Statička i dinamička naliza vratila s dva diska

Gilja, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2010

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:054914

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-08**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Statička i dinamička analiza vratila s dva diska

ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Rajko Grubišić

Student:
Ivan Gilja

Zagreb, 2010.

SAŽETAK RADA

Ovaj rad se bavi statičkom i dinamičkom analizom vratila s dva diska ukliještenog na oba kraja. Treba provesti analizu vibracija i čvrstoće vratila. Analiza obuhvaća određivanje prirodnih frekvencija i oblika vibriranja u slučaju slobodnih vibracija, određivanje odgovarajućih odziva kod djelovanja zadane uzbude u slučaju prisilnih vibracija, provjeru čvrstoće vratila na savijanje i uvijanje kod djelovanja odgovarajućih inercijskih sila i momenata. Za proračun fleksijkih vibracija koristit će se metoda utjecajnih koeficijenata, a za proračun torzijskih vibracija metoda diskretnog sustava s dva stupnja slobode gibanja. Provjera rezultata proračuna slobodnih vibracija provest će se metodom jednolike grede. Provjera čvrsoće vratila na savijanje i uvijanje će se provesti metodom konačnih elemenata.

Pri razradi problema koristili su se računalni programi AutoCad 2008 za izradu crteža i program Mathcad 14 za izračunavanje kompliciranih matematičkih jednadžbi.

SADRŽAJ

IZJAVA……..3
POPIS SLIKA…… 4
POPIS OZNAKA I SIMBOLA……..5
1. UVOD.....6
2. ANALIZA FLEKSIJSKIH VIBRACIJA VRATILA METODOM UTJECAJNIH KOEFICIJENATA 8
2.1 Osnovne dinamičke jednadžbe.....8
2.2 Utjecajni koeficijenti 9
2.3 Slobodne vibracije.....11
2.4 Prisilne vibracije.....14
3. ANALIZA TORZIJSKIH VIBRACIJA VRATILA METODOM DISKRETNOG SUSTAVA 15
3.1 Osnovne dinamičke jednadžbe.....16
3.2 Slobodne vibracije.....18
3.3 Prisilne vibracije.....21
4. PROVJERA SLOBODNIH VIBRACIJA 22
4.1 Fleksijske vibracije.....23
4.2 Torzijske vibracije.....25
5. PROVJERA ČVRSTOĆE VRATILA METODOM KONAČNIH ELEMENATA.....26
5.1 Čvrstoća vratila na uvijanje 26
5.2 ČVRSTOĆA VRATILA NA SAVIJANJE 31
6. ZAKLJUČAK 37
7. POPIS LITERATURE:.....38

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno služeći se stečenim znanjem i navedenom literaturom

POPIS SLIKA

Slika 1.1 Vratilo s dva diska

Slika 2.1 Fleksijski sustav s dvije mase

Slika 2.2 Parametri za proračun utjecajnih koeficijenata

Slika 2.3 Prvi prirodni oblik vibriranja

Slika 2.4 Drugi prirodni oblik vibriranja

Slika 2.5. Progibi vratila

Slika 3.1 Torzijski sustav s dvije mase

Slika 3.2 Prvi prirodni oblik vibriranja

Slika 3.3 Drugi prirodni oblik vibriranja

Slika 3.4 Kutevi torzije

Slika 4.1 Upeta jednolika greda

Slika 5.1 Vratilo s dva diska

Slika 5.2 Momenti uvijanja vratila

Slika 5.3 Dijagram kuteva torzije

Slika 5.4 Dijagram momenata torzije

Slika 5.5 Sile na vratilo

Slika 5.6 Dijagram poprečnih sila

Slika 5.7 Dijagram momenata savijanaj

POPIS OZNAKA I SIMBOLA

m_i - masa diska „i“ $[kg]$

l_i - duljina vratila $[m]$

d_i - promjer vratila $[m]$

D_i - promjer diska $[m]$

F - koncentrirana vanjska poprečna(radijalna) sila na disk „1“ $[N]$

M_t - koncentrirani vanjski moment uvijanja na disk „1“ $[Nm]$

E - Youngov modul elastičnosti $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

G - modul smika $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

I - aksijalni moment tromosti kružnog presjeka vratila $[m^4]$

I_P - polarni moment tromosti kružnog presjeka vratila $[m^4]$

J - polarni moment inercije diska $[kg \cdot m^2]$

δ_{ii} - utjecajni koeficijenti

ψ_i - kut uvijanja $[rad]$

k_i – fleksijska krutost vratila $\left[\frac{N}{m}\right]$

w_i – pomak mase vratila iz statičkog stanja ravnoteže $[m]$

$\dot{w}$ - brzina mase $\left[\frac{m}{s}\right]$

$\ddot{w}$ - ubrzanje mase $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

φ_i - kut nagiba $[rad]$

ω_i - prirodne frekvencije $\left[\frac{rad}{s}\right]$

R - reaktivna sila u osloncu $[N]$

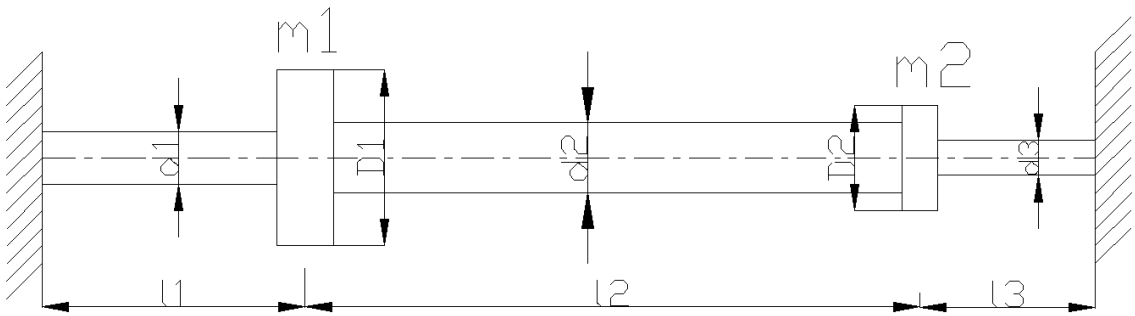
M - moment savijanja $[Nm]$

$\{\phi\}$ - oblik vibriranja

1. UVOD

Za vratilo promjenjivog presjeka s dva učvršćena diska, prikazanog na slici (1.1) potrebno je izvršiti analizu vibracija i čvrstoće. Prvo će se provesti analiza slobodnih i prisilnih fleksijskih i torzijskih vibracija vratila. U slučaju slobodnih vibracija odrediti prve dvije prirodne frekvencije i pripadne oblike vibriranja, a u slučaju prisilnih vibracija odrediti odgovarajući odziv kod djelovanja zadane uzbude. Za proračun fleksijskih vibracija koristiti metodu utjecajnih koeficijenata, a za proračun torzijskih vibracija metodu diskretnog sustava s dva stupnja slobode gibanja. Rezultate proračuna slobodnih vibracija provjeriti metodom jednolike grede.

Zatim će se provesti provjera čvrstoće vratila na savijanje i uvijanje koristeći kao opterećenje odgovarajuće inercijske sile i momente iz proračuna prisilnih vibracija. Koristiti metodu konačnih elemenata.



Slika 1.1 Vratilo s dva diska

Osnovne značajke vratila:

$d_1 = 0{,}15m$

$d_2 = 0{,}20m$

$d_3 = 0{,}10m$

$D_1 = 0{,}50m$

$D_2 = 0{,}40m$

$l_1 = 0{,}75m$

$l_2 = 1{,}75m$

$l_3 = 0{,}50m$

$m_1 = 1500kg$

$m_2 = 500kg$

$F(t) = F_0 \cdot \sin(\lambda \cdot t)$

$F_0 = 500N$

$M_t(t) = M_{t0} \cdot \sin(\lambda \cdot t)$

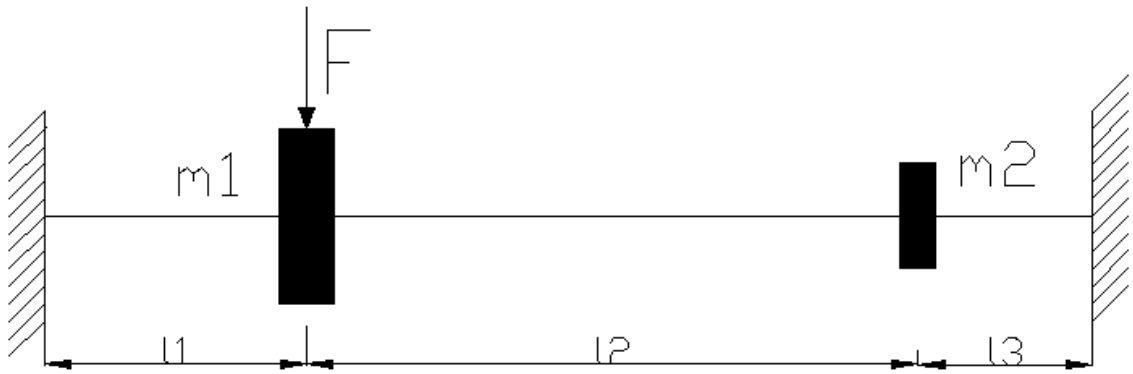
$M_{t0} = 500Nm$

$\lambda = 0{,}5 \cdot \omega_1$

$E = 2{,}1 \cdot 10^{11} \dfrac{N}{m^2}$

$G = 0{,}8 \cdot 10^{11} \dfrac{N}{m^2}$

2. ANALIZA FLEKSIJSKIH VIBRACIJA VRATILA METODOM UTJECAJNIH KOEFICIJENATA



Slika 2.1 Fleksijski sustav s dvije mase

Pod fleksijskim sustavom podrazumjevamo sustav masa m_i (i=1,n) koji vibrira na nosaču krutosti EI. Analiza ovakvog sustava provešće se metodom utjecajnih koeficijenata. Na slici (2.1) prikazan je takav fleksijski sustav koji zamjenjuje vratilo na slici (1.1).

2.1 Osnovne dinamičke jednadžbe

Za pomake pojedinih masa m_1 i m_2 dobivaju se sljedeći izrazi:

$$w_1 = -m_1 \cdot \ddot{w}_1 \cdot \delta_{11} - m_2 \cdot \ddot{w}_2 \cdot \delta_{12} + F \cdot \delta_{11}$$
$$w_2 = -m_1 \cdot \ddot{w}_1 \cdot \delta_{21} - m_2 \cdot \ddot{w}_2 \cdot \delta_{22} + F \cdot \delta_{21} \qquad (2.1)$$

Pretpostavljeno rješenje :

$$w_1 = W_1 \cdot \cos(\lambda t)$$
$$\dot{w}_1 = -\lambda \cdot W_1 \cdot \sin(\lambda t)$$
$$\ddot{w}_1 = -\lambda^2 \cdot W_1 \cos(\lambda t)$$
$$w_2 = W_2 \cdot \cos(\lambda t)$$
$$\dot{w}_2 = -\lambda \cdot W_2 \cdot \sin(\lambda t)$$
$$\ddot{w}_2 = -\lambda^2 \cdot W_2 \cos(\lambda t)$$

Uvrštavanjem ovih pretpostavki u jednadžbe (2.1) dobivamo:

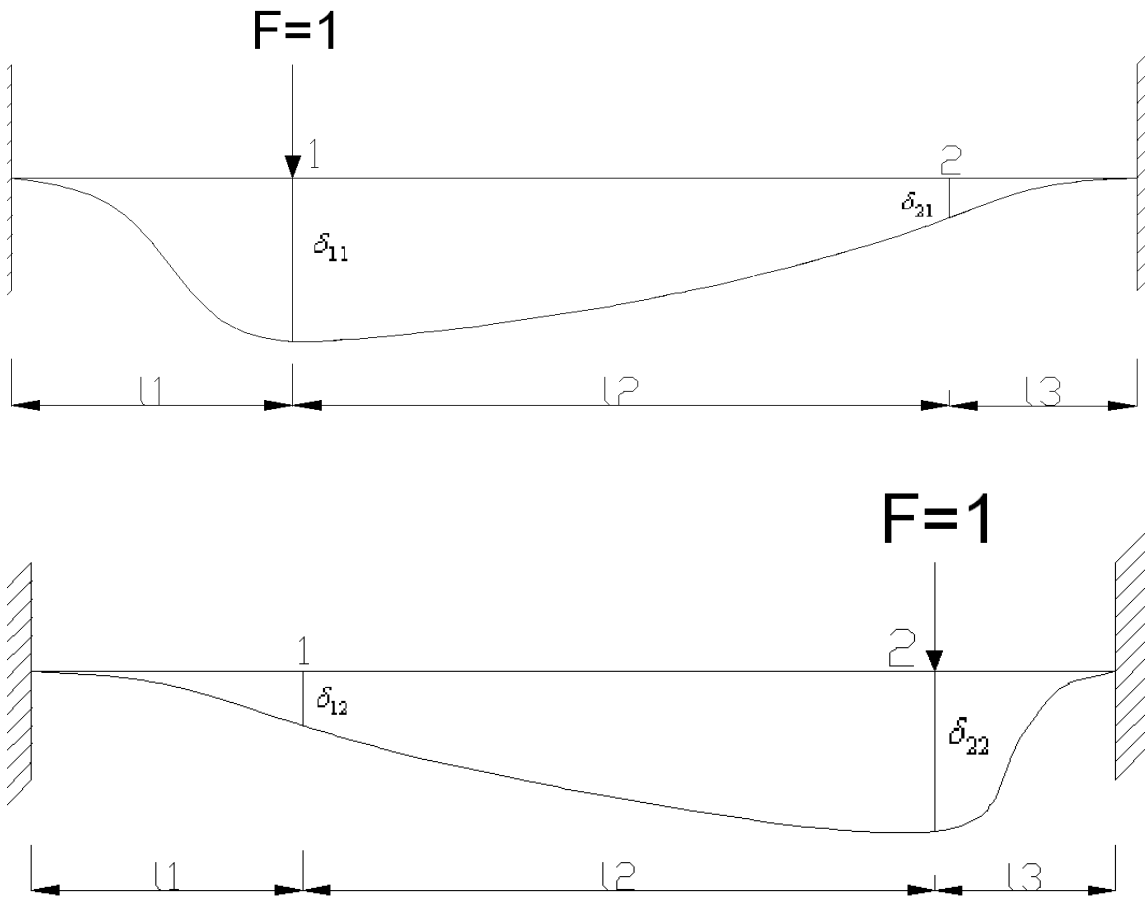
$$w_1 = m_1 \cdot \lambda^2 \cdot w_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \lambda^2 \cdot w_2 \cdot \delta_{12} + F \cdot \delta_{11}$$
$$w_2 = m_1 \cdot \lambda^2 \cdot w_1 \cdot \delta_{21} + m_2 \cdot \lambda^2 \cdot w_2 \cdot \delta_{22} + F \cdot \delta_{21}$$

$$w_1 \cdot (1 - m_1 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{11}) - w_2 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{12} = F \cdot \delta_{11}$$
$$-w_1 \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{21} + w_2 \cdot (1 - m_2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{22}) = F \cdot \delta_{21} \qquad (2.2)$$

2.2 Utjecajni koeficijenti

Utjecajni koeficijent δ_{ij} je definiran kao progib na mjestu „i“ uslijed djelovanja jedinične sile na mjestu „j“.

Za izračunavanje utjecajnih koeficijenata pretpostavit će se da se vratilo sastoji od tri konačna elementa i umjesto zadane sile uzećemo jediničnu silu F=1. Koristićemo jednadžbe (5.6) i (5.8) iz proračuna čvrstoće metodom konačnih elemenata.



Slika 2.2 Parametri za proračun utjecajnih koeficijenata

$$\left(k_{33}^{1}+k_{11}^{2}\right)\cdot w_1+\left(k_{34}^{1}+k_{12}^{2}\right)\cdot \varphi_1+k_{13}^{2}\cdot w_2+k_{14}^{2}\cdot \varphi_2=1$$
$$\left(k_{43}^{1}+k_{21}^{2}\right)\cdot w_1+\left(k_{44}^{1}+k_{22}^{2}\right)\cdot \varphi_1+k_{23}^{2}\cdot w_2+k_{24}^{2}\cdot \varphi_2=0$$
$$k_{31}^{2}\cdot w_1+k_{32}^{2}\cdot \varphi_1+\left(k_{33}^{2}+k_{11}^{3}\right)\cdot w_2+\left(k_{34}^{2}+k_{12}^{3}\right)\cdot \varphi_2=0$$
$$k_{41}^{2}\cdot w_1+k_{42}^{2}\cdot \varphi_1+\left(k_{43}^{2}+k_{21}^{3}\right)\cdot w_2+\left(k_{44}^{2}+k_{22}^{3}\right)\cdot \varphi_2=0$$

$$\Rightarrow \quad w_1=\delta_{11}=8{,}438\cdot 10^{-9}\,\frac{m}{N} \qquad w_2=\delta_{21}=3{,}526\cdot 10^{-9}\,\frac{m}{N}$$

$$\left(k_{33}^{1}+k_{11}^{2}\right)\cdot w_1+\left(k_{34}^{1}+k_{12}^{2}\right)\cdot \varphi_1+k_{13}^{2}\cdot w_2+k_{14}^{2}\cdot \varphi_2=0$$
$$\left(k_{43}^{1}+k_{21}^{2}\right)\cdot w_1+\left(k_{44}^{1}+k_{22}^{2}\right)\cdot \varphi_1+k_{23}^{2}\cdot w_2+k_{24}^{2}\cdot \varphi_2=0$$
$$k_{31}^{2}\cdot w_1+k_{32}^{2}\cdot \varphi_1+\left(k_{33}^{2}+k_{11}^{3}\right)\cdot w_2+\left(k_{34}^{2}+k_{12}^{3}\right)\cdot \varphi_2=1$$
$$k_{41}^{2}\cdot w_1+k_{42}^{2}\cdot \varphi_1+\left(k_{43}^{2}+k_{21}^{3}\right)\cdot w_2+\left(k_{44}^{2}+k_{22}^{3}\right)\cdot \varphi_2=0$$

$$\Rightarrow \quad w_1=\delta_{22}=9{,}813\cdot 10^{-9}\,\frac{m}{N} \qquad w_2=\delta_{12}=3{,}526\cdot 10^{-9}\,\frac{m}{N}$$

Utjecajni koeficijenti glase:

$$\delta_{11} = 8{,}438 \cdot 10^{-9} \frac{m}{N}$$
$$\delta_{12} = 3{,}526 \cdot 10^{-9} \frac{m}{N}$$
$$\delta_{21} = 3{,}526 \cdot 10^{-9} \frac{m}{N}$$
$$\delta_{22} = 9{,}813 \cdot 10^{-9} \frac{m}{N}$$

2.3 Slobodne vibracije

Nema uzbudne sile (desna strana jednadžbe je jednaka nuli) i $\lambda \rightarrow \omega$ tako da iz jednadžbe (2.2) slijedi

$$\begin{aligned} & w_1 \cdot (1 - m_1 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{11}) - w_2 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{12} = 0 \\ & - w_1 \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{21} + w_2 \cdot (1 - m_2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{22}) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sustav jednadžbi (2.3) u matričnom obliku ima sljedeći izgled

$$[D] \cdot \{w\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} (1 - m_1 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{11}) & (1 - m_2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{12}) \\ (-m_1 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{21}) & (1 - m_2 \cdot \omega^2 \cdot \delta_{22}) \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a) Prirodne frekvencije

Iz uvjeta netrivijalnosti rješenja sustava, $\det[D]=0$ proizlazi frenvencijska jednadžba

$$1-m_2\cdot\omega^2\cdot\delta_{22}-m_1\cdot\omega^2\cdot\delta_{11}+m_1\cdot m_2\cdot\omega^4\cdot\delta_{11}\cdot\delta_{22}-m_1\cdot m_2\cdot\omega^4\cdot\delta_{21}\delta_{12}=0$$

$$m_1\cdot m_2\cdot(\delta_{11}\cdot\delta_{22}-\delta_{21}\cdot\delta_{12})\cdot\omega^4-(m_1\cdot\delta_{11}+m_2\cdot\delta_{22})\cdot\omega^2+1=0$$

$$\Omega=\omega^2$$

Korijeni frekvencijske jednadžbe:

$$\Omega_{1,2}=\frac{(m_1\cdot\delta_{11}+m_2\cdot\delta_{22})\pm\sqrt{(m_1\cdot\delta_{11}+m_2\cdot\delta_{22})^2-4\cdot m_1\cdot m_2\cdot(\delta_{11}\cdot\delta_{22}-\delta_{12}\cdot\delta_{21})}}{2\cdot m_1\cdot m_2\cdot(\delta_{11}\cdot\delta_{22}-\delta_{12}\cdot\delta_{21})}$$

Prve dvije prirodne frekvencije iznose

$$\Omega_1=72910\left[\frac{rad}{s}\right]^2\rightarrow \qquad \omega_1=270\frac{rad}{s}$$

$$\Omega_2=259876\left[\frac{rad}{s}\right]^2\rightarrow \qquad \omega_2=509{,}8\frac{rad}{s}$$

---

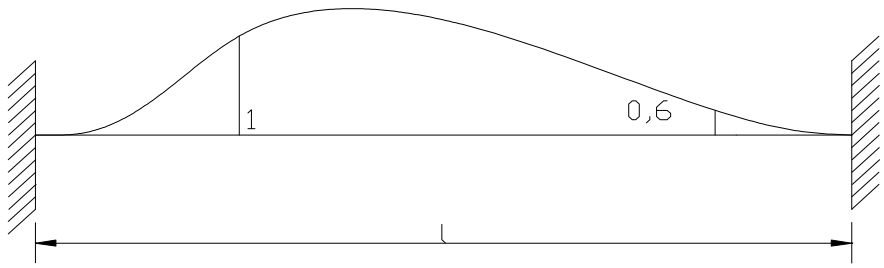
b) Prirodni oblici vibriranja

Uvrštavanjem prirodnih frekvencija ω_1,ω_2 u bilo koju od jednadžbi sustava (2.3) određuju se omjeri koji definiraju prvi i drugi prirodni oblik vibriranja.

Prvi prirodni oblik vibriranja

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)_1 = \frac{1 - m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \delta_{11}}{m_2 \cdot \omega_1^2 \cdot \delta_{12}} = 0{,}6$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}6 \end{Bmatrix}$$

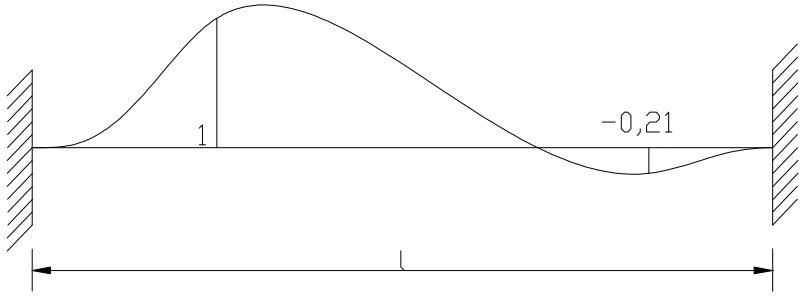


Slika 2.3 Prvi prirodni oblik vibriranja

Drugi prirodni oblik vibriranja:

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)_2 = \frac{1 - m_1 \cdot \omega_2^2 \cdot \delta_{11}}{m_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \delta_{12}} = -0{,}21$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}21 \end{Bmatrix}$$



Slika 2.4. Drugi prirodni oblik vibriranja

2.4 Prisilne vibracije

Na disk 1 djeluje harmonijska uzbudna sila $F(t) = F_0 \cdot \sin(\lambda \cdot t)$ amplitude $F_0 = 500N$ i frekvencije uzbude $\lambda = 0{,}5 \cdot \omega_1 = 135 \frac{rad}{s}$

Rješavanjem sustava jednadžbi (2.2) dobivaju se amplitude vibriranja pojedinih masa u ovisnosti o frekvenciji uzbude i amplitudi uzbudne sile

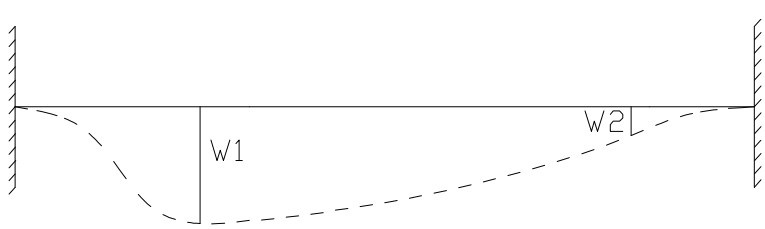
$$\begin{bmatrix} (1 - m_1 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{11}) & (1 - m_2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{12}) \\ (-m_1 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{21}) & (1 - m_2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{22}) \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cdot \delta_{11} \\ F \cdot \delta_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &W_1 \cdot (1 - m_1 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{11}) - W_2 \cdot m_2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{12} = F \cdot \delta_{11} \\ &-W_1 \cdot m_1 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{21} + W_2 \cdot (1 - m_2 \cdot \lambda^2 \cdot \delta_{22}) = F \cdot \delta_{21} \end{aligned}\right\}$$

Amplitute vibriranja iznose

$W_1 = 5{,}59 \cdot 10^{-6} m$

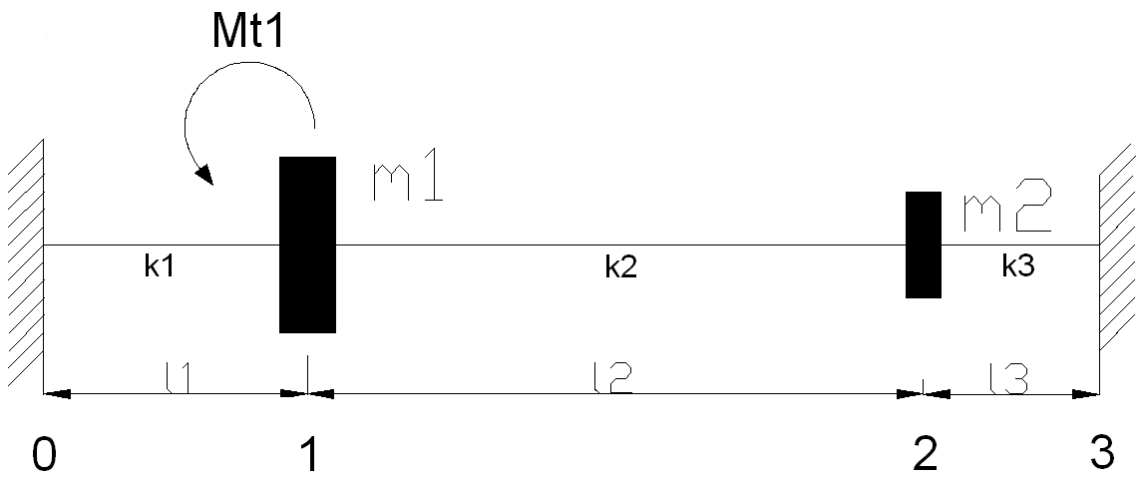
$W_2 = 2{,}53 \cdot 10^{-6} m$



Slika 2.5. Progibi vratila

3. ANALIZA TORZIJSKIH VIBRACIJA VRATILA METODOM DISKRETNOG SUSTAVA

Na slici (3.1) je prikazan torzijski sustav s 2 stupnja slobode gibanja, koji zamjenjuje vratilo na slici (1.1)



Slika 3.1 Torzijski sustav s dvije mase

Polarni momenti inercije diskova iznose

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R_1^2 = 46{,}875 kgm^2$$
$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 = 10 kgm^2 \tag{3.1}$$

Polarni momenti tromosti pojedinih presjeka vratila iznose

$$I_{P1} = \frac{d_1^4 \cdot \pi}{32} = 4{,}97 \cdot 10^{-5} m^4$$
$$I_{P2} = \frac{d_2^4 \cdot \pi}{32} = 1{,}57 \cdot 10^{-4} m^4 \tag{3.2}$$
$$I_{P3} = \frac{d_3^4 \cdot \pi}{32} = 9{,}82 \cdot 10^{-6} m^4$$

Krutost pojedinih dijelova vratila računamo na sljedeći način:

$$\left.\begin{aligned} M_t &= k \cdot \psi \\ M_t &= \frac{\psi \cdot G \cdot I_P}{l} \end{aligned}\right\} \qquad k = \frac{G \cdot I_P}{l} \tag{3.3}$$

$$k_1 = \frac{G \cdot I_{P1}}{l_1} = 5301333{,}3 \frac{N}{m}$$
$$k_2 = \frac{G \cdot I_{P2}}{l_2} = 7177142{,}8 \frac{N}{m}$$
$$k_3 = \frac{G \cdot I_{P3}}{l_3} = 1570800 \frac{N}{m}$$

3.1 Osnovne dinamičke jednadžbe

Iz uvjeta dinamičke ravnoteže sustava dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \ddot{\psi}_1 + k_1 \cdot \psi_1 + k_2 \cdot (\psi_1 - \psi_2) &= M_t \\ J_2 \cdot \ddot{\psi}_2 + k_3 \cdot \psi_2 - k_2 \cdot (\psi_1 - \psi_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sustav jednadžbi (3.4) u matričnom obliku izgleda:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pretpostavljeno rješenje :

$$\psi_1 = \Psi_1 \cdot \cos(\lambda t)$$

$$\dot{\psi}_1 = -\lambda \cdot \Psi_1 \cdot \sin(\lambda t)$$

$$\ddot{\psi}_1 = -\lambda^2 \cdot \Psi_1 \cos(\lambda t)$$

$$\psi_2 = \Psi_2 \cdot \cos(\lambda t)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\lambda \cdot \Psi_2 \cdot \sin(\lambda t)$$

$$\ddot{\psi}_2 = -\lambda^2 \cdot \Psi_2 \cos(\lambda t)$$

$$\ddot{\psi}_1 = -\lambda^2 \cdot \psi_1 \qquad \ddot{\psi}_2 = -\lambda^2 \cdot \psi_2$$

Uvrštavanjem kutnih ubrzanja dobivamo matricu koja izgleda:

$$\left([k] - \lambda^2 \cdot [J]\right) \cdot [\psi] = \{M\} \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \lambda^2 \cdot J_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \lambda^2 \cdot J_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[D] \cdot \{\psi\} = \{M\}$$

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.2 Slobodne vibracije

Nema uzbudnog momenta M_t=0 i $\lambda \rightarrow \omega$ tako da jednadžba (3.5) poprima izgled

$$\{\psi\} \rightarrow \{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 \cdot J_2 \end{bmatrix} = [D] \qquad (3.6)$$

$[D] \cdot \{A\} = \{0\}$ - jednadžba slobodnih vibracija

Uvjet netrivijalnosti :

$$\{A\} \neq \{0\} \rightarrow \det[D] = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 \cdot J_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.7)$$

a) Prirodne frekvencije

$$\omega^2 = \Omega$$

Iz uvjeta netrivijalnosti rješenja sustava, $\det[D] = 0$ proizlazi frenvencijska jednadžba

$$\det[D] = (k_1 + k_2 - \Omega \cdot J_1) \cdot (k_2 + k_3 - \Omega \cdot J_2) - k_2^2 = 0$$
$$(k_1 + k_2) \cdot (k_2 + k_3) - (k_1 + k_2) \cdot \Omega \cdot J_2 - (k_2 + k_3) \cdot \Omega \cdot J_1 + \Omega^2 \cdot J_1 \cdot J_2 - k_2^2 = 0$$
$$k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2^2 + k_2 \cdot k_3 - (k_1 + k_2) \cdot \Omega \cdot J_2 - (k_2 + k_3) \cdot \Omega \cdot J_1 + \Omega^2 \cdot J_1 \cdot J_2 - k_2^2 = 0$$
$$J_1 \cdot J_2 \cdot \Omega^2 - [(k_1 + k_2) \cdot J_2 + (k_2 + k_3) \cdot J_1] \cdot \Omega + k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3 = 0$$

Korijeni frekvencijske jednadžbe:

$$\Omega_{1,2} = \frac{(k_1 + k_2) \cdot J_2 + (k_2 + k_3) \cdot J_1 \pm \sqrt{[(k_1 + k_2) \cdot J_2 + (k_2 + k_3) \cdot J_1]^2 - 4 \cdot J_1 \cdot J_2 \cdot (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3)}}{2 \cdot J_1 \cdot J_2}$$

Prve dvije prirodne frekvencije iznose

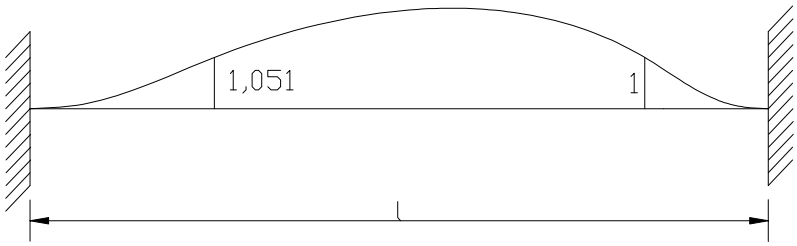
$$\Omega_1 = 120517{,}1 \left[\frac{rad}{s}\right]^2 \rightarrow \omega_1 = 347{,}156 \frac{rad}{s}$$
$$\Omega_2 = 1020484{,}7 \left[\frac{rad}{s}\right]^2 \rightarrow \omega_2 = 1010{,}2 \frac{rad}{s}$$

b) Prirodni oblici vibriranja

Uvrštavanjem prirodnih frekvencija ω_1, ω_2 u bilo koju od jednadžbi sustava (3.7) određuju se omjeri koji definiraju prvi i drugi prirodni oblik vibriranja:

Prvi prirodni oblik vibriranja

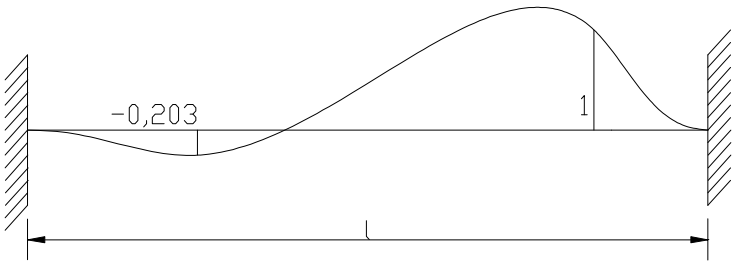
$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_1^2 \cdot J_1} = 1{,}05094$$



Slika 3.2. Prvi prirodni oblik vibriranja

Drugi prirodni oblik vibriranja

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_2^2 \cdot J_1} = -0{,}203$$



Slika 3.3 Drugi prirodni oblik vibriranja

3.3 Prisilne vibracije

Na disk 1 djeluje moment uvijanja $M_t(t) = M_{t0} \cdot \sin(\lambda \cdot t)$ gdje je $M_{t0} = 500 Nm$ i frekvencija uzbude $\lambda = 0{,}5 \cdot \omega_1 = 173{,}578 \frac{rad}{s}$

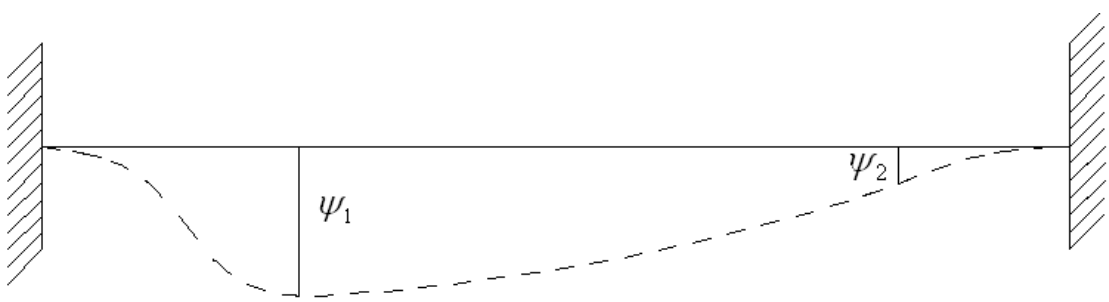
$$[D] \cdot \{\psi\} = \{M\}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 \cdot J_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1\right) \cdot \psi_1 - k_2 \cdot \psi_2 = M_t \\ &-k_2 \cdot \psi_1 + \left(k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1\right) \cdot \psi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (3.8) dobivaju se kutevi torzije:

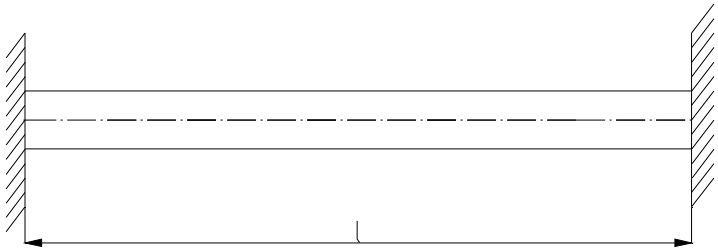
$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= 1{,}01 \cdot 10^{-4} rad \\ \psi_2 &= 8{,}55 \cdot 10^{-5} rad \end{aligned}\right\} \quad \text{- za} \quad \omega = 173{,}578 \frac{rad}{s}$$



Slika 3.4 Kutevi torzije

4. PROVJERA SLOBODNIH VIBRACIJA METODOM JEDNOLIKE GREDE

Mase diskova m_1 i m_2 raspodjeljene su jednoliko po duljini grede, a promjer grede je dobiven kao srednja vrijednost pojedinih promjera vratila.



Slika 4.1 Upeta jednolika greda

Osnovne značajke grede

$$d = 0{,}15m$$
$$l = 3m$$
$$EI = 5218{,}6kNm^2$$
$$I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 4{,}97 \cdot 10^{-5} m^4$$
$$J_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 5{,}625kgm^2$$

4.1 Fleksijske vibracije

Za gredu uklještenu prema slici (4.1) potrebno je odrediti prirodne frekvencije slobodnih fleksijskih vibracija, koristeći egzaktno rješenje diferencijalne jednadžbe.

$$\frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} - \frac{m}{E \cdot I} \cdot \omega_n^2 \cdot w_n(x) = 0 \qquad \text{- diferencijalna jednadžba slobodnih vibracija} \tag{4.1}$$

$$\omega_n = \beta_n^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{4.2}$$

Egzaktno rješenje jednadžbe (4.1)

$$w(x) = A_1 \cdot U_1 + A_2 \cdot U_2 + A_3 \cdot U_3 + A_4 \cdot U_4 \tag{4.3}$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \varphi(x) = \beta \cdot \left(A_1 \cdot U_4 + A_2 \cdot U_1 + A_3 \cdot U_2 + A_4 \cdot U_3\right) \tag{4.4}$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x) = -EI \cdot \beta^2 \cdot \left(A_1 \cdot U_3 + A_2 \cdot U_4 + A_3 \cdot U_1 + A_4 \cdot U_2\right) \tag{4.5}$$

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = Q(x) = -EI \cdot \beta^3 \cdot \left(A_1 \cdot U_2 + A_2 \cdot U_3 + A_3 \cdot U_4 + A_4 \cdot U_1\right) \tag{4.6}$$

Rubni uvjeti:

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = l \end{matrix}\right\} \rightarrow w = 0; \varphi = 0$$

Koeficijenti Krilova

$$\begin{aligned} U_{n1} &= \frac{1}{2} \cdot \left(ch(\beta_n \cdot x) + \cos(\beta_n \cdot x)\right) \\ U_{n2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(sh(\beta_n \cdot x) + \sin(\beta_n \cdot x)\right) \\ U_{n3} &= \frac{1}{2} \cdot \left(ch(\beta_n \cdot x) - \cos(\beta_n \cdot x)\right) \\ U_{n4} &= \frac{1}{2} \cdot \left(sh(\beta_n \cdot x) - \sin(\beta_n \cdot x)\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Svojstvo koeficijenata Krilova:

<u>Za x=0</u> : $U_{n1}=1$; $U_{n2}= U_{n3}= U_{n4}=0$

Iz jednadžbe (4.2) slijedi:

$$A_1 \cdot U_1 = A_1 \cdot 1 = 0 \rightarrow A_1 = 0$$

Iz jednadžbe (4.3) slijedi:

$$A_2 \cdot U_1 = A_2 \cdot 1 = 0 \rightarrow A_2 = 0$$

<u>Za x=l :</u>

$$\begin{aligned} A_3 \cdot U_3(l) + A_4 \cdot U_4(l) = 0 \\ A_3 \cdot U_2(l) + A_4 \cdot U_3(l) = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$\Delta = U_3^2(l) - U_2(l) \cdot U_4(l) = 0$ - uvjet netrivijalnosti rješenja

$$\Delta = \frac{1}{4} \cdot \left(ch^2(\beta_n \cdot l) - 2 \cdot ch(\beta_n \cdot l) \cdot \cos(\beta_n \cdot l) + \cos^2(\beta_n \cdot l) \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(sh^2(\beta_n \cdot l) - \sin^2(\beta_n \cdot l) \right) = 0$$

$ch(\beta_n \cdot l) \cdot \cos(\beta_n \cdot l) = 1$ - frekvencijska jednadžba

Slijedi:

$$\beta_1 \cdot l = 4{,}73$$
$$\beta_2 \cdot l = 7{,}85$$

$$\omega_n = \frac{(\beta_n \cdot l)^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Prirodne frekvencije iznose

$$\omega_1 = 2{,}486 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} = 220 \frac{rad}{s}$$
$$\omega_2 = 6{,}847 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} = 605{,}8 \frac{rad}{s}$$

4.2 Torzijske vibracije

Za gredu uklještenu prema slici (4.1) potrebno je odrediti prirodne frekvencije slobodnih torzijskih vibracija, koristeći egzaktno rješenje diferencijalne jednadžbe.

$$\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} - \frac{J_m}{G \cdot I_p} \cdot \lambda_n^2 \cdot \psi_n(x) = 0$$ - diferencijalna jednadžba slobodnih vibracija (4.9)

$$\alpha_n = \omega_n \cdot \sqrt{\frac{J_m}{G \cdot I_p}} \tag{4.10}$$

$$I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} = 4{,}97 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$J_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 5{,}625 kgm^2$$

Egzaktno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\psi_n(x) = A_{1n} \cdot \sin(\alpha_n x) + A_{2n} \cdot \cos(\alpha_n x) \tag{4.11}$$

Rubni uvjeti:

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = l \end{matrix}\right\} \quad \psi = 0$$

Uvrstimo li rubne uvjete u jednadžbu (4.11) dobivamo

$$A_{2n} \cdot 1 = 0 \rightarrow A_{2n} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} A_{1n} \cdot \sin(\alpha_n \cdot l) = 0 \\ A_{1n} \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \sin(\alpha_n \cdot l) = 0$$ - frekvencijska jednadžba (4.11)

$$\alpha_n \cdot l = n \cdot \pi$$

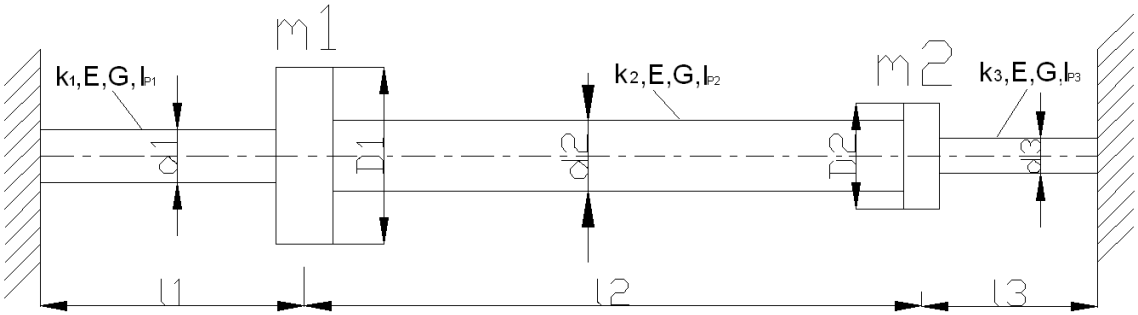
Prirodne frekvencije iznose

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J_m}} = 880 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot \pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J_m}} = 1760 \frac{rad}{s}$$

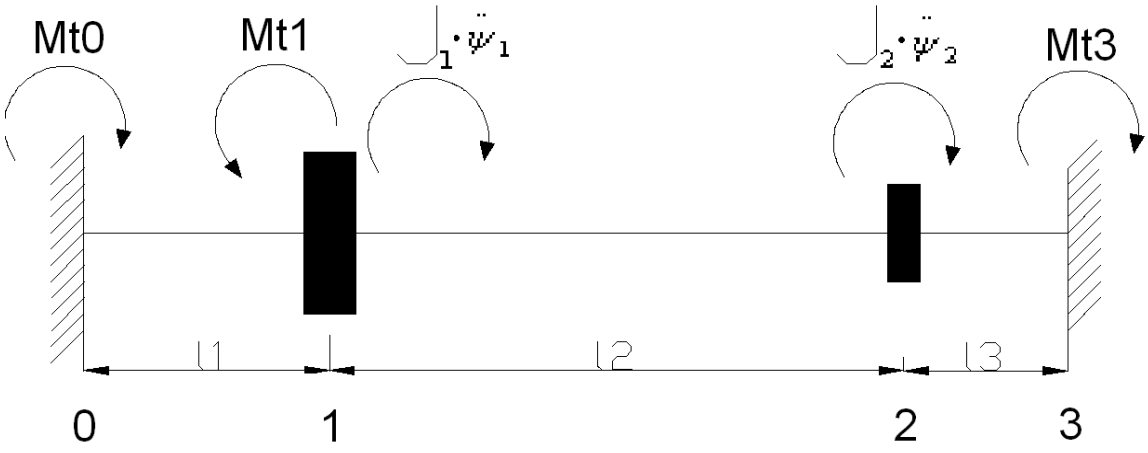
5. PROVJERA ČVRSTOĆE VRATILA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

Pretpostavit ćemo da se zadano vratilo sastoji od tri konačna elementa, kao što je prikazano na slici (5.1).



Slika 5.1 Vratilo s dva diska

5.1 Čvrstoća vratila na uvijanje



Slika 5.2 Momenti uvijanja vratila

Sustav jednadžbi u matričnom obliku:

$$[k]\cdot\{\delta\}=\{m\} \tag{5.1}$$

$$[k]=\frac{G\cdot I_p}{l}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$ - matrica krutosti jednog elementa

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{Bmatrix}$$ - vektor čvornih pomaka

$$\{m\}=\begin{Bmatrix}-M_{t0}\\ M_{t1}+J_1\cdot\ddot{\psi}_1\\ J_2\cdot\ddot{\psi}_2\\ -M_{t3}\end{Bmatrix}$$ - vektor čvornih momenata

Polarni momenti tromosti pojedinih presjeka vratila iznose

$$I_{P1}=\frac{d_1^4\cdot\pi}{32}=4{,}97\cdot10^{-5}\,m^4$$
$$I_{P2}=\frac{d_2^4\cdot\pi}{32}=1{,}57\cdot10^{-4}\,m^4$$
$$I_{P3}=\frac{d_3^4\cdot\pi}{32}=9{,}82\cdot10^{-6}\,m^4$$

$$\begin{bmatrix} \frac{G\cdot I_{P1}}{l_1} & -\frac{G\cdot I_{P1}}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{G\cdot I_{P1}}{l_1} & \frac{G\cdot I_{P1}}{l_1}+\frac{G\cdot I_{P2}}{l_2} & -\frac{G\cdot I_{P2}}{l_2} & 0 \\ 0 & \frac{G\cdot I_{P2}}{l_2} & \frac{G\cdot I_{P2}}{l_2}+\frac{G\cdot I_{P3}}{l_3} & -\frac{G\cdot I_{P3}}{l_3} \\ 0 & 0 & -\frac{G\cdot I_{P3}}{l_3} & \frac{G\cdot I_{P3}}{l_3} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_{t0} \\ M_{t1}+J_1\cdot\ddot{\psi}_1 \\ J_2\cdot\ddot{\psi}_2 \\ -M_{t3} \end{Bmatrix}$$

Rubni uvjeti:

$\psi_0 = \psi_3 = 0$ - uklještenje

$$\ddot{\psi}_1 = -\lambda^2\cdot\psi_1 = -173{,}578^2\cdot 1{,}01\cdot 10^{-4} = -3{,}04\frac{rad}{s^2}$$

$$\ddot{\psi}_2 = -\lambda^2\cdot\psi_2 = -173{,}578^2\cdot 8{,}55\cdot 10^{-5} = -2{,}576\frac{rad}{s^2}$$

Inercijski momenti:

$$J_1\cdot\ddot{\psi}_1 = -142{,}5Nm$$

$$J_2\cdot\ddot{\psi}_2 = -25{,}75Nm$$

Faza redukcije:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{G\cdot I_{P1}}{l_1}+\frac{G\cdot I_{P2}}{l_2}\right)\cdot\psi_1 - \frac{G\cdot I_{P2}}{l_2}\cdot\psi_2 = M_{t1}+J_1\cdot\ddot{\psi}_1 \\ &-\frac{G\cdot I_{P2}}{l_2}\cdot\psi_1 + \left(\frac{G\cdot I_{P2}}{l_2}+\frac{G\cdot I_{P3}}{l_3}\right)\cdot\psi_2 = J_2\cdot\ddot{\psi}_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \psi_1 &= 5{,}6\cdot 10^{-5}rad \\ \psi_2 &= 4{,}744\cdot 10^{-5}rad \end{aligned}$$

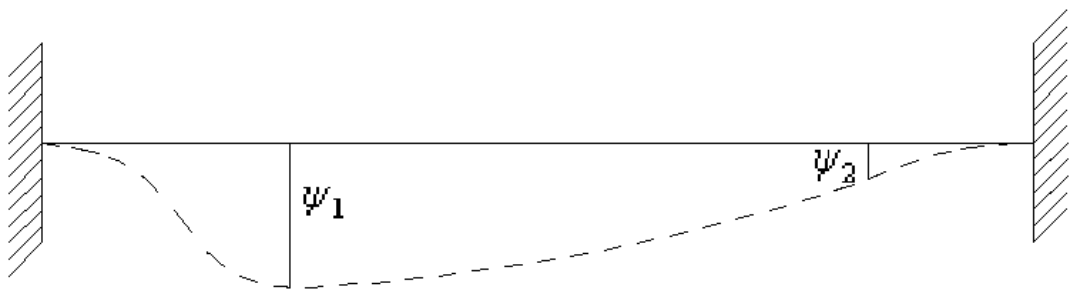
Faza restitucije:

$$\frac{G \cdot I_{P1}}{l_1} \cdot \psi_0 - \frac{G \cdot I_{P1}}{l_1} \cdot \psi_1 = -M_{t0} \qquad \Rightarrow M_{t0} = 296{,}9 Nm$$

- momenti u uklještenjima

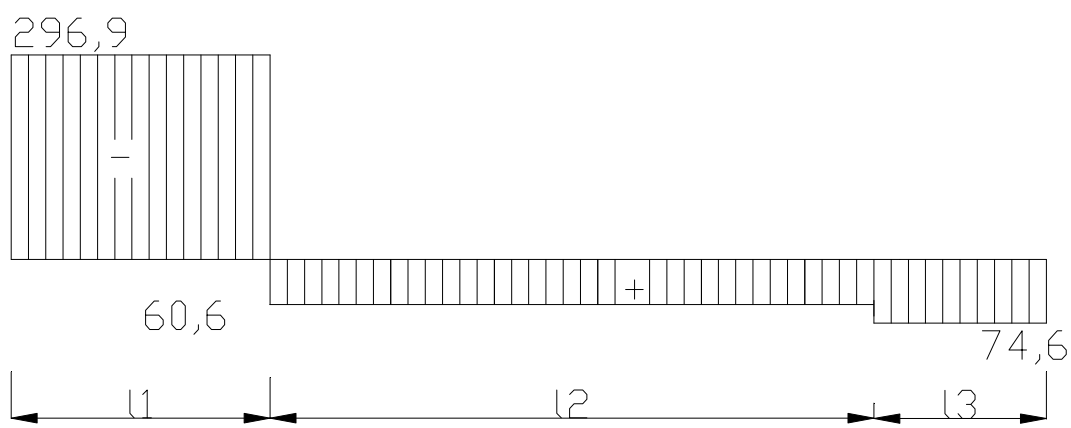
$$-\frac{G \cdot I_{P3}}{l_3} \cdot \psi_2 + \frac{G \cdot I_{P3}}{l_3} \cdot \psi_3 = -M_{t3} \qquad \Rightarrow M_{t3} = 74{,}52 Nm$$

„Ψ dijagram“



Slika 5.3 Dijagram kuteva torzije

„Mt dijagram“



Slika 5.4 Dijagram momenata torzije

$$M_{t\max} = M_{t0} = 296{,}9 Nm$$

$$\tau_{dop} = 150 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{dop}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{W_p}$$

$$W_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$$

Momenti otpora su:

$$W_{p1} = \frac{d_1^3 \cdot \pi}{16} = 6{,}63 \cdot 10^{-4} m^3$$

$$W_{p2} = \frac{d_2^3 \cdot \pi}{16} = 1{,}57 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$W_{p3} = \frac{d_3^3 \cdot \pi}{16} = 1{,}96 \cdot 10^{-4} m^3$$

Smična naprezanja u vratilu su:

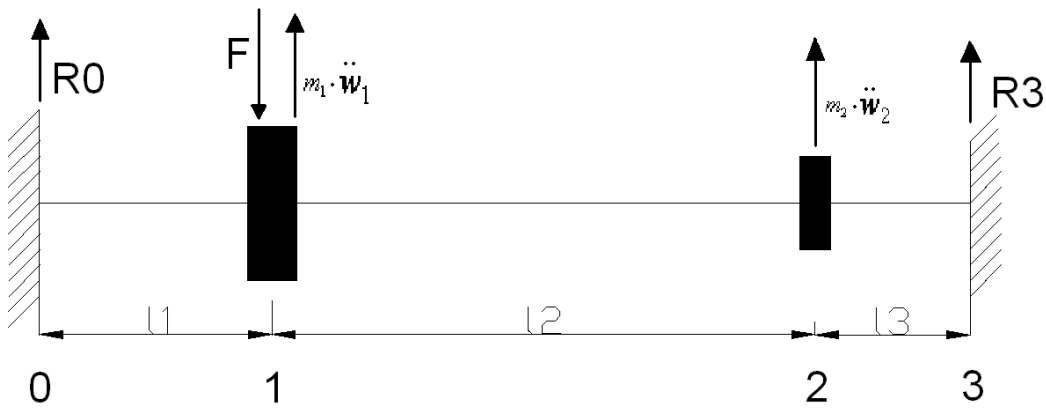
$$\tau_1 = \frac{M_{t0}}{W_{p1}} = 447{,}813 \frac{kN}{m^2} = 0{,}447 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_2 = \frac{M_{t0} - M_{t1} + J_1 \cdot \ddot{\psi}_1}{W_{p2}} = 38{,}6 \frac{kN}{m^2} = 0{,}0386 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_1 = \frac{M_{t3}}{W_{p3}} = 380{,}2 \frac{kN}{m^2} = 0{,}38 \frac{N}{mm^2}$$

Odavde slijedi da je uvjet $\tau_{\max} \leq \tau_{dop}$ zadovoljen i da će vratilo izdržati smična naprezanja.

5.2 ČVRSTOĆA VRATILA NA SAVIJANJE



Slika 5.5 Sile na vratilo

$$[k] \cdot \{\delta\} = \{f\} \tag{5.2}$$

$$[k] = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad \text{- matrica krutosti} \tag{5.3}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \quad \text{- vektor čvornih pomaka} \tag{5.4}$$

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} -R_0 \\ M_0 \\ F+m_1\cdot\ddot{w}_1 \\ 0 \\ m_2\cdot\ddot{w}_2 \\ 0 \\ -R_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$ - vektor čvornih sila i momenata (5.5)

Rubni uvjeti:

$w_0=\varphi_0=w_3=\varphi_3=0$ - uklještenje (nema progiba i kuta nagiba)

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1+k_{11}^2 & k_{34}^1+k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1+k_{21}^2 & k_{44}^1+k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2+k_{11}^3 & k_{34}^2+k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2+k_{21}^3 & k_{44}^2+k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix}$$

Momenti tromosti pojedinih presjeka vratila

$$I_1=\frac{d_1^4\cdot\pi}{64}=2{,}485\cdot10^{-5}\,m^4$$

$$I_2=\frac{d_2^4\cdot\pi}{64}=7{,}854\cdot10^{-5}\,m^4$$

$$I_3=\frac{d_3^4\cdot\pi}{64}=4{,}91\cdot10^{-6}\,m^4$$

Koeficijenti krutosti iznose

$$k_{11}^1 = k_{33}^1 = -k_{13}^1 = k_{31}^1 = \frac{12 \cdot E \cdot I_1}{l_1^3} = 148437333{,}3 \frac{N}{m}$$

$$k_{12}^1 = k_{14}^1 = k_{21}^1 = k_{41}^1 = -k_{23}^1 = -k_{32}^1 = -k_{34}^1 = -k_{43}^1 = \frac{6 \cdot E \cdot I_1}{l_1^2} = 55664000 \frac{N}{m}$$

$$k_{22}^1 = k_{44}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} = 27832000 \frac{N}{m}$$

$$k_{24}^1 = k_{42}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I_1}{l_1} = 13916000 \frac{N}{m}$$

$$k_{11}^2 = k_{33}^2 = -k_{13}^2 = k_{31}^2 = \frac{12 \cdot E \cdot I_2}{l_2^3} = 36929828{,}6 \frac{N}{m}$$

$$k_{12}^2 = k_{14}^2 = k_{21}^2 = k_{41}^2 = -k_{23}^2 = -k_{32}^2 = -k_{34}^2 = -k_{43}^2 = \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{l_2^2} = 32313600 \frac{N}{m}$$

$$k_{22}^2 = k_{44}^2 = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = 37699200 \frac{N}{m}$$

$$k_{24}^2 = k_{42}^2 = \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = 18849600 \frac{N}{m}$$

$$k_{11}^3 = k_{33}^3 = -k_{13}^3 = k_{31}^3 = \frac{12 \cdot E \cdot I_3}{l_3^3} = 98985600 \frac{N}{m}$$

$$k_{12}^3 = k_{14}^3 = k_{21}^3 = k_{41}^3 = -k_{23}^3 = -k_{32}^3 = -k_{34}^3 = -k_{43}^3 = \frac{6 \cdot E \cdot I_3}{l_3^2} = 24746400 \frac{N}{m} \qquad (5.6)$$

$$k_{22}^3 = k_{44}^3 = \frac{4 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = 8248800 \frac{N}{m}$$

$$k_{24}^3 = k_{42}^3 = \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = 4124400 \frac{N}{m}$$

$$\ddot{w}_1 = -\omega^2 \cdot w_1 = -5{,}2^2 \cdot 3{,}742 \cdot 10^{-3} = -0{,}101 \frac{m}{s^2}$$

$$\ddot{w}_2 = -\omega^2 \cdot w_2 = -5{,}2^2 \cdot 3{,}087 \cdot 10^{-3} = -0{,}083 \frac{m}{s^2}$$

Inercijske sile iznose:

$$m_1 \cdot \ddot{w}_1 = -151{,}5N$$
$$m_2 \cdot \ddot{w}_2 = -41{,}5N \tag{5.7}$$

Faza redukcije:

$$\begin{aligned}
&\left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right)\cdot w_1 + \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right)\cdot \varphi_1 + k_{13}^2 \cdot w_2 + k_{14}^2 \cdot \varphi_2 = F + m_1 \cdot \ddot{w}_1 \\
&\left(k_{43}^1 + k_{21}^2\right)\cdot w_1 + \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right)\cdot \varphi_1 + k_{23}^2 \cdot w_2 + k_{24}^2 \cdot \varphi_2 = 0 \\
&k_{31}^2 \cdot w_1 + k_{32}^2 \cdot \varphi_1 + \left(k_{33}^2 + k_{11}^3\right)\cdot w_2 + \left(k_{34}^2 + k_{12}^3\right)\cdot \varphi_2 = m_2 \cdot \ddot{w}_2 \\
&k_{41}^2 \cdot w_1 + k_{42}^2 \cdot \varphi_1 + \left(k_{43}^2 + k_{21}^3\right)\cdot w_2 + \left(k_{44}^2 + k_{22}^3\right)\cdot \varphi_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Progibi i kutevi nagiba u čvorovima 1 i 2:

$$w_1 = 2{,}794 \cdot 10^{-6}\, m$$
$$\varphi_1 = 2{,}185 \cdot 10^{-6}\, rad$$
$$w_2 = 0{,}822 \cdot 10^{-6}\, m$$
$$\underline{\varphi_2 = -2{,}726 \cdot 10^{-6}\, rad}$$

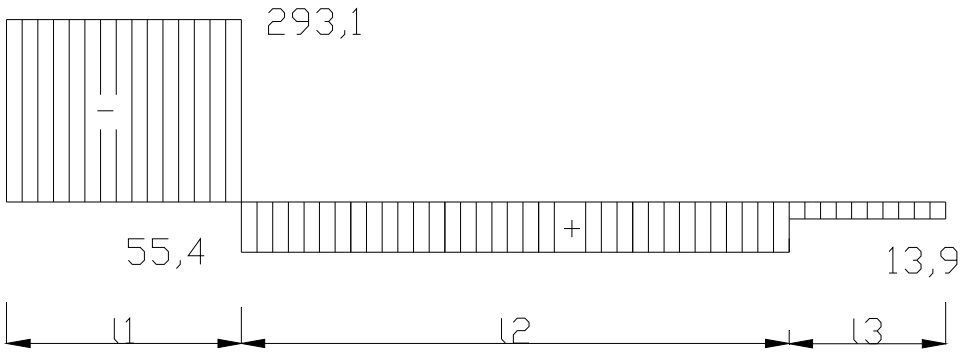
Faza restitucije:

$$\begin{aligned}
&k_{13}^1 \cdot w_1 + k_{14}^1 \cdot \varphi_1 = -R_0 \\
&k_{23}^1 \cdot w_1 + k_{24}^1 \cdot \varphi_1 = M_0 \\
&k_{31}^3 \cdot w_2 + k_{32}^3 \cdot \varphi_2 = -R_3 \\
&k_{41}^3 \cdot w_2 + k_{42}^3 \cdot \varphi_2 = M_3
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Sile i momenti u uklještenju:

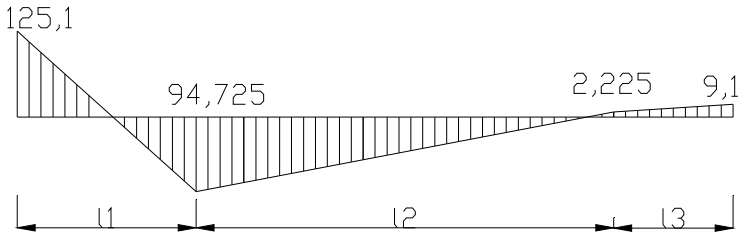
$$R_0 = 293{,}1N$$
$$M_0 = -125{,}1Nm$$
$$R_3 = 13{,}9N$$
$$\underline{M_3 = 9{,}1Nm}$$

„F dijagram“



Slika 5.6 Dijagram poprečnih sila

„Q dijagram“



Slika 5.7 Dijagram momenata savijanja

$$\sigma_{dop} = 200 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{dop}$$

$$\sigma_i \leq \frac{M_i}{W_i}$$

Momenti otpora vratila su:

$$W_1 = \frac{d_1^3 \cdot \pi}{32} = 3{,}313 \cdot 10^{-4} m^3$$
$$W_2 = \frac{d_2^3 \cdot \pi}{32} = 7{,}854 \cdot 10^{-4} m^3$$
$$W_3 = \frac{d_3^3 \cdot \pi}{32} = 9{,}817 \cdot 10^{-5} m^3$$

Normalna naprezanja u vratilu su

$$\sigma_1 = \frac{M_0}{W_1} = 377603 \frac{N}{m^2} = 0{,}378 \frac{N}{mm^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{M_1}{W_2} = 120607 \frac{N}{m^2} = 0{,}121 \frac{N}{mm^2}$$
$$\sigma_3 = \frac{M_2}{W_3} = 92696 \frac{N}{m^2} = 0{,}093 \frac{N}{mm^2}$$

Odavde slijedi da je uvjet $\sigma_{\max} \leq \sigma_{dop}$ zadovoljen i da će vratilo izdržati normalna naprezanja.

6. ZAKLJUČAK

Promatrana konstrukcija je zanimljiva jer se na jednostavan način omogućuje analiza vibracija neiskusnima u rješavanju zahtjevnijih problema i oblika konstrukcije. Zadatak je riješen metodama koje ne daju precizna rješenja, ali mogu poslužiti pri preliminarnom promatranju problema ili kao provjera točnosti nekog drugog rješenja.

Metoda konačnih elemenata i metoda analize fleksijskog sustava s dvije mase utjecajnim koeficijentima daju približna rješenja zbog malog broja konačnih elemenata (tri), odnosno malog broja fleksijskog sustava. Za točnije rješenje ovim metodama potrebno je u proračun uključiti veći broj konačnih elemenata odnosno veći broj masa fleksijskog sustava što bi „otežalo“ proračun. Upotrebom računalnih programa taj proračun se uvelike ubrzava i olakšava.

Prirodne frekvencije slobodnih fleksijskih vibracija dobivene metodom utjecajnih koeficijenata i metodom jednolike grede se malo razlikuju; dok su razlike prirodnih frekvencija slobodnih torzijskih vibracija dobivenih ovim metodama malo veće.

Provjerom čvrstoće vratila metodom konačnih elemenata zaključuje se da geometrijske značajke zadanog vratila mogu izdržati zadana vanjska opterećenja.

7. POPIS LITERATURE:

1. GRUBIŠIĆ RAJKO: „Teorija konstrukcija - primjeri statičke analize elemenata konstrukcije“, Sveučilište u Zagrebu FSB, 1997.
2. GRUBIŠIĆ RAJKO: „Teorija konstrukcija - primjeri dinamičke analize elemenata konstrukcije“, Sveučilište u Zagrebu FSB, 2002.
3. RAŠKOVIĆ DANILO: „Tablice iz otpornosti materijala“, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
4. SENJANOVIĆ IVO: „Vibracije broda, I dio“, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1980.
5. SENJANOVIĆ IVO: „Vibracije broda, II dio“, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1981.
6. KRAUT BOJAN: „Strojarski priručnik“, Tehnička knjiga, Zagreb, 1976.