 - \frac{\sigma_Y}{4\sigma_E} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \right) & \text{za } \sigma_E > \frac{\sigma_Y}{2} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \end{cases}$$

gdje je  $\sigma_Y$  ekvivalentna donja granica popuštanja izotropnog materijala razmatranog elementa definirana na sljedeći način:

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_{Yp} A_{pe} z_{pe} + \sigma_{Ys} A_s z_{se}}{A_{pe} z_{pe} + A_s z_{se}}$$

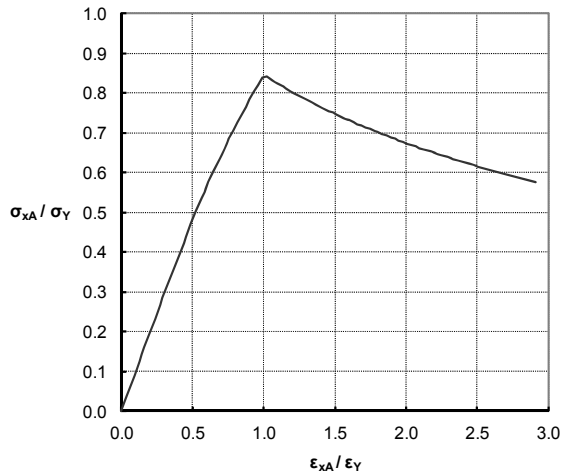
Pri tome je  $A_{pe}$  efektivna površina poprečnog presjeka oplata s obzirom na sunosivu širinu oplata  $b_e$  ( $A_{pe} = b_e t_p$ ),  $z_{pe}$  je udaljenost položaja osi inercije ukrepe sa sunosivom širinom oplata  $b_e$  s obzirom na najudaljeniji sloj oplata,  $z_{se}$  je udaljenost položaja osi inercije ukrepe sa sunosivom širinom oplata  $b_e$  s obzirom na najudaljeniji sloj pojasa ukrepe. Sunosiva širina oplata  $b_e$  određuje se na sljedeći način:

$$b_e = \begin{cases} \frac{b}{\beta_{ef}} & \text{za } \beta_{ef} > 1 \\ b & \text{za } \beta_{ef} \leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_E$  predstavlja Eulerovo kritično normalno naprezanje pri štapnom izvijaču:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 EI^E}{(A_p + A_s)(l^E)^2}$$

gdje je  $I^E$  moment inercije ukrepe sa sunosivom širinom oplata  $b_e$  s obzirom na relevantnu os inercije razmatranog elementa, dok je  $l^E$  uzdužni raspon razmatranog elementa.



Slika 2.4 Primjer  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulje za globalno gredno-štapno izvijačje.

### 2.3.3 Globalno lateralano - uvojno izvijanje

$\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja koja opisuje nosivost (uzdužno) tlačno opterećenih greda tankostjenog presjeka sukladno ovom načinu kolapsa određena je sljedećom jednadžbom:

$$\sigma_{xA}^E = \Phi \frac{A_s \sigma_{CT} + A_p \sigma_{CP}}{A_s + A_p} \quad (2.11)$$

gdje je  $\Phi$  deformacijski parametar definiran prema (2.9), dok je  $\sigma_{CT}$  kritično normalno naprezanje korigirano za utjecaj plastičnosti prema Johnson-Ostenfeldovoj korekciji:

$$\sigma_{CT} = \begin{cases} \frac{\sigma_{ET} \varepsilon_Y}{\varepsilon_{xA}^E} & \text{za } \sigma_{ET} \leq \frac{\sigma_{Ys}}{2} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \\ \sigma_{Ys} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ys}}{4\sigma_{ET}} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \right) & \text{za } \sigma_{ET} > \frac{\sigma_{Ys}}{2} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \end{cases}$$

gdje je  $\sigma_{ET}$  Eulerovo kritično normalno naprezanje pri uvojnomo izvijaju:

$$\sigma_{ET} = \frac{E}{I_P} \left( \frac{\pi^2 I_W}{(l^E)^2} \Theta + 0.385 I_T \right)$$

gdje je  $I_P$  polarni moment inercije ukrepe,  $I_T$  je St. Venantov moment inercije ukrepe, dok je  $I_W$  moment vitoperenja ukrepe. Definicije  $I_P$ ,  $I_T$ , i  $I_W$  za neke vrste profila ukrepa prikazuje Tablica 2.2. Pri tome su  $A_w$  i  $A_f$  površine poprečnih presjeka struka i pojasa ukrepe ( $A_w = h_w t_w$ ;  $A_f = b_f t_f$ ), dok je  $e_f = h_w + t_f/2$ .

Tablica 2.2 Relevantne geometrijske karakteristike profila ukrepe pri uvijanju.

Profil ukrepe	$I_P$	$I_T$	$I_W$
I-profil (bez pojasa)	$\frac{h_w^3 t_w}{3}$	$\frac{h_w t_w^3}{3} \left( 1 - 0.63 \frac{t_w}{h_w} \right)$	$\frac{h_w^3 t_w^3}{36}$
L/HP-profil	$\frac{A_w h_w^2}{3} + A_f e_f^2$	$\frac{h_w t_w^3}{3} \left( 1 - 0.63 \frac{t_w}{h_w} \right)$	$\frac{A_f e_f^2 b_f^2}{12} \left( \frac{A_f + 2.6 A_w}{A_f + A_w} \right)$
T-profil		$\frac{b_f t_f^3}{3} \left( 1 - 0.63 \frac{t_f}{b_f} \right)$	$\frac{b_f^3 t_f e_f^2}{12}$

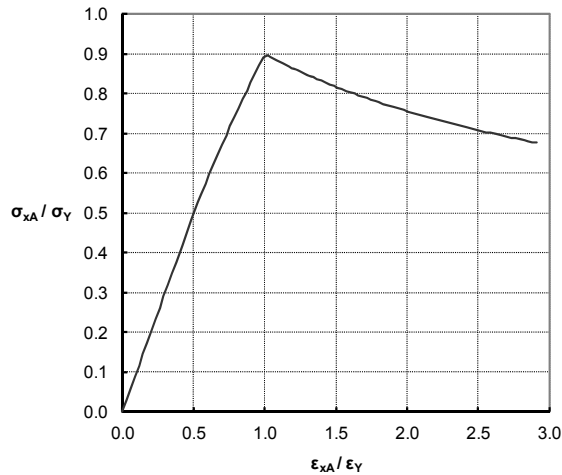
$\Theta$  je bezdimenzijski parametar definiran na sljedeći način:

$$\Theta = 1 + \sqrt{\frac{(l^E)^4}{\frac{3}{4} \pi^4 I_W \left( \frac{b}{t_p^3} + \frac{4h_w}{3t_w^3} \right)}}$$

$\sigma_{CP}$  predstavlja kritično normalno naprežanje sunosive oplata definirano na sljedeći način:

$$\sigma_{CP} = \begin{cases} \sigma_{Yp} \left( \frac{2.25}{\beta_{ef}} - \frac{1.25}{\beta_{ef}^2} \right) & \text{za } \beta_{ef} > 1.25 \\ \sigma_{Yp} & \text{za } \beta_{ef} \leq 1.25 \end{cases}$$

gdje je  $\beta_{ef}$  vitkost oplata definirana u prethodnom odjeljku.



Slika 2.5 Primjer  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulje za globalno lateralno-uvojno izvijanje.

### 2.3.4 Lokalno izvijanje struka ukrepe sa pojasom

$\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja koja opisuje nosivost (uzdužno) tlačno opterećenih greda tankostjenog presjeka (sa pojasom) sukladno ovom načinu kolapsa određena je sljedećom jednačinom:

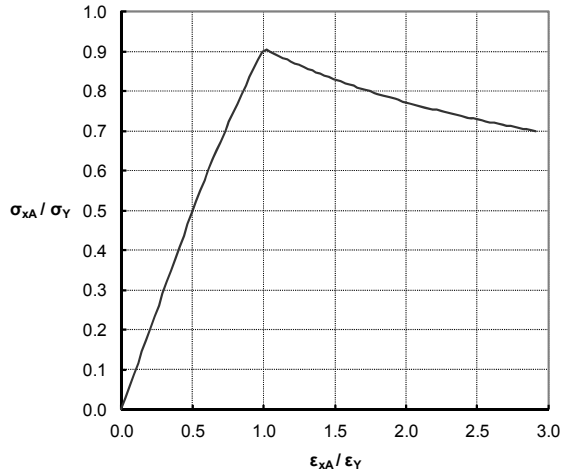
$$\sigma_{xA}^E = \Phi \frac{b_{ef} t_p \sigma_{Yp} + (h_{we} t_w + A_f) \sigma_{Ys}}{A_p + A_s} \quad (2.12)$$

Pri tome  $\Phi$  predstavlja deformacijski parametar definiran prema (2.9), dok je  $h_{we}$  efektivna visina struka ukrepe, definirana na sljedeći način:

$$h_{we} = \begin{cases} h_w \left( \frac{2.25}{\beta_w} - \frac{1.25}{\beta_w^2} \right) & \text{za } \beta_w > 1.25 \\ h_w & \text{za } \beta_w \leq 1.25 \end{cases}$$

gdje je  $\beta_w$  vitkost struka definirana na sljedeći način:

$$\beta_w = \frac{h_w}{t_w} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xA}^E \sigma_{Ys}}{\varepsilon_Y E}}$$



Slika 2.6 Primjer  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za lokalno izvijanje struka ukrepe s pojansom.

### 2.3.5 Lokalno izvijanje struka ukrepe bez pojasa

$\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja koja opisuje nosivost (uzdužno) tlačno opterećenih greda tankostjenog presjeka (bez pojasa) sukladno ovom načinu kolapsa određena je sljedećom jednačinom:

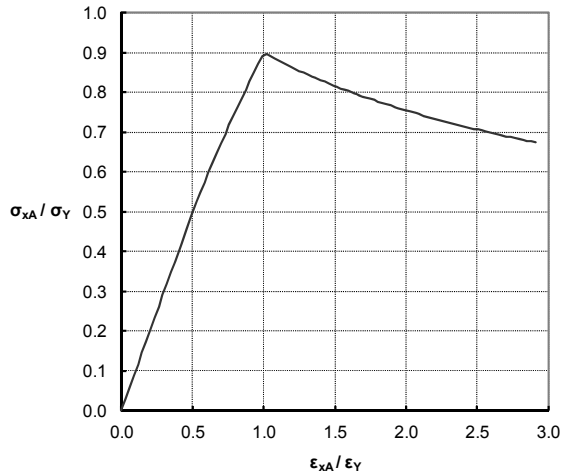
$$\sigma_{xA}^E = \Phi \frac{A_p \sigma_{CP} + A_s \sigma_{CL}}{A_p + A_s} \quad (2.13)$$

Pri tome  $\Phi$  predstavlja deformacijski parametar definiran prema (2.9),  $\sigma_{CP}$  je kritično normalno naprezanje sunosive oplata definirano u 2.3.3, dok je  $\sigma_{CL}$  kritično normalno naprezanje korigirano za utjecaj plastičnosti prema Johnson-Ostfeldovoj korekciji:

$$\sigma_{CL} = \begin{cases} \frac{\sigma_{EL} \varepsilon_Y}{\varepsilon_{xA}^E} & \text{za } \sigma_{EL} \leq \frac{\sigma_{Ys}}{2} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \\ \sigma_{Ys} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ys}}{4\sigma_{EL}} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \right) & \text{za } \sigma_{EL} > \frac{\sigma_{Ys}}{2} \frac{\varepsilon_{xA}^E}{\varepsilon_Y} \end{cases}$$

gdje je  $\sigma_{EL}$  Eulerovo kritično normalno naprezanje pri lokalnom izvicanju struka ukrepe:

$$\sigma_{EL} = 160000 \left( \frac{t_w}{h_w} \right)^2$$



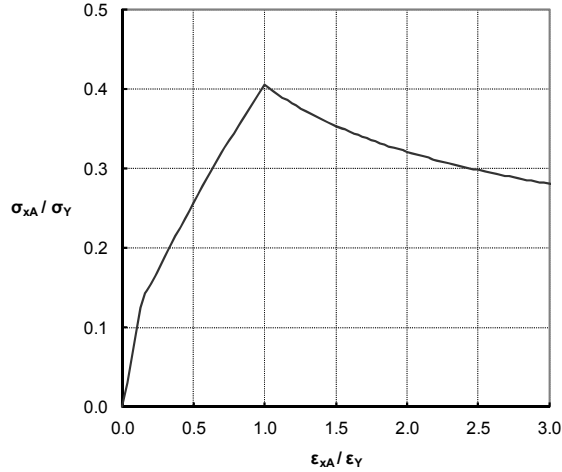
Slika 2.7 Primjer  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za lokalno izvicanje struka ukrepe bez pojasa.

### 2.3.6 Izvicanje oplata

$\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja koja opisuje nosivost (uzdužno) tlačno opterećene poprečno orebrenе oplata određena je sljedećom jednađbom:

$$\sigma_{xA}^E = \text{MIN} \left\{ \begin{array}{l} \Phi \sigma_{Yp} \\ \Phi \sigma_{Yp} \left[ \frac{b}{l^E} \left( \frac{2.25}{\beta_{ef}} - \frac{1.25}{\beta_{ef}^2} \right) + 0.1 \left( 1 - \frac{b}{l^E} \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_{ef}^2} \right)^2 \right] \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Pri tome  $\Phi$  predstavlja deformacijski parametar definiran prema (2.9), dok je  $\beta_{ef}$  vitkost oplata definirana u odjeljku 2.3.2.



Slika 2.8 Primjer  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za izvijanje poprečno orebene oplate.

## 2.4 Dijagram toka algoritma metode

S obzirom na inkrementalno-iterativni karakter razmatrane metode analize progresivnog kolapsa, tj. vrlo velik broj računskih operacija koje je potrebno izvršiti pri provedbi analize, metoda se u pravilu realizira u obliku računalnog programa. Dijagram toka algoritma metode prikazuje Slika 2.9.

Procedura započinje određivanjem inicijalnih karakteristika poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta MTK, nakon čega se presjek diskretizira kako je opisano u poglavlju 2.2. U sljedećem koraku se određuje najveća razmatrana vrijednost fizikalne zakrivljenosti prema:

$$\kappa_{\max} = \frac{\sigma_Y^{CS}}{z_{\max} E^{CS}} \quad (2.15)$$

gdje je  $\kappa_{\max}$  iznos fizikalne zakrivljenosti koja bi pri linearno elastičnoj analizi uzrokovala popuštanje materijala gornjeg ili donjeg pojasa globalnog nosača, tj. onoga koji je udaljeniji od elastične neutralne osi, dok  $\sigma_Y^{CS}$  predstavlja efektivnu granicu popuštanja materijala poprečnog presjeka:

$$\sigma_Y^{CS} = \frac{\sum \sigma_Y^E A^E}{\sum A^E}$$

$z_{\max}$  je udaljenost referentnog pojasa primarnog nosača od položaja elastične neutralne osi, dok  $E^{CS}$  predstavlja efektivni modul elastičnosti materijala poprečnog presjeka:

$$E^{CS} = \frac{\sum E^E A^E}{\sum A^E}$$

U sljedećem koraku se razmatrani raspon zakrivljenosti  $\kappa \in [0, \kappa_{max}]$  dijeli na konačan broj inkremenata  $NI \geq 100$ , pri čemu je vrijednost prvog inkrementa zakrivljenosti  $\kappa^1 = \kappa_{max} / NI$ .

Ulaskom u prvi ciklus inkrementalne petlje za sve diskretne sastavne elemente određuje se prosječna uzdužna duljinska deformacija prema (2.5), nakon čega se ovisno o vrsti svakog pojedinog elementa te karaktera narinutog mu uzdužnog opterećenja (vlačno/tlačno) određuje njegovo prosječno uzdužno normalno naprezanje sukladno svim odgovarajućim (Tablica 2.1)  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljama opisanim u poglavlju 2.3. Ukoliko se pri tome na pojedini element odnosi više različitih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja, kao relevantna se odabire ona kojom se dobiva najmanji apsolutni iznos naprezanja.

Na ovaj način određena naprezanja koriste se za određivanje unutrašnjih uzdužnih sila za svaki diskretni sastavni element  $N^E = \sigma_{xA}^E A^E$ . Nakon toga se sve unutrašnje uzdužne sile sumiraju kako bi se provjerila uravnoteženost presjeka, pri čemu mora biti zadovoljen uvjet  $\Sigma N^E = 0$ . Ukoliko presjek nije uravnotežen mijenja se položaj neutralne osi presjeka, ovisno o preličku pozitivnih (vlačnih) ili negativnih (tlačnih) sila, pri čemu je potrebno ponovno odrediti prosječnu uzdužnu duljinsku deformaciju za sve diskretne sastavne elemente te redom provesti sve prethodno opisane korake koji slijede nakon toga. Položaj neutralne osi presjeka iterativno se mijenja dok se ne zadovolji ravnotežni uvjet  $\Sigma N^E = 0$ .

Na osnovu ravnotežne raspodjele unutrašnjih uzdužnih sila određuje se ravnotežni moment unutrašnjih uzdužnih sila  $M^1 = \Sigma N^E z^E$ , koji odgovara fizikalnoj zakrivljenosti  $\kappa^1$ , dok njihov omjer prema (2.6) predstavlja savojnu krutost poprečnog presjeka za razmatrano ravnotežno stanje.

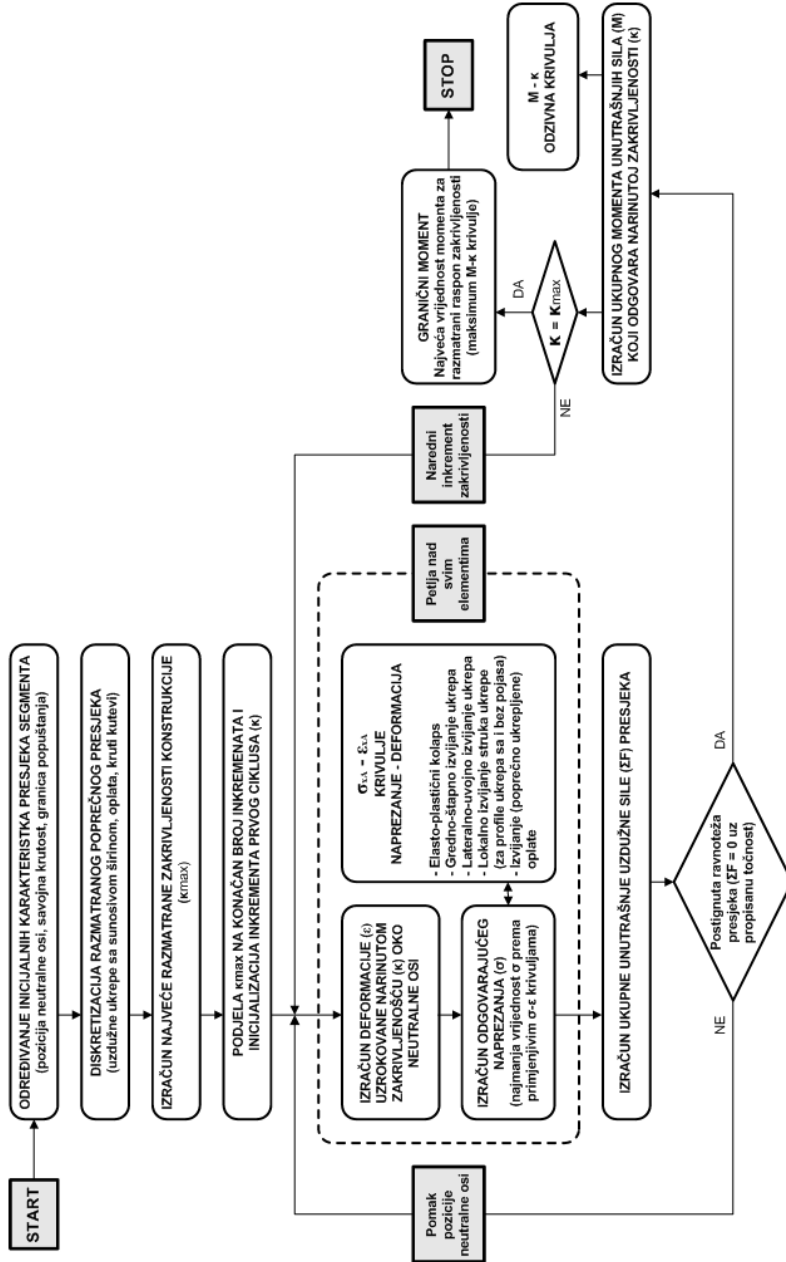
Potom se inicijalizira sljedeći ciklus inkrementalne petlje, računa se odgovarajući iznos zakrivljenosti  $\kappa^j = \kappa^{j-1} + \kappa^1$  te se redom provode svi prethodno opisani koraci kako bi se odredio ravnotežni moment unutrašnjih uzdužnih sila  $M^j$ . Određivanjem momenta unutrašnjih uzdužnih sila za  $\kappa^j = \kappa_{max}$  kompletiran je posljednji ciklus inkrementalne petlje, čime je provedba analize završena.

Procedura rezultira skupom odzivnih točaka koje predstavljaju ravnotežna stanja definirana parovima vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila i fizikalne zakrivljenosti razmatranog poprečnog presjeka (Slika 2.10). Najveća među izračunatim vrijednostima momenta unutrašnjih uzdužnih sila naziva se graničnim momentom savijanja  $M_U$ , a tome odgovarajuća odzivna točka interpretira se kao granično stanje nosivosti razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije.

U konačnici se može uočiti da se određivanje različitih razina uzdužne nosivosti poprečnog presjeka pri progresivnom povećavanju intenziteta fizikalne



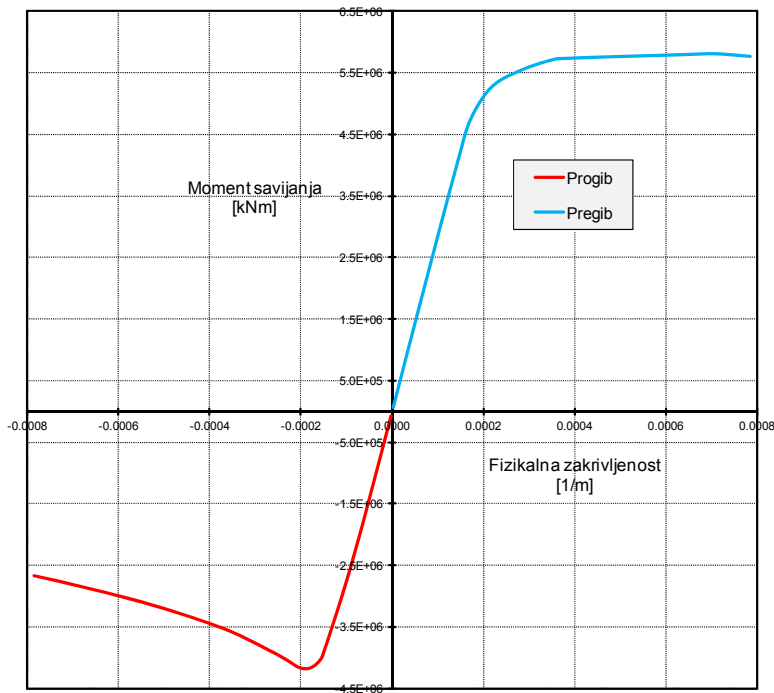
zakrivljenosti provodi u okviru vanjske inkrementalne petlje, dok se individualna razina uzdužne nosivosti svakog diskretnog sastavnog elementa te uravnoteživanje poprečnog presjeka odvija u unutrašnjoj iterativnoj petlji (za svaki inkrement fizikalne zakrivljenosti), što metodi daje inkrementalno-iterativni karakter.



Slika 2.9 Dijagram toka algoritma polazne metode analize progresivnog kolapsa.

## 2.5 Granični moment savijanja i kolapsna sekvenca

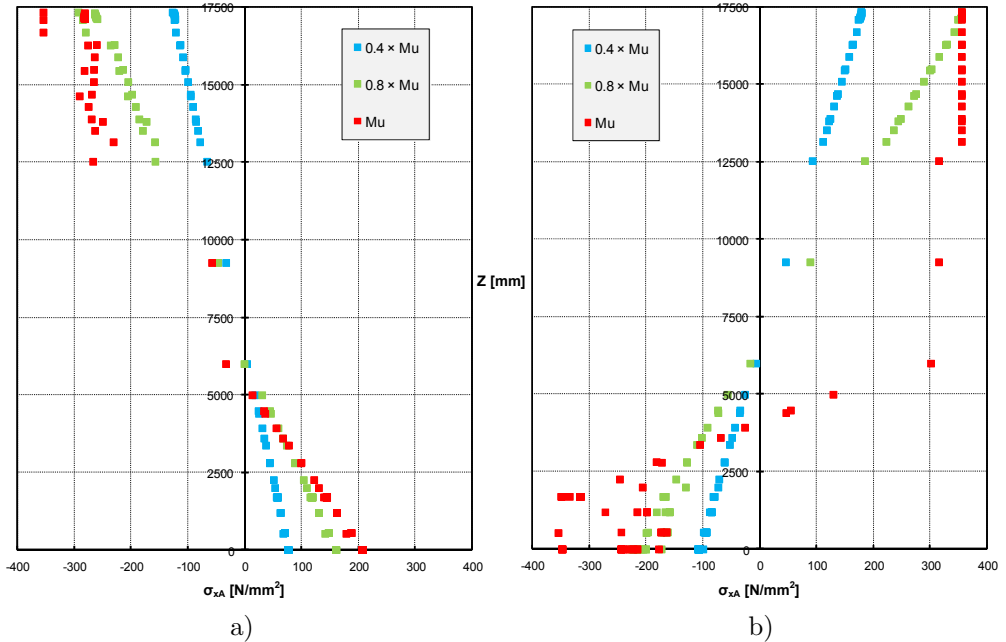
S obzirom da razmatrani uzdužni segment MTK u općem slučaju ne mora biti simetričan s obzirom na lateralnu os  $y$  oko koje se odvija savijanje, pri analizi progresivnog kolapsa obično se razmatra uzdužna granična nosivost konstrukcije za oba slučaja ravnog savijanja: pri pozitivnom (stanje pregiba; eng. *hogg*) i negativnom (stanje progiba; eng. *sagg*) predznaku momenta savijanja. Slika 2.10 prikazuje primjer pri tome određenog  $M-\kappa$  dijagrama za oba stanja savijanja realne konstrukcije trupa broda za prijevoz rasutog tereta. Očito je da pri tome u općem slučaju nesimetričnog poprečnog presjeka konstrukciju karakteriziraju dvije različite vrijednosti graničnog momenta savijanja  $M_{UH}$  i  $M_{US}$ .



Slika 2.10  $M-\kappa$  dijagram progresivnog kolapsa kritičnog uzdužnog segmenta trupa broda za prijevoz rasutog tereta.

Nadalje, s obzirom da je za svako diskretno ravnotežno stanje razmatrano pri analizi progresivnog kolapsa moguće identificirati razinu uzdužne nosivosti kako na globalnoj razini poprečnog presjeka, tako i na lokalnoj razini svakog individualnog diskretnog sastavnog elementa, moguće je pratiti promjene raspodjela prosječnog uzdužnog normalnog naprezanja za različite inkremente pri progresivnom povećanju

intenziteta savijanja. S tim u vezi, Slika 2.11a i Slika 2.11b prikazuju raspodjele  $\sigma_{xA}^E$  po visini poprečnog presjeka kritičnog uzdužnog segmenta (istog primjera broda za prijevoz rasutog tereta) za tri različita ravnotežna stanja ( $0.4M_U$ ,  $0.8M_U$  i  $M_U$ ) pri progibnom i pregibnom savijanju.

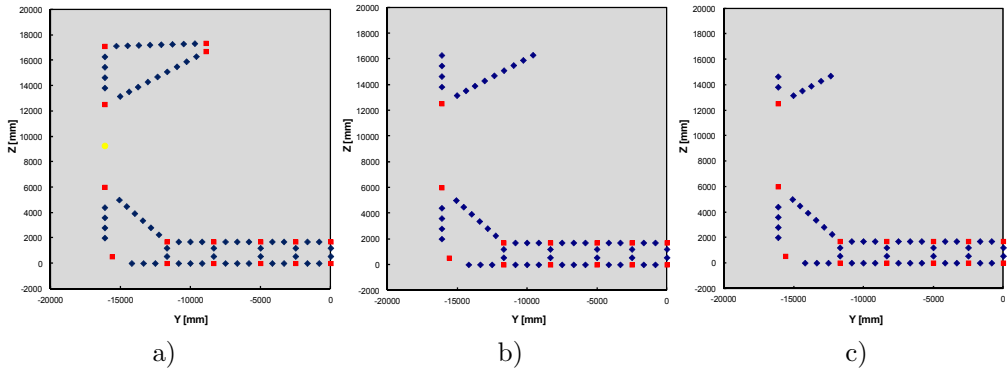


Slika 2.11 Raspodjele  $\sigma_{xA}^E$  po visini poprečnog presjeka kritičnog uzdužnog segmenta broda za prijevoz rasutog tereta: a) Stanje progiba; b) Stanje pregiba.

Isto tako, s obzirom da se nadilaženje vršne vrijednosti referentne među odnosnim  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljama interpretira kao gubitak uzdužne nosivosti diskretnih sastavnih elemenata, može se identificirati ciklus (inkrement) analize unutar kojega je svaki pojedini diskretni sastavni element dosegao svoju graničnu nosivost kao i pri tome dosegnutu graničnu vrijednost  $\sigma_{xA}^E$  te referentni način gubitka nosivosti ( $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja). S tim u vezi, Slika 2.12 prikazuje neoštećene diskretne sastavne elemente (one koji nisu dosegli svoju graničnu uzdužnu nosivost) u tri različita inkrementa analize pri progibnom savijanju istog primjera broda za prijevoz rasutog tereta. S obzirom da je razmatrani uzdužni segment simetričan s obzirom na uzdužnu centralnu ravninu prikazan je samo polovinski poprečni presjek s različito označenim vrstama diskretnih sastavnih elemenata.

Nizanjem ovakvih prikaza za sve inkremente analize dobiva se potpuni uvid u kolapsnu sekvencu razmatranog poprečnog presjeka, što u konceptualnoj fazi projektiranja, tj. pri razmatranju različitih topoloških varijanti i/ili materijalno-geometrijskih karakteristika poprečnog presjeka, može omogućiti iznalaženje

racionalnijih raspodjela uzdužno nosivog materijala s obzirom na preraspodjelu nosivosti pri progresivnom povećavanju uzdužnog opterećenja. U kontekstu evaluacije graničnog stanja nosivosti MTK kolapsna sekvenca može, s jedne strane, ukazati na efikasne načine postizanja zahtijevane razine globalne sigurnosti konstrukcije, dok sa druge strane može poslužiti kao racionalni smjerokaz pri redukciji materijala inicijalno predimenzioniranog poprečnog presjeka, tj. kada je kriterij globalne sigurnosti konstrukcije prezadovoljen.



Slika 2.12 Kolapsna sekvenca kritičnog uzdužnog segmenta broda za prijevoz rasutog tereta (stanje progiba): a) Neoštećeno stanje; b) Stanje pri  $0.95M_U$ ; c) Stanje pri  $M_U$ .

### 3 Unapređenje inkrementalno – iterativne metode analize progresivnog kolapsa

Prethodno opisana inkrementalno-iterativna metoda analize progresivnog kolapsa omogućava razmatranje promjene nosivosti pri savijanju monotone tankostjene konstrukcije prema lineariziranoj Euler-Bernoullijevoj diferencijalnoj jednadžbi savijanja grede, čime je u općem slučaju primjenjivost metode ograničena na razmatranje savijanja koje rezultira isključivo malim pomacima, zakrivljenostima i deformacijama razmatrane konstrukcije. U analizi progresivnog kolapsa ovakav je pristup valjan samo ukoliko je razmatrana konstrukcija projektirana tako da u graničnom stanju nosivosti spomenute kinematičke odzivne karakteristike budu maloga intenziteta i ukoliko se pri tome može zanemariti utjecaj raspodijeljenog poprečnog opterećenja na uzdužni odziv.

S obzirom da se pri projektiranju složenih zrakoplovnih konstrukcija minimizacija mase nameće kao dominantan projektni cilj, koji stoga u znatnoj mjeri uvjetuje njihovo oblikovanje, materijalne i geometrijske karakteristike nosivih zrakoplovnih konstrukcija (npr. krilo zrakoplova) su takve da se pri razmatranju njihovog graničnog stanja nosivosti intenzitet rezultirajućih popoćenih pomaka i deformacija ne može smatrati malim. Stoga je u statičkoj analizi progresivnog kolapsa takvih konstrukcija pored materijalne nelinearnosti<sup>1</sup> neophodno uzeti u obzir i geometrijsku nelinearnost, tj. potpunu vezu između komponenti gradjenata pomaka i deformacija, formuliranu bez pretpostavki koje rezultiraju pojednostavljenjem i/ili zanemarivanjem efekata nelinearnih članova relevantnih jednadžbi koji utječu na točnost ove vrste analize.

Isto tako, kinematičke pretpostavke Euler-Bernoullijeve grede potpuno su ostvarene samo pri čistom savijanju (savijanju momentima), tj. kada je moment savijanja konstantan duž konstrukcije, a raspodjele poprečne sile i kontinuiranog opterećenja jednake nuli. Međutim, u zrakoplovstvu i brodogradnji znatno je značajniji slučaj savijanja kontinuiranim opterećenjem (poprečno savijanje), pri čemu uzdužna raspodjela momenta savijanja nije konstantna, tj. postoji i raspodjela poprečne sile uslijed koje poprečni presjeci postaju neravni (deplanirani). Ako pri tome niti uzdužna raspodjela poprečne sile nije konstantna, dolazi do povećanja intenziteta uzdužnih duljinskih deformacija prema spoju struka i pojasa razmatrane

---

<sup>1</sup> U kontekstu ovoga rada pojam materijalne nelinearnosti svodi se na nelinearnu vezu između prosječnog normalnog naprezanja i prosječne duljinske deformacije prema prethodno opisanim fenomenološkim  $\sigma_{xA}-\varepsilon_{xA}$  krivuljama za prije-kolapsno, kolapsno i poslije-kolapsno područje nosivosti diskretnih sastavnih elemenata konstrukcije.

tankostjene konstrukcije, odnosno do smanjenja njihovog intenziteta po širini pojasa udaljavanjem od spoja sa strukom (Slika 3.16). Time se mijenja uzdužna nosivost diskretnih sastavnih elemenata razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije, na način da elementi bliže spoju struka i pojasa prije dosežu svoje granično stanje nosivosti, dok ga elementi bliže sredini pojasa dosežu kasnije. Drugim riječima, u općem slučaju se mijenja redoslijed gubitka nosivosti elemenata poprečnog presjeka.

Ignoriranjem deplanacijskih efekata u analizi mnogih realnih problema inženjerske prakse uvodi se često zanemariva pogreška, međutim, u slučaju razmatranja odziva konstrukcije na raspodijeljeno poprečno opterećenje velikog intenziteta, zanemarivanje deplanacijskih efekata može rezultirati nezanemarivim greškama [46]. Stoga, može se zaključiti da ovaj fenomen (poznatiji kao „*shear lag*“ u literaturi na engleskom jeziku) može biti naročito značajan u razmatranju graničnog stanja nosivosti pri ekstremnom savijanju tankostjenih konstrukcija koje karakterizira značajna širina pojasa u odnosu na visinu struka (npr. torzijska kutija krila zrakoplova, trup broda, itd.) te da potpunijim pristupom analizi uzdužne granične nosivosti treba obuhvatiti i utjecaj deplanacijskih efekata na uzdužnu nosivost [45].

### 3.1 Efektivne materijalno-geometrijske mjere lokalne nosivosti

U okviru polazne metode uzdužna nosivost svakog diskretnog sastavnog elementa razmatrane konstrukcije opisuje se pomoću  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja. Na taj način opisuje se odnos između prosječnog normalnog naprezanja i prosječne duljinske deformacije pri širokom rasponu intenziteta jednoosnog uzdužnog (tlačnog ili vlačnog) opterećenja svakog diskretnog sastavnog elementa, pri čemu je obuhvaćeno njihovo prije-kolapsno, kolapsno i poslije-kolapsno stanje.

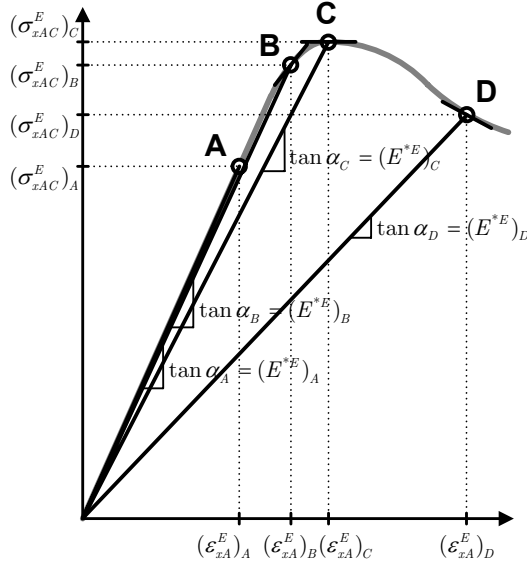
U okviru ovoga rada kvocijent proizvoljnog para vrijednosti  $\sigma_{xA}$  i  $\varepsilon_{xA}$  referentne  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za određeni diskretni sastavni element naziva se efektivni sekantni modul  $E^{*E}$ . Iako se pri tome lako uočava analogija sa poopćenim Hookeovim zakonom (za jednoosno stanje naprezanja), važno je naglasiti da  $E^{*E}$  predstavlja materijalno-geometrijsku karakteristiku, jer je svaka  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja (sukladno kojoj je određen) ovisna kako o materijalnim, tako i o geometrijskim karakteristikama odnosnog diskretnog sastavnog elementa.

Slika 3.1 kvalitativno prikazuje formulaciju efektivnog sekantnog modula za četiri različita stanja proizvoljnog diskretnog sastavnog elementa, pri čemu općenito vrijedi:

$$E^{*E} = \tan \alpha^E = \frac{\sigma_{xA}}{\varepsilon_{xA}} \quad (3.1)$$

Isto tako,  $E^{*E}$  predstavlja pogodnu mjeru nosivosti (izotropnog) materijala diskretnih sastavnih elemenata, jer je (za razliku od efektivnog tangentskog modula)

uvijek pozitivnog predznaka ( $\sigma_{xA}$  i  $\varepsilon_{xA}$  su uvijek istog predznaka) te mu se intenzitet progresivno smanjuje s povećanjem narinutog jednoosnog uzdužnog opterećenja. Pri tome, kvantitativna kvaliteta  $E^{*E}$  kao mjere nosivosti (izotropnog) materijala ovisi isključivo o kvaliteti ili točnosti  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje sukladno kojoj je određen.



Slika 3.1 Efektivni sekantni modul pri jednoosnom uzdužnom (tlačnom) opterećenju diskretnog sastavnog elementa konstrukcije.

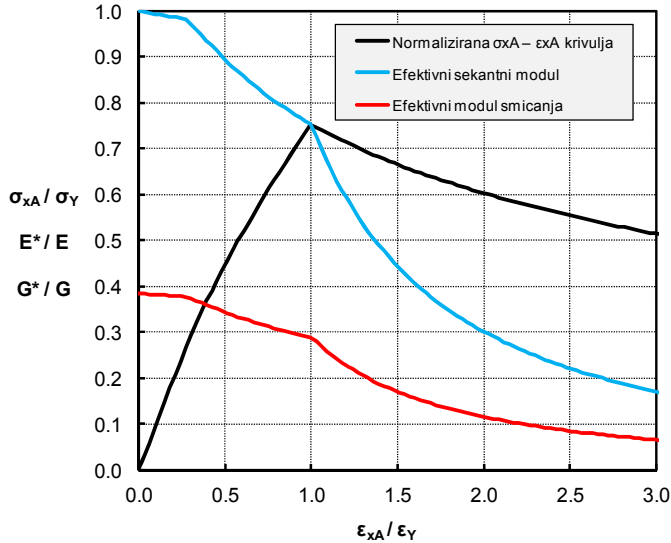
S tim u vezi, potrebno je napomenuti da se nosivost materijala svakog diskretnog sastavnog elementa mijenja sukladno različitim razinama globalnog savojnog opterećenja razmatrane konstrukcije. S obzirom da je  $E^{*E}$  ovisan o referentnoj  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulji te lokalnom uzdužnom opterećenju, u općem slučaju će različite diskretne sastavne elemente karakterizirati i različita vrijednost  $E^{*E}$  pri istoj razini globalnog savojnog opterećenja. Posljedica toga je da se položaj neutralne osi i moment inercije poprečnog presjeka ne mogu odrediti samo na osnovu njegovih geometrijskih karakteristika. Međutim, položaj (horizontalne) neutralne osi s obzirom na proizvoljnu referentnu točku se uvijek može korektno odrediti na sljedeći način:

$$z_{NA} = \frac{\sum_E |\sigma_{xA}^E| A^E z_{ref}^E}{\sum_E |\sigma_{xA}^E| A^E} = \frac{\sum_E |\varepsilon_{xA}^E E^{*E}| A^E z_{ref}^E}{\sum_E |\varepsilon_{xA}^E E^{*E}|} \quad (3.2)$$

Na osnovu efektivnog sekantnog modula može se formulirati i efektivni modul smicanja  $G^{*E}$ , pri čemu se pretpostavlja da je za određeni  $E^{*E}$  jednoznačno određen i  $G^{*E}$  prema:

$$G^{*E} = \frac{E^{*E}}{2(1+\nu)} \quad (3.3)$$

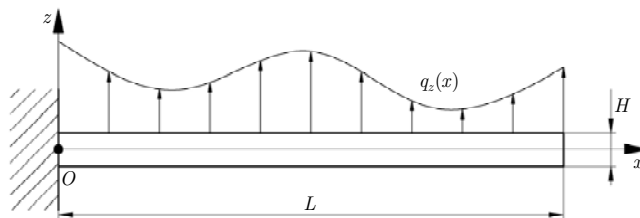
Slika 3.2 u normaliziranom obliku prikazuje ovisnost  $E^{*E}$  i  $G^{*E}$  o  $\varepsilon_{xA}^E$  za referentnu  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulju na osnovu koje su određeni.



Slika 3.2 Efektivni sekantni modul i efektivni modul smicanja sukladno referentnoj  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulji diskretnog sastavnog elementa.

### 3.2 Ravno savijanje Euler-Bernoullijeve grede

Pri razmatranju ravnog savijanja monotone grede koristiti će se Lagrangeov pristup opisu oblika i položaja razmatranog materijalnog tijela, tj. materijalni koordinatni sustav definiran je s obzirom na nedeformirano stanje tijela (referentnu konfiguraciju). Pozitivni predznak imaju pomaci usmjereni u pozitivnim smjerovima osi koordinatnog sustava, kutovi čiji je otklon usmjeren suprotno od kazaljke na satu te duljinske deformacije koje su posljedica produljenja razmatrane dužine.



Slika 3.3 Poprečno ravno savijanje (jednostrano uklještene) monotone grede.



Pri tome se pretpostavlja da ravnina  $(x, z)$  predstavlja ravninu simetrije u kojoj leži uzdužna os konstrukcije (grede), a koja je ortogonalna na glavne osi inercije razmatranog poprečnog presjeka. Isto tako, smatra se da je opterećenje okomito na uzdužnu os i da djeluje isključivo u toj istoj ravnini, tj. da se rezultirajuće ravno, jednoosno savijanje odvija isključivo u ravnini simetrije. Pri tome, razmatrani problem kondenzira se na dvodimenzionalni, tj. smatra se da ne postoji promjena komponenti relevantnih odzivnih polja u smjeru lateralne osi  $y$ . Težišta poprečnih presjeka, tj. materijalne točke koje su u referentnoj konfiguraciji koincidentne s uzdužnom osi, nakon djelovanja opterećenja tvoriti će kontinuiranu ravninsku krivulju – progibnu liniju.

Pri razmatranju kinematike sukladno Euler-Bernoullijevoj teoriji grede od fundamentalnog značaja su Kirchhoffove pretpostavke o ponašanju poprečnih presjeka pri savijanju:

1. poprečni presjeci su beskonačno kruti u svojoj ravnini;
2. poprečni presjeci ostaju ravni;
3. poprečni presjeci ostaju okomiti na progibnu liniju.

Prve dvije među gore navedenim kinematičkim pretpostavkama impliciraju da se pri savijanju poprečni presjeci ne deformiraju već samo transliraju i zakreću oko svoga težišta, dok se trećom pretpostavkom zapravo uvodi jednakost priklonog kuta  $\varphi$  koji određuje nagib tangente u proizvoljnoj točki progibne linije i kuta zakreta  $\chi$  poprečnog presjeka čije težište koincidira sa tom točkom (Slika 3.4). Pri tome, skalarna veličina (za ravninski problem) koja predstavlja diferencijalnu promjenu priklonog kuta  $\varphi$  s obzirom na lučnu duljinu  $s$  progibne linije (mjerenu od proizvoljne točke krivulje) naziva se fizikalna zakrivljenost  $\kappa$  progibne linije (Slika 3.4):

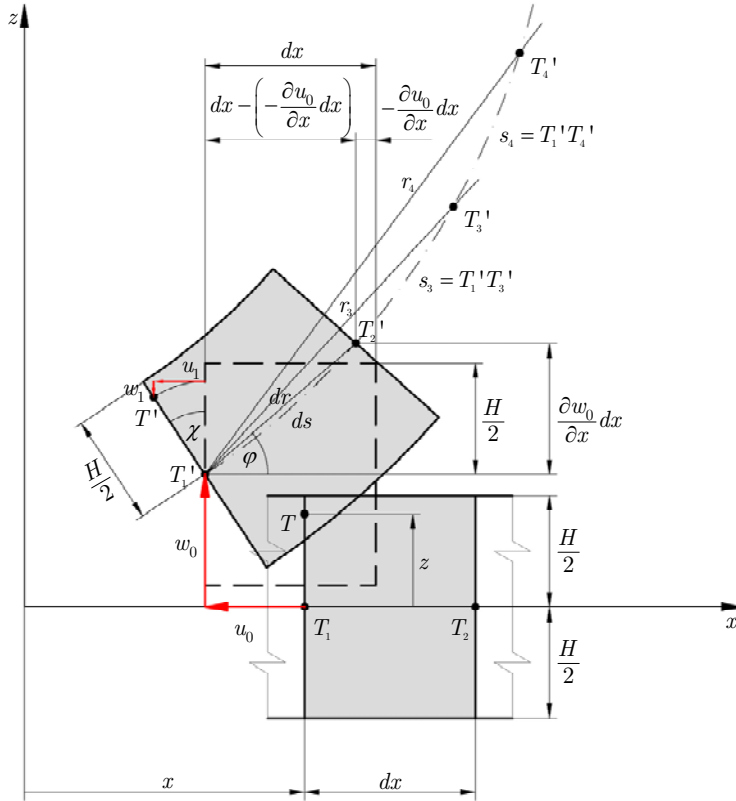
$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} \quad (3.4)$$

Na osnovu geometrijskih odnosa koje prikazuje Slika 3.4 očito je da vrijedi:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\partial w_0}{\partial x} dx}{dx - \left( -\frac{\partial u_0}{\partial x} dx \right)} = \frac{\frac{\partial w_0}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}} \quad (3.5)$$

odnosno, da se kut  $\varphi$  za materijalnu točku progibne linije  $T_i'$  može izraziti pomoću relevantnih komponenti gradijenata ravninskog vektora pomaka za tu točku:

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\frac{\partial w_0}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}} \right) \quad (3.6)$$



Slika 3.4 Veličine i geometrijski odnosi kinematike diferencijalnog segmenta grede.

Deriviranjem (3.6) po  $x$  u konačnici se dobiva:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2} \quad (3.7)$$

Nadalje, imajući na umu da u graničnom slučaju  $dr$  teži ka  $ds$ , može se uočiti da vrijedi:

$$ds = \sqrt{\left[dx - \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x} dx\right)\right]^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} dx\right)^2} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2}$$

što se radi separacije varijabli može prikazati u sljedećem obliku:

$$\frac{ds}{dx} = \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

U konačnici, uvrštavanjem (3.7) i (3.8) u (3.4) dobiva se (nelinearni) izraz za fizikalnu zakrivljenost u proizvoljnoj materijalnoj točki progibne linije ovisan isključivo o relevantnim komponentama gradijenata ravninskog vektora pomaka razmatrane točke:

$$\kappa = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}{\left[\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.9)$$

S obzirom da pri izvođenju (3.9) nisu uvedene pretpostavke o malom intenzitetu  $\varphi$ , niti su zanemarivani derivativi drugog reda i derivativi sa kvadratnom potencijom, (3.9) predstavlja općeniti i potpuni izraz za fizikalnu zakrivljenost progibne linije neovisan o intenzitetu pomaka  $u_0(x)$  i  $w_0(x)$ . Ukoliko bi se uvela spomenuta ograničenja i pojednostavljenja, (3.9) bi se linearizirao, tj. sveo na (2.3) koji se koristi u polaznoj metodi analize progresivnog kolapsa.

Za potpuni opis pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka potrebno je komponentama pomaka težišta  $u_0(x)$  i  $w_0(x)$  pridodati komponente pomaka uslijed rotacije proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka oko težišta poprečnog presjeka, tj. pomake  $u_1(x, z)$  i  $w_1(x, z)$ , tako da općenito vrijedi:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + u_1(x, z) \\ w(x, z) &= w_0(x) + w_1(x, z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na osnovu geometrijskih odnosa koje prikazuje Slika 3.4 te (3.5), može se uočiti da će nakon djelovanja opterećenja za proizvoljnu materijalnu točku  $T(x, z)$  referentne konfiguracije vrijediti:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{-u_1(x, z)}{z} = \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} & \Rightarrow & u_1(x, z) = -z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \\ \cos \varphi &= \frac{z - [-w_1(x, z)]}{z} = 1 + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} & \Rightarrow & w_1(x, z) = z \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

što znači da se komponente ukupnog pomaka proizvoljne materijalne točke razmatranog poprečnog presjeka, općenito definirane u (3.10), mogu prikazati u obliku ovisnom isključivo o pomacima težišta poprečnog presjeka:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \\ w(x, z) &= w_0(x) + z \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nadalje, prva među prethodno navedenim kinematičkim pretpostavkama općenito implicira da se poprečni presjeci smatraju beskonačno krutima u svojim ravninama, tj. da su sve deformacije u ravnini poprečnog presjeka ( $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}=\gamma_{zy}$ ) jednake nuli, dok se drugom i trećom pretpostavkom iz razmatranja eliminiraju i preostale kutne deformacije ( $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}, \gamma_{xz}=\gamma_{zx}$ ). Pri tome i bez ograničavanja na dvodimenzionalnost razmatranja osam od devet komponenti tenzora deformacije (simetrični tenzor drugog reda) je jednako nuli, a jedina komponenta različita od nule je duljinska deformacija  $\varepsilon_x$  paralelna s uzdužnom osi (u daljnjem tekstu: uzdužna duljinska deformacija). Kako uzdužna duljinska deformacija sloja grede koji u referentnoj konfiguraciji koincidira s uzdužnom osi predstavlja relativnu promjenu dužine  $T_1 T_2$  diferencijalnog segmenta grede (Slika 3.4), vrijedi:

$$\varepsilon_x(x, z = 0) = \frac{\overline{T_1' T_2'} - \overline{T_1 T_2}}{\overline{T_1 T_2}} = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_0}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} dx\right)^2} - dx \quad (3.13)$$

Kraćenjem  $dx$  u brojniku i nazivniku umanjitelja i umanjenika, (3.13) se može izraziti u sljedećem obliku:

$$\varepsilon_x(x, z = 0) = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad (3.14)$$

Uvođenjem supstitucije:

$$e_{x0} = 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \quad (3.15)$$

(3.14) se može izraziti u sljedećem obliku:

$$\varepsilon_x(x, z = 0) = \sqrt{1 + e_{x0}} - 1 \quad (3.16)$$

Nadalje, umanjenik iz gornje jednadžbe može se razviti u binomni red s pozitivnim eksponentom (konvergentan za  $|e_{x0}| \leq 1$ ), pri čemu (3.16) prelazi u:

$$\varepsilon_x(x, z = 0) = 1 + \frac{1}{2} e_{x0} - \frac{1}{8} e_{x0}^2 + \frac{1}{16} e_{x0}^3 - \frac{5}{128} e_{x0}^4 + \frac{7}{256} e_{x0}^5 - \frac{21}{1024} e_{x0}^6 + \dots - 1$$

što poništavanjem jedinica suprotnoga predznaka prelazi u:

$$\varepsilon_x(x, z = 0) = \frac{1}{2} e_{x0} - \frac{1}{8} e_{x0}^2 + \frac{1}{16} e_{x0}^3 - \frac{5}{128} e_{x0}^4 + \frac{7}{256} e_{x0}^5 - \frac{21}{1024} e_{x0}^6 + \dots \quad (3.17)$$

Uvrštavanjem (3.15) u (3.17) dobiva se u konačnici:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x(x, z = 0) &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{8} \left[ 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{16} \left[ 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right]^3 - \\
 &\quad - \frac{5}{128} \left[ 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right]^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Razmatrajući (3.18) očito je da se zanemarivanjem svih članova reda osim prvog, uzdužna duljinska deformacija reducira na dijagonalnu komponentu  $E_{xx0}$  Green-Lagrangeovog tenzora deformacije  $\mathbf{E}_0$  (za progibnu liniju), pri čemu je  $v_0 = 0$  (dvodimenzionalni problem):

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} \left[ (\nabla \mathbf{u}_0)^T + \nabla \mathbf{u}_0 + (\nabla \mathbf{u}_0)^T \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right]$$

gdje je  $\mathbf{u}_0$  vektor pomaka razmatrane materijalne čestice progibne linije:

$$\mathbf{u}_0^T = [u_0 \quad v_0 = 0 \quad w_0]$$

Stoga se može zaključiti da niti uzdužna komponenta Green-Lagrangeovog tenzora deformacije ne predstavlja potpunu i točnu formulaciju uzdužne duljinske deformacije, kako za progibnu liniju, tako niti za ostale slojeve grede s obzirom da je (3.18) trivijalno generalizirati za proizvoljni sloj. Nadalje, zanemarivanjem derivativa s kvadratnom potencijom u prvom članu reda dobiva se linearizirana veza između uzdužne duljinske deformacije i komponente gradijenta pomaka u smjeru uzdužne osi, tj. jedna od šest Cauchyjevih jednadžbi, često korištenih u analizi problema kod kojih opterećenje rezultira komponentama deformacija i/ili komponentama gradijenta pomaka maloga intenziteta (reda veličine 0.001). Potpuni izraz za uzdužnu duljinsku deformaciju proizvoljnog sloja grede na razmatranom poprečnom presjeku za opći slučaj ravninskog opterećenja može se dobiti postupkom analognom korištenom pri izvođenju (3.14), razmatrajući pri tome komponente ukupnog pomaka  $u(x, z)$  i  $w(x, z)$  proizvoljne materijalne točke  $T$  (Slika 3.4) poprečnog presjeka:

$$\varepsilon_x(x, z) = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \tag{3.19}$$

Deriviranjem jednadžbi u (3.12) po  $x$  dobivaju se derivativi komponenti ukupnih pomaka proizvoljne čestice razmatranog poprečnog presjeka:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, z)}{\partial x} &= \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} &= \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + z \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (3.20)$$

čijim se uvrštavanjem u (3.19) dobiva:

$$\varepsilon_x(x, z) = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^2} - 1$$

Nakon raspisivanja i grupiranja pribrojnika ispod korijena dobiva se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, z) &= \left\{1 + 2\frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2z\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + z^2\left[\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} - 1\end{aligned}\quad (3.21)$$

pri čemu (3.21) predstavlja potpuni izraz za uzdužnu duljinsku deformaciju proizvoljnog sloja na razmatranom poprečnom presjeku Euler-Bernoullijeve grede za opći slučaj ravninskog opterećenja. Očito je da pri tome mogućnost izračuna  $\varepsilon_x(x, z)$  ovisi o poznavanju  $u_0(x)$  i  $w_0(x)$ .

U slučaju kada na razmatranu konstrukciju djeluje isključivo vanjsko osno opterećenje, očito je da će se greda samo razvlačiti/tlačiti bez savijanja te da neće biti poprečnih pomaka  $w_0(x)$ . Pri tome se (3.21) reducira na sljedeći oblik:

$$\varepsilon_x(x, z) = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2} - 1 = \sqrt{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + 1\right)^2} - 1 = \frac{\partial u_0}{\partial x}\quad (3.22)$$

tj. jednu od šest već spomenutih Cauchyjevih jednadžbi. Za ovaj rad puno je interesantniji slučaj kada na razmatranu konstrukciju ne djeluje vanjsko osno opterećenje, tj. uzdužna (vlačna/tlačna) sila, ili kada je intenzitet takve sile i/ili njenih efekata zanemariv u odnosu na intenzitet savojnog opterećenja i/ili njegovih efekata (npr. slučaj realnog opterećenja krila zrakoplova i/ili trupa broda). U tome slučaju će uzdužna duljinska deformacija sloja grede koji koincidira s progibnom linijom biti jednaka nuli:

$$\varepsilon_x(x, z = 0) = 0\quad (3.23)$$

Na osnovu te činjenice može se direktno dobiti odnos relevantnih komponenti gradijenata pomaka težišta poprečnog presjeka. Dakle, uvrštavanjem (3.23) u (3.14) dobiva se nakon sređivanja da je  $e_{x0} = 0$ , tj. da vrijedi:

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad (3.24)$$

što predstavlja kvadratnu jednadžbu čiji je parametar  $\partial u_0/\partial x$ , a korijeni:

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2}$$

Odabere li se u gornjem izrazu pozitivan predznak ispred korijena dobiva se:

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = -1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2} \quad (3.25)$$

čijom se derivacijom po  $x$  dobiva veza derivacija relevantnih komponenti gradijenata pomaka težišta poprečnog presjeka:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}}{\left[1 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.26)$$

Uvrštavanjem (3.25) i (3.26) u (3.9) dobiva se nakon sređivanja:

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}}{\left[1 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.27)$$

pri čemu (3.27) predstavlja potpuni izraz za fizikalnu zakrivljenost u slučaju kada ne djeluje vanjska uzdužna sila, a koji je ovisan o samo jednoj (poprečnoj) komponenti pomaka težišta poprečnog presjeka. Nadalje, uvrštavanjem (3.24), (3.25), (3.26) i (3.27) u (3.21) dobiva se nakon sređivanja:

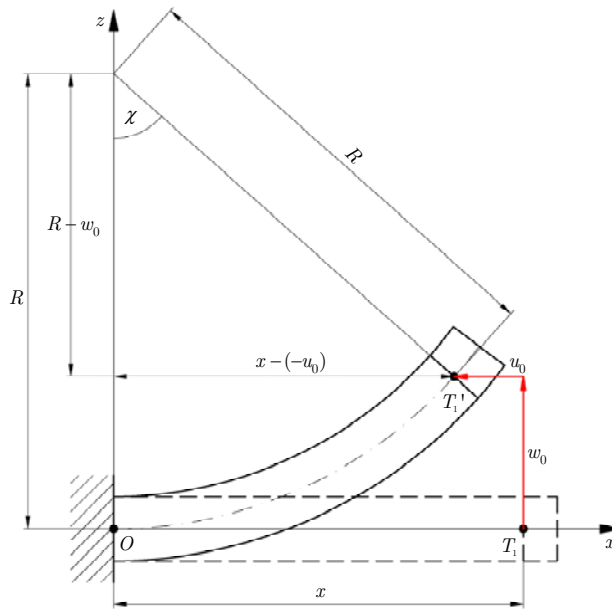
$$\varepsilon_x(x, z) = \sqrt{(z\kappa)^2 - 2z\kappa + 1} - 1 = \sqrt{(-z\kappa + 1)^2} - 1$$

što se u konačnici može prikazati u sljedećem obliku:

$$\varepsilon_x(x, z) = -z\kappa \quad (3.28)$$

pri čemu (3.28) predstavlja potpuni izraz za uzdužnu duljinsku deformaciju proizvoljnog sloja na razmatranom poprečnom presjeku Euler-Bernoullijeve grede za opći slučaj ravnog savijanja bez djelovanja vanjske uzdužne sile. Bitno je uočiti da se (2.5), korišten u polaznoj metodi analize progresivnog kolapsa, razlikuje u odnosu na (3.28) samo po formulaciji fizikalne zakrivljenosti koja figurira u tim izrazima inače identičnog oblika.

Pri čistom ravnom savijanju monotone grede progibna linija će poprimiti oblik ravninske krivulje konstantne zakrivljenosti, tj. kružnoga luka. Pri tome je za određivanje  $w_0(x)$  i  $u_0(x)$  dovoljno razmotriti geometrijske odnose kinematike razmatranog problema.



Slika 3.5 Čisto ravno savijanje (jednostrano uklještene) monotone grede.

Za slučaj monotone konzolnog nosača (gredna idealizacija polu-krila zrakoplova), Slika 3.5 ilustrira geometrijske odnose na osnovi kojih se mogu u potpunosti odrediti  $w_0(x)$  i  $u_0(x)$ :

$$\overline{OT_1'} = OT_1' = x = R\chi \quad (3.29)$$

$$u_0(x) = R \sin \chi - x = R \sin \frac{x}{R} - x \quad (3.30)$$

$$w_0(x) = R - R \cos \chi = R \left( 1 - \cos \frac{x}{R} \right)$$



Jednadžbama u (3.30) definirana je progibna linija razmatrane grede, dok su njihove prve dvije derivacije (po  $x$ ) pri tome:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \cos \frac{x}{R} - 1; & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= -\frac{1}{R} \sin \frac{x}{R} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} &= \sin \frac{x}{R}; & \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= \frac{1}{R} \cos \frac{x}{R} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Uvrštavanjem jednadžbi iz (3.31) u (3.9), izraz za fizikalnu zakrivljenost progibne linije svodi se na sljedeći oblik:

$$\kappa = \frac{1}{R} \quad (3.32)$$

pri čemu treba uočiti da je ovako dobivena fizikalna zakrivljenost identična formulaciji linearizirane fizikalne zakrivljenosti korištene u polaznoj metodi. Jednakost između  $\kappa$  i  $\kappa_L$  pri čistom savijanju uzrokuje i jednakost između funkcija raspodjele uzdužne duljinske deformacije  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_{xL}$ , s obzirom da su različito formilirane zakrivljenosti predstavljale jedinu razliku u njihovim izrazima inače identičnog oblika. S tim u vezi, korisno je prodiskutirati međuodnos prethodno izvedenih izraza za  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_{xL}$  te Green-Lagrangeove uzdužne duljinske deformacije koja se u literaturi (npr. [43]) sugerira kao točnija u slučaju pojave pomaka velikog intenziteta. U tu svrhu poslužiti će (3.19) tj. potpuni izraz za uzdužnu duljinsku deformaciju proizvoljnog sloja grede, koji nakon razvoja u binomni red s pozitivnim eksponentom ima sljedeći oblik:

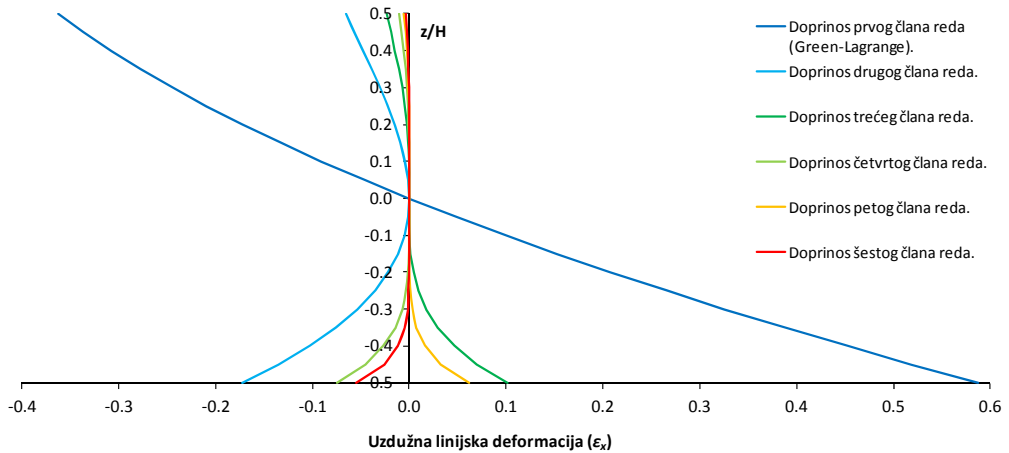
$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, z) &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{8} \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{16} \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^3 - \\ &\quad - \frac{5}{128} \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

Uvrštavanjem (3.20), (3.31) i (3.32) u (3.33), dobiva se u konačnici:

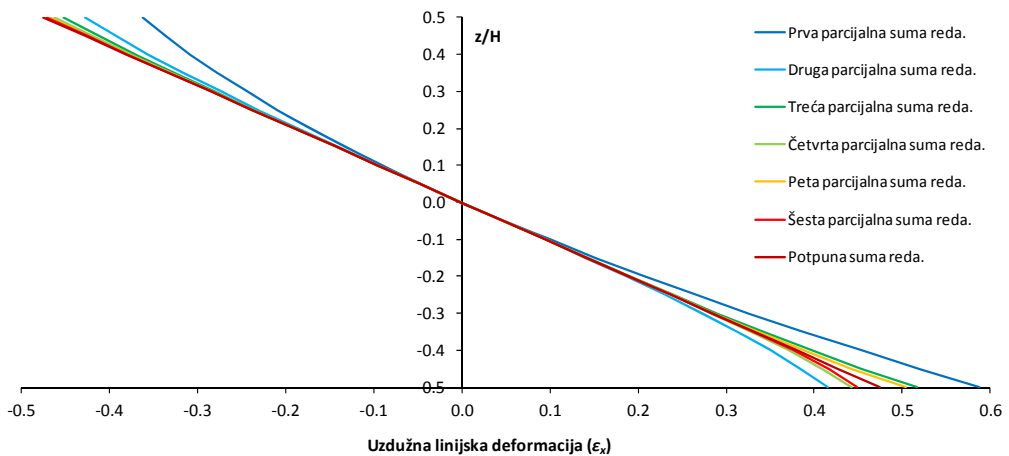
$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{1}{2} [(z\kappa)^2 - 2z\kappa] - \frac{1}{8} [(z\kappa)^2 - 2z\kappa]^2 + \frac{1}{16} [(z\kappa)^2 - 2z\kappa]^3 - \dots \quad (3.34)$$

Kako prvi član reda u (3.33) i (3.34) predstavlja Green-Lagrangeovu uzdužnu duljinsku deformaciju, može se konstatirati da je ista samo dio potpune formulacije. S

tim u vezi, Slika 3.6 prikazuje raspodjele prvih šest članova u (3.34) za proizvoljni poprečni presjek grede jedinične visine te odnosa duljine i visine  $L/H = 1$  pri zakrivljenosti od  $0.95 \text{ m}^{-1}$ , dok Slika 3.7 prikazuje raspodjele potpune i prvih šest parcijalnih suma reda u (3.34) za isti slučaj. Ekstremni intenzitet spomenutih relevantnih parametara grede korišten je kako bi se što zornije ilustrirao i istakao karakter prikazanih raspodjela i parcijalnih suma članova reda.



Slika 3.6 Raspodjele prvih šest članova reda u (3.34).



Slika 3.7 Raspodjele potpune i prvih šest parcijalnih suma reda u (3.34).

Vidljivo je da se Green-Lagrangeova uzdužna duljinska deformacija nelinearno raspodjeljuje po poprečnom presjeku te da je nesimetrična s obzirom na neutralnu liniju. Isto tako, razvidno je da je njen doprinos potpunoj sumi beskonačnog ali konvergentnog reda u (3.34) najveći među svim članovima. Međutim, upravo radi naizmjenične promjene predznaka sukcesivnih članova reda, nelinearna i nesimetrična raspodjela prvoga člana se sve više linearizira i simetrizira kako se propagira prema sve višim parcijalnim sumama reda, da bi u konačnici konvergirala u potpuno linearnu i simetričnu (s obzirom na težište poprečnog presjeka), prema (3.28). Prema tome, može se zaključiti da je u razmatranom slučaju linearna raspodjela  $\varepsilon_{xL}$  u potpunosti točna, za razliku od nelinearne raspodjele Green-Lagrangeove uzdužne duljinske deformacije.

Za razliku od uzdužnih duljinskih deformacija, progibne linije dobivene potpunim i lineariziranim pristupom razmatranom problemu nisu iste. Lineariziranim pristupom zanemaruju se uzdužni pomaci, dok se poprečni pomaci mogu dobiti dvostrukom integracijom linearizirane fizikalne zakrivljenosti. Pri tome, vrijednost obaju rezultirajućih konstanti integracije (određenih na temelju rubnih uvjeta:  $w_0(0) = 0$ ;  $\partial w_0(0)/\partial x = 0$ ) jednaka je nuli te se stoga dobiva:

$$w_{0L}(x) = \kappa_L \frac{x^2}{2}$$

Kako pri tome vrijedi (2.3), u konačnici se dobiva:

$$w_{0L}(x) = \frac{1}{R} \frac{x^2}{2} = \frac{R}{2} \left( \frac{x}{R} \right)^2 \quad (3.35)$$

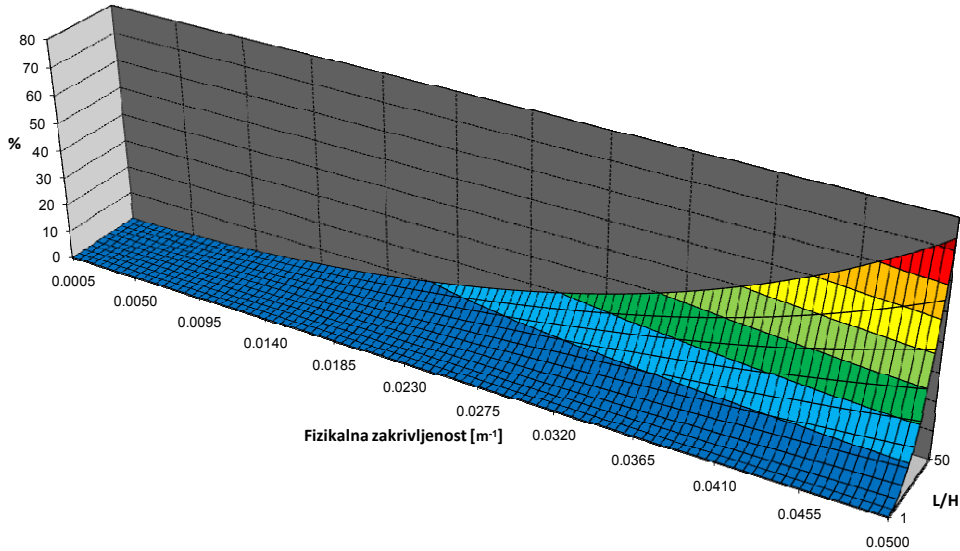
Nasuprot tome, u potpunom pristupu pomaci su određeni prema (3.30). Usporedbe radi, kosinus u izrazu za poprečni pomak može se razviti u beskonačni red, tako da se nakon poništavanja jedinica suprotnog predznaka može pisati:

$$w_0(x) = \frac{R}{2} \left( \frac{x}{R} \right)^2 - \frac{R}{24} \left( \frac{x}{R} \right)^4 + \frac{R}{720} \left( \frac{x}{R} \right)^6 - \dots \quad (3.36)$$

Može se uočiti da (3.35) predstavlja zapravo samo prvi član beskonačnog reda u (3.36), kojim je u potpunosti opisan poprečni pomak materijalnih točki progibne linije grede. Stoga se nameće logično pitanje: u kojoj mjeri odstupaju pomaci tih dvaju pristupa za relevantne parametre razmatranog problema? S tim u vezi, Slika 3.8 prikazuje relativno odstupanje poprečnog pomaka dobivenog potpunim i lineariziranim pristupom razmatranju ravnog čistog savijanja grede za područje fizikalne zakrivljenosti od 0.0005 do 0.05 m<sup>-1</sup> i omjera duljine i visine grede ( $L/H$ ) od

1 do 50, pri čemu se visina grede uzima kao jedinična. Relativno odstupanje prikazano je u postocima, a računato je na sljedeći način:

$$\% = \frac{w_{0L} - w_0}{w_0} \cdot 100$$



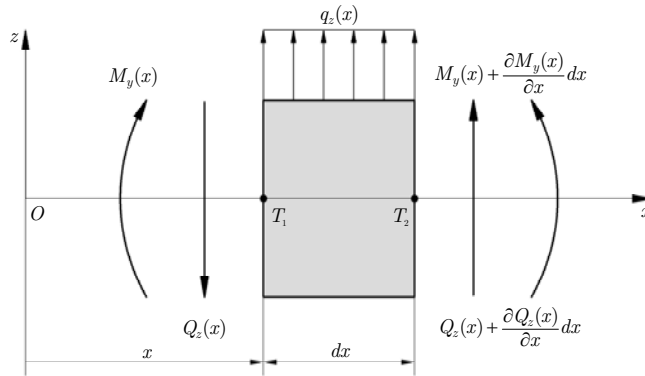
Slika 3.8 Relativno odstupanje poprečnog pomaka ( $w_0$ ) dobivenog potpunim i lineariziranim pristupom razmatranju ravnog čistog savijanja grede.

Kako bi se izvela potpunija diferencijalna jednadžba savijanja Euler-Bernoullijeve grede (za slučaj kada nema uzdužne vanjske sile), u daljnjim razmatranjima podrazumijeva se da je materijal konstrukcije homogen i izotropan te da stoga težište ravnomjerno raspodijeljene mase poprečnog presjeka koincidira sa težištem njegove površine. Isto tako, usvaja se poopćena veza između  $\sigma_x$  i  $\varepsilon_x$  preko efektivnog sekantnog modula. Raspodjele rezultante unutrašnjih uzdužnih sila  $N(x)$  i njihovog momenta oko neutralne osi poprečnog presjeka i  $M_y(x)$  određene su sljedećim jednadžbama:

$$N(x) = \int_A \sigma_x(x, z) dA = \int_A E^* \varepsilon_x(x, z) dA = -E^* \int_A z \kappa dA = -E^* \kappa \int_A z dA = 0 \quad (3.37)$$

$$M_y(x) = \int_A z \sigma_x(x, z) dA = \int_A z E^* \varepsilon_x(x, z) dA = -E^* \kappa \int_A z^2 dA = -(EI_y)^* \kappa \quad (3.38)$$

gdje je  $(EI_y)^*$  efektivna savojna krutost razmatranog poprečnog presjeka grede.



Slika 3.9 Opterećenje diferencijalnog segmenta grede pri poprečnom savijanju.

Razmatranjem analitičkih uvjeta ravnoteže diferencijalnog segmenta grede (Slika 3.9) pri poprečnom svijanju grede dobivaju se sljedeće jednačbe:

$$\frac{\partial M_y(x)}{\partial x} = -Q_z(x) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial Q_z(x)}{\partial x} = -q_z(x) \quad (3.40)$$

pri čemu se eliminacijom poprečne sile, tj. uvrštavanjem (3.39) te (3.38) i (3.27) u (3.40), u konačnici dobiva (nelinearna) diferencijalna jednačba (četvrtog reda) savijanja Euler-Bernoullijeve grede:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (EI_y) * \frac{\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2}} \right] = -q_z(x) \quad (3.41)$$

Za razliku od linearizirane diferencijalne jednačdnadžbe savijanja Euler-Bernoullijeve grede koja se koristi u polaznoj metodi, integracijom (3.41) kao niti (3.38) ne može se dobiti analitičko rješenje, tj. odrediti funkcija raspodjele  $w_0(x)$  i/ili njena derivacija uz poznavanje rubnih uvjeta razmatranog problema. Međutim, to je u kontekstu ovoga rada nevažno, s obzirom da se inkrementalno-iterativnom metodom analize progresivnog kolapsa razmatra promjena momenta unutrašnjih uzdužnih sila određenog poprečnog presjeka konstrukcije s obzirom na predodređeni raspon vrijednosti fizikalne zakrivljenosti, koristeći pri tome (3.38).

### 3.3 Deplanacija poprečnih presjeka pri poprečnom ravnom savijanju

Kinematičke pretpostavke Euler-Bernoullijeve grede uzrokuju dvije značajne nekonzistentnosti u njenoj trodimenzionalnoj i/ili dvodimenzionalnoj formulaciji. Posljedica prve kinematičke pretpostavke je da su sve deformacije u ravnini poprečnog presjeka ( $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}=\gamma_{zy}$ ) jednake nuli, što radi Poissonovog efekta ne može biti točno. Isto tako, drugom i trećom kinematičkom pretpostavkom poništavaju se i sve kutne deformacije u ravninama vertikalnog i horizontalnog uzdužnog presjeka ( $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}, \gamma_{xz}=\gamma_{zx}$ ), čime se implicira da su i poprečne sile koje ih uzrokuju jednake nuli, što u slučaju poprečnog savijanja prema (3.39) nije točno. Izvjesno je da uzdužna raspodjela poprečnih sila (različita od nule) uvjetuje i postojanje pripadajućih raspodjela smičnih naprezanja i kutnih deformacija po sastavnim elementima razmatrane konstrukcije, pri čemu su te deformacije najvećeg intenziteta na poziciji neutralne osi, gdje su i smična naprezanja najveća, te opadaju prema gornjem i donjem pojasu tankostjene konstrukcije. Djelovanjem spomenutih smičnih efekata poprečnih sila poprečni presjeci postaju neravni – deplaniraju se, tj. njihove materijalne točke dobivaju dodatni (sekundarni) uzdužni (deplanacijski) pomak  $u_z(x, y, z)$ .

Ukoliko je raspodjela smične sile konstantna duž razmatrane monotone tankostjene konstrukcije, to prema (3.40) znači da na konstrukciju ne djeluje kontinuirano opterećenje, tj. da su raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka kvalitativno i kvantitativno jednake na svim njenim poprečnim presjecima. Stoga, u proizvoljnom sloju grede neće biti relativne promjene udaljenosti među materijalnim točkama susjednih poprečnih presjeka, tj. neće se pojaviti dodatna uzdužna duljinska deformacija. Međutim, ukoliko uzdužna raspodjela smične sile nije konstantna, što prema (3.40) znači da na konstrukciju djeluje kontinuirano opterećenje različito od nule, tada niti raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka neće biti iste za sve njene poprečne presjeke. Pri tome dolazi do relativne promjene udaljenosti među istoslojnim točkama susjednih poprečnih presjeka, što po definiciji predstavlja dodatnu uzdužnu duljinsku deformaciju uslijed deplanacije  $\varepsilon_{xW}$  (u daljnjem tekstu: uzdužna deplanacijska deformacija).

S tim u vezi, Slika 3.10 ilustrira relativnu promjenu uzdužne udaljenosti dvaju proizvoljnih materijalnih točaka  $T_1$  i  $T_2$  beskonačno bliskih presjeka  $S_1$  i  $S_2$  monotone tankostjene konstrukcije u rasterećenom stanju, pri čemu vrijedi:

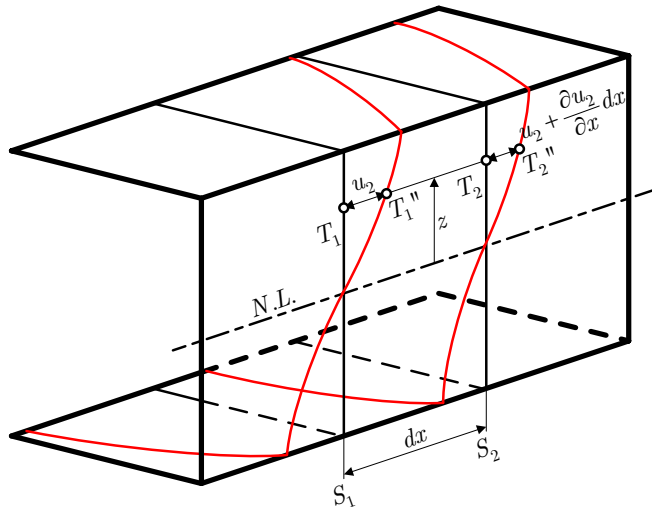
$$\overline{S_1 S_2} = \overline{T_1 T_2} = dx$$

Nadalje, relativna uzdužna udaljenost istih materijalnih točki nakon djelovanja raspodijeljenog (uzdužno promjenjivog) poprečnog (savojnog) opterećenja jest:

$$\overline{T_1'' T_2''} = dx + \left( u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} dx \right) - u_2 = dx + \frac{\partial u_2}{\partial x} dx$$

Pri tome, kako je već rečeno, uzdužna duljinska deformacija razmatranog vlakna ( $y$  koordinata) proizvoljnog sloja ( $z$  koordinata) tankostjenog grednog nosača predstavlja relativnu promjenu dužine  $T_1 T_2$  te se stoga može pisati:

$$\varepsilon_{xW}(x, y, z) = \frac{\overline{T_1'' T_2''} - \overline{T_1 T_2}}{\overline{T_1 T_2}} = \frac{dx + \frac{\partial u_2}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (3.42)$$



Slika 3.10 Raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka po rubnim presjecima diferencijalnog segmenta monotone tankostjene grede pri poprečnom savijanju.

Deplanacijom susjednih presjeka razmatranog uzdužnog diferencijalnog segmenta se njegovi elementarni (inicijalno pravokutni) dijelovi vitopere. Slika 3.11 prikazuje geometrijske odnose koji pri tome karakteriziraju proces deformiranja za proizvoljni diferencijalni element struka konstrukcije koju prikazuje Slika 3.10. Kako pri ovome načinu ravninskog deformiranja ne nastaje pomak u smjeru osi  $z$  ( $w_2 = 0$ ), to znači da su i komponente njegovog (ravninskog) gradijenta jednake nuli:

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} dx = \frac{\partial w_2}{\partial z} dz = 0$$

Stoga, ne nastaje poprečna (u smjeru osi  $z$ ) deplanacijska deformacija ( $\varepsilon_{zW} = 0$ ), uzdužna deplanacijska deformacija ima oblik prikazan u (3.42), dok je kutna (smična) deformacija  $\gamma_{xz}$ , tj. ukupna razlika kutova između susjednih bridova

elementarnog pravokutnika prije i poslije deformiranja jednaka kutu  $\chi_2$ , pri čemu vrijedi:

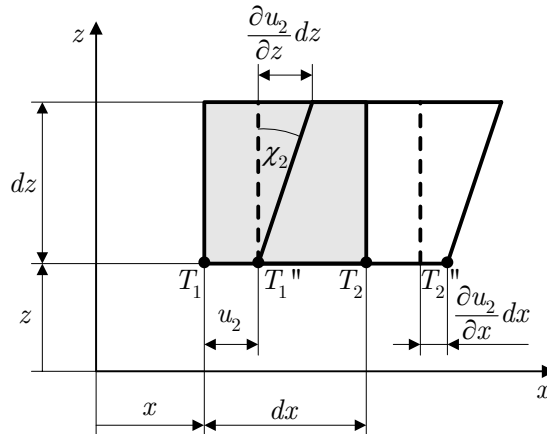
$$\tan \chi_2 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial z} dz}{dz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \chi_2 = \gamma_{xz} = \arctan\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$

Kako je intenzitet sekundarnih uzdužnih pomaka puno manji od intenziteta primarnih uzdužnih pomaka, razumno je za pretpostaviti da je i  $\chi_2$  vrlo maloga intenziteta, pri čemu vrijedi:  $\tan \chi_2 \approx \chi_2$ , tj. u konačnici se dobiva:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad (3.43)$$

Na isti način može se izvesti kutna deformacija za elemente konstrukcije koji leže u ravnini  $(x, y)$  (npr. donji i/ili gornji pojas konstrukcije koju prikazuje Slika 3.10), pri čemu se u konačnici dobiva:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \quad (3.44)$$



Slika 3.11 Geometrijski odnosi pri vitoperenju diferencijalnog pravokutnika.

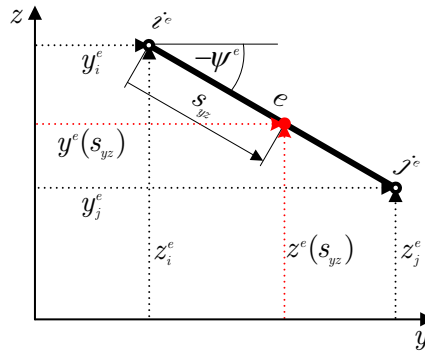
Kako je vidljivo iz (3.42), da bi se odredila raspodjela sekundarne uzdužne duljinske deformacije po razmatranom poprečnom presjeku potrebno je odrediti raspodjelu uzdužnih deplanacijskih pomaka, odnosno njenu parcijalnu derivaciju po  $x$ .

### 3.3.1 Određivanje raspodjele deplanacijskih uzdužnih pomaka

U [44] je prikazana numerička metoda zasnovana na energetskom pristupu linearno elastičnoj analizi odziva te diskretizaciji proizvoljnog (simetričnog ili



nesimetričnog) poprečnog presjeka složene tankostjene konstrukcije linijskim konačnim elementima, koja (između ostalog) omogućava određivanje (diskretne) raspodjele sekundarnih deplanacijskih uzdužnih pomaka poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije. Kako bi se obuhvatile sve relevantne teorijske osnove unaprjeđene inkrementalno-iterativne metode analize progresivnog kolapsa, u razmatranjima danim unutar ovoga odjeljka koristi se dio te metode relevantan za ovaj rad (savijanje) i to u obliku prilagođenom kontekstu i oznakama ovoga rada. Poprečni presjek razmatranog uzdužnog segmenta monotone tankostjene konstrukcije može se diskretizirati proizvoljnim brojem linijskih konačnih elemenata (dva čvora sa po jednim stupnjem slobode – uzdužnim deplanacijskim pomakom), pri čemu se uvodi i lokalni koordinatni sustav  $(x, s_{yz})$  za svaki element (Slika 3.12).



Slika 3.12 Globalni i lokalni koordinatni sustav za proizvoljni linijski konačni element.

Veza između globalnog koordinatnog sustava (s ishodištem u sjecištu neutralnih osi poprečnog presjeka) i lokalnog koordinatnog sustava proizvoljnog linijskog konačnog elementa  $e$ , može se odrediti pomoću:

$$\begin{aligned} y^e(s_{yz}) &= y_i^e + s_{yz} \cos \psi^e \\ z^e(s_{yz}) &= z_i^e + s_{yz} \sin \psi^e \end{aligned} \quad (3.45)$$

gdje je  $\psi^e$  prikloni kut koji proizvoljni element  $e$  zatvara s osi  $y$  (pozitivan ukoliko je otklon kuta usmjeren suprotno od kazaljke na satu).

Ukoliko se dodatno polje uzdužnih deplanacijskih pomaka  $u_z(x, y, z)$  [44] izrazi u lokalnom koordinatnom sustavu za svaki linijski konačni element (između prvog čvora  $i$  te drugog čvora  $j$ ) te ukoliko se pretpostavi da je te pomake moguće izraziti kao produkte vrijednosti funkcije  $f_z(x)$  (konstantna po diskretiziranom poprečnom presjeku, pa tako i po njegovom proizvoljnom elementu) i normiranog uzdužnog deplanacijskog pomaka (koji u tome slučaju ima dimenziju jedinice duljine

po jedinici sile), u [44] je pokazano i da je  $f_z(x) = Q_z(x)$  na segmentu  $\Delta x$ . Tada vrijedi:

$$\mathbf{u}_2^e(x, s_{yz}) = f_z(x) \bar{\mathbf{u}}_{2s}^e(s_{yz}) = Q_z(x) \bar{\mathbf{u}}_{2s}^e(s_{yz}) \quad (3.46)$$

Pri tome se normirani uzdužni deplanacijski pomak može izraziti preko odabranih (linearnih) funkcija oblika i čvornih pomaka:

$$\bar{\mathbf{u}}_{2s}^e(s_{yz}) = \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}}_2^e = \left\{ 1 - \frac{s_{yz}}{l^e} \quad \frac{s_{yz}}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{2i} \\ \bar{u}_{2j} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

gdje je  $l^e$  duljina linijskog konačnog elementa (u smjeru lokalne osi  $s_{yz}$ ). Kutne deformacije dane u (3.43) i (3.44) se za proizvoljno orijentirani linijski konačni element mogu izraziti s obzirom na lokalni koordinatni sustav:

$$\Upsilon_{xs}^e = \frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial s_{yz}} \quad (3.48)$$

Uvrštavanjem (3.46) u (3.48) te parcijalnim deriviranjem po  $s_{yz}$  dobiva se:

$$\Upsilon_{xs}^e = Q_z(x) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{2s}^e(s_{yz})}{\partial s_{yz}} \quad (3.49)$$

Uvrštavanjem (3.47) u (3.49) dobiva se u konačnici:

$$\Upsilon_{xs}^e = Q_z \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}_2^e \quad (3.50)$$

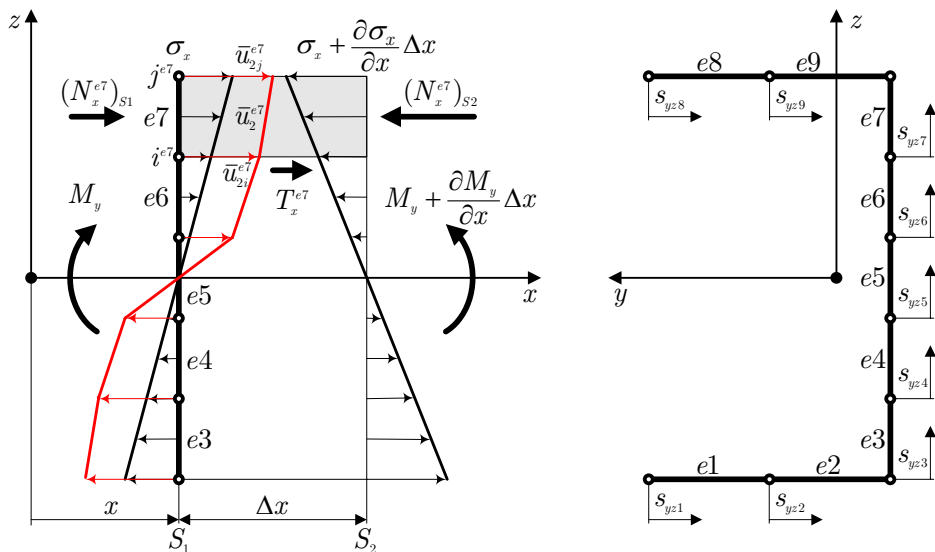
gdje je  $\mathbf{B}$  matrica deriviranih (po  $s_{yz}$ ) funkcija oblika:

$$\mathbf{B}^T = \left\{ -\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right\} \quad (3.51)$$

Prethodno je već spomenuto da pojava uzdužne deplanacijske deformacije ovisi o postojanju raspodjele kontinuiranog opterećenja duž razmatrane konstrukcije. Ukoliko ona postoji, znači da istovremeno postoje i uzdužne raspodjele poprečne sile i momenta savijanja koje nisu konstantne. U tome slučaju mora postojati i razlika među momentima savijanja na rubnim presjecima uzdužnog segmenta monotone tankostjene grede, što znači da su za ta dva presjeka i momentima uzrokovane raspodjele uzdužnih normalnih naprezanja kvantitativno drugačije<sup>2</sup> (Slika 3.13).

---

<sup>2</sup> Raspodjele naprezanja koje prikazuje Slika 3.13 u općem slučaju ne moraju biti linearne, s obzirom da je veza između naprezanja i deformacije formulirana preko efektivnog sekantnog modula.



Slika 3.13 Diskretizirani model poprečnog presjeka uzdužnog segmenta monotone tankostjene konstrukcije.

Prema (3.37), ukupna unutrašnja uzdužna sila na bilo kojem poprečnom presjeku jednaka je nuli, tj. za bilo koji poprečni presjek vrijedi da je suma pozitivnih uzdužnih sila (vlačne zone) jednaka sumi negativnih uzdužnih sila (tlačne zone). Međutim, različite raspodjele uzdužnih normalnih naprezanja (po susjednim presjecima) rezultiraju različitim uzdužnim silama sa prednje i stražnje strane svakog diskretnog dijela razmatranog segmenta (duljine  $\Delta x$  i površine poprečnog presjeka  $t^e t^e$ ; gdje je  $t^e$  debljina konačnog elementa koja odgovara lokalnoj debljini oplata konstrukcije). Pri tome nastala razlika uzdužnih sila lokalno se uravnotežava pojavom odgovarajuće uzdužne smične sile, dok pri razmatranju ukupne potencijalne energije svakog diskretnog volumena (konačnog elementa) predstavlja vanjsko opterećenje koja odgovara razlici uzdužnih normalnih naprezanja (Slika 3.13):

$$N_x^e = \sigma_x^e - \sigma_x^e - \frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} \Delta x$$

Izražavanjem uzdužnog normalnog naprezanja elementa preko uzdužne duljinske deformacije i efektivnog sekantnog modula, dobiva se:

$$N_x^e = -\frac{\partial}{\partial x} (E^{*e} \varepsilon_x^e) \Delta x$$

Nadalje, ukoliko se uzdužna duljinska deformacija elementa izrazi preko fizikalne zakrivljenosti prema (3.28), dobiva se:

$$N_x^e = \frac{\partial}{\partial x} (E^{*e} z^e \kappa) \Delta x$$

S obzirom da se prema (3.38) fizikalna zakrivljenost može izraziti preko momenta savijanja i efektivne savojne krutosti razmatranog presjeka, dobiva se:

$$N_x^e = \frac{\partial}{\partial x} \left[ E^{*e} z^e \frac{M_y(x)}{(EI_y)^*} \right] \Delta x$$

što se nakon parcijalne derivacije po  $x$  i uvrštavanjem (3.39) može prikazati u sljedećem obliku:

$$N_x^e = \frac{z^e}{(EI_y)^*} Q_z E^{*e} \Delta x \quad (3.52)$$

Pri tome treba napomenuti da se (3.39) uvrštava s pozitivnim predznakom, s obzirom da je negativan predznak uzdužne duljinske deformacije elementa, radi kojega je i (3.39) negativan, već uzet u obzir. Izrazi li se ukupna potencijalna energija proizvoljnog konačnog elementa kao razlika unutrašnje energije i rada vanjskih sila za razmatrani problem, općenito vrijedi:

$$\Pi^e = U^e - W^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_{xs}^{eT} \boldsymbol{\gamma}_{xs}^e dV - \int_{S^e} N_x^e \mathbf{u}_{2s}^e dS \quad (3.53)$$

Izražavanjem smičnih naprezanja (jednoliko raspodijeljenih po debljini  $t^e$  konačnog elementa – hipoteza Žuravskog) za proizvoljni konačni element kao produkta efektivnog modula smicanja elementa i njegove kutne deformacije te uvrštavanjem (3.47) u (3.53) dobiva se:

$$\Pi^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} (G^{*e} \boldsymbol{\gamma}_{xs}^e)^T \boldsymbol{\gamma}_{xs}^e dV - t^e Q_z \int_{\Gamma^e} N_x^e \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \mathbf{N} ds_{yz}$$

što uvrštavanjem (3.50) prelazi u:

$$\Pi^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} (G^{*e} Q_z \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}_2^e)^T Q_z \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}_2^e dV - t^e Q_z \int_{\Gamma^e} N_x^e \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \mathbf{N} ds_{yz}$$

Uvrštavanjem (3.52) te daljnjim sređivanjem dobiva se:

$$\Pi^e = Q_z^2 G^{*e} t^e \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \int_{\Gamma^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} ds_{yz} \bar{\mathbf{u}}_2^e \Delta x - \frac{Q_z^2 E^{*e} t^e}{(EI_y)^*} \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \int_{\Gamma^e} z^e \mathbf{N} ds_{yz} \Delta x \quad (3.54)$$

S obzirom da  $\mathbf{B}$  prema (3.51) sadrži samo konstantne članove, neovisne o  $s_{yz}$ , vrijedi:

$$\int_{l^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} ds_{yz} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \int_0^{l^e} ds_{yz} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} l^e = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

te se dio produkta koji predstavlja umanjjenik u (3.54) može se prepoznati kao matrica krutosti konačnog elementa za razmatrani problem:

$$\mathbf{K}^e = G^{*e} t^e \int_{l^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} ds_{yz} = \frac{G^{*e} t^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Sa druge strane, izrazi li se  $z^e$  u umanjitelju iz (3.54) preko (3.45), pomnoži sa  $\mathbf{N}$  te ukoliko se rezultirajući produkt integrira po duljini elementa, integral u umanjitelju iz (3.54) postaje:

$$\int_{l^e} z^e \mathbf{N} ds_{yz} = \left\{ \begin{array}{c} z_i^e l^e + \frac{(l^e)^2 \sin \psi^e}{6} \\ z_i^e l^e + \frac{(l^e)^2 \sin \psi^e}{3} \end{array} \right\}$$

pri čemu se dio produkta umanjitelja u (3.54) može prepoznati kao vektor opterećenja elementa za razmatrani problem:

$$\mathbf{F}_z^e = Q_z \bar{\mathbf{F}}_z^e = Q_z \frac{E^{*e} t^e}{(EI_y)^*} \left\{ \begin{array}{c} z_i^e l^e + \frac{(l^e)^2 \sin \psi^e}{6} \\ z_i^e l^e + \frac{(l^e)^2 \sin \psi^e}{3} \end{array} \right\} \quad (3.56)$$

Uvrštavanjem (3.55) i (3.56) u (3.54) dobiva se:

$$\Pi^e = Q_z^2 \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{u}}_2^e \Delta x - Q_z^2 \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \bar{\mathbf{F}}_z^e \Delta x$$

U konačnici se dobiva izraz za ukupnu potencijalnu energiju proizvoljnog konačnog elementa za razmatrani problem:

$$\Pi^e = Q_z^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{u}}_2^e - \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \bar{\mathbf{F}}_z^e \right) \Delta x$$

Ukupna potencijalna energija diskretiziranog sustava od  $n$  elemenata dobiva se sumiranjem doprinosa svih konačnih elemenata:

$$\Pi = \sum_n \Pi^e = Q_z^2 \sum_n \left( \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{u}}_2^e - \bar{\mathbf{u}}_2^{eT} \bar{\mathbf{F}}_z^e \right) \Delta x$$

Provedbom sumiranja po svim elementima i formiranjem globalne matrice krutosti te globalnih vektora pomaka i opterećenja može se pisati:

$$\Pi = Q_z^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{u}}_2^T \bar{\mathbf{F}}_z \right) \Delta x$$

Minimizacijom ukupne potencijalne energije dobiva se sustav od onoliko jednadžbi koliko ima nepoznatih čvornih pomaka:

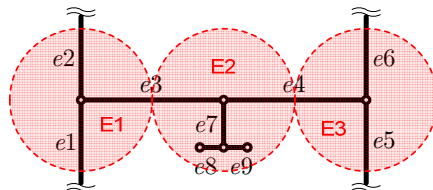
$$\delta \Pi_{\bar{\mathbf{u}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{F}}_z \quad (3.57)$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (3.57) određuje se globalni vektor čvornih uzdužnih deplanacijskih pomaka normiranih jediničnom poprečnom silom. Da bi se odredilo stvarno polje (čvornih) deplanacijskih uzdužnih pomaka na razmatranom poprečnom presjeku, potrebno je pomnožiti izračunati vektor pomaka s intenzitetom poprečne sile koja djeluje na poziciji razmatranog poprečnog presjeka:

$$\mathbf{u}_2 = Q_z(x) \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (3.58)$$

Pri tome je važno naglasiti da na ovaj način određeni pomaci predstavljaju zapravo relativne pomake s obzirom na proizvoljni čvor u kojemu je spriječen uzdužni pomak (rubni uvjeti pomaka), što se mora uzeti u obzir ukoliko se njima želi nadopuniti ukupno polje uzdužnih pomaka  $u(x, y, z)$ , prethodno definirano u (3.10). Međutim, u okviru ovoga rada uzdužni deplanacijski pomaci koriste se isključivo za određivanje korigirane raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija po poprečnom presjeku razmatrane tankostjene konstrukcije, pri čemu nije potrebno odrediti apsolutne sekundarne pomake niti potpuno polje uzdužnih pomaka.

S obzirom da se u okviru ovoga odjeljka koristi drugačiji diskretizirani model poprečnog presjeka u odnosu na onaj kojega podrazumijeva polazna metoda, neophodno je definirati njihov međuodnos. Slika 3.14 ilustrira isječak iz poprečnog presjeka uzdužnog segmenta hipotetske tankostjene konstrukcije diskretiziran sa devet linijskih konačnih elemenata ( $e1 - e9$ ). Taj isti dio presjeka se sukladno pravilima diskretizacije polazne metode (poglavlje 2.2) dijeli na tri diskretna sastavna elementa, tj. dva kruta kuta ( $E1$  i  $E3$ ) i jednu gredu tankostjenog presjeka ( $E2$ ). Pri tome se može uočiti da element  $E1$  obuhvaća elemente  $e1, e2$  i  $e3$ ; element  $E2$  obuhvaća elemente  $e3, e4, e7, e8$  i  $e9$ ; dok element  $E3$  obuhvaća elemente  $e4, e5$  i  $e6$ .



Slika 3.14 Međuodnos diskretnih sastavnih elemenata i linijskih konačnih elemenata.

S obzirom da je u kontekstu predložene metode potrebno jednoznačno odrediti vrijednosti uzdužnih deplanacijskih pomaka na razini svakog pojedinog diskretnog sastavnog elementa, uzdužni deplanacijski pomaci izračunati u čvorovima linijskih konačnih elemenata obuhvaćenih proizvoljnim diskretnim sastavnim elementom se uprosječuju (s obzirom na ukupnu površinu poprečnog presjeka svih obuhvaćenih elemenata):

$$\bar{u}_2^E = \frac{\sum_e \left[ \frac{(\bar{u}_{2i} + \bar{u}_{2j})^e}{2} A^e \right]}{\sum_e A^e} \quad (3.59)$$

Smično naprezanje (konstantno) za proizvoljni linijski konačni element može se uz korištenje (3.50) i (3.51) odrediti na sljedeći način:

$$\tau_{xs}^e = G^{*e} \boldsymbol{\gamma}_{xs}^e = G^{*e} Q_z \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{u}}_2^e = G^{*e} Q_z \left\{ -\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{2i} \\ \bar{u}_{2j} \end{Bmatrix} = G^{*e} Q_z \frac{\bar{u}_{2j} - \bar{u}_{2i}}{l^e} \quad (3.60)$$

Pri određivanju smičnih naprezanja za proizvoljni diskretni sastavni element se vrijednosti svih obuhvaćenih linijskih konačnih elemenata ne uprosječuju već se među njima odabire apsolutno najveća vrijednost:

$$\tau_A^E = \text{MAX} \left[ G^{*e} \frac{(\bar{u}_{2j} - \bar{u}_{2i})^e}{l^e} \right] Q_z \quad (3.61)$$

### 3.3.2 Određivanje korigirane raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija

Korekcija raspodjele primarnih uzdužnih duljinskih deformacija može se provesti na osnovu teorije Lockwood-Taylora [46], koja je u okviru ovoga rada formulirana u diskretnom obliku na razini kinematičkih odzivnih karakteristika, tj. uzdužnih duljinskih deformacija i fizikalne zakrivljenosti te uklopljena u kontekst razmatranog problema.

Polje (sekundarnih) uzdužnih deplanacijskih deformacija može se odrediti na osnovu intenziteta kontinuiranog opterećenja i inicijalnog polja deplanacijskih uzdužnih pomaka (određenih unutar odjeljka 3.3.1) za razmatrani poprečni presjek konstrukcije.

Uvrštavanjem (3.46) u (3.42) može se uzdužna deplanacijska deformacija izraziti u diskretnom obliku (za proizvoljni linijski konačni element) [44]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{xW}^e(x, s_{yz}) = \frac{\partial \mathbf{u}_2^e(x, s_{yz})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [Q_z(x) \cdot \bar{\mathbf{u}}_{2s}^e(s_{yz})] = \frac{\partial Q_z(x)}{\partial x} \bar{\mathbf{u}}_{2s}^e(s_{yz}) \quad (3.62)$$

Uvrštavanjem (3.40) i (3.47) u (3.62) u konačnici se dobiva:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xW}^e = -q_z \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}}_2^e \quad (3.63)$$

pri čemu su deformacije u čvorovima  $i$  i  $j$  linijskog konačnog elementa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xWi}^e = -q_z \bar{u}_{2i} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{xWj}^e = -q_z \bar{u}_{2j} \quad (3.64)$$

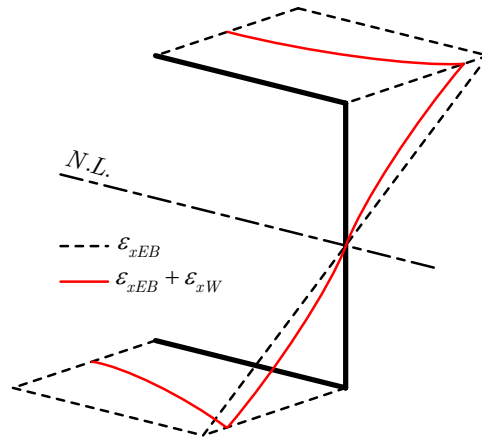
ili za proizvoljni linijski konačni element:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xW} = -q_z(x) \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (3.65)$$

Za proizvoljni diskretni sastavni element razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije vrijedi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xW}^E = -q_z(x) \bar{u}_2^E \quad (3.66)$$

Objedinjavanje polja deformacija iz (3.65) i raspodjele primarnih uzdužnih duljinskih deformacija  $\boldsymbol{\varepsilon}_{xEB}$ , određene razmatranjem savijanja Euler-Bernoulijeve grede prema (3.28), rezultira raspodjelom koju kvalitativno prikazuje Slika 3.15.



Slika 3.15 Kvalitativna raspodjela korigiranih uzdužnih duljinskih deformacija po neuravnoteženom poprečnom presjeku razmatrane tankostjene konstrukcije.

Pri tome se može uočiti da se intenzitet deformacija smanjio, a sukladno tome i intenzitet pripadajućih im uzdužnih normalnih naprezanja. S obzirom da su time smanjene i unutarnje uzdužne sile, suma njihovih doprinosa momentu unutarnjih uzdužnih sila više neće biti u ravnoteži s momentom savijanja na razmatranom presjeku te će se povećati fizikalna zakrivljenost i progib/pregib konstrukcije kako bi se uspostavilo ravnotežno stanje. Spomenuti manjak momenta unutarnjih uzdužnih sila s obzirom na ravnotežno stanje može se odrediti sumiranjem



doprinosu momentu  $M_{yC}$  unutarnjih rezidualnih sila  $F_C^E$  svih diskretnih sastavnih elemenata razmatranog uzdužnog segmenta:

$$M_{yC} = \sum_E F_C^E z^E$$

Izražavanjem  $F_C^E$  kao produkta deplanacijskog uzdužnog normalnog naprezanja i površine poprečnog presjeka diskretnog sastavnog elementa dobiva se:

$$M_{yC} = \sum_E A^E \sigma_{xW}^E z^E$$

što se daljnjim izražavanjem deplanacijskog uzdužnog normalnog naprezanja preko pripadajuće deplanacijske uzdužne deformacije i efektivnog sekantnog modula diskretnog sastavnog elementa može prikazati u sljedećem obliku:

$$M_{yC} = \sum_E A^E E^{*E} \varepsilon_{xW}^E z^E$$

Uzimajući u obzir (3.66), u konačnici vrijedi:

$$M_{yC} = q_z \sum_E -A^E E^{*E} \bar{u}_2^E z^E \quad (3.67)$$

Sa druge strane,  $M_{yC}$  se prema (3.38) može izraziti kao produkt prethodno spomenute dodatne fizikalne zakrivljenosti  $\kappa_C$  (u daljnjem tekstu: korektivna fizikalna zakrivljenost) i efektivne savojne krutosti razmatranog poprečnog presjeka [45]:

$$M_{yC} = -(EI_y)^* \kappa_C \quad (3.68)$$

Uvrštavanjem (3.67) u (3.68) korektivna fizikalna zakrivljenost koja odgovara manjku momenta unutarnjih uzdužnih sila može se izraziti na sljedeći način:

$$\kappa_C = -\frac{M_{yC}}{(EI_y)^*} = \frac{q_z}{(EI_y)^*} \sum_E A^E E^{*E} \bar{u}_2^E z^E \quad (3.69)$$

Ukupna fizikalna zakrivljenost, koja vrijedi za stanje ravnoteže, može se izraziti kao suma fizikalne zakrivljenosti proizašle iz razmatranja savijanja Euler-Bernoullijeve grede  $\kappa$  i korektivne fizikalne zakrivljenosti  $\kappa_C$ :

$$\kappa_T = \kappa + \kappa_C \quad (3.70)$$

Sa druge strane,  $\kappa_T$  se može odrediti i prema (3.38):

$$\kappa_T = -\frac{M_y}{(EI_y)^*} \quad (3.71)$$

Izjednačavanjem (3.70) i (3.71) te uvrštavanjem (3.69) dobiva se:

$$-\frac{M_y}{(EI_y)^*} = \kappa + \frac{q_z}{(EI_y)^*} \sum_E A^E E^{*E} \bar{u}_2^E z^E$$

što nakon množenja s  $(EI_y)^*$  prelazi u:

$$-M_y = (EI_y)^* \kappa + q_z \sum_E A^E E^{*E} \bar{u}_2^E z^E \quad (3.72)$$

U konačnici se efektivna savojna krutost za razmatrani poprečni presjek može direktno izraziti iz (3.72):

$$(EI_y)^* = -\frac{M_y + q_z \sum_E A^E E^{*E} \bar{u}_2^E z^E}{\kappa} \quad (3.73)$$

Pretpostavi li se da su nekorrigirana i korektivna fizikalna zakrivljenost kinematički analogne, tj. da je i raspodjela dodatnih uzdužnih duljinskih deformacija uzrokovana korektivnom fizikalnom zakrivljenošću linearna, tada vrijedi analogija sa (3.28):

$$\varepsilon_C = -z\kappa_C \quad (3.74)$$

što se za proizvoljni diskretni sastavni element razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije može prikazati u sljedećem obliku:

$$\varepsilon_C^E = -z^E \kappa_C \quad (3.75)$$

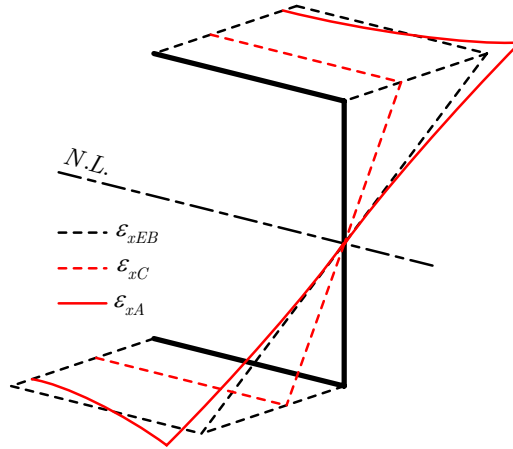
U konačnici, ukupna i krajnja raspodjela korigiranih uzdužnih duljinskih deformacija koja vrijedi za uravnoteženi poprečni presjek razmatrane tankostjene konstrukcije (Slika 3.16) može se odrediti [45] objedinjavanjem (3.28), (3.65) i (3.74):

$$\varepsilon_{xA} = \varepsilon_{EB} + \varepsilon_C + \varepsilon_{xW} = -z(\kappa_{EB} + \kappa_C) - q_z \bar{u}_2 \quad (3.76)$$

što se za proizvoljni diskretni sastavni element razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije može prikazati na sličan način:

$$\varepsilon_{xA}^E = \varepsilon_{EB}^E + \varepsilon_C^E + \varepsilon_{xW}^E = -z^E(\kappa_{EB} + \kappa_C) - q_z \bar{u}_2^E \quad (3.77)$$

U konačnici je važno napomenuti da opisani pristup određivanju korigiranih uzdužnih duljinskih deformacija predstavlja prvi korak iterativnog rješenja razmatranog problema.



Slika 3.16 Kvalitativna raspodjela korigiranih uzdužnih duljinskih deformacija po uravnoteženom poprečnom presjeku razmatrane tankostjene konstrukcije.

### 3.4 Smična nosivost ravne oplate

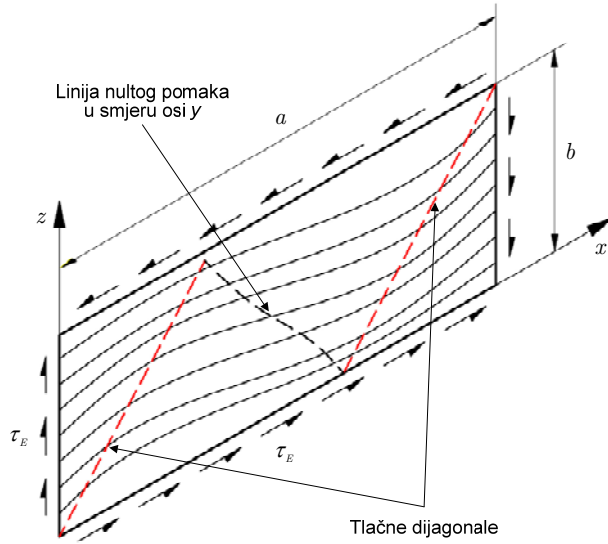
Kako je u prethodnom poglavlju pokazano da deplanacija poprečnih presjeka pri poprečnom savijanju rezultira pojavom smičnih deformacija i naprezanja, nameće se potreba za definiranjem smične (granične) nosivosti sastavnih elemenata tankostjenih konstrukcija. Kako su sve postojeće formulacije smične granične nosivosti u pravilu polu-empirijskog oblika te se većinom zasnivaju na korekciji kritičnog smičnog naprezanja pri elastičnom smičnom izvijanju, u nastavku ovoga poglavlja ukratko se razmatraju relevantni aspekti elastičnog smičnog izvijanja ravne oplate, a potom i postojeće formulacije smične granične nosivosti.

#### 3.4.1 Elastično smično izvijanje ravne oplate

Razmatra se tankostjena, ravna, izotropna ploča duljine  $a$ , širine  $b$  i debljine  $t$ , oslonjena i ravninski opterećena duž sva četiri ruba po kojima dolazi do pojave isključivo jednoliko raspodijeljenih smičnih naprezanja (Slika 3.17).

Ukoliko su pri tome geometrijske i materijalne karakteristike razmatrane ploče te intenzitet narinutog opterećenja takvi da pri kritičnom intenzitetu smičnih naprezanja dolazi do elastičnog izvijanja, novonastalo ravnotežno stanje ploče opisano je sljedećom diferencijalnom jednačbom [47]:

$$\left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \right) = - \frac{2\tau_E t}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (3.78)$$



Slika 3.17 Smično izvijanje zglobno oslonjene ploče.

gdje je  $\tau_E$  kritično smično naprezanje pri elastičnom smičnom izvijanju, a  $D$  savojna krutost razmatrane ploče:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.79)$$

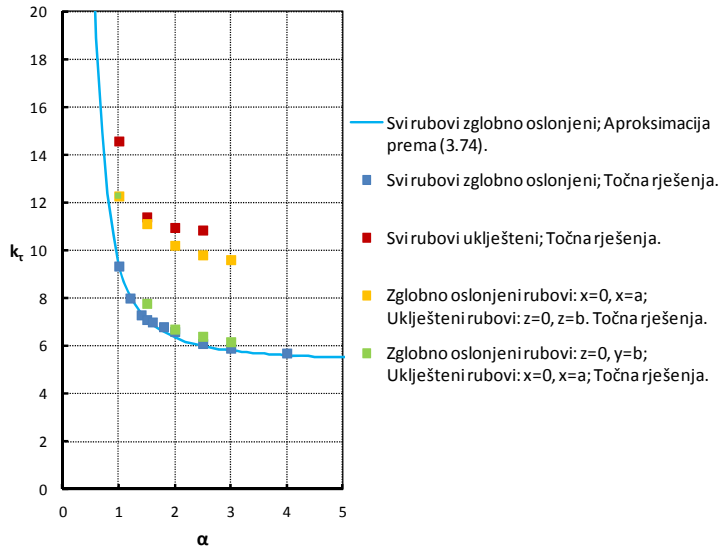
Iako oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe (3.78) onemogućava iznalaženje analitičkih rješenja, njena numerička rješenja [48] sugeriraju pojavu (polu)valova izvijanja (raspodjele pomaka izvan vlastite ravnine ploče) duž tlačnih dijagonala ploče (Slika 3.17). Pri tome njihov oblik ovisi o vlačnim silama koje se pojavljuju duž suprotno usmjerenih vlačnih dijagonala ploče, dok je njihov broj proporcionalan aspektnom odnosu  $a$  ploče. Numeričko rješenje za kritično smično naprezanje pri tome ima sljedeći oblik:

$$\tau_E = k_\tau \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = k_\tau \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (3.80)$$

gdje je  $k_\tau$  koeficijent elastičnog smičnog izvijanja aproksimiran sljedećom jednadžbom za slučaj zglobno oslonjene ploče:

$$k_\tau = \begin{cases} 5.35 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 & \text{za } \alpha \geq 1 \\ 5.35\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4 & \text{za } \alpha < 1 \end{cases} \quad (3.81)$$

Prema (3.81)  $k_\tau$  ovisi isključivo o aspektnom odnosu ploče, dok točne vrijednosti  $k_\tau$  za pojedine slučajeve različitih aspektnih odnosa i rubnih uvjeta pomaka ploče prikazuje Slika 3.18 na temelju podataka iz [48] i [49].

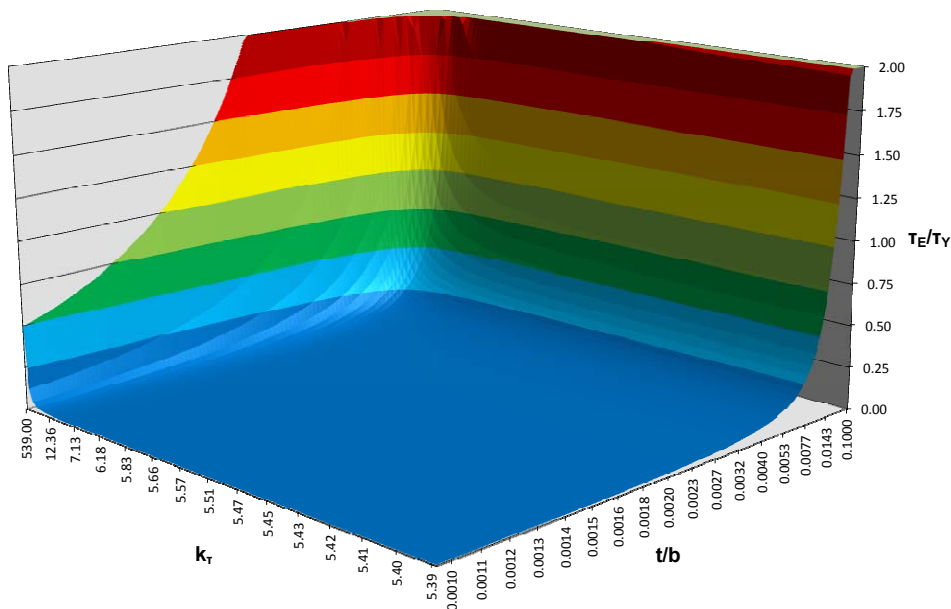


Slika 3.18 Ovisnost koeficijenta elastičnog smičnog izvijanja o aspektnom odnosu ploče za različite rubne uvjete pomaka.

Prema (3.80) kritično smično naprezanje za dani materijal ploče ovisi o njenim geometrijskim karakteristikama  $t/b$  i  $a$  te Slika 3.19 ilustrira tu ovisnost za ploču jedinične širine  $b$  pri širokom rasponu vrijednosti  $t/b$  i  $k_\tau$  prema (3.81) (koji odgovara rasponu vrijednosti  $a$  od 0.1 do 10). Pri tome je  $\tau_E$  prikazan normiran ekvivalentnom smičnom granicom popuštanja  $\tau_Y$ , koja se prema teoriji najveće distorzijske energije pri višeosnom stanju naprezanja ili HMH (Huber-Mises-Hencky) uvjetu popuštanja za slučaj čistog smičnog ravninskog naprezanja, može odrediti prema:

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (3.82)$$

Slika 3.19, tj. jednadžba (3.80) sugerira da se za zadani izotropni materijal ploče kritično smično naprezanje može povećati na dva različita načina: smanjenjem aspektnog odnosa  $i$ /ili povećanjem omjera  $t/b$ . Smanjenje aspektnog odnosa može se postići horizontalnom podjelom razmatrane ploče na manje i jednake sastavne cjeline dodavanjem (ekvidistantnih) poprečnih ukrepa (paralelnih s osi  $z$ ), čime omjer  $t/b$  ostaje isti.

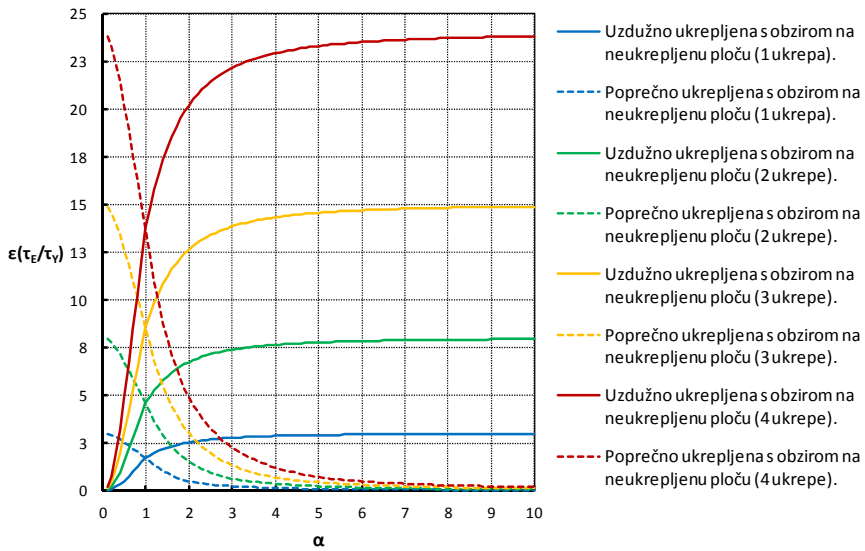


Slika 3.19 Kritično smično naprezanje za različite geometrijske karakteristike zglobno oslonjene izotropne ploče ( $E = 205\,800\text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\sigma_y = 352.8\text{ N/mm}^2$ ).

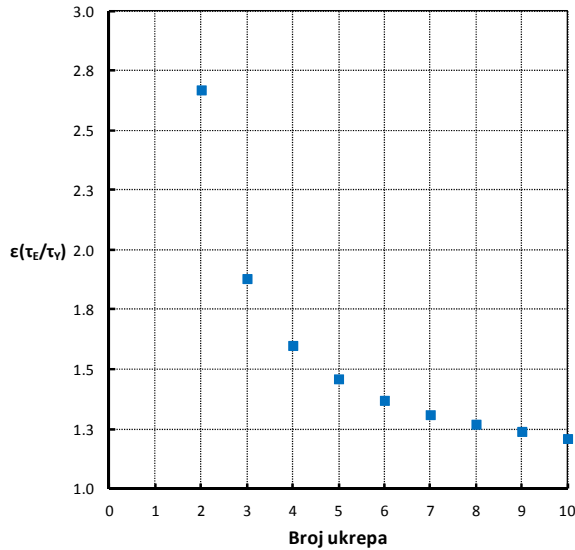
Sa druge strane, povećanje omjera  $t/b$  može se postići povećanjem debljine ploče i/ili vertikalnom podjelom razmatrane ploče na manje i jednake sastavne cjeline dodavanjem (ekvidistantnih) uzdužnih ukrepa (paralelnih s osi  $x$ ), pri čemu raste i aspektni odnos novonastalih dijelova što donekle umanjuje pozitivni učinak ovoga pristupa.

S obzirom da postoji više različitih načina povećanja otpornosti razmatrane ploče ka smičnom izvijanju, nameće se logično pitanje: koji je među njima najefikasniji, tj. kako postići najveći prirast kritičnog smičnog naprezanja uz najmanji utrošak dodatnog materijala? S tim u vezi, Slika 3.20 prikazuje relativno povećanje kritičnog smičnog naprezanja uzdužno i/ili poprečno ukrepljene ploče ukupne jedinične širine  $b$  u odnosu na neukrepljenu ploču istih geometrijskih i materijalnih karakteristika pri različitim aspektnim odnosima i za različit broj dodanih ukrepa. Pri tome je važno napomenuti da prikazani dijagram kvalitativno i kvantitativno vrijedi za proizvoljnu debljinu ploče, tj. omjer  $t/b$ . Općenito se da zaključiti da je u slučaju  $a < 1$  bolje poprečno ukrepljivanje, dok je u slučaju  $a > 1$  bolje uzdužno ukrepljivanje, pri čemu inverzne parove aspektnog odnosa karakterizira isti rezultat (npr. dodavanjem jedne poprečne ukrepe ploči aspektnog odnosa  $a = 0.5$  ili dodavanjem jedne uzdužne ukrepe ploči aspektnog odnosa  $a = 2$  relativno povećanje kritičnog naprezanja iznosi 2.53). Najmanji prirast kritičnog naprezanja je u slučaju aspektnog

odnosa  $a = 1$ , koji ujedno predstavlja i granični slučaj za koji uzdužno i poprečno ukrepljivanje daju isti rezultat.



Slika 3.20 Relativno povećanje kritičnog smičnog naprezanja uzdužnim i/ili poprečnim ekvidistantnim ukrepljivanjem ploča različitog aspektnog odnosa.



Slika 3.21 Relativno smanjenje (relativnog) prirasta kritičnog smičnog naprezanja s obzirom na prethodni broj ekvidistantnih ukrepa.

Ukrepljivanjem se mogu postići višestruka i vrlo značajna povećanja kritičnog smičnog naprezanja (naročito u slučaju vrlo malih i vrlo velikih aspektnih odnosa neukrepljene ploče). Međutim, pri povećavanju broja ukrepa se sa svakom dodatnom ukrepom smanjuje relativni prirast kritičnog smičnog naprezanja u odnosu na onaj postignut s prethodnim brojem ukrepa, što ilustrira Slika 3.21 koja kvalitativno i kvantitativno vrijedi za proizvoljni aspektni odnos ploče ukrepljene svrsishodnijim načinom.

Vrlo je važno konstatirati da će pozitivni efekti ukrepljivanja biti ostvareni samo ukoliko je pri kritičnom smičnom opterećenju izvjesna pojava smičnog izvijanja oplata između ukrepa (u daljnjem tekstu: lokalno smično izvijanje) a ne ukrepljenog panela u cjelini (u daljnjem tekstu: globalno smično izvijanje). Ostvarivost toga uvjeta ovisi o savojnoj krutosti ukrepa koja mora biti dostatna za odupiranje (polu)valovima izvijanja koji ih pri dijagonalnom rasprostiranju po ukrepljenom panelu opterećuju pretežno savojno. Prema [50] se kritično smično naprezanje ukrepljenog panela pri elastičnom smičnom izvijanju  $\tau_E^P$  može odrediti na sljedeći način:

$$\tau_E^P = k_\tau^P \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (3.83)$$

Jednadžba (3.83) vrijedi unutar raspona  $1 \leq a \leq 5$  aspektnih odnosa oplata između ukrepa, a  $k_\tau^P$  predstavlja koeficijent elastičnog smičnog izvijanja razmatranog ukrepljenog panela te se određuje prema:

$$k_\tau^P = \begin{cases} 5.35 + (5.5\alpha^2 - 0.6)\sqrt[3]{\frac{\xi}{4(7\alpha^2 - 5)}} & \text{za } 0 \leq \xi \leq 4(7\alpha^2 - 5) \\ 4.74 + 5.5\alpha^2 & \text{za } \xi > 4(7\alpha^2 - 5) \end{cases} \quad (3.84)$$

gdje je  $\xi$  bezdimenzijski parametar koji predstavlja omjer savojne krutosti ukrepe sa sunosivom širinom oplata i savojne krutosti oplata između ukrepa, pri čemu je sunosiva širina oplata ukrepe jednaka širini oplata između ukrepa:

$$\xi = \frac{EI^E}{bD} \quad (3.85)$$

Moment inercije monotone ukrepe sa sunosivom širinom  $I^E$  oko relevantne glavne osi inercije može se u slučaju poprečnog presjeka ukrepe u obliku I-profila, T-profila ili L-profila izračunati po definiciji prema:

$$I^E = \frac{bt^3}{12} + bt\left(\eta - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t_w h_w^3}{12} + t_w h_w \left(\eta - t - \frac{h_w}{2}\right)^2 + \frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left(t + h_w + \frac{t_f}{2} - \eta\right)^2$$



gdje je:

$$\eta = \frac{\frac{bt^2}{2} + t_w h_w \left( t + \frac{h_w}{2} \right) + b_f t_f \left( t + h_w + \frac{t_f}{2} \right)}{bt + t_w h_w + b_f t_f}$$

Prethodno spomenuti kriterij osiguranja lokalnog smičnog izvijanja može se izraziti preko međuodnosa kritičnog smičnog naprezanja ukrepljenog panela i kritičnog smičnog naprezanja (jednakih) dijelova oplata između ukrepa, tj. ukoliko je:

$$\tau_E^P > \tau_E \quad (3.86)$$

izvjesna je pojava lokalnog smičnog izvijanja prije globalnog smičnog izvijanja ukrepljenog panela. Stoga, uvrštavanjem (3.80) i (3.83) u (3.86) dobiva se:

$$k_\tau^P \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{a} \right)^2 > k_\tau \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2$$

što se nakon kraćenja i sređivanja svodi na međuodnos koeficijenata elastičnog smičnog izvijanja, pri čemu je faktor proporcionalnosti kvadrat aspektnog odnosa oplata između ukrepa:

$$k_\tau^P > \alpha^2 k_\tau \quad (3.87)$$

S obzirom da je  $k_\tau$  prema (3.81) jednoznačno definiran za čitavo područje definicije (3.83) te da prema (3.84) definicija  $k_\tau^P$  ovisi o iznosu  $\xi$ , nejednadžbu (3.87) potrebno je izraziti za dva područja definicije  $k_\tau^P$ . Isto tako, uvrštavanjem (3.79) u (3.85),  $\xi$  se može nakon kraćenja Youngova modula elastičnosti prikazati u sljedećem obliku:

$$\xi = \frac{I^E(1-\nu^2)}{\frac{bt^3}{12}}$$

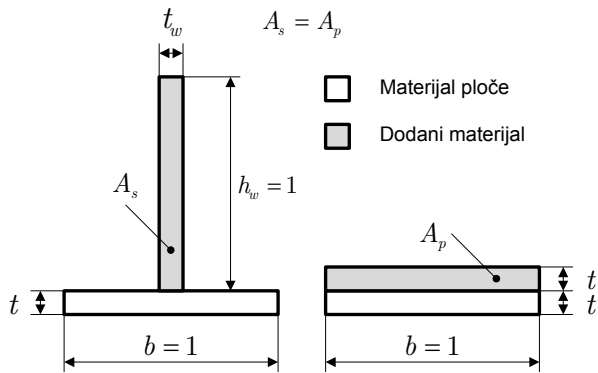
pri čemu nazivnik predstavlja moment inercije oplata između ukrepa  $I^b$  oko svoje (relevantne) glavne osi inercije te se može pisati:

$$\xi = \frac{I^E}{I^b}(1-\nu^2) \quad (3.88)$$

Uvrštavanjem (3.81), (3.84) te (3.88) u (3.87) kriterij osiguranja lokalnog smičnog izvijanja svodi se na uvjetovanje međuodnosa momenta inercije ukrepe sa sunosivom širinom oplata i momenta inercije oplata između ukrepa za razmatrani



U konačnici preostaje razmotriti mogućnost povećanja kritičnog smičnog naprezanja povećanjem debljine ploče te usporediti time rezultirajuće povećanje smične nosivosti s onim koje se može postići ukrepljivanjem za jednak utrošak materijala. Pri tome se kao mjera količine utrošenog materijala koristi površina poprečnog presjeka istog. Iako pri uzdužnom ukrepljivanju oplata aspektnog odnosa  $a$  svi omjeri  $I^E/I^b$  veći od onog propisanog u (3.89) omogućavaju zadovoljavanje uvjeta lokalnog smičnog izvijanja, očito je da se najmanji utrošak materijala postiže upravo u slučaju minimalnog dozvoljenog omjera  $I^E/I^b$ . Isto tako, očito je da će najmanju površinu poprečnog presjeka za zadani  $I^E$  imati ukrepa u obliku I-profila bez pojasa (eng. *flatbar*). Stoga će se usporedba efikasnosti ukrepljivanja i podebljavanja oplata jednakom količinom materijala provesti za slučaj ukrepe u obliku I-profila bez pojasa kojom se za zadanu površinu poprečnog presjeka, tj. količinu dodanog materijala, doseže minimalno zahtijevani omjer  $I^E/I^b$  (Slika 3.23).



Slika 3.23 Dodavanje iste količine materijala ukrepljivanjem i podebljavanjem ploče.

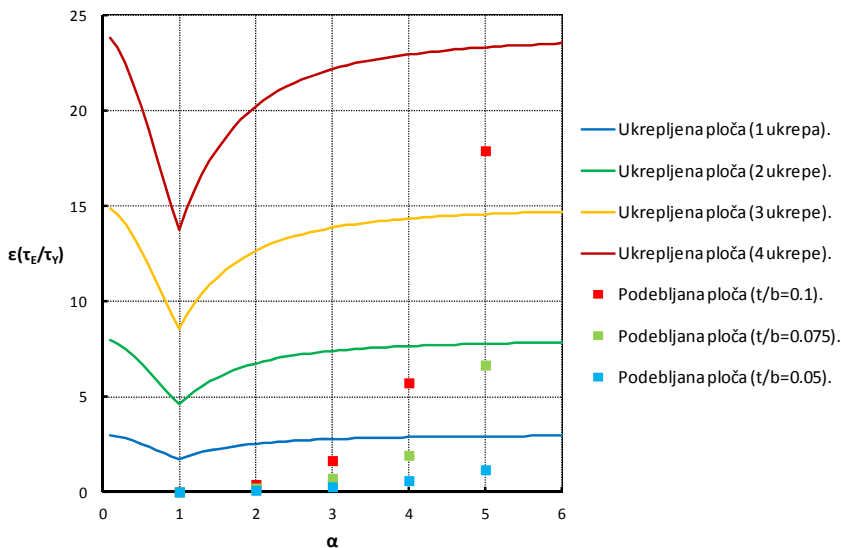
Nadalje, površina poprečnog presjeka dodanog materijala pri podebljavanju (jedinične širine) oplata između ukrepa jednoznačno je određena debljinom dodanog materijala  $t'$ , dok se ta ista površina može se postići s proizvoljnim brojem različitih parova vrijednosti  $t_w$  i  $h_w$  (kojima je određena površina poprečnog presjeka ukrepe) uz zadovoljenje uvjeta iz (3.89). Među njima će se odabrati ono rješenje koje odgovara ukrepi jediničnog iznosa visine struka  $h_w = 1$  (što implicira i  $t' = t_w$ ), pri čemu se rezultirajuća debljina struka  $t_w$  može odrediti na osnovu jednakosti vrijednosti  $I^E$  zahtijevane prema (3.89) i izračunate po definiciji:

$$I^E = f(\alpha) \frac{t^3}{12} = \frac{t^3}{12} + t \left( \eta - \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{t_w}{12} + t_w \left( \eta - t - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.91)$$

gdje je  $f(\alpha)$  vrijednost omjera  $I^E/I^b$  za razmatrani aspektni odnos oplata prema (3.89), a  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\frac{t^2}{2} + tt_w + \frac{t_w}{2}}{t + t_w}$$

S obzirom da u (3.91) nije moguće separirati  $t_w$ , vrijednost širine struka se mora odrediti iterativno. Slika 3.24 prikazuje relativno povećanje kritičnog smičnog naprezanja podebljane i ukrepljene (s različitim brojem ukrepa) ploče (aspektnog odnosa  $a$ ) u odnosu na neukrepljenu i nepodebljanu ploču. Prikazane krivulje vezano za ukrepljivanje vrijede za proizvoljni omjer  $t/b$ , dok se petnaest prikazanih rješenja (određenih bisekcijom) vezano uz podebljavanje odnosi na pet različitih aspektnih odnosa  $a$  i tri različita omjera  $t/b$ . Pri tome se općenito može uočiti da je u slučaju tanjih ploča ( $t/b \ll 0.05$ ) podebljavanjem nemoguće dostići pozitivne efekte ukrepljivanja s jednom uzdužnom ukrepom. Tek se u slučaju vrlo debelih ploča ( $t/b > 0.05$ ) situacija mijenja u korist podebljavanja, međutim, ti su rezultati samo teorijske naravi s obzirom da su pri tome izračunate vrijednosti kritičnog smičnog naprezanja višestruko veće od ekvivalentne smične granice popuštanja, što fizikalno nije moguće postići. Stoga je moguće u konačnici zaključiti da se povećanje smične nosivosti ploče uvijek najefikasnije postiže ukrepljivanjem, uz uvjet da je zadovoljen kriterij lokalnog izvijanja.



Slika 3.24 Relativno povećanje kritičnog smičnog naprezanja ukrepljivanjem i podebljavanjem oplate.

### 3.4.2 Granična smična nosivost ravne oplata

U prethodnom odjeljku razmatrano je elastično smično izvijanje ploče te načini njegovog odgađanja sukladno mogućnostima koje teorijski opis te pojave pruža. Međutim, pojava elastičnog smičnog izvijanja duž tlačnih dijagonala ne predstavlja granično stanje nosivosti smično opterećene ploče. U slučaju debljih ploča prije izvijanja dolazi do lokalnog popuštanja tlačno opterećenog materijala, dok kod tanjih ploča i nakon elastičnog izvijanja uvijek postoji poslije-kritična rezerva smične nosivosti zahvaljujući vlačnim dijagonalnim poljima koja u oba slučaja nastaju duž vlačnih dijagonala (koje se križaju sa tlačnim dijagonalama). Pri tome dolazi do preraspodjele opterećenja na način da vlačna naprezanja unutar vlačnih dijagonalnih polja rastu, dok istovremeno tlačna naprezanja unutar tlačnih dijagonalnih polja ostaju gotovo nepromijenjena. Detaljniji opis pojave i učinka vlačnih dijagonalnih polja smično opterećene ploče može se naći u [7], [22], [47] i [51].

Granično stanje nosivosti razmatrane ploče doseže se potpunim iscrpljivanjem nosivosti spomenutih vlačnih polja, tj. potpunom plastifikacijom (popuštanjem) vlačno opterećenog materijala ploče. S obzirom da vrlo složeno međudjelovanje svih pri tome relevantnih parametara onemogućava točan i potpun teorijski opis pojave kolapsa smično opterećene ploče, postojeće formulacije zasnivaju se na poluempirijskim izrazima dobivenim većinom na osnovu rezultata numeričkih simulacija. U ostatku ovoga odjeljka ukratko će se opisati nekoliko postojećih formulacija granične nosivosti smično opterećene ploče  $\tau_U$  koje se mogu upotrijebiti u unaprijedenoj analizi progresivnog kolapsa tankostjenih konstrukcija te će se prikazati njima dobiveni rezultati za različite slučajeve debljina i aspektnih odnosa ploče.

Na osnovu projektnih krivulja razvijenih za potrebe zrakoplovne industrije predložena je sljedeća formulacija [52] (u daljnjem tekstu: formulacija  $\tau_U1$ ):

$$\frac{\tau_U}{\tau_Y} = \frac{0.415}{\eta} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\tau_{cr}}{\tau_Y}} \right) + \left( 1 - \frac{1}{\eta} \right) \frac{\tau_{cr}}{\tau_Y} \quad \text{za} \quad 1 \leq \frac{\tau_U}{\tau_{cr}} \leq 4 \quad (3.92)$$

gdje je  $\tau_{cr}$  ekvivalentno kritično smično naprezanje ploče pri elastičnom smičnom izvijanju, definirano na sljedeći način:

$$\tau_{cr} = \begin{cases} (1 - \xi)\tau_Y & \text{za} \quad \frac{\tau_Y}{\tau_E} < 0.33 \\ (1 - \xi) \left[ 1 - 0.68 \left( \sqrt{\frac{\tau_Y}{\tau_E}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \tau_Y & \text{za} \quad 0.33 \leq \frac{\tau_Y}{\tau_E} \leq 1.25 \\ (1 - \xi)\tau_E & \text{za} \quad \frac{\tau_Y}{\tau_E} > 1.25 \end{cases}$$

Pri tome  $\eta$  predstavlja pomoćni bezdimenzijski koeficijent, definiran na sljedeći način:

$$\eta = \begin{cases} \left(0.5 + \frac{0.5}{\alpha^2}\right)^{0.25} & \text{za } 1 \leq \alpha \leq 3 \\ 1.5 & \text{za } \alpha > 3 \end{cases}$$

dok  $\xi$  predstavlja također pomoćni bezdimenzijski koeficijent, definiran na sljedeći način:

$$\xi = \begin{cases} 0.15 & \text{za } \alpha \geq 2 \\ 0.15(\alpha - 1) & \text{za } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases}$$

Regresijskom analizom rezultata dobivenih numeričkim analizama pomoću NLMKE, predložena je sljedeća formulacija [53] (u daljnjem tekstu: formulacija  $\tau_U2$ ):

$$\frac{\tau_U}{\tau_Y} = \left(\frac{0.486}{\xi}\right)^{1/3} \quad \text{za } 0.486 \leq \xi \leq 2 \quad (3.93)$$

gdje je  $\xi$  pomoćni bezdimenzijski koeficijent, definiran na sljedeći način:

$$\xi = \sqrt{\frac{\tau_Y}{\tau_E}}$$

U okviru norme [54] predlaže se sljedeća formulacija (u daljnjem tekstu: formulacija  $\tau_U3$ ):

$$\frac{\tau_U}{\tau_Y} = \begin{cases} 1 & \text{za } \xi \leq 0.8 \\ 1 - 0.625(\xi - 0.8) & \text{za } 0.8 < \xi \leq 1.2 \\ 0.9/\xi & \text{za } \xi \geq 1.2 \end{cases} \quad (3.94)$$

gdje je  $\xi$  pomoćni bezdimenzijski koeficijent, definiran na sljedeći način:

$$\xi = \sqrt{\frac{\tau_Y}{\tau_E}}$$

Regresijskom analizom rezultata dobivenih numeričkim analizama pomoću NLMKE, predložena je sljedeća formulacija [22] (u daljnjem tekstu: formulacija  $\tau_U4$ ):

$$\frac{\tau_U}{\tau_Y} = \begin{cases} 1.324 \frac{\tau_E}{\tau_Y} & \text{za } 0 < \frac{\tau_E}{\tau_Y} \leq 0.5 \\ 0.039 \left( \frac{\tau_E}{\tau_Y} \right)^3 - 0.274 \left( \frac{\tau_E}{\tau_Y} \right)^2 + 0.676 \frac{\tau_E}{\tau_Y} + 0.388 & \text{za } 0.5 < \frac{\tau_E}{\tau_Y} \leq 2 \\ 0.956 & \text{za } \frac{\tau_E}{\tau_Y} > 2 \end{cases} \quad (3.95)$$

Sljedeća formulacija [55] (u daljnjem tekstu: formulacija  $\tau_{v5}$ ) ima oblik:

$$\frac{\tau_U}{\tau_Y} = \begin{cases} 1 & \text{za } \xi < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\xi}} - \frac{1}{\xi} & \text{za } \xi \geq 1 \end{cases} \quad (3.96)$$

gdje je  $\xi$  pomoćni bezdimenzijski koeficijent, definiran na sljedeći način:

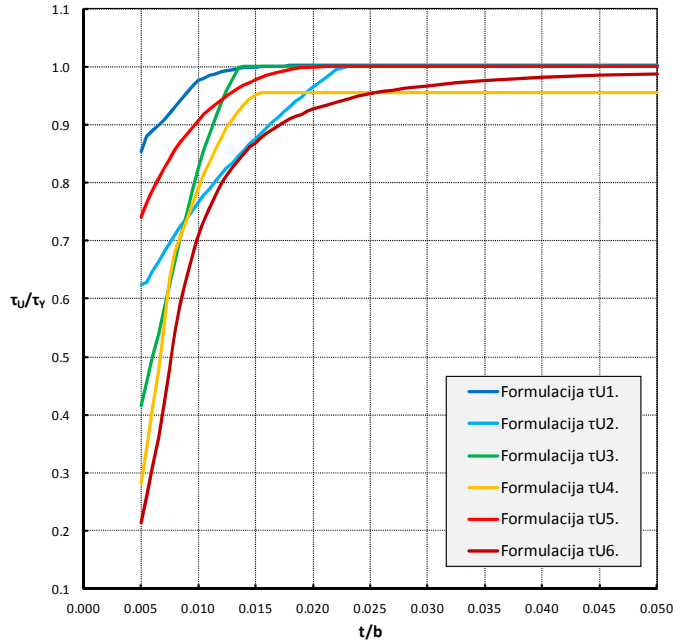
$$\xi = \frac{\beta}{1 + \sqrt{\left( \frac{b}{a} \right)^3}}$$

U konačnici, Johnson-Ostenfeldovom korekcijom (elastičnog) kritičnog smičnog naprezanja za utjecaj plastičnosti dobiva se posljednja među prikazanim formulacijama [23] (u daljnjem tekstu: formulacija  $\tau_{v6}$ ):

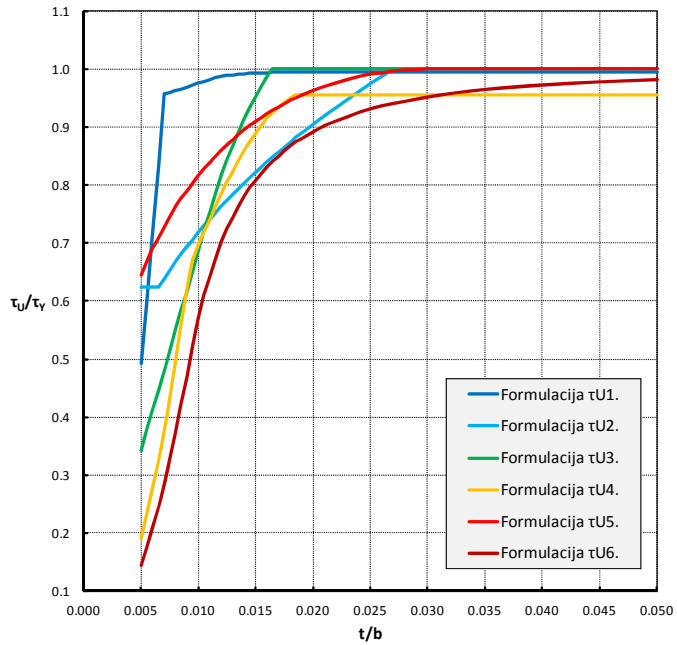
$$\frac{\tau_U}{\tau_Y} = \begin{cases} \frac{\tau_E}{\tau_Y} & \text{za } \frac{\tau_E}{\tau_Y} \leq 0.5 \\ 1 - \frac{\tau_E}{4\tau_Y} & \text{za } \frac{\tau_E}{\tau_Y} > 0.5 \end{cases} \quad (3.97)$$

Kroz narednih pet slika prikazani su rezultati gore spomenutih formulacija granične smične nosivosti u obliku ovisnosti graničnog smičnog naprezanja normiranog ekvivalentnom smičnom granicom popuštanja o debljini normiranoj širinom ploče ( $t/b = 0.005 \div 0.05$ ) za pet različitih cjelobrojnih aspektnih odnosa ( $a = 1 \div 5$ ) ploče izotropnog materijala ( $E = 205\,800 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\sigma_Y = 352.8 \text{ N/mm}^2$ ).

Općenito su uočljiva sve značajnija odstupanja rezultata različitih formulacija smanjenjem razmatrane debljine ploče za sve aspektne odnose. Odstupanja rezultata u slučaju tankih ploča se u manjoj mjeri smanjuju što je aspektni odnos razmatrane ploče veći, dok su rezultati relativno ujednačeni za sve razmatrane aspektne odnose u slučaju debljih ploča.

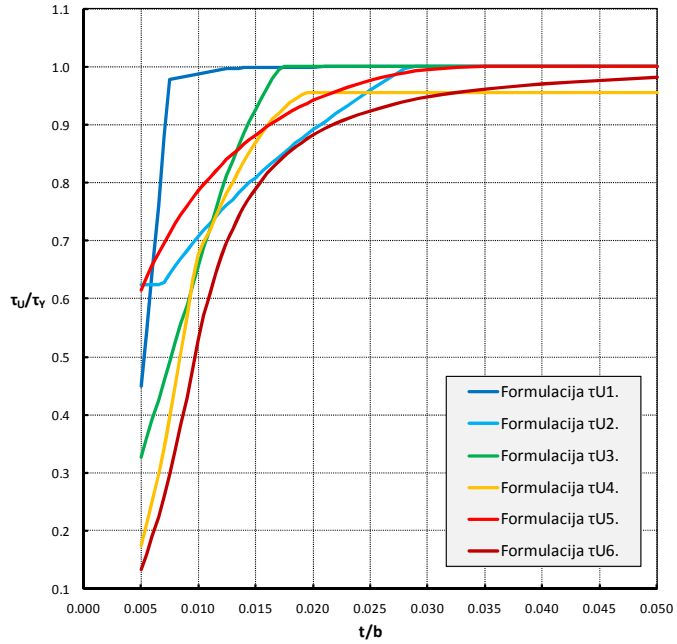


Slika 3.25 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa  $a = 1$ .

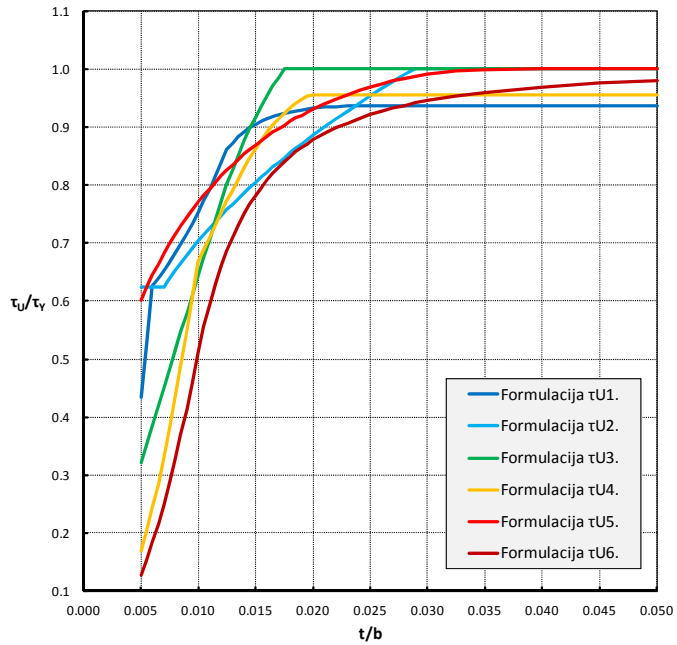


Slika 3.26 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa  $a = 2$ .

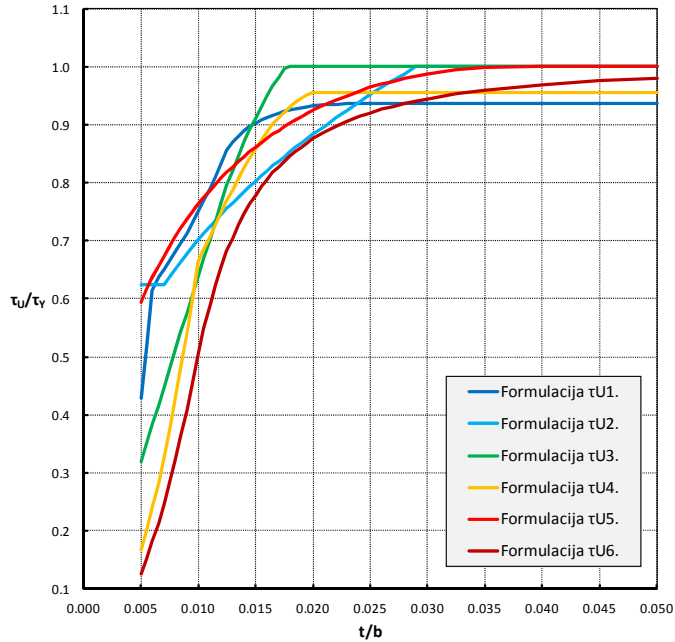




Slika 3.27 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa  $a = 3$ .



Slika 3.28 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa  $a = 4$ .



Slika 3.29 Ovisnost različitih formulacija (normirane) granične smične nosivosti o (normiranoj) debljini ploče aspektnog odnosa  $a = 5$ .

### 3.5 Utjecaj (granične) smične nosivosti na uzdužnu (graničnu) nosivost

U polaznoj metodi analize progresivnog kolapsa (granična) razina nosivosti svakog diskretnog sastavnog elementa razmatrane konstrukcije određena je preko relevantnih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja formuliranih razmatranjem isključivo uzdužnog opterećenja elementa.

Međutim, kako je pokazano da se pri proizvoljnoj razini opterećenja prilikom poprečnog savijanja konstrukcije pojavom deplanacije uvijek u nekoj mjeri mijenja razina uzdužne nosivosti svih elemenata (kod jednih se povećava, dok se kod drugih smanjuje) te da pri tome istovremeno na sve elemente djeluje i dodatno smično opterećenje, nameće se potreba za preformuliranjem (granične) razine nosivosti svakog elementa konstrukcije obuhvaćajući pri tome sve relevantne efekte uzdužnog i smičnog opterećenja. Kako su pri tome ukupni efekti uzdužnog opterećenja dominantnog intenziteta u odnosu na efekte smičnog opterećenja, u kontekstu ovoga rada usvaja se opis njihovog međudjelovanja u obliku korekcije formulacije uzdužne nosivosti sastavnih elemenata konstrukcije.

S tim u vezi, pri istovremenom djelovanju jednoosnog (uzdužnog) i smičnog opterećenja na razmatrani element se prema [22], [47], [51] i [56] može koristiti aproksimativna eliptična interakcijska formulacija sljedećeg oblika:

$$\left(\frac{\sigma_{xAUC}}{\sigma_{xAU}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_A}{\tau_U}\right)^2 = 1 \quad (3.98)$$

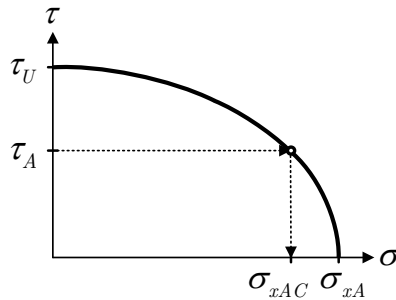
gdje je  $\tau_A$  prosječno smično naprezanje elementa za razinu (globalnog) savojnog opterećenja konstrukcije pri kojoj razmatrani element doseže nekorigirano granično prosječno normalno naprezanje  $\sigma_{xAU}$ .  $\tau_U$  predstavlja granično smično naprezanje elementa, dok je  $\sigma_{xAUC}$  korigirano granično prosječno normalno naprezanje razmatranog elementa. Ako se (3.98) generalizira za proizvoljnu razinu nosivosti razmatranog elementa konstrukcije, tada vrijedi:

$$\left(\frac{\sigma_{xAC}}{\sigma_{xA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_A}{\tau_U}\right)^2 = 1 \quad (3.99)$$

gdje je  $\sigma_{xA}$  nekorigirani iznos prosječnog normalnog naprezanja elementa za proizvoljnu razinu savojnog opterećenja konstrukcije (uslijed koje se u elementu javlja i odgovarajuća vrijednost  $\tau_A$ ), dok je  $\sigma_{xAC}$  korigirano prosječno normalno naprezanja elementa (pri toj istoj razini savojnog opterećenja konstrukcije). Izrazi li se u (3.99)  $\sigma_{xAC}$  eksplicitno, dobiva se:

$$\sigma_{xAC} = \sigma_{xA} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_A}{\tau_U}\right)^2} = \sigma_{xA} K_r \quad (3.100)$$

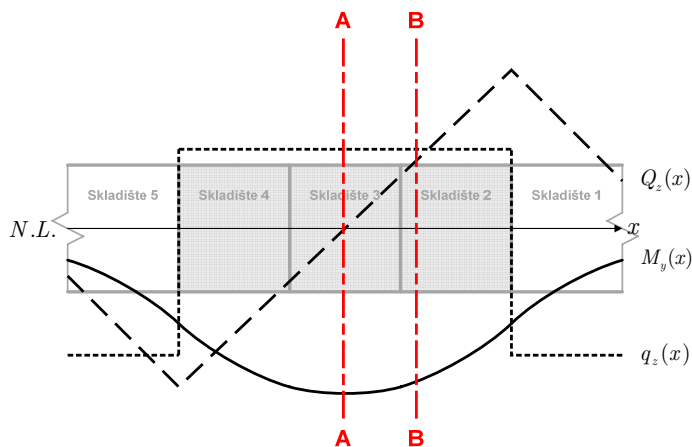
gdje je  $K_r$  koeficijent utjecaja smične na uzdužnu nosivost razmatranog elementa konstrukcije čije je područje definicije  $K_r \in [0, 1]$ . Može se uočiti da će se korekcijom prema (3.100) vrijednost prosječnog normalnog naprezanja uvijek umanjivati ukoliko postoje smična naprezanja. U slučaju najveće moguće vrijednosti smičnog naprezanja ( $\tau_A = \tau_U$ ), tj. kada je dosegnuta granična smična nosivost elementa,  $K_r$  poprima nultu vrijednost pri čemu se u potpunosti anulira i uzdužna nosivost. U slučaju kada smičnih naprezanja nema,  $K_r$  poprima jediničnu vrijednost, tj. uzdužna nosivost ostaje nekorigirana. Korekciju prema (3.100) ilustrira Slika 3.30.



Slika 3.30 Geometrijski prikaz korekcije prema (3.100).

U kontekstu predložene metode analize progresivnog kolapsa se korekcija prema (3.100) može shvatiti kao korekcija „izlaza“ relevantne  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za proizvoljni diskretni sastavni element razmatranog uzdužnog segmenta MTK. Isto tako, potrebno je korigirati i „ulaz“ u krivulju, tj. uzdužnu duljinsku deformaciju, prema (3.77). U svrhu detaljnijeg opisa cjelokupnog procesa korekcije uzdužne nosivosti diskretnih sastavnih elemenata proizvoljnog uzdužnog segmenta MTK poslužit će sljedeći primjer.

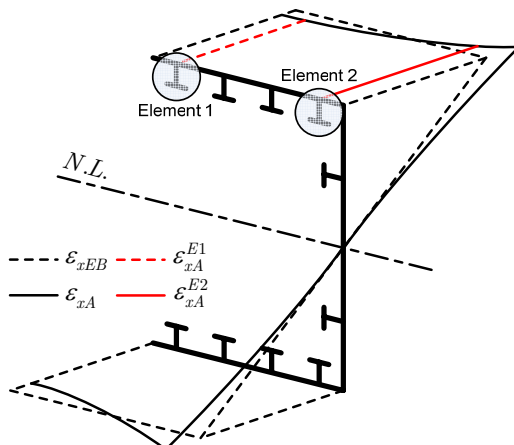
Slika 3.31 prikazuje isječak kvalitativne raspodjele poprečnog opterećenja za jedan od mogućih načina smještaja tereta unutar za to predviđenih skladišta hipotetske MTK. Razmatraju se dva karakteristična poprečna presjeka unutar dva različita uzdužna segmenta između poprečnih okvirnih nosača (rebara), pri čemu njihovu geometriju kvalitativno ilustrira Slika 3.32<sup>3</sup>. U slučaju da se konstrukcija prilikom poprečnog savijanja progiba, uzdužno najopterećeniji dijelovi konstrukcije su njen gornji (tlačno opterećen) i donji (vlačno opterećen) pojas, dok će u stanju pregiba vrijediti obrat.



Slika 3.31 Kvalitativna raspodjela poprečnog opterećenja dijela trupa MTK.

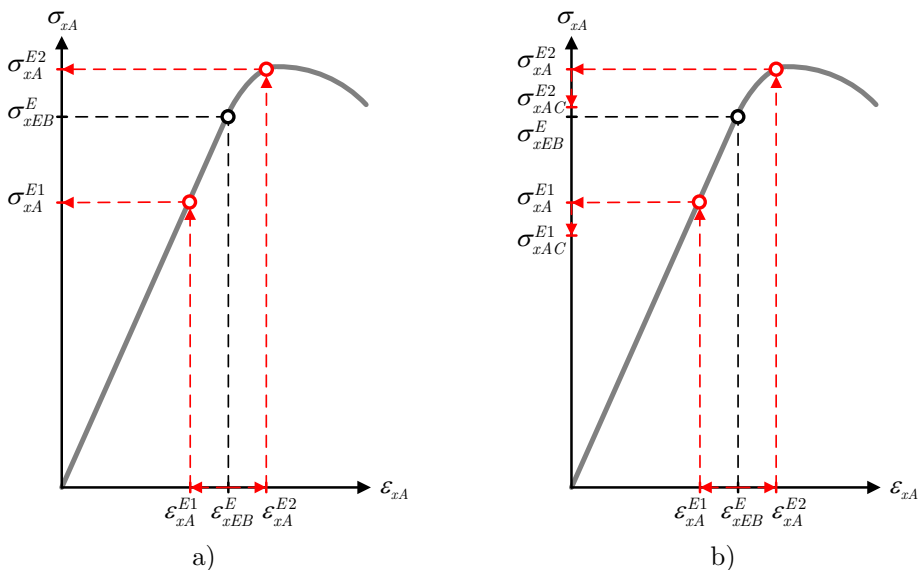
S obzirom da na poziciji presjeka A – A djeluje najveći moment savijanja ( $M_{y(A-A)} = M_{max}$ ), poprečna je sila jednaka nuli ( $Q_{z(A-A)} = 0$ ), tj. nema pojave smičnih naprezanja, a time niti potrebe za korekcijom prema (3.100).

<sup>3</sup> Radi jednostavnosti razmatranja pretpostavlja se da su poprečni presjeci A-A i B-B identičnih geometrijskih i materijalnih karakteristika, iako to u kontekstu polazne i predložene metode nije nužno. Međutim, nužno je zadovoljiti uvjet monotonijske geometrijskih i materijalnih karakteristika unutar razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije.



Slika 3.32 Kvalitativna raspodjela prosječne uzdužne duljinske deformacije po razmatranom poprečnom presjeku pri poprečnom savijanju MTK.

Međutim, kako isti presjek karakterizira intenzitet kontinuiranog opterećenja različit od nule ( $q_{z(A-A)} \neq 0$ ), potrebno je korigirati raspodjelu uzdužnih duljinskih deformacija prema (3.77). Pri tome, Slika 3.32 prikazuje dva karakteristična diskretna sastavna elementa (istih geometrijskih i materijalnih karakteristika) gornjeg pojasa. Njihova razina nosivosti pri narinutom opterećenju određena je relevantnom  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljom, koju kvalitativno prikazuje Slika 3.33a.



Slika 3.33 Kvalitativni prikaz korekcije uzdužne nosivosti diskretnih sastavnih elemenata  $E1$  i  $E2$ : a) presjek A – A; b) presjek B – B.

U kontekstu polazne metode bi oba elementa karakterizirala identična razina nosivosti  $\sigma_{xEB}^E$  s obzirom da su identičnih geometrijskih i materijalnih karakteristika te da su težišta njihovih poprečnih presjeka na istoj udaljenosti od relevantne neutralne linije poprečnog presjeka cijele konstrukcije. Međutim, u kontekstu predložene metode elemente  $E1$  i  $E2$  karakterizira različita vrijednost uzdužne duljinske deformacije  $\varepsilon_{xA}^{E1}$  i  $\varepsilon_{xA}^{E2}$ , a sukladno tome i različita vrijednost prosječnog normalnog naprezanja  $\sigma_{xA}^{E1}$  i  $\sigma_{xA}^{E2}$ .

Na poziciji presjeka B – B djeluje moment savijanja još uvijek značajne vrijednosti ( $M_{y(B-B)} \gg 0$ ), poprečna sila nezanemarivog intenziteta ( $Q_{z(B-B)} \gg 0$ ) te kontinuirano opterećenje jednake vrijednosti kao u prethodno razmatranom slučaju ( $q_{z(B-B)} \neq 0$ ). S obzirom da pri tome dolazi do pojave smičnih naprezanja, osim korekcije uzdužnih duljinskih deformacija prema (3.77) potrebno je korigirati i prosječna normalna naprezanja svakog diskretnog sastavnog elementa prema (3.100). Kvalitativni prikaz provedbe spomenutih korekcija (s obzirom na relevantnu  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulju) za elemente  $E1$  i  $E2$  ilustrira Slika 3.33b. Jednako kao i u prethodnom slučaju, u kontekstu polazne metode bi oba elementa karakterizirala ista razina nosivosti  $\sigma_{xEB}^E$ , dok u kontekstu predložene metode razmatrane elemente karakteriziraju međusobno različite razine nosivosti pri istoj razini opterećenja konstrukcije.

Stoga, oba razmatrana slučaja upućuju na zaključak da pri progresivnom povećavanju razine savojnog opterećenja konstrukcije prilikom provedbe analize uzdužne granične nosivosti predloženom metodom, razmatrani elementi neće dosegnuti svoje granično stanje nosivosti istovremeno. Poopće li se razmatranja u tom smislu i na sve ostale sastavne elemente razmatranog uzdužnog segmenta MTK, nameće se općeniti zaključak da kolapsne sekvence određene polaznom i predloženom metodom mogu biti različite, tj da načini preraspodjele opterećenja pri progresivnom gubitku nosivosti sastavnih elemenata presjeka prema polaznoj i predloženoj metodi ne moraju biti isti. Jednako tako, vrijednosti uzdužne nosivosti svih sastavnih elemenata presjeka određene primjenom polazne i predložene metode biti će različite pri svim razmatranim razinama savojnog opterećenja konstrukcije. A s obzirom da je uzdužna granična nosivost razmatrane konstrukcije ništa drugo do svojevrstna suma doprinosa individualnih dijelova njenog kritičnog uzdužnog segmenta i rezultirajući iznos graničnog momenta savijanja će u općem slučaju biti različit u odnosu na onaj određen polaznom metodom.

### 3.6 Predložena metoda analize progresivnog kolapsa

Teorijske osnove prikazane kroz prethodna poglavlja ove glave objedinjene su u okviru predložene metode analize progresivnog kolapsa MTK, koja (uz poznavanje geometrijskih i materijalnih karakteristika razmatranog poprečnog presjeka)

podrazumijeva i poznavanje uzdužnih raspodjela poprečnog opterećenja  $M_y(x)$ ,  $Q_z(x)$  i  $q_z(x)$ , tj. njihovih vrijednosti na poziciji poprečnog presjeka razmatranog uzdužnog segmenta konstrukcije, što je fundamentalna razlika u odnosu na polaznu metodu. Njihove vrijednosti potrebno je poznavati jer eksplicitno ili implicitno figuriraju u svim izrazima relevantnim za korekciju uzdužne nosivosti. Isto tako, s obzirom da se pri analizi progresivnog kolapsa razmatraju različite razine intenziteta svijanja, korisno je definirati omjere između  $M_y(x)$ ,  $Q_z(x)$  i  $q_z(x)$  koji tokom iteriranja i inkrementiranja ostaju konstantni te na osnovu kojih se u svakom trenutku za određeni  $M_y$  može odrediti odgovarajući  $Q_z$  i/ili  $q_z$ :

$$R_{MQ}^{CS} = \frac{M_y(x)}{Q_z(x)} \quad i \quad R_{Mq}^{CS} = \frac{M_y(x)}{q_z(x)} \quad (3.101)$$

Iako se predložena metoda konceptualno zasniva na polaznoj metodi, uklapanje svih prethodno razmatranih aspekata korekcije uzdužne (granične) nosivosti zahtjeva značajnije nadopune i proširenja strukture postojećeg inkrementalno-iterativnog algoritma. S tim u vezi Slika 3.34 prikazuje dijagram toka algoritma predložene metode, pri čemu su crvenom bojom označeni pridodani moduli i njihove međusobne veze. Izuzimanjem utjecaja efekata raspodijeljenog poprečnog opterećenja iz analize, tj. isključivanjem pridodanih modula, algoritam se reducira na svoj izvorni oblik (Slika 2.9).

Inicijalni koraci algoritma polazne i predložene metode su identični do ulaska u inkrementalnu petlju (*i*-petlja) i inicijalizacije zakrivljenosti prvog inkrementalnog ciklusa:

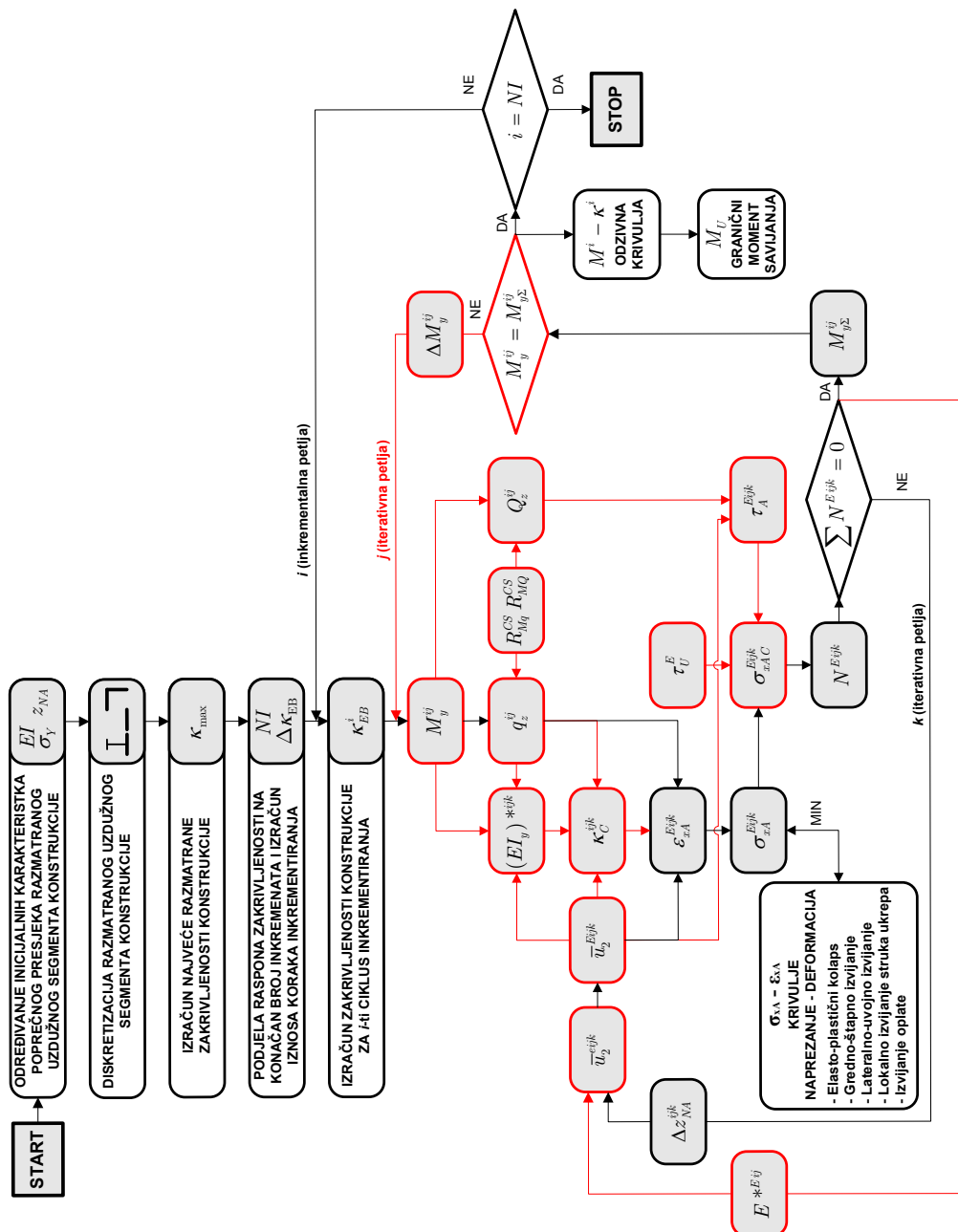
$$\Delta\kappa_{EB} = \kappa_{\max} / NI \quad ; \quad \kappa_{EB}^1 = \Delta\kappa_{EB} \quad (3.102)$$

U sljedećem koraku ulazi se u vanjsku iterativnu petlju (*j*-petlja) koja je pridodana kako bi se osigurala jednakost vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila  $M_y^{ij}$  korištena za izračun  $Q_z^{ij}$  i  $q_z^{ij}$  (na početku svakog ciklusa) i vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila  $M_{y\Sigma}^{ij}$  izračunatog za uravnoteženi presjek (na kraju svakog ciklusa).

Izračunom inicijalne vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila  $M_y^{11}$  prema:

$$M_y^{11} = (EI_y)^{11} \kappa_{EB}^1$$

gdje je  $(EI_y)^{11}$  savojna krutost određena kao produkt  $E^{CS}$  i  $I_y$  za razmatrani poprečni presjek, određuju se odgovarajuće vrijednosti  $Q_z^{11}$  i  $q_z^{11}$  na osnovu (3.101).



Slika 3.34 Dijagram toka algoritma predložene metode analize progresivnog kolapsa.



U sljedećem koraku ulazi se u unutrašnju iterativnu petlju ( $k$ -petlja) te se određuje globalni vektor čvornih uzdužnih deplanacijskih pomaka normiranih jediničnom poprečnom silom  $\bar{\mathbf{u}}_2^{E11}$  na način opisan u odjeljku 3.3.1, tj. rješavanjem sustava jednadžbi (3.57). Potom je potrebno odrediti uzdužne deplanacijske pomake normirane jediničnom poprečnom silom  $\bar{\mathbf{u}}_2^{E11}$  prema (3.59) za sve diskretne sastavne elemente.

U sljedećem koraku određuje se efektivna savojna krutost  $(EI_y)^{*111}$  poprečnog presjeka prema (3.73) te korektivna fizikalna zakrivljenost  $\kappa_C^{111}$  prema (3.69). Na taj način izračunati su svi preduvjeti za određivanje korigiranih prosječnih uzdužnih duljinskih deformacija  $\varepsilon_{xA}^{E11}$  diskretnih sastavnih elemenata prema (3.77), na temelju kojih se jednako kao i u polaznoj metodi određuju odgovarajuća prosječna uzdužna normalna naprezanja  $\sigma_{xA}^{E11}$  za sve diskretne sastavne elemente (poglavlje 2.3).

U sljedećim koracima potrebno je za sve diskretne sastavne elemente na osnovu prethodno izračunate vrijednosti smične sile  $Q_z^{11}$  odrediti vrijednost smičnog naprezanja  $\tau_A^{E11}$  prema (3.61) te graničnog smičnog naprezanja  $\tau_U^E$  prema preferiranoj formulaciji (3.92) do (3.97).

U narednom koraku korigira se prosječno uzdužno normalno naprezanje  $\sigma_{xA}^{E11}$  za utjecaj izračunate razine smične nosivosti prema (3.100), tj. računa se  $\sigma_{xA}^{E11}$  za sve diskretne sastavne elemente.

Potom se jednako kao i u polaznoj metodi određuju unutrašnje uzdužne sile za svaki diskretni sastavni element  $N^{E11} = \sigma_{xA}^{E11} A^E$  koje se potom sumiraju kako bi se provjerila uravnoteženost poprečnog presjeka. Ukoliko presjek nije uravnotežen mijenja se položaj neutralne osi presjeka ovisno o pretičku pozitivnih (vlačnih) ili negativnih (tlačnih) sila te se ulazi u sljedeći ciklus unutrašnje iterativne petlje ( $k$ -petlja). Pri tome je potrebno ponovno redom provesti sve prethodno opisane korake koji slijede nakon toga, tj. odrediti normirane uzdužne deplanacijske pomake  $\bar{\mathbf{u}}_2^{E11k}$  i  $\bar{\mathbf{u}}_2^{E11k}$ , efektivnu savojnu krutost  $(EI_y)^{*11k}$  poprečnog presjeka, korektivnu fizikalnu zakrivljenost  $\kappa_C^{11k}$ , korigirane uzdužne duljinske deformacije  $\varepsilon_{xA}^{E11k}$ , prosječna uzdužna normalna naprezanja  $\sigma_{xA}^{E11k}$ , smična naprezanja  $\tau_A^{E11k}$ , korigirana prosječna uzdužna normalna naprezanja  $\sigma_{xA}^{E11k}$  te unutrašnje uzdužne sile  $N^{E11k}$ . Pozicija neutralne osi presjeka iterativno se mijenja u okviru unutrašnje iterativne petlje sve dok se poprečni presjek ne uravnoteži, tj. do zadovoljavanja uvjeta  $\Sigma N^{E11k} = 0$ .

Nakon uravnoteživanja poprečnog presjeka ažurira se materijalna efikasnost, tj. efektivni sekantni modul  $E^{*E11}$  svakog pojedinog diskretnog sastavnog elementa prema (). Osim što se na taj način održava točnost veze između deformacija i naprezanja koja figurira u svim korektivnim veličinama, ažuriranje materijalne efikasnosti potrebno je provesti i radi točnosti određivanja normiranih uzdužnih deplanacijskih pomaka. Njihovo određivanje se provodi za položaj neutralne osi

određen prema (3.2) koji bi trebao odgovarati položaju neutralne osi uravnoteženog poprečnog presjeka. S obzirom da se efektivni sekantni moduli određeni u trenutnom ciklusu vanjske iterativne petlje koriste tek u narednom ciklusu iste petlje, uvodi se u sistematska greška u tom smislu. Međutim, podijeli li se razmatrani raspon fizikalne zakrivljenosti na dovoljno velik broj inkremenata, tj. usvoji li se na početku procedure dovoljno mali inkrementalni korak, na taj način uvedena greška se može svesti na zanemarivu razinu.

Nakon uravnoteživanja poprečnog presjeka računa se moment unutrašnjih uzdužnih sila  $M_{y\Sigma}^{11} = \Sigma N^{E11k} z^{E11k}$ . Potom je potrebno provjeriti jednakost vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila  $M_y^{11}$  korištena pri određivanju  $Q_z^{11}$  i  $q_z^{11}$  (na početku prvog ciklusa vanjske iterativne petlje unutar prvog ciklusa inkrementalne petlje) i vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila  $M_{y\Sigma}^{11}$  izračunatog za uravnoteženi presjek (na kraju prvog ciklusa vanjske iterativne petlje unutar prvog ciklusa inkrementalne petlje). Ukoliko uvjet jednakosti nije zadovoljen, raspolavlja se vrijednost razlike među njima, određuje se nova vrijednost  $M_y^{1j} = M_y^{1j-1} + (M_{y\Sigma}^{1j-1} - M_y^{1j-1})/2$ , te se ulazi u sljedeći ciklus vanjske iterativne petlje ( $j$ -petlja). Pri tome je potrebno ponovno redom provesti sve prethodno opisane korake koji slijede nakon toga te iterativno mijenjati vrijednost  $M_y^{1j}$  sve dok se ne zadovolji jednakost  $M_y^{1j} = M_{y\Sigma}^{1j}$ . Na taj način dobiva se prva ravnotežna odzivna točka, tj. par vrijednosti  $M_y^1 - \kappa_T^1$ .

Potom se inicijalizira sljedeći ciklus inkrementalne petlje, računa se odgovarajući iznos fizikalne zakrivljenosti  $\kappa_{EB}^i = \kappa_{EB}^{i-1} + \Delta\kappa_{EB}$  te se redom provode svi prethodno opisani koraci kako bi se odredio ravnotežni moment unutrašnjih uzdužnih sila  $M_y^i$ . Jednako kao i u polaznoj metodi, određivanjem momenta unutrašnjih uzdužnih sila za  $i = NI$ , kompletiran je posljednji ciklus inkrementalne petlje, čime je provedba analize završena.

Iako opisana metoda analize progresivnog kolapsa omogućava razmatranje promjene uzdužne nosivosti različito opterećenih uzdužnih segmenata razmatrane MTK, pri tome omjer  $R_{MQ}^{CS}$  ipak ne može biti u potpunosti proizvoljan. S obzirom da je fundamentalni koncept preuzet iz polazne metode, nužan uvjet primjenjivosti i funkcionalnosti metode je dominantnost uzdužnih efekata globalnog savojnog opterećenja nad smičnim efektima. U slučaju manjih vrijednosti  $R_{MQ}^{CS}$ , tj. kada na razmatrani poprečni presjek djeluje vrlo velika smična sila uz relativno mali moment savijanja, značajne i sve veće vrijednosti korektivnog koeficijenta  $K_\tau^E$  pri progresivnom povećanju intenziteta opterećenja narastu na razinu dovoljnu da se u potpunosti poništi uzdužna nosivost značajnog dijela poprečnog presjeka. Na taj način se onemogućava njegovo uravnoteživanje i algoritam ulazi u beskonačnu petlju (ukoliko broj ciklusa unutrašnje iterativne petlje nije ograničen).

Isto tako, sljedeće značajnije ograničenje koncepta polazne metode naročito dolazi do izražaja u slučaju razmatranja konstrukcije čiji strukovi (bokovi) duž svoje čitave visine nisu uzdužno ukrepljeni. U tome slučaju je najveći dio materijala oplata svakog pojedinog struka obuhvaćen jednim velikim diskretnim sastavnim elementom poprečno orebrene oplata. S obzirom da pri tome neutralna os poprečnog presjeka dijeli svaki od tih elemenata na dva dijela, dio elementa bi trebao biti opterećen vlačno, a dio tlačno. Međutim, ovisno o tome da li je položaj težišta iznad ili ispod neutralne osi poprečnog presjeka, tj. da li je težište elementa unutar vlačne ili tlačne zone, čitav element će biti izložen vlačnoj ili tlačnoj (prosječnoj) uzdužnoj duljinskoj deformaciji. Kako je pri tome udaljenost težišta elementa od neutralne osi poprečnog presjeka pri svim razinama globalnog opterećenja u pravilu vrlo mala, pripadajuća uzdužna duljinska deformacija elementa će biti vrlo malog intenziteta, kao i tome odgovarajuća razina uzdužne nosivosti. Drugim riječima, doprinos elementa (koji obuhvaća značajan dio uzdužno nosivog materijala poprečnog presjeka) ukupnoj uzdužnoj nosivosti poprečnog presjeka će pri svim razinama globalnog opterećenja biti vrlo mala te će pri tome izračunate vrijednosti momenata unutrašnjih uzdužnih sila poprečnog presjeka biti nerealno male.

## 4 Primjeri

Narednim primjerima se prikazuju, uspoređuju i komentiraju rezultati te za razmatrani problem relevantni aspekti primjene polazne i predložene metode, NLMKE te objavljenih eksperimentalnih istraživanja. Kako bi se pri tome izbjeglo pripisivanje razlike u rezultatima pogrešnim uzrocima, kroz naredna razmatranja se nastoji obuhvatiti i raščlaniti utjecaje različitih relevantnih čimbenika.

U okviru ovoga rada sve geometrijski i materijalno nelinearne analize metodom konačnih elemenata provedene su korištenjem računalne aplikacije FEMAP/NX Nastran [36], pri čemu su razmatrani modeli diskretizirani dvodimenzionalnim izoparametrijskim konačnim elementima sa četiri (CQUAD4) i vrlo rijetko tri (CTRIA3) čvora. Materijalna nelinearnost idealizirana je primjenom elastičnog-idealoplastičnog (bi-linearnog) materijalnog modela bez očvršćenja, a funkcija popuštanja izražena je pomoću HMM uvjeta popuštanja. Za rješavanje nelinearnih jednadžbi krutosti korištena je (nemodificirana) Newton-Raphsonova metoda.

### 4.1 Inicijalne nesavršenosti

Svi primjeri razmatrani u okviru ovoga rada spadaju u zavarene metalne konstrukcije koje stoga nakon gradnje u pravilu karakterizira pojava zaostalih naprezanja i inicijalnih geometrijskih odstupanja (od zamišljenog oblika). Mjerenje inicijalnih nesavršenosti složenih tankostjenih konstrukcija je u pravilu skup i dugotrajan proces te se stoga najčešće ne provodi. Međutim, kako je u uvodnom dijelu rada već spomenuto da inicijalne nesavršenosti uvjetovane realnim uvjetima gradnje i eksploatacije konstrukcije mogu u znatnoj mjeri utjecati na njenu graničnu nosivost, potrebno ih je uzeti u obzir pri evaluaciji iste.

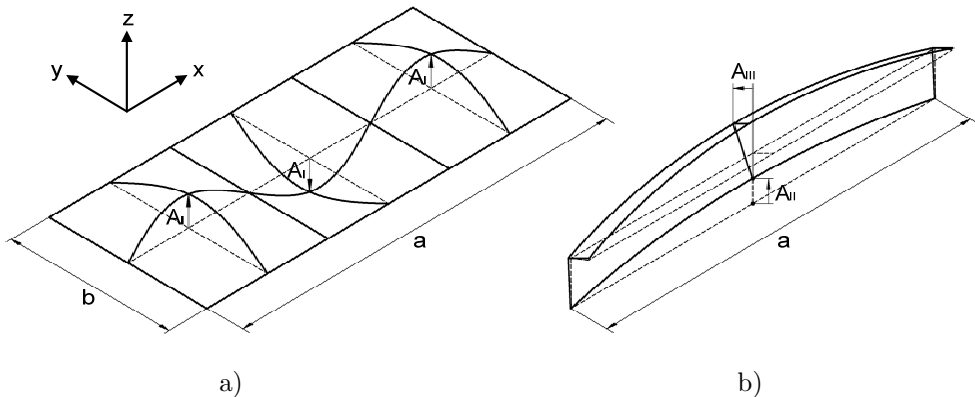
Zbog složenosti idealizacije i značajnih nesigurnosti vezano uz korektan opis geometrijskih i materijalnih karakteristika dijelova konstrukcije zahvaćenih zaostalim naprezanjima te velikog broja pri tome relevantnih tehnoloških čimbenika (vrste metalnih materijala sastavnih elemenata; pozicija, veličina i vrsta spoja; redosljed spajanja pojedinih sastavnih elemenata), utjecaj zaostalih naprezanja se najčešće izostavlja pri razmatranju graničnog stanja nosivosti složenih tankostjenih konstrukcija.

Bez obzira na primijenjenu metodu evaluacije graničnog stanja nosivosti, inicijalna geometrijska odstupanja se u pravilu uzimaju u obzir, jer njihov oblik i iznos uvijek u značajnoj mjeri utječu na izvijanje tlačno opterećenih sastavnih elemenata konstrukcije. U polaznoj i predloženoj metodi je utjecaj inicijalnih geometrijskih odstupanja implicitno sadržan unutar korištenih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja

(izrazi za efektivne vrijednosti širine oplata i/ili visine struka ukrepe definirani su s obzirom na srednju razinu inicijalnih geometrijskih odstupanja), dok se u slučaju primjene NLMKE (u nedostatku mjerenja vezano uz njihov opis) položaj čvorova diskretiziranog modela najčešće modificira sukladno relevantnim načinima izvijanja sastavnih dijelova razmatrane konstrukcije.

Radi cjelokupnosti opisa NLMKE modela korištenih pri usporedbi rezultata, ukratko će se opisati najčešće korišteni pristup idealizacije inicijalnih geometrijskih odstupanja [23] primijenjen i u okviru ovoga rada, a sukladno kojem se inicijalna geometrijska odstupanja ukrepljenog panela mogu podijeliti u tri tipa:

- inicijalni pomaci čvorova oplata između ukrepljenja okomito na ravninu oplata (Tip I) – prvi način izvijanja oplata između ukrepljenja (Slika 4.1a);
- inicijalni pomaci čvorova ukrepa i oplata između njih okomito na ravninu oplata (Tip II) – prvi način globalnog štapnog izvijanja ukrepe sa sunosivom širinom oplata (Slika 4.1b);
- inicijalni pomaci čvorova ukrepa okomito na ravninu struka ukrepe (Tip III) – lokalno izvijanje struka ukrepe (Slika 4.1b).



Slika 4.1 Idealizacija inicijalnih geometrijskih odstupanja sastavnih elemenata ukrepljenog panela.

Oblik sva tri tipa inicijalnih geometrijskih odstupanja idealizira se periodičkim funkcijama zasnovanim na Fourierovim redovima, dok se ukupni oblik odstupanja određuje njihovom superpozicijom. Pri tome je vrijednost poprečnog (u smjeru osi  $z$ )  $w_i^{IGO}$  pomaka za proizvoljni ( $i$ -ti) čvor razmatranog ukrepljenog panela definirana na sljedeći način:

$$w_i^{IGO} = A_I \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + A_{II} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.1)$$

gdje su  $a$  i  $b$  duljina i širina oplata između ukrepljenja,  $x$  i  $y$  koordinate čvora, a  $m$  i  $n$  najmanji cijeli broj poluvalova izvijanja oplata u smjeru osi  $x$  i  $y$ , pri čemu vrijedi:

$$\frac{a}{b} \leq \sqrt{m(m+1)} \quad (4.2)$$

$$n = 1$$

$A_I$  predstavlja amplitudu odstupanja relevantnu za Tip I, koja se može odrediti na dva različita načina:

$$A_I = C_{Ia} b \quad (4.3)$$

$$A_I = C_{Ib} \beta^2 t_p \quad (4.4)$$

$C_{Ia}$  predstavlja bezdimenzijski parametar za srednju razinu inicijalnih geometrijskih odstupanja u čeličnoj oplati konstrukcije, čija vrijednosti (sukladno pravilima klasifikacijskih društava u brodogradnji) iznosi 0.005. Izraz (4.4) (predložen od strane Smitha, [57]) predstavlja sveobuhvatniju idealizaciju pogodnu za sve debljine oplata te se stoga koristi u većini radova novijeg datuma. Pri tome,  $\beta$  predstavlja vitkost oplata debljine  $t_p$ , dok je vrijednost bezdimenzijskog parametra  $C_{Ib}$  ovisna o razini inicijalnih geometrijskih odstupanja u čeličnoj oplati konstrukcije:

$$C_{Ib} = \begin{cases} 0.025 & \text{za malu razinu odstupanja} \\ 0.1 & \text{za srednju razinu odstupanja} \\ 0.3 & \text{za veliku razinu odstupanja} \end{cases}$$

$A_{II}$  predstavlja amplitudu odstupanja relevantnu za Tip II, čija vrijednost za srednju razinu inicijalnih geometrijskih odstupanja u čeličnoj oplati konstrukcije (sukladno pravilima klasifikacijskih društava u brodogradnji) iznosi 0.0015.

Vrijednost lateralnog (u smjeru osi  $y$ )  $v_i^{IGO}$  pomaka za proizvoljni ( $i$ -ti) čvor (ukrepe) razmatranog ukrepljenog panela definirana je na sljedeći način:

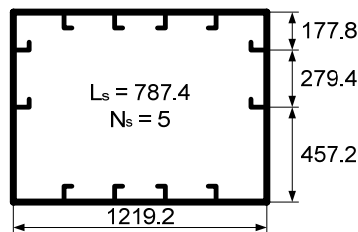
$$v_i^{IGO} = A_{III} \frac{z}{h_w} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.5)$$

gdje su  $x$  i  $z$  koordinate čvora (ukrepe),  $h_w$  visina struka ukrepe, dok  $A_{III}$  predstavlja amplitudu odstupanja relevantnu za Tip III, pri čemu vrijedi  $A_{III} = A_{II}$ .

## 4.2 Čisto ravno savijanje ukrepljenih kutijastih tankostjenih nosača

U okviru ovoga poglavlja razmatra se uzdužna granična nosivost ukrepljenih monotonih tankostjenih nosača čiji je odziv pri ekstremnom čistom ravnom savijanju (stanje progiba) istražen eksperimentalno [33], [34]. Pri tome se razmatraju tri različite konstrukcije (označene sa P1, P2 i P3) čije geometrijske i materijalne karakteristike prikazuje Slika 4.2 i Tablica 4.1 (za P1), Slika 4.3 i Tablica 4.2 (za P2) te Slika 4.4 i Tablica 4.3 (za P3).

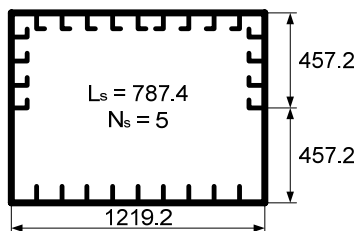
Shematski prikaz instalacije korištene pri provedbi eksperimentalnog ispitivanja izdržljivosti razmatranih konstrukcija pri čistom ravnom savijanju prikazuje Slika 4.5. Opterećenje tokom testiranja generirano je pomoću (spregnutih) hidrauličnih dizalica, pri čemu se vertikalne sile (progresivno povećavajućeg iznosa) prenose na krajeve prijenosnika opterećenja koji su sa svoje suprotne strane sučeljeno zavareni za razmatranu konstrukciju. Vertikalni pomaci prijenosnika opterećenja spriječeni su na spojevima sa konstrukcijom pomoću utemeljenih oslonaca posredstvom sferičnih ležaja koji su omogućavali sve rotacije. Na ovaj način razmatrane konstrukcije opterećene su isključivo (uzdužno) konstantnim momentom savijanja, čija se vrijednost tokom testiranja progresivno povećavala (sukladno umnošku iznosa trenutne vertikalne sile i duljine kraka između hvatišta vertikalne sile i sferičnog ležaja). Detaljniji opis različitih aspekata provedenih eksperimenata može se naći u [33] i [34].



Slika 4.2 Dimenzije modela P1.

Tablica 4.1 Geometrijske i materijalne karakteristike komponenti modela P1.

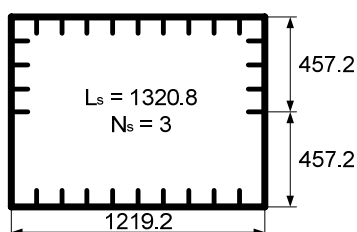
Komponenta	Nominalne dimenzije [mm]	$\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	E [N/mm <sup>2</sup> ]
Oplata gornjeg pojasa	4.76	298.07	208498
Oplata donjeg pojasa	4.76	298.07	208498
Oplata struka	3.18	211.59	216220
Uzdužne ukrepe	L 50.8x4.76 / 15.88x4.76	276.45	191509
Poprečno orebrenje	L 76.2x6.35 / 50.8x6.35	310.43	196143



Slika 4.3 Dimenzije modela P2.

Tablica 4.2 Geometrijske i materijalne karakteristike komponenti modela P2.

Komponenta	Nominalne dimenzije [mm]	$\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	E [N/mm <sup>2</sup> ]
Oplata gornjeg pojasa	4.76	220.85	206954
Oplata donjeg pojasa	4.76	216.22	208498
Oplata struka	4.76	281.09	214676
Uzdužne ukrepe (gornji pojas i struk)	L 50.8x4.76 / 15.88x4.76	287.26	199231
Uzdužne ukrepe (donji pojas)	FB 50.8x6.35	304.25	206954
Poprečno orebrenje	L 101.6x6.35 / 63.5x6.35	304.25	200776

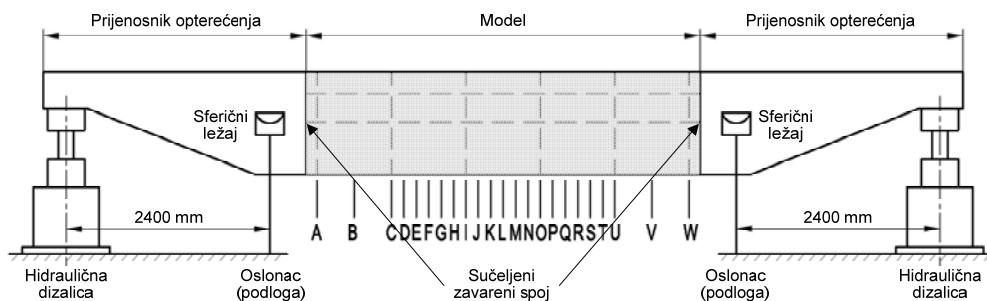


Slika 4.4 Dimenzije modela P3.

Tablica 4.3 Geometrijske i materijalne karakteristike komponenti modela P3.

Komponenta	Nominalne dimenzije [mm]	$\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	E [N/mm <sup>2</sup> ]
Oplata gornjeg pojasa	4.76	276.45	208498
Oplata donjeg pojasa	4.76	366.03	208498
Oplata struka	3.18	251.74	216220
Uzdužne ukrepe	FB 38.10x6.35	311.97	210042
Poprečno orebrenje	FB 76.20x6.35	293.44	208498





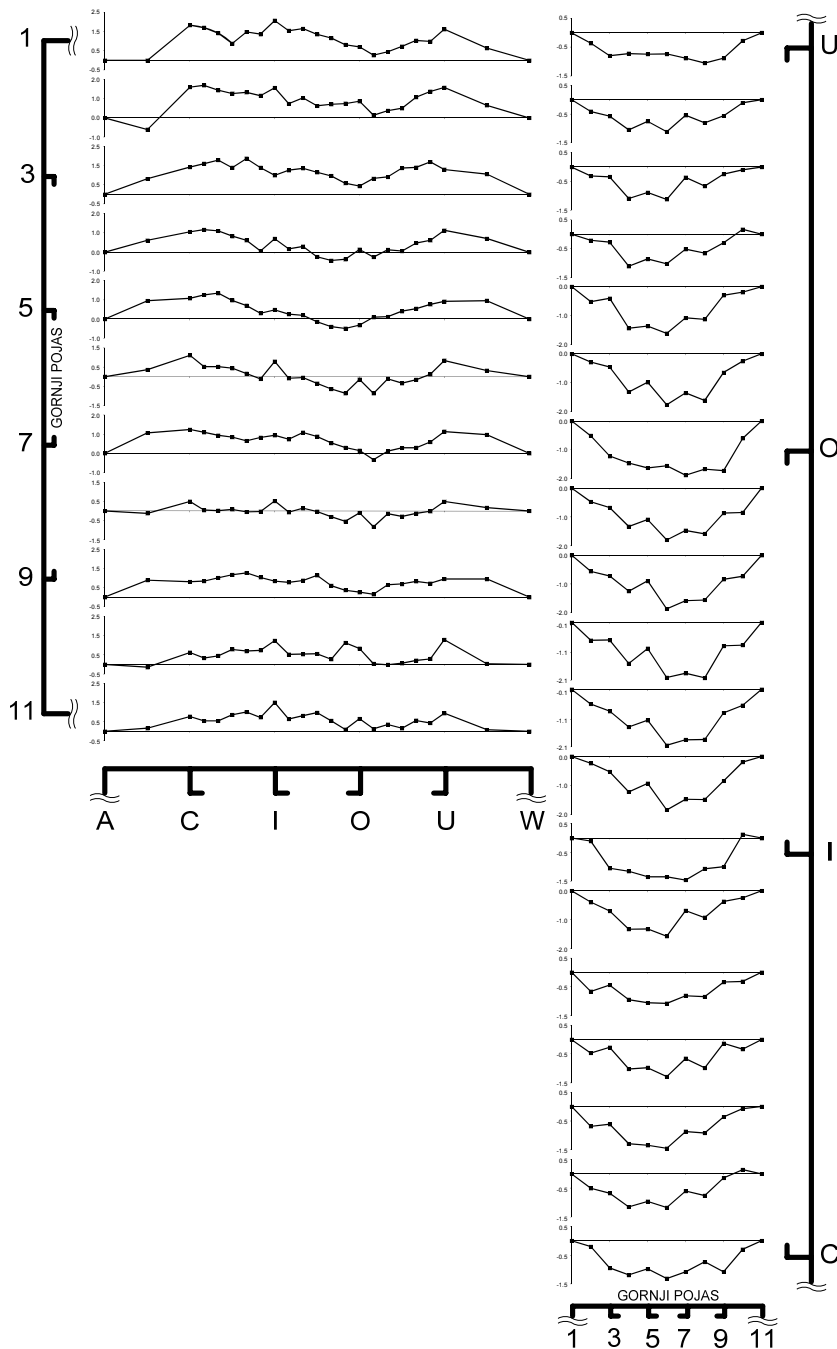
Slika 4.5 Shematski prikaz instalacije korištene pri eksperimentalnom testiranju razmatranih konstrukcija opterećenih čistim ravnim savijanjem.

U okviru ovoga poglavlja uspoređuju se eksperimentalni rezultati sa rezultatima dobivenim polaznom/predloženom metodom, ali i sa rezultatima dobivenim primjenom NLMKE analize. Pri tome se potreba za provedbom simulacije čistog ravnog savijanja pomoću NLMKE analize nameće iz nekoliko razloga. Glavni razlog je nedostatak eksperimentalne reference za slučaj ekstremnog poprečnog savijanja koji se razmatra u narednom poglavlju ove glave i koji je od najvećeg značaja za ovaj rad. S obzirom da će se stoga rezultati dobiveni NLMKE analizama koristiti kao reference pri usporedbi s rezultatima dobivenim predloženom metodom, utvrđivanje razine točnosti rezultata koju je moguće postići primjenom NLMKE analize u kontekstu razmatranog problema je od velikog značaja. Nadalje, time se otvara mogućnost prikaza i razmatranja različitih relevantnih aspekata provedbe NLMKE analize pri utvrđivanju uzdužne granične nosivosti složenih tankostjenih konstrukcija i/ili njihovih sastavnih elemenata, a koji su (kao i njihov utjecaj na dobivene rezultate) često unutar relevantne literature nedovoljno razjašnjeni.

#### 4.2.1 Primjena NLMKE u kontekstu razmatranog problema

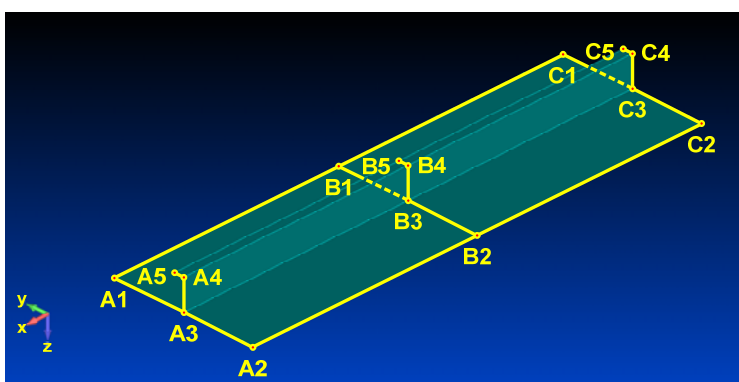
Među razmatranim konstrukcijama od naročitog značaja je konstrukcija P1 za koju su izvršena detaljna mjerenja inicijalnih geometrijskih odstupanja oplata gornjeg pojasa nosača. Pri tome utvrđene vrijednosti lateralnih (u ravnini gornjeg pojasa) i poprečnih (okomito na ravninu gornjeg pojasa) komponenti inicijalnih geometrijskih odstupanja za različite točke različitih presjeka (Slika 4.5, velika slova) gornjeg pojasa prikazuje Slika 4.6. Iako modeliranje čitavog gornjeg pojasa sukladno detaljnom opisu njegovih inicijalnih geometrijskih odstupanja značajno komplicira i u znatnoj mjeri dodatno vremenski opterećuje izradu NLMKE modela konstrukcije P1, na taj način se omogućava točnija idealizacija geometrijskih karakteristika tlačno najopterećenijeg dijela razmatrane konstrukcije, što u znatnoj mjeri utječe na dobivene rezultate. U nedostatku podataka vezano uz inicijalna geometrijska odstupanja ostalih sastavnih dijelova konstrukcije iste će se aproksimirati sukladno

prethodno opisanom pristupu zasnovanom na Fourierovim redovima, pri čemu će se relevantne amplitude odstupanja odrediti za srednju razinu odstupanja.



Slika 4.6 Lateralne i poprečne komponente izmjerenih inicijalnih geometrijskih odstupanja oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1.

Prije izrade diskretiziranog NLMKE modela konstrukcije P1 potrebno je racionalno odrediti prikladnu rezoluciju mreže konačnih elemenata. U tu svrhu provela se studija konvergencije rješenja, pri čemu se kao reprezentativni i kritični dio konstrukcije razmatra jedna ukrepa sa sunosivom širinom oplate gornjeg pojasa konstrukcije P1. Sukladno smjernicama i naputcima iz relevantne literature (npr. [23], [40]) razmatrani model po duljini obuhvaća dva polu-raspona između poprečnih okvirnih nosača (tzv.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  model) dok po širini obuhvaća dvije polu-širine razmaka između ukrepa (Slika 4.7). S obzirom da pri tome poprečni okvirni nosač nije eksplicitno modeliran, njegov utjecaj je implicitno zadan pomoću rubnih uvjeta na presjeku B. Mjesta zadavanja i opis rubnih uvjeta prikazuju Slika 4.7 i Tablica 4.4.



Slika 4.7 Mjesta zadavanja rubnih uvjeta.

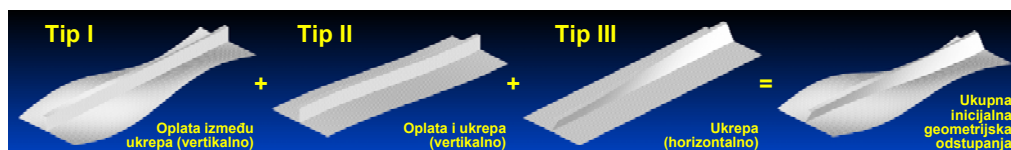
Tablica 4.4 Rubni uvjeti - opis čvornih ograničenja poopćenih pomaka.

Pozicija čvora (Slika 4.7)	Stupnjevi slobode					
	T <sub>x</sub>	T <sub>y</sub>	T <sub>z</sub>	R <sub>x</sub>	R <sub>y</sub>	R <sub>z</sub>
⟨A1-A3⟩, [A2-A3], [A3-A4], [A4-A5], ⟨C1-C3⟩, [C2-C3], [C3-C4], [C4-C5].	0*	1	1	1	0	0
⟨A1-B1⟩, ⟨B1-C1⟩, ⟨A2-B2⟩, ⟨B2-C2⟩.	1	0	1	0	1	0
⟨B1-B3⟩, ⟨B2-B3⟩, ⟨B4-B5⟩.	1	1	0	1	1	1
⟨B3-B4⟩.	1	0	1	1	1	1
A1, A2, C1, C2.	0	0	1	0	0	0
B1, B2.	1	0	0	0	1	0
B3, B4.	1	0	0	1	1	1

0 Spriječeno.

1 Dozvoljeno.

\* U svim čvorovima presjeka „A“ zadana je jednaka vrijednost opterećenja (pomak u negativnom smjeru osi  $x$ ), pri čemu se taj isti stupanj slobode ograničava isključivo radi pravila zadavanja te vrste opterećenja u korištenoj aplikaciji.



Slika 4.8 Superpozicija različitih tipova inicijalnih geometrijskih nesavršenosti za model ukrepe sa sunosivom širinom oplate.

S obzirom na opterećenje gornjeg pojasa pri progibnom savijanju konstrukcije P1, razmatrani model se jednoosno tlači uzdužnim pomakom jednoliko raspodijeljenim po presjeku A. Pri tome je iznos narinutog uzdužnog pomaka određen tako da se provedbom NLMKE analize obuhvati prije-kolapsni, kolapsni i poslije-kolapsni režim odziva razmatranog modela.

Studija konvergencije rješenja provedena je za sve prethodno spomenute razine inicijalnih geometrijskih odstupanja kako bi se prikazao utjecaj njihovog intenziteta na dobivene rezultate. Pri tome Slika 4.8 ilustrira oblik sva tri prethodno spomenuta tipa inicijalnih geometrijskih nesavršenosti (bez obzira na iznos amplitude) za razmatrani model, kao i konačni oblik dobiven njihovom superpozicijom. Sukladno superponiranim funkcijama (4.1) i (4.5) dislociraju se (u poprečnom i lateralnom smjeru) svi čvorovi geometrijski idealnih modela, pri čemu je razmatrano osam različitih varijanti progresivno profinjanih mreža za sve četiri različite razine inicijalnih geometrijskih odstupanja. Oznake i karakteristike svih razmatranih varijanti modela prikazuje Tablica 4.5, dok dobivene rezultate dijagramski prikazuje Slika 4.9 do Slika 4.16.

Slika 4.9 prikazuje zapravo (normalizirane)  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje dobivene provedbom NLMKE analiza za osam različitih rezolucija mreže razmatranog modela uz narinutu malu razinu inicijalnih geometrijskih odstupanja. Prikazane krivulje određene su na sljedeći način. Nakon što je za svaki model provedena NLMKE analiza kroz odgovarajući broj inkremenata opterećenja, za svaki inkrement opterećenja sumirane su sve uzdužne (sile) reakcije u čvorovima presjeka C, pri čemu kvocijent te sume i ukupne površine poprečnog presjeka C predstavlja prosječno normalno naprezanje  $\sigma_{xA}$  za svaki inkrement opterećenja. S obzirom da kvocijent uzdužnog pomaka (narinutog opterećenja) unutar svakog inkrementa i duljine modela predstavlja prosječnu duljinsku deformaciju  $\varepsilon_{xA}$ , sprežanjem pripadajućih parova vrijednosti  $\sigma_{xA}$  i  $\varepsilon_{xA}$  dobivaju se prikazane krivulje.

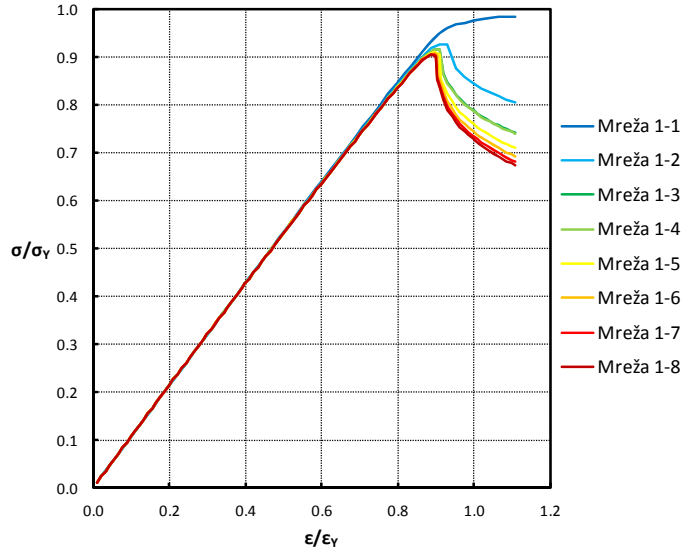
Slika 4.10 prikazuje izračunate vrijednosti normalizirane granične nosivosti (maksimumi krivulja koje prikazuje Slika 4.9), poslije-kolapsne nosivosti (pri  $\varepsilon_{xA} = 1.1\varepsilon_Y$ ) te vertikalnog (poprečnog) čvornog pomaka točke A2 za osam različitih rezolucija mreže (predstavljenih ukupnim brojem stupnjeva slobode) razmatranog modela uz narinutu malu razinu inicijalnih geometrijskih odstupanja.

Tablica 4.5 Oznake i karakteristike različitih modela studije konvergenije rješenja.

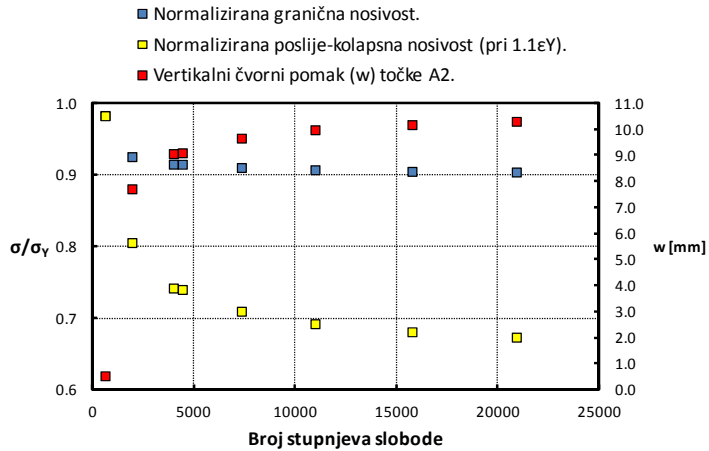
Amplituda IGO	Oznaka mreže	Broj konačnih elemenata					Broj čvorova	Broj SS
		P	W	F	L	T		
Mala (Smith)	Mreža1-1	4	2	1	12	104	84	504
	Mreža1-2	8	3	1	24	325	288	1728
	Mreža1-3	12	4	1	36	666	612	3672
	Mreža1-4	12	5	2	36	740	684	4104
	Mreža1-5	16	6	2	48	1225	1152	6912
	Mreža1-6	20	7	2	60	1830	1740	10440
	Mreža1-7	24	8	3	72	2628	2520	15120
	Mreža1-8	28	9	3	84	3485	3360	20160
Srednja (Pravila)	Mreža2A-1	4	2	1	12	104	84	504
	Mreža2A-2	8	3	1	24	325	288	1728
	Mreža2A-3	12	4	1	36	666	612	3672
	Mreža2A-4	12	5	2	36	740	684	4104
	Mreža2A-5	16	6	2	48	1225	1152	6912
	Mreža2A-6	20	7	2	60	1830	1740	10440
	Mreža2A-7	24	8	3	72	2628	2520	15120
	Mreža2A-8	28	9	3	84	3485	3360	20160
Srednja (Smith)	Mreža2B-1	4	2	1	12	104	84	504
	Mreža2B-2	8	3	1	24	325	288	1728
	Mreža2B-3	12	4	1	36	666	612	3672
	Mreža2B-4	12	5	2	36	740	684	4104
	Mreža2B-5	16	6	2	48	1225	1152	6912
	Mreža2B-6	20	7	2	60	1830	1740	10440
	Mreža2B-7	24	8	3	72	2628	2520	15120
	Mreža2B-8	28	9	3	84	3485	3360	20160
Velika (Smith)	Mreža3-1	4	2	1	12	104	84	504
	Mreža3-2	8	3	1	24	325	288	1728
	Mreža3-3	12	4	1	36	666	612	3672
	Mreža3-4	12	5	2	36	740	684	4104
	Mreža3-5	16	6	2	48	1225	1152	6912
	Mreža3-6	20	7	2	60	1830	1740	10440
	Mreža3-7	24	8	3	72	2628	2520	15120
	Mreža3-8	28	9	3	84	3485	3360	20160

IGO	Inicijalna geometrijska odstupanja;
SS	Štupnjevi slobode;
P	Širina oplata između ukrepa;
W	Visina struka ukrepe;
F	Širina pojasa ukrepe;
L	Duljina raspona između okvirnih nosača;
T	Ukupno.

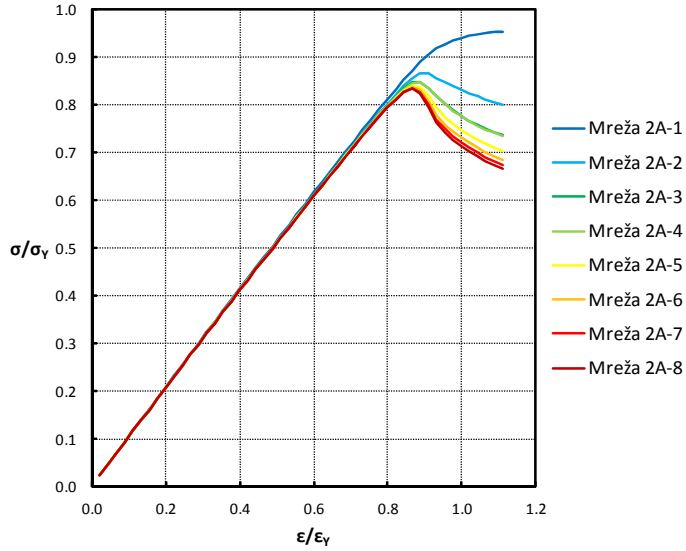
Analogno prethodnom opisu i na ostalim spomenutim slikama prikazuju se iste krivulje i odgovarajuće veličine za osam različitih rezolucija mreže razmatranog modela, ali pri srednjoj i velikoj razini inicijalnih geometrijskih odstupanja.



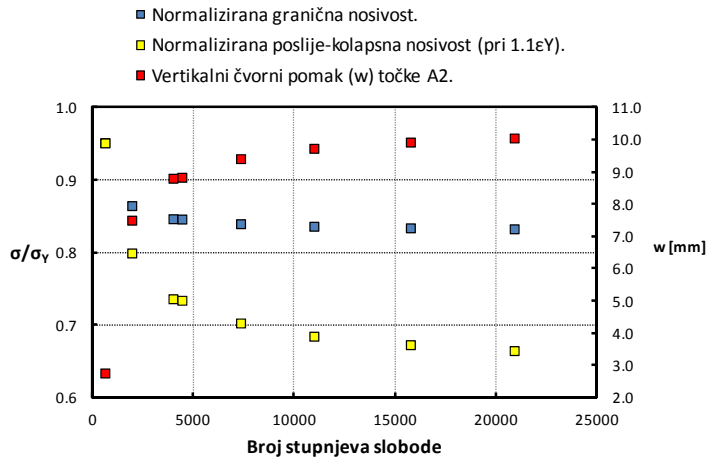
Slika 4.9 Normalizirane  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (mala razina /Smith/ IGO).



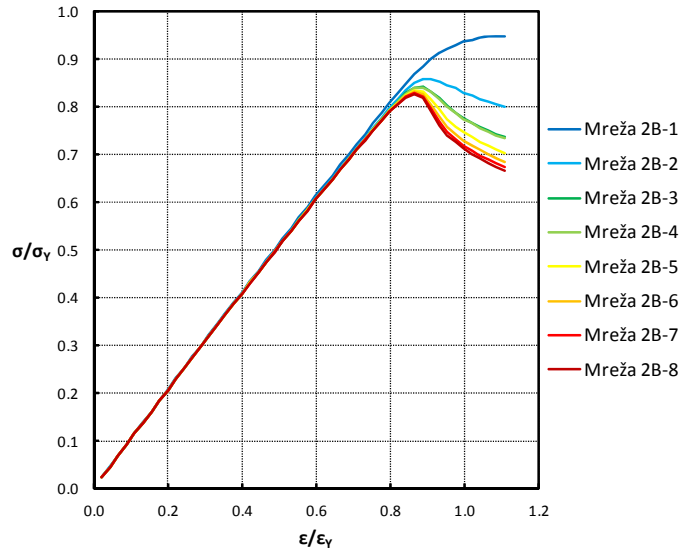
Slika 4.10 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (mala razina /Smith/ IGO).



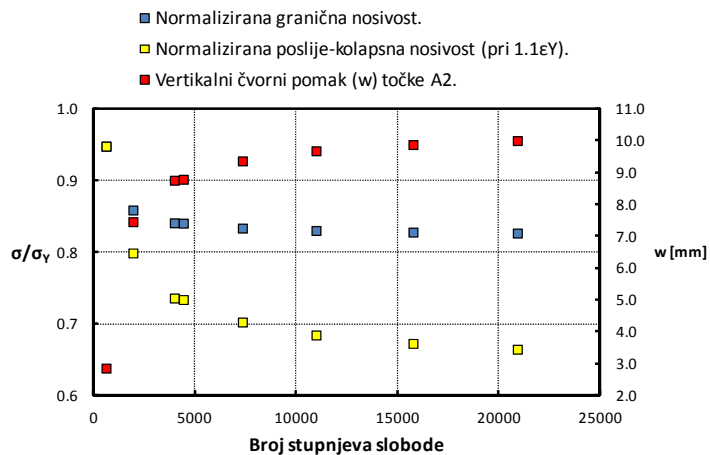
Slika 4.11 Normalizirane  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (srednja razina /Pravila/ IGO).



Slika 4.12 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (srednja razina /Pravila/ IGO).

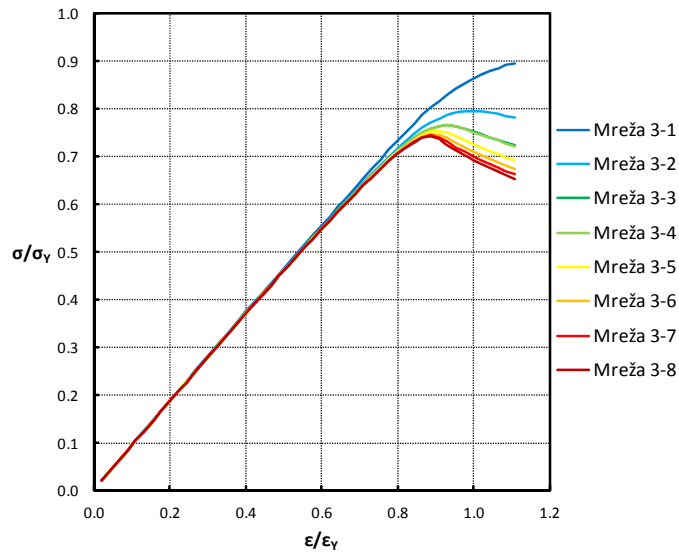


Slika 4.13 Normalizirane  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (srednja razina /Smith/ IGO).

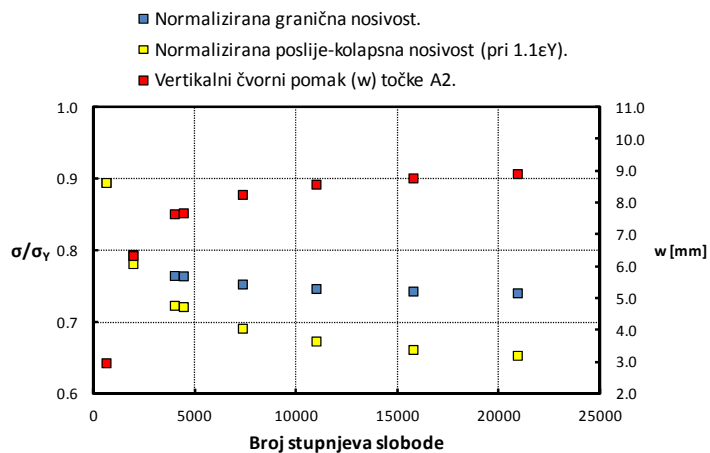


Slika 4.14 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (srednja razina /Smith/ IGO).





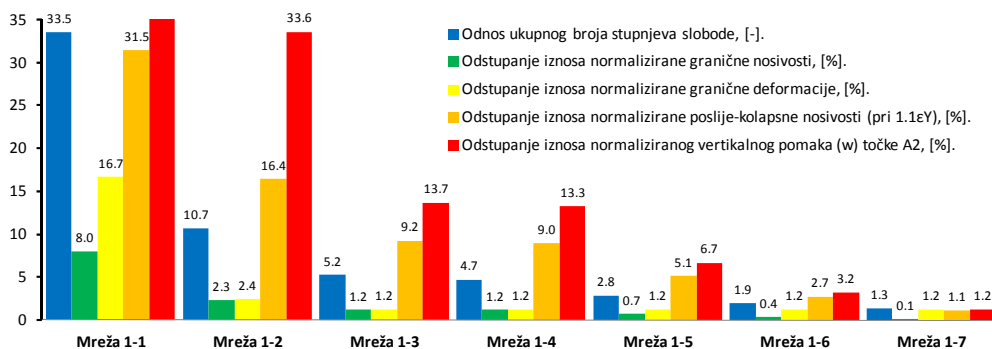
Slika 4.15 Normalizirane  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje dobivene NLMKE analizom različitih rezolucija mreže razmatranog modela (velika razina /Smith/ IGO).



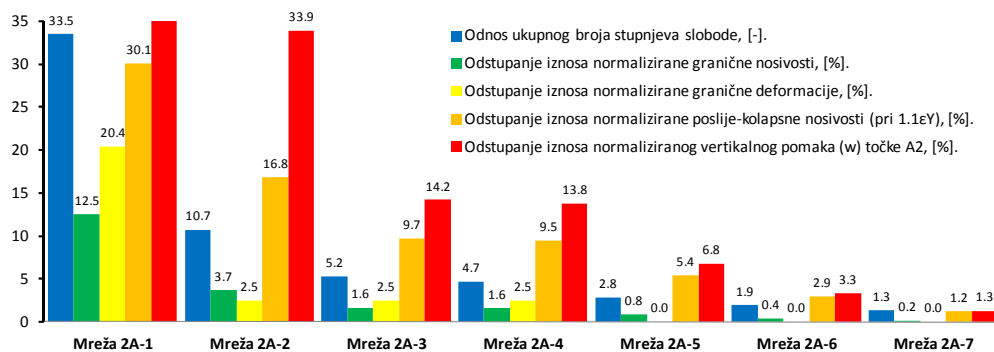
Slika 4.16 Usporedba rješenja dobivenih za različite rezolucije mreže razmatranog modela (velika razina /Smith/ IGO).

Pri provedbi studije konvergencije rješenja (u kontekstu razmatranog problema) u relevantnoj literaturi (npr. [27] i [58]) se najčešće prati samo iznos dobivene granične nosivosti (maksimumi prikazanih krivulja). Na prikazanim slikama razvidno je da se vrijednost granične nosivosti relativno brzo stabilizira (već nakon četvrte razine profinjjenja mreže) za sve razine inicijalnih geometrijskih odstupanja. Međutim, isto tako je razvidno da se poslije-kolapsna nosivost razmatranog modela značajno mijenja sa promjenom rezolucije mreže, tj. da se rješenje stabilizira tek pri vrlo finim rezolucijama mreže. S obzirom da će u stanju granične nosivosti razmatrane konstrukcije njene sastavne elemente karakterizirati različita razina nosivosti, tj. dio njih će biti u prije-kolapsnom, dio u kolapsnom, a dio u poslijekolapsnom stanju, vrlo je važno da se i poslije-kolapsna nosivost sastavnih elemenata opiše što točnije. Zanimarivanje razine točnosti opisa poslije-kolapsne nosivosti sastavnih elemenata pri određivanju prikladne rezolucije mreže za čitavu konstrukciju može rezultirati preoptimistično određenim razinama nosivosti razmatrane konstrukcije prije, tokom, a naročito poslije kolapsnog režima. Stoga, iako bi se praćenjem konvergencije (isključivo) granične nosivosti mogla odabrati grublja razina mreže za diskretizaciju konstrukcije P1 te na taj način značajno smanjiti ukupni broj stupnjeva slobode modela (tj. računalno vrijeme), pri izboru prikladne mreže u obzir će se uzeti i konvergencija poslije-kolapsne nosivosti (pri  $\varepsilon_{xA} = 1.1\varepsilon_Y$ ), granične deformacije te najvećeg vertikalnog (poprečnog) čvornog pomaka (točka A2), jer je uočeno da se niti vrijednosti vertikalnih čvornih pomaka ne stabiliziraju brzo.

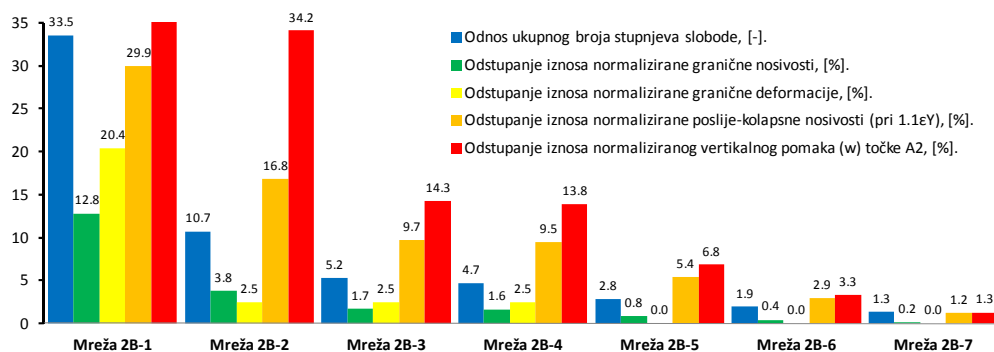
Za razmatrane razine inicijalnih geometrijskih odstupanja Slika 4.17 do Slika 4.20 sažeto prikazuju konvergenciju svih prethodno spomenutih rješenja, kao i promjenu broja stupnjeva slobode s obzirom na rješenja i broj stupnjeva slobode pri najfinijoj mreži.



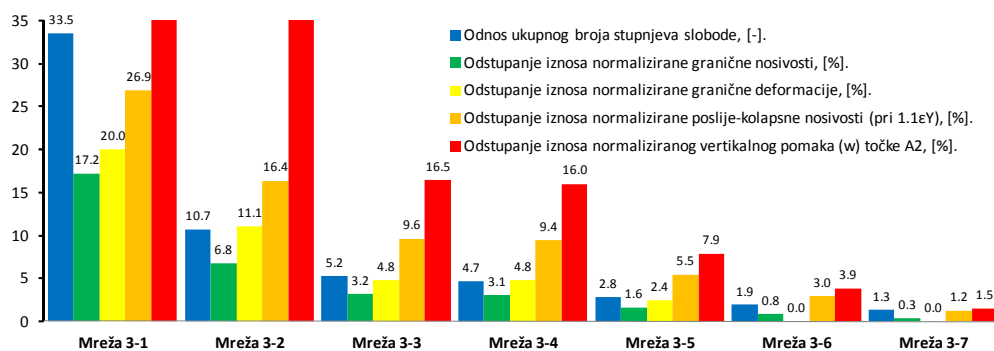
Slika 4.17 Konvergencija rješenja za malu razinu (Smith) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 1-8.



Slika 4.18 Konvergencija rješenja za srednju razinu (Pravila) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 2A-8.



Slika 4.19 Konvergencija rješenja za srednju razinu (Smith) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 2B-8.



Slika 4.20 Konvergencija rješenja za veliku razinu (Smith) IGO s obzirom na rješenja dobivena za Mrežu 3-8.

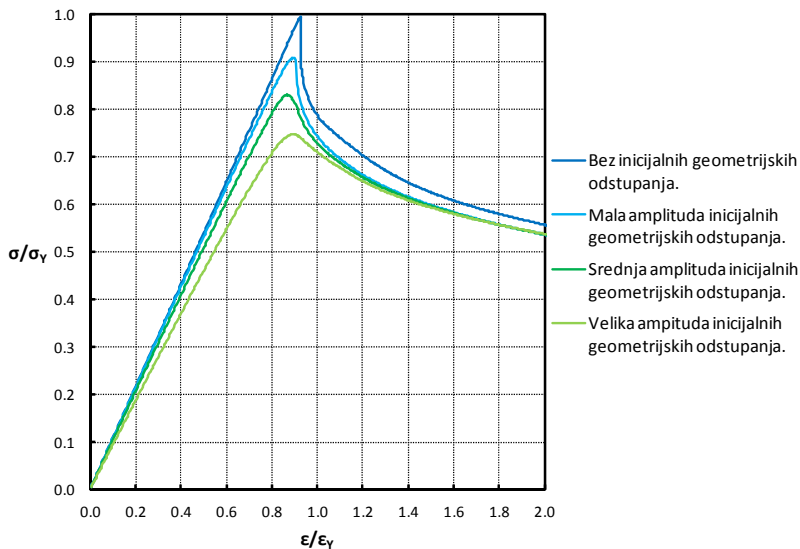
Na temelju prikazanih podataka odabrana je šesta razina profinjenja kao referentna rezolucija mreže za diskretizaciju NLMKE modela konstrukcije P1. S obzirom da na toj rezoluciji mreže (neovisno o razini inicijalnih geometrijskih odstupanja) sva relevantna rješenja odstupaju od najtočnijeg rješenja za samo nekoliko postotaka uz skoro dvostruko manji broj stupnjeva slobode, nema racionalnog opravdanja za izbor finije mreže. Sa druge pak strane, iako bi se grubljim mrežama značajno smanjio broj stupnjeva slobode modela, njihova pojedina rješenja (poslije-kolapsna nosivost i poprečni pomak) karakteriziraju nezanemariva odstupanja u odnosu na najtočnije rješenje.

Isto tako, na osnovu prethodno prikazanih podataka može se uočiti i izvrsno podudaranje rezultata na razmatranim modelima za srednju razinu inicijalnih geometrijskih odstupanja prema Pravilima i Smithu.

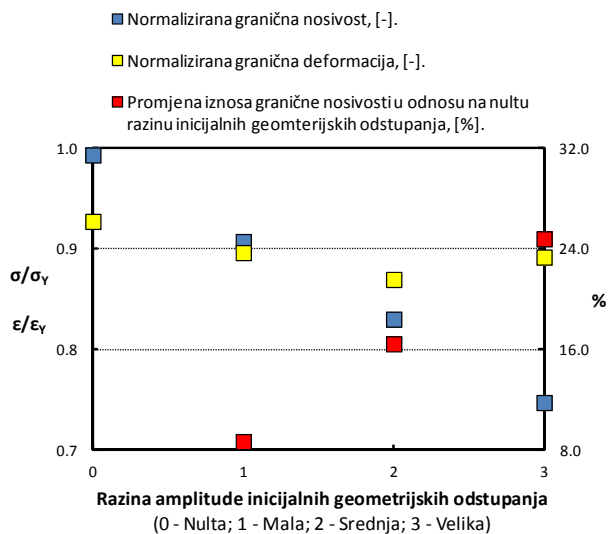
Slika 4.21 usporedno prikazuje (normalizirane)  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje modela (referentne rezolucije mreže) razmatranog u okviru studije konvergencije rješenja pri različitim razinama inicijalnih geometrijskih odstupanja, kao i krivulju geometrijski idealnog modela. Pri tome je razvidan značajan utjecaj inicijalnih geometrijskih odstupanja na (graničnu) nosivost razmatranog modela. Isto tako, interesantno je za uočiti da se granična nosivost mijenja prilično linearno s promjenom razine inicijalnih geometrijskih odstupanja (Slika 4.22).

S obzirom da su čvorovima na uzdužnim rubovima [A1-C1] i [A2-C2] razmatranih modela spriječeni lateralni pomaci (u smjeru osi  $y$ ), što je korektna i uobičajena praksa za unutrašnje ukrepe (sa sunosivom širinom oplata), nameće se pitanje u kojoj mjeri bi se promijenili rezultati da se ti pomaci dozvole, što bi bila prihvatljiva idealizacije za rubne sastavne elemente konstrukcije. S tim u vezi, Slika 4.23 i Slika 4.24 prikazuju rezultate za oba slučaja te se može uočiti relativno mala razlika u rješenjima i sve bolje poklapanje krivulja sa povećanjem razine inicijalnih geometrijskih odstupanja.

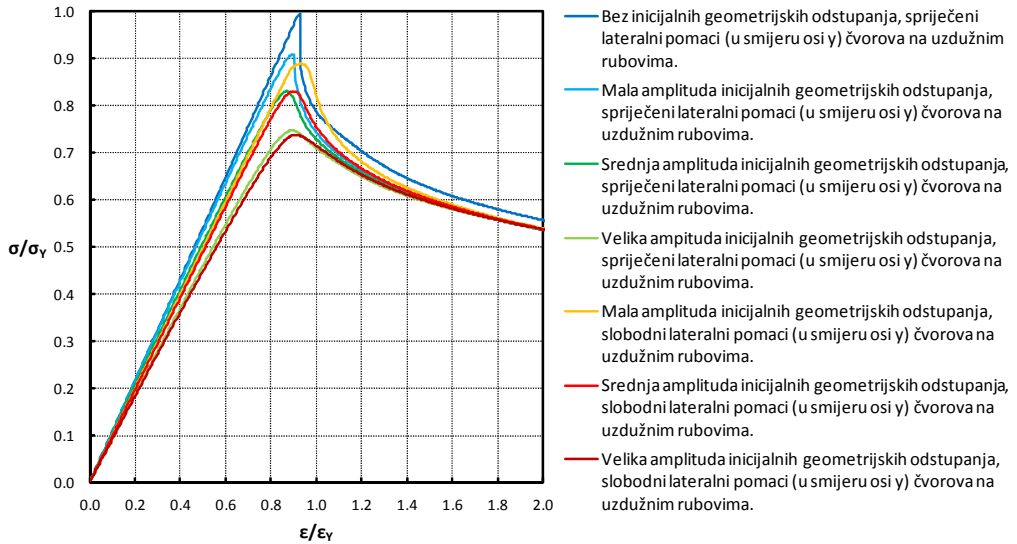
Nadalje, iako se pri razmatranju lokalne uzdužne granične nosivosti pri jednoosnom (tlačnom) opterećenju prema relevantnoj literaturi (npr. [23]) najčešće koriste modeli jednostrukog raspona s jednim poprečnim rebrom po sredini (tzv.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  modeli), nameće se pitanje u kojoj mjeri bi se promijenili rezultati u slučaju modela višestrukih raspona. S tim u vezi, Slika 4.25 i Slika 4.26 prikazuju rješenja za model dvostrukog raspona (tzv.  $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}$  model) sa dva poprečna rebra na jednoj i dvije trećine ukupnog uzdužnog raspona modela. Rješenja za modele trostrukog i četverostrukog raspona nisu prikazana radi problema s konvergencijom pri NLMKE analizi većine modela pri različitim razinama inicijalnih geometrijskih odstupanja. Na prikazanim slikama se može uočiti prilično linearan trend povećanja razlike u graničnoj nosivosti između jednostrukog i dvostrukog modela sa povećanjem razine inicijalnih geometrijskih odstupanja.



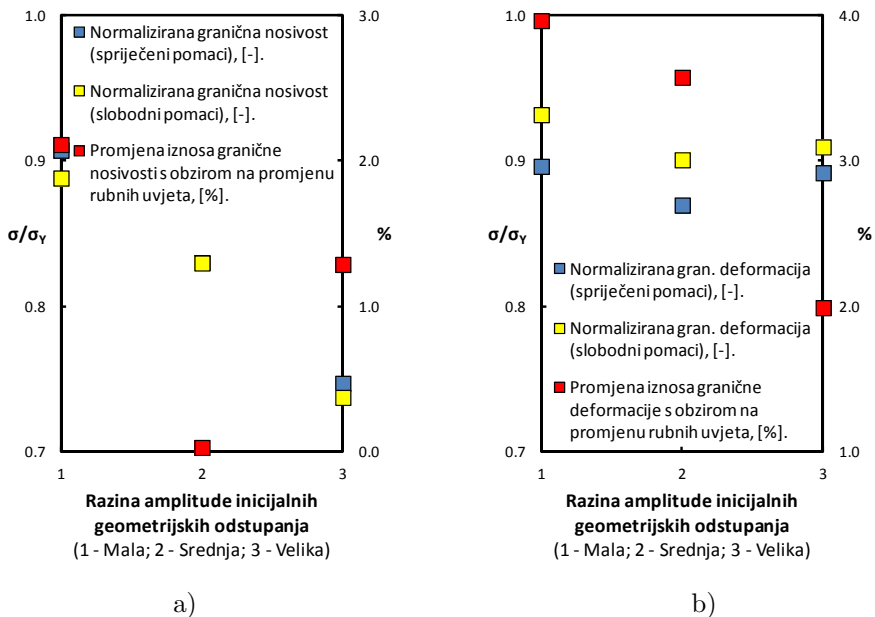
Slika 4.21 Normalizirane  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje razmatranog modela sa i bez IGO.



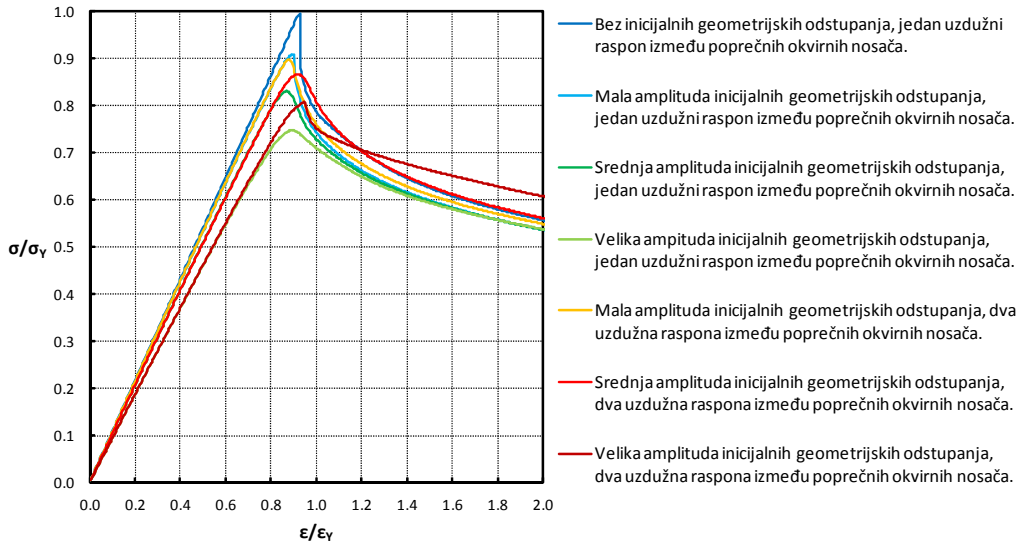
Slika 4.22 Karakteristike graničnog stanja nosivosti razmatranog modela s obzirom na razinu IGO.



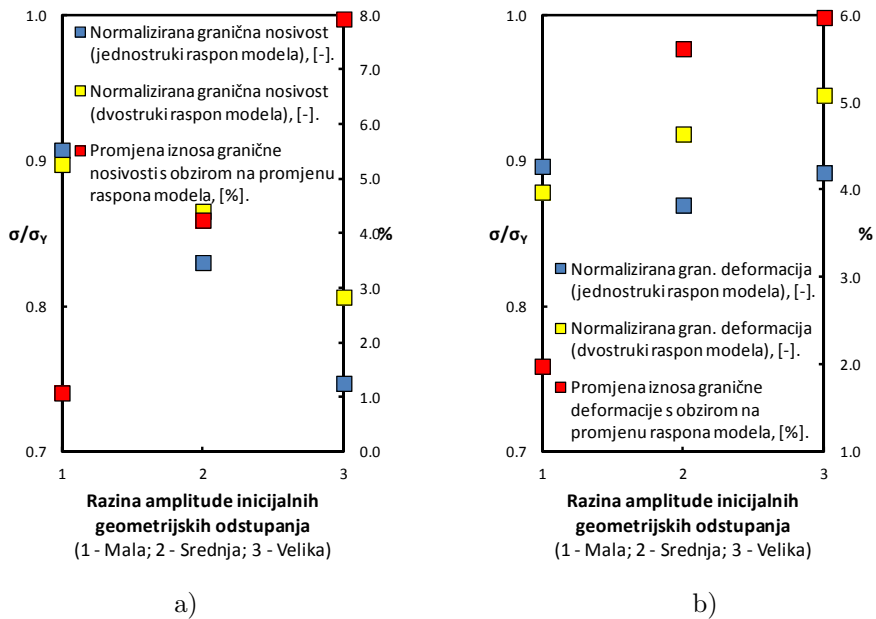
Slika 4.23 Promjena nosivosti s obzirom na različito uvjetovane lateralne pomake uzdužnih rubova razmatranog modela (za različite razine IGO).



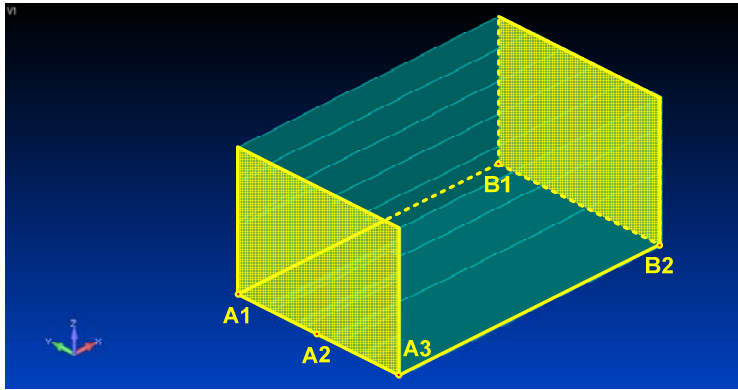
Slika 4.24 Karakteristike graničnog stanja nosivosti s obzirom na različito uvjetovane lateralne pomake uzdužnih rubova razmatranog modela (za različite razine IGO).



Slika 4.25 Promjena nosivosti s obzirom na promjenu uzdužnog raspona razmatranog modela (za različite razine IGO).



Slika 4.26 Karakteristike graničnog stanja nosivosti s obzirom na različiti uzdužni raspon razmatranog modela (za različite razine IGO).



Slika 4.27 Mjesta zadavanja ograničenja popoćenih pomaka i opterećenja za diskretizirani NLMKE model konstrukcije P1.

Polovinski NLMKE model (polovica ukupnog uzdužnog raspona) konstrukcije P1 diskretiziran je sukladno prethodno odabranoj rezoluciji mreže te se sastoji od 78640 konačnih elemenata sa ukupno 78883 čvora (473298 stupnjeva slobode). Svi čvorovi uzdužno orijentiranog materijala (svi dijelovi konstrukcije osim poprečnih okvirnih nosača) dislocirani su sukladno izračunu inicijalnih geometrijskih odstupanja (za srednju razinu amplitude prema Smithu) s izuzetkom čvorova oplate gornjeg pojasa koji su dislocirani sukladno rezultatima mjerenja inicijalnih geometrijskih odstupanja (Slika 4.6).

Kako bi se simuliralo progibno čisto ravno savijanje sukladno prethodno opisanom eksperimentu, opterećenje je zadano u obliku rotacije presjeka A oko osi  $y$  (Slika 4.27) koja se tokom analize inkrementalno mijenja od nulte do zadane vrijednosti (0.0075 rad). Opterećenje je zadano u čvoru koji se nalazi u točki A2 presjeka A te se posredstvom krutih veza (RBE2 element, [36]) prenosi na sve ostale čvorove presjeka A.

Tablica 4.6 Opis čvornih ograničenja pomaka za NLMKE model konstrukcije P1.

Pozicija čvora (Slika 4.27)	Stupnjevi slobode					
	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
A2.	1	0	0	0	0*	0
Presjek „B“.	0	1	1	1	0	0

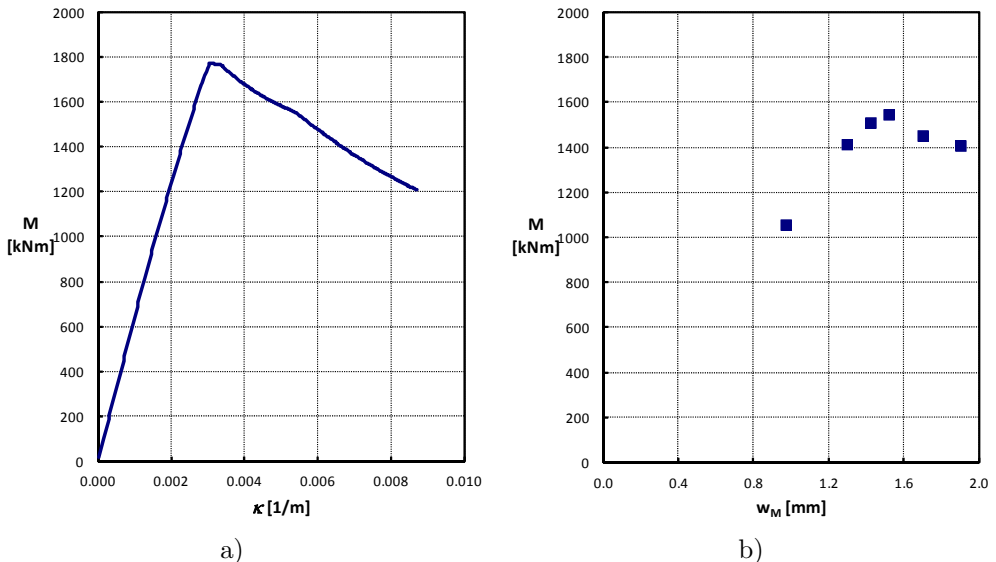
0      Spriječeno.  
 1      Dozvoljeno.  
 \*      U čvoru koji se nalazi u točki A2 zadano je opterećenje rotacijom oko osi  $y$  (koje se preko krutih veza prenosi na sve ostale čvorove presjeka „A“), pri čemu se taj stupanj slobode ograničava isključivo radi pravila zadavanja te vrste opterećenja u korištenoj aplikaciji.



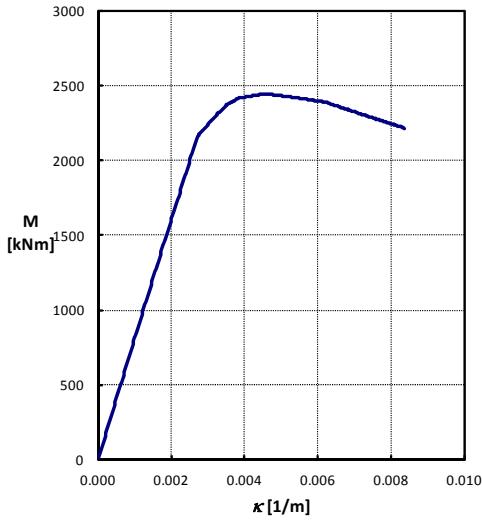
S obzirom da se prilikom provođenja eksperimentalnog testiranja na presjeku A nalazio zavareni spoj s (vrlo krutim) prijenosnikom opterećenja, a presjek B je dio ravnine simetrije (opterećenja i oblika) konstrukcije P1, rubni uvjeti su zadani na način kako opisuje Tablica 4.6.

#### 4.2.2 Usporedba rezultata

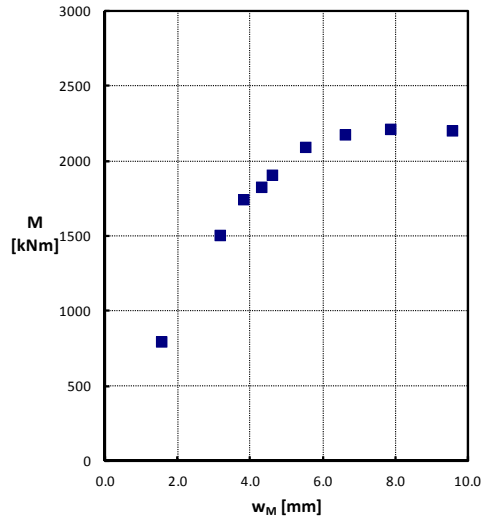
Slika 4.28a prikazuje rezultate analize granične nosivosti konstrukcije P1 pri progibnom čistom ravnom savijanju dobivene primjenom polazne/predložene metode u obliku  $M$ - $\kappa$  dijagrama progresivnog kolapsa. Slika 4.28b prikazuje rezultate analize granične nosivosti iste konstrukcije eksperimentalnim ispitivanjem. S obzirom da su rezultati eksperimentalnog ispitivanja objavljena u obliku ovisnosti opterećenja o prosječnom poprečnom (vertikalnom) pomaku strukova konstrukcije na sredini njenog ukupnog raspona ( $w_M$ ), pri čemu vertikalni pomak težišta (neutralne osi) poprečnog presjeka (relevantan za korektan izračun odgovarajućih iznosa fizikalne zakrivljenosti) ostaje nepoznat, dobivene rezultate nije moguće prikazati u istome obliku, tj. u okviru istoga dijagrama. Analogno prethodnom opisu, Slika 4.29 i Slika 4.30 prikazuju dobivene rezultate za konstrukcije P2 i P3, dok Slika 4.31 prikazuje modele uzdužnih segmenata konstrukcija P1, P2 i P3 (izrađene pomoću računalne aplikacije MAESTRO), na osnovu kojih se provodi diskretizacija za polaznu/predloženu metodu analize progresivnog kolapsa (implementiranu u okviru računalne aplikacije OCTOPUS).



Slika 4.28 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P1 pri čistom ravnom savijanju: a) polaznom/predloženom metodom; b) eksperimentalnim ispitivanjem.

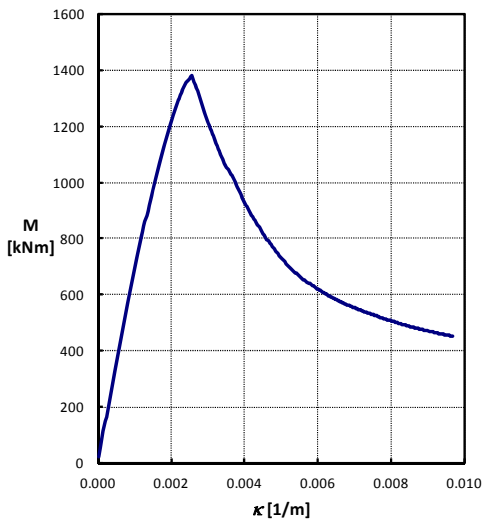


a)

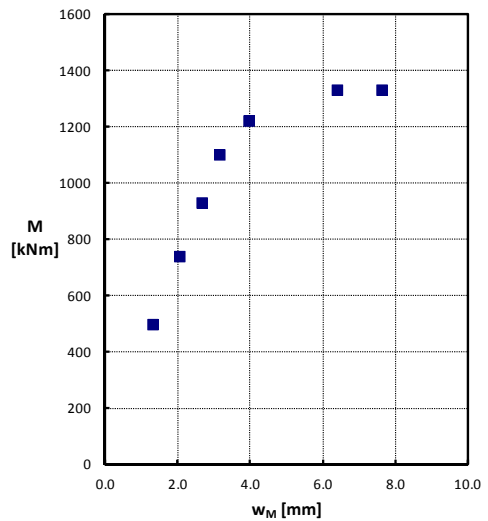


b)

Slika 4.29 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P2 pri čistom ravnom savijanju: a) polaznom/predloženom metodom; b) eksperimentalnim ispitivanjem.

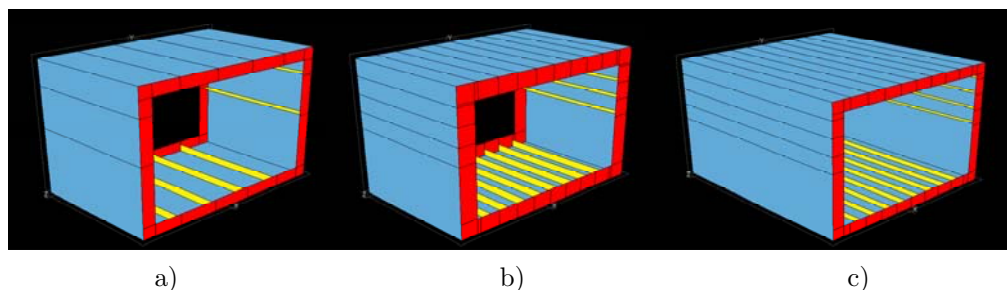


a)



b)

Slika 4.30 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P3 pri čistom ravnom savijanju: a) polaznom/predloženom metodom; b) eksperimentalnim ispitivanjem.



Slika 4.31 Model uzdužnog segmenta (jedan uzdužni raspon između poprečnih okvirnih nosača) razmatranih konstrukcija: a) P1; b) P2; c) P3.

Tablica 4.7 usporedno prikazuje granični moment savijanja određen eksperimentalno i polaznom/predloženom metodom, pri čemu je uočljivo značajnije odstupanje rezultata za konstrukcije P1 i P2 uzrokovano korištenim  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljama te pravilima diskretizacije. Naime, kritični dio sve tri konstrukcije (ukrepljeni gornji pojas) diskretizira se gotovo u potpunosti gredama tankostjenog presjeka. Utvrđeno je pri tome da je za te elemente u sva tri slučaja referentni način gubitka nosivosti gredno-štapno izvijanje, opisano odgovarajućom  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljom. U slučaju konstrukcije P1, s obzirom na relativno veliku vitkost oplata (između ukrepa) gornjeg pojasa i njen relativno mali aspektni odnos, gubitak nosivosti gornjeg pojasa zapravo je dominantno uvjetovan s kolapsom oplata, a ne ukrepa (sa sunosivom širinom oplata). U slučaju konstrukcije P2, dvostruko veći broj ukrepa, manja vitkost i veći aspektni odnos oplata između ukrepa rezultiraju boljim opisom nosivosti sastavnih elemenata kritičnog dijela konstrukcije, tj. u konačnici i manjim odstupanjem od eksperimentalnih rezultata. U slučaju konstrukcije P3, velik broj ukrepa velike duljine između oslonaca (eng. *unsupported length*) te ostale geometrijske i materijalne karakteristike oplata i ukrepa unutar tlačne zone uvjetuju dominantnost gredno-štapnog karaktera kolapsa tog dijela konstrukcije u zbilji, što u konačnici rezultira i relativno malim odstupanjem od eksperimentalnih rezultata.

Tablica 4.7 Usporedba dobivenih rezultata s obzirom na eksperiment.

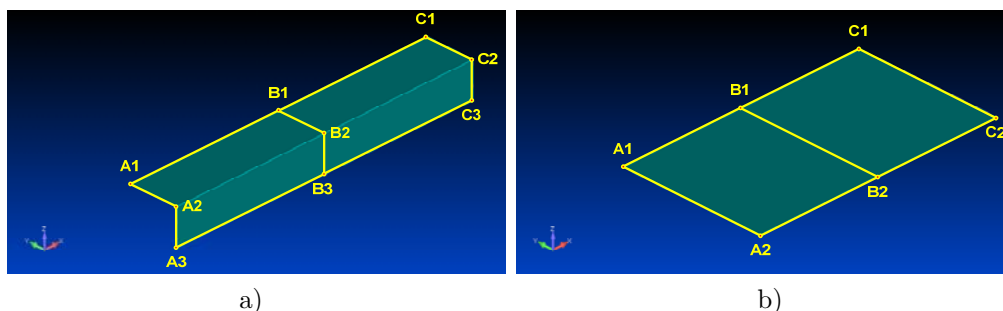
Oznaka konstrukcije	Granični moment savijanja [kNm]		Relativno odstupanje*
	Eksploiment	Predložena metoda	
P1	1546.7	1771.6	-12.69 %
P2	2214.1	2444.4	-9.42 %
P3	1331.6	1379.6	3.48 %

\* Relativno odstupanje računa se na sljedeći način:  $\% = (M_{UE} - M_{UP}) / M_{UP} \cdot 100$ ;  
 $M_{UE}$  Granični moment savijanja određen eksperimentalno;  
 $M_{UP}$  Granični moment savijanja određen polaznom/predloženom metodom;

Na temelju gornjih razmatranja može se zaključiti da korištene (IACS-ove)  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje uz zadana pravila diskretizacije nisu univerzalno podobne za proizvoljne konfiguracije ukrepljenih panela, tj. da se njihovom primjenom u slučaju ukrepljenih panela vitke oplate s relativno malim brojem ukrepa ne postižu zadovoljavajuće dobri rezultati. S obzirom da će se unutar narednog poglavlja razmatrati rezultati dobiveni predloženom metodom zasnovanoj na primjeni korekcija obrazloženih u glavi 2 ovoga rada, poželjno je loš utjecaj korištenih krivulja na konačne rezultate analize svesti na najmanju mjeru.

U tu svrhu će se za sve diskretne sastavne elemente konstrukcije P1 (koji tokom analize progresivnog kolapsa mogu biti opterećeni tlačno) definirati  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje provedbom NLMKE analiza nad jednoosno uzdužno (tlačno) opterećenim modelima diskretiziranim u referentnoj rezoluciji mreže s inicijalnim geometrijskim odstupanjima srednje razine amplitude prema Smithu. Kako bi se mogle na odgovarajući način uključiti u polaznu/predloženu metodu, dobivene  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje će se aproksimirati pomoću nategnutog B-splinea [59], koristeći postojeće fortranske potprograme dostupne u okviru javne biblioteke FITPACK [60]. Pri generiranju  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za modele ukrepa sa sunosivom širinom oplate gornjeg pojasa i struka konstrukcije P1 korišteni su rubni uvjeti identični onima koji su korišteni pri studiji konvergencije rješenja (Slika 4.7, Tablica 4.4). Mjesta zadavanja i opis rubnih uvjeta za model krutih kutova prikazuje Slika 4.32a i Tablica 4.8, a Slika 4.32b i Tablica 4.9 za model poprečno orebrenе oplate.

Slika 4.33 do Slika 4.37 prikazuju rezultirajuće  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za sve razmatrane diskretne sastavne elemente usporedno sa svim IACS-ovim  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljama (relevantnim za pojedini diskretni sastavni element). Pri tome se (osim u slučaju gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplate struka konstrukcije) može uočiti značajnije odstupanje između IACS-ovih i NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja, što je naročito izraženo u slučaju poprečno orebrenе oplate.



Slika 4.32 Mjesta zadavanja rubnih uvjeta: a) Kruti kut; b) Poprečno orebrena oplata.

Tablica 4.8 Opis čvornih ograničenja pomaka (kruti kut).

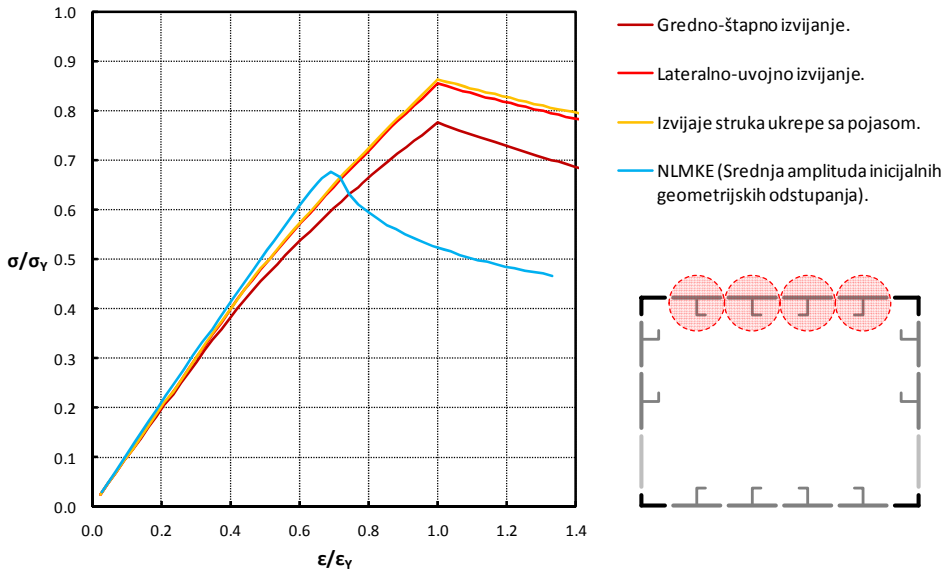
Pozicija čvora (Slika 4.32a)	Stupnjevi slobode					
	T <sub>x</sub>	T <sub>y</sub>	T <sub>z</sub>	R <sub>x</sub>	R <sub>y</sub>	R <sub>z</sub>
⟨A1-A2⟩, [A2-A3], ⟨C1-C2⟩, [C2-C3].	0*	1	1	1	0	0
⟨A1-B1⟩, ⟨B1-C1⟩.	1	0	1	0	1	0
⟨A3-B3⟩, ⟨B3-C3⟩.	1	1	0	0	1	0
⟨B1-B2⟩.	1	1	0	1	1	1
⟨B2-B3⟩.	1	0	1	1	1	1
B2.	1	0	0	1	1	1
B1, B3.	1	0	0	0	1	0
A1, C1.	0*	0	1	0	0	0
A3, C3.	0*	1	0	0	0	0

0      Spriječeno.  
 1      Dozvoljeno.  
 \*      U svim čvorovima presjeka „A“ zadana je jednaka vrijednost opterećenja (pomak u pozitivnom smjeru osi  $x$ ), pri čemu se taj isti stupanj slobode ograničava isključivo radi pravila zadavanja te vrste opterećenja u korištenoj aplikaciji.

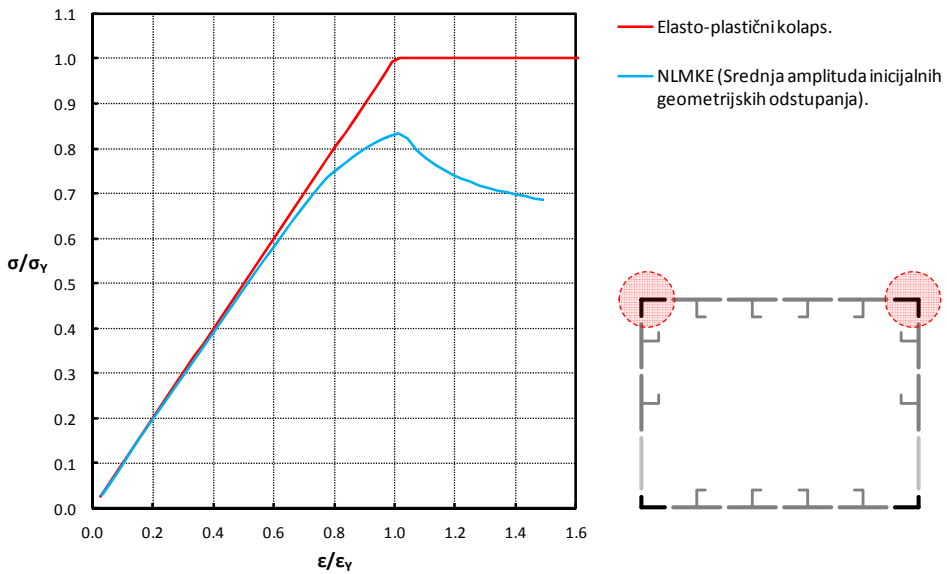
Tablica 4.9 Opis čvornih ograničenja pomaka (poprečno orebrena oplata).

Pozicija čvora (Slika 4.32b)	Stupnjevi slobode					
	T <sub>x</sub>	T <sub>y</sub>	T <sub>z</sub>	R <sub>x</sub>	R <sub>y</sub>	R <sub>z</sub>
⟨A1-A2⟩, ⟨C1-C2⟩.	0*	1	1	1	0	0
⟨A1-B1⟩, [B1-C1], ⟨A2-B2⟩, [B2-C2].	1	0	0	0	1	0
⟨B1-B2⟩	1	1	0	1	1	1
A1, A2, C1, C2.	0*	0	0	0	0	0

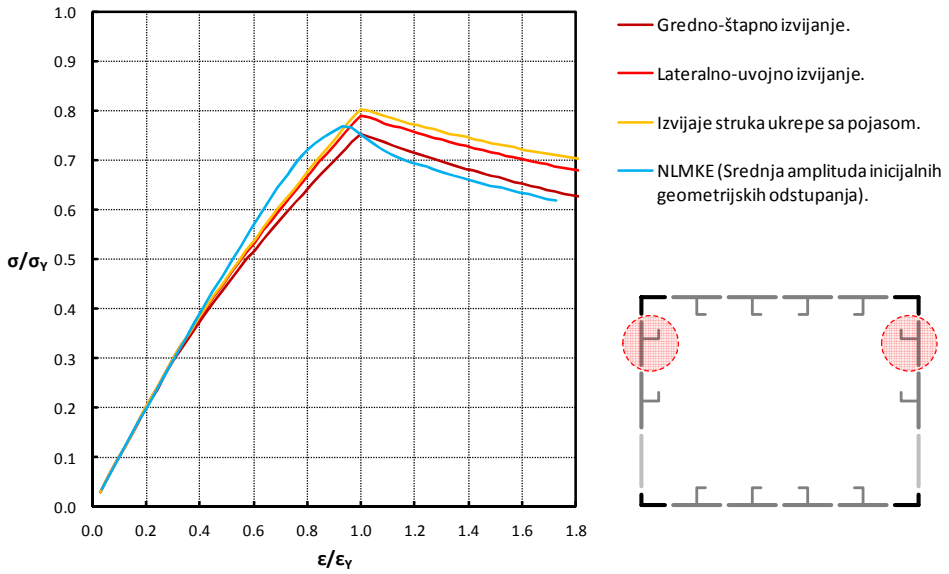
0      Spriječeno.  
 1      Dozvoljeno.  
 \*      U svim čvorovima presjeka „A“ zadana je jednaka vrijednost opterećenja (pomak u pozitivnom smjeru osi  $x$ ), pri čemu se taj isti stupanj slobode ograničava isključivo radi pravila zadavanja te vrste opterećenja u korištenoj aplikaciji.



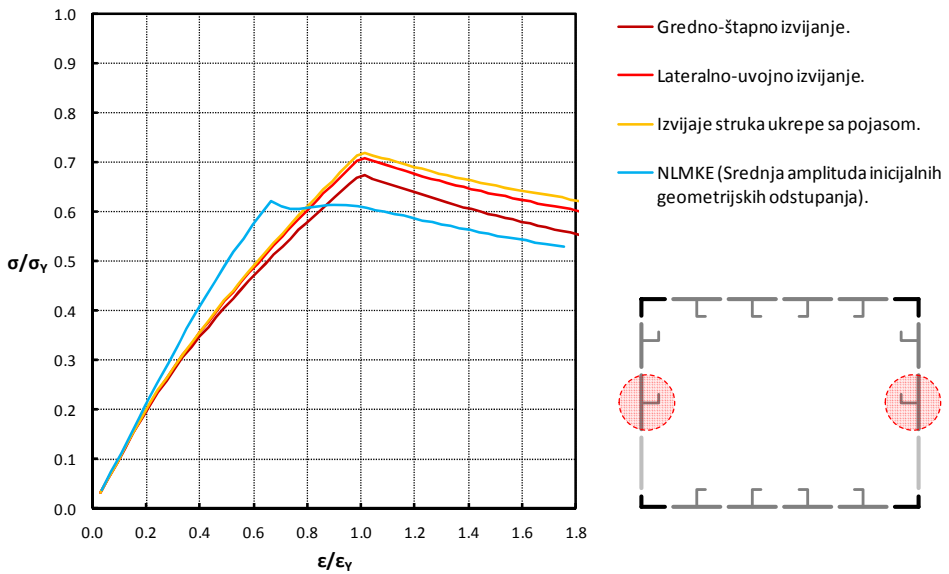
Slika 4.33 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1.



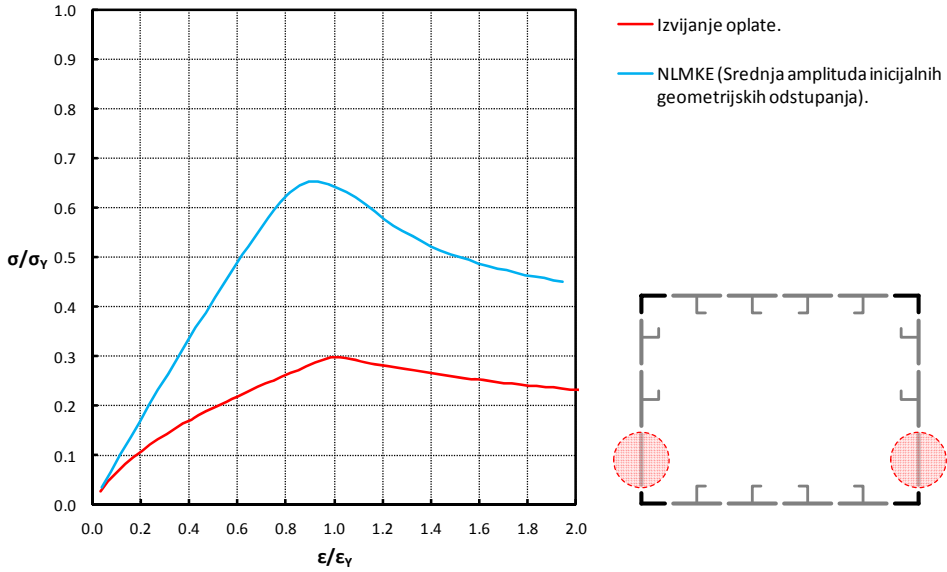
Slika 4.34 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1.



Slika 4.35 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplate struka konstrukcije P1.

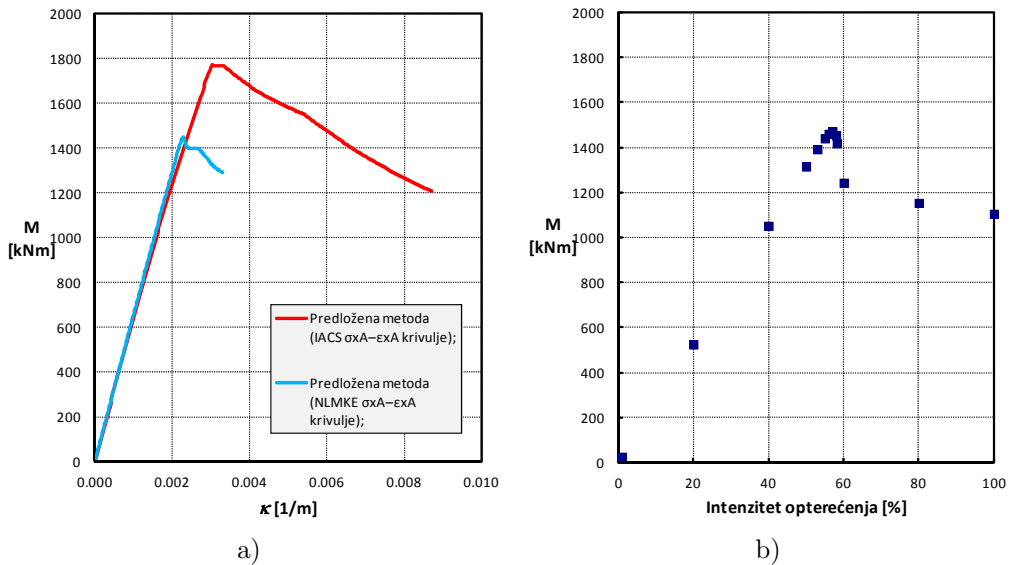


Slika 4.36 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente donjih ukrepa sa sunosivom širinom oplate struka konstrukcije P1.



Slika 4.37 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente oplate struka konstrukcije P1.

Slika 4.38a usporedno prikazuje rezultate analize granične nosivosti konstrukcije P1 pri čistom ravnom savijanju dobivene polaznom/predloženom metodom uz upotrebu IACS-ovih i NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja. Pri tome se može uočiti



Slika 4.38 Rezultati analize granične nosivosti konstrukcije P1 pri čistom ravnom savijanju: a) predloženom metodom (IACS/NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje); b) NLMKE.



značajno odstupanje među dobivenim vrijednostima graničnog momenta savijanja (22.18 %). Slika 4.38b prikazuje vrijednosti momenta unutrašnjih uzdužnih sila (na središnjem poprečnom presjeku konstrukcije P1) za pojedine inkremente intenziteta narinutog opterećenja pri NLMKE analizi.

S obzirom da je za razmatrani slučaj (konstrukcije i opterećenja) odstupanje vrijednosti graničnog momenta savijanja određenog polaznom/predloženom metodom (uz primjenu NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja) u odnosu vrijednost određenu NLMKE analizom svega 1.52 %, može se zaključiti da takav pristup razmatranom problemu predstavlja kvalitetnu alternativu NLMKE analizi globalnog modela razmatrane konstrukcije. Uz vrlo dobro poklapanje rezultata, na taj način mogu se postići značajnije uštede u vremenu potrebnom za izgradnju modela konstrukcije te provedbu analize, što naročito dolazi do izražaja u slučaju složenih tankostjenih konstrukcija sastavljenih od mnoštva elemenata identičnih geometrijskih i materijalnih svojstava (jedna  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za sve identične sastavne elemente).

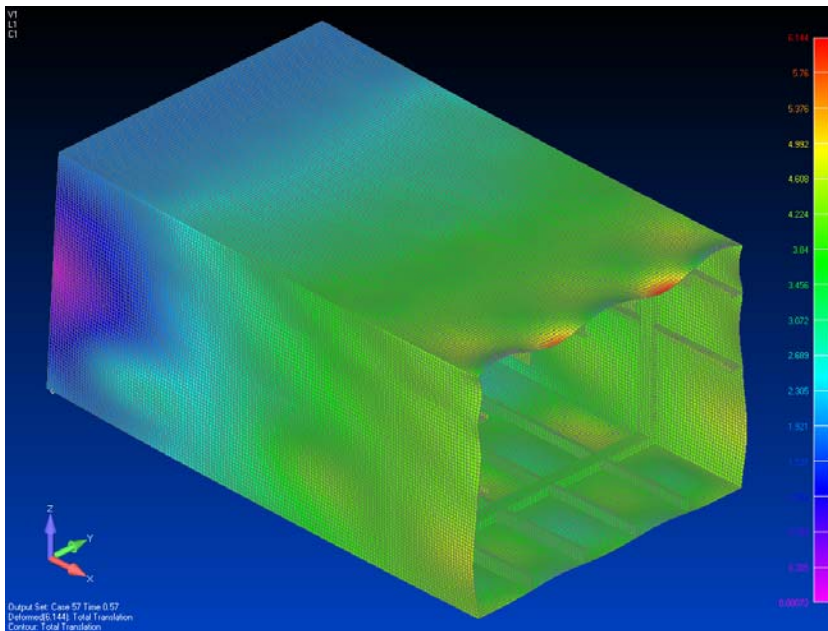
Tablica 4.10 usporedno prikazuje rezultate svih primijenjenih simulacijskih metoda s obzirom na eksperimentalne rezultate (za konstrukciju P1). Pri tome se može uočiti da se primjenom NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja postigla gotovo dvostruko bolja razina točnosti rezultata dobivenih polaznom/predloženom metodom. Isto tako, nezanemariva je činjenica da je pri tome dobiveni rezultat konzervativnog karaktera („na strani sigurnosti“) u odnosu na eksperimentalnu referencu, za razliku od rezultata dobivenog primjenom IACS-ovih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja. U konačnici, može se zaključiti da se primjenom NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja u razmatranom slučaju štetan utjecaj formulacije korištenih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja na konačan rezultat (granični moment savijanja) smanjio na zadovoljavajuću razinu, čime se omogućava točnija i jasnija raščlamba rezultata dobivenih primjenom predložene metode pri poprečnom ravnom savijanju, razmatranom u okviru narednog poglavlja.

Slika 4.39 do Slika 4.42 prikazuju raspodjele različitih odzivnih karakteristika za razmatrani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti.

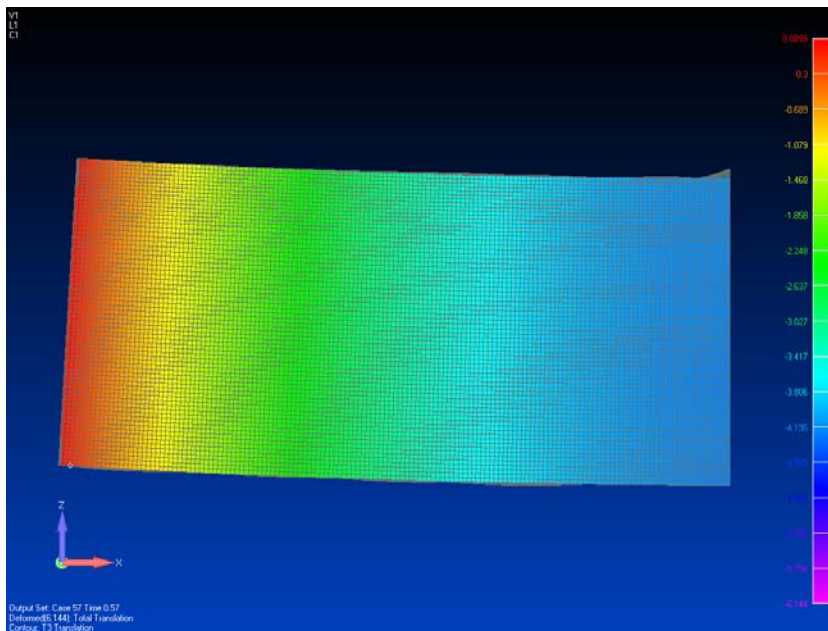
Tablica 4.10 Usporedba dobivenih rezultata s obzirom na eksperiment.

Metoda analize konstrukcije P1	$M_U$ [kNm]	Relativno odstupanje*
NLMKE	1472.1	5.07 %
Predložena metoda (NLMKE krivulje)	1450.1	6.66 %
Predložena metoda (IACS krivulje)	1771.6	-12.69 %

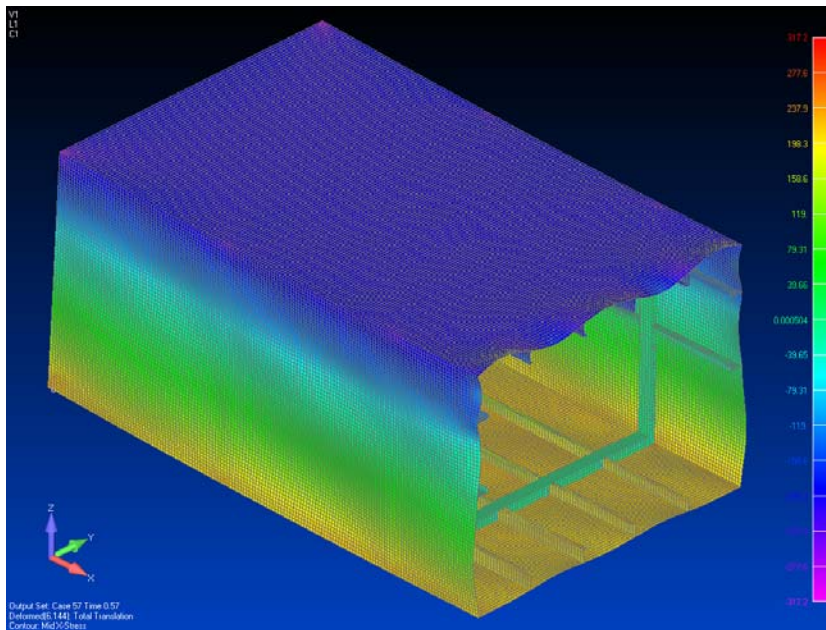
\* Relativno odstupanje računa se s obzirom na eksperimentalni rezultat i to na sljedeći način: % =  $(M_{UE} - M_U) / M_U \cdot 100$ ;



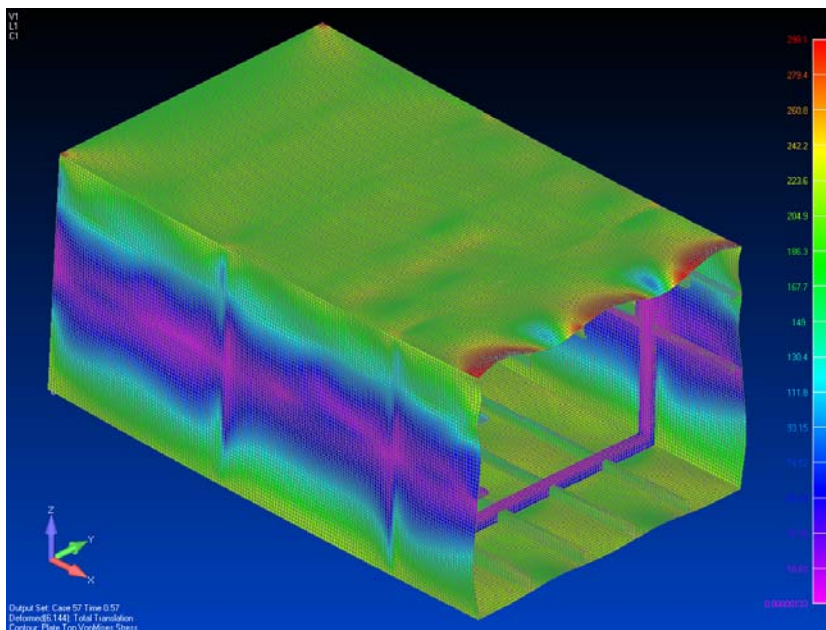
Slika 4.39 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: Ukupni pomaci (karikirani) [mm].



Slika 4.40 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: Vertikalni pomaci (karikirani) [mm].



Slika 4.41 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti:  $\sigma_x$  za središnju plohu (eng. *mid-plane*) elementa [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ].



Slika 4.42 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti: Ekvivalentna (VonMises) naprezanja [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ].

### 4.3 Poprečno ravno savijanje ukrepljenog kutijastog tankostjenog nosača

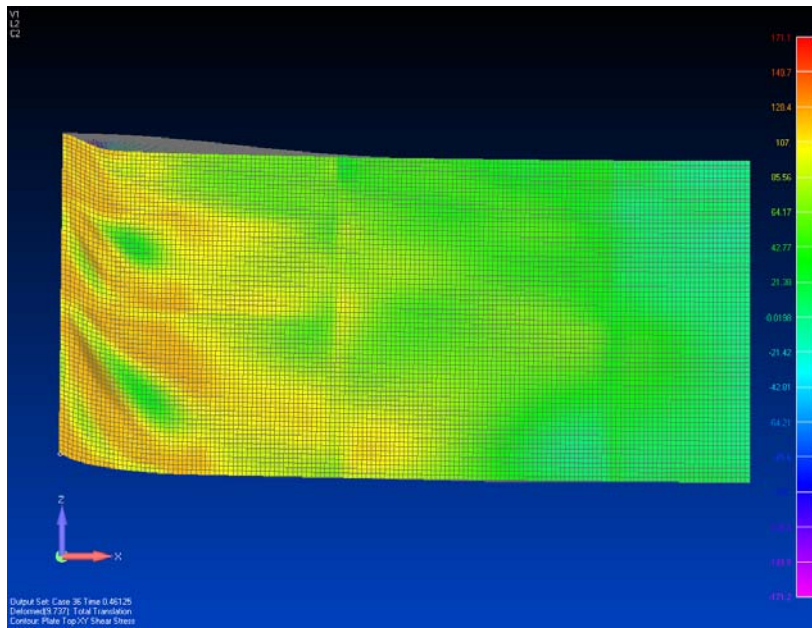
NLMKE analizom konstrukcije P1 za dva različita slučaja poprečnog savijanja raspodijeljenim poprečnim opterećenjem (opisanim unutar odjeljka 4.3.1) pokazalo se da je granično stanje nosivosti konstrukcije P1 pri poprečnom savijanju određeno smičnim kolapsom konstrukcije. Uzrok tome je relativno mala debljina (3.18 mm) oplata strukova konstrukcije, koju stoga pri prijenosu narinutog poprečnog opterećenja karakteriziraju značajni iznosi smičnih naprezanja u području poprečnih presjeka konstrukcije na kojima su iznosi smičnog opterećenja (Slika 4.46 i Slika 4.47) najznačajniji. S tim u vezi, Slika 4.43 i Slika 4.44 prikazuju deformirani oblik i smična naprezanja u oplati struka konstrukcije P1 u graničnom stanju nosivosti za slučaj opterećenja R1, odnosno R2 (Tablica 4.11).

S obzirom da su realne savojno opterećene monotone tankostjene konstrukcije tokom eksploatacije najčešće opterećene poprečnim savijanjem te da su vrlo rijetko (ako ikad) izložene čistom savijanju, može se zaključiti da evaluacija graničnog stanja nosivosti zasnovana na razmatranju njihove uzdužne granične nosivosti pri isključivo ekstremnom čistom savijanju (bez obzira na korištenu metodologiju – NLMKE ili alternativne metode) može dovesti do kvalitativno i kvantitativno pogrešnih zaključaka vezano za vrstu i vrijednost graničnog opterećenja, a time i do netočne identifikacije kritičnog poprečnog presjeka i njemu pripadajuće kolapsne sekvence. Naime, na primjeru konstrukcije P1, ilustrirana je mogućnost pojave smičnog globalnog kolapsa konstrukcije u općem slučaju realnog poprečnog opterećenja, pri čemu su rezultati dobiveni u prethodnom poglavlju ove glave irelevantni za procjenu njene stvarne razine i rezerve sigurnosti.

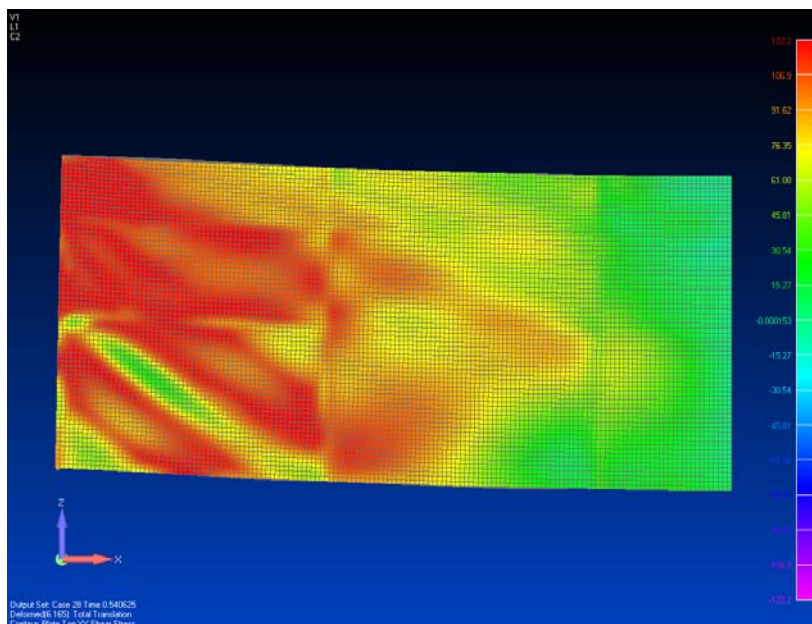
Dijametralno suprotni slučaj predstavljaju konstrukcije čije materijalne i geometrijske karakteristike uvjetuju izvjesnost pojave isključivo uzdužnog globalnog kolapsa na poziciji najvećeg momenta savijanja, bez obzira na kvalitativne i kvantitativne karakteristike raspodjela narinutog poprečnog opterećenja.

Međutim, u procesu konceptualne sinteze konstrukcije potrebno je razmotriti mnogobrojne i različite projektne varijante opterećene različitim relevantnim slučajevima projektnih opterećenja, pri čemu se mnoge među njima ne mogu svrstati u dva prethodno spomenuta ekstremna slučaja. Kod takvih projektnih varijanti konstrukcije dominantna je pojava uzdužnog globalnog kolapsa, pri čemu su smični efekti dovoljno izraženi i značajni da utječu na poziciju (poprečni presjek) njegove pojave, kao i na vrijednost uzdužne granične nosivosti.

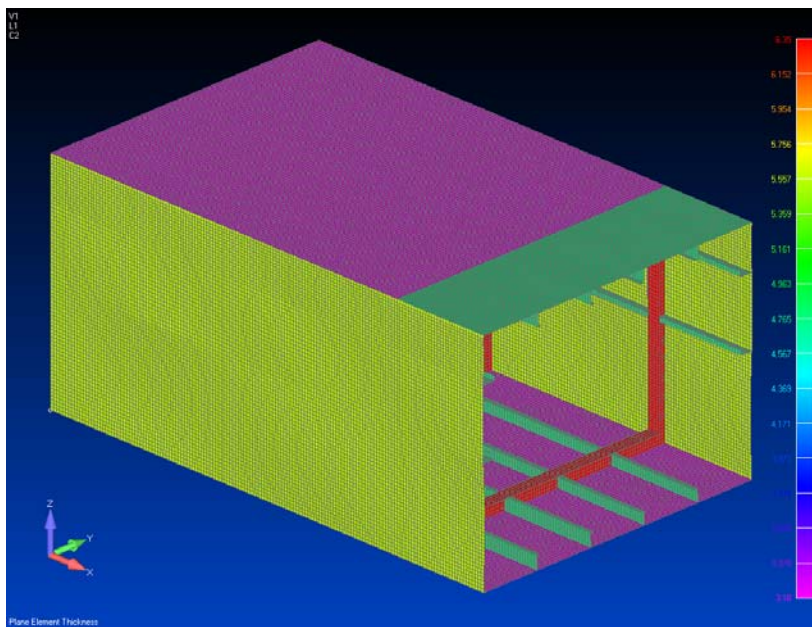
U okviru ovoga poglavlja razmatrati će se varijanta konstrukcije P1, koja će se radi konzistentnosti u označavanju označiti kao konstrukcija P1A, a kojoj je debljina oplata struka povećana sa 3.18 mm na 5.56 mm (Slika 4.45).



Slika 4.43 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 opterećen raspodjelom R1 u graničnom stanju nosivosti (46.1 % opterećenja):  $\tau_{xy}$  [N/mm<sup>2</sup>].



Slika 4.44 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1 opterećen raspodjelom R2 u graničnom stanju nosivosti (54.1 % opterećenja):  $\tau_{xy}$  [N/mm<sup>2</sup>].



Slika 4.45 Debljine oplata sastavnih elemenata modela konstrukcije P1A [mm].

Izborom nove vrijednosti debljine oplata struka nastoji se s jedne strane onemogućiti pojava smičnog kolapsa pri inkrementiranju narinutog opterećenja, dok se sa druge strane nastoji istaknuti značaj smičnih efekata. Nadalje, debljina oplata gornjeg i donjeg pojasa je smanjena sa 4.76 mm na 3.5 mm, osim unutar područja središnjeg uzdužnog segmenta (Slika 4.5, A-I) gdje je debljina oplata gornjeg pojasa ostala nepromijenjena (4.76 mm). Na ovaj način želi se omogućiti pojava uzdužnog globalnog kolapsa na alternativnim pozicijama (poprečnim presjecima) duž konstrukcije. Sve ostale geometrijske i materijalne karakteristike modela P1 su nepromijenjene.

Poprečno opterećenje sukladno raspodijeli R1 i/ili R2 je u okviru svih razmatranih NLMKE modela zadano na osnovu  $q_z(x)$ , pri čemu je uzdužna raspodjela  $q_z(x)$  simulirana definiranjem odgovarajućih vrijednosti vertikalnih čvornih sila na svim čvorovima duž oba (kruta) ruba spoja strukova i donjeg pojasa razmatrane konstrukcije (Slika 4.27; ⟨A1-B1⟩ i ⟨A3-B2⟩).

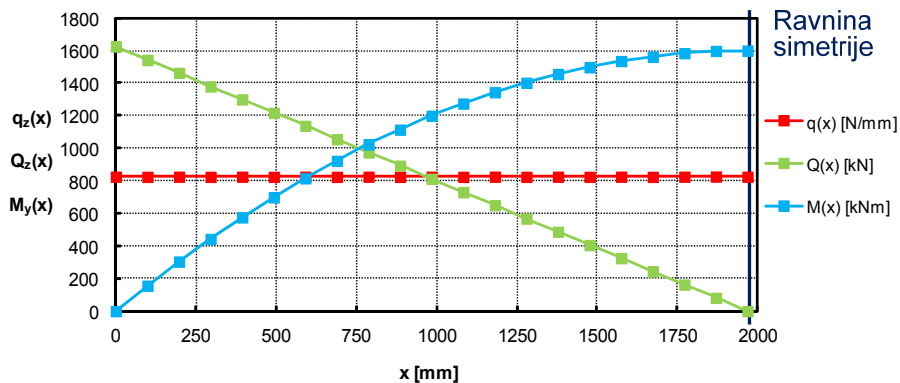
Ograničenja čvornih pomaka su za sve razmatrane NLMKE modele zadana na jednaki način kao u prethodno razmatranom slučaju čistog savijanja konstrukcije P1 (Slika 4.27, Tablica 4.6).

### 4.3.1 Razmatrani slučajevi raspodijeljenog poprečnog opterećenja

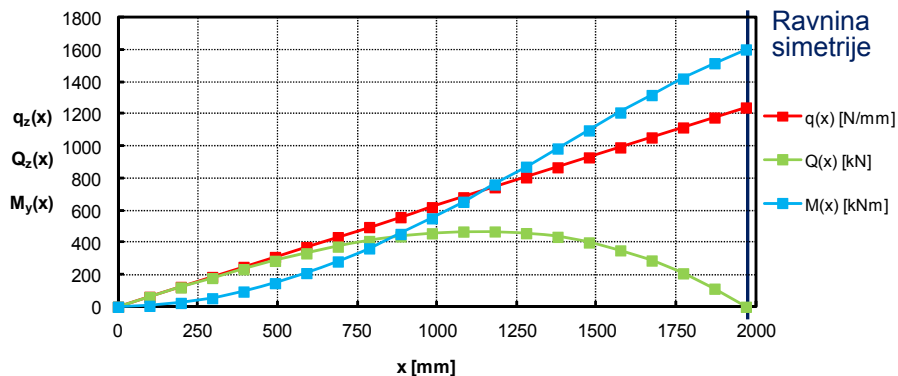
Pri provedbi numeričkih simulacija poprečnog savijanja pomoću NLMKE, razmatrana su dva različita slučaja uzdužno raspodijeljenog simetričnog (s obzirom na polovicu uzdužnog raspona konstrukcije  $L/2$ ) poprečnog opterećenja, čije formulacije prikazuje Tablica 4.11. U oba slučaja, opterećenje je jednoznačno određeno izborom takvog  $q_z(x)$  koji na polovici uzdužnog raspona razmatrane konstrukcije uzrokuje vrijednost  $M_y(L/2)$  jednaku 1600 kNm. Izborom spomenute vrijednosti  $M_y(L/2)$  nastoji se osigurati pojava graničnog stanja nosivosti razmatrane konstrukcije unutar (pri kraju) raspona inkrementiranja narinutog opterećenja tijekom NLMKE analize. Kvantitativni prikaz korištenih uzdužnih raspodjela poprečnog opterećenja za razmatranu polovicu uzdužnog raspona konstrukcije P1 i/ili P1A prikazuju Slika 4.46 i Slika 4.47.

Tablica 4.11 Formulacije razmatranog poprečnog opterećenja.

Oznaka opterećenja	$q_z(x)$ [N/mm]	$Q_z(x)$ [N]	$M_y(x)$ [Nmm]
R1	825.81	$q_z(x)\left(\frac{L}{2} - x\right)$	$\frac{q_z(x)}{2}x(L - x)$
R2	$0.62927x$	$\frac{q_z(x)}{4L}(L^2 - 4x^2)$	$\frac{q_z(x)L}{12}x\left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3L^2}\right)$



Slika 4.46 Kvantitativni prikaz poprečnog opterećenja sukladno raspodjeli R1.

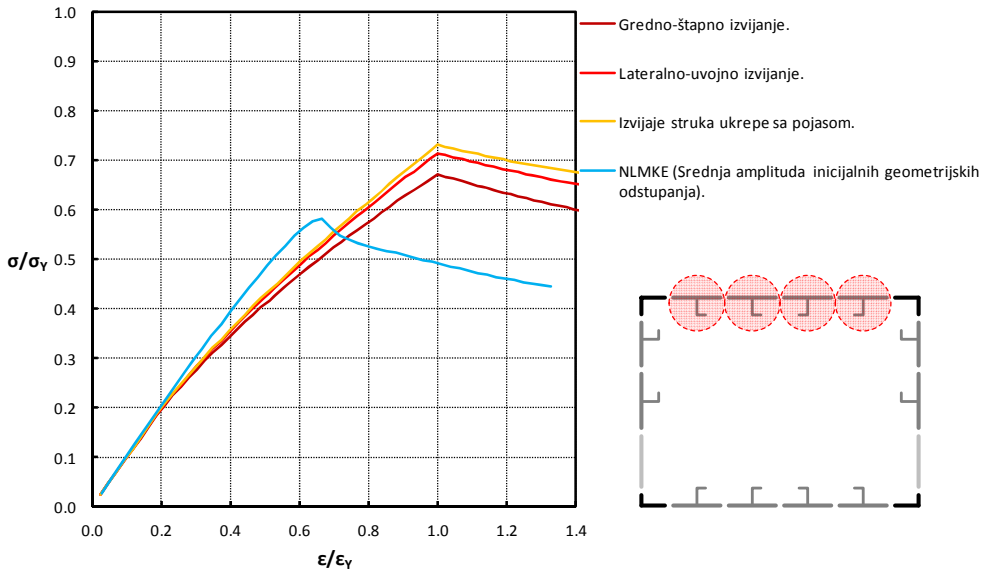


Slika 4.47 Kvantitativni prikaz poprečnog opterećenja sukladno raspodjeli R2.

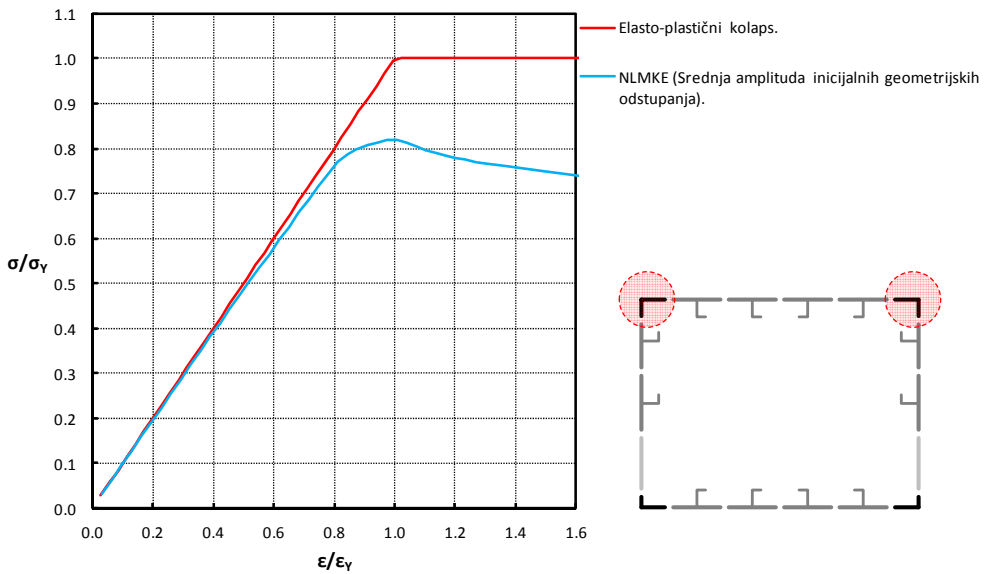
### 4.3.2 Usporedba rezultata

S obzirom da je konstrukcija P1A geometrijski različita u odnosu na konstrukciju P1 (debljine oplata struka te gornjeg i donjeg pojasa) potrebno je odrediti i novi skup odgovarajućih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja koje će se koristiti u okviru predložene metode. S tim u vezi, Slika 4.48 do Slika 4.52 prikazuju rezultirajuće  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za sve diskretne sastavne elemente konstrukcije P1A (koji tokom opterećivanja mogu biti tlačno opterećeni) usporedno sa svim IACS-ovim  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivuljama (relevantnim za pojedini diskretni sastavni element). Pri tome se može uočiti sličan trend međuodnosa IACS-ovih i NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja, prethodno ustanovljen na skupu  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za konstrukciju P1. U okviru ovoga odjeljka usporediti će se rezultati dobiveni primjenom polazne i predložene metode, sa rezultatima dobivenim NLMKE analizama (polovinskog) modela konstrukcije P1A.

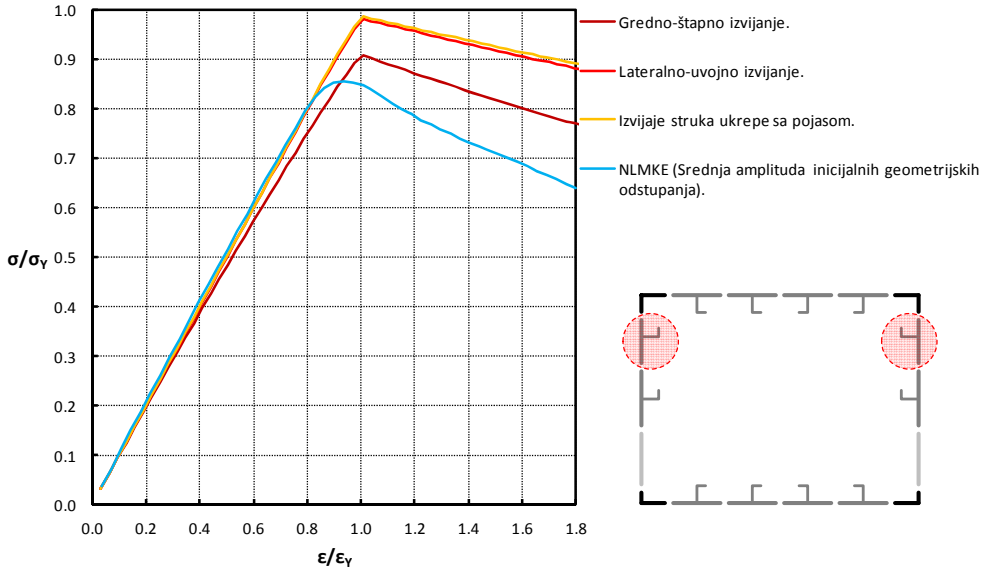




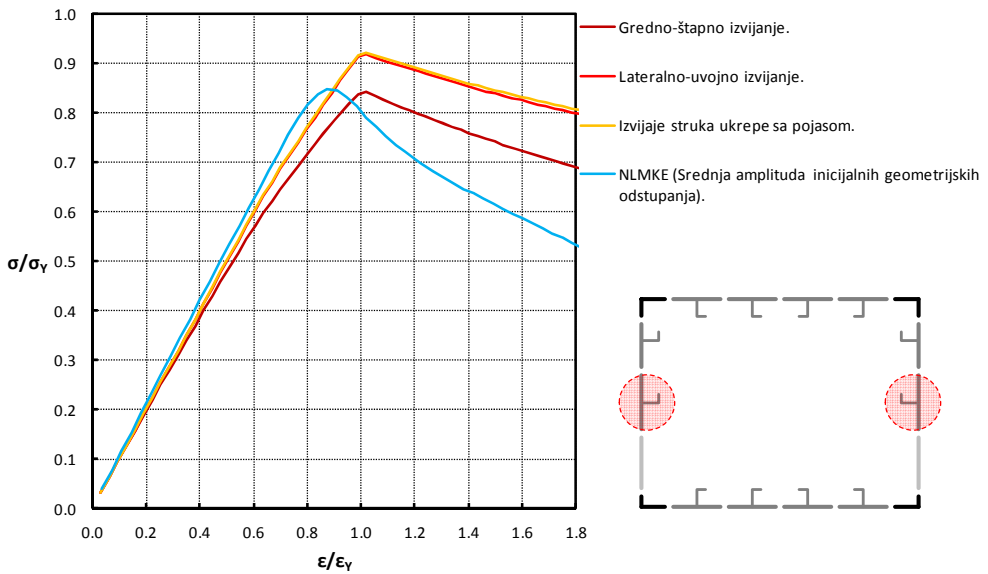
Slika 4.48 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente ukrepa sa sunosivom širinom oplate gornjeg pojasa konstrukcije P1A.



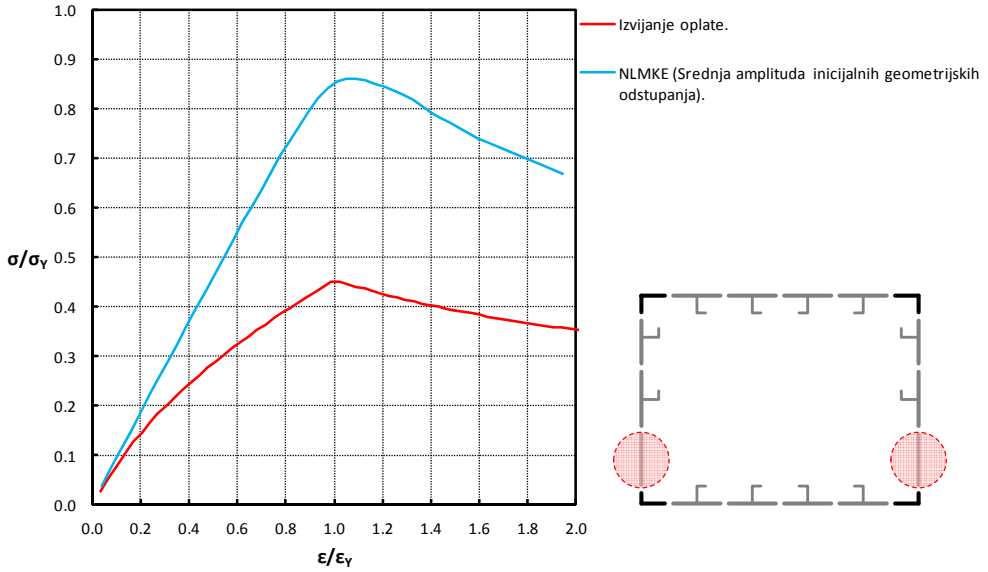
Slika 4.49 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente krutih kutova spoja oplate gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1A.



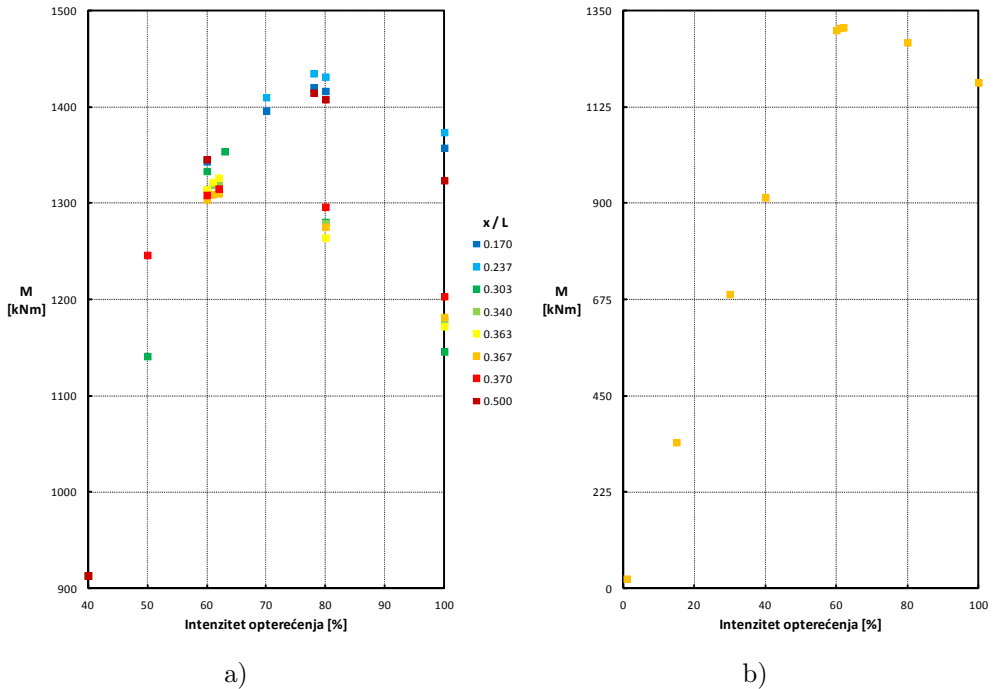
Slika 4.50 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A.



Slika 4.51 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente donjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A.



Slika 4.52 Usporedba IACS i NLMKE  $\sigma_{xA} - \epsilon_{xA}$  krivulja za diskretne sastavne elemente oplate struka konstrukcije P1A.



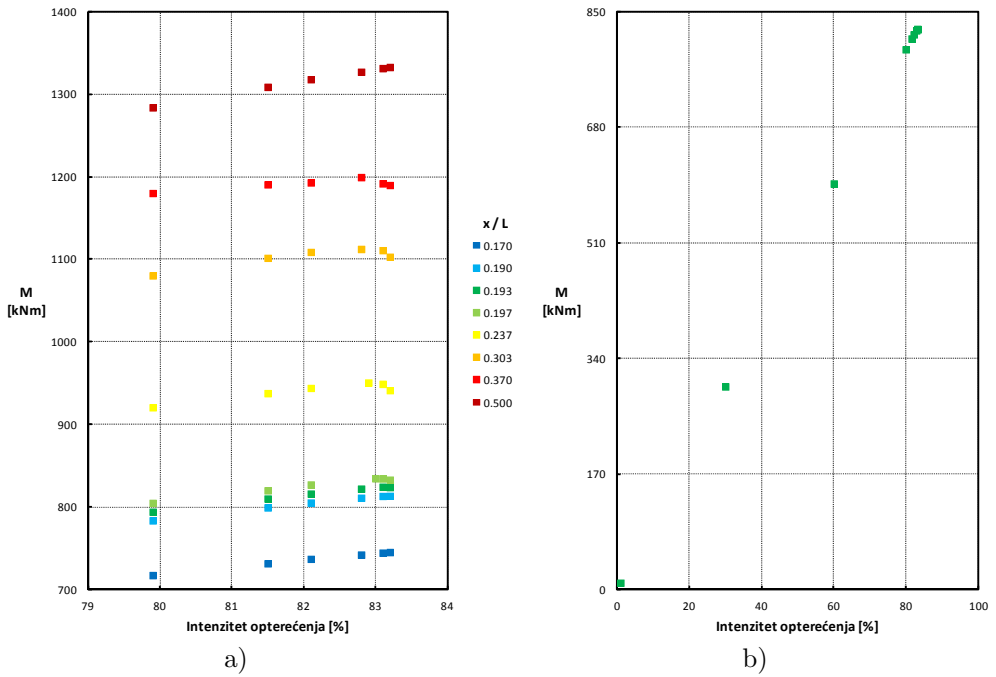
Slika 4.53 Uzdužna (granična) nosivost konstrukcije P1A opterećene čistim savijanjem: a) različiti poprečni presjeci; b) kritični presjek ( $x/L = 0.367$ ).

Osim NLMKE analiza poprečnog savijanja konstrukcije P1A (sukladno raspodjelama R1 i R2), provedena je i NLMKE analiza čistog savijanja, pri čemu su opterećenje i ograničenja poopćenih pomaka definirani jednako kao u slučaju konstrukcije P1. S time u vezi Slika 4.56 i Slika 4.57 prikazuju ukupne pomake i uzdužna normalna naprezanja u graničnom stanju nosivosti (62 % narinutog opterećenja). S obzirom da se (za razliku od konstrukcije P1) kritični presjek konstrukcije P1A pri čistom savijanju ne nalazi na polovici ukupnog uzdužnog raspona konstrukcije ( $x/L = 0.5$ ), potrebno je točno identificirati njegovu poziciju. S time u vezi, Slika 4.53a prikazuje promjenu uzdužne nosivosti ovisno o intenzitetu (inkrementu) narinutog opterećenja za nekoliko različitih poprečnih presjeka (uključujući i kritični), pri čemu se prikazani rezultati odnose na šest različitih stanja nosivosti konstrukcije (uključujući i granično). Najmanja vršna vrijednost uzdužne nosivosti (1310.0 kNm) postignuta je na poprečnom presjeku  $x/L = 0.367$ , pri 62 % narinutog opterećenja te se stoga taj presjek identificira kao kritičan, a njemu pripadajuća vršna vrijednost uzdužne nosivosti prihvaća se kao uzdužna granična nosivost konstrukcije P1A za slučaj čistog savijanja. Slika 4.53a prikazuje nekoliko različitih karakterističnih stanja nosivosti kritičnog presjeka konstrukcije P1A za cijeli raspon intenziteta opterećenja čistim savijanjem.

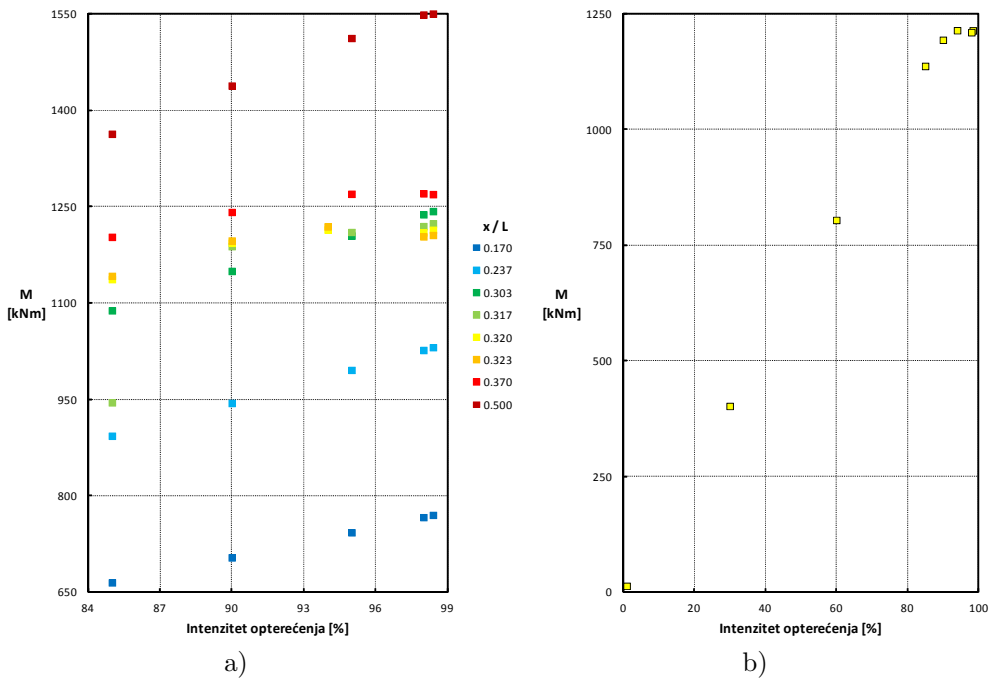
Jednako kao i u prethodnom slučaju i pri poprečnom savijanju konstrukcije P1A potrebno je identificirati kritični presjek. Slika 4.54 prikazuje relevantne podatke sa tim u vezi za slučaj poprečnog savijanja sukladno raspodijeli R1. Pri tome je potrebno naglasiti da nakon djelovanja opterećenja ne dosežu svi razmatrani presjeci svoju graničnu nosivost. Naime, među poprečnim presjecima za koje su prikazani rezultati svoju graničnu nosivost nisu dosegli poprečni presjeci na  $x/L = 0.170$ ,  $x/L = 0.190$  i  $x/L = 0.5$ . Kritični presjek nalazi se na  $x/L = 0.193$ , dok je uzdužna granična nosivost (824.4 kNm) postignuta pri 83.1 % narinutog opterećenja. Slika 4.58 do Slika 4.61 prikazuju različite odzivne karakteristike konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti za slučaj opterećenja sukladno raspodijeli R1.

U slučaju opterećenja sukladno raspodijeli R2, Slika 4.55 prikazuje da svoju graničnu nosivost nisu dosegli poprečni presjeci na  $x/L = 0.170$ ,  $x/L = 0.237$ ,  $x/L = 0.303$ ,  $x/L = 0.317$  i  $x/L = 0.5$ . Kritični presjek nalazi se na  $x/L = 0.320$ , dok je uzdužna granična nosivost (1214.0 kNm) postignuta pri 94 % narinutog opterećenja. Slika 4.62 do Slika 4.65 prikazuju različite odzivne karakteristike konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti za slučaj opterećenja sukladno raspodijeli R2.

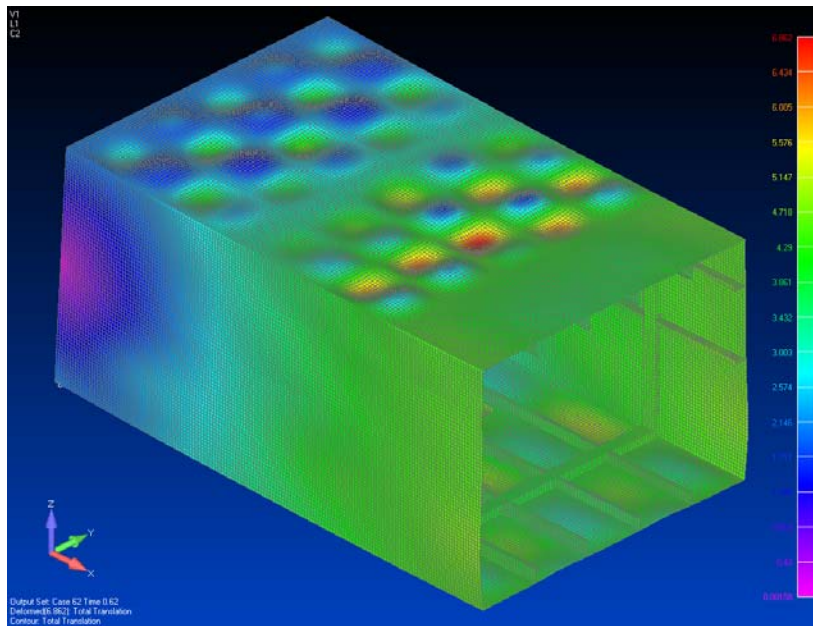
U daljnjem tekstu uspoređuje se i komentira točnost rezultata dobivenih primjenom predložene metode za dva razmatrana slučaja poprečnog savijanja konstrukcije P1A, pri čemu se gore opisani rezultati dobiveni NLMKE analizama iste konstrukcije uzimaju kao referentni.



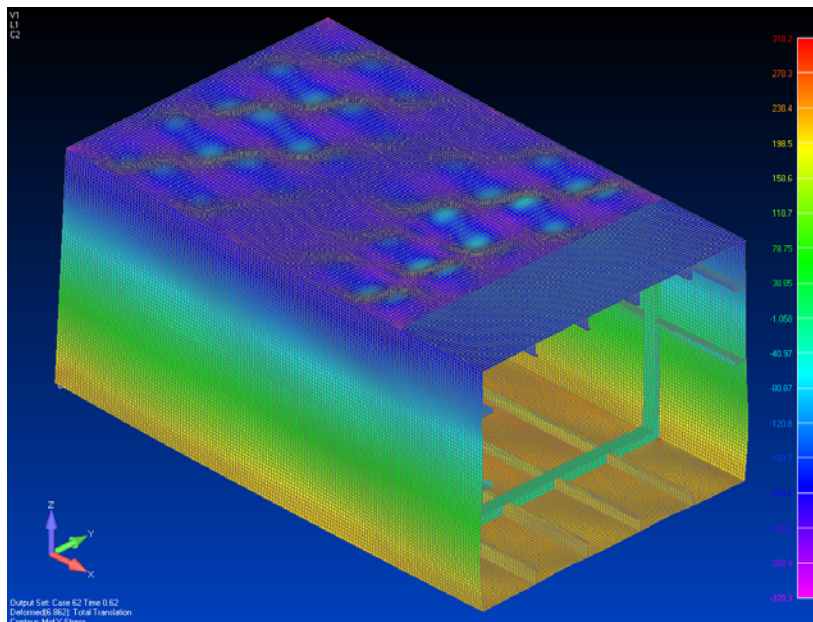
Slika 4.54 Uzdužna (granična) nosivost konstrukcije P1A opterećene raspodjelom R1: a) različiti poprečni presjeci; b) kritični presjek ( $x/L = 0.193$ ).



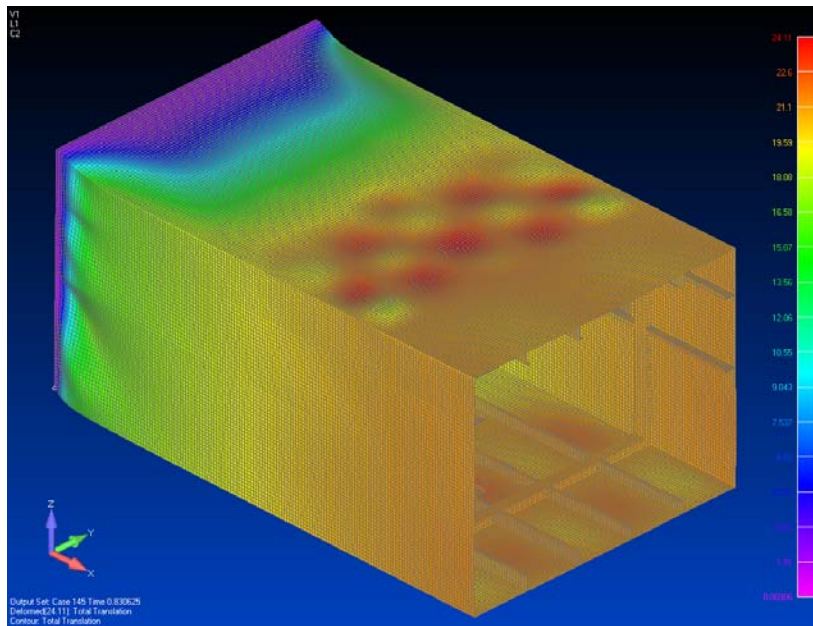
Slika 4.55 Uzdužna nosivost konstrukcije P1A opterećene raspodjelom R2: a) različiti poprečni presjeci; b) kritični presjek ( $x/L = 0.320$ ).



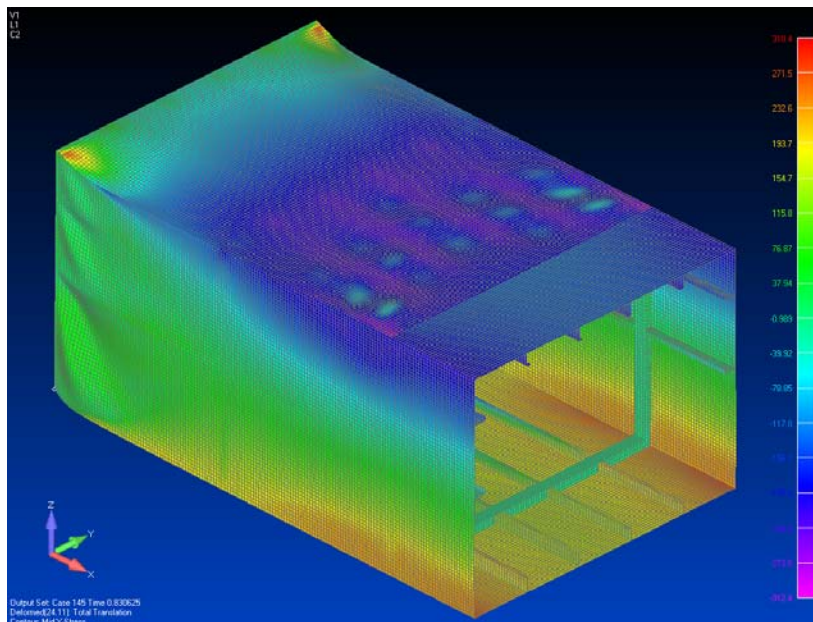
Slika 4.56 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (čisto savijanje): Ukupni pomaci (karikirani) [mm].



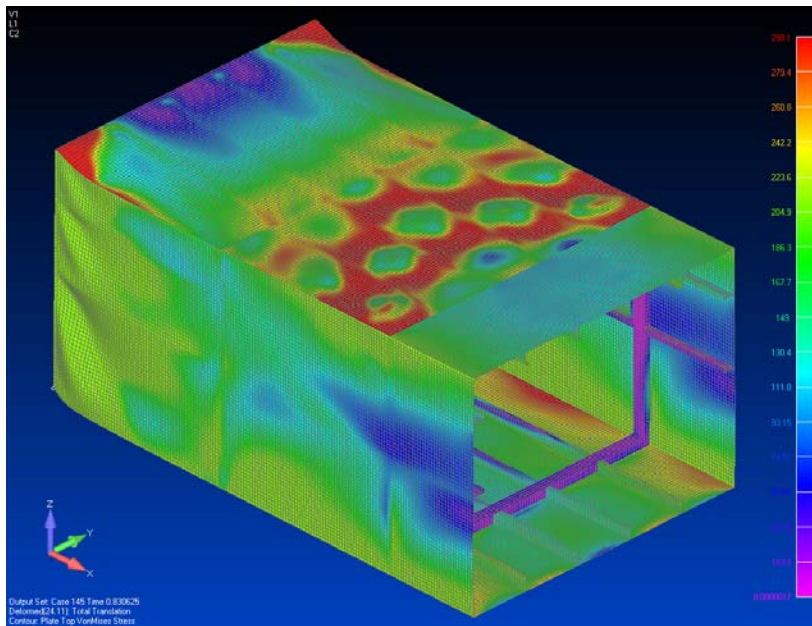
Slika 4.57 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (čisto savijanje):  $\sigma_x$  za središnju plohu (eng. *mid-plane*) elemenata [N/mm<sup>2</sup>].



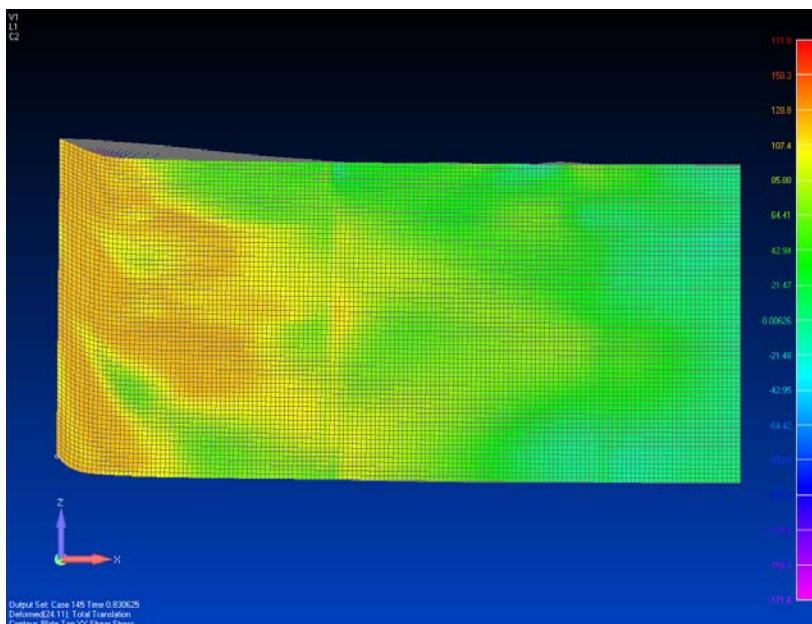
Slika 4.58 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1): Ukupni pomaci (karikirani) [mm].



Slika 4.59 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1):  $\sigma_x$  za središnju plohu (eng. *mid-plane*) elemenata [N/mm<sup>2</sup>].

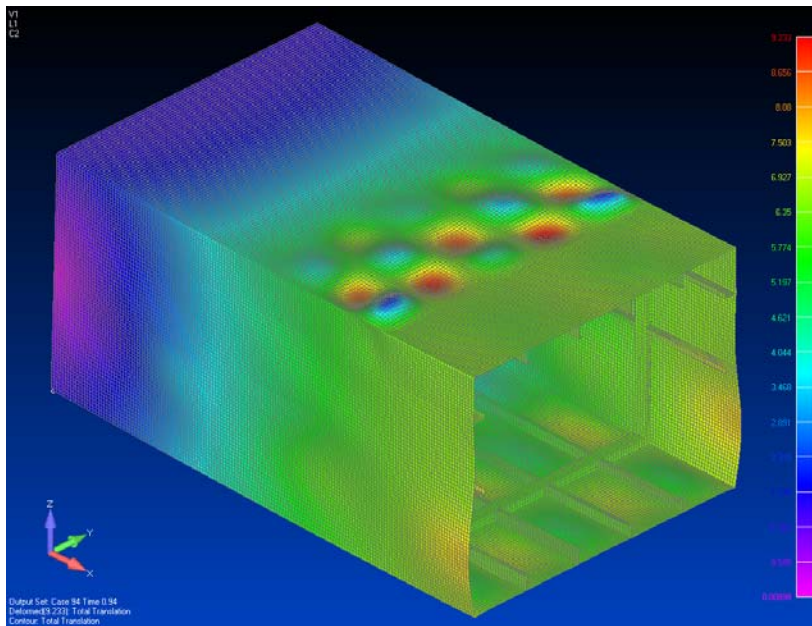


Slika 4.60 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1): Ekvivalentna (VonMises) naprezanja [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ].

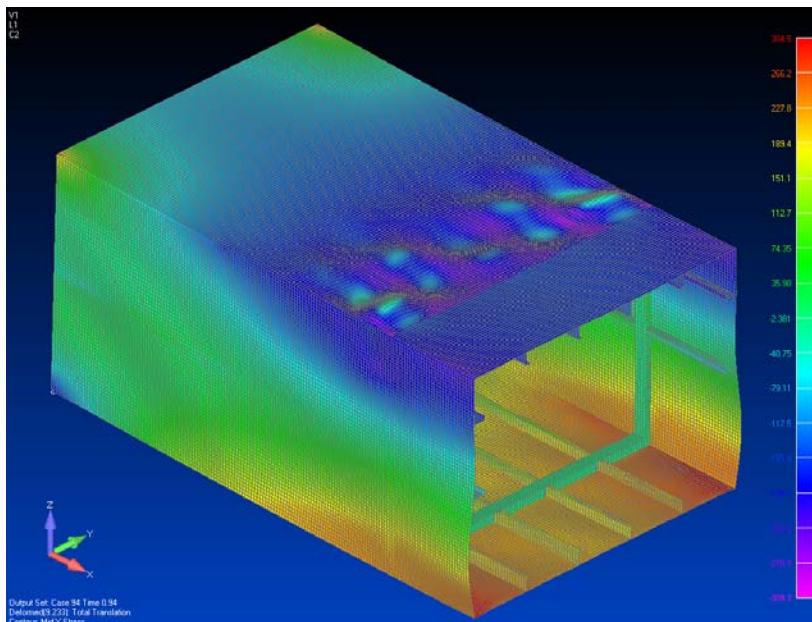


Slika 4.61 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R1):  $\tau_{xy}$  [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ].

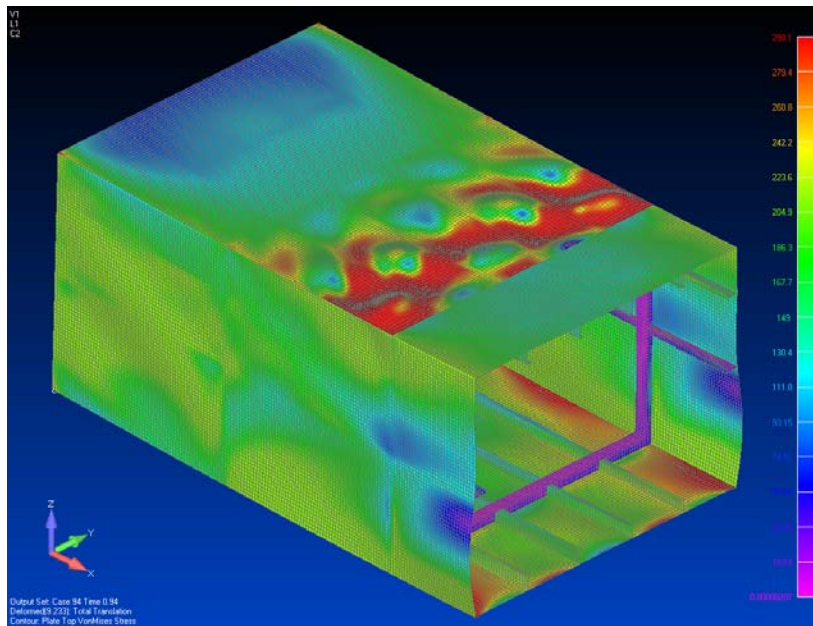




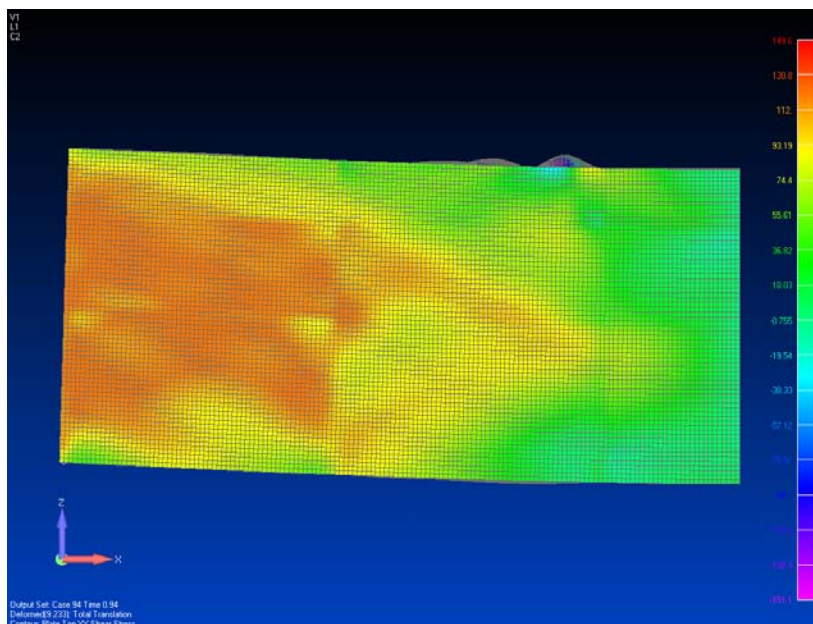
Slika 4.62 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2): Ukupni pomaci (karikirani) [mm].



Slika 4.63 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2):  $\sigma_x$  za središnju plohu (eng. *mid-plane*) elemenata [N/mm<sup>2</sup>].



Slika 4.64 Deformirani (polovinski) NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2): Ekvivalentna (VonMises) naprežanja  $[\text{N}/\text{mm}^2]$ .



Slika 4.65 Deformirani NLMKE model konstrukcije P1A u graničnom stanju nosivosti (R2):  $\tau_{xy}$   $[\text{N}/\text{mm}^2]$ .

Pri tome se osim za kritične presjeke, usporedba rezultata provodi i za nekoliko dodatnih poprečnih presjeka (koji su dosegli svoju graničnu nosivost) kako bi se što preciznije utvrdila razina točnosti predložene metode.

Tablica 4.12 Usporedba rezultata za raspodjelu R1.

Poprečni presjek	Uzdužna granična nosivost ( $M_{II}$ )				
	NLMKE	Predložena metoda		Polazna metoda	
	[kNm]	[kNm]	%*	[kNm]	%**
$x/L = 0.193$ ; $R_{Mq} = 1.2087 \text{ m}^2$ ; $R_{MQ} = 1.0011 \text{ m}$ .	824.4	915.7 <sup>1</sup> 966.7 <sup>2</sup>	-9.97 -14.72	1218.1 <sup>1</sup> 1466.4 <sup>2</sup>	-32.32 -43.78
$x/L = 0.237$ ; $R_{Mq} = 1.4001 \text{ m}^2$ ; $R_{MQ} = 1.3504 \text{ m}$ .	950.7	1012.9 <sup>1</sup>	-6.14	1218.1 <sup>1</sup>	-21.95
$x/L = 0.303$ ; $R_{Mq} = 1.6377 \text{ m}^2$ ; $R_{MQ} = 2.1152 \text{ m}$ .	1112.4	1094.6 <sup>1</sup>	1.63	1218.1 <sup>1</sup>	-8.68

\* Odstupanje rezultata predložene metode u odnosu na NLMKE.  
 \*\* Odstupanje rezultata polazne metode u odnosu na NLMKE.  
<sup>1</sup> Uz korištenje NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja.  
<sup>2</sup> Uz korištenje IACS  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja.

Tablica 4.13 Usporedba rezultata za raspodjelu R2.

Poprečni presjek	Uzdužna granična nosivost ( $M_{II}$ )				
	NLMKE	Predložena metoda		Polazna metoda	
	[kNm]	[kNm]	%*	[kNm]	%**
$x/L = 0.320$ ; $R_{Mq} = 1.0707 \text{ m}^2$ ; $R_{MQ} = 1.8829 \text{ m}$ .	1214.0	1192.3 <sup>1</sup> 1342.5 <sup>2</sup>	1.82 -9.57	1218.1 <sup>1</sup> 1466.4 <sup>2</sup>	-0.34 -17.18
$x/L = 0.323$ ; $R_{Mq} = 1.0783 \text{ m}^2$ ; $R_{MQ} = 1.8829 \text{ m}$ .	1218.8	1193.7 <sup>1</sup>	2.10	1218.1 <sup>1</sup>	0.05
$x/L = 0.370$ ; $R_{Mq} = 1.1720 \text{ m}^2$ ; $R_{MQ} = 2.6322 \text{ m}$ .	1270.3	1217.7 <sup>1</sup>	4.32	1218.1 <sup>1</sup>	4.29

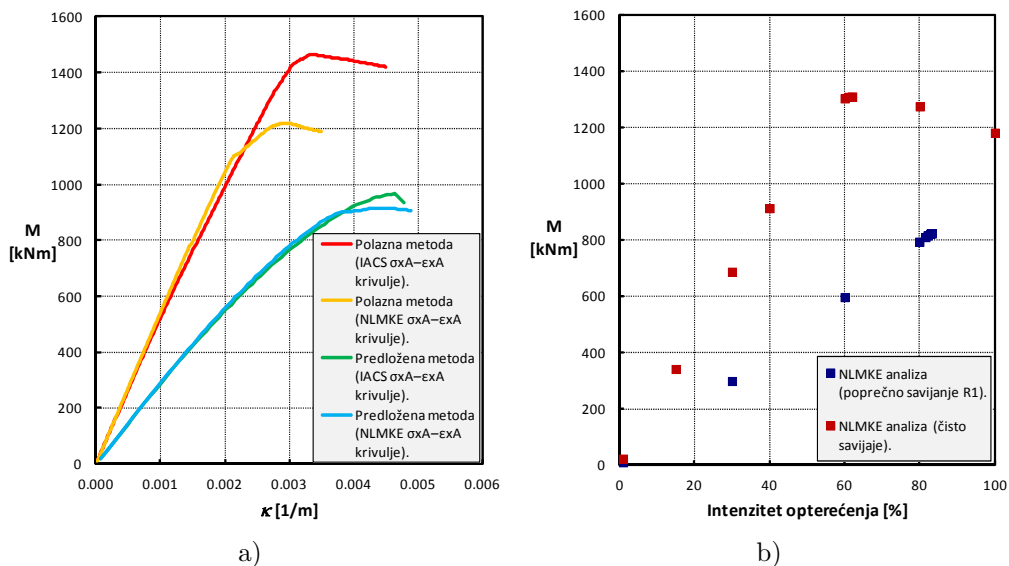
\* Odstupanje rezultata predložene metode u odnosu na NLMKE.  
 \*\* Odstupanje rezultata polazne metode u odnosu na NLMKE.  
<sup>1</sup> Uz korištenje NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja.  
<sup>2</sup> Uz korištenje IACS  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja.

Tablica 4.12 i Tablica 4.13 usporedno prikazuju vrijednosti graničnog momenta savijanja, tj. uzdužne granične nosivosti konstrukcije P1A dobivene primjenom polazne i predložene metode te NLMKE za dvije razmatrane raspodjele opterećenja (R1 i R2). Crvenom bojom označeni su rezultati koji se odnose na kritični presjek konstrukcije u oba slučaja, za koji su osim rezultata dobivenih primjenom NLMKE  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja u okviru polazne i predložene metode, prikazani i rezultati dobiveni primjenom IACS  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja. Svaki razmatrani poprečni presjek karakterizira određeni položaj uzduž konstrukcije P1A ( $x/L$ ), kao i pripadajuće vrijednosti omjera  $R_{Mq}$  i  $R_{MQ}$  (određene sukladno položaju razmatranog poprečnog presjeka za oba slučaja raspodjele R1 i R2), a koje je neophodno definirati pri primjeni predložene metode. S time u vezi općenito se može uočiti da su smični efekti osjetno izraženiji u slučaju raspodjele R1, što je vidljivo i po referentnim rezultatima (NLMKE) za sve poprečne presjeke.

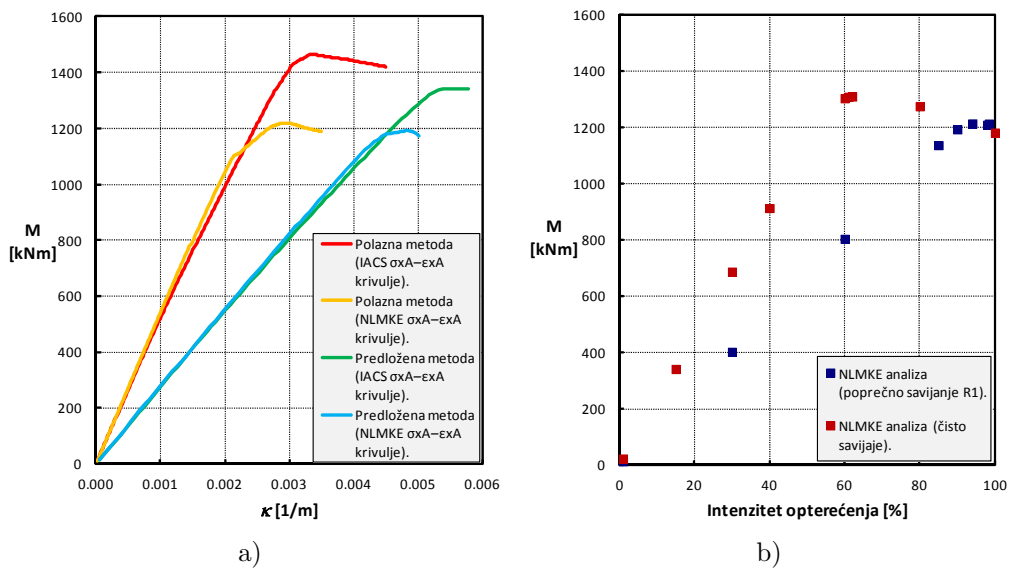
U slučaju raspodjele R1 predložena metoda općenito dobro prati trend referentnih rezultata duž čitavog (polu)raspona razmatrane konstrukcije. Iako se može uočiti blaga konzervativnost rezultata u slučaju manjeg intenziteta smičnih efekata, sa porastom intenziteta smičnih efekata rezultati su sve optimističniji, što kulminira upravo na kritičnom presjeku, gdje je odstupanje od referentnih rezultata najveće. Drugim riječima, na kritičnom presjeku je utjecaj smičnih efekata na uzdužnu graničnu nosivost veći od onoga kojega sugeriraju rezultati primjene predložene metode. Inače, unutar NLMKE modela niti jedan poprečni presjek ispred kritičnog ( $x/L < 0.193$ ) nije dosegao svoju graničnu nosivost, što znači da je unutar toga područja smična nosivost od dominantnog značaja. U tome smislu se i razina (ne)točnosti rezultata postignuta na kritičnom presjeku u slučaju raspodjele R1 može smatrati dobrom općenitom mjerom točnosti predložene metode u graničnim slučajevima njene primjenjivosti.

U slučaju raspodjele R2 predložena metoda još bolje prati trend referentnih rezultata, pri čemu su svi rezultati blago konzervativni, tj. „na strani sigurnosti“. Najtočniji rezultati postignuti su upravo na kritičnom presjeku. Slično kao i u slučaju raspodjele R1, unutar NLMKE modela niti jedan poprečni presjek za koji vrijedi  $x/L > 0.370$ ) nije dosegao svoju graničnu nosivost, što znači da je unutar toga područja utjecaj smičnih efekata na uzdužnu graničnu nosivost vrlo mali. Stoga se razina (ne)točnosti rezultata postignuta na poprečnom presjeku  $x/L = 0.370$  u slučaju raspodjele R2 može shvatiti kao dobra općenita mjera točnosti predložene metode za za drugi ekstrem, tj. kada je utjecaj smičnih efekata na uzdužnu graničnu nosivost manji od onoga kojega sugeriraju rezultati primjene predložene metode.

U smislu identifikacije kritičnog presjeka, za sve razmatrane slučajeve opterećenja (čisto savijanje, raspodjele R1 i R2) postignuti su rezultati identični



Slika 4.66 Rezultati analize uzdužne granične nosivosti konstrukcije P1A pri poprečnom savijanju (raspodjela R1): a) polazna/predložena metoda; b) NLMKE.



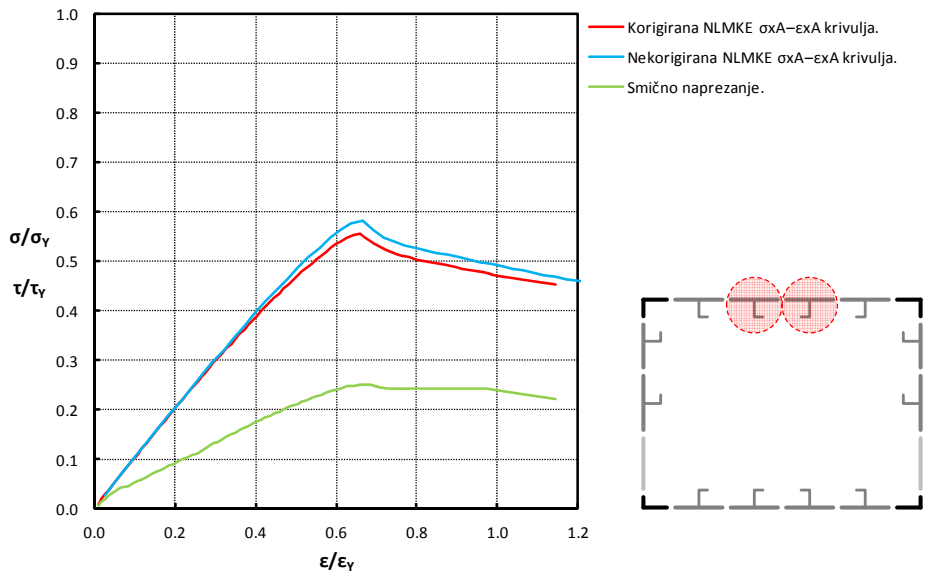
Slika 4.67 Rezultati analize uzdužne granične nosivosti konstrukcije P1A pri poprečnom savijanju (raspodjela R2): a) polazna/predložena metoda; b) NLMKE.

referentnima, te se stoga može općenito zaključiti da predloženu metodu karakterizira vrlo visoka razina pouzdanosti s tim u vezi.

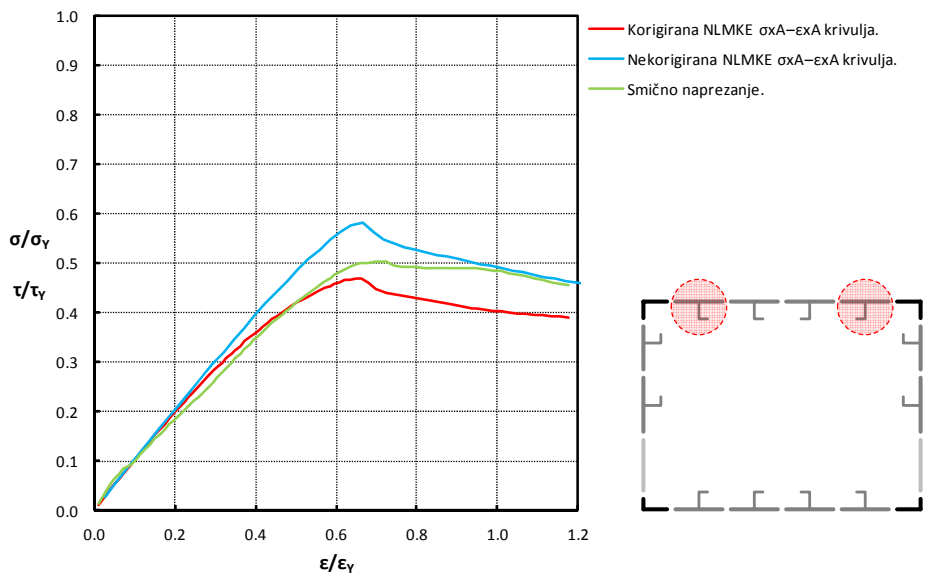
S obzirom da su rezultati polazne metode određeni isključivo geometrijskim i materijalnim karakteristikama razmatranog poprečnog presjeka, kritični presjek u slučaju poprečnog savijanja nije moguće identificirati te za sve razmatrane slučajeve vrijedi isti rezultat. Pri tome je očito da razina (ne)točnosti polazne metode u slučaju poprečnog savijanja neposredno i isključivo ovisi o karakteristikama narinutih raspodjela opterećenja. Relevantni rezultati se mogu dobiti isključivo u slučaju relativno male izraženosti utjecaja smičnih efekata na uzdužnu graničnu nosivost i uz primjenu  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja zadovoljavajuće točnosti. U suprotnom slučaju (raspodjela R1) mogu se uočiti vrlo značajna odstupanja rezultata u odnosu na referencu, što je naročito izraženo u slučaju primjene IACS  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja.

Slika 4.66 i Slika 4.67 usporedno grafički prikazuju rezultate analiza uzdužne granične nosivosti konstrukcije P1A provedenih različitim metodama za razmatrane slučajeve savojnog opterećenja.

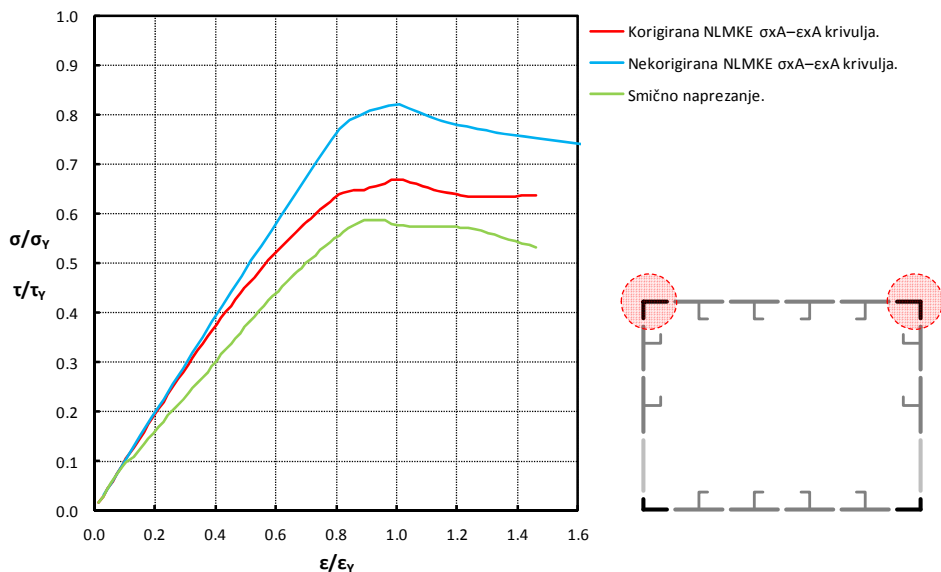
U konačnici, Slika 4.68 do Slika 4.71 usporedno prikazuju promjenu uzdužne nosivosti ( $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje) diskretnih sastavnih elemenata (kritičnog presjeka) konstrukcije P1A koji su tokom čitavog procesa analize progresivnog kolapsa predloženom metodom za slučaj raspodjele R1 bili opterećeni tlačno. Pri tome su usporedno prikazana i odgovarajuća smična naprezanja, kao i nekorrigirane  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje za svaki element, tj. krivulje sukladno kojima bi bila određena njihova uzdužna nosivost u slučaju analize bez utjecaja smičnih efekata. Slika 4.72 do Slika 4.75 su istoga sadržaja, ali za slučaj opterećenja sukladno raspodjeli R2. U oba slučaja, a naročito u slučaju raspodjele R1, se može uočiti manja razina korekcije izvornih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja kod „unutrašnjih“ u odnosu na „vanjske“ diskretne sastavne elemente ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa te krute kuteve, što je u skladu sa očekivanjima vezano uz pojavu „*shear lag*“ fenomena.



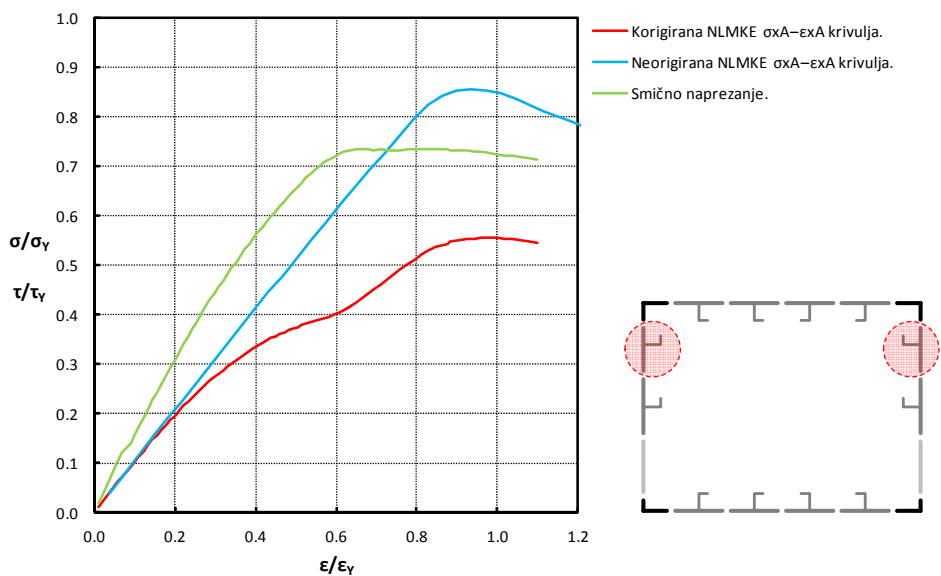
Slika 4.68 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („unutrašnjih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R1.



Slika 4.69 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („vanjskih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplata gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R1.

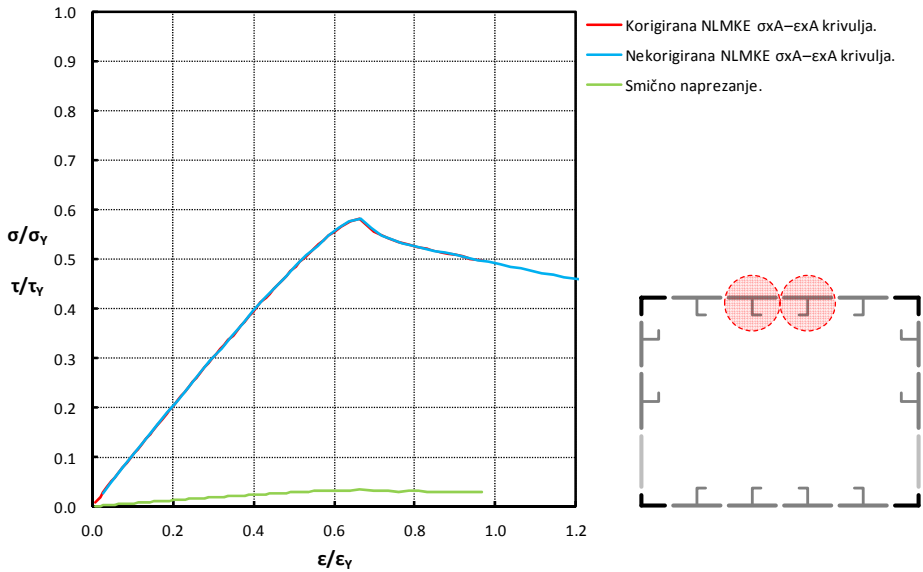


Slika 4.70 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1A pri R1.

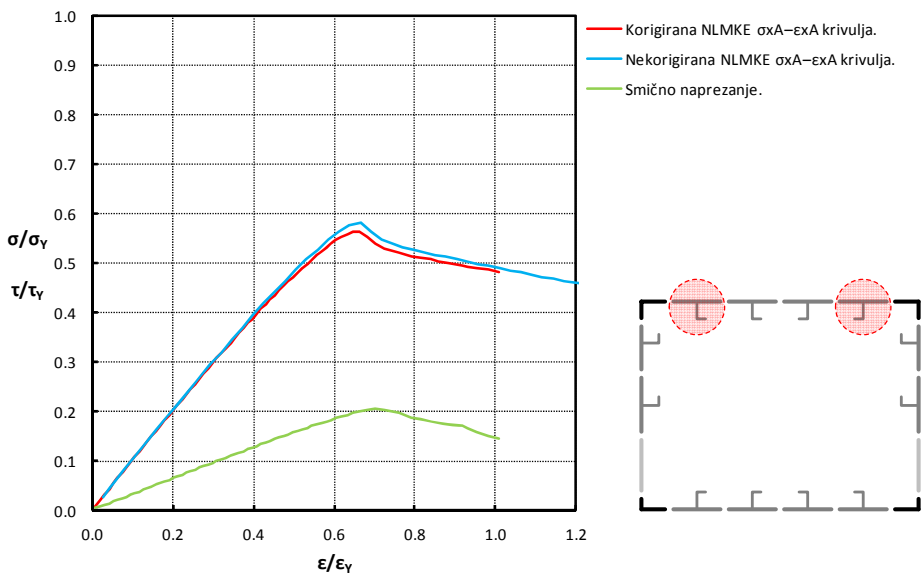


Slika 4.71 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A pri R1.

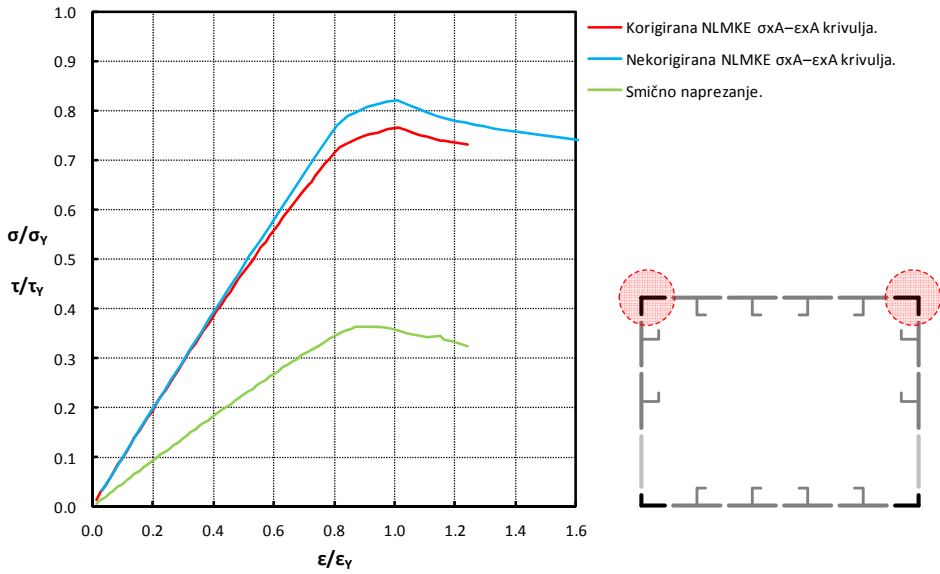




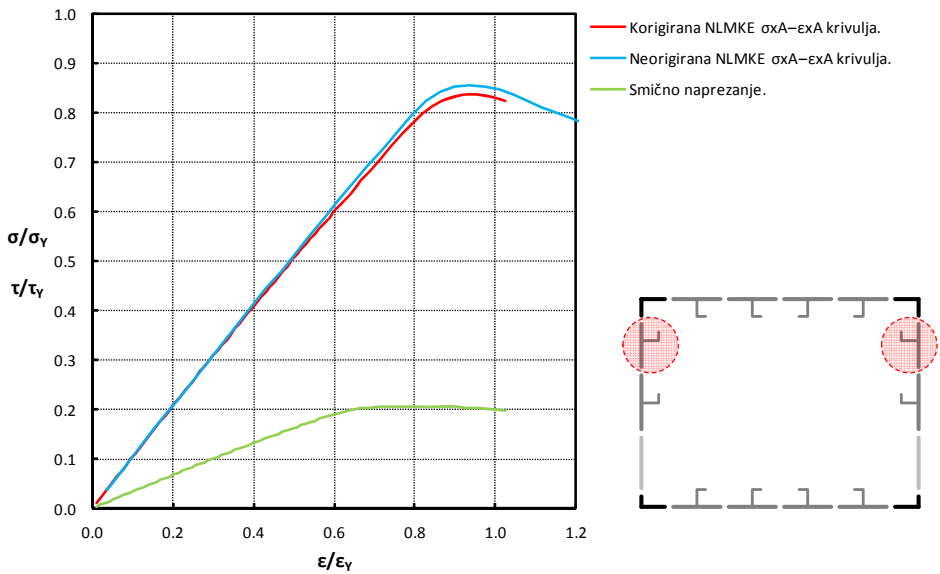
Slika 4.72 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („unutrašnjih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplate gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R2.



Slika 4.73 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata („vanjskih“) ukrepa sa sunosivom širinom oplate gornjeg pojasa konstrukcije P1A pri R2.



Slika 4.74 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata krutih kutova spoja oplata gornjeg pojasa i strukova konstrukcije P1A pri R2.



Slika 4.75 Uzdužna i smična nosivost diskretnih sastavnih elemenata gornjih ukrepa sa sunosivom širinom oplata struka konstrukcije P1A pri R2.

## 5 Zaključak

U okviru ovoga rada razvijena je unaprjeđena metoda analize progresivnog kolapsa kojom se nastoji unaprijediti razmatranje graničnog stanja nosivosti pri konceptualnom projektiranju monotonih tankostjenih konstrukcija opterećenih tokom uporabe pretežno poprečnim savijanjem. Predloženom metodom se kroz obuhvaćanje različitih efekata raspodijeljenog opterećenja pri poprečnom savijanju omogućava kvalitetnije razmatranje uzdužne granične nosivosti (graničnog momenta savijanja) razmatrane konstrukcije, točnije i pouzdanije određivanje kritičnog poprečnog presjeka i njegove kolapsne sekvence te u konačnici točnije i pouzdanije utvrđivanje karakteristične razine i rezerve sigurnosti konstrukcije s obzirom na projektna opterećenja, što može značajno utjecati na mogućnost iznalaženja racionalnijih i ekonomičnijih projektnih varijanti. Naime, ukoliko se točniji model za evaluaciju graničnog stanja nosivosti, kao reprezentativnija mjera sigurnosti konstrukcije, razmatra u kontekstu projektnog kriterija i/ili cilja višekriterijske i/ili višeciljne optimizacije u okviru računalnih sustava za potporu odlučivanju u konceptualnoj fazi projektiranja (kada se unutar ograničenog vremenskog okvira donose fundamentalne i dalekosežne odluke), može se zaključiti da će rezultirajuće podobne (nedominirane) projekte Pareto fronte karakterizirati racionalnije materijalne i/ili geometrijske karakteristike, tj. redukcija i/ili kvalitetnija raspodjela uzdužno nosivog materijala konstrukcije uz zadovoljenje kriterija sigurnosti (sigurnost kao ograničenje), ili povećanje razine sigurnosti za konstantnu masu i/ili cijenu (sigurnost kao cilj) [61]. U tome smislu, uporaba predložene metode u okviru optimizacijske petlje konceptualne sinteze može rezultirati kvalitetnijom razinom i međudnosom projektnih atributa (cijena, masa, sigurnost) nedominiranih projektnih varijanti, odnosno racionalnijim i ekonomičnijim preferiranim projektnim rješenjima. Pri tome, razmatranje sigurnosti kao cilja ima racionalnu osnovu ako se od odgovornih dionika ne očekuje samo iznalaženje ekonomski najpodobnijeg projekta koji zadovoljava sve propisane zahtjeve i ograničenja, već i iznalaženje (u okviru svojih kompetencija) najsigurnijeg rješenja koje bi moglo predstavljati optimalnu osnovu za sljedeću (preliminarnu) fazu projektiranja.

Kao izvorni znanstveni doprinos, u okviru ovoga rada izveden je potpuni izraz za uzdužnu duljinsku deformaciju proizvoljnog sloja (dvodimenzionalne) Euler-Bernoullijeve grede, neovisan o intenzitetu kinematičkih odzivnih karakteristika (pomaci, zakrivljenost, deformacije). Pri tome je za slučaj kada na razmatranu konstrukciju ne djeluje vanjska osna (uzdužna) sila (npr. idealizacija realnog opterećenja krila zrakoplova i/ili trupa broda), izveden potpuni izraz za fizikalnu zakrivljenost, ovisan o samo jednoj (poprečnoj) komponenti pomaka težišta

poprečnog presjeka. Za taj slučaj pokazano je da se uzdužna duljinska deformacija linearno raspodjeljuje po visini poprečnog presjeka neovisno o intenzitetima uzdužnih i/ili poprečnih pomaka, čime se implicira ispravnost primjene linearno proporcionalnog odnosa između uzdužne duljinske deformacije i fizikalne zakrivljenosti pri analizi progresivnog kolapsa konstrukcija čijim savijanjem dolazi do pojave velikih pomaka i zakrivljenosti. Za slučaj poprečnog savijanja (kada dolazi do deplanacije poprečnih presjeka) je na temelju teorije Lockwood-Taylora izvedena metoda za određivanje korigirane raspodjele uzdužnih duljinskih deformacija, prilagođena kontekstu razmatranog problema. Razmatranjem različitih načina povećanja otpornosti ravne (izotropne) oplata ka elastičnom smičnom izvijanju, pokazano je da pri tome ukrepljivanje uvijek predstavlja najefikasniji pristup te je s tim u vezi izveden kriterij osiguranja lokalnog smičnog izvijanja ukrepljenog panela, ovisan samo o geometrijskim karakteristikama oplata između ukrepa. U konačnici je kroz prilagodbu različitih postojećih spoznaja i metodologija te njihovu integraciju sa novorazvijenim spoznajama osmišljena unaprjeđena inkrementalno-iterativna metoda analize progresivnog kolapsa monotonih tankostjenih konstrukcija, a koja je realizirana u obliku analitičkog modula LUSA računalnog projektnog sustava OCTOPUS. Na posljertku je pri opisivanju i komentiranju različitih aspekata primjene NLMKE analize u kontekstu razmatranog problema argumentirana potreba za sveobuhvatnijim pristupom pri provedbi studija konvergencije rješenja i/ili određivanja  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja pomoću NLMKE.

Na primjerima razmatranim u okviru ovoga rada pokazano je da točnost analize progresivnog kolapsa u najvećoj mjeri ovisi o formulaciji korištenih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja. Pri tome je pokazano da formulacija aktualnih IACS-ovih  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja nije univerzalno podobna za proizvoljne konfiguracije ukrepljenih panela, tj. da se njihovom primjenom u slučaju ukrepljenih panela s relativno malim brojem ukrepa i vitkom oplatom (između ukrepa) većeg aspektnog odnosa ne postižu zadovoljavajuće točni rezultati. Isto tako, pokazano je da se primjenom  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja određenih na osnovu NLMKE analiza (diskretnih sastavnih elemenata konstrukcije) postižu rezultati vrlo dobre točnosti te da stoga takav pristup predstavlja kvalitetnu alternativu NLMKE analizi globalnog modela konstrukcije. Na taj način mogu se postići značajnije uštede u vremenu potrebnom za izgradnju modela konstrukcije i provedbu analize, što naročito dolazi do izražaja u slučaju složenih tankostjenih konstrukcija sastavljenih od mnoštva elemenata identičnih geometrijskih i materijalnih svojstava (jedna  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja za sve identične sastavne elemente). Unatoč tome, primjena ovoga pristupa prihvatljiva je isključivo u slučaju potrebe za analizom samo jedne ili najviše nekoliko različitih projektnih varijanti, tj. ukoliko je ukupna količina vremena potrebnog za provedbu svih pri tome potrebnih aktivnosti (izgradnja NLMKE modela različitih diskretnih sastavnih elemenata s inicijalnim

geometrijskim odstupanjima, provedba NLMKE analiza, određivanje  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja na temelju dobivenih rezultata te uključivanje aproksimiranih krivulja u računalni program za analizu progresivnog kolapsa) sukladna za to raspoloživom vremenskom okviru. Primjena ovoga pristupa u kontekstu konceptualne sinteze zasnovane na optimizacijskim procedurama (koje podrazumijevaju višestruka i automatska izvršavanja analize za mnogobrojne i različite varijante projekata) podrazumijevala bi određivanje odgovarajućeg skupa  $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulja sa svakom promjenom geometrijskih i/ili materijalnih karakteristika, što bi zahtijevalo neprihvatljivo veliku količinu vremena čak i u slučaju uspješno realizirane računalne integracije i automatizacije provedbe svih spomenutih aktivnosti.

Stoga se nameće potreba da se u okviru budućih istraživanja formuliraju pouzdaniji opisi uzdužne (granične) nosivosti ( $\sigma_{xA} - \varepsilon_{xA}$  krivulje) različitih diskretnih sastavnih elemenata konstrukcije, a koji bi u odnosu na postojeće formulacije omogućavali veću i univerzalniju razinu točnosti, znatno manje ovisnu o materijalno-geometrijskim osobitostima razmatrane konstrukcije. Pri tome bi se osim ravnih diskretnih sastavnih elemenata razmatranjima trebalo obuhvatiti i jednostruko i/ili dvostruko zakrivljene diskretne sastavne elemente sačinjene od duktilnih i/ili krhkih materijala. Isto tako, potrebno je detaljnije istražiti međuodnos između efektivnog sekantnog modula i efektivnog modula smicanja za različite varijante geometrijskih i/ili materijalnih svojstava različitih diskretnih sastavnih elemenata konstrukcije, kao i značaj te mogućnost implementacije korekcije njihove uzdužne (granične) nosivosti s obzirom na utjecaj složenijih slučajeva djelovanja dvoosnog i/ili lateralnog (tlak) opterećenja.

## Literatura

- [1] Žanić, V., Das, P.K., Pu, Y., Faulkner, D. *Multiple criteria synthesis techniques applied to reliability-based design of SWATH ship structure*. Proceedings of the Congress Integrity of Offshore Structures, EMAS Scientific Publications, pp.387-415, Glasgow 1993.
- [2] Bedair, O. *Analysis and Limit state design of stiffened plates and shells: A world view*. Applied Mechanics Reviews, Vol.62, pp.020801/1-16, 2009.
- [3] ISSC Technical Committee III.1. *Ultimate strength*. Proceedings of the 17th International Ship and Offshore Structures Congress, Vol.1, Seoul 2009.
- [4] Maestro, M., Marino, A. *An assessment of the structural capacity of damaged ships: The plastic approach in longitudinal unsymmetrical bending and the influence of buckling*. International Shipbuilding Progress, 36:408, pp.255-265, 1989.
- [5] Caldwell, J.B. *Ultimate longitudinal strength*. Transactions of RINA, 107:411-30, 1965.
- [6] Smith, C.S. *Influence of local compressive failure on ultimate longitudinal strength of a ship's hull*. Proceedings of the International Symposium on Practical Design in Shipbuilding, pp.73-79, 1977.
- [7] Bruhn, E.F. *Analysis and design of flight vehicle structures*. Tri-State Offset Company, 1965.
- [8] Dow, R.S. *A computer program for elasto plastic, large deflection buckling and post buckling of plane frames and stiffened panels*. Report AMTE(S) R80762, 1980.
- [9] Yao, T., Nikolov, P.I. *Progressive collapse analysis of a ship's hull under longitudinal bending (2nd Report)*. Journal of Society of Naval Architects, Vol.172, pp.437-446, 1992.
- [10] Gordo, J.M., Soares, C.G., Faulkner, D. *Approximate assessment of the ultimate longitudinal strength of the hull girder*. Journal of Ship Research, Vol.40, pp.60-69, 1996.
- [11] Adamchak, J.C. *ULSTR: A program for estimating the collapse moment of ship's hull under longitudinal bending*. DTNSRDC Report 82/076, 1982.
- [12] Hughes, O.F. *Ship structural design - A rationally-based computer-aided optimization approach*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1988.

- [13] Rahman, M.K., Chowdhury, M. *Estimation of ultimate longitudinal bending moment of ships and box girders*. Journal of Ship Research, Vol.40, pp.244-257, 1996.
- [14] IACS. *Common structural rules for double hull oil tankers*, 2006.
- [15] IACS. *Common structural rules for bulk carriers*, 2008.
- [16] Ueda, Y., Rashed S.M.H. *An ultimate transverse strength analysis of ship structures*. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.136, pp.309-324, 1974.
- [17] Paik, J.K. *The intelligent super-size finite element method: Theory and practice*. Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, 2006.
- [18] Naar, H., Varsta, P., Kujala, P. *A theory of coupled beams for strength assessment of passenger ships*. Marine Structures, Vol.17, 8:590-611, 2004.
- [19] Naar, H. *Ultimate strength of hull girder for passenger ships*. Doctoral dissertation, Helsinki University of Technology, Espoo 2006.
- [20] Masubuchi, K. *Analysis of welded structures: Residual stresses, distortion and their consequences*. Pergamon Press, Oxford 1980.
- [21] Godoy, L.A. *Thin-walled structures with structural imperfections*. Elsevier Science, Oxford 1996.
- [22] Paik, J.K., Thayamballi, A.K. *Ultimate limit state design of steel-plated structures*. John Wiley and Sons, Chichester 2003.
- [23] Hughes, O.F., Paik, J.K. *Ship structural analysis and design*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 2010.
- [24] Servis, D., Voudouris, G., Samuelides, M., Papanikolaou, A. *Finite element modeling and strength analysis of hold No. 1 of bulk carriers*. Marine Structures, Vol.16, 8:601-626, 2003.
- [25] DNV. *Nonlinear finite element analysis of hull girder collapse of a tanker*. Technical report No.2004-0505, 2004.
- [26] Naar, H. et al. *Deliverable D3.2 - Report on Assessment of ultimate strength at the early design stage*. European FP6 STREP Project IMPROVE, Contract No. TST5-CT-2006-031382, 2008.
- [27] Amlashi, H.K.K., Moan, T. *Ultimate strength analysis of bulk carrier hull girder under alternate hold loading condition - A case study Part 1:*

- Nonlinear finite element modeling and ultimate hull girder capacity.* Marine Structures, Vol.21, pp.327-352, 2008.
- [28] MAIB. *Report on the investigation of the structural failure of MSC Napoli, English channel on 18 January 2007.* Report No.9/2008, 2008.
- [29] Meinken, A., Schluter, H.J.S. *Collapse behaviour of a push barge.* Marine Structures, Vol.15, pp.193-209, 2002.
- [30] OCTOPUS. *Software documentation.* Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2009.
- [31] MAESTRO. *Software documentation.* DRS-C3 Advanced Technology Center, Stevensville 2007.
- [32] ISSC. Technical Committee IV.2. *Ultimate hull girder strength.* Proceedings of the 14th International Ship and Offshore Structures Congress, Vol.2, Nagasaki 2000.
- [33] Dowling, P.J., Chatterjee, S., Frieze, P.A., Moolani, F.M. *Experimental and predicted collapse behaviour of rectangular steel box girders.* Proceedings of the International Conference on Steel Box Girder Bridges, Institution of Civil Engineers, London 1973.
- [34] Dowling, P.J., Moolani, F.M., Frieze, P.A. *The effect of shear lag on the ultimate strength of box girders.* Proceedings of the International Symposium on Steel Plated Structures, Institution of Civil Engineers, London 1976.
- [35] Dow, R.S. Hugill, R.C., Clark, J.D., Smith, C.S. *Evaluation of Ultimate Ship Hull Strength.* Proceedings of Extreme Loads Response Symposium, pp.133-148, Arlington 1981.
- [36] FEMAP/NX Nastran. *Software documentation.* Siemens Product Lifecycle Management Software, 2010.
- [37] Nafayeh, A.H., Pai, P.F., *Linear and nonlinear structural mechanics.* John Wiley and Sons, Hoboken 2004.
- [38] Bauchau, O.A., Craig, J.I. *Structural analysis with applications to aerospace structures.* Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2009.
- [39] Alfrević, I. *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma.* Golden marketing, Zagreb 2003.
- [40] Rutherford, S.E., Caldwell, J.B. *Ultimate longitudinal strength of ships: A case study.* SNAME Transactions, Vol.98, pp.441-471, 1990.



- [41] Paik, J.K., Seo, J.K. *Nonlinear finite element method for ultimate strength analysis of steel stiffened-plate structures under combined biaxial compression and lateral pressure actions – Part I: Plate elements*. Thin-Walled Structures, Vol.47, pp.1008-1017.
- [42] Paik, J.K., Seo, J.K. *Nonlinear finite element method for ultimate strength analysis of steel stiffened-plate structures under combined biaxial compression and lateral pressure actions – Part II: Stiffened panels*. Thin-Walled Structures, Vol.47, pp.998-1007.
- [43] *Inženjerski priručnik IP4*, Školska knjiga, Zagreb 1998.
- [44] Žanić, V. *Projektiranje brodske konstrukcije generiranjem optimalnih strukturnih varijanti na elektroničkom računalu*. Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1980.
- [45] Žanić, V. Privatna korespondencija sa S. Kitarovićem. Zagreb, siječanj 2008.
- [46] Uršić, J. *Čvrstoća broda, I dio*. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1971.
- [47] Trahair, N.S., Bradford, M.A., Nethercot, D.A., Gardner, L. *The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3*. Taylor and Francis, London and New York 2008.
- [48] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York 1985.
- [49] *Inženjersko tehnički priručnik, III dio*. Rad, Beograd 1970.
- [50] Bleich, F. *Buckling strength of metal structures*. McGraw-Hill, New York 1952.
- [51] Murray, N.W. *Introduction to the theory of thin-walled structures*. Oxford University Press, Oxford 1984.
- [52] Rutherford, S.E. *Hull strength under bending and shear*. Hull structures report No. 83/19, Lloyd's Register, London 1983.
- [53] Nara, S., Deguchi, Y., Fukumoto, Y. *Ultimate strength of steel plate panels with initial imperfection under uniform shearing stress*. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 392/I-9, 1988.
- [54] Eurocode 3 ENV 1993-1-1. *Design of steel structures, Part 1.1 General rules and rules for buildings*. British Standard Institution, 1992.
- [55] Zhang, S., Kumar, P., Rutherford, S.E. *Ultimate shear strength of plates and stiffened panels*. *Ships and Offshore structures*, Vol.3, No.2, pp.105-112, 2008.

- [56] Yao, T., Imayasu, E., Maeno, Y., Fujii, Y. *Influence of warping due to vertical shear force on ultimate hull girder strength*. Proceedings of the 9th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures, pp.322-328, 2004.
- [57] Smith, C.S., Davidson, P.C., Chapman, J.C., Dowling, P.J. *Strength and stiffness of ship's plating under in-plane compression and tension*. Transactions of RINA, Vol.130, pp.277-296, 1988.
- [58] Kippenes, J., Notaro, G., Amlashi, H., Steen, E. *Ultimate strength of cape-size bulk carrier under alternate hold loading*. Proceedings of the 9th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures, pp.1114-1122, 2010.
- [59] Dierckx, P. *Curve and surface fitting with splines*, Oxford University Press, 1993.
- [60] <http://www.netlib.org/dierckx/>
- [61] Žanić, V., Kitarović, S., Prebeg, P. *Safety as objective in multicriterial structural optimization*. Proceedings of the ASME - 29th International Conference in Ocean, Offshore and Arctic Engineering, pp.899-910, 2010.

## Životopis

Stanislav Kitarović, dipl.ing.zrak. rođen je 03. veljače 1976. godine u Vukovaru, gdje je završio osnovnu školu. 1995. godine završio je XV. gimnaziju u Zagrebu, a 2004. godine i studij zrakoplovstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Iste godine upisao je poslijediplomski doktorski studij strojarstva, smjer teorija konstrukcija. Od 2005. godine radi na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu na radnom mjestu znanstvenog novaka (suradničko zvanje asistent) na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku, Katedra za konstrukciju plovni objekata. Učestvuje u nastavi iz redovitih kolegija Čvrstoća i pouzdanost zrakoplovnih konstrukcija (studij zrakoplovstva), Čvrstoća broda (studij brodogradnje) te izbornih kolegija Podobnost i pouzdanost konstrukcija i Podobnost i pouzdanost konstrukcije plovni objekata. Područje znanstveno-istraživačkog rada vezano je uz razmatranje graničnog stanja nosivosti, tj. analize progresivnog kolapsa tankostjenih konstrukcija. Koautor je devet međunarodno recenziranih, objavljenih i prezentiranih konferencijskih radova te je izlagao i/ili učestvovao u radu nekoliko međunarodnih skupova. Učestvovao je u nekoliko domaćih i međunarodnih znanstvenih i tehnologijskih projekata: Višekriterijski projektni modeli u osnivanju i konstrukciji broda i zrakoplova (2007–2012, znanstveni projekt MZOS-a); Design of improved and inovative products using integrated decision support system for ship production and operation – IMPROVE (2006–2009, EU FP6 STREP); CREST CSR(T/BC) Računalni programi za evaluaciju konstrukcije tankera i brodova za prijevoz rasutog tereta prema pravilima IACS-a (2006 i 2009, projekti HRB-a); Integrirani programski sustav za brodske konstrukcije (2005–2006, tehnologijski projekt MZOS-a); Višekriterijski projektni modeli u osnivanju i konstrukciji broda (2005–2006, znanstveni projekt MZOS-a). Izvrsno se služi engleskim jezikom u čitanju, pisanju i govoru. U braku je i otac je dvoje djece.

## Curriculum Vitae

Stanislav Kitarović was born on February 3rd 1976 in Vukovar (Republic of Croatia), where he attended comprehensive school. He finished XVth Gymnasium in Zagreb in 1995 and during the same year enrolled in the study of Aeronautical Engineering at the University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, which he graduated in 2004. During the same year he enrolled in the postgraduate study of Structural Engineering at the same institution. In 2005 he was employed by the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture as a research assistant at the Department of Naval Architecture and Ocean engineering, Chair of Ship Structure Design. He participates in exercise lectures of the courses in Strength and Reliability of Structures, Selected topics on Feasibility and Reliability of Structures, Ship Structural Strength, Adequacy and Reliability of Floating Object's Structure. His scientific research work is generally related to the field of ultimate limit state analysis and design of thin-walled structures. He is co-author of nine internationally reviewed and published conference papers and he participated in a several domestic and international symposiums. He participated in several domestic and international projects: Multiple criteria design models in ship and aircraft structural design (2007–2012, RC MSES project); Design of improved and innovative products using integrated decision support system for ship production and operation – IMPROVE (2006–2009, EU FP6 STREP); CREST CSR(T/BC) Software for ship structural evaluation according to IACS CSR (2006 and 2009, CRS project); Integrated software system for ship structures (2005–2006, RC MSES project); Multiple criteria design models in ship structural design (2005–2006, RC MSES project). He is fluent in spoken and written English. He is married and has two sons.