Proračun vibracija mosta koji povezuje nadgrađe i dimnjak tankera

Mudronja, Luka

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Rajko Grubišić Luka Mudronja

Zagreb, 2008.

SAŽETAK RADA

Ovaj se rad bavi analizom vibracija nosača na brodskom nadgrađu koji povezuje dimnjak s nadgrađem tankera sa svrhom da se ukruti brodski dimnjak. Analiza vibracija provedena je nizom metoda kako bi se usporedili rezultati, te također provjerila njihova točnost. Analiza obuhvaća provjeru prirodnih vibracija te proračun prirodnih oblika vibriranja, kao i proračun amplitude odnosno amplitude elastične linije uslijed djelovanja sile uzbude. Sila uzbude je definirana, također i frekvencija uzbude koja se izračuna prema broju okretaja brodskog vijka. Usporedbom prirodne frekvencije i frekvencije uzbude provjerilo se da li konstrukcija može jednostavno doći u područje rezonancije. U tom slučaju bilo bi potrebno napraviti određene promjene na samoj kostrukciji nosača.

Pri razradi problema koristili su se računalni programi SolidWorks 2008 za izradu crteža, te program MathCad13 za računanje kompliciranijih matematičkih jednadžbi.

SADRŽAJ

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno služeći se stečenim znanjem i navedenom literaturom.

POPIS SLIKA I TABLICA

1. UVOD

Potrebno je izvršiti analizu vibracija nosača mosta koji povezuje nadgrađe i dimnjak tankera. Nosač je ukliještena greda specifičnog poprečnog presjeka. Analiza vibracija obuhvaća proračun slobodnih i prisilnih vibracija različitim metodama i to redom:

a) Analiza vibracija sustava s jednim stupnjem slobode gibanja

b) Analiza vibracija fleksijskog sustava s tri mase metodom utjecajnih koeficijenata

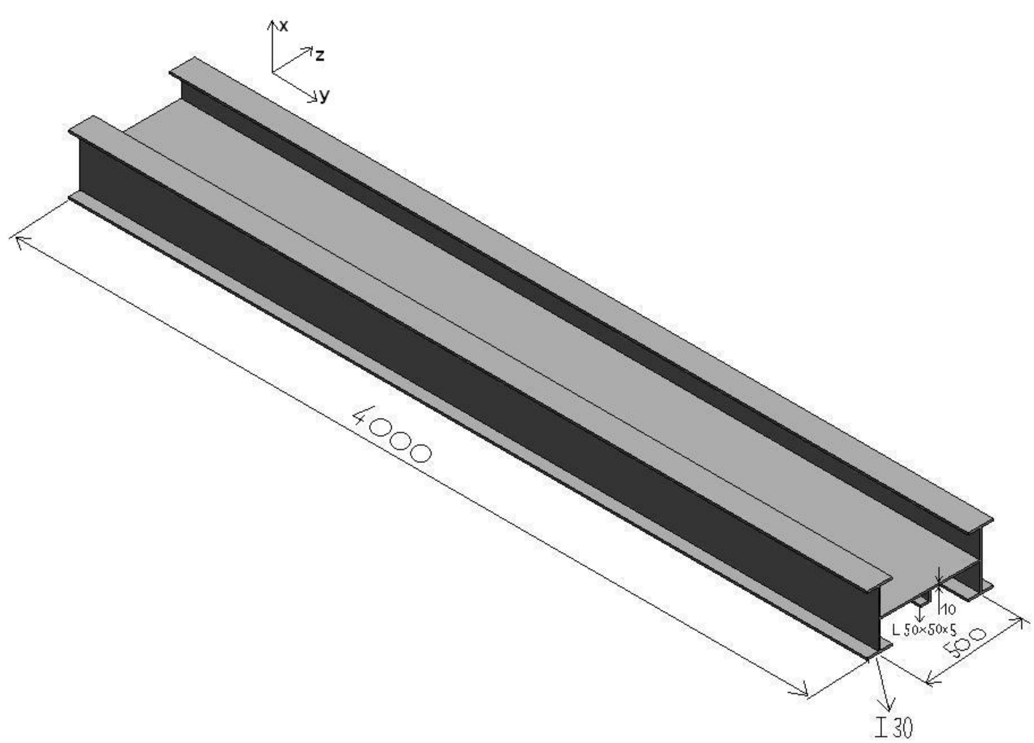
c) Analiza poprečnih vibracija jednolike grede metodom egzaktnog rješenja diferencijalne jednadžbe

d) Analiza poprečnih vibracija jednolike grede metodom konačnih elemenata

e) Provjera osnovne prirodne frekvencije metodom Rayleighevog kvocijenta:

-fleksijskog sustava s tri mase (tri stupnja slobode gibanja)

-sustava s kontinuiranom masom i krutosti



Sl.1.1 Nosač koji povezuje nadgrađe i dimnjak tankera

2. PRORAČUN KRUTOSTI NA SAVIJANJE (EI)

Analiza vibracija provodi se za gredu čiji je presjek sastavljen od niza karakterističnih dijelova. Krutost na savijanje presjeka dobije se umnoškom Youngovog modula elastičnosti za konstrukcijski čelik i momenta inercije danog presjeka.

Moment inercije presjeka dobije se zbrajanjem momenata inercije karakterističnih dijelova koji se za pojedini presjek očitaju iz Krautovog strojarskog priručnika. Sve momente inercije potrebno je svesti na istu os koja prolazi središtem nosača (y os) pomoću Steinerovog pravila.

Momenti inercije karakterističnih presjeka:

a) I profil (2 komada):

$$I_{30}$$
$$I_y = 9800 cm^4$$
$$A = 6910 mm^2$$
$$d = 10,8 mm$$

b) L profil:

$$L50x50x5$$
$$I_y = 11 cm^4$$
$$A = 480 mm^2$$
$$e = 14 mm$$

c) pravokutni profil:

$$I_{\square} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{50 \cdot 1}{12} = 4,1 cm^4$$

Moment inercije presjeka grede:

$$I_{uk} = 2 \cdot \left(I_{30} + A \cdot e^2 \right) + I_{\square} + \left(I_L + A \cdot e^2 \right)$$
$$I_{uk} = 2 \cdot \left(9800 + 69,1 \cdot 25,54^2 \right) + 4,1 + \left(11 + 4,8 \cdot 4,1^2 \right)$$
$$I_{uk} = 109839 cm^4$$

Krutost na savijanje:

$E = 2{,}1 \cdot 10^8 \, kN / m^2$ $\quad - Youngov \text{ mod} ul \; za \; konstrukcijski \; čelik$

$I = 109839 cm^4 = 0{,}00109839 m^4$ $\quad - moment \; inercije \; specifičnog \; presjeka \; grede$

$EI = 2{,}1 \cdot 10^8 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-3}$

$EI = 2{,}3 \cdot 10^5 \, kNm^2$

$EI = 230000 kNm^2$

$EI = 230000000 Nm^2$

3. PRORAČUN MASE NOSAČA

Masa grede računa se preko volumena i gustoće materijala od kojeg je konstruirana:

$m = \rho \cdot V$

$\rho = 7800 \; kg/m^3$ - gustoća konstrukcijskog čelika

Volumen grede čini zbroj volumena pojedinih elemenata karakterističnog presjeka:

a) I profili (2 komada): $V = 2 \cdot \left(A_{I_{30}} \cdot l \right)$

b) L profil: $V = A_L \cdot l$

c) profil pravokutnog presjeka: $V = A_{\square} \cdot l$

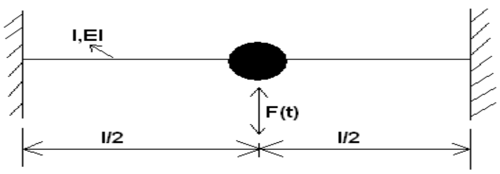
$$V_{grede} = 2 \cdot \left(A_{I_{30}} \cdot l \right) + A_L \cdot l + A_{\square} \cdot l$$
$$V_{grede} = 2 \cdot (0{,}00691 \cdot 4) + (0{,}000480 \cdot 4) + (0{,}005 \cdot 4)$$
$$V_{grede} = 0{,}0772 \; m^3$$

Masa grede:

$$m = \rho \cdot V$$
$$m = 7800 \cdot 0{,}0772$$
$$m = 602 \; kg$$

4. ANALIZA VIBRACIJA SUSTAVA S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE GIBANJA

Sustav s jednim stupnjem slobode gibanja – sustav kojem se položaj oscilirajuće mase može u svakom trenutku odrediti pomoću samo jednog podatka.



Sl.4.1   Sustav s jednim stupnjem slobode gibanja

m - masa

c - krutost

n - koeficijent prigušenja

w - pomak mase iz statičkog stanja ravnoteže

$\dot{w}$ - brzina mase

$\ddot{w}$ - ubrzanje mase

Uvjet dinamičke ravnoteže sustava daje sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$m \cdot \ddot{w} + c \cdot w = F_0 \cdot \sin \lambda t \qquad (4.1)$$

ili u obliku:

$$\ddot{w} + \frac{c}{m} \cdot w = \frac{F_0}{m} \cdot \sin \lambda t \tag{4.2}$$

a) Slobodne vibracije

Nema uzbudne sile (desna strana jednadžbe je jednaka nuli) tako da slijedi:

$$\ddot{w} + \frac{c}{m} \cdot w = 0 \tag{4.3}$$

Prva prirodna frekvencija glasi:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{4.4}$$

Krutost grede c se odredi preko jedinične sile F, masa m je poznata:

$$m = 602kg$$

$$c = \frac{F}{\delta}$$

$$\delta = \frac{l^3}{192EI}$$

$$F = 1N$$

$$l = 4m$$

$$c = \frac{192EI}{l^3} = \frac{192 \cdot 230000000}{64} = 690000000N / m$$

Uvrštavanjem iznosa krutosti i mase u jednadžbu (4.4) dobije se iznos prirodne frekvencije:

$$\omega = \sqrt{\frac{690000000}{602}} = \sqrt{1146179,4}$$

$$\omega = 1070 \ rad / s$$

b) Prisilne vibracije

Na masu djeluje harmonijska uzbuda $F(t)=F_0 \sin\lambda t$, pri čemu je $F_0=100N$.

Frekvencija uzbude se odredi prema broju okretaja brodskog vijka, koji svojim radom inducira silu uzbude, i iznosi:

$$\lambda = 2 \cdot n \cdot \pi$$

$$n = 120 \quad o/\min$$

$$\lambda = 2 \cdot 120 \cdot \frac{\pi}{60}$$

$$\lambda = 12,5 \ rad/s$$

Poznavajući frekvenciju uzbude odredi se amplituda vibriranja W:

$$W = \frac{F_0}{c} \cdot \alpha \tag{4.5}$$

$F_0 = 100 \ N$ -sila uzbude

$c = 690000000 \ N/m$ -krutost grede

$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ - koeficijent dinamičnosti (4.6)

$\beta = \dfrac{\lambda}{\omega}$ -omjer frekvencije uzbude i prirodne frekvencije

$$\beta = \frac{12,5}{1070}$$

$$\beta = 0,0117$$

$\xi = 0$ -stupanj prigušenja (nema prigušenja)

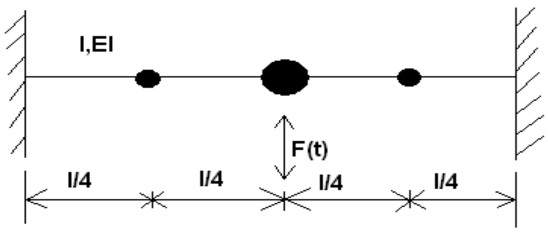
Iznos omjera frekvencija uvrsti se u jednadžbu (4.6):

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1-0,0117^2)^2}} = \frac{1}{0,99}$$
$$\alpha = 1$$

Uvrštavanjem potrebnih veličina u jednadžbu (4.5) dobije se iznos amplitude vibriranja:

$$W = \frac{100}{690000000} \cdot 1$$
$$W = 0,000000144\ m$$

5. ANALIZA VIBRACIJA FLEKSIJSKOG SUSTAVA S TRI MASE METODOM UTJECAJNIH KOEFICIJENATA



Sl.5.1 Fleksijski sustav s tri mase

Pod fleksijskim sustavom podrazumijevamo sustav masa m_i (i=1,n) koji vibrira na nosaču krutosti EI. Analizu vibracija ovakvog sustava najprikladnije je provesti metodom utjecajnih koeficijenata.

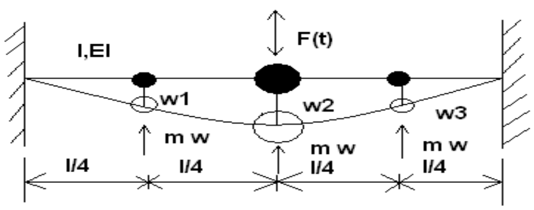
Utjecajni koeficijent α_{ij} je definiran kao progib na mjestu i uslijed djelovanja jedinične sile na mjestu j.

Utjecajni koeficijenti:

$$\alpha_{22}$$
$$\alpha_{11} = \alpha_{33}$$
$$\alpha_{13} = \alpha_{31}$$
$$\alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{32}$$

Matrica utjecajnih koeficijenata (matrica gipkosti):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$



Sl.5.2   Progibi i sile na nosaču

Pomaci izraženi preko utjecajnih koeficijenata:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \cdot \begin{Bmatrix} F \cdot \alpha_{12} \\ F \cdot \alpha_{22} \\ F \cdot \alpha_{32} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_1 \cdot \ddot{w}_1 \\ m_2 \cdot \ddot{w}_2 \\ m_3 \cdot \ddot{w}_3 \end{Bmatrix}$$

Uz pretpostavku harmonijskih sila i pomaka:

$$\begin{Bmatrix} F \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ -\lambda^2 W_1 \\ -\lambda^2 W_2 \\ -\lambda^2 W_3 \end{Bmatrix} \cdot \sin \lambda t$$

dobije se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} F \cdot \alpha_{12} &= W_1 (1 - \lambda^2 m_1 \alpha_{11}) - m_2 \lambda^2 \alpha_{12} W_2 - m_3 \lambda^2 \alpha_{13} W_3 \\ F \cdot \alpha_{22} &= -m_1 \lambda^2 \alpha_{21} W_1 + W_2 (1 - \lambda^2 m_2 \alpha_{22}) - m_3 \lambda^2 \alpha_{23} W_3 \\ F \cdot \alpha_{32} &= -m_1 \lambda^2 \alpha_{31} W_1 - m_2 \lambda^2 \alpha_{32} W_2 + W_3 (1 - \lambda^2 m_3 \alpha_{33}) \end{aligned}$$

koji u matričnom prikazu izgleda:

$$[D] \cdot \{w\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \lambda^2 m_1 \alpha_{11}) & -m_2 \lambda^2 \alpha_{12} & -m_3 \lambda^2 \alpha_{13} \\ -m_1 \lambda^2 \alpha_{21} & (1 - \lambda^2 m_2 \alpha_{22}) & -m_3 \lambda^2 \alpha_{23} \\ -m_1 \lambda^2 \alpha_{31} & -m_2 \lambda^2 \alpha_{32} & (1 - \lambda^2 m_3 \alpha_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cdot \alpha_{12} \\ F \cdot \alpha_{22} \\ F \cdot \alpha_{32} \end{Bmatrix} \qquad (5.1)$$

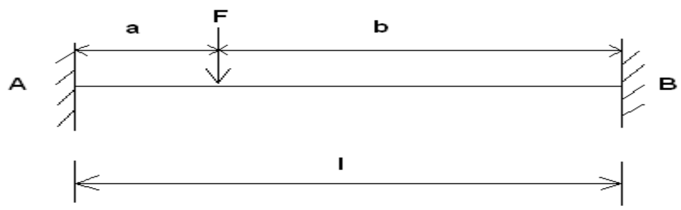
Utjecajni koeficijenti se računaju prema sljedećim jednadžbama:

$$0 \geq z \geq a$$

$$w(x) = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 \cdot \left[3\frac{a}{l} - \left(\frac{b}{l} + 3\frac{a}{l}\right) \cdot \frac{z}{l}\right] \qquad (5.2)$$

$$a = b = \frac{l}{2}$$

$$w(x) = \frac{F}{48} \cdot \frac{l^3}{EI} \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 \cdot \left[3 - 4 \cdot \frac{z}{l}\right] \qquad (5.3)$$



Sl.5.3   Parametri za proračun uplivnih koeficijenata

z = udaljenost progiba od uklještenja A

Proračun utjecajnih koeficijenata (koriste se izrazi (5.2) i (5.3)):

α_{11},α_{33}

$$\alpha_{11}(F=1N, l=4m, a=1m, b=3m, z=1m), \alpha_{11}=\alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{33}=\frac{Fl^3}{6EI}\cdot\left(\frac{b}{l}\right)^2\cdot\left(\frac{z}{l}\right)^2\cdot\left[3\frac{a}{l}-\left(\frac{b}{l}+3\frac{a}{l}\right)\cdot\frac{z}{l}\right]$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{33}=\frac{1\cdot 4^3}{6\cdot 230000000}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left[3\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}+3\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\right]$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{33}=0,0000000006\ m/N$$

α_{22}

$$\alpha_{22}(F=1N, l=4m, a=2m, b=2m, z=2m)$$

$$\alpha_{22}=\frac{F}{48}\cdot\frac{l^3}{EI}\cdot\left(\frac{z}{l}\right)^2\cdot\left[3-4\cdot\frac{z}{l}\right]$$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{48}\cdot\frac{4^3}{230000000}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot\left[3-4\cdot\frac{2}{4}\right]$$

$$\alpha_{22}=0,000000001\ m/N$$

α_{13},α_{31}

$$\alpha_{13}(F = 1N, l = 4m, a = 3m, b = 1m, z = 1m), \alpha_{13} = \alpha_{31}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 \cdot \left[3\frac{a}{l} - \left(\frac{b}{l} + 3\frac{a}{l}\right) \cdot \frac{z}{l}\right]$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1 \cdot 4^3}{6 \cdot 230000000} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left[3\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\right]$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 0,0000000003 \ m / N$$

α_{12},α_{21},α_{23},α_{32}

$$\alpha_{12}(F = 1N, l = 4m, a = 2m, b = 2m, z = 1m), \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 \cdot \left[3\frac{a}{l} - \left(\frac{b}{l} + 3\frac{a}{l}\right) \cdot \frac{z}{l}\right]$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1 \cdot 4^3}{6 \cdot 230000000} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left[3\frac{2}{4} - \left(\frac{2}{4} + 3\frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\right]$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0,0000000007 \ m / N$$

Matrica gipkosti (uvrštene vrijednosti utjecajnih koeficijenata):

$$\begin{bmatrix} 0,0000000006 & 0,0000000007 & 0,0000000003 \\ 0,0000000007 & 0,000000001 & 0,0000000007 \\ 0,0000000003 & 0,0000000007 & 0,0000000006 \end{bmatrix}$$

Iznosi masa m_1, m_2, m_3:

$$m_{grede} = 602kg$$

$$m_x = \frac{m_{grede}}{l} = \frac{602}{4} = 150,5kg$$

$$m_1 = m_3 = m_x \cdot \frac{l}{4} = 150,5 \cdot \frac{4}{4} = 150,5kg$$

$$m_2 = m_x \cdot \frac{l}{2} = 150,5 \cdot \frac{4}{2} = 301kg$$

a) Slobodne vibracije

U tom slučaju $\lambda=\omega$, F=0 te sustav (5.1), koji nam je polazna točka za računanje prirodnih frekvencija, postaje homogen:

$$\begin{bmatrix} (1-\omega^2 m_1\alpha_{11}) & -m_2\omega^2\alpha_{12} & -m_3\omega^2\alpha_{13} \\ -m_1\omega^2\alpha_{21} & (1-\omega^2 m_2\alpha_{22}) & -m_3\omega^2\alpha_{23} \\ -m_1\omega^2\alpha_{31} & -m_2\omega^2\alpha_{32} & (1-\omega^2 m_3\alpha_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dinamička matrica:

$$\begin{bmatrix} (1-\omega^2 m_1\alpha_{11}) & -m_2\omega^2\alpha_{12} & -m_3\omega^2\alpha_{13} \\ -m_1\omega^2\alpha_{21} & (1-\omega^2 m_2\alpha_{22}) & -m_3\omega^2\alpha_{23} \\ -m_1\omega^2\alpha_{31} & -m_2\omega^2\alpha_{32} & (1-\omega^2 m_3\alpha_{33}) \end{bmatrix} = \left[D\right]$$

$$\left\{W\right\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left[D\right] \cdot \left\{W\right\} = \left\{0\right\} \tag{5.4}$$

Iz uvjeta netrivijalnosti rješenja sustava (5.4), det[D]=0, proizlazi frekvencijska jednadžba (riješeno programom MathCad):

$$-0,225 \cdot 10^{-22}\,\omega^6 + 0,2 \cdot 10^{-13}\,\omega^4 - 0,48 \cdot 10^{-6}\,\omega^2 + 1 = 0$$

Iz pozitivnih rješenja ove jednadžbe slijede prirodne frekvencije:

ω_1=1518 rad/s

ω_2=4714 rad/s

ω_3=29456 rad/s

Prirodni oblici vibriranja

Uvrštavanjem prirodnih frekvencija ω_1, ω_2, ω_3 u bilo koju od jednadžbi sustava (5.4) određuju se omjeri:

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right) \; i \; \left(\frac{W_3}{W_1}\right)$$

koji definiraju prirodne oblike vibriranja fleksijskog sustava:

$$\{\phi\}_1 , \{\phi\}_2 , \{\phi\}_3$$

Prvi prirodni oblik vibriranja

Iz sustava jednadžbi (5.4) izdvoje se dvije jednadžbe:

$$0 = W_1(1-\omega^2 m_1\alpha_{11}) - m_2\omega^2\alpha_{12}W_2 - m_3\omega^2\alpha_{13}W_3$$
$$0 = -m_1\omega^2\alpha_{21}W_1 + W_2(1-\omega^2 m_2\alpha_{22}) - m_3\omega^2\alpha_{23}W_3$$

te se obje podijele s W_1 kako bi bilo moguće dobiti omjer $\left(\frac{W_2}{W_1}\right) \; i \; \left(\frac{W_3}{W_1}\right)$

$$0 = (1-\omega^2 m_1\alpha_{11}) - m_2\omega^2\alpha_{12}\frac{W_2}{W_1} - m_3\omega^2\alpha_{13}\frac{W_3}{W_1}$$
$$0 = -m_1\omega^2\alpha_{21} + \frac{W_2}{W_1}(1-\omega^2 m_2\alpha_{22}) - m_3\omega^2\alpha_{23}\frac{W_3}{W_1}$$

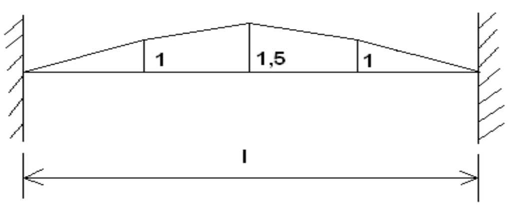
Uvrštavanjem odgovarajućih utjecajnih koeficijenata, prve prirodne frekvencije ω_1 i mase m dobiju se omjeri:

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right) = 1,5$$

$$\left(\frac{W_3}{W_1}\right) = 1$$

iz kojih proizlazi prvi prirodni oblik vibriranja:

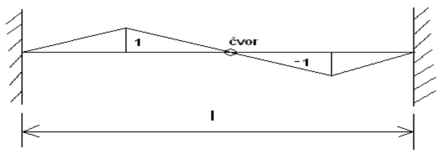
$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Sl.5.4   Prvi prirodni oblik vibriranja

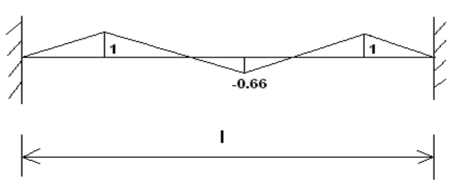
Uvrštavanjem druge, odnosno treće prirodne frekvecije dobiju se drugi i treći prirodni oblik vibriranja na isti način kao i prvi prirodni oblik vibriranja:

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Sl.5.5   Drugi prirodni oblik vibriranja

$$\{\phi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.66 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Sl.5.6   Treći prirodni oblik vibriranja

b) Prisilne vibracije

Na masu djeluje harmonijska uzbuda $F(t)=F_0 \sin\lambda t$, pri čemu je F_0=100N.

Frekvencija uzbude se odredi prema broju okretaja brodskog vijka, koji svojim radom inducira silu uzbude, i iznosi:

$$\lambda = 2 \cdot n \cdot \pi$$
$$n = 120 o / \min$$
$$\lambda = 2 \cdot 120 \cdot \frac{\pi}{60}$$
$$\lambda = 12,5 rad / s$$

U tom slučaju se rješava nehomogeni sustav jednadžbi (5.1), a rješenje su amplitude vibriranja pojedinih masa u ovisnosti o frekvenciji uzbude i amplitudama uzbudnih sila:

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda^2 m_1 \alpha_{11}) & -m_2 \lambda^2 \alpha_{12} & -m_3 \lambda^2 \alpha_{13} \\ -m_1 \lambda^2 \alpha_{21} & (1-\lambda^2 m_2 \alpha_{22}) & -m_3 \lambda^2 \alpha_{23} \\ -m_1 \lambda^2 \alpha_{31} & -m_2 \lambda^2 \alpha_{32} & (1-\lambda^2 m_3 \alpha_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cdot \alpha_{12} \\ F \cdot \alpha_{22} \\ F \cdot \alpha_{32} \end{Bmatrix}$$

Uvrste se iznosi utjecajnih koeficijenata, masa i frekvencija uzbude te se dobiju amplitude vibriranja (pomoću računalnog programa MathCad):

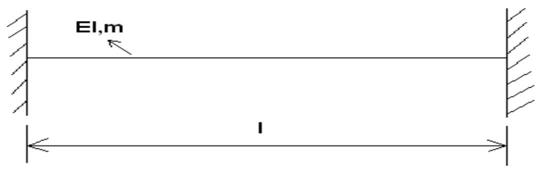
$$\begin{bmatrix} 0,9998 & -0,000033 & -0,000007 \\ -0,0000165 & 0,9999 & -0,0000165 \\ -0,000007 & -0,000033 & 0,9998 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00000007 \\ 0,0000001 \\ 0,00000007 \end{Bmatrix}$$

$W_1 = 7,01 \cdot 10^{-8}$ m

$W_2 = 1,0 \cdot 10^{-7}$ m

$W_3 = 7,01 \cdot 10^{-8}$ m

6. ANALIZA POPREČNIH VIBRACIJA JEDNOLIKE GREDE METODOM EGZAKTNOG RJEŠENJA DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE



Sl.6.1 Jednolika greda za analizu poprečnih vibracija

Odgovarajuća diferencijalna jednadžba poprečnih vibracija grede:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \frac{m}{EI}\omega^2 w(x) = 0 \qquad (6.1)$$

Napomena: vremenski dio funkcije odziva w(x,t) je izostavljen. Desna strana jedadžbe jednaka je 0 jer nema raspodijeljenog vanjskog opterećenja na gredu.

Pretpostavljeno rješenje jednadžbe (6.1) u obliku reda funkcija Krilova glasi:

$$w(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 U_3 + A_4 U_4 \qquad (6.2)$$

Funkcije Krilova:

$$U_1 = \frac{1}{2}(ch\beta x + \cos\beta x)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(sh\beta x + \sin\beta x)$$

$$U_3 = \frac{1}{2}(ch\beta x - \cos\beta x)$$

$$U_4 = \frac{1}{2}(sh\beta x - \sin\beta x)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{m_x \cdot \lambda^2}{EI}}$$

a) Slobodne vibracije

Nema sile uzbude te konstrukcija vibrira jednom od prirodnih frekvencija ω_n tako da veličina β poprima oblik:

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{m_x \cdot \omega_n^{\;2}}{EI}}$$

Rubni uvjeti:

1.) $x = 0 \rightarrow w = 0,\ \varphi = \frac{dw}{dx} = 0$

2.) $x = l \rightarrow w = 0,\ \varphi = \frac{dw}{dx} = 0$

Izrazi za w(x) i φ(x) pomoću funkcija Krilova glase:

$$w_n(x) = A_{n1}U_{n1} + A_{n2}U_{n2} + A_{n3}U_{n3} + A_{n4}U_{n4}$$

$$\frac{dw_n(x)}{dx} = \varphi_n(x) = \beta_n(A_{n1}U_{n4} + A_{n2}U_{n1} + A_{n3}U_{n2} + A_{n4}U_{n3})$$

1. rubni uvjet

Uvrštavanjem vrijednosti x=0 u funkcije Krilova dobije se:

$$U_{n1} = \frac{1}{2}(ch\beta \cdot 0 + \cos\beta \cdot 0) = 1$$

$$U_{n2} = \frac{1}{2}(sh\beta \cdot 0 + \sin\beta \cdot 0) = 0$$

$$U_{n3} = \frac{1}{2}(ch\beta \cdot 0 - \cos\beta \cdot 0) = 0$$

$$U_{n4} = \frac{1}{2}(sh\beta \cdot 0 - \sin\beta \cdot 0) = 0$$

Dobivene vrijednost funkcije Krilova uvrste se u izraze za w(0) i φ(0) te slijedi:

$$w_n(0) = A_{n1} \cdot 1 + A_{n2} \cdot 0 + A_{n3} \cdot 0 + A_{n4} \cdot 0 = 0$$

$$A_{n1} = 0$$

$$\varphi_n(0) = \beta_n \cdot (A_{n1} \cdot 0 + A_{n2} \cdot 1 + A_{n3} \cdot 0 + A_{n4} \cdot 0) = 0$$

$$\varphi_n(0) = \beta_n \cdot A_{n2} = 0$$

$$A_{n2} = 0$$

2. rubni uvjet

Dobivene vrijednosti A_1=A_2=0 uvrste se u izraze za w(l) i φ(l) te slijedi homogeni sustav od dvije algebarske jednadžbe koji glasi:

$$w_n(l) = 0 + 0 + A_{n3} \cdot U_{n3}(l) + A_{n4} \cdot U_{n4}(l) = 0$$

$$A_{n3} \cdot U_{n3}(l) + A_{n4} \cdot U_{n4}(l) = 0$$

$$\varphi_n(l) = \beta_n (0 + 0 + A_{n3} U_{n2}(l) + A_{n4} U_{n3}(l)) = 0$$

$$A_{n3} U_{n2}(l) + A_{n4} U_{n3}(l) = 0$$

Ili u matričom obliku:

$$[U] \cdot \{A\} = 0 \qquad (6.3)$$

odnosno:

$$\begin{pmatrix} U_{n3}(l) & U_{n4}(l) \\ U_{n2}(l) & U_{n3}(l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n3}(l) \\ A_{n4}(l) \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.3a)$$

Iz uvjeta netrivijalnosi rješenja sustava (6.3):

det $[U]$=0

$$U_3^2(l) - U_2(l) \cdot U_4(l) = 0$$
$$\frac{1}{4} \cdot (ch\beta_n l - \cos\beta_n l)^2 - \frac{1}{2}\left(sh\beta_n l + \sin\beta_n l\right) \cdot \frac{1}{2}(sh\beta_n l - \sin\beta_n l) = 0 \,/ \cdot 4$$
$$\sin^2\beta_n l + \cos^2\beta_n l - 2ch\beta_n l \cos\beta_n l + ch^2\beta_n l - sh^2\beta_n l = 0$$

dobije se frekventna jednadžba

$$ch\beta_n l \cdot \cos\beta_n l = 1$$

Korijeni frekventne jednadžbe glase:

$$\beta_n l = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$$

$$\beta_1 l = 4,7$$
$$\beta_2 l = 7,85$$
$$\beta_3 l = 11,0$$

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{m_x \cdot \omega_n^2}{EI}} \qquad (6.4)$$

Preko izraza (6.4) odrediti će se prirodne frekvencije:

$$\omega_n = \frac{(\beta_n l)^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m_x}} \tag{6.5}$$

$\omega_1 = 1707 \ rad/s$
$\omega_2 = 4761 \ rad/s$
$\omega_3 = 9349 \ rad/s$

Prirodni oblici vibriranja

Polazište za određivanja prirodnih oblika vibriranja je jedna od jednadžbi iz sustava jednadžbi (6.3a):

$$\begin{pmatrix} U_{n3}(l) & U_{n4}(l) \\ U_{n2}(l) & U_{n3}(l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n3} \\ A_{n4} \end{pmatrix} = 0$$

$$U_{n3}(l) \cdot A_{n3} + U_{n4}(l) \cdot A_{n4} = 0$$
$$\frac{A_{n4}}{A_{n3}} = -\frac{U_{n3}(l)}{U_{n4}(l)}$$
$$\frac{A_{n4}}{A_{n3}} = -\frac{ch\beta_n \cdot l - \cos\beta_n \cdot l}{sh\beta_n \cdot l - \sin\beta_n \cdot l}$$

Budući da se za određivanje forme vibriranja jedna od konstanti može proizvoljno odabrati, možemo pisati:

$$A_{n3} = -2(sh\beta_n l - \sin\beta_n l)$$
$$A_{n4} = 2(ch\beta_n l - \cos\beta_n l)$$

tako da za oblik vibriranja savijanja grede nalazimo:

$$w_n = A_{n3} \cdot U_{n3} + A_{n4} \cdot U_{n4}$$
$$w_n = -(sh\beta_n l - \sin\beta_n l) \cdot (ch\beta_n x - \cos\beta_n x) + (ch\beta_n l - \cos\beta_n l) \cdot (sh\beta_n x - \sin\beta_n x)$$

Uvrštavanjem odgovarajućih veličina za prvi, drugi i treći prirodni oblik vibriranja dobiju se slike za sva tri prirodnih oblika vibriranja:

Sl.6.2   Prvi prirodni oblik vibriranja

Sl.6.3   Drugi prirodni oblik vibriranja

Sl.6.4   Treći prirodni oblik vibriranja

b) Prisilne vibracije

Greda je pobuđena na vibriranje harmonijskom silom uzbude $F=F_0 \sin\lambda t$, gdje je:
$F_0=100N$, $\lambda=12{,}5$ rad/s

Izraz (6.4) za veličinu β_n prelazi u

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{m_x \cdot \lambda^2}{EI}} = 0{,}1$$

Iz razloga što sila uzbude djeluje na sredini raspona grede, potrebno je razmatrati samo 1/2 grede s tim da će se sila u proračun uključiti preko rubnih uvjeta.

Rubni uvjeti glase:

1.) $x = 0 \rightarrow w = 0,\ \varphi = \frac{dw}{dx} = 0$

2.) $x = \frac{l}{2} \rightarrow Q = \frac{F_0}{2} = 50N, \varphi = \frac{dw}{dx} = 0$

Opći izraz za elastičnu liniju w(x), kuta nagiba φ(x), moment savijanja M(x) i poprečnu silu Q(x):

$$w(x) = A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3 + A_4U_4$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \varphi(x) = \beta(A_1U_4 + A_2U_1 + A_3U_2 + A_4U_3)$$

$$M(x) = -EI\beta^2(A_1U_3 + A_2U_4 + A_3U_1 + A_4U_2)$$

$$Q(x) = -EI\beta^3(A_1U_2 + A_2U_3 + A_3U_4 + A_4U_1)$$

1.rubni uvjet

Izrazi za prvi rubni uvjet identični su kao i kod slobodnih vibracija te se dobiju identične konstante A_1 i A_2 kao i u slobodnim vibracijama:

$$A_1 = 0$$
$$A_2 = 0$$

2. rubni uvjet

Izraz za poprečnu silu na polovini raspona grede:

$$Q(\frac{l}{2}) = -EI\beta^3(0+0+A_3U_4(\frac{l}{2})+A_4U_1(\frac{l}{2}))$$

$$-EI\beta^3(A_3U_4(\frac{l}{2})+A_4U_1(\frac{l}{2})) = \frac{F}{2} \qquad (6.6)$$

Izraz za kut nagiba progibne linije na polovini raspona grede:

$$\frac{dw\left(\frac{l}{2}\right)}{dx} = \varphi\left(\frac{l}{2}\right) = \beta\left(0\cdot U_4\left(\frac{l}{2}\right)+0\cdot U_1\left(\frac{l}{2}\right)+A_3U_2\left(\frac{l}{2}\right)+A_4U_3\left(\frac{l}{2}\right)\right) = 0$$

$$\beta\left(0\cdot U_4\left(\frac{l}{2}\right)+0\cdot U_1\left(\frac{l}{2}\right)+A_3U_2\left(\frac{l}{2}\right)+A_4U_3\left(\frac{l}{2}\right)\right) = 0 \qquad (6.7)$$

Iz izraza (6.6) i (6.7) dobije se sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} &-EI\beta^3(A_3U_4(\frac{l}{2})+A_4U_1(\frac{l}{2})) = \frac{F}{2} \\ &A_3U_2\left(\frac{l}{2}\right)+A_4U_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

Rješenje: A_3 i A_4

Uvrštavanjem x=l/2 u funkcije Krilova dobiju se vrijednosti koje glase:

$$U_1(\frac{l}{2}) = 1$$

$$U_2(\frac{l}{2}) = 0,01$$

$$U_3(\frac{l}{2}) = 0,00002$$

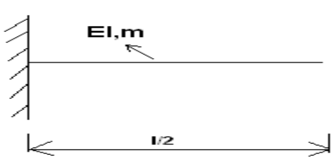
$$U_4(\frac{l}{2}) = 0,00000004$$

Uvrštavanjem izračunatih funkcija Krilova u izraz (6.8) dobije se:

$$A_3 = 0,0000004 \ m$$
$$A_4 = -0,0002 \quad m$$

Poznavajući iznose funkcija Krilova na polovini raspona grede te koeficijenata A_1, A_2, A_3, A_4 moguće je odrediti progib u bilo kojoj točki grede:

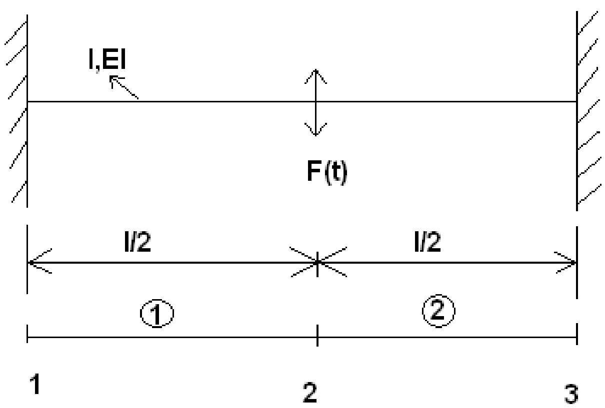
$$w(x) = A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3 + A_4U_4$$
$$w(x) = 0 + 0 + A_3U_3 + A_4U_4$$
$$w(x) = 0,0000004 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(sh\beta x - \sin \beta x \right) - 0,0002 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(ch\beta x - \cos \beta x \right)$$
$$w(x) = 0,0000002\left(sh\beta x - \sin \beta x \right) - 0,0001\left(ch\beta x - \cos \beta x \right)$$



Sl.6.5 Progibna linija uslijed prisilnih vibracija

7. ANALIZA POPREČNIH VIBRACIJA JEDNOLIKE GREDE METODOM KONAČNIH ELEMENATA

Prema zadatku gredu je potrebno podijeliti na dva konačna elementa:



Sl.7.1 Elementi i čvorovi za proračun MKE

Rubni uvjeti:

1.čvor-uklještenje

Progib i kut su jednaki nuli, ali javljaju se reakcijski moment i sila:

$$w_1 = 0, \varphi_1 = 0$$
$$Q_1, M_1$$

2.čvor-spoj dva elementa na polovini grede :

Moment je jednak nuli, postoji progib i kut nagiba progibne linije te sila F:

$$\begin{aligned}&\varphi_2\\&M_2=0\\&w_2\\&Q_2=F\end{aligned}$$

3.čvor-uklještenje-uvjeti su kao i u prvom čvoru

$$\begin{aligned}&w_3=0,\varphi_3=0\\&Q_3,M_3\end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba vibriranja prikazana u matričnom obliku:

$$[D]\cdot\{\delta\}=\{F\}$$

Matrica krutosti:

$$[D]=\frac{2EI}{l^3}\cdot\begin{bmatrix}6 & 3l & -6 & 3l\\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2\\ -6 & -3l & 6 & -3l\\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2\end{bmatrix}-\lambda^2\frac{m}{420}\cdot\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix} \tag{7.1}$$

-matrice krutosti prvog i drugog elementa su jednake:

$$[D^1]=[D^2]$$

Matrica pomaka:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Matrica sila i momenata:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 = F \\ M_2 = 0 \\ Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 = F \\ M_2 = 0 \\ Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Izvrši se redukcija (prekriže se redci u kojima je pomak jednak nuli, te odgovarajući stupci) i dobije se reducirana diferencijalna jednadžba vibracija:

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 \\ K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a) Slobodne vibracije

Nema sile uzbude te konstrukcija vibrira prirodnom frekvencijom.

Diferencijalna jednadžba slobodnih vibracija prikazana u reduciranom obliku:

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 \\ K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{7.2}$$

Reducirana dinamička matrica [D] iz (7.2) sa svojim članovima glasi:

$$\left[K_{33}^1 + K_{11}^2\right] = 2 \cdot \left[\frac{12EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^3} - \omega^2 \cdot \frac{m}{420} \cdot 156 \right]$$

$$\left[K_{34}^1 + K_{12}^2\right] = \frac{-6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \omega^2 \cdot \frac{m}{420} \cdot 22l + \frac{6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} - \omega^2 \cdot \frac{m}{420} \cdot 22l$$

$$\left[K_{43}^1 + K_{21}^2\right] = \frac{-6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \omega^2 \cdot \frac{m}{420} \cdot 22l + \frac{6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} - \omega^2 \cdot \frac{m}{420} \cdot 22l$$

$$\left[K_{44}^1 + K_{22}^2\right] = 2 \cdot \left[\frac{4EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} - \omega^2 \cdot \frac{m}{420} \cdot 4\left(\frac{l}{2}\right)^2 \right]$$

$$\begin{bmatrix} \left(2\cdot\left[\dfrac{12EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^3}-\omega^2\cdot\dfrac{m}{420}\cdot 156\right]\right) & \left(\dfrac{-6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}+\omega^2\cdot\dfrac{m}{420}\cdot 22l+\dfrac{6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}-\omega^2\cdot\dfrac{m}{420}\cdot 22l\right) \\ \left(\dfrac{-6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}+\omega^2\cdot\dfrac{m}{420}\cdot 22l+\dfrac{6EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}-\omega^2\cdot\dfrac{m}{420}\cdot 22l\right) & \left(2\cdot\left[\dfrac{4EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}-\omega^2\cdot\dfrac{m}{420}\cdot 4\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\right) \end{bmatrix}=\left[D^{/}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 690000000-447\cdot\omega^2 & 0 \\ 0 & 230000000-46\cdot\omega^2 \end{bmatrix}=\left[D^{/}\right]$$

Netrivijalno rješenje jednadžbe (7.2) glasi:

det[D]=0,

odatle se dobije frekvencijska jednadžba:

$$\left[\left(690000000-447\cdot\omega^2\right)\cdot\left(230000000-46\cdot\omega^2\right)\right]-0=0$$

$$1,6\cdot 10^{17}-3,17\cdot 10^{10}\,\omega^2-1\cdot 10^{11}\,\omega^2+20562\omega^4=0$$

$$1,6\cdot 10^{17}-13,17\cdot 10^{10}\,\omega^2+20562\omega^4=0 \qquad (7.3)$$

Rješenje jednadžbe (7.3) su prirodne frekvencije:

$$\omega_1=1276\ \ rad/s$$
$$\omega_2=2185\ \ rad/s$$

b) Prisilne vibracije

Greda je pobuđena na vibriranje harmonijskom silom uzbude $F=F_0 \sin\lambda t$, gdje je:
$F_0=100N$, $\lambda=12,5$ rad/s

Sila uzbude djeluje u čvoru 2 te iznosi:

$Q_2=F_0=100$ N

Diferencijalna jednadžba prisilnih vibracija prikazana u reduciranom obliku:

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 \\ K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

U reduciranu dinamičku matricu se uvrste odgovarajući izrazi prema (7.1) te poznata frekvencija uzbude i krutost na savijanje te se dobije izraz:

$$\left[K_{33}^1 + K_{11}^2\right] \cdot w_2 + \left[K_{34}^1 + K_{12}^2\right] \cdot \varphi_2 = F$$
$$\left[K_{43}^1 + K_{21}^2\right] \cdot w_2 + \left[K_{44}^1 + K_{22}^2\right] \cdot \varphi_2 = 0$$

Poznat je iznos sile F, krutost na savijanje EI, masa m i duljina l te se odredi iznos amplitude vibriranja u čvoru 2:

$$\left(690000000 - 447 \cdot 12,5^2\right) \cdot w_2 + 0 \cdot \varphi_2 = 100$$
$$w_2 = \frac{100}{690000000 - 447 \cdot 12,5^2} = \frac{100}{689930156}$$
$$w_2 = 0,000000144 \ m$$
$$0 \cdot w_2 + 230000000 - 46 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi_2 = 0$$

koja iznosi:

$\varphi_2=0$ rad/s

$w_2 = –0,000000144$ m

8. PRORAČUN OSNOVNE PRIRODNE FREKVENCIJE METODOM RAYLEIGHEVOG KVOCIJENTA

a) Fleksijski sustav s tri stupnja slobode gibanja

U slučaju kad se razmatraju vibracije fleksijskog sustava tri diskretizirane mase pomoću metode utjecajnih koeficijenata (vidjeti proračun (5)), tada izrazi za najveću potencijalnu i kinetičku energiju glase:

$$\left(E_p\right)_{\max} = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m_i W_i^2$$

$$\left(E_k\right)_{\max} = \frac{1}{2}\omega^4 \sum_i m_i W_i \sum_j m_j W_j \alpha_{ij}$$

tako da Rayleighev kvocijent poprima oblik

$$\omega^2 = \frac{\sum_i m_i W_i^2}{\sum_i m_i W_i^2 \sum_j m_j W_j \alpha_{ij}} \tag{8.1}$$

gdje je ω osnovna prirodna frekvencija, a W pretpostavljeni oblik vibriranja.

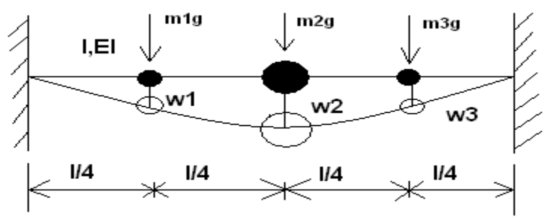
Mase iznose:

m_1=150,5 kg

m_2=301,0 kg

m_3=150,5 kg

Oblik vibriranja se pretpostavlja u obliku statičke elastične linije uslijed djelovanja težine zadanih masa:



Sl.8.1 Statička elastična linija

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

$$w_1 = m_1 g \alpha_{11} + m_2 g \alpha_{12} + m_3 g \alpha_{13}$$
$$w_2 = m_1 g \alpha_{21} + m_2 g \alpha_{22} + m_3 g \alpha_{23}$$
$$w_3 = m_1 g \alpha_{31} + m_2 g \alpha_{32} + m_3 g \alpha_{33}$$

Utjecajni koeficijenti:

$$\begin{bmatrix} 0,0000000006 & 0,0000000007 & 0,0000000003 \\ 0,0000000007 & 0,000000001 & 0,0000000007 \\ 0,0000000003 & 0,0000000007 & 0,0000000006 \end{bmatrix}$$

Progibi statičke elastične linije:

w_1=0,000004 m

w_2=0,000005 m

w_3=0,000004 m

Uvrštavanjem svih potrebnih veličina u izraz (8.1) slijedi:

$$\omega^2 = \frac{m_1 W_1^2 + m_2 W_2^2 + m_3 W_3^2}{m_1 W_1 \left(m_1 W_1 \alpha_{11} + m_2 W_2 \alpha_{12} + m_3 W_3 \alpha_{13} \right) + m_2 W_2 \left(m_1 W_1 \alpha_{21} + m_2 W_2 \alpha_{22} + m_3 W_3 \alpha_{23} \right) + m_3 W_3 \left(m_1 W_1 \alpha_{31} + m_2 W_2 \alpha_{32} + m_3 W_3 \cdot \alpha_{33} \right)}$$

Izračuna se osnovna prirodna frekvencija:

ω=1506 rad/s

b) Sustav s raspodijeljenom masom i krutosti

Za određivanje najveće kinetičke i potencijalne energije sustava s raspodijeljenm masom i krutosti porebno je poznavati osnovni oblik vibriranja. Ukoliko se osnovni oblik vibriranja pretpostavi na korektan način, tada se za takav sustav može pomoću Rayleighevog kvocijenta pouzdano procijeniti osnovna prirodna frekvencija. Rayeighev kvocijent za takve sustave glasi:

$$\omega^2 = \frac{\left(E_p\right)_{\max}}{\left(E_k^*\right)_{\max}} \tag{8.2}$$

Članovi kvocijenta (8.2) glase:

$$\left(E_p\right)_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$\left(E_k^*\right)_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{m}{l} w^2(x) dx$$

Pretpostavljeni osnovni oblik vibriranja:

$$w(x) = \frac{F_q}{24}\cdot\frac{l^3}{EI}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2\cdot\left[1-\left(\frac{x}{l}\right)\right]^2$$

Uvrštavanjem svih potrebnih veličina, pomoću programa Math Cad se dobije osnovna prirodna frekvencija koja iznosi:

ω=1735 rad/s

ZAKLJUČAK

Promatrani dio konstrukcije zanimljiv je jer na jednostavan način omogućuje analizu vibracija studentima, neiskusnim u rješavanju zahtjevnijih problema i oblika konstrukcije. Zadatak je riješen nizom metoda koje ne daju precizna rješenja, no mogu poslužiti pri preliminarnom promatranju problema ili kao provjera točnosti nekog drugog rješenja.

Tablica 1 Prikaz prve prirodne frekvencije i amplitude vibriranja za sve metode

	ω_1[rad/s]	w[m]
SUSTAV S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE GIBANJA	1070	$1,4 \cdot 10^{-7}$
FLEKSIJSKI SUSTAV S TRI MASE	1518	$1 \cdot 10^{-7}$
JEDNOLIKA GREDA ANALIZIRANA EGZAKTNIM RJEŠENJEM DIF. JEDN.	1707	$4 \cdot 10^{-5}$
JEDNOLIKA GREDA ANALIZIRANA METODOM KONAČNIH ELEMENATA	1276	$1,4 \cdot 10^{-7}$
RAYLEIGHEV KVOCIJENT	a) 1506 b) 1735	

Iz navedenih podataka vidi se da postoji raspon prirodnih frekvencija od 1070 rad/s do 1707 rad/s koji je uvjetovan pretpostavljenom raspodjelom mase i krutosti grede.

Sustav s jednim stupnjem slobode gibanja zasigurno daje najnetočnije rješenje iz razloga što su masa i krutost grede koncentrirani na polovini raspona duljine grede, dok se kod metode analiza poprečnih vibracija egzaktnim rješenjem diferencijalne jednadžbe dobije najtočnije rješenje zbog jednoliko raspodijelene mase i krutosti duž cijele duljine.

Metoda konačnih elemenata i metoda analize fleksijskog sustava s tri mase utjecajnim koeficijentima daju približna rješenja zbog malog broja konačnih elemenata (dva), odnosno malog broja masa fleksijskog sustava. Za točnije rješenje ovim metodama potrebno je u proračun uključiti veći broj konačnih elemenata odnosno veći broj masa fleksijskog sustava što bi otežalo "ručni" proračun. Naravno, upotrebom računalnih programa taj proračun se uvelike ubrzava i olakšava.

Rezultati proračuna amplituda prisilnih vibracija ne daju zanimljv prikaz iz razloga što je prirodna frekvencija grede mnogo veća od frekvencije uzbude uslijed rada brodskog vijka te ne predstavljaju problem kojeg treba razmatrati. Prikazani rezultati dati su radi pregleda i kontrole različitim metodama.

POPIS LITERATURE:

1. GRUBIŠIĆ, Rajko: *Teorija konstrukcija: primjeri dinamičke analize elemenata konstrukcije*, FSB, 2002.

2. SENJANOVIĆ, Ivo: *Vibracije broda, I dio*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1980.

3. SENJANOVIĆ, Ivo: *Vibracije broda, II dio*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1981.

4. RAŠKOVIĆ, Danilo: *Tablica iz otpornosti materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1963

5. KRAUT, Bojan: *Strojarski priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1976.