

# Upravljanje prijenosom tereta primjenom autonomnih letjelica

---

Ivanković, Margita

Master's thesis / Diplomski rad

2019

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:536716>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Margita Ivanković**

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać, dipl. ing.

Student:

Margita Ivanković

Zagreb, 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Josipu Kasaću na pomoći, strpljenju i korisnim savjetima tijekom izrade i pisanja ovog rada.

Isto tako zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na pruženoj podršci tijekom cijelog dosadašnjeg studija.

Margita Ivanković



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

### DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **MARGITA IVANKOVIĆ** Mat. br.: 0035196510

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Upravljanje prijenosom tereta primjenom autonomnih letjelica**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Control of load transportation by using unmanned aerial vehicles**

Opis zadatka:

Prijenos malih tereta primjenom jedne ili više autonomnih letjelica postaje sve aktivnije područje istraživanja zadnjih godina s obzirom na široko područje potencijalnih primjena.

U ovom radu razmatra se modeliranje i upravljanje procesom prenošenja tereta primjenom jedne letjelice s manipulatorom za prihvata tereta. Zatim se razmatra proces prenošenja tereta primjenom dviju autonomnih letjelica spregnutih manipulatorima sa zajedničkom prihvatnicom za prijenos tereta.

U radu je potrebno:

- Izvesti dinamički model letjelice s manipulatorom za prihvat tereta. Dinamički model je potrebno implementirati u Matlabu te provesti simulacije za osnovne manevre poput vertikalnog i horizontalnog leta.
- Provesti linearizaciju nelinearnog dinamičkog modela te provesti sintezu linearnog kvadratičnog regulatora s ciljem minimizacije njihanja pasivno ovješeno tereta.
- Provesti sintezu regulatora za slijeđenje vremenski promjenjive referentne trajektorije primjenom metode eksterne linearizacije.
- Izvesti dinamički model dviju letjelica spregnutih manipulatorima spojenima zajedničkom prihvatnicom za prijenos tereta. Dinamički model je potrebno implementirati u Matlabu.
- Provesti linearizaciju nelinearnog dinamičkog modela sustava spregnutih letjelica te provesti sintezu linearnog kvadratičnog regulatora.
- Usporediti performanse upravljanja prenošenja tereta primjenom jedne letjelice s performansama upravljanja primjenom dviju spregnutih letjelica.

Zadatak zadan:  
07. ožujka 2019.

Rok predaje rada:  
09. svibnja 2019.

Predviđeni datum obrane:  
15. svibnja 2019.  
16. svibnja 2019.  
17. svibnja 2019.

Zadatak zadao:  
*Kasać Josip*  
prof. dr. sc. Josip Kasać

Predsjednica Povjerenstva:  
*Biserka Runje*  
prof. dr. sc. Biserka Runje

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. UVOD.....	1
2. MATEMATIČKI MODEL SUSTAVA .....	3
2.1. Sustav prijenosa tereta pomoću jedne autonomne letjelice.....	3
2.1.1. Opis sustava .....	3
2.1.2. Euler – Lagrangeove jednadžbe.....	4
2.1.3. Linearizacija modela .....	7
2.2. Sustav prijenosa tereta pomoću dvije autonomne letjelice .....	8
2.2.1. Opis sustava .....	8
2.2.2. Euler – Lagrangeove jednadžbe.....	9
2.2.3. Linearizacija modela .....	12
3. UPRAVLJANJE DINAMIČKIM SUSTAVIMA .....	14
3.1. Metoda eksterne linearizacije.....	14
3.2. Linearni kvadratični regulator (LQR) .....	15
3.2.1. Linearni kvadratični regulator bez poremećaja.....	15
3.2.2. Linearni kvadratični regulator s poremećajem.....	16
3.3. Upravljanje prijenosom tereta primjenom jedne autonomne letjelice .....	17
3.3.1. Metoda eksterne linearizacije na sustavu s tri aktuatora.....	18
3.3.1.1. Regulacija u smjeru $y$ .....	18
3.3.1.2. Regulacija kuta $\alpha$ .....	18
3.3.1.3. Regulacija u smjeru $x$ .....	19
3.3.2. Metoda eksterne linearizacije na sustavu s dva aktuatora .....	21
3.3.2.1. Regulacija u smjeru $y$ .....	21
3.3.2.2. Regulacija kuta $\alpha$ i pomaka u smjeru $x$ .....	21
3.3.3. Potpuna linearizacija sustava .....	22
3.3.4. Sinteza linearnog kvadratičnog regulatora.....	24
3.3.5. Metoda eksterne linearizacije potpuno lineariziranog sustava .....	24
3.3.5.1. Regulacija pomaka u smjeru $y$ .....	25
3.3.5.2. Regulacija pomaka u smjeru $x$ i kuta $\alpha$ .....	25
3.4. Upravljanje prijenosom tereta primjenom dviju autonomnih letjelica .....	26
3.4.1. Sinteza LQR-a na modelu s poremećajem.....	28
3.4.1.1. Sinteza LQR-a na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\beta$ i $\alpha$ ... 29	
3.4.1.2. Sinteza LQR-a na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\alpha$ te malim kutovima zakreta $\beta$ .....	33
4. SIMULACIJSKI REZULTATI.....	37
4.1. Rezultati upravljanja prijenosa tereta primjenom autonomne letjelice.....	37

---

4.1.1.	Rezultati upravljanja primjenom metode eksterne linearizacije na bilinearnom modelu.....	37
4.1.1.1.	Rezultati upravljanja na modelu s tri upravljačke varijable.....	37
4.1.1.2.	Rezultati upravljanja na modelu s dvije upravljačke varijable .....	42
4.1.2.	Rezultati upravljanja primjenom metode eksterne linearizacije na potpuno lineariziranom modelu .....	45
4.1.3.	Rezultati upravljanja linearnim kvadratičnim regulatorom .....	50
4.2.	Rezultati upravljanja tereta primjenom dvije letjelice .....	56
4.2.1.	Rezultati upravljanja primjenom standardnog LQR regulatora.....	56
4.2.2.	Rezultati upravljanja primjenom LQR na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\beta_{10}$ , $\beta_{20}$ i $\alpha_{10}$ , $\alpha_{20}$ .....	64
4.2.2.1.	Rezultati primjene LQR bez uklanjanja poremećaja .....	65
4.2.2.2.	Rezultati primjene LQR s uklanjanjem poremećaja .....	69
4.2.3.	Rezultati upravljanja primjenom LQR na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\alpha_{10}$ , $\alpha_{20}$ .....	73
5.	ZAKLJUČAK.....	78
	LITERATURA.....	80
	PRILOZI.....	82

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Prikaz sustava autonomne letjelice s teretom u ravnini $XY$ .....	4
Slika 2.	Prikaz sustava dviju autonomnih letjelica s teretom u ravnini $XY$ .....	9
Slika 3.	Prikaz praćenja referentne trajektorije u $XY$ ravnini za model s tri upravljačke varijable .....	38
Slika 4.	Pozicija letjelice i kutovi $\beta$ i $\alpha$ za model s tri upravljačke varijable.....	39
Slika 5.	Upravljačke varijable za model s tri upravljačke varijable .....	39
Slika 6.	Pozicija letjelice i kutovi $\beta$ i $\alpha$ za model s tri upravljačke varijable i različite početne uvjete.....	40
Slika 7.	Usporedba nelinearnog i bilinearnog modela s tri upravljačke varijable .....	40
Slika 8.	Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i bilinearnog modela s tri upravljačke varijable .....	41
Slika 9.	Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova $\beta$ i $\alpha$ kod nelinearnog modela i bilinearnog modela s tri upravljačke varijable .....	41
Slika 10.	Prikaz praćenja referentne trajektorije u $XY$ ravnini za model s dvije upravljačke varijable .....	42
Slika 11.	Pozicija letjelice i kutovi $\beta$ i $\alpha$ za model s dvije upravljačke varijable .....	43
Slika 12.	Upravljačke varijable za model s dvije upravljačke varijable.....	43
Slika 13.	Usporedba nelinearnog i bilinearnog modela s dvije upravljačke varijable .....	44
Slika 14.	Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova $\beta$ i $\alpha$ kod nelinearnog modela i bilinearnog modela s dvije upravljačke varijable.....	44
Slika 15.	Prikaz praćenja referentne trajektorije u $XY$ ravnini za potpuno linearizirani model .....	45
Slika 16.	Pozicija letjelice i kutovi $\beta$ i $\alpha$ za potpuno linearizirani model .....	46
Slika 17.	Upravljačke varijable za potpuno linearizirani model .....	46
Slika 18.	Pozicija letjelice, kutovi $\beta$ i $\alpha$ te upravljačke varijable za različite polove sustava $s$ .....	47
Slika 19.	Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela.....	48
Slika 20.	Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova $\beta$ i $\alpha$ kod nelinearnog modela i potpuno lineariziranog modela .....	48
Slika 21.	Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove $s = -1$ .....	49
Slika 22.	Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove $s = -2$ .....	49
Slika 23.	Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove $s = -3$ .....	50
Slika 24.	Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove $s = -4$ .....	50
Slika 25.	Prikaz pomaka letjelice s teretom u $XY$ ravnini za LQR .....	51
Slika 26.	Pozicija letjelice, kutovi $\beta$ i $\alpha$ i upravljačke varijable za LQR upravljanje.....	52
Slika 27.	Pozicija letjelice, kutovi $\beta$ i $\alpha$ te upravljačke varijable za različite faktore $Q_{44}$ ....	52
Slika 28.	Usporedba nelinearnog i linearnog modela za LQR upravljanje .....	53
Slika 29.	Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova $\beta$ i $\alpha$ kod nelinearnog modela i linearnog modela za LQR upravljanje.....	53
Slika 30.	Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor $Q_{44} = 1$ .....	54
Slika 31.	Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor $Q_{44} = 10$ .....	54



Slika 32.	Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor $Q_{44} = 100$ .....	55
Slika 33.	Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor $Q_{44} = 1000$ .....	55
Slika 34.	Prikaz pomaka dvije letjelice s teretom u $XY$ ravnini za LQR .....	57
Slika 35.	Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za LQR upravljanje .....	57
Slika 36.	Upravljačke varijable za LQR upravljanje sustava s dvije letjelice .....	58
Slika 37.	Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje .....	58
Slika 38.	Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje.....	59
Slika 39.	Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje s istim početnim kutovima .....	59
Slika 40.	Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje s istim početnim kutovima .....	60
Slika 41.	Usporedba apsolutnih pogreški pozicije tereta nelinearnog i lineariziranog modela .....	60
Slika 42.	Usporedba apsolutnih pogreški kutova zakreta dvije letjelice nelinearnog i lineariziranog modela .....	61
Slika 43.	Usporedba kutova između tereta i dvije letjelice nelinearnog i lineariziranog modela .....	61
Slika 44.	Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za različite $Q_{33}$ i $Q_{44}$ .....	62
Slika 45.	Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za $Q_{33} = Q_{44} = 1$ .....	63
Slika 46.	Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za različite $Q_{55}$ i $Q_{66}$ .....	63
Slika 47.	Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za $Q_{55} = Q_{66} = 1$ .....	64
Slika 48.	Prikaz pomaka dvije letjelice s teretom upravljan LQR bez uklanjanja poremećaja u $XY$ ravnini .....	65
Slika 49.	Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja .....	66
Slika 50.	Upravljačke varijable za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja .....	66
Slika 51.	Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja.....	67
Slika 52.	Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja .....	68
Slika 53.	Usporedba apsolutnih pogreški pozicije tereta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR bez uklanjanja poremećaja .....	68
Slika 54.	Usporedba apsolutnih pogreški kutova zakreta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR bez uklanjanja poremećaja .....	69
Slika 55.	Usporedba apsolutnih pogreški kutova između tereta i dviju letjelica nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR bez uklanjanja poremećaja .....	69
Slika 56.	Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja.....	70
Slika 57.	Upravljačke varijable za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja .....	70
Slika 58.	Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja.....	71
Slika 59.	Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja .....	71
Slika 60.	Usporedba apsolutnih pogreški pozicije tereta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR uz uklanjanje poremećaja .....	72
Slika 61.	Usporedba apsolutnih pogreški kutova zakreta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR uz uklanjanje poremećaja .....	72

Slika 62.	Usporedba apsolutnih pogreški kutova između tereta i dviju letjelica nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR uz uklanjanje poremećaja .....	73
Slika 63.	Prikaz pomaka dvije letjelice s teretom upravljani LQR-om u $XY$ ravnini na modelu bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	74
Slika 64.	Pozicija tereta, kutovi letjelica i varijacije kutova tereta upravljanih LQR-om na modelu bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	74
Slika 65.	Upravljačke varijable upravljane LQR-om na modelu bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	75
Slika 66.	Usporedba nelinearnog modela s linearnim modelom bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	76
Slika 67.	Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog modela s linearnim modelom bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	76
Slika 68.	Apsolutna pogreška pozicije tereta nelinearnog modela i linearnog modela bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	77
Slika 69.	Apsolutna pogreška kutova tereta nelinearnog modela i linearnog modela bez $\beta_{10}$ i $\beta_{20}$ .....	77

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	-	matrica koeficijenata sustava
<b>B</b>	-	matrica ulaza sustava
<b>B<sub>d</sub></b>	-	matrica ulaza poremećaja sustava
<b>c</b>	-	Coriolisov vektor
$d_y$	-	konstantni poremećaj uz varijablu $y$
$d_\alpha$	-	konstantni poremećaj uz varijablu $\alpha$
<b>d</b>	-	vektor poremećaja sustava
$e_x$	m	pogreška varijable $x$
$e_y$	m	pogreška varijable $y$
$e_\alpha$	rad	pogreška kuta $\alpha$
$g$	m/s <sup>2</sup>	gravitacijsko ubrzanje
<b>g</b>	-	gravitacijski vektor
$H$	-	Hamilton funkcija sustava
$I$	kgm <sup>2</sup>	inercija autonomne letjelice
$I_1$	kgm <sup>2</sup>	inercija prve autonomne letjelice
$I_2$	kgm <sup>2</sup>	inercija druge autonomne letjelice
$J$	-	funkcija cilja
$K$	J	ukupna kinetička energija sustava
<b>K</b>	-	matrica pojačanja
<b>K<sub>d</sub></b>	-	matrica pojačanja poremećaja
$K_{uav}$	J	kinetička energija autonomne letjelice
$k_{xi}$	-	i-to pozitivno pojačanje kod pogreške varijable $x$
$k_{yi}$	-	i-to pozitivno pojačanje kod pogreške varijable $y$
$k_{\alpha i}$	-	i-to pozitivno pojačanje kod pogreške kuta $\alpha$
$K_0$	J	kinetička energija tereta
$K_1$	J	kinetička energija prve autonomne letjelice
$K_2$	J	kinetička energija druge autonomne letjelice
$L$	m	duljina krutog štapa
$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	J	Lagrangeova funkcija sustava
$m$	kg	masa autonomne letjelice
<b>M</b>	-	matrica inercije sustava
$m_0$	kg	masa tereta
$m_1$	kg	masa prve autonomne letjelice
$m_2$	kg	masa druge autonomne letjelice
$M$	kg	ukupna masa sustava

<b>P</b>	-	matrica koja se dobije rješavanjem Riccati-eve jednadžbe
<b>q</b>	-	vektor poopćenih koordinata
<b><math>\dot{q}</math></b>	-	vektor poopćenih brzina
<b><math>\ddot{q}</math></b>	-	vektor poopćenih ubrzanja
<b>Q</b>	-	pozitivna simetrična težinska matrica
$Q_i$	-	i-ti težinski faktor matrice <b>Q</b>
<b>R</b>	-	pozitivna simetrična težinska matrica
$R_i$	-	i-ti težinski faktor matrice <b>R</b>
$s_i$	-	i-ti željen pol sustava
<b>T</b>	N	sila potiska autonomne letjelice
$T_1$	N	sila potiska prve autonomne letjelice
$T_2$	N	sila potiska druge autonomne letjelice
<b>u</b>	-	upravljački vektor
$\tilde{u}_1$	N	varijacija upravljačke varijable $u_1$
$\tilde{u}_2$	N	varijacija upravljačke varijable $u_2$
<b>U</b>	J	ukupna potencijalna energija sustava
$U_0$	J	potencijalna energija tereta
$U_1$	J	potencijalna energija prve letjelice
$U_2$	J	potencijalna energija druge letjelice
<b>x</b>	-	vektor stanja
<b><math>\dot{x}</math></b>	-	derivacija vektora stanja
$x$	m	pozicija letjelice u smjeru $x$
$\dot{x}$	m/s	brzina letjelice u smjeru $x$
$\ddot{x}$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje letjelice u smjeru $x$
$x_d$	m	željena vrijednost pozicije letjelice
$x_0$	m	pozicija tereta u smjeru $x$
$\dot{x}_0$	m/s	brzina tereta u smjeru $x$
$\ddot{x}_0$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje tereta u smjeru $x$
$x_{0d}$	m	željena vrijednost pozicije tereta
$x_1$	m	pozicija prve letjelice u smjeru $x$
$\dot{x}_1$	m/s	brzina prve letjelice u smjeru $x$
$\ddot{x}_1$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje prve letjelice u smjeru $x$
$x_2$	m	pozicija druge letjelice u smjeru $x$
$\dot{x}_2$	m/s	brzina druge letjelice u smjeru $x$
$\ddot{x}_2$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje druge letjelice u smjeru $x$
$y$	m	pozicija letjelice u smjeru $y$
$\dot{y}$	m/s	brzina letjelice u smjeru $y$
$\ddot{y}$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje letjelice u smjeru $y$
$y_d$	m	željena vrijednost pozicije letjelice
$y_0$	m	pozicija tereta u smjeru $y$

$\dot{y}_0$	m/s	brzina tereta u smjeru y
$\ddot{y}_0$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje tereta u smjeru y
$y_{0d}$	m	željena vrijednost pozicije tereta
$y_1$	m	pozicija prve letjelice u smjeru y
$\dot{y}_1$	m/s	brzina prve letjelice u smjeru y
$\ddot{y}_1$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje prve letjelice u smjeru y
$y_2$	m	pozicija druge letjelice u smjeru y
$\dot{y}_2$	m/s	brzina druge letjelice u smjeru y
$\ddot{y}_2$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje druge letjelice u smjeru y
$\alpha$	rad	kut između tereta i letjelice
$\dot{\alpha}$	rad/s	kutna brzina između tereta i letjelice
$\ddot{\alpha}$	rad/s <sup>2</sup>	kutno ubrzanje između tereta i letjelice
$\alpha_d$	rad	željena vrijednost kuta između tereta i letjelice
$\alpha_1$	rad	kut između tereta i prve letjelice
$\tilde{\alpha}_1$	rad	varijacija kuta između tereta i prve letjelice
$\alpha_{10}$	rad	stacionarni kut između tereta i prve letjelice
$\alpha_2$	rad	kut između tereta i druge letjelice
$\tilde{\alpha}_2$	rad	varijacija kuta između tereta i druge letjelice
$\alpha_{20}$	rad	stacionarni kut između tereta i druge letjelice
$\beta$	rad	kut zakreta letjelice
$\dot{\beta}$	rad/s	kutna brzina zakreta letjelice
$\ddot{\beta}$	rad/s <sup>2</sup>	kutno ubrzanje zakreta letjelice
$\beta_1$	rad	kut zakreta prve letjelice
$\tilde{\beta}_1$	rad	varijacija kuta zakreta prve letjelice
$\beta_{10}$	rad	stacionarni kut zakreta prve letjelice
$\beta_2$	rad	kut zakreta druge letjelice
$\tilde{\beta}_2$	rad	varijacija kuta zakreta druge letjelice
$\beta_{20}$	rad	stacionarni kut između tereta i druge letjelice
$\lambda$	-	Lagrangeov multiplikator
$\tau$	Nm	zakretni moment letjelice
$\tau_1$	Nm	zakretni moment prve letjelice
$\tau_2$	Nm	zakretni moment druge letjelice
$\tau_\alpha$	Nm	upravljački moment tereta

## **SAŽETAK**

U ovom radu razmatran je problem prijenosa tereta primjenom autonomnih letjelica. Prvo je razmatran slučaj jedne autonomne letjelice s pasivno ovješnim teretom, a zatim slučaj prijenosa tereta primjenom dviju autonomnih letjelica u vertikalnoj ravnini. Dinamički modeli letjelica s teretom izvedeni su primjenom Euler–Lagrangeovih jednadžbi. Provedena je linearizacija oba nelinearna sustava, kako bi se dobio pojednostavljeni model, a samim time i jednostavniji upravljački zakoni. Upravljanje autonomnom letjelicom s pasivno ovješnim teretom realizirano je primjenom linearnog kvadratičnog regulatora, te metodom eksterne linearizacije. Upravljanje sustavom s dvije autonomne letjelice realizirano je primjenom linearnog kvadratičnog regulatora. Upravljački zahtjevi prilikom sinteze regulacijskog sustava jedne letjelice s pasivno ovješnim teretom bili su slijeđenje vremenski promjenjive referente trajektorije uz minimizaciju njihanja tereta. Upravljački zahtjevi u slučaju prijenosa tereta pomoću dvije letjelice bili su stabilizacija tereta u željenoj poziciji uz održavanje zadanog kuta između tereta i obje letjelice. Simulacijskim rezultatima demonstrirane su dobre performanse navedenih regulacijskih sustava.

Ključne riječi: Autonomne letjelice, Prijenos tereta, Nelinearni mehanički sustavi, Metoda eksterne linearizacije, Linearni kvadratični regulator

## **SUMMARY**

This thesis discusses a load transportation problem using unmanned aerial vehicles (UAVs). Firstly discussed is the case of single UAV with suspended load and then the case of load transportation using two UAVs in the vertical plane. Dynamic models for UAVs with the load are derived by using Euler-Lagrange equations. Both nonlinear systems are linearized, in order to achieve a simplified models and simpler control laws with it. Single UAV control with suspended load is achieved by using linear quadratic regulator and feedback linearization. System control of two UAVs is achieved by using linear quadratic regulator. Controllers for the single UAV with suspended load had to be designed for tracking desired trajectory while minimizing swinging of the load. In the case of the load transportation with two UAVs, controller had to be designed to stabilize the load in desired position while keeping desired angle between the load and both UAVs. Simulation results demonstrate a good performance of mentioned regulated systems.

Key words: Unmanned Aerial Vehicles, Load transportation, Nonlinear mechanical systems, Feedback linearization, Linear quadratic regulator

## 1. UVOD

U novije vrijeme sve više istraživanja se provodi na upravljanju autonomnim letjelicama. Često se koriste za prijenos tereta zbog svojih malih dimenzija i mogućnosti kretanja u bilo kojem smjeru te su pogodni za transport tereta na teže dostupna mjesta [1],[2]. Letjelice koje se najčešće koriste su quadrotori, koji se sa svoja četiri rotora mogu kretati u bilo kojem smjeru, održavati visinu i mijenjati orijentaciju na lakši način nego neke ostale letjelice. U 3D okolini, letjelica ima šest stupnjeva slobode gibanja i samo četiri aktuatora, što ju čini podaktuiranim sustavom. Dinamika takve letjelice je iznimno nelinearna, multivarijabilna i podaktuirana te je stoga poprilično zahtjevna za upravljanje [3],[4]. Nakon što se na letjelicu priključi teret, u sustav se unose dodatni stupnjevi slobode gibanja koji nisu aktuirani..

U ovom radu je provedeno upravljanje sustava prijenosa tereta primjenom autonomne letjelice koji je radi pojednostavljenja razmatran u ravnini. U tom slučaju letjelica ima tri stupnja slobode gibanja i samo dva aktuatora s dodatnim stupnjem slobode gibanja tereta koji je ovješena na letjelicu. Ovisno o tome je li teret direktno upravljiv, dodaje se još jedan aktuator, ili je ovješena pasivno te teret nije aktuiran. U radu su izvedena oba modela, i sa tri i sa dva aktuatora, ali je upravljanje više fokusirano na zadnje navedeno to jest na pasivno ovješeni teret. Cilj upravljanja prijenosa tereta je dovođenje sustava na željenu poziciju uz minimalno njihanje tereta. Utjecaj tereta na letjelicu je veći ako je njihanje tereta veće, te to može destabilizirati letjelicu i samim time cijeli sustav. Također i masa tereta ima utjecaj na letjelicu, te kako su letjelice malih dimenzija, kod prijenosa većih tereta se može koristiti više letjelica. Uz prijenos tereta s jednom letjelicom je napravljeno i upravljanje prijenosa tereta s dvije letjelice. Time se postiže podjela utjecaja tereta na dva dijela i smanjuje njihanje tereta jer je povezano s letjelicama krutim štapovima. Cilj upravljanja tog sustava je dovesti teret na željenu poziciju, ali i održati željene kutove između tereta i obje letjelice. I taj sustav je također izrazito nelinearan i podaktuiran te je model izveden na slučaju kada je teret ovješena pasivno na letjelicama. Neka od već provedenih istraživanja prijenosa tereta pomoću letjelice, reduciranog na 2D ravninu, koriste nelinearni regulator za stabilizaciju quadrotora i minimizaciju njihanja tereta tijekom praćenja trajektorije [5],[6],[7]. Dok su neka od rješenja za sustav s dvije letjelice iterativni LQR [8] i nelinearni regulator koji koristi metodu eksterne linearizacije [9] te usporedba stabilnosti između modela s jednom i dvije letjelice [10].



U ovom radu su u drugom poglavlju najprije izvedeni matematički modeli i dobivene su jednačbe dinamike sustava, i za sustav s jednom i s dvije letjelice. Oba sustava su potom linearizirana radi dobivanja manje zahtjevnih zakona upravljanja. U trećem poglavlju su upravljački zakoni zatim izvedeni metodom eksterne linearizacije i sintezom linearnog kvadratičnog regulatora. Nakon toga su u četvrtom poglavlju upravljački zakoni implementirani, skupa s modelima u MATLAB. Zatim su provedene simulacije svih izvedenih upravljanja na primjerima vertikalnog i horizontalnog leta, održavanja visine na određenoj poziciji i slijeđenja vremenski promjenjive trajektorije.

## 2. MATEMATIČKI MODEL SUSTAVA

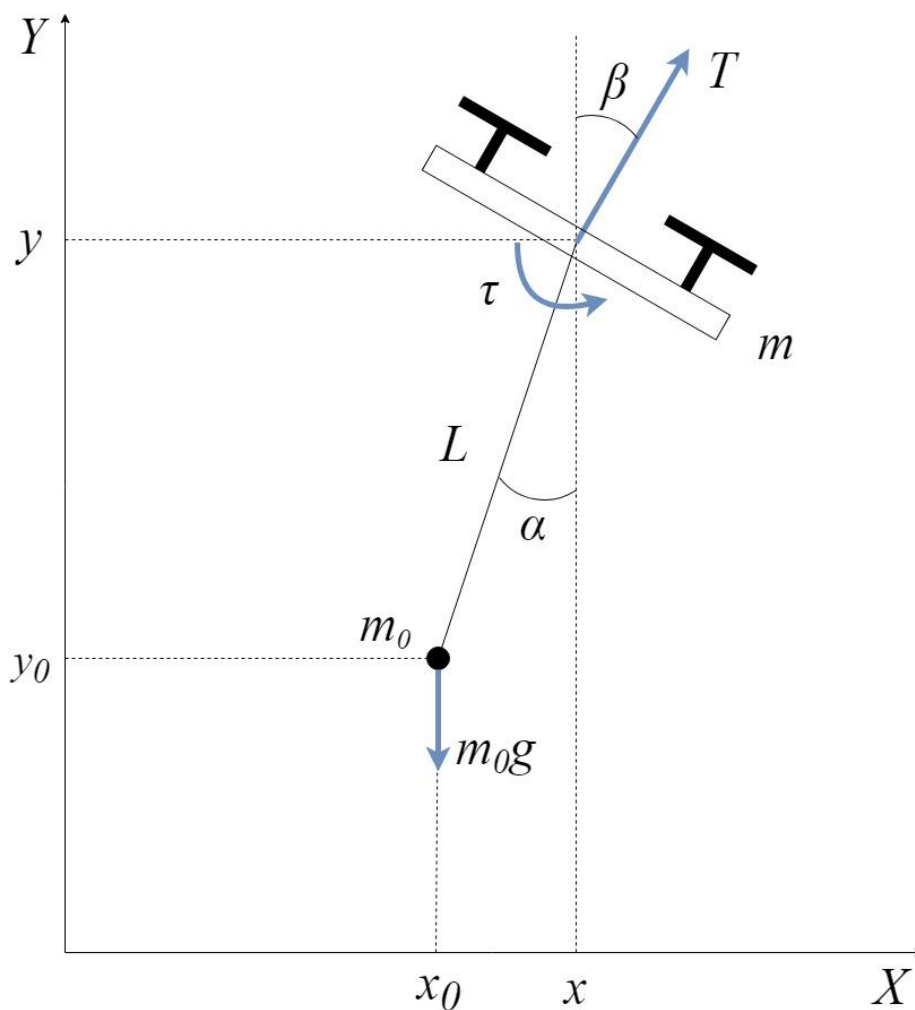
U ovom poglavlju je prvo opisan sustav prijenosa tereta autonomnom letjelicom te zatim i s dvije letjelice. Izvedene su njihove dinamičke jednadžbe sustava pomoću Euler – Lagrangeovih jednadžbi [11]. Na kraju poglavlja su ti modeli linearizirani uz pretpostavku o malim kutovima te su na tim modelima u sljedećem poglavlju provedene sinteze upravljačkih zakona.

### 2.1. Sustav prijenosa tereta pomoću jedne autonomne letjelice

#### 2.1.1. Opis sustava

Sustav autonomne letjelice s teretom je razmatran u vertikalnoj ravnini ( $XY$ ). Letjelica se kreće u 2D okolini tako što generira potisak te za orijentaciju koristi zakretni moment. Što znači da svoja tri stupnja slobode gibanja upravlja s dvije upravljačke varijable. Varijable kojima je opisana letjelica su pozicija letjelice ( $x, y$ ) u odnosu na referentni koordinatni sustav ( $XY$ ), kut zakreta letjelice  $\beta$ , masa letjelice  $m$  i inercija  $I$  te već spomenute upravljačke varijable potisak  $T$  i zakretni moment letjelice  $\tau$ . Dodatni teret na letjelicu unosi svoj stupanj slobode gibanja i varijable kojima je definiran su pozicija tereta ( $x_0, y_0$ ) u odnosu na koordinatni sustav ( $XY$ ), kut njihanja tereta odnosno kut između tereta i letjelice  $\alpha$  i masa tereta  $m_0$  te duljina štapa  $L$  kojim je teret povezan s letjelicom. Prikaz cijelog sustava je na slici [Slika 1]. U ovom radu su razmatrana dva slučaja sustava, kada je teret direktno upravljiv ili je pasivan. Prvi slučaj je kada je teret povezan aktivno s letjelicom, postoji upravljački moment  $\tau_a$  koji ga upravlja i drugi slučaj je kada je teret pasivno ovješeno to jest upravljački moment  $\tau_a$  je nula. Prije izvođenja dinamike sustava definirane su sljedeće pretpostavke modela:

- Letjelica je smatrana kao simetrično kruto tijelo u ravnini i sila potiska djeluje u njenom centru
- Teret je smatran kao masa u prostoru spojena s letjelicom u njenom centru
- Štap pomoću kojeg je teret povezan s letjelicom je krut, neelastičan te zanemarive težine
- Poremećaji kao aerodinamički efekti kod letjelice ili vanjski poremećaji poput vjetra su zanemareni



Slika 1. Prikaz sustava autonomne letjelice s teretom u ravnini XY

### 2.1.2. Euler – Lagrangeove jednadžbe

Za modeliranje sustava su korištene Euler – Lagrangeove jednadžbe koje su izvedene na temelju zakona očuvanja energije. Prednost takve formulacije je da dobivene jednadžbe koje opisuju sustav su funkcije primijenjenih sila na sustav. Dinamika sustava s  $n$  stupnjeva slobode gibanja se može prikazati općenito

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = u_k \quad (1)$$

Gdje je  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_k]^T$  vektor poopćenih koordinata,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k]^T$  vektor poopćenih brzina,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_k]^T$  vektor upravljačkih sila i momenata, a  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Lagrangeova funkcija sustava. Lagrangeova funkcija je jednaka razlici kinetičke  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  i potencijalne energije sustava  $U(\mathbf{q})$ , odnosno  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$  [12]. Kao poopćene

koordinate su odabrane varijable koje su pogodne pri upravljanju pozicije letjelice te njenja tereta, a to su  $\mathbf{q} = [x \ y \ \beta \ \alpha]^T$ . Kako bi sve jednadžbe mogle biti prikazane preko poopćenih koordinata izražene su geometrijske veze između koordinata letjelice i tereta

$$\begin{aligned} x &= x_0 + L \sin(\alpha), \\ y &= y_0 + L \cos(\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

Odnosno

$$\begin{aligned} x_0 &= x - L \sin(\alpha), \\ y_0 &= y - L \cos(\alpha), \end{aligned} \quad (3)$$

te njihove odgovarajuće derivacije

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{x} - L\dot{\alpha} \cos(\alpha), \\ \dot{y}_0 &= \dot{y} + L\dot{\alpha} \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Kinetička energija cijelog sustava je zbroj kinetičke energije letjelice i kinetičke energije tereta

$$\begin{aligned} K_{uav} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\beta}^2, \\ K_0 &= \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_0 L^2 \dot{\alpha}^2 + m_0 L \dot{\alpha} (\dot{y} \sin(\alpha) - \dot{x} \cos(\alpha)), \\ K &= K_{uav} + K_0 \end{aligned} \quad (5)$$

I konačna ukupna energija iznosi

$$K = \frac{1}{2} (m + m_0) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_0 L \dot{\alpha} (\dot{y} \sin(\alpha) - \dot{x} \cos(\alpha)) + \frac{1}{2} m_0 L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\beta}^2. \quad (6)$$

Isto tako, ukupna potencijalna energija sustava se dobije tako što se zbroje potencijalna energija letjelice i tereta

$$\begin{aligned} U &= mgy + m_0 g y_0, \\ U &= (m + m_0) gy - m_0 g L \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

Nakon dobivenih izraza za ukupnu kinetičku i potencijalnu energiju sustava se izražava Lagrangian sustava

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m + m_0) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_0 L \dot{\alpha} (\dot{y} \sin(\alpha) - \dot{x} \cos(\alpha)) + \frac{1}{2} m_0 L^2 \dot{\alpha}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I \dot{\beta}^2 - (m + m_0) gy + m_0 g L \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Nakon izraženog Lagrangiana su postavljane Euler – Lagrangeove jednačbe sustava, preko poopćenih koordinata

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= T_x \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= T_y \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \tau \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \tau_\alpha\end{aligned}\quad (9)$$

Nakon uvrštavanja i izračuna dobivene su jednačbe koje opisuju dinamiku sustava (10)-(13)

$$(m + m_0)\ddot{x} - m_0L\ddot{\alpha}\cos(\alpha) + m_0L\dot{\alpha}^2\sin(\alpha) = T\sin(\beta) \quad (10)$$

$$(m + m_0)\ddot{y} + m_0L\ddot{\alpha}\sin(\alpha) + m_0L\dot{\alpha}^2\cos(\alpha) + (m + m_0)g = T\cos(\beta) \quad (11)$$

$$I\ddot{\beta} = \tau \quad (12)$$

$$m_0L^2\ddot{\alpha} - m_0L\ddot{x}\cos(\alpha) + m_0L\ddot{y}\sin(\alpha) + m_0gL\sin(\alpha) = \tau_\alpha \quad (13)$$

Prikaz dinamike sustava u matričnom obliku

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (14)$$

gdje je  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  simetrična pozitivna matrica inercije,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m + m_0 & 0 & 0 & -m_0L\cos(\alpha) \\ 0 & m + m_0 & 0 & m_0L\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & I & 0 \\ -m_0L\cos(\alpha) & m_0L\sin(\alpha) & 0 & m_0L^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Coriolisov vektor koji sadrži coriolisove i centrifugalne članove,

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} m_0L\dot{\alpha}^2\sin(\alpha) \\ m_0L\dot{\alpha}^2\cos(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$  gravitacijski vektor u kojoj su članovi gravitacijske sile,

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (m + m_0)g \\ 0 \\ m_0gL\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\mathbf{B}(\mathbf{q})$  je matrica ulaza i  $\mathbf{u}$  je upravljački vektor. Redom su prikazane matrice ulaza i upravljački vektori za slučajeve s tri i dva aktuatora. Slučaj kada je  $\tau_\alpha$  različit od nule, matrica ulaza je

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\beta) & 0 & 0 \\ \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

S upravljačkim vektorom  $\mathbf{u} = [T \ \tau \ \tau_\alpha]^T$ . Drugi slučaj kada je  $\tau_\alpha$  jednak nuli, matrica  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\beta) & 0 \\ \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

S upravljačkim vektorom  $\mathbf{u} = [T \ \tau]^T$ .

### 2.1.3. Linearizacija modela

Linearizacija je metoda kojom se nelinearni model aproksimira linearnim modelom koji je valjan za određene vrijednosti u nelinearnom sustavu [13]. Općeniti nelinearni sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (20)$$

se linearizira u slučaju malih varijacija oko nekog nominalnog stanja, gdje su vektori stanja i upravljanja uz nominalne vrijednosti  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  i male varijacije  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  oko tih nominalnih vrijednosti

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \bar{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{u}}(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Nakon što je (21) uvršten u nelinearni sustav (20) izrazi se

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= f(\bar{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{u}}(t)) \\ &\approx f(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) + \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))}{\partial \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

I kada se uzme u obzir da je u slučaju bez varijacija zadovoljena jednačba (23)

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = f(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) \quad (23)$$

Konačni linearni sustav jednačbi se prikazuje

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\tilde{\mathbf{u}}(t), \quad (24)$$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))}{\partial \mathbf{x}},$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))}{\partial \mathbf{u}}$$

Radi dobivanja jednostavnijih upravljačkih varijabli i mogućnosti primjene linearnih regulatora, originalni, nelinearni sustav (10)-(13) je lineariziran uz pretpostavku o malim kutovima. Tada vrijedi pretpostavka  $\sin(\omega) \approx \omega$ ,  $\cos(\omega) \approx 1$  koja vrijedi u slučaju da su varijacije kutova male, kada je sustav u ravnotežnom stanju. Lineariziran je kut zakreta letjelice i kut tereta, te je linearizirani model sustava (25)-(28)

$$(m + m_0)\ddot{x} - m_0 L \ddot{\alpha} = \beta u_1 \quad (25)$$

$$(m + m_0)\ddot{y} + (m + m_0)g = u_1 \quad (26)$$

$$I\ddot{\beta} = u_2 \quad (27)$$

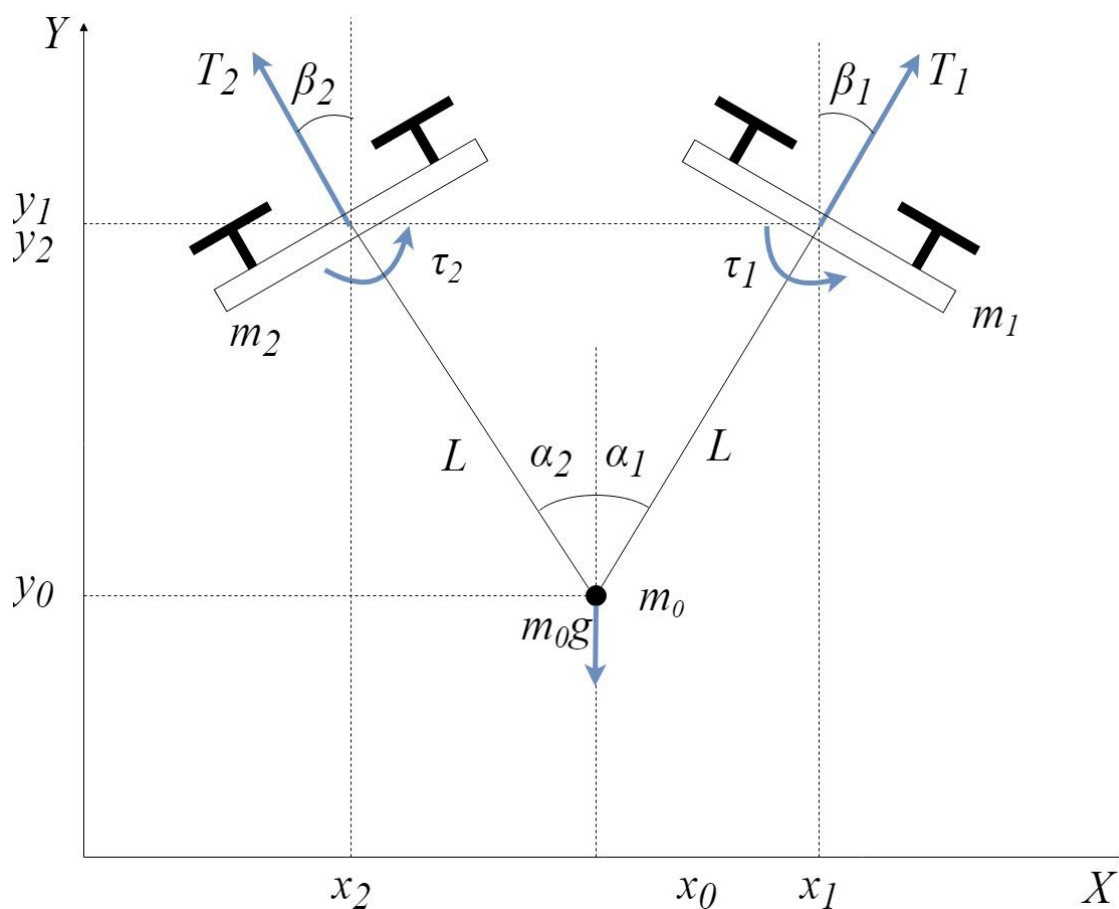
$$m_0 L^2 \ddot{\alpha} - m_0 L \ddot{x} + m_0 L \alpha \ddot{y} + m_0 g L \alpha = u_3 \quad (28)$$

gdje su uvedene oznake  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  za upravljački vektor  $\mathbf{u} = [T \ \tau \ \tau_\alpha]^T$ . Linearizirani model sustava je u ovom slučaju bilinearan, jer postoje članovi  $\beta u_1$  i  $\alpha \ddot{y}$  te ga je moguće potpuno linearizirati pomoću upravljačkih varijabli, što je i učinjeno u sljedećem poglavlju.

## 2.2. Sustav prijenosa tereta pomoću dvije autonomne letjelice

### 2.2.1. Opis sustava

Sustav prijenosa tereta pomoću dvije letjelice u ravnini ( $XY$ ) je postavljen tako da je prva letjelica „ispred“ tereta dok je druga letjelica „iza“ tereta i teret visi između njih. Prikaz sustava je na slici [Slika 2]. Željena pozicija sustava je da su letjelice na istoj visini, a kut između prve letjelice i tereta jednak kutu između druge letjelice i tereta, ali s negativnim predznakom. Varijable koje opisuju prvu letjelicu su njena pozicija  $(x_1, y_1)$  u odnosu na referentni koordinatni sustav ( $XY$ ), masa letjelice  $m_1$ , inercija  $I_1$ , sila potiska  $T_1$  i zakretni moment  $\tau_1$ . Teret je povezan s prvom letjelicom štapom duljine  $L$  i kut između njih je označen  $\alpha_1$ . Varijable koje opisuju drugu letjelicu su njena pozicija  $(x_2, y_2)$  u odnosu na referentni koordinatni sustav ( $XY$ ), masa  $m_2$ , inercija  $I_2$ , sila potiska  $T_2$  i zakretni moment  $\tau_2$ . Teret je povezan s drugom letjelicom štapom iste duljine kao i s prvom,  $L$  i kut između njih je  $\alpha_2$ . Teret opisuju pozicija  $(x_0, y_0)$  u odnosu na referentni sustav ( $XY$ ) i masa  $m_0$ . Pretpostavke definirane za prethodni sustav vrijede i za ovaj sustav.



Slika 2. Prikaz sustava dviju autonomnih letjelica s teretom u ravnini XY

### 2.2.2. Euler – Lagrangeove jednadžbe

Dinamika sustava je kao i u prethodnom sustavu izvedena preko Euler – Lagrangeovih jednadžbi. Za dobivanje Lagraniana, definirana je ukupna kinetička energija preko zbroja kinetičkih energija obje letjelice i tereta

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}_1^2, \\
 K_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\beta}_2^2, \\
 K_0 &= \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)
 \end{aligned} \tag{29}$$

Isto tako je i ukupna potencijalna energija zbroj potencijalnih energija obje letjelice i tereta

$$\begin{aligned}
 U_1 &= m_1 g y_1 \\
 U_2 &= m_2 g y_2 \\
 U_0 &= m_0 g y_0
 \end{aligned} \tag{30}$$



Za poopćene koordinate su odabrane varijable  $\mathbf{q} = [x_0 \ y_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T$  za razliku od prethodnog sustava, za koordinate je odabrana pozicija tereta. Kako je cilj upravljanja dovesti teret na željenu poziciju, odabirom tih koordinata se smanjuje broj poopćenih varijabli te će se sustav definirati preko tereta. Geometrijske veze između koordinata letjelica i tereta izražene preko koordinata tereta

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + L \sin(\alpha_1), \\y_1 &= y_0 + L \cos(\alpha_1), \\x_2 &= x_0 + L \sin(\alpha_2), \\y_2 &= y_0 + L \cos(\alpha_2).\end{aligned}\tag{31}$$

Uz odgovarajuće derivacije tih veza

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x}_0 + L\dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1), \\\dot{y}_1 &= \dot{y}_0 - L\dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1), \\\dot{x}_2 &= \dot{x}_0 + L\dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2), \\\dot{y}_2 &= \dot{y}_0 - L\dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2).\end{aligned}\tag{32}$$

Prije izračuna Lagrangiana je uvedena pretpostavka identičnosti letjelica odnosno  $m_1 = m_2 = m$ ,  $I_1 = I_2 = I$  i konačni izrazi za kinetičku (33) i potencijalnu energiju sustava (34)

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} M (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) + mL\dot{\alpha}_1 (\dot{x}_0 \cos(\alpha_1) - \dot{y}_0 \sin(\alpha_1)) + \\&+ mL\dot{\alpha}_2 (\dot{x}_0 \cos(\alpha_2) - \dot{y}_0 \sin(\alpha_2))\end{aligned}\tag{33}$$

$$U = Mgy_0 + mgL \cos(\alpha_1) + mgL \cos(\alpha_2)\tag{34}$$

I dobiveni Lagrangian sustava (35)

$$\begin{aligned}L &= K - U \\L &= \frac{1}{2} M (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) + \\&+ mL\dot{\alpha}_1 (\dot{x}_0 \cos(\alpha_1) - \dot{y}_0 \sin(\alpha_1)) + mL\dot{\alpha}_2 (\dot{x}_0 \cos(\alpha_2) - \dot{y}_0 \sin(\alpha_2)) - \\&- Mgy_0 - mgL \cos(\alpha_1) - mgL \cos(\alpha_2)\end{aligned}\tag{35}$$

Gdje je  $M = 2m + m_0$ . Postavljene Euler – Lagrangeove jednadžbe preko odabranih poopćenih koordinata

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} &= F_x = T_1 \sin(\beta_1) + T_2 \sin(\beta_2) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_0} &= F_y = T_1 \cos(\beta_1) + T_2 \cos(\beta_2) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta_1} &= \tau_1 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta_2} &= \tau_2 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} &= -T_1 L \sin(\alpha_1 - \beta_1) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} &= -T_2 L \sin(\alpha_2 - \beta_2)
\end{aligned} \tag{36}$$

Nakon deriviranja Lagrangiana po poopćenim koordinatama dobivene su jednadžbe dinamike sustava

$$\begin{aligned}
M\ddot{x}_0 + mL\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) + mL\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2) - mL\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1) - mL\dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2) &= \\
= T_1 \sin(\beta_1) + T_2 \sin(\beta_2)
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
M\ddot{y}_0 - mL\ddot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) - mL\ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2) - mL\dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1) - mL\dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_2) + Mg &= \\
= T_1 \cos(\beta_2) + T_2 \cos(\beta_2)
\end{aligned} \tag{38}$$

$$I\ddot{\beta}_1 = \tau_1 \tag{39}$$

$$I\ddot{\beta}_2 = \tau_2 \tag{40}$$

$$mL^2\ddot{\alpha}_1 + mL\ddot{x}_0 \cos(\alpha_1) - mL\ddot{y}_0 \sin(\alpha_1) - mgL \sin(\alpha_1) = -T_1 L \sin(\alpha_1 - \beta_1) \tag{41}$$

$$mL^2\ddot{\alpha}_2 + mL\ddot{x}_0 \cos(\alpha_2) - mL\ddot{y}_0 \sin(\alpha_2) - mgL \sin(\alpha_2) = -T_2 L \sin(\alpha_2 - \beta_2) \tag{42}$$

Prikaz dinamike sustava u matričnom obliku

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}$$

Gdje su matrica inercije (43), coriolisov vektor (44), gravitacijske sile (45), matrica ulaza (46) i upravljački vektor (47) prikazani redom

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & mL \cos(\alpha_1) & mL \cos(\alpha_2) \\ 0 & M & 0 & 0 & -mL \sin(\alpha_1) & -mL \sin(\alpha_2) \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ mL \cos(\alpha_1) & -mL \sin(\alpha_1) & 0 & 0 & mL^2 & 0 \\ mL \cos(\alpha_2) & -mL \sin(\alpha_2) & 0 & 0 & 0 & mL^2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -mL\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1) - mL\dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2) \\ -mL\dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1) - mL\dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ Mg \\ 0 \\ 0 \\ -mgL \sin(\alpha_1) \\ -mgL \sin(\alpha_2) \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\beta_1) & \sin(\beta_2) & 0 & 0 \\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -L \sin(\alpha_1 - \beta_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L \sin(\alpha_1 - \beta_1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{u} = [T_1 \quad T_2 \quad \tau_1 \quad \tau_2]^T \quad (47)$$

### 2.2.3. Linearizacija modela

Linearizacija se provodi preko željenih nominalnih kutova i njihovih malih varijacija. U sustavu s dvije letjelice, željeni kut između tereta i letjelice više nije nula, nego neki proizvoljni nominalni kut. Kutovi  $\alpha$  su izraženi

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \tilde{\alpha}_1 \quad (48)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20} + \tilde{\alpha}_2 \quad (49)$$

Gdje su  $\alpha_{10}, \alpha_{20}$  proizvoljni željeni kutovi, a  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$  njihove varijacije. Onda su sinusi i kosinusi kutova izraženi kao

$$\sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_{10}) + \cos(\alpha_{10})\tilde{\alpha}_1 \quad (50)$$

$$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_{10}) - \sin(\alpha_{10})\tilde{\alpha}_1 \quad (51)$$

Analogno tome vrijedi i za kut  $\alpha_2$ . Kako željeni kutovi  $\alpha$  više nisu nula, kutovi zakreta letjelica  $\beta$  su izračunati u stacionarnom stanju kada je sustav u ravnoteži u stanju lebdjenja, za proizvoljne kutove  $\alpha$ . Izvod kutova (52) i (53) iz [14].

$$\tan(\beta_{10}) = \frac{-m_0 g \sin(\alpha_{10}) \sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} - \alpha_{20})} \quad (52)$$

$$mg - \frac{m_0 g \sin(\alpha_{20}) \cos(\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{10} - \alpha_{20})}$$

$$\tan(\beta_{20}) = \frac{m_0 g \sin(\alpha_{10}) \sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} - \alpha_{20})} \quad (53)$$

$$mg + \frac{m_0 g \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} - \alpha_{20})}$$

Za kutove zakreta vrijede isti izrazi kao i za  $\alpha$  (48) i (51). Nakon uvrštavanja (48), (49), (52) i (53) u (37)-(42), dobivene su jednadžbe lineariziranog modela sustava

$$M\ddot{x}_0 + mL\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_{10}) + mL\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_{20}) = \quad (54)$$

$$= u_1 (\sin(\beta_{10}) + \cos(\beta_{10})\tilde{\beta}_1) + u_2 (\sin(\beta_{20}) + \cos(\beta_{20})\tilde{\beta}_2)$$

$$M\ddot{y}_0 - mL\ddot{\alpha}_1 \sin(\alpha_{10}) - mL\ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_{20}) + Mg = \quad (55)$$

$$= u_1 (\cos(\beta_{10}) - \sin(\beta_{10})\tilde{\beta}_1) + u_2 (\cos(\beta_{20}) - \sin(\beta_{20})\tilde{\beta}_2)$$

$$I\ddot{\beta}_1 = u_3 \quad (56)$$

$$I\ddot{\beta}_2 = u_4 \quad (57)$$

$$mL^2\ddot{\alpha}_1 + mL\ddot{x}_0 \cos(\alpha_{10}) - mL\ddot{y}_0 \sin(\alpha_{10}) - mL \cos(\alpha_{10})\tilde{\alpha}_1\ddot{y}_0 - \quad (58)$$

$$- mgL \cos(\alpha_{10})\tilde{\alpha}_1 - mgL \sin(\alpha_{10}) =$$

$$= -u_1 L(\sin(\alpha_{10} - \beta_{10}) - \cos(\alpha_{10} - \beta_{10})\tilde{\beta}_1 + \cos(\alpha_{10} - \beta_{10})\tilde{\alpha}_1)$$

$$mL^2\ddot{\alpha}_2 + mL\ddot{x}_0 \cos(\alpha_{20}) - mL\ddot{y}_0 \sin(\alpha_{20}) - mL \cos(\alpha_{20})\tilde{\alpha}_2\ddot{y}_0 - \quad (59)$$

$$- mgL \cos(\alpha_{20})\tilde{\alpha}_2 - mgL \sin(\alpha_{20}) =$$

$$= -u_2 L(\sin(\alpha_{20} - \beta_{20}) - \cos(\alpha_{20} - \beta_{20})\tilde{\beta}_2 + \cos(\alpha_{20} - \beta_{20})\tilde{\alpha}_2)$$

gdje su uvedene oznake  $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$  za upravljački vektor  $\mathbf{u} = [T_1 \quad T_2 \quad \tau_1 \quad \tau_2]^T$ .

### 3. UPRAVLJANJE DINAMIČKIM SUSTAVIMA

U ovom poglavlju su izvedeni upravljački zakoni za oba sustava. Metode za sintezu upravljačkih zakona koje su korištene su metoda eksterne linearizacije i linearni kvadratični regulator (skraćeno LQR) [15]. Prvo su općenito opisani metoda eksterne linearizacije i LQR, a zatim i njihova primjena na sustav s jednom letjelicom. Za sustav s dvije letjelice je korištena samo sinteza LQR-a.

#### 3.1. Metoda eksterne linearizacije

Metoda koja transformira nelinearni model u ekvivalentni linearni model preko upravljačkog zakona je metoda eksterne linearizacije [16]. Nakon transformacije je moguće koristiti linearne regulatore na transformiranom modelu. Za općeniti nelinearni sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (60)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (61)$$

Gdje su  $\mathbf{x}$  vektor stanja,  $u$  upravljačka varijabla,  $y$  izlazna varijabla,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  kontinuirana vektorska polja,  $h$  skalarna kontinuirana funkcija. Cilj eksterne linearizacije je pronaći upravljački zakon

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v \quad (62)$$

I transformaciju koordinata

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (63)$$

koji će transformirati nelinearni sustav (60) u ekvivalentni linearni sustav  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{B}v$ . Postupak linearizacije se odvija tako da je potrebno diferencirati izlaznu varijablu  $y$  dok se ne pojavi eksplicitna ovisnost o upravljačkoj varijabli  $u$ . Prva derivacija izlazne varijable

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})u = L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})u \quad (64)$$

gdje se definiraju Lieve derivacije funkcija u odnosu na vektorska polja

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (65)$$

$$L_g h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (66)$$

$$L_g L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_f h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (67)$$

Ako se nakon prve derivacije ne pojavi varijabla  $u$ , izraz (64) je potrebno derivirati  $r$  puta.

Kada se varijabla  $y$  diferencira  $r$  puta, gdje  $r$  predstavlja relativni stupanj koji pokazuje koliko je puta potrebno diferencirati  $y$  da bi se pojavila  $u$  eksplicitno, dobije se izraz

$$y^{(r)} = L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})u \quad (68)$$

I tada se uvodi upravljački zakon

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} (-L_f^r h(\mathbf{x}) + v) \quad (69)$$

Gdje je  $y^{(r)} = v$ . Ako je red sustava  $n$  jednak relativnom stupnju  $r$ , definira se transformacija koordinata

$$\begin{bmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ z_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (70)$$

S derivacijama

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(\mathbf{x}) \\ \dot{z}_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f h(\mathbf{x}) \\ L_f^2 h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^n h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})u \end{bmatrix} \quad (71)$$

I zatim se izabire  $v = -\mathbf{Kz}$ , kako bi se dobio konačni linearni sustav

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bv} \quad (72)$$

## 3.2. Linearni kvadratični regulator (LQR)

### 3.2.1. Linearni kvadratični regulator bez poremećaja

Linearni kvadratični regulator je optimalni regulator kojemu je cilj pronaći upravljački vektor  $\mathbf{u}$  koji minimizira kvadratičnu funkciju cilja (74). Rješenje optimizacijskog problema minimizira grešku između varijable stanja  $x$  i željene vrijednosti  $x_d$  [17]. Neka je za općeniti linearni sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (73)$$

potrebno minimizirati funkciju cilja

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (74)$$

gdje je  $\mathbf{Q}$  simetrična pozitivna semidefinitna matrica kojom se pridodaju težinski koeficijenti pogreški koja se želi smanjiti,  $\mathbf{R}$  je simetrična pozitivno definitna matrica čije vrijednosti su

težinski koeficijenti koji utječu na upravljačke varijable. Sinteza LQR-a je provedena preko

Hamiltoniana koji je definiran

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) + \lambda^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (75)$$

Gdje se primjenom nužnih uvjeta optimalnosti dobiju

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \lambda = 0 \quad (76)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \lambda \quad (77)$$

Sada se iz (76) dobije upravljački vektor (78) koji uvršten u (73) daje (79)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda \quad (78)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda \quad (79)$$

Te se sada odabirom  $\lambda = \mathbf{P} \mathbf{x}$  kako bi upravljački vektor ovisio o vektoru stanja dobiju izrazi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (80)$$

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (81)$$

Nakon derivacije  $\lambda$  i usporedbe s (81), rješenje matrice  $\mathbf{P}$  se dobije preko Riccatijeve jednadžbe

$$\mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = 0 \quad (82)$$

Konačni izraz za upravljački vektor je

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (83)$$

Gdje je matrica pojačanja  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (84)$$

kako bi se dobio izraz  $\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x}$ . U MATLAB-u se rješenje matrice pojačanja  $\mathbf{K}$  dobije preko funkcije

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

### 3.2.2. Linearni kvadratični regulator s poremećajem

Za primjer se uzima linearni sustav u obliku prostora stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d \mathbf{d} \quad (85)$$

gdje je  $\mathbf{d}$  konstanti poremećaj [18]. Funkcija cilja koju je potrebno minimizirati

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (86)$$

Sinteza regulatora se također provodi preko Hamiltoniana koji je sada definiran (87)

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) + \lambda^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{B}_d \mathbf{d}) \quad (87)$$

Nakon primjene nužnih uvjeta optimalnosti dobiju se jednadžbe

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda + \mathbf{B}_d \mathbf{d} \\ \dot{\lambda} &= -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \lambda \end{aligned} \quad (88)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda$$

Sada se kao  $\lambda$  uvodi funkcija

$$\lambda = \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{h} \mathbf{d} \quad (89)$$

Te nakon uvrštavanja i izjednačavanja definiranih izraza se dobije

$$(\mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + (\mathbf{P} \mathbf{B}_d - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{h} + \mathbf{A}^T \mathbf{h}) \mathbf{d} = 0 \quad (90)$$

Matrica  $\mathbf{P}$  se dobije preko Riccatijeve jednadžbe

$$\mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = 0 \quad (91)$$

Te se sada  $\mathbf{h}$  izrazi kao

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{B}_d - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{h} + \mathbf{A}^T \mathbf{h} &= 0 \\ \mathbf{h} &= (\mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{B}_d \end{aligned} \quad (92)$$

I konačni zakon upravljanja glasi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K}_d \mathbf{d} \quad (93)$$

Gdje su matrice pojačanja  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{K}_d$  izražene kao

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (94)$$

$$\mathbf{K}_d = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{h} \quad (95)$$

Matrica  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{K}$  se u MATLAB-u dobivaju preko funkcije

$$[\mathbf{K} \quad \mathbf{P}] = lqr(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

### 3.3. Upravljanje prijenosom tereta primjenom jedne autonomne letjelice

Upravljanje sustavom s jednom letjelicom je provedeno primjenom metode eksterne linearizacije i LQR-a. Metoda eksterne linearizacije je prvo provedena na bilinearnom



modelu, kada je sustav aktuiran i sa 3 i sa 2 aktuatora. Zatim je provedena potpuna linearizacija bilinearnog modela i provedena je sinteza LQR-a na modelu sa 2 aktuatora. Na tom istom modelu je zatim opet provedena eksterna linearizacija.

### 3.3.1. Metoda eksterne linearizacije na sustavu s tri aktuatora

Na reduciranom sustavu koji je bilinearan (25)-(28), pod pretpostavkom da su sve varijable mjerljive provedena je metoda eksterne linearizacije. Cilj upravljanja je da letjelica slijedi vremenski promjenjivu kontinuiranu trajektoriju,  $x_d = x_d(t)$ ,  $y_d = y_d(t)$ . Upravljanje je podijeljeno na tri dijela, na regulaciju pomaka u  $y$  smjeru, na regulaciju kuta tereta i regulaciju pomaka u  $x$  smjeru skupa s kutom zakreta.

#### 3.3.1.1. Regulacija u smjeru $y$

Za regulaciju pomaka u vertikalnom smjeru, to jest regulaciju visine, je korištena upravljačka varijabla  $u_1$ . Cilj je slijediti visinu koja je vremenski promjenjiva te je tada pogreška koja se javlja izražena preko sljedećih izraza

$$\begin{aligned} e_y &= y - y_d \\ \dot{e}_y &= \dot{y} - \dot{y}_d \\ \ddot{e}_y &= \ddot{y} - \ddot{y}_d \end{aligned} \tag{96}$$

Nakon što je pogreška (96) uvrštena u izraz (26)

$$(m + m_0)\ddot{e}_y = -(m + m_0)g + u_1 \tag{97}$$

Gdje je dinamika pogreške  $\ddot{e}_y + k_{y1}\dot{e}_y + k_{y0}e_y = 0$ , a  $k_{y1}$ ,  $k_{y0}$  pozitivna pojačanja. Zatim je definirana prva upravljačka varijabla

$$u_1 = (m + m_0)(g + \ddot{y}_d - k_{y1}\dot{e}_y - k_{y0}e_y) \tag{98}$$

#### 3.3.1.2. Regulacija kuta $\alpha$

U ovom slučaju kada sustav ima tri aktuatora, kut  $\alpha$  je moguće direktno upravljati. Cilj je minimizirati njihanje tereta odnosno željeni kut  $\alpha_d$  je nula. Pogreška kuta je definirana

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \alpha \\ \dot{e}_\alpha &= \dot{\alpha} \\ \ddot{e}_\alpha &= \ddot{\alpha} \end{aligned} \tag{99}$$

Gdje je dinamika pogreške  $\ddot{e}_\alpha + k_{\alpha 1}\dot{e}_\alpha + k_{\alpha 0}e_\alpha = 0$  i  $k_{\alpha 1}, k_{\alpha 0}$  su pozitivna pojačanja. Jednadžba

(28) je potom izražena samo pomoću poopćenih koordinata

$$\left( m_0 L^2 - \frac{m_0^2 L^2}{m + m_0} \right) \ddot{\alpha} = \frac{m_0 L}{m + m_0} \beta u_1 - \frac{m_0 L}{m + m_0} \alpha u_1 + u_3 \quad (100)$$

Radi lakšeg i kraćeg zapisa uvedene su konstante  $A_{k1}$  i  $A_{k2}$

$$A_{k1} = m_0 L^2 - \frac{m_0^2 L^2}{m + m_0} \quad (101)$$

$$A_{k2} = \frac{m_0 L}{m + m_0} \quad (102)$$

Nakon što je u izraz (100) uvrštena pogreška, dobije se

$$A_{k1} \ddot{e}_\alpha = A_{k2} \beta u_1 - A_{k2} \alpha u_1 + u_3 \quad (103)$$

Definira se na kraju upravljačka varijabla  $u_3$

$$u_3 = -A_{k2} \beta u_1 + A_{k2} \alpha u_1 + A_{k1} (-k_{\alpha 1} \dot{e}_\alpha - k_{\alpha 0} e_\alpha) \quad (104)$$

### 3.3.1.3. Regulacija u smjeru $x$

S obzirom da su upravljačke varijable  $u_1, u_3$  već iskorištene za regulaciju  $y$  i  $\alpha$ , regulacija u smjeru  $x$  se ostvaruje preko varijable  $u_2$ , skupa s regulacijom kuta zakreta. Da bi se to ostvarilo, izraz (25) je deriviran dva puta kako bi se u njemu eksplicitno pojavila varijabla  $u_2$ .

Najprije je u (100) uvršten (25)

$$(m + m_0) \ddot{x} - \frac{m_0 L}{A_{k1}} (A_{k2} \beta u_1 - A_{k2} \alpha u_1 + u_3) = \beta u_1 \quad (105)$$

Pogreška u smjeru  $x$  je definirana

$$\begin{aligned} e_x &= x - x_d \\ \dot{e}_x &= \dot{x} - \dot{x}_d \\ \ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_d \end{aligned} \quad (106)$$

Te je tada (105) izražen kao

$$(m + m_0) \ddot{e}_x - \frac{m_0 L}{A_{k1}} (A_{k2} \beta u_1 - A_{k2} \alpha u_1 + u_3) = \beta u_1 \quad (107)$$

Izraz (107) je deriviran po vremenu

$$(m + m_0) \dddot{e}_x + \frac{m_0 L A_{k2}}{A_{k1}} (\dot{\alpha} u_1 + \alpha \dot{u}_1) - \frac{m_0 L}{C_1} \dot{u}_3 = (1 + \frac{m_0 L A_{k2}}{A_{k1}}) (\dot{\beta} u_1 + \beta \dot{u}_1) \quad (108)$$

Kako se u (108) nije pojavila upravljačka varijabla, izraz je deriviran još jednom

$$\begin{aligned}
(m+m_0)e_x^{(4)} + \frac{m_0LA_{k2}}{A_{k1}}(\ddot{\alpha}u_1 + 2\dot{\alpha}\dot{u}_1 + \alpha\ddot{u}_1) - \frac{m_0L}{A_{k1}}\ddot{u}_3 = \\
= (1 + \frac{m_0LA_{k2}}{A_{k1}})(\dot{\beta}u_1 + 2\dot{\beta}\dot{u}_1 + \beta\ddot{u}_1)
\end{aligned} \tag{109}$$

U (109) se pojavila varijabla  $\dot{\beta}$  koja se zamijeni s (27), i nakon sređivanja izraza (109), kako bi se prikazao pomoću poopćenih koordinata, dobiva se

$$(m+m_0)e_x^{(4)} - m_0L(-k_{\alpha1}\ddot{e}_\alpha - k_{\alpha0}\ddot{e}_\alpha) = \frac{u_2}{I}u_1 + 2\dot{\beta}\dot{u}_1 + \beta\ddot{u}_1 \tag{110}$$

Pogreška (106) je potom derivirana još dva puta

$$\begin{aligned}
\ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_d \\
e_x^{(4)} &= x^{(4)} - x_d^{(4)}
\end{aligned} \tag{111}$$

Gdje je dinamika pogreške  $e_x^{(4)} + k_{x3}\ddot{e}_x + k_{x2}\dot{e}_x + k_{x1}e_x = 0$  i  $k_{x3}, k_{x2}, k_{x1}, k_{x0}$  su pozitivna pojačanja. S obzirom da se u izrazu (110) javljaju derivacije upravljačkih varijabli, definirani su sljedeći izrazi

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= (m+m_0)(\ddot{y}_d - k_{y1}\ddot{e}_y - k_{y0}\dot{e}_y) \\
\ddot{e}_y &= \ddot{y} - \ddot{y}_d = -g + \frac{u_1}{m+m_0} - \ddot{y}_d \\
\ddot{u}_1 &= (m+m_0)(y_d^{(4)} - k_{y1}\ddot{e}_y - k_{y0}\dot{e}_y) \\
\ddot{e}_y &= \frac{\dot{u}_1}{m+m_0} - \ddot{y}_d \\
\dot{u}_3 &= A_{k2}(-\dot{\beta}u_1 - \beta\dot{u}_1 + \dot{\alpha}u_1 + \alpha\dot{u}_1) + A_{k1}(-k_{\alpha1}\ddot{e}_\alpha - k_{\alpha0}\dot{e}_\alpha) \\
\ddot{e}_\alpha &= \ddot{\alpha} = \frac{1}{A_{k1}}(A_{k2}\beta u_1 - A_{k2}\alpha u_1 + u_3) \\
\ddot{u}_3 &= A_{k2}(-\dot{\beta}u_1 - 2\dot{\beta}\dot{u}_1 - \beta\ddot{u}_1 + \dot{\alpha}u_1 + 2\dot{\alpha}\dot{u}_1 + \alpha\ddot{u}_1) + A_{k1}(-k_{\alpha1}\ddot{e}_\alpha - k_{\alpha0}\dot{e}_\alpha) \\
\ddot{e}_\alpha &= \frac{1}{A_{k1}}(A_{k2}\dot{\beta}u_1 + A_{k2}\beta\dot{u}_1 - A_{k2}\dot{\alpha}u_1 - A_{k2}\alpha\dot{u}_1 + \dot{u}_3) \\
\ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_d = \frac{1}{(m+m_0)}(\beta u_1 + m_0L\ddot{\alpha}) - \ddot{x}_d \\
\ddot{e}_x &= \frac{1}{(m+m_0)}(\dot{\beta}u_1 + \beta\dot{u}_1 + m_0L\ddot{\alpha}) - x_d^{(4)}
\end{aligned} \tag{112}$$

Tako da je konačna upravljačka varijabla  $u_2$

$$u_2 = \frac{I}{u_1} \left[ (m + m_0)(x_d^{(4)} - k_{x3}\ddot{e}_x - k_{x2}\dot{e}_x - k_{x1}\dot{e}_x - k_{x0}e_x) - m_0L(-k_{\alpha3}\ddot{e}_\alpha - k_{\alpha2}\dot{e}_\alpha) - 2\dot{\beta}u_1 - \beta\ddot{u}_1 \right] \quad (113)$$

### 3.3.2. Metoda eksterne linearizacije na sustavu s dva aktuatora

U slučaju sustava s dva aktuatora, teret je ovješeno pasivno na letjelicu. Zbog toga teret nije direktno upravljiv te će se njihanje tereta regulirati preko upravljačke varijable  $u_2$ , koja upravlja i letjelicu u smjeru  $x$  te njenu orijentaciju. U ovom slučaju sustav (25)-(28) se razlikuje samo u upravljačkoj varijabli  $u_3$  koja je sada nula

$$(m + m_0)\ddot{x} - m_0L\ddot{\alpha} = \beta u_1 \quad (114)$$

$$(m + m_0)\ddot{y} + (m + m_0)g = u_1 \quad (115)$$

$$I\ddot{\beta} = u_2 \quad (116)$$

$$m_0L^2\ddot{\alpha} - m_0L\ddot{x} + m_0L\alpha\ddot{y} + m_0gL\alpha = 0 \quad (117)$$

#### 3.3.2.1. Regulacija u smjeru $y$

Željena pozicija letjelice u vertikalnom smjeru je ista kao u prethodnom dijelu, kod sustava s tri upravljačke varijable, odnosno potrebno je slijediti vremenski promjenjivu trajektoriju. Upravljačka varijabla  $u_1$  regulira visinu letjelice te je provedena na isti način kao i u prethodnom dijelu

$$u_1 = (m + m_0)(g + \ddot{y}_d - k_{y1}\dot{e}_y - k_{y0}e_y) \quad (118)$$

S pogreškom  $e_y = y - y_d$ ,  $\dot{e}_y = \dot{y} - \dot{y}_d$ ,  $\ddot{e}_y = \ddot{y} - \ddot{y}_d$  i njenom dinamikom  $\ddot{e}_y + k_{y1}\dot{e}_y + k_{y0}e_y = 0$  i pozitivnim pojačanjima  $k_{y1}$ ,  $k_{y0}$ .

#### 3.3.2.2. Regulacija kuta $\alpha$ i pomaka u smjeru $x$

Za razliku od prethodnog slučaja, sada nije moguće direktno upravljati kutom  $\alpha$ , a kako njihanje ovisi najviše o pomaku u horizontalnom smjeru, upravljan je skupa s varijablom  $x$  i  $\beta$ . U (115) je uvršten (117)

$$(m + m_0)\ddot{x} - \frac{m_0L}{A_{k1}}(A_{k2}\beta u_1 - A_{k2}\alpha u_1) = \beta u_1 \quad (119)$$

Postupak je dalje isti kao u prethodnom slučaju, (119) se derivira dva puta

$$(m + m_0)\ddot{e}_x + \frac{m_0LA_{k2}}{A_{k1}}(\dot{\alpha}u_1 + \alpha\dot{u}_1) = (1 + \frac{m_0LA_{k2}}{A_{k1}})(\dot{\beta}u_1 + \beta\dot{u}_1)$$

$$\begin{aligned}
(m+m_0)e_x^{(4)} + \frac{m_0 LA_{k2}}{A_{k1}}(\ddot{\alpha}u_1 + 2\dot{\alpha}\dot{u}_1 + \alpha\ddot{u}_1) = \\
= (1 + \frac{m_0 LA_{k2}}{A_{k1}})(\ddot{\beta}u_1 + 2\dot{\beta}\dot{u}_1 + \beta\ddot{u}_1)
\end{aligned} \tag{120}$$

Radi lakšeg zapisa je definirana još jedna konstanta

$$A_{k3} = 1 + \frac{m_0 LA_{k2}}{A_{k1}} \tag{121}$$

Pogreška je ista kao u prethodnom slučaju (111) te nakon uvrštavanja (111) u (120) dobivena je upravljačka varijabla  $u_2$

$$\begin{aligned}
u_2 = \frac{I}{u_1} \left[ \frac{(A_{k3} - 1)}{A_{k3}}(\ddot{\alpha}u_1 + 2\dot{\alpha}\dot{u}_1 + \alpha\ddot{u}_1) - 2A_{k3}\dot{\beta}\dot{u}_1 - A_{k3}\beta\ddot{u}_1 - \right. \\
\left. - \frac{(m+m_0)}{A_{k3}}(x_d^{(4)} - k_{x3}\ddot{e}_x - k_{x2}\dot{e}_x - k_{x1}\dot{e}_x - k_{x0}e_x) \right]
\end{aligned} \tag{122}$$

Gdje su definirani sljedeći izrazi

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= (m+m_0)(\ddot{y}_d - k_{y1}\ddot{e}_y - k_{y0}\dot{e}_y) \\
\ddot{e}_y &= \ddot{y} - \ddot{y}_d = -g + \frac{u_1}{m+m_0} - \ddot{y}_d \\
\ddot{u}_1 &= (m+m_0)(y_d^{(4)} - k_{y1}\ddot{e}_y - k_{y0}\dot{e}_y) \\
\ddot{e}_y &= \frac{\dot{u}_1}{m+m_0} - \ddot{y}_d \\
\ddot{e}_\alpha &= \ddot{\alpha} = \frac{1}{A_{k1}}(A_{k2}\beta u_1 - A_{k2}\alpha u_1) \\
\ddot{e}_\alpha &= \frac{1}{A_{k1}}(A_{k2}\dot{\beta}u_1 + A_{k2}\beta\dot{u}_1 - A_{k2}\dot{\alpha}u_1 - A_{k2}\alpha\dot{u}_1) \\
\ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_d = \frac{1}{(m+m_0)}(\beta u_1 + m_0 L\ddot{\alpha}) - \ddot{x}_d \\
\ddot{e}_x &= \frac{1}{(m+m_0)}(\dot{\beta}u_1 + \beta\dot{u}_1 + m_0 L\ddot{e}_\alpha) - x_d^{(4)}
\end{aligned} \tag{123}$$

### 3.3.3. Potpuna linearizacija sustava

S obzirom da je model koji se dobio uz pretpostavku malih kutova bilinearan, moguće ga je potpuno linearizirati i time još pojednostaviti zakone upravljanja. Potpuna linearizacija je ostvarena tako što je preko varijable  $u_1$  primijenjena feedforward kompenzacija

$$u_1 = (m+m_0)g + \tilde{u}_1 \tag{124}$$

Čime je iz izraza (115) eliminiran član  $(m+m_0)g$  i zatim se dobiva

$$(m + m_0)\ddot{y} = \tilde{u}_1$$

Nakon uvrštavanja (124) u (114)-(117) s pretpostavkom da je  $\tilde{u}_1$  jako mali u odnosu na  $(m + m_0)g$ , eliminirani su i članovi  $\beta_1\tilde{u}_1 \cong 0$ ,  $\alpha_1\tilde{u}_1 \cong 0$ , te je dobiven potpuno linearizirani sustav

$$(m + m_0)\ddot{x} - m_0L\ddot{\alpha} = (m + m_0)g\beta \quad (125)$$

$$(m + m_0)\ddot{y} = \tilde{u}_1 \quad (126)$$

$$I\ddot{\beta} = u_2 \quad (127)$$

$$m_0L^2\ddot{\alpha} - m_0L\ddot{x} + m_0gL\alpha = 0 \quad (128)$$

Potpuna linearizacija sustava je provedena za slučaj kada je teret pasivno ovješeno te se dalje u radu upravljanje odnosi samo na taj slučaj. Sustav se zatim prikazuje u prostoru stanja gdje su odabrane varijable stanja  $\mathbf{x} = [x \ y \ \beta \ \alpha \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\beta} \ \dot{\alpha}]^T$  te je svaka jednačba modela izražena samo preko varijabli stanja, uz konstantu  $A_k$  radi lakšeg zapisa

$$A_k = g \left( 1 + \frac{m_0}{m} \right) \quad (129)$$

$$\ddot{x} = A_k\beta + (g - A_k)\alpha \quad (130)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{(m + m_0)}\tilde{u}_1 \quad (131)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{I}u_2 \quad (132)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{A_k}{L}\beta - \frac{A_k}{L}\alpha \quad (133)$$

Sustav prikazan u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (134)$$

Gdje je matrica koeficijenata  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (135)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_k & g - A_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_k}{L} & -\frac{A_k}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S matricom ulaza  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (136)$$

$$\mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m+m_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S upravljačkim vektorom  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$

### 3.3.4. Sinteza linearnog kvadratičnog regulatora

Nakon provođenja potpune linearizacije, na sustav je provedena sinteza linearnog kvadratičnog regulatora (LQR). Sinteza je provedena u slučaju kada su željena stanja konstanta  $x_d = konst.$ ,  $y_d = konst.$ , odnosno letjelica s teretom mora doći do željene pozicije bez zadane trajektorije. U ovom slučaju kriterij je minimizirati njihanje tereta to jest dovesti kut  $\alpha$  u nulu te također i minimizirati pogrešku između varijabli  $e_x = x - x_d$ ,  $e_y = y - y_d$ . Izvodi se zakon upravljanja

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (137)$$

Gdje se matrica pojačanja  $\mathbf{K}$  dobije preko MATLAB-ove funkcije

$$\mathbf{K} = lqr(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) \quad (138)$$

Gdje je matrica koeficijenata  $\mathbf{A}$  (135), matrica  $\mathbf{B}$  (136), matrica  $\mathbf{Q}$  je dijagonalna pozitivna matrica dimenzija 8x8, dok je matrica  $\mathbf{R}$  dijagonalna pozitivna matrica dimenzija 2x2. Odabir matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  te dobivena matrica  $\mathbf{K}$  je prikazana u sljedećem poglavlju kod provedenih simulacija.

### 3.3.5. Metoda eksterne linearizacije potpuno lineariziranog sustava

U prethodnom dijelu je prikazana sinteza LQR koji ima konstanta željena stanja. Za slijeđenje vremenski promjenjive referente trajektorije se provodi metoda eksterne linearizacije na novom pojednostavljenom modelu (130)-(133). Postupak izvođenja upravljačkih varijabli je isti kao u dijelu 3.3.2.. Upravljanje je podijeljeno na dva dijela, regulacija pomaka u smjeru  $y$  te regulacija pomaka u smjeru  $x$  preko kuta  $\beta$ .

3.3.5.1. Regulacija pomaka u smjeru  $y$ 

Upravljačka varijabla  $u_1$  je definirana tako da regulira  $y$  varijablu. Zadana je proizvoljna trajektorija ovisna o vremenu koju je potrebno slijediti. Pogreška je  $e_y = y - y_d(t)$  uz njene derivacije (96) i dinamiku  $\ddot{e}_y + k_{y1}\dot{e}_y + k_{y0}e_y = 0$  gdje su  $k_{y1}, k_{y0}$  pozitivna pojačanja. Konačni izraz za upravljačku varijablu

$$\tilde{u}_1 = (m + m_0)(\ddot{y}_d - k_{y1}\dot{e}_y - k_{y0}e_y) \quad (139)$$

3.3.5.2. Regulacija pomaka u smjeru  $x$  i kuta  $\alpha$ 

Pomoću varijable  $u_2$  je regulirana varijabla  $x$ . S obzirom da je sustav podaktuiran, pomoću iste varijable je reguliran i kut njihanja tereta te kut zakreta. Prvo se uvrstio izraz (133) u (131)

$$\ddot{x} = A_k\beta + (g - A_k)\alpha \quad (140)$$

Zatim je dva puta provedena derivacija izraza (140)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A_k\dot{\beta} + (g - A_k)\dot{\alpha} \\ x^{(4)} &= A_k\ddot{\beta} + (g - A_k)\ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (141)$$

Kod uvrštavanja (132) u (141) se pojavljuje varijabla  $u_2$  nakon čega se izrazio

$$x^{(4)} = (g - A_k)\left(\frac{A_k}{L}\beta - \frac{A_k}{L}\alpha\right) + \frac{A_k}{I}u_2 \quad (142)$$

Za pogrešku  $e_x = x - x_d(t)$  su derivacije (111) i dinamika pogreške  $e_x^{(4)} + k_{x3}\ddot{e}_x + k_{x2}\dot{e}_x + k_{x1}\dot{e}_x + k_{x0}e_x = 0$  gdje su  $k_{x3}, k_{x2}, k_{x1}, k_{x0}$  pozitivna pojačanja. Druga i treća derivacije pogreške se definiraju

$$\begin{aligned} \ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_d = A_k\beta + (g - A_k)\alpha - \ddot{x}_d \\ \ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_d = A_k\dot{\beta} + (g - A_k)\dot{\alpha} - \ddot{x}_d \end{aligned} \quad (143)$$

Iz (143) se vidi kako pojačanja  $k_{x3}, k_{x2}$  djeluju i na kutove  $\beta, \alpha$  i njihove brzine, dok  $k_{x1}, k_{x0}$  djeluju samo na grešku varijable  $x$  i njene brzine. Nakon uvrštavanja se dobila upravljačka varijabla

$$u_2 = \frac{I}{A_k}\left[x_d^{(4)} - k_{x3}\ddot{e}_x - k_{x2}\dot{e}_x - k_{x1}\dot{e}_x - k_{x0}e_x - (g - A_k)\left(\frac{A_k}{L}\beta - \frac{A_k}{L}\alpha\right)\right], \quad (144)$$



### 3.4. Upravljanje prijenosom tereta primjenom dviju autonomnih letjelica

Na sustavu dviju letjelica koje prenose teret je provedena sinteza linearnog kvadratičnog regulatora (LQR). Sinteza je provedena na lineariziranom modelu sustava (54)-(59). Najprije su kompenzirani konstanti članovi utjecaja gravitacije na sustav. To je učinjeno tako što su definirane upravljačke varijable [14]

$$u_1 = mg \frac{\sin(\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{10} - \beta_{10})} + \tilde{u}_1 \quad (145)$$

$$u_2 = mg \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{20} - \beta_{20})} + \tilde{u}_2 \quad (146)$$

Kako je cilj da letjelice održavaju jednak kut između tereta i njih, postavljen je uvjet  $\alpha_{20} = -\alpha_{10}$ . Zato što je druga letjelica na suprotnoj strani tereta, kut  $\alpha_2$  je negativan. Zbog uvjeta jednakih kutova se dobije i  $\beta_{20} = -\beta_{10}$  nakon čega se sustav može pojednostaviti,

izražen preko varijabli stanja  $\mathbf{x} = [x_0 \ y_0 \ \tilde{\beta}_1 \ \tilde{\beta}_2 \ \tilde{\alpha}_1 \ \tilde{\alpha}_2 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{\tilde{\beta}}_1 \ \dot{\tilde{\beta}}_2 \ \dot{\tilde{\alpha}}_1 \ \dot{\tilde{\alpha}}_2]^T$ .

Prije svega su uvedene oznake radi kraćeg i lakšeg zapisa  $\alpha_{10} \equiv \alpha$ ,  $\beta_{10} \equiv \beta$ ,  $\cos \equiv c$ ,  $\sin \equiv s$ , te

$$N_c = M - 2m \cos^2(\alpha), \quad N_s = M - 2m \sin^2(\alpha), \quad (147)$$

I konačne jednadžbe pojednostavljenog sustava su

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 = & \frac{mgs(\alpha)(c(\beta) - c(\alpha)c(\alpha - \beta))}{N_c s(\alpha - \beta)} \tilde{\beta}_1 + \frac{mgs(\alpha)(c(\beta) - c(\alpha)c(\alpha - \beta))}{N_c s(\alpha - \beta)} \tilde{\beta}_2 + \\ & + \frac{mgc(\alpha)s(\beta)}{N_c s(\alpha - \beta)} \tilde{\alpha}_1 + \frac{mgc(\alpha)s(\beta)}{N_c s(\alpha - \beta)} \tilde{\alpha}_2 + \frac{c(\alpha)s(\alpha - \beta) + s(\beta)}{N_c} \tilde{u}_1 - \\ & - \frac{c(\alpha)s(\alpha - \beta) + s(\beta)}{N_c} \tilde{u}_2, \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 = & \frac{mgs(\alpha)(s(\alpha)c(\alpha - \beta) - s(\beta))}{N_s s(\alpha - \beta)} \tilde{\beta}_1 - \frac{mgs(\alpha)(s(\alpha)c(\alpha - \beta) - s(\beta))}{N_s s(\alpha - \beta)} \tilde{\beta}_2 - \\ & - \frac{mgs(\alpha)s(\beta)}{N_s s(\alpha - \beta)} \tilde{\alpha}_1 + \frac{mgs(\alpha)s(\beta)}{N_s s(\alpha - \beta)} \tilde{\alpha}_2 + \frac{c(\beta) - s(\alpha)s(\alpha - \beta)}{N_s} \tilde{u}_1 + \\ & + \frac{c(\beta) - s(\alpha)s(\alpha - \beta)}{N_s} \tilde{u}_2 \end{aligned} \quad (149)$$

$$\ddot{\tilde{\beta}}_1 = \frac{1}{I} u_3, \quad (150)$$

$$\ddot{\tilde{\beta}}_2 = \frac{1}{I} u_4, \quad (151)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{\alpha}}_1 = & \frac{Mm_0gs(\alpha)c(\alpha-\beta)+2m^2gs^2(\alpha)c(\alpha)s(\alpha+\beta)}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\beta}_1 + \\
& + \frac{2m^2gs^2(\alpha)c(\alpha)s(\alpha-\beta)+Mmgs(\alpha)(c(\alpha-\beta)(c^2(\alpha)-s^2(\alpha))-c(\alpha+\beta))}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\beta}_2 + \\
& + \frac{Mgs(\beta)(m-M)}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\alpha}_1 + \frac{Mmgs(\beta)(s^2(\alpha)-c^2(\alpha))}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\alpha}_2 + \\
& + \frac{(-Mm_0s(\alpha-\beta)-2m^2s(\alpha)c(\alpha)c(\alpha+\beta))}{mLN_cN_s} \tilde{u}_1 + \\
& + \frac{Ms(\alpha-\beta)(c^2(\alpha)-s^2(\alpha))+Ms(\alpha+\beta)-2ms(\alpha)c(\alpha)c(\alpha-\beta)}{LN_cN_s} \tilde{u}_2
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{\alpha}}_2 = & \frac{2m^2gs^2(\alpha)c(\alpha)s(\alpha-\beta)+Mmgs(\alpha)(c(\alpha-\beta)(c^2(\alpha)-s^2(\alpha))-c(\alpha+\beta))}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\beta}_1 + \\
& + \frac{Mm_0gs(\alpha)c(\alpha-\beta)+2m^2gs^2(\alpha)c(\alpha)s(\alpha+\beta)}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\beta}_2 + \\
& + \frac{Mmgs(\beta)(s^2(\alpha)-c^2(\alpha))}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\alpha}_1 + \frac{Mgs(\beta)(m-M)}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\alpha}_2 - \\
& - \frac{Ms(\alpha-\beta)(c^2(\alpha)-s^2(\alpha))+Ms(\alpha+\beta)-2ms(\alpha)c(\alpha)c(\alpha-\beta)}{LN_cN_s} \tilde{u}_1 - \\
& - \frac{(-Mm_0s(\alpha-\beta)-2m^2s(\alpha)c(\alpha)c(\alpha+\beta))}{mLN_cN_s} \tilde{u}_2
\end{aligned} \tag{153}$$

Radi kompaktnijeg prikaza u prostoru stanja uvedene su oznake

$$\begin{aligned}
A_{x1} = & \frac{mgs(\alpha)(c(\beta)-c(\alpha)c(\alpha-\beta))}{N_c s(\alpha-\beta)}, \quad A_{x2} = \frac{mgc(\alpha)s(\beta)}{N_c s(\alpha-\beta)}, \\
B_x = & \frac{c(\alpha)s(\alpha-\beta)+s(\beta)}{N_c}, \\
A_{y1} = & \frac{mgs(\alpha)(s(\alpha)c(\alpha-\beta)-s(\beta))}{N_s s(\alpha-\beta)} \tilde{\beta}_1, \quad A_{y2} = \frac{-mgs(\alpha)s(\beta)}{N_s s(\alpha-\beta)}, \\
B_y = & \frac{c(\beta)-s(\alpha)s(\alpha-\beta)}{N_s}, \\
A_{\alpha1} = & \frac{Mm_0gs(\alpha)c(\alpha-\beta)+2m^2gs^2(\alpha)c(\alpha)s(\alpha+\beta)}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)}, \\
A_{\alpha2} = & \frac{2m^2gs^2(\alpha)c(\alpha)s(\alpha-\beta)+Mmgs(\alpha)(c(\alpha-\beta)(c^2(\alpha)-s^2(\alpha))-c(\alpha+\beta))}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)}, \\
A_{\alpha3} = & \frac{Mgs(\beta)(m-M)}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)}, \quad A_{\alpha4} = \frac{Mmgs(\beta)(s^2(\alpha)-c^2(\alpha))}{LN_cN_s s(\alpha-\beta)},
\end{aligned} \tag{154}$$

$$B_{\alpha 1} = \frac{(-Mm_0s(\alpha - \beta) - 2m^2s(\alpha)c(\alpha)c(\alpha + \beta))}{mLN_cN_s},$$

$$B_{\alpha 2} = \frac{Ms(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) + Ms(\alpha + \beta) - 2ms(\alpha)c(\alpha)c(\alpha - \beta)}{LN_cN_s}$$

Sustav prikazan u prostoru stanja s matricom koeficijenata **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (155)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{x1} & A_{x1} & A_{x2} & A_{x2} \\ 0 & 0 & A_{y1} & -A_{y1} & A_{y2} & -A_{y2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\alpha 1} & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 3} & A_{\alpha 4} \\ 0 & 0 & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 1} & A_{\alpha 4} & A_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$

I s matricom ulaza **B**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ B_x & -B_x & 0 & 0 \\ B_y & B_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I} \\ B_{\alpha 1} & B_{\alpha 2} & 0 & 0 \\ -B_{\alpha 2} & -B_{\alpha 1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (156)$$

Gdje zakon upravljanja glasi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (157)$$

I matrica pojačanja se dobije preko MATLAB-ove funkcije

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

### 3.4.1. Sinteza LQR-a na modelu s poremećajem

Model bez poremećaja odnosno bez konstantnih članova u jednadžbama sustava je dobiven preko varijabli izvedenih iz statičke ravnoteže sustava. S obzirom na odabir upravljačkih varijabli moguće je kompenzirati utjecaj konstantnih gravitacijskih članova u sustavu. U ovom dijelu će biti prikazani modeli kada nisu korištene upravljačke varijable dobivene preko

uvjeta statičke ravnoteže. Prvo će biti izveden model sa stacionarnim kutovima  $\beta$  i  $\alpha$ , ali upravljačke varijable su odabrane tako da kompenziraju gravitacijske sile samo u y smjeru. Drugi izvedeni model je izveden po uzoru na model s jednom letjelicom. Linearizacija je provedena oko stacionarnih kutova  $\alpha$ , ali ovaj puta i uz pretpostavku malih kutova zakreta letjelice  $\beta$ .

### 3.4.1.1. Sinteza LQR-a na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\beta$ i $\alpha$

U prošlom slučaju su upravljačke varijable izvedene iz statičkog slučaja ravnoteže sustava te tako potpuno uklonjen utjecaj konstantnih gravitacijskih sila na sustav. Ako se kao pretpostavka uzme da se pomoću upravljačkih varijabli kompenzira samo ukupna masa sustava, odnosno gravitacija sustava u y smjeru, za upravljačke varijable se odabiru

$$u_1 = \frac{1}{2}Mg + \tilde{u}_1 \quad (158)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}Mg + \tilde{u}_2 \quad (159)$$

Varijable (158) i (159) su uvrštene u sustav (54)-(59) skupa s uvjetom  $\alpha_{20} = -\alpha_{10}$  iz kojeg se dobije i  $\beta_{20} = -\beta_{10}$ . Radi kraćeg i kompaktijeg zapisa su definirane oznake  $\alpha_{10} = \alpha$ ,  $\beta_{10} = \beta$ ,  $\cos = c$ ,  $\sin = s$ , kao i

$$N_c = M - 2m\cos^2(\alpha), \quad N_s = M - 2m\sin^2(\alpha), \quad (160)$$

Jednadžbe sustava su tada izražene preko sljedećih izraza

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 = & \frac{Mgc(\beta) - Mgc(\alpha)c(\alpha - \beta)}{2N_c} \tilde{\beta}_1 + \frac{Mgc(\beta) - Mgc(\alpha)c(\alpha - \beta)}{2N_c} \tilde{\beta}_2 - \\ & - \frac{mgc^2(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{2}Mgc(\alpha)c(\alpha - \beta)}{N_c} \tilde{\alpha}_1 - \\ & \frac{mgc^2(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{2}Mgc(\alpha)c(\alpha - \beta)}{N_c} \tilde{\alpha}_2 + \frac{c(\alpha)s(\alpha - \beta) + s(\beta)}{N_c} \tilde{u}_1 - \\ & - \frac{c(\alpha)s(\alpha - \beta) + s(\beta)}{N_c} \tilde{u}_2, \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_0 = & \frac{Mgs(\alpha)c(\alpha - \beta) - Mgs(\beta)}{2N_s} \tilde{\beta}_1 - \frac{Mgs(\alpha)c(\alpha - \beta) - Mgs(\beta)}{2N_s} \tilde{\beta}_2 + \\
& + \frac{mgs(\alpha)c(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{2}Mgs(\alpha)c(\alpha - \beta)}{N_s} \tilde{\alpha}_1 - \\
& - \frac{mgs(\alpha)c(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{2}Mgs(\alpha)c(\alpha - \beta)}{N_s} \tilde{\alpha}_2 + \frac{c(\beta) - s(\alpha)s(\alpha - \beta)}{N_s} \tilde{u}_1 + \\
& + \frac{c(\beta) - s(\alpha)s(\alpha - \beta)}{N_s} \tilde{u}_2 + \frac{2mgs^2(\alpha) - Mgs(\alpha)s(\alpha - \beta) - Mg + Mgc(\beta)}{N_s}
\end{aligned} \tag{162}$$

$$\ddot{\beta}_1 = \frac{1}{I} u_3, \tag{163}$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{1}{I} u_4, \tag{164}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_1 = & \frac{M^2 m_0 gc(\alpha - \beta) + 2Mm^2 gs(\alpha)c(\alpha)s(\alpha + \beta)}{2mLN_c N_s} \tilde{\beta}_1 + \\
& + \frac{M^2 gc(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) - M^2 gc(\alpha + \beta) + 2Mmgs(\alpha)c(\alpha)s(\alpha - \beta)}{2LN_c N_s} \tilde{\beta}_2 + \\
& + \frac{(M - m)(2Mmgc(\alpha)c(\beta) - M^2 gc(\alpha - \beta))}{2mLN_c N_s} \tilde{\alpha}_1 + \\
& + \frac{(c^2(\alpha) - s^2(\alpha))(2Mmgc(\alpha)c(\beta) - M^2 gc(\alpha - \beta))}{2LN_c N_s} \tilde{\alpha}_2 + \\
& + \frac{(-Mm_0s(\alpha - \beta) - 2m^2s(\alpha)c(\alpha)c(\alpha + \beta))}{mLN_c N_s} \tilde{u}_1 + \\
& + \frac{Ms(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) + Ms(\alpha + \beta) - 2ms(\alpha)c(\alpha)c(\alpha - \beta)}{LN_c N_s} \tilde{u}_2 + \\
& + \frac{Mg(2ms(\alpha)c(\beta) - Ms(\alpha - \beta))}{2mLN_s}
\end{aligned} \tag{165}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_2 = & \frac{M^2 gc(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) - M^2 gc(\alpha + \beta) + 2Mmgs(\alpha)c(\alpha)s(\alpha - \beta)}{2LN_c N_s} \tilde{\beta}_1 + \\
& + \frac{M^2 m_0 gc(\alpha - \beta) + 2Mm^2 gs(\alpha)c(\alpha)s(\alpha + \beta)}{2mLN_c N_s} \tilde{\beta}_2 + \\
& + \frac{(c^2(\alpha) - s^2(\alpha))(2Mmgc(\alpha)c(\beta) - M^2 gc(\alpha - \beta))}{2LN_c N_s} \tilde{\alpha}_1 + \\
& + \frac{(M - m)(2Mmgc(\alpha)c(\beta) - M^2 gc(\alpha - \beta))}{2mLN_c N_s} \tilde{\alpha}_2 - \\
& - \frac{Ms(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) + Ms(\alpha + \beta) - 2ms(\alpha)c(\alpha)c(\alpha - \beta)}{LN_c N_s} \tilde{u}_1 - \\
& - \frac{(-Mm_0s(\alpha - \beta) - 2m^2s(\alpha)c(\alpha)c(\alpha + \beta))}{mLN_c N_s} \tilde{u}_2 - \\
& - \frac{Mg(2ms(\alpha)c(\beta) - Ms(\alpha - \beta))}{2mLN_s}
\end{aligned} \tag{166}$$

Za prikaz sustava u prostoru stanja uvedene su oznake

$$\begin{aligned}
A_{x1} &= \frac{Mgc(\beta) - Mgc(\alpha)c(\alpha - \beta)}{2N_c}, \\
A_{x2} &= -\frac{mgc^2(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{2}Mgc(\alpha)c(\alpha - \beta)}{N_c}, \\
B_x &= \frac{c(\alpha)s(\alpha - \beta) + s(\beta)}{N_c}, \\
A_{y1} &= \frac{Mgs(\alpha)c(\alpha - \beta) - Mgs(\beta)}{2N_s}, \\
A_{y2} &= \frac{mgs(\alpha)c(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{2}Mgs(\alpha)c(\alpha - \beta)}{N_s}, \\
B_y &= \frac{c(\beta) - s(\alpha)s(\alpha - \beta)}{N_s}, \\
d_y &= \frac{2mgs^2(\alpha) - Mgs(\alpha)s(\alpha - \beta) - Mg + Mgc(\beta)}{N_s}, \\
A_{\alpha 1} &= \frac{M^2 m_0 gc(\alpha - \beta) + 2Mm^2 gs(\alpha)c(\alpha)s(\alpha + \beta)}{2mLN_c N_s}, \\
A_{\alpha 2} &= \frac{M^2 gc(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) - M^2 gc(\alpha + \beta) + 2Mmgs(\alpha)c(\alpha)s(\alpha - \beta)}{2LN_c N_s}
\end{aligned} \tag{167}$$

$$A_{\alpha 3} = \frac{(M - m)(2Mmgc(\alpha)c(\beta) - M^2gc(\alpha - \beta))}{2mLN_cN_s},$$

$$A_{\alpha 4} = \frac{(c^2(\alpha) - s^2(\alpha))(2Mmgc(\alpha)c(\beta) - M^2gc(\alpha - \beta))}{2LN_cN_s}$$

$$B_{\alpha 1} = \frac{(-Mm_0s(\alpha - \beta) - 2m^2s(\alpha)c(\alpha)c(\alpha + \beta))}{mLN_cN_s}$$

$$B_{\alpha 2} = \frac{Ms(\alpha - \beta)(c^2(\alpha) - s^2(\alpha)) + Ms(\alpha + \beta) - 2ms(\alpha)c(\alpha)c(\alpha - \beta)}{LN_cN_s},$$

$$d_\alpha = \frac{Mg(2ms(\alpha)c(\beta) - Ms(\alpha - \beta))}{2mLN_s}$$

Za razliku od prethodnog slučaja, sada se u jednadžbama sustava javljaju konstantni članovi koji se mogu smatrati kao konstanti poremećaj u sustavu. Prikaz sustava u prostoru stanja je

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{d} \quad (168)$$

Gdje je matrica  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (169)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{x1} & A_{x1} & A_{x2} & A_{x2} \\ 0 & 0 & A_{y1} & -A_{y1} & A_{y2} & -A_{y2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\alpha 1} & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 3} & A_{\alpha 4} \\ 0 & 0 & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 1} & A_{\alpha 4} & A_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$

I matrica  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ B_x & -B_x & 0 & 0 \\ B_y & B_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I} \\ B_{\alpha 1} & B_{\alpha 2} & 0 & 0 \\ -B_{\alpha 2} & -B_{\alpha 1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (170)$$

Uz vektor  $\mathbf{d}$  koji je konstanti poremećaj i matricu  $\mathbf{B}_d$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (171)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_y & d_\alpha \end{bmatrix}^T, \quad (172)$$

$$d_y = \frac{2mgs^2(\alpha) - Mgs(\alpha)s(\alpha - \beta) - Mg + Mgc(\beta)}{N_s},$$

$$d_\alpha = \frac{Mg(2ms(\alpha)c(\beta) - Ms(\alpha - \beta))}{2mLN_s}$$

Upravljački zakon glasi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} + \mathbf{K}_d \mathbf{d} \quad (173)$$

### 3.4.1.2. Sinteza LQR-a na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\alpha$ te malim kutovima zakreta $\beta$

Za slučaj kada se sustav (37)-(42) linearizira samo oko stacionarnih kutova  $\alpha$  i uz pretpostavku malih kutova  $\beta$  to jest  $\sin(\beta) \sim \beta$ ,  $\cos(\beta) \sim 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{10} + \tilde{\alpha}_1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20} + \tilde{\alpha}_2$  dobiven je sustav

$$M\ddot{x}_0 + mL\cos(\alpha_{10})\ddot{\tilde{\alpha}}_1 + mL\cos(\alpha_{20})\ddot{\tilde{\alpha}}_2 = u_1\beta_1 + u_2\beta_2 \quad (174)$$

$$M\ddot{y}_0 - mL\sin(\alpha_{10})\ddot{\tilde{\alpha}}_1 - mL\sin(\alpha_{20})\ddot{\tilde{\alpha}}_2 + Mg = u_1 + u_2 \quad (175)$$

$$\ddot{\beta}_1 = \frac{1}{I}u_3, \quad (176)$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{1}{I}u_4, \quad (177)$$

$$mL^2\ddot{\tilde{\alpha}}_1 + mL\cos(\alpha_{10})\ddot{x}_0 - mL\sin(\alpha_{10})\ddot{y}_0 - mL\cos(\alpha_{10})\ddot{y}_0\tilde{\alpha}_1 - mgL\cos(\alpha_{10})\tilde{\alpha}_1 - mgL\sin(\alpha_{10}) = T_1L(-\sin(\alpha_{10}) - \cos(\alpha_{10})\tilde{\alpha}_1 + \cos(\alpha_{10})\beta_1) \quad (178)$$

$$mL^2\ddot{\tilde{\alpha}}_2 + mL\cos(\alpha_{20})\ddot{x}_0 - mL\sin(\alpha_{20})\ddot{y}_0 - mL\cos(\alpha_{20})\ddot{y}_0\tilde{\alpha}_2 - mgL\cos(\alpha_{20})\tilde{\alpha}_2 - mgL\sin(\alpha_{20}) = T_2L(-\sin(\alpha_{20}) - \cos(\alpha_{20})\tilde{\alpha}_2 + \cos(\alpha_{20})\beta_2) \quad (179)$$

Pod uvjetom da je  $\alpha_{20} = -\alpha_{10}$  i odabirom upravljačkih varijabli po uzoru na sustav s jednom letjelicom

$$u_1 = \frac{1}{2}Mg + \tilde{u}_1 \quad (180)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}Mg + \tilde{u}_2 \quad (181)$$



I konačno izvedene jednadžbe sustava su

$$\ddot{x}_0 = \frac{Mg \sin^2(\alpha_{10})}{2N_c} \tilde{\beta}_1 + \frac{Mg \sin^2(\alpha_{10})}{2N_c} \tilde{\beta}_2 + \frac{m_0 g \cos^2(\alpha_{10})}{2N_c} \tilde{\alpha}_1 + \frac{m_0 g \cos^2(\alpha_{10})}{2N_c} \tilde{\alpha}_2 + \frac{\sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{N_c} \tilde{u}_1 - \frac{\sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{N_c} \tilde{u}_2, \quad (182)$$

$$\ddot{y}_0 = \frac{Mg \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{2N_s} \tilde{\beta}_1 - \frac{Mg \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{2N_s} \tilde{\beta}_2 - \frac{m_0 g \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{2N_s} \tilde{\alpha}_1 + \frac{m_0 g \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{2N_s} \tilde{\alpha}_2 + \frac{\cos^2(\alpha_{10})}{N_s} \tilde{u}_1 + \frac{\cos^2(\alpha_{10})}{N_s} \tilde{u}_2 - \frac{m_0 g \sin^2(\alpha_{10})}{N_s} \tilde{u}_1, \quad (183)$$

$$\ddot{\beta}_1 = \frac{1}{I} u_3, \quad (184)$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{1}{I} u_4, \quad (185)$$

$$\ddot{\alpha}_1 = \frac{Mm^2 g \sin^2(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10}) + M^2 \frac{m_0}{2} g \cos(\alpha_{10})}{mLN_c N_s} \tilde{\beta}_1 - \frac{Mm_0 g \sin^2(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{LN_c N_s} \tilde{\beta}_2 + \frac{Mm_0 g \cos(\alpha_{10})(m-M)}{2mLN_c N_s} \tilde{\alpha}_1 + \frac{Mm_0 g (\sin^2(\alpha_{10}) - \cos^2(\alpha_{10}))}{2LN_c N_s} \tilde{\alpha}_2 + \frac{\sin(\alpha_{10})(2Mm - M^2 - 2m^2 \cos^2(\alpha_{10}))}{mLN_c N_s} \tilde{u}_1 + \frac{2 \sin(\alpha_{10}) \cos^2(\alpha_{10})(M-m)}{LN_c N_s} \tilde{u}_2 - \frac{Mm_0 g \sin(\alpha_{10})}{2mLN_s} \tilde{u}_2, \quad (186)$$

$$\ddot{\alpha}_2 = -\frac{Mm_0 g \sin^2(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{LN_c N_s} \tilde{\beta}_1 + \frac{Mm^2 g \sin^2(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10}) + M^2 \frac{m_0}{2} g \cos(\alpha_{10})}{mLN_c N_s} \tilde{\beta}_2 + \frac{Mm_0 g (\sin^2(\alpha_{10}) - \cos^2(\alpha_{10}))}{2LN_c N_s} \tilde{\alpha}_1 + \frac{Mm_0 g \cos(\alpha_{10})(m-M)}{2mLN_c N_s} \tilde{\alpha}_2 + \frac{2 \sin(\alpha_{10}) \cos^2(\alpha_{10})(M-m)}{LN_c N_s} \tilde{u}_1 - \frac{\sin(\alpha_{10})(2Mm - M^2 - 2m^2 \cos^2(\alpha_{10}))}{mLN_c N_s} \tilde{u}_2 + \frac{Mm_0 g \sin(\alpha_{10})}{2mLN_s} \tilde{u}_2, \quad (187)$$

Za prikaz sustava u prostoru stanja uvedene su oznake

$$A_{x1} = \frac{Mg \sin^2(\alpha_{10})}{2N_c}, \quad A_{x2} = \frac{m_0 g \cos^2(\alpha_{10})}{2N_c},$$

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{N_c}, \\
A_{y1} &= \frac{Mg \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{2N_s}, \quad A_{y2} = -\frac{m_0 g \sin(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{2N_s} \\
B_y &= \frac{\cos^2(\alpha_{10})}{N_s}, \\
d_y &= -\frac{m_0 g \sin^2(\alpha_{10})}{N_s}, \\
A_{\alpha 1} &= \frac{Mm^2 g \sin^2(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10}) + M^2 \frac{m_0}{2} g \cos(\alpha_{10})}{mLN_c N_s} \\
A_{\alpha 2} &= -\frac{Mm_0 g \sin^2(\alpha_{10}) \cos(\alpha_{10})}{LN_c N_s} \\
A_{\alpha 3} &= \frac{Mm_0 g \cos(\alpha_{10})(m - M)}{2mLN_c N_s}, \\
A_{\alpha 4} &= \frac{Mm_0 g (\sin^2(\alpha_{10}) - \cos^2(\alpha_{10}))}{2LN_c N_s} \\
B_{\alpha 1} &= \frac{\sin(\alpha_{10})(2Mm - M^2 - 2m^2 \cos^2(\alpha_{10}))}{mLN_c N_s} \\
B_{\alpha 2} &= \frac{2 \sin(\alpha_{10}) \cos^2(\alpha_{10})(M - m)}{LN_c N_s}, \\
d_\alpha &= -\frac{Mm_0 g \sin(\alpha_{10})}{2mLN_s}
\end{aligned} \tag{188}$$

I u ovim jednadžbama se javljaju konstantni članovi koji su također smatrani kao poremećaj.

Prikaz sustava u prostoru stanja s poremećajem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d \mathbf{d} \tag{189}$$

Gdje je matrica  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \tag{190}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{x1} & A_{x1} & A_{x2} & A_{x2} \\ 0 & 0 & A_{y1} & -A_{y1} & A_{y2} & -A_{y2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\alpha 1} & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 3} & A_{\alpha 4} \\ 0 & 0 & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 1} & A_{\alpha 4} & A_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$

I matrica **B**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ B_x & -B_x & 0 & 0 \\ B_y & B_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I} \\ B_{\alpha 1} & B_{\alpha 2} & 0 & 0 \\ -B_{\alpha 2} & -B_{\alpha 1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (191)$$

Uz vektor **d** koji je konstanti poremećaj i matricu **B<sub>d</sub>**

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (192)$$

$$\mathbf{d} = [d_y \quad d_\alpha]^T,$$

$$d_y = -\frac{m_0 g \sin^2(\alpha_{10})}{N_s}, \quad (193)$$

$$d_\alpha = -\frac{Mm_0 g \sin(\alpha_{10})}{2mLN_s}$$

Konačni zakon upravljanja glasi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_d \mathbf{d} \quad (194)$$

## 4. SIMULACIJSKI REZULTATI

U ovom poglavlju su opisani i prikazani rezultati simulacija provedeni na modelima i zakonima upravljanja koji su izvedeni u prethodnim poglavljima. Svi modeli i simulacije upravljanja su rađeni u programu Matlab. Parametri sustava koji su simulirani su jednaki za svako upravljanje, a to su masa letjelice  $m = 1$  kg, inercija letjelice  $I = 0,25$  kgm<sup>2</sup>, masa tereta  $m_0 = 0,5$  kg, duljina krutog štapa  $L = 0,5$  m i gravitacija  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Najprije su prikazani svi rezultati za simulacije provedene za prijenos tereta primjenom jedne letjelice te nakon toga su prikazani rezultati simulacija za prijenos tereta primjenom dviju letjelica. Sva simulirana upravljanja koja su provedena na lineariziranim modelima uspoređena su s originalnim, nelinearnim modelom.

### 4.1. Rezultati upravljanja prijenosa tereta primjenom autonomne letjelice

U ovom dijelu su prikazani rezultati upravljanja provedeni dvjema metodama: metodom eksterne linearizacije i sintezom LQR-a na sustavu s jednom letjelicom. Redom je implementirano upravljanje metodom eksterne linearizacije na modelu koji nije potpuno lineariziran, koji je u nastavku rada referiran kao bilinearan, i zatim su na potpuno lineariziranom modelu implementirane obje metode upravljanja.

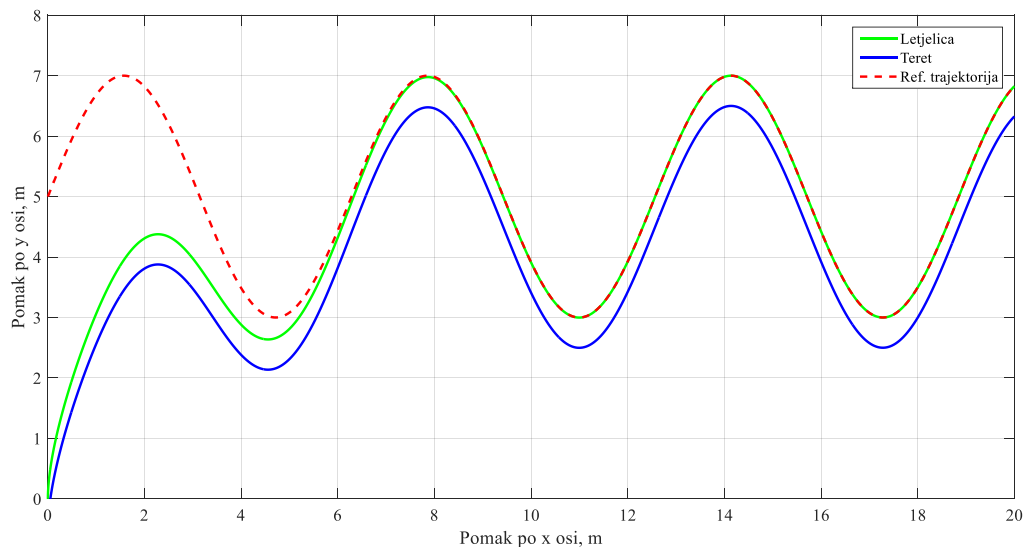
#### 4.1.1. Rezultati upravljanja primjenom metode eksterne linearizacije na bilinearnom modelu

Upravljanje na bilinearnom modelu je provedeno pomoću tri i dvije upravljačke varijable. U oba slučaja je cilj slijediti vremenski promjenjivu trajektoriju uz minimalno njihanje tereta. Zadana je proizvoljna referenta trajektorija s vrijednostima  $x_d = t$  i  $y_d = 5 + 2\sin(t)$ . U nastavku su rezultati simulacija ta dva modela.

##### 4.1.1.1. Rezultati upravljanja na modelu s tri upravljačke varijable

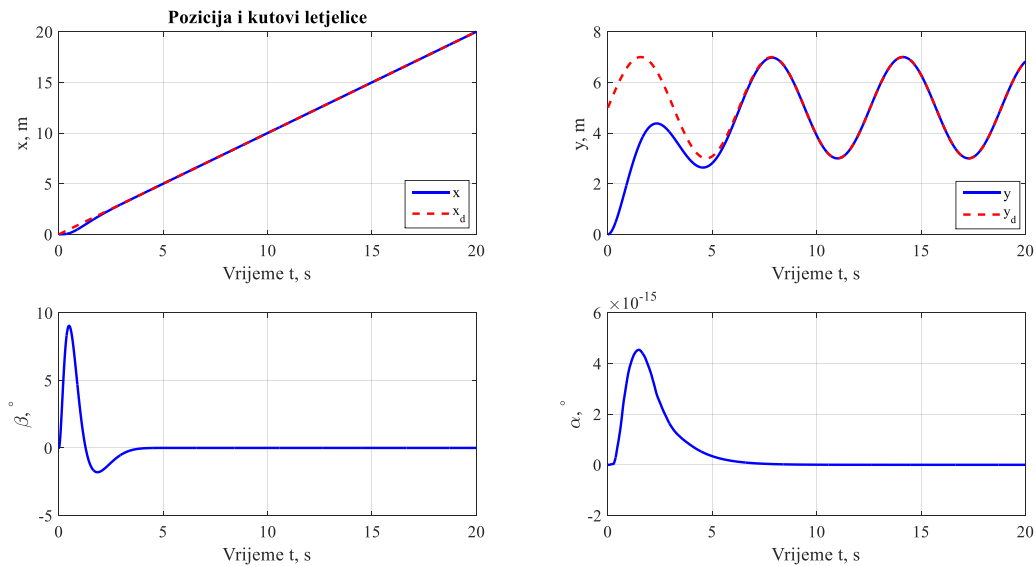
Simulacije su provedene za model sustava (25)-(28) i definirane zakone upravljanja za tri upravljačke varijable, (98), (113) i (104). Cilj upravljanja je, kako je već rečeno, slijeđenje vremenski promjenjive referentne trajektorije uz minimalni kut njihanja tereta  $\alpha_d = 0$ . Odabrani početni uvjeti sustava su nula to jest  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$  i brzine tih varijabli su nula. Pojačanja za zakone upravljanja su dobivena metodom podešavanja polova. Za  $u_1$  i  $u_3$  su pojačanja  $k_{y1} = 2$ ,  $k_{y0} = 1$  i  $k_{\alpha1} = 2$ ,  $k_{\alpha0} = 1$  koja su dobivena za željene jednostruke polove  $s = -1$ . Odabirom željenih polova  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -3$ ,  $s_3 = -4$ ,  $s_4 = -5$ , su dobivena pojačanja  $k_{x3} = 14$ ,

$k_{x2} = 71$ ,  $k_{x1} = 154$ ,  $k_{x0} = 120$  za varijablu  $u_2$ . Prikaz slijeđenja promjenjive trajektorije je na slici [Slika 3] gdje se ovaj upravljački zakon pokazao uspješan. Letjelica s teretom ulazi u željenu trajektoriju te ju dalje prati bez vidljive greške.



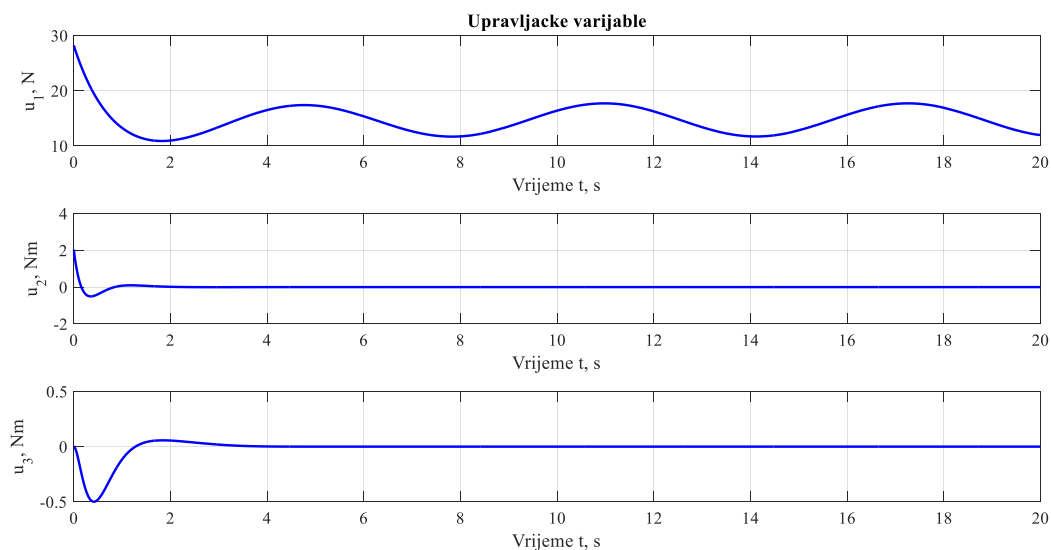
**Slika 3. Prikaz praćenja referentne trajektorije u XY ravnini za model s tri upravljačke varijable**

Zaseban prikaz varijabli stanja odnosno pozicije letjelice, kuta zakreta i kuta njihanja tereta je na slici [Slika 4]. Prikazana su uspješna slijeđenja referentne trajektorije  $x$  i  $y$  pozicije u vremenu. U vertikalnom smjeru letjelica počinje pratiti referencu oko 5 sekunde, kada bi se zahtijevao brži odziv, morala bi se povećati pojačanja  $k_{y1} = 2$ ,  $k_{y0} = 1$ . Većim iznosom pojačanja se dobiju i veći iznosi upravljačke varijable  $u_1$ , stoga se pojačanja odabiru u granicama varijable  $u_1$ . Za početni kut  $\alpha$  nula, njihanje tereta je zanemarivo, reda  $10^{-15}$  što predstavlja uspješno reguliranje kuta tereta. Kut zakreta  $\beta$  na početku simulacije ima skok do skoro 10 stupnjeva što se događa iz razloga jer je povezan s upravljanjem u smjeru  $x$  te tu dolazi do promjene kako bi letjelica mogla ići horizontalno. Varijable pozicije kao i kutovi su uspješno upravljani, pozicija prati željenu trajektoriju dok kutovi postaju nula.



**Slika 4. Pozicija letjelice i kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  za model s tri upravljačke varijable**

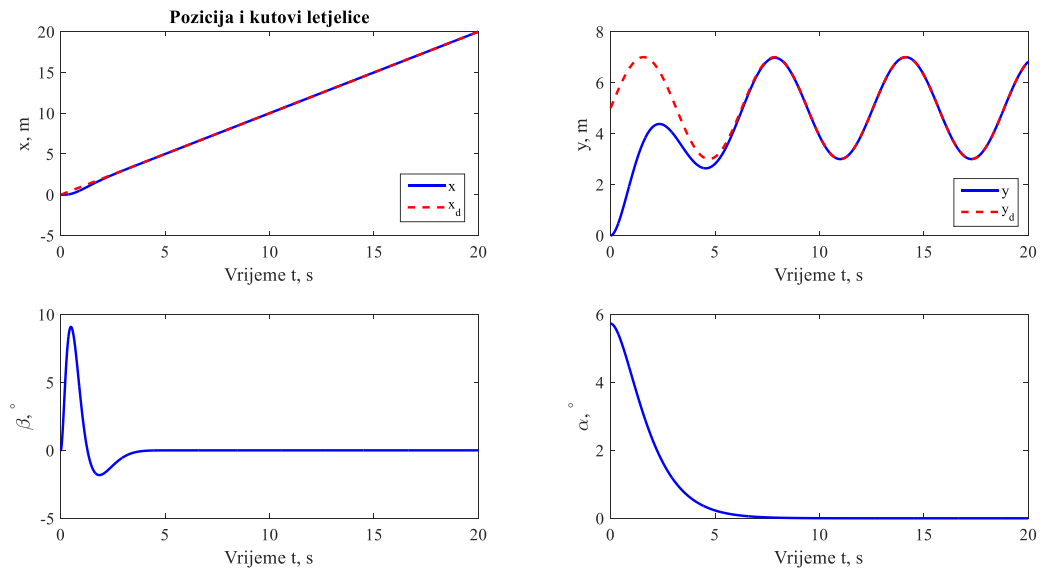
Prikaz tri upravljačke varijable su na slici [Slika 5] gdje su  $u_1$  sila potiska letjelice  $T$ ,  $u_2$  zakretni moment letjelice  $\tau$  i  $u_3$  upravljački moment tereta  $\tau_a$ .



**Slika 5. Upravljačke varijable za model s tri upravljačke varijable**

Upravljačka varijabla  $u_1$  koja je korištena za upravljanje u smjeru  $y$  se ponaša sinusoidno kao i trajektorija koju je potrebno slijediti. Upravljačka varijabla  $u_2$  upravlja odnosno regulira smjer  $x$  te kut zakreta letjelice i doseže vrijednost nula. Isto tako i varijabla  $u_3$  koja regulira kut njihanja postiže vrijednost nula, što je i cilj regulacije.

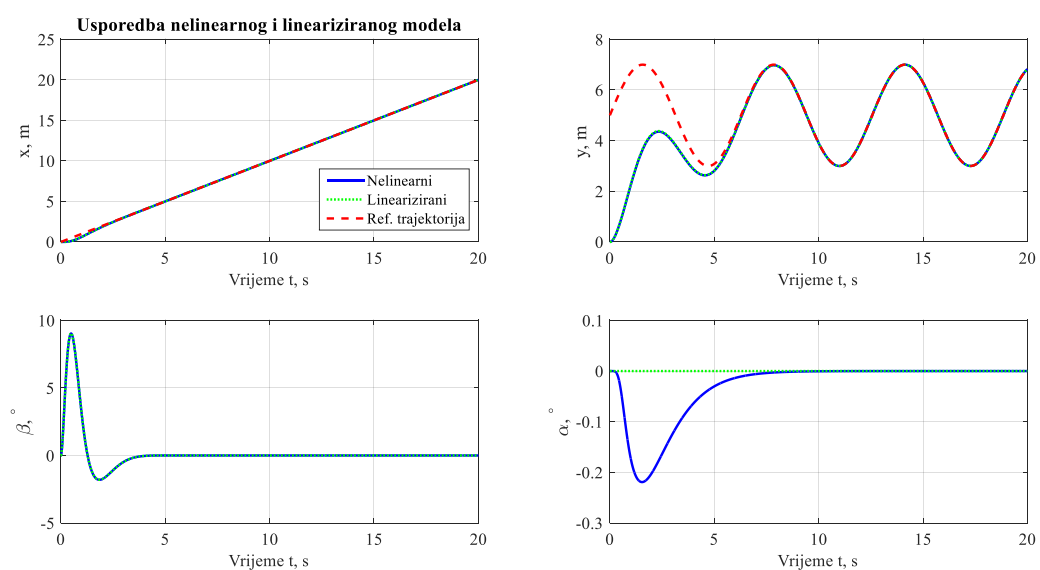
Kako je u slučaju kada je početni kut  $\alpha$  nula pokazano da njihanja praktički nema, taj kut se postavio na neki početni kut  $\alpha = 0.1$  rad ili približno 6 stupnjeva, kako bi se prikazalo dovođenje takvog kuta na nulu. Tada je prikaz pozicije letjelice i kutova na slici [Slika 6].



**Slika 6. Pozicija letjelice i kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  za model s tri upravljačke varijable i različite početne uvjete**

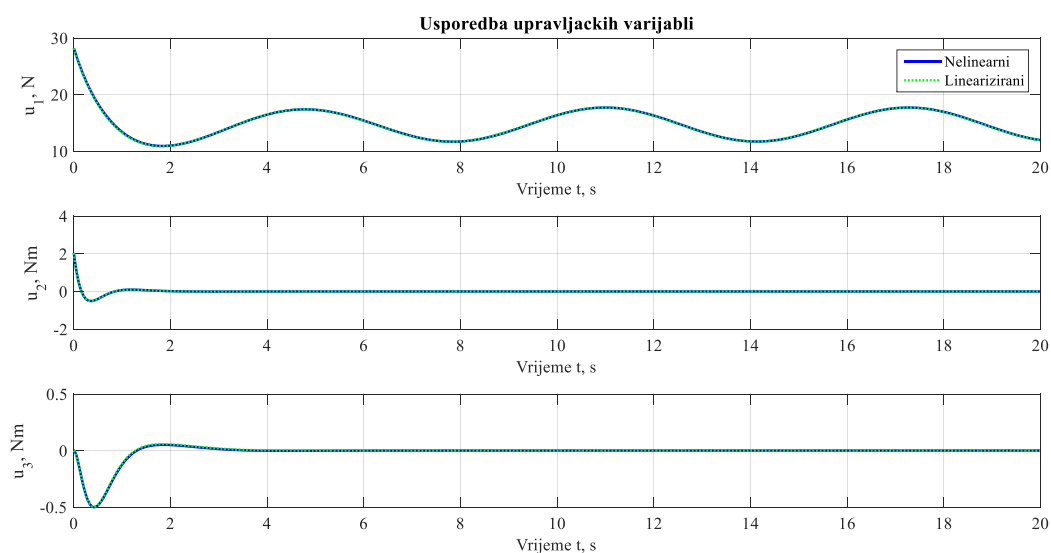
Kut  $\alpha$  je i u tom slučaju uspješno reguliran na vrijednost nula, bez oscilacija. Utjecaj direktnog upravljanja tereta s  $u_3$  rezultira s tim da se njihanje tereta lako uklanja iako se letjelica konstanto kreće.

Upravljanje sustava s tri upravljačke varijable se na bilinearnom modelu pokazalo uspješno, te je uspoređeno s nelinearnim modelom. Na nelinearni model su implementirani zakoni upravljanja dobiveni za bilinearni sustav s tri upravljačke varijable te su dobiveni sljedeći rezultati. Simulacije su provedene za iste početne uvjete i pojačanja kao kod bilinearnog modela.



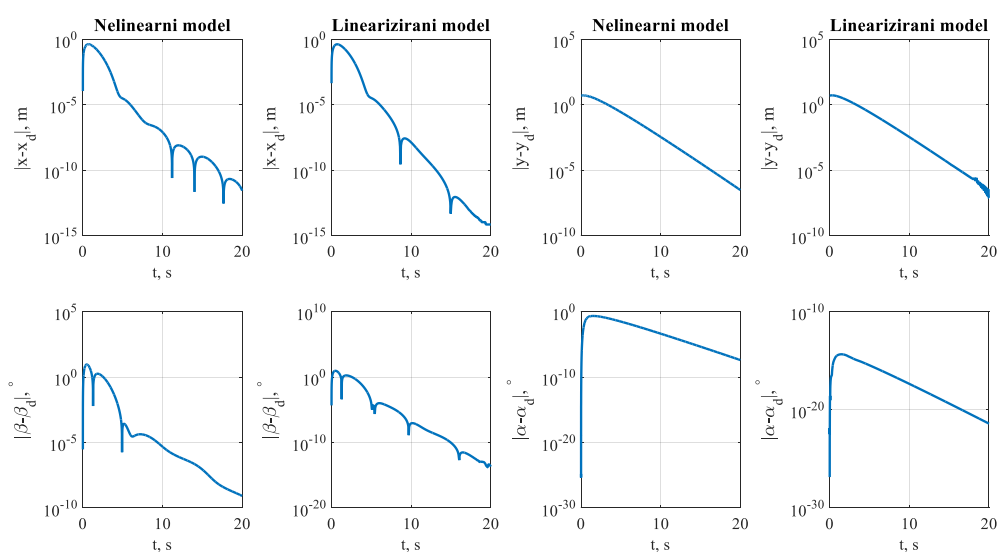
**Slika 7. Usporedba nelinearnog i bilinearnog modela s tri upravljačke varijable**

Na slici [Slika 7] se vidi preklapanje ponašanja varijabli nelinearnog i lineariziranog odnosno bilinearnog modela. Iako kut  $\beta$  u jednom trenutku dostiže skoro 10 stupnjeva što se ne slaže s pretpostavkom o malim kutovima, isto to se događa i u nelinearnom modelu. Razlika u nelinearnom modelu je kada kut  $\alpha$  ide do vrijednosti  $-0.2$  stupnjeva, što je zanemarivo. Usporedba upravljačkih varijabli [Slika 8] također je pokazala jednako ponašanje upravljačkih varijabli i poklapanje u iznosu nelinearnog modela s bilinearnim modelom.



**Slika 8. Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i bilinearnog modela s tri upravljačke varijable**

Kako bi se pokazala uspješnost korištenja pojednostavljenog lineariziranog modela umjesto nelinearnog, prikazana je i apsolutna pogreška varijabli.



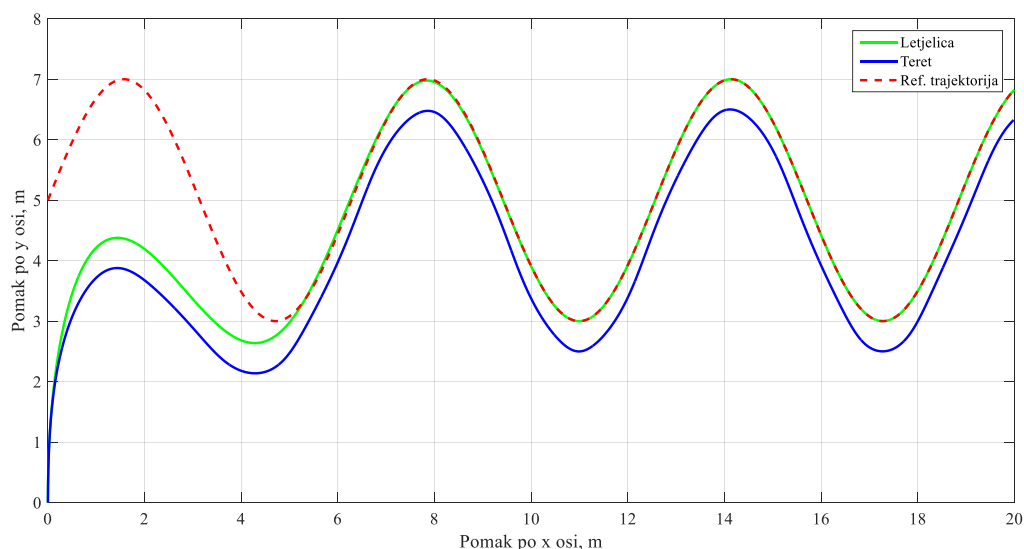
**Slika 9. Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova  $\beta$  i  $\alpha$  kod nelinearnog modela i bilinearnog modela s tri upravljačke varijable**



Slika [Slika 9] pokazuje vrijednost greške nelinearnog modela reda  $10^{-10}$  kod svake varijable što je poprilično zadovoljavajuće, te se ovo upravljanje izvedeno na pojednostavljenom modelu može smatrati uspješnim.

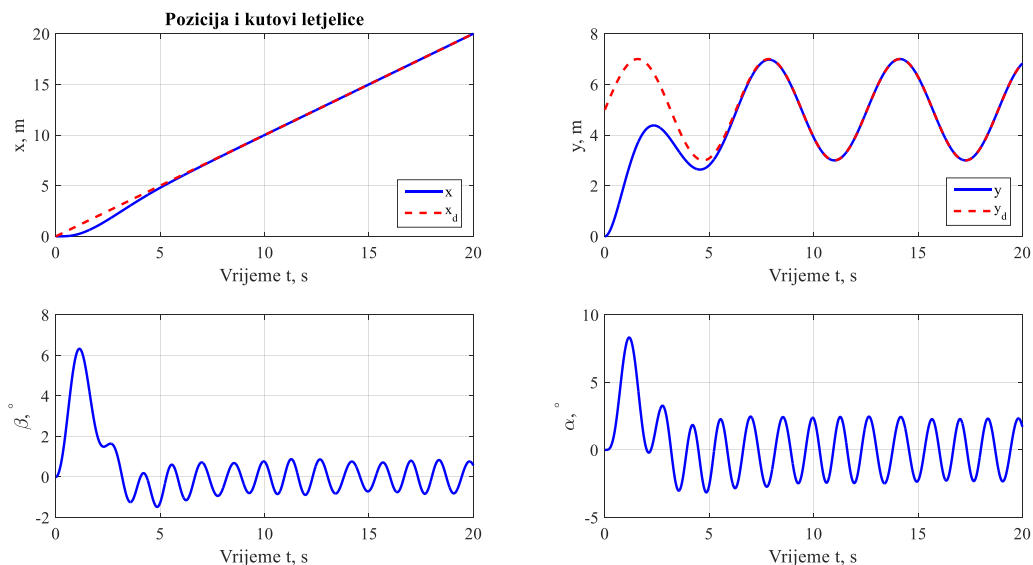
#### 4.1.1.2. Rezultati upravljanja na modelu s dvije upravljačke varijable

U nastavku su provedene simulacije za upravljanje sustava primjenom metode eksterne linearizacije na sustavu s dvije upravljačke varijable, gdje su te upravljačke varijable (118) i (122). Kao i u prethodnim simulacijama, sve početne vrijednosti su nula te su pojačanja ista za  $k_{y1} = 2$ ,  $k_{y0} = 1$  kao kod upravljanja s tri upravljačke varijable. Odabirom željenih polova  $s_1 = s_2 = -1$  i  $s_3 = s_4 = -2$  su se dobila pojačanja  $k_{x3} = 6$ ,  $k_{x2} = 13$ ,  $k_{x1} = 12$ ,  $k_{x0} = 4$ , dok pojačanja  $k_{a1}$ ,  $k_{a0}$  u ovom slučaju nema jer nema varijable  $u_3$ . Cilj je slijeđenje referentne trajektorije uz minimalno njihanje tereta, te prikaz praćenja trajektorije u XY ravnini je na slici [Slika 10].



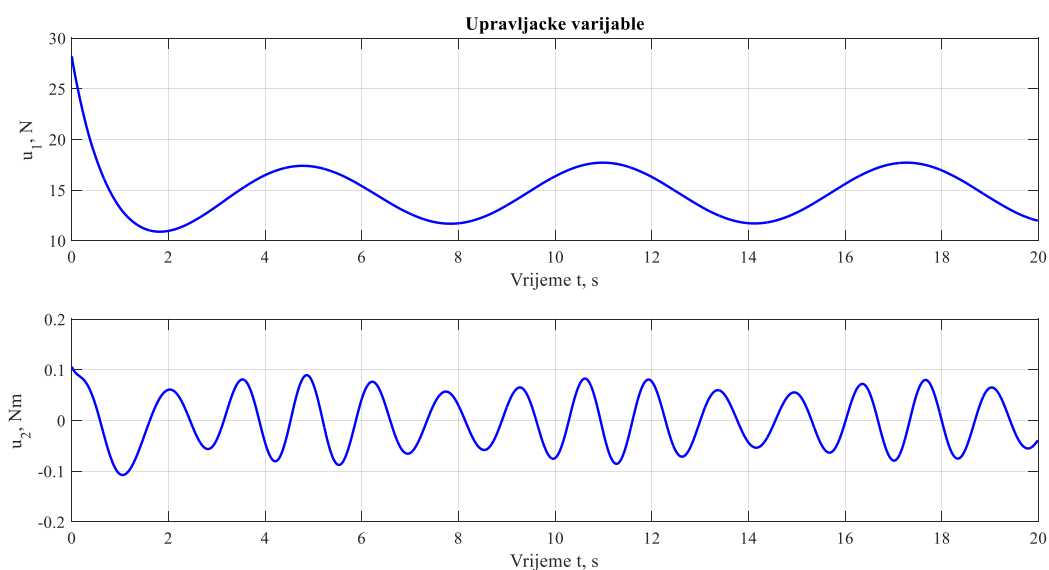
**Slika 10. Prikaz praćenja referentne trajektorije u XY ravnini za model s dvije upravljačke varijable**

I u ovom slučaju je slijeđenje trajektorije provedeno uspješno, letjelica s teretom ulazi u trajektoriju te ju dalje prati bez greške. Prikaz pojedinih varijabli sustava to jest pozicije letjelice i kutova sustava je na slici [Slika 11].



**Slika 11. Pozicija letjelice i kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  za model s dvije upravljačke varijable**

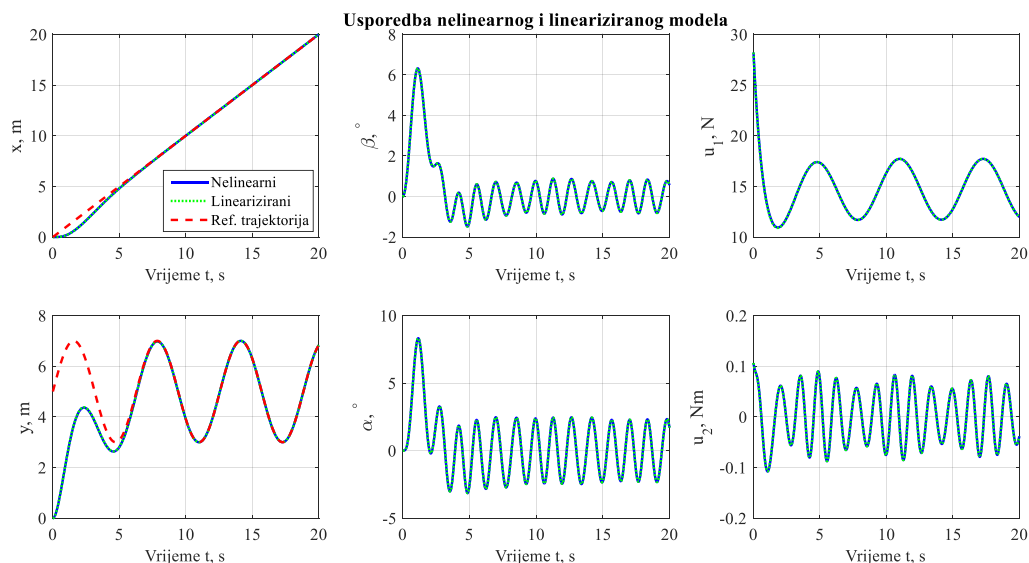
Kako u ovom slučaju nema direktnog upravljanja kuta njihanja odmah se može primjetiti razlika između kutova u odnosu na prethodni slučaj. Sada kut  $\alpha$  oscilira oko željene nule, gdje su oscilacije manje od 5 stupnjeva. Pojava oscilacija je zbog toga što je kut tereta upravljani istom varijablom kao i kut zakreta i ne može se upravljati direktno. Te oscilacije kod kuta  $\beta$  su također oko nule te su manje nego kod  $\alpha$ . U ovom slučaju je i odziv u smjeru  $x$ , prije nego dostigne željenu vrijednost, sporiji jer se sada ista varijabla  $u_2$  troši i na kut  $\alpha$ . Letjelica u vertikalnom smjeru ulazi u željenu trajektoriju oko 5 sekunde, što je isti slučaj kao i kod upravljanja s tri varijable s obzirom da je  $y$  upravljani zasebno od ostalih varijabli. Vrijednosti upravljačkih varijabli su na slici [Slika 12].



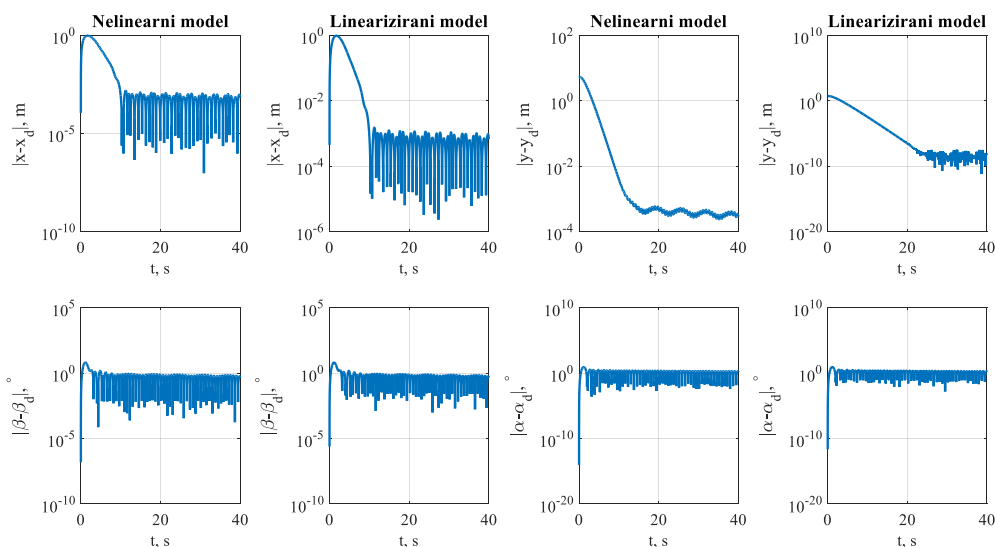
**Slika 12. Upravljačke varijable za model s dvije upravljačke varijable**

Kako postoje oscilacije u varijablama tako i zakretni moment letjelice koji ih upravlja također oscilira, varijabla  $u_2$ . I varijabla isto oscilira oko nule što je i u skladu s odzivima varijabli.

Iako je ponašanje kutova sustava oscilatorno, amplitude pomaka kutova ne prelaze nekoliko stupnjeva i slijeđenje željene trajektorije je uspješno provedeno. Zbog provjere o uspješnosti upravljanja na pojednostavljenom modelu, uspoređeni su bilinearni i nelinearni model. Prikaz na slici [Slika 13] pokazuje poklapanja u odzivima varijabli. Oscilacije koje se javljaju kod kuta  $\beta$  i  $\alpha$  se preklapaju, kao i kod varijable  $u_2$ .



**Slika 13. Usporedba nelinearnog i bilinearnog modela s dvije upravljačke varijable**

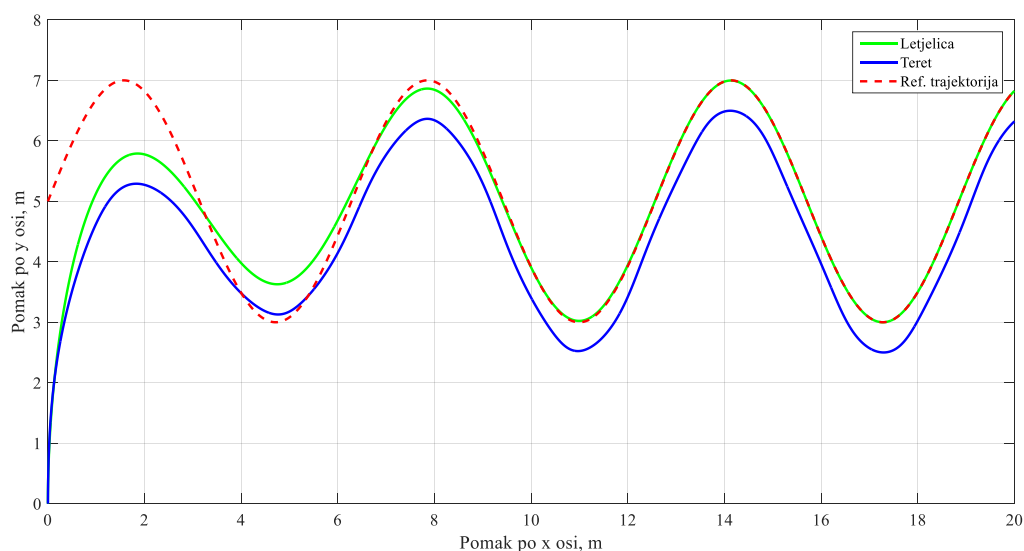


**Slika 14. Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova  $\beta$  i  $\alpha$  kod nelinearnog modela i bilinearnog modela s dvije upravljačke varijable**

Prikaz odstupanja varijabli od željenih vrijednosti je na slici [Slika 14] i za nelinearni i bilinearni model. U smjeru  $x$  pogreška lineariziranog modela se konstatno mijenja između reda  $10^{-5}$  i  $10^{-3}$  kao i kod nelinearnog modela. S obzirom da je riječ o metrima takva pogreška se može smatrati zadovoljavajućom. Pogreška lineariziranog modela u  $y$  smjeru je reda  $10^{-8}$  što je zanemarivo, dok je pogreška nelinearnog modela reda  $10^{-3}$ . Pogreška kutova je reda  $10^0$  ili manje što je oko 1 stupnja, što još jednom pokazuje da njihanje tereta postoji, ali odstupanja nisu velika.

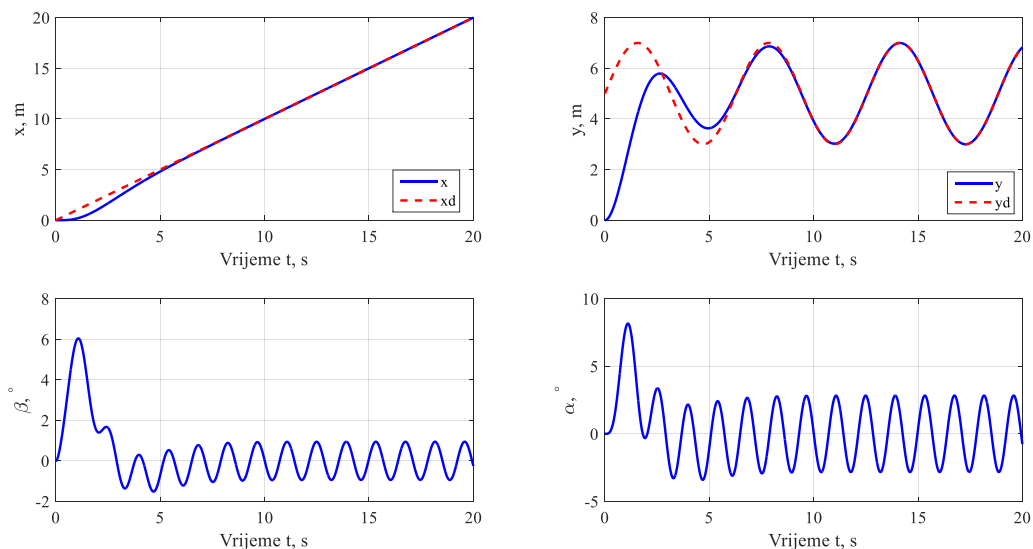
#### 4.1.2. Rezultati upravljanja primjenom metode eksterne linearizacije na potpuno lineariziranom modelu

Upravljanje je provedeno na modelu sustava (130)-(133) i izvedene upravljačke zakone (139) i (144) za dvije upravljačke varijable. Cilj je također slijeđenje vremenski promjenjive trajektorije uz minimalno njihanje tereta. Svi početni uvjeti su nula te metodom podešavanja polova su dobiveni sljedeća pojačanja  $k_{y1} = 2$ ,  $k_{y0} = 1$  za varijablu  $u_1$  i željene jednostruke polove  $s = -1$ . Pojačanja  $k_{x3} = 6$ ,  $k_{x2} = 13$ ,  $k_{x1} = 12$ ,  $k_{x0} = 4$  za varijablu  $u_2$  i odabrane željene polove  $s_1 = s_2 = -1$ ,  $s_3 = s_4 = -2$ . Prikaz letjelice i tereta te referentne trajektorije u  $XY$  ravnini je na slici [Slika 15]. Provedena simulacija na linearnom modelu je također pokazala uspješno slijeđenje željene trajektorije letjelice gdje letjelica s teretom ulazi u trajektoriju te ju dalje uspješno prati.



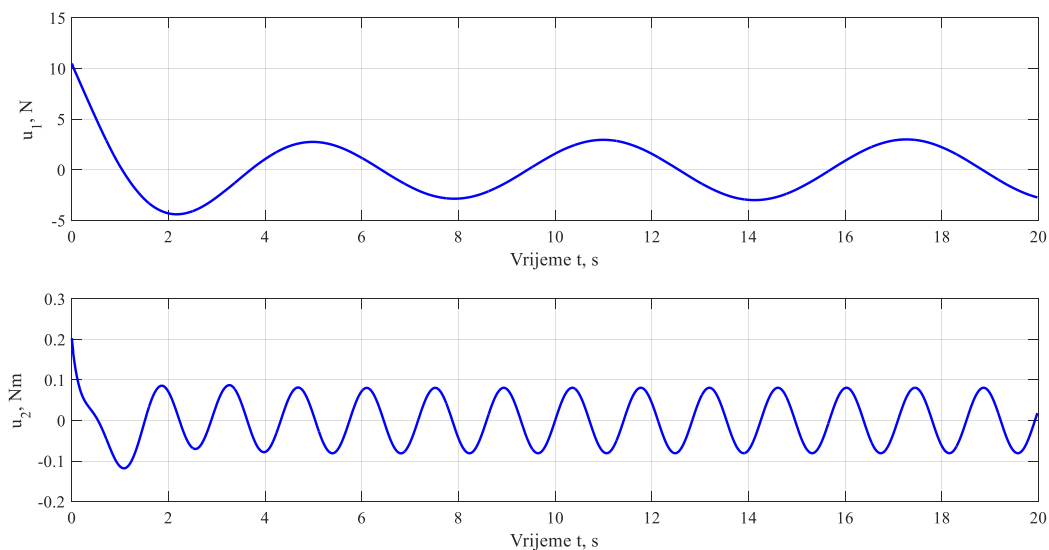
**Slika 15. Prikaz praćenja referentne trajektorije u  $XY$  ravnini za potpuno linearizirani model**  
 Pojedinačni prikaz varijabli kroz vrijeme u slučaju upravljanja potpuno linearnog modela je na slici [Slika 16]. Odzivi varijabli su isti kao i kod upravljanja na bilinearnom modelu gdje letjelica nakon 5 sekundi uspješno prati referencu i u  $x$  i  $y$  poziciji. Kao i kod bilinearnog

modela, brzina odziva varijable  $y$  ovisi o pojačanjima  $k_{y1}$ ,  $k_{y0}$ , ali to dolazi pod cijenu povećanja varijable  $u_1$ . Kut zakreta i kut tereta se također ponašaju oscilatorno oko nule te njihove amplitude ne prelaze par stupnjeva. Takvi oscilatorni odzivi su posljedica podaktuiranog upravljanja kuta tereta.



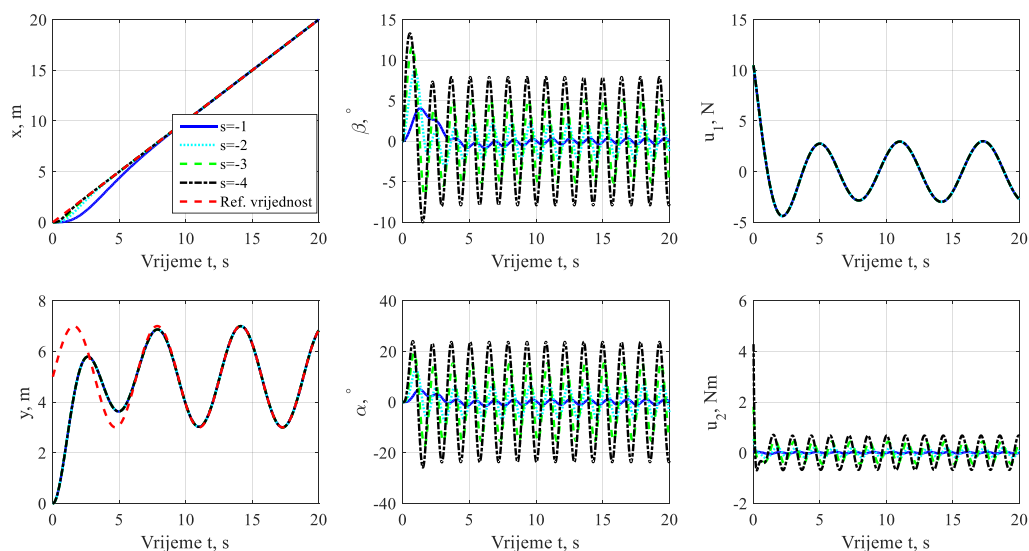
**Slika 16. Pozicija letjelice i kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  za potpuno linearizirani model**

Iznosi odgovarajućih upravljačkih varijabli su na slici [Slika 17]. Varijabla  $u_1$  koja je potisak letjelice je sinusoidnog oblika jer je takva i željena trajektorija  $y$  pozicije koja se upravlja. Isto tako i upravljački moment  $u_2$  mijenja konstanto svoje vrijednosti jer se pokušava smanjiti njihanje tereta koje je isto tako promjenjivo.



**Slika 17. Upravljačke varijable za potpuno linearizirani model**

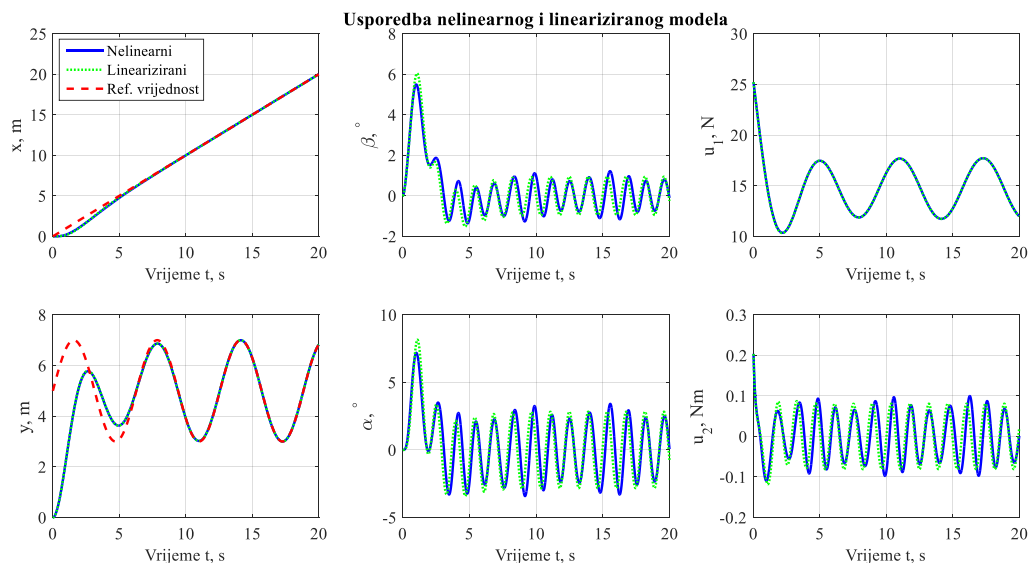
S obzirom da kod ove metode na kutove utječu pojačanja  $k_{x3}$ ,  $k_{x2}$ ,  $k_{x1}$ ,  $k_{x0}$  u varijabli  $u_2$  to jest proizvoljni odabir željenih polova, provedene su i simulacije za različite jednostruke polove. Uspoređene su simulacije za različita pojačanja kada su polovi  $s = -1$ ,  $s = -2$ ,  $s = -3$  i  $s = -4$  te je prikaz varijabli na slici [Slika 18].



**Slika 18.** Pozicija letjelice, kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  te upravljačke varijable za različite polove sustava  $s$

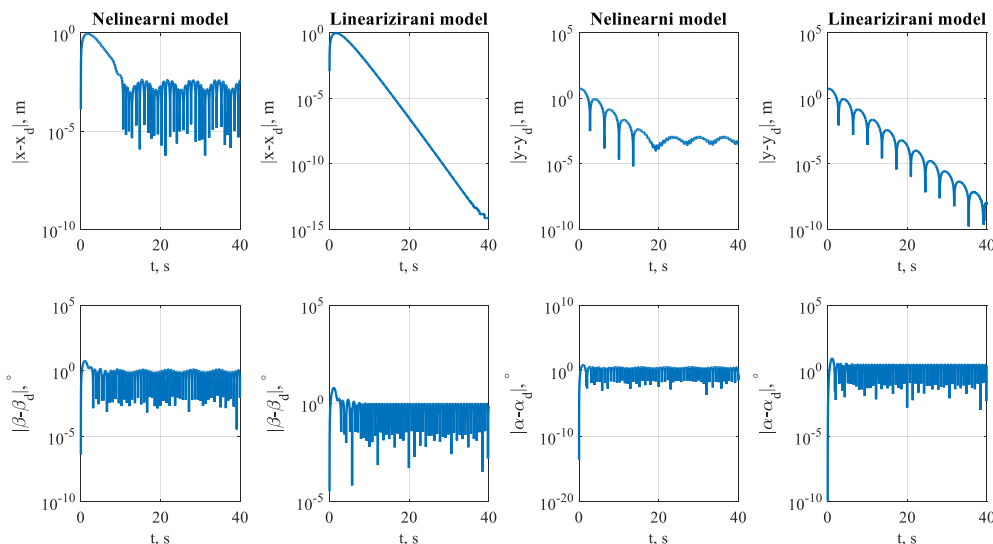
Rezultati [Slika 18] su pokazali da pojačanja  $k_x$  ne utječu na  $y$  i  $u_1$ , jer su oni zasebno upravljani. Bez obzira na pojačanja, oscilacije u kutovima postoje, mijenja se jedino njihova amplituda. Kod najmanjeg pola  $s = -1$  je dobiven najsporiji odziv  $x$ , ali i najmanja odstupanja od nule kod kutova, kao i  $u_2$ . Manji polovi daju i manja pojačanja te stoga nema brzog uklanjanja pogreške u horizontalnom smjeru koje bi dovelo do jakog njihanja tereta. Kod željenih polova  $s = -4$  su pojačanja  $k_{x1} = k_{x0} = 256$ , dok su  $k_{x3} = 16$ ,  $k_{x2} = 96$ , što pokazuje da je veća težina na dovođenju  $x$  do željene vrijednosti nego na „smirivanju“ tereta.

Upravljački zakoni provedeni na potpuno lineariziranom modelu su implementirani na nelinearni model te zatim uspoređeni. Usporedba ta dva modela je na slici [Slika 19] te je prikazano poklapanje modela na varijablama pozicije letjelice kao i varijable  $u_1$ . Odzivi kutova imaju isti oblik kod oba modela, ali se razlikuju u amplitudama, isto vrijedi i za  $u_2$  koji ih upravlja.



**Slika 19. Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela**

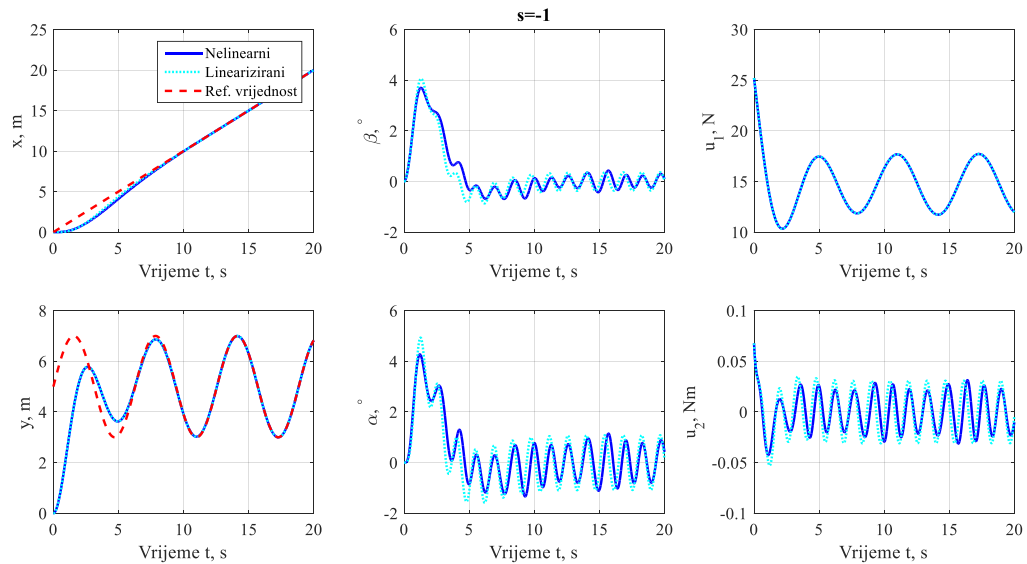
Uspješnost upravljanja je provjerena i usporedbom apsolutnih pogrešaka varijabli sustava, prikaz je na slici [Slika 20]. Za razliku od iste metode upravljanja provedene na bilinearnom modelu, pogreška na potpuno lineariziranom modelu u poziciji  $x$  i  $y$  konvergira prema nuli odnosno ne ostaje konstantna na nekoj vrijednosti tokom vremena. Nelinearni model u  $x$  i  $y$  ima odstupanje od  $10^{-3}$  što se u ovom slučaju može smatrati zadovoljavajućim.



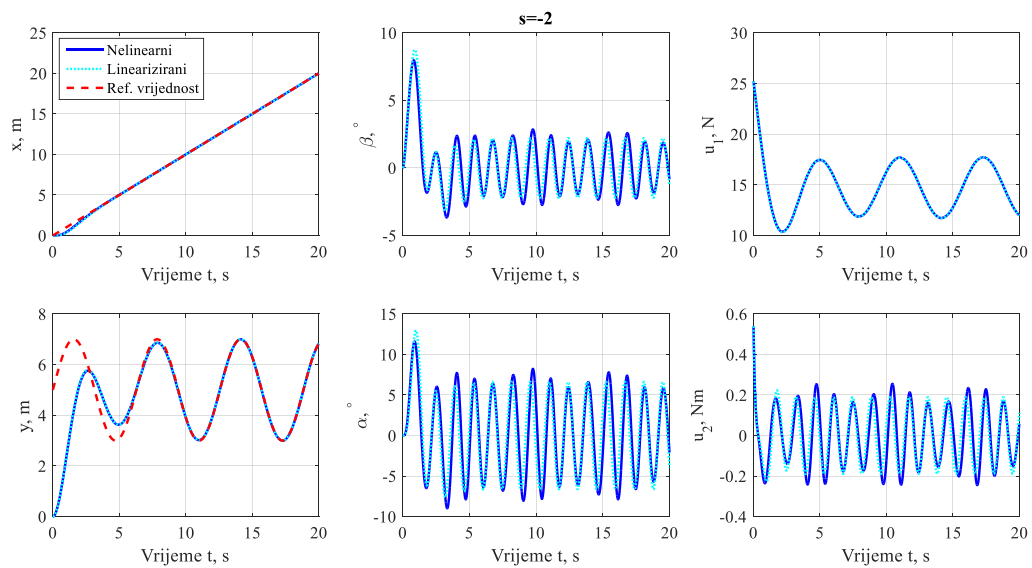
**Slika 20. Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova  $\beta$  i  $\alpha$  kod nelinearnog modela i potpuno lineariziranog modela**

Odstupanje kutova je i dalje konstantno [Slika 20] i u vrijednosti od par stupnjeva odnosno reda  $10^0$ , dok kod kuta  $\beta$  poprima još i manje vrijednosti. Iako je u ovom slučaju prednost linearizacije modela konvergencija pogreške prema nuli, ponašanje pogreške na nelinearnom modelu ostaje ista kao i prije. Mijenjanje pojačanja varijable  $u_2$  odnosno odabir različitih

željenih polova je proveden i na nelinearnom modelu jer se tu vidljiva odstupanja od linearnog modela. Redom su provedene usporedbe nelinearnog i linearnog modela za jednostruke polove  $s = -1, -2, -3$  i  $-4$ .

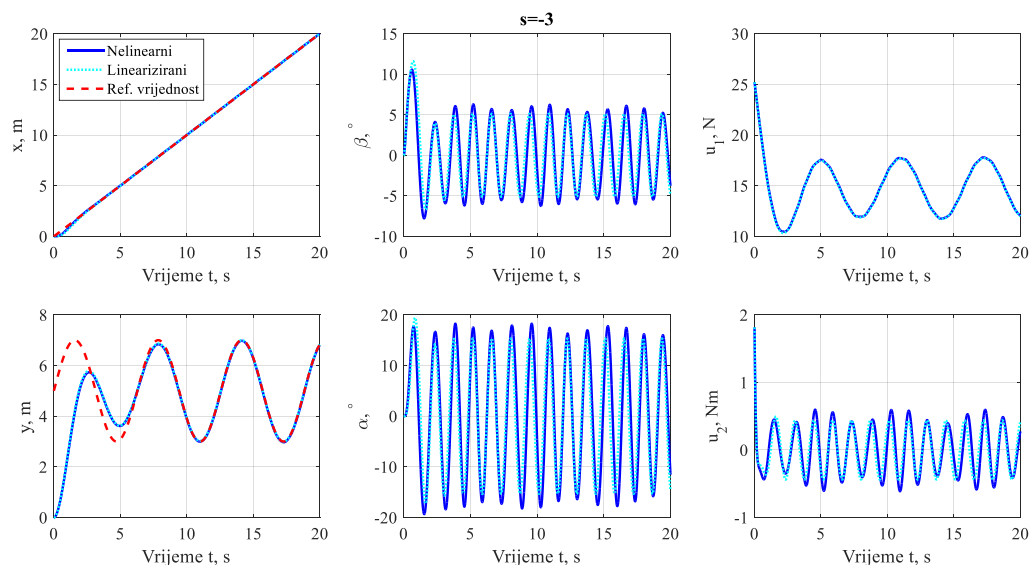


**Slika 21. Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove  $s = -1$**

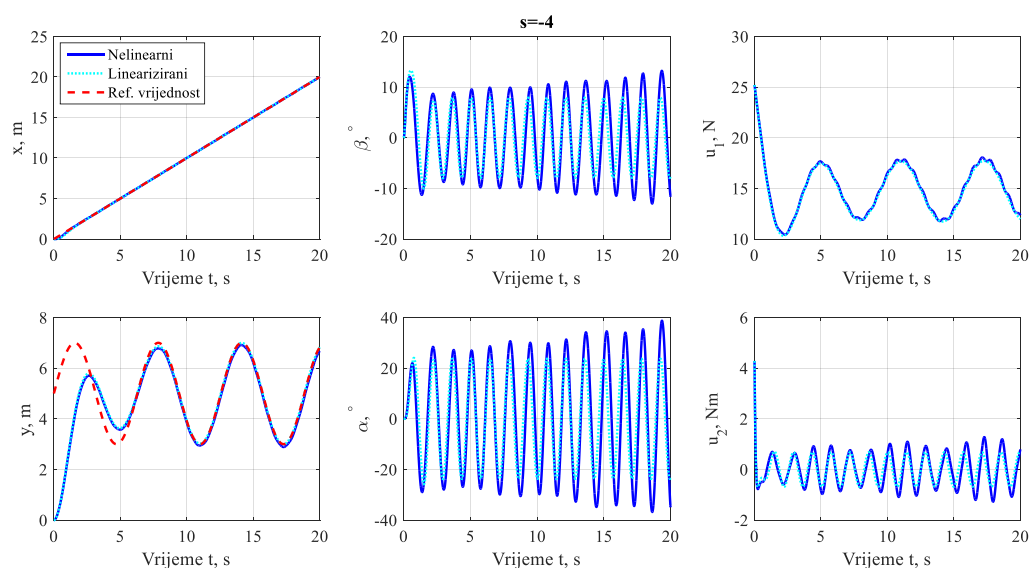


**Slika 22. Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove  $s = -2$**





**Slika 23.** Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove  $s = -3$



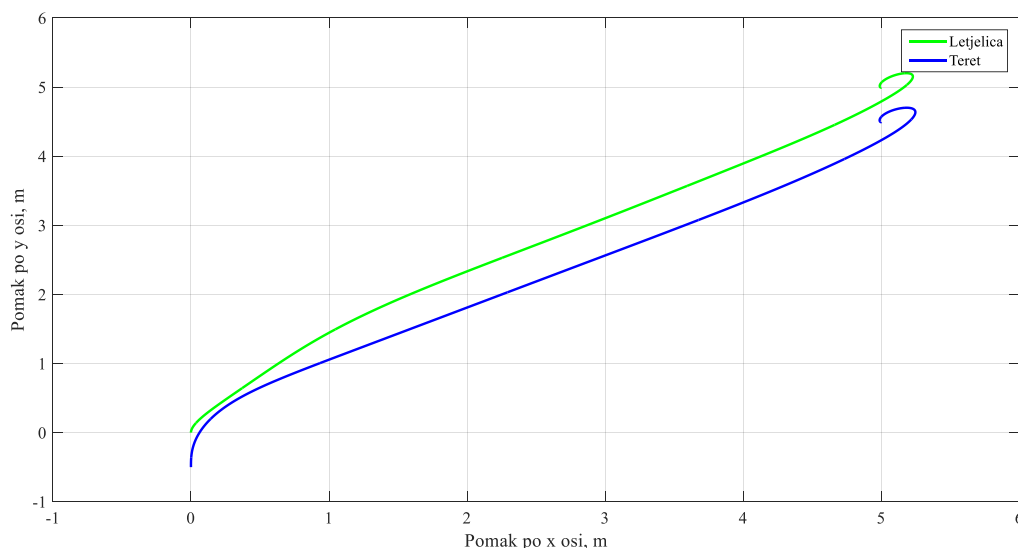
**Slika 24.** Usporedba nelinearnog i potpuno lineariziranog modela za željene polove  $s = -4$

Rezultati simulacija od [Slika 21] do [Slika 24] su pokazali da se odzivi nelinearnog i lineariziranog modela ponašaju jednako uz mala odstupanja. Povećanjem vrijednosti željenih polova se smanjuju odstupanja između ta dva modela, ali i amplitude u kutovima kod nelinearnog modela postaju veće od lineariziranog. Kod manjih željenih polova su sporiji odzivi, ali su pomaci kutova, odnosno njihanja tereta manji i samim time prihvatljiviji.

#### 4.1.3. Rezultati upravljanja linearnim kvadratičnim regulatorom

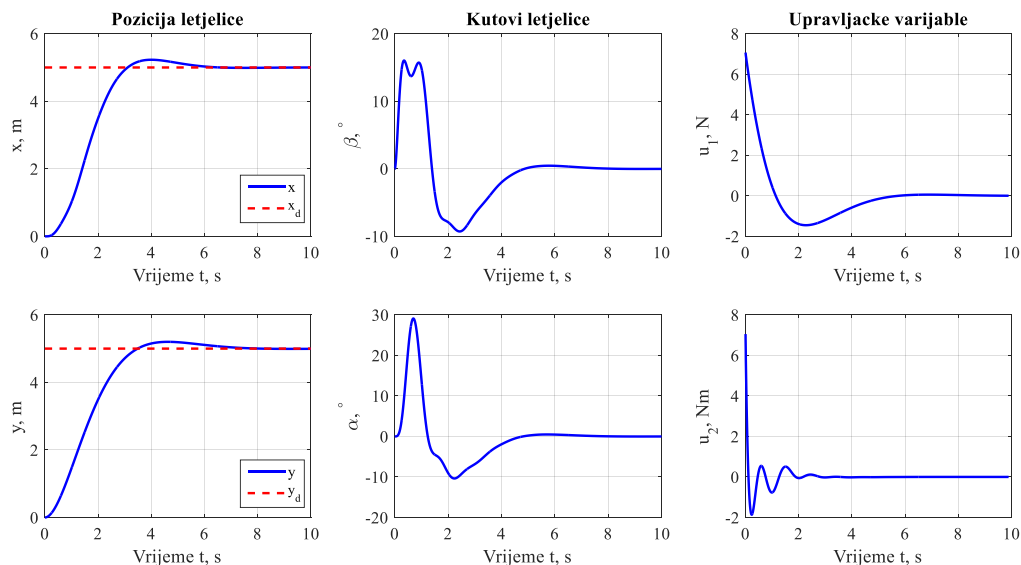
U ovom dijelu su prikazani rezultati upravljanja LQR-om provedenom na potpuno lineariziranom modelu (130)-(133) za dovođenje letjelice  $s$  teretom na željenu konstantu

vrijednost  $x_d, y_d = konst.$ . Kod sinteze LQR-a je bitan odabir težinskih faktora u matricama  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , ovisno o tome na pogrešku koje varijable se želi najviše djelovati. Matrica  $\mathbf{Q}$  na dijagonali ima vrijednosti  $Q_{11} = 20, Q_{22} = 20, Q_{33} = 1, Q_{44} = 800, Q_{55} = 1, Q_{66} = 1, Q_{77} = 1, Q_{88} = 1$  gdje redom faktori  $Q_{11}$  do  $Q_{44}$  utječu na  $x$  poziciju,  $y$  poziciju, kut  $\beta$  te kut  $\alpha$ , a  $Q_{55}$  do  $Q_{88}$  na njihove brzine. Kako je cilj regulacije postići kretanje letjelice sa što manjim njihanjem tereta, kao najveći faktor je zadan  $Q_{44}$ . Matrica  $\mathbf{R}$  na dijagonali ima vrijednosti  $R_{11} = 10, R_{22} = 10$ , koje utječu na varijable  $u_1$  i  $u_2$ . Za sve sljedeće provedene simulacije, svi početni uvjeti sustava su nula. Najprije je prikazana letjelica s teretom u  $XY$  ravnini i uspješno pozicioniranje na  $x_d = 5$  m i  $y_d = 5$  m [Slika 25]. Prije pozicioniranja na konstantni položaj, letjelica napravi zamah u  $x$  smjeru čime postiže brže umirivanje njihanja tereta.



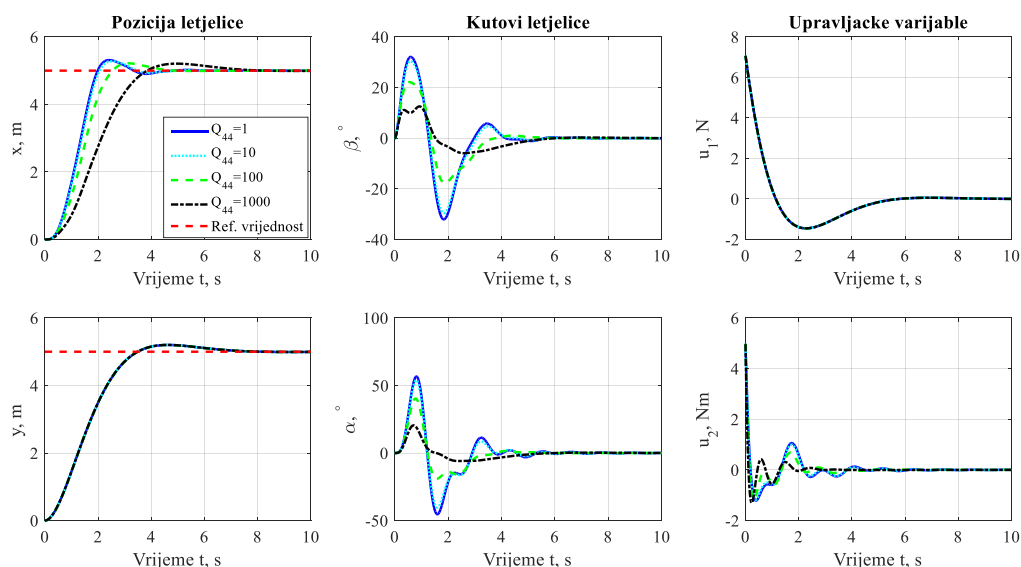
**Slika 25. Prikaz pomaka letjelice s teretom u  $XY$  ravnini za LQR**

Prikaz pozicije letjelice, kutova  $\beta$  i  $\alpha$  te upravljačkih varijabli za LQR upravljanje je na slici [Slika 26]. Prikazana je ovisnost  $x$  i  $y$  pomaka u vremenu i da oko 6 sekunde letjelica postigne željenu poziciju i zadržava ju. Iako su u ovom slučaju samo dvije upravljačke varijable, rezultati pokazuju uspješno zaustavljanje njihanja tereta. Kut  $\alpha$  nakon 4 sekunde postaje nula, ali na početku kretanja ima poprilično velik skok do skoro 30 stupnjeva. Kut  $\beta$  isto na početku kretanja ima skok do oko 10 stupnjeva, ali isto tako oko 4 sekunde postaje nula. Na odzivu  $x$  pozicije je vidljiv prebačaj preko željene pozicije, isto oko 4 sekunde, što omogućuje brže dovođenje kuta  $\alpha$  na nulu bez velikih oscilacija.



**Slika 26. Pozicija letjelice, kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  i upravljačke varijable za LQR upravljanje**

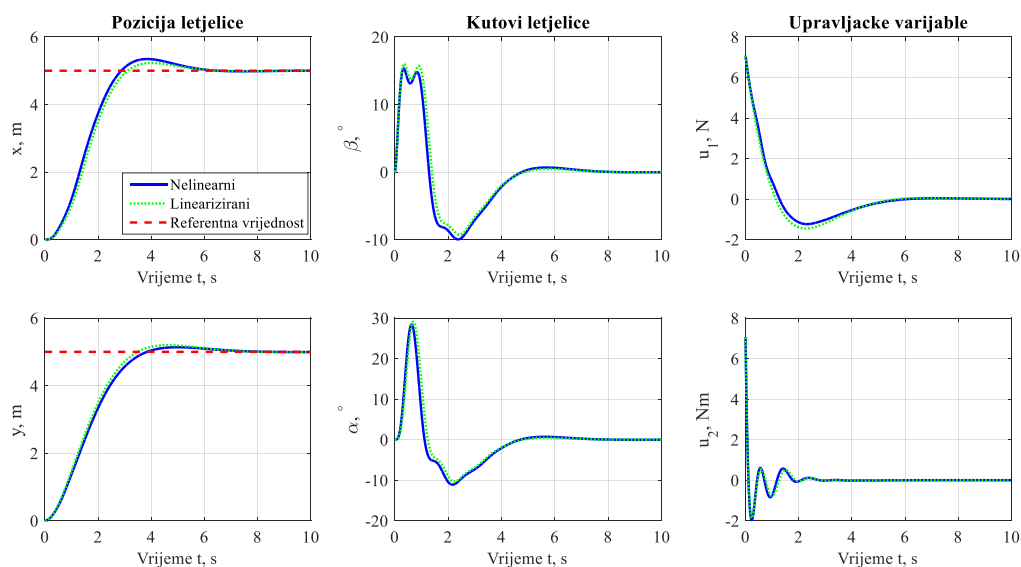
U ovom slučaju kada je teret ovješeno pasivno, gdje je bitan cilj upravljanje letjelice sa što manjim njihanjem tereta, dodatno se prikazao i utjecaj težinskog faktora  $Q_{44}$  koji utječe na pogrešku za kut  $\alpha$ . Provedene su simulacije za  $Q_{44} = 1$ ,  $Q_{44} = 10$ ,  $Q_{44} = 100$  i  $Q_{44} = 1000$ .



**Slika 27. Pozicija letjelice, kutovi  $\beta$  i  $\alpha$  te upravljačke varijable za različite faktore  $Q_{44}$**

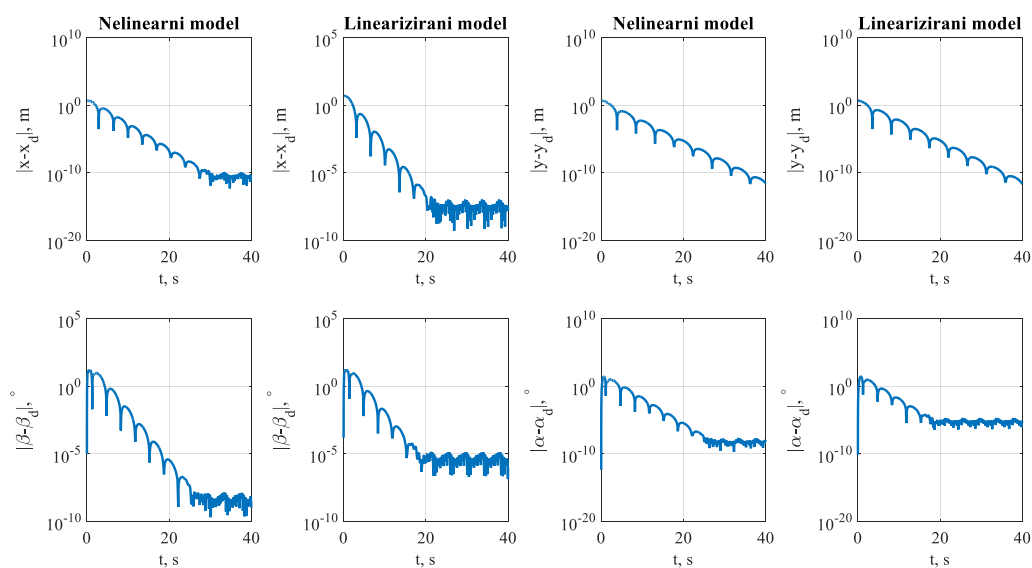
Na slici [Slika 27] koja prikazuje rezultate utjecaja  $Q_{44}$  na varijable sustava se vidi kako nema utjecaja na  $y$  ni na  $u_1$  jer su oni upravljani zasebno. Kako se  $Q_{44}$  povećava tako se usporava odziv  $x$  pozicije, sporije dolazi na željenu vrijednost. U tom slučaju je pomak kuta  $\alpha$  manji, kao i pomaci kuta  $\beta$ . To pokazuje kako sporije kretanje u smjeru  $x$  utječe da je kut njihanja manji, dok ubrzavanje pomaka u  $x$  smjeru povećava njihanje tereta.

Radi upotrebe ovakvog upravljanja na nelinearnom modelu, uspoređene su performanse upravljanja nelinearnog s linearnim modelom. Usporedba je provedena za vrijednosti  $Q_{11} = 20$ ,  $Q_{22} = 20$ ,  $Q_{33} = 1$ ,  $Q_{44} = 800$  te  $R_{11} = R_{22} = 10$ . Prikaz pozicije, kutova te upravljačkih varijabli [Slika 28] pokazuje isto ponašanje odziva kod oba modela s malim odstupanjima u vrijednostima navedenih varijabli.



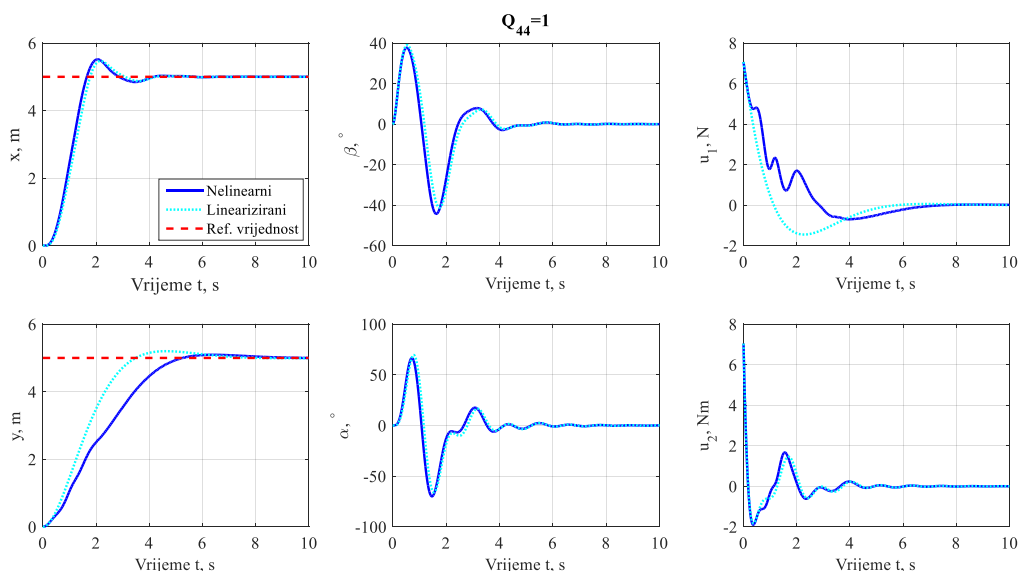
**Slika 28.** Usporedba nelinearnog i linearnog modela za LQR upravljanje

Iako je pomak kuta  $\beta$  veći od 10 stupnjeva kod linearnog modela što ne ulazi u pretpostavku malih kutova, također je isto takvo ponašanje i kod nelinearnog modela. Uspoređene su i apsolutne pogreške nelinearnog i linearnog modela, prikaz je na slici [Slika 29].

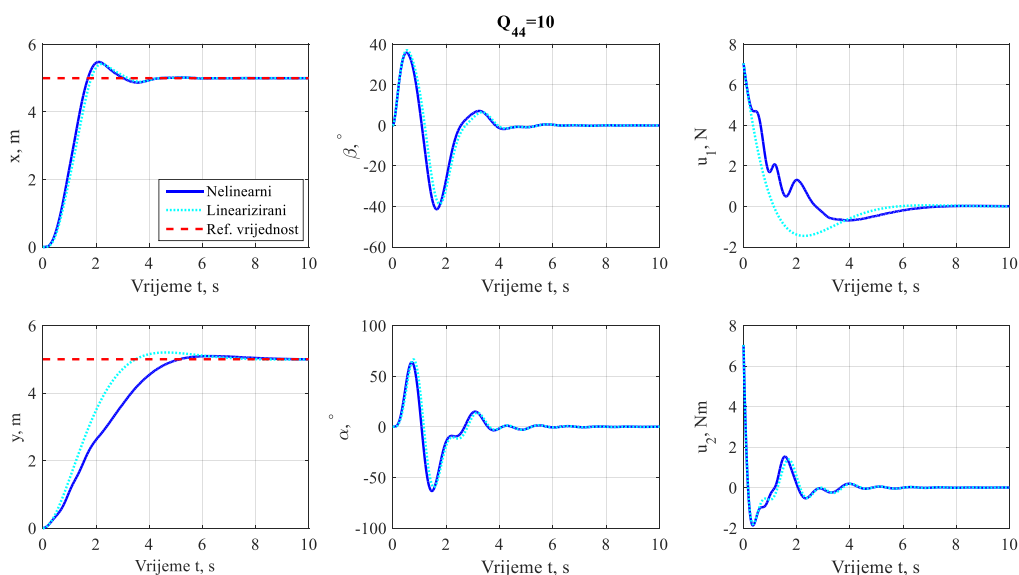


**Slika 29.** Apsolutne pogreške pozicije letjelice i kutova  $\beta$  i  $\alpha$  kod nelinearnog modela i linearnog modela za LQR upravljanje

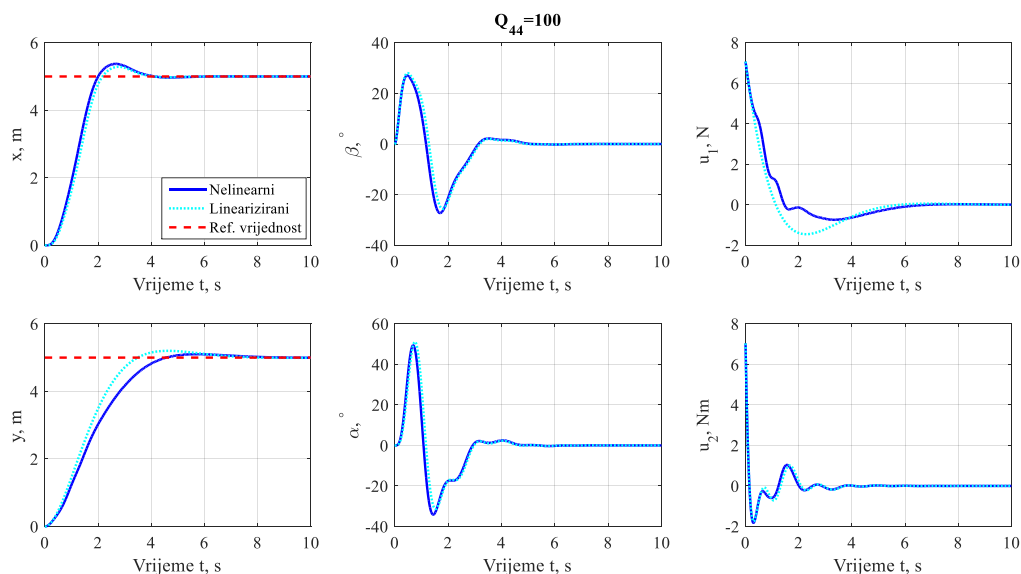
Usporedba pogreški pokazuje konvergiranje greške u vertikalnom smjeru prema nuli i kod linearnog i nelinearnog modela. Pogreške ostalih varijabli su sve u zadovoljavajućim vrijednostima, čime se ovo upravljanje pokazalo uspješno. Nakon što je pokazan utjecaj faktora  $Q_{44}$  na linearni model, isto je provedeno i za nelinearni model. Provedene su simulacije za  $Q_{44} = 1$ ,  $Q_{44} = 10$ ,  $Q_{44} = 100$  i  $Q_{44} = 1000$ , prikaz je na sljedećim slikama [Slika 30] do [Slika 33].



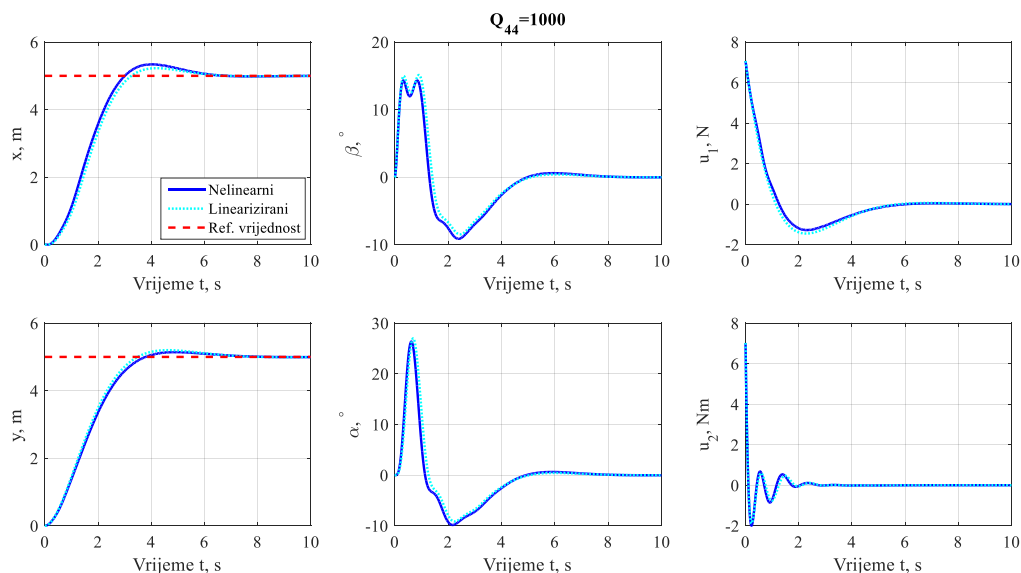
**Slika 30. Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor  $Q_{44} = 1$**



**Slika 31. Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor  $Q_{44} = 10$**



**Slika 32. Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor  $Q_{44} = 100$**



**Slika 33. Usporedba nelinearnog i linearnog modela za faktor  $Q_{44} = 1000$**

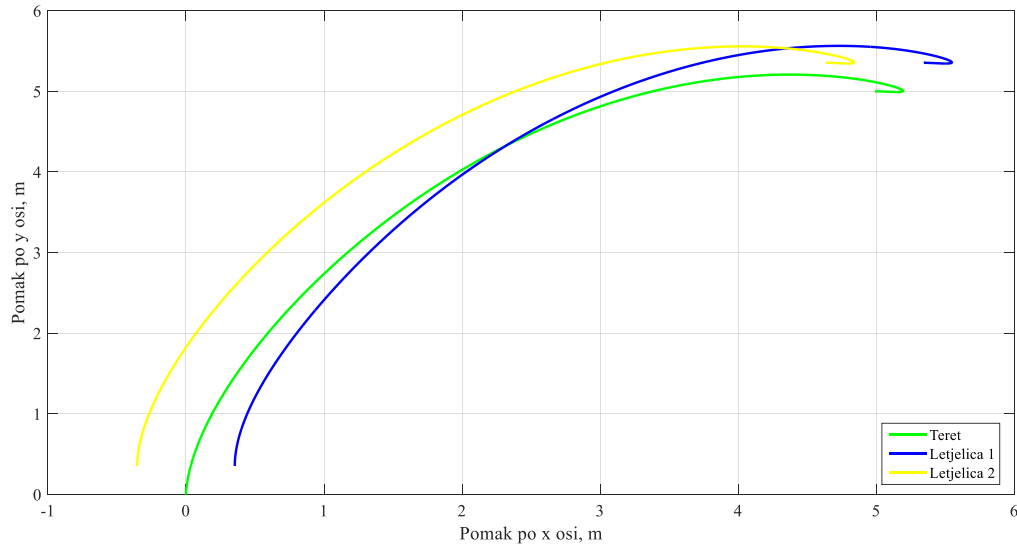
Iz simulacija provedenih na nelinearnom modelu je prikazano da povećavanjem  $Q_{44}$  odzivi  $x$  pozicije i kutova  $\alpha$  i  $\beta$  su isti i na linearnom i nelinearnom modelu. Razlika je u tome što sada u slučaju kod nelinearnog modela,  $Q_{44}$  ima utjecaja i na  $y$  i  $u_1$ . To se događa jer iz jednadžbi (10)-(13) nelinearnog modela se vidi da su varijable  $y$  i  $\alpha$  povezane i utječu jedna na drugu, dok se taj utjecaj kod linearizacije poništio. Također je pokazano da se povećanjem  $Q_{44}$  ta razlika znatno smanjuje te nelinearni model prati ponašanje linearnog modela. Tek kada je  $Q_{44}$  dovoljno velik, već kod vrijednosti 800 pa na dalje, tada je moguće primijeniti sintezu LQR-a na originalni model.

## 4.2. Rezultati upravljanja tereta primjenom dvije letjelice

Upravljanje sustavom koji prenosi teret pomoću dvije autonomne letjelice je provedeno sintezom LQR-a. Provedena su upravljanja na tri različita modela koja su opisana u prethodnom poglavlju (poglavlje 3.). Prvo su provedene simulacije za linearni sustav (148)-(153) i kompenzaciju gravitacije pomoću upravljačkih varijabli (145) i (146) te je zatim primijenjen standardni LQR. Drugo su provedene simulacije za isti linearni sustav, ali odabir drugih upravljačkih varijabli (158) i (159) te je na tom sustavu provedena sinteza LQR-a s uklanjanjem poremećaja. Treće upravljanje je na drugi način lineariziranom sustavu (182)-(187) s odabirom upravljačkih varijabli (180) i (181) te je na tom sustavu također provedena sinteza LQR-a s uklanjanjem poremećaja. U nastavku su prikazani svi rezultati navedenih simulacija upravljanja.

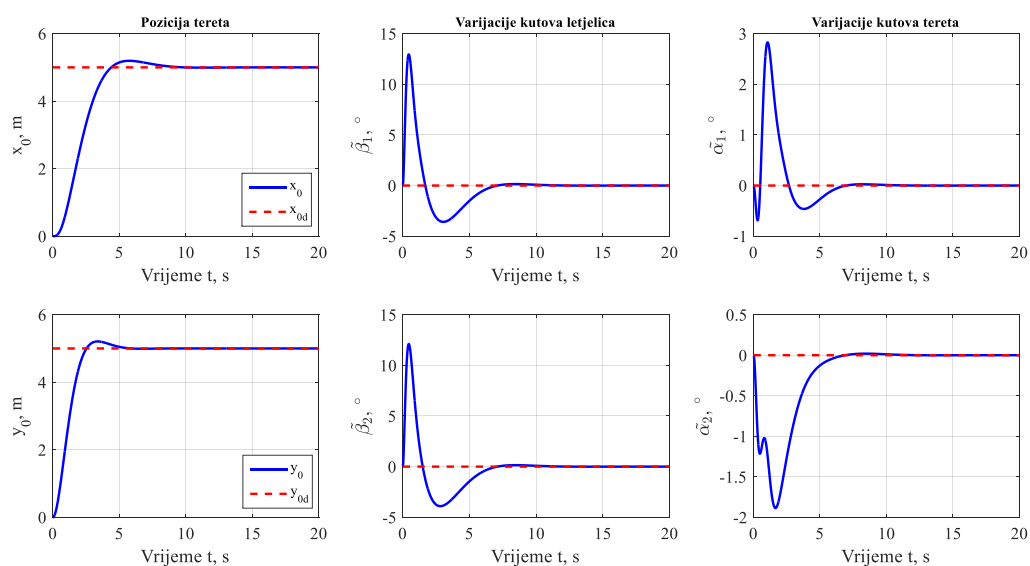
### 4.2.1. Rezultati upravljanja primjenom standardnog LQR regulatora

U ovom dijelu je implementiran LQR na linearni model na kojemu su pomoću upravljačkih varijabli kompenzirani svi konstantni utjecaji gravitacijskih sila. Modelu se zadaju željeni stacionarni kutovi  $\alpha_{10}$  i  $\alpha_{20}$  iz kojih su izračunati odgovarajući stacionarni kutovi zakreta letjelica  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$ . Za željene kutove  $\alpha_{10} = 45^\circ$  i  $\alpha_{20} = -45^\circ$  su odgovarajući kutovi zakreta  $\beta_{10} = 11,3^\circ$  i  $\beta_{20} = -11,3^\circ$ . Nakon toga su odabrane vrijednosti matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , gdje se na dijagonali  $\mathbf{Q}$  vrijednosti odnose na  $x_0, y_0, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$  i njihove brzine dok se na dijagonali  $\mathbf{R}$  vrijednosti odnose na upravljačke varijable,  $u_1, u_2, u_3$  i  $u_4$ . Odabrani težinski faktori matrica su  $\mathbf{Q} = \text{diag} [10, 100, 1000, 1000, 1000, 1000, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  i  $\mathbf{R} = \text{diag} [10, 10, 10, 10]$ . Željena pozicija tereta koju je potrebno postići je konstantna,  $x_{0d}, y_{0d} = \text{konst.}$ . Cilj regulacije je održati jednake kutove između tereta i letjelica tokom leta, te s obzirom da je sustav lineariziran oko stacionarnih kutova, cilj je svesti varijacije tih kutova na nulu. Za slučaj kada je zadana konstanta željena pozicija tereta odnosno  $x_{0d} = 5$  m,  $y_{0d} = 5$  m, dobiveni su sljedeći rezultati. Na slici [Slika 34] je prikazan pomak letjelica s teretom u  $XY$  ravnini i može se vidjeti kako je teret došao u željenu poziciju s jednakim razmakom između letjelica.



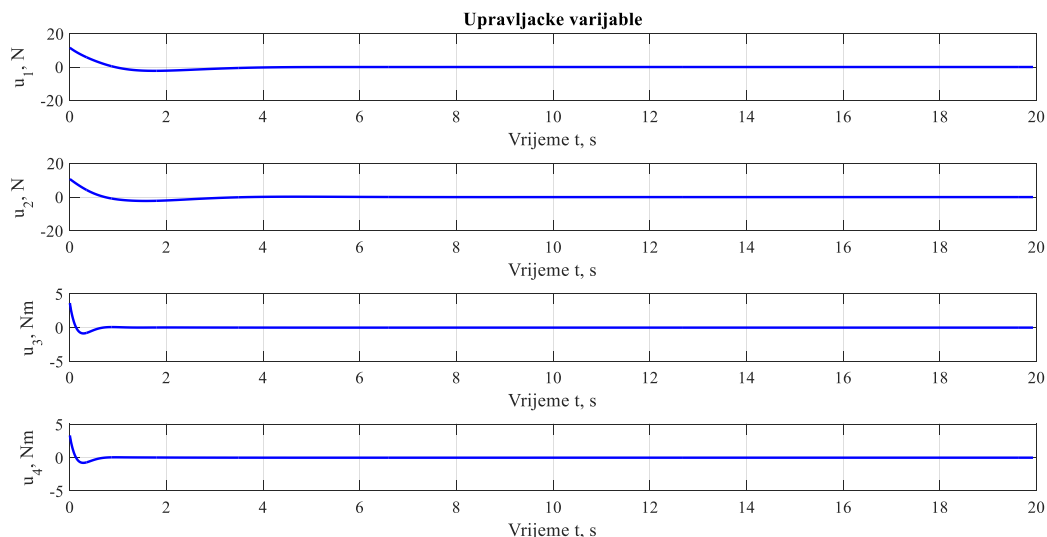
**Slika 34. Prikaz pomaka dvije letjelice s teretom u XY ravnini za LQR**

Na slici [Slika 35] su prikazane varijable sustava u ovisnosti o vremenu gdje se može vidjeti kako je teret dostigao i održao željenu poziciju. Teret je postigao željenu vrijednost u  $x$  smjeru tek oko 10 sekunde, dok je u  $y$  smjeru postignuto oko 5 sekunde. Razlika u tim vremenima je zbog odabranih težinskih faktora koji za pogrešku  $x_0$  iznosi 10, dok za pogrešku  $y_0$  iznosi 100. Ako je faktor za  $x_0$  povećan, dobije se brži odziv, ali uz veći prebačaj preko željene vrijednosti što dovodi i do većih pomaka u kutovima. Varijacije kutova zakreta dostižu vrijednosti i do  $10^\circ$ , ali nakon 5 sekunde dostižu željenu vrijednost nula i zadržavaju ju. Pomaci kutova  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$  su svega nekoliko stupnjeva, ali su za stupanj veći između prve letjelice i tereta nego između druge letjelice.



**Slika 35. Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za LQR upravljanje**

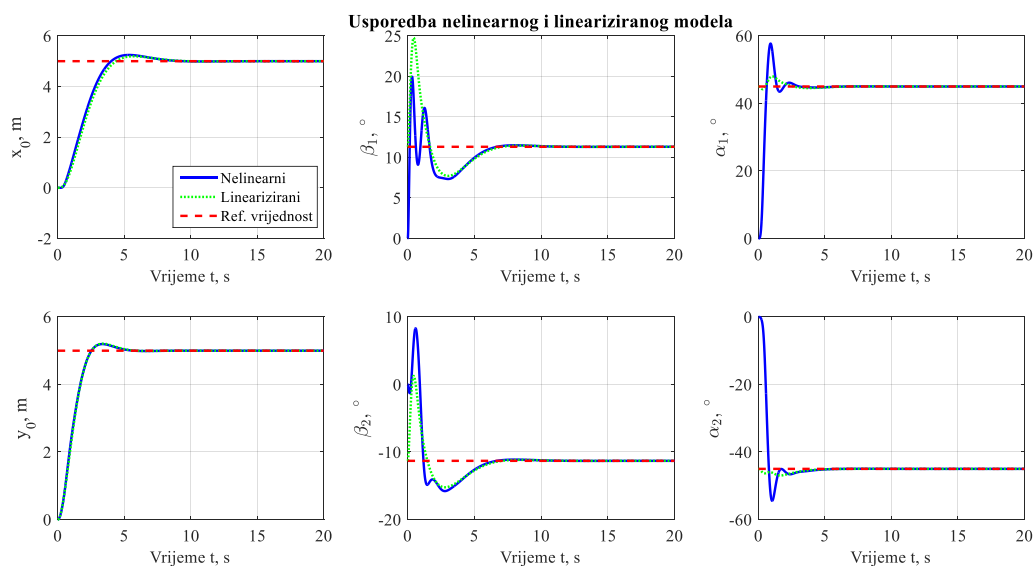




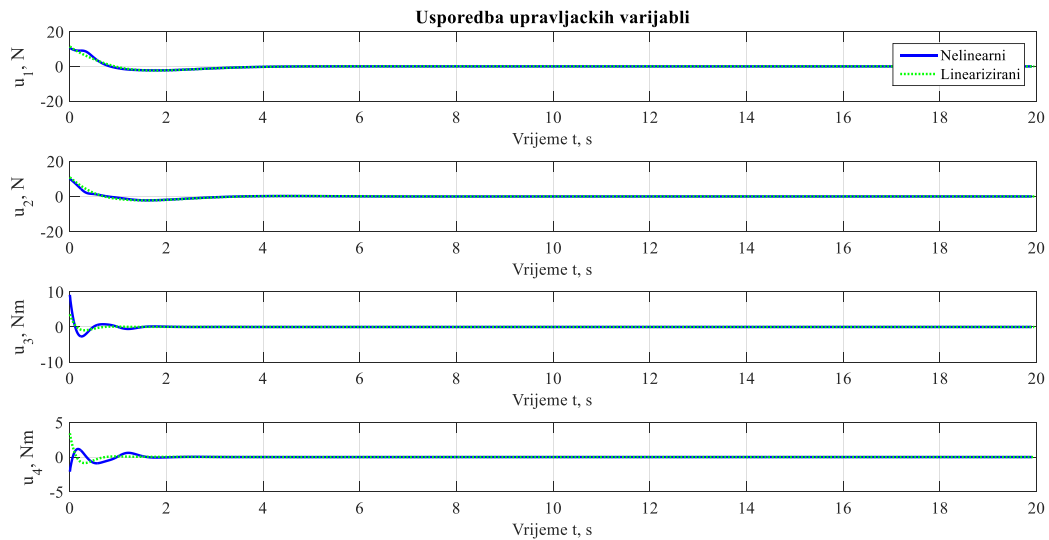
**Slika 36.** Upravljačke varijable za LQR upravljanje sustava s dvije letjelice

Na slici [Slika 36] su prikazani iznosi upravljačkih varijabli za let u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Iznosi  $u_1$  i  $u_2$  su isti i to su sile potiska prve i druge letjelice. I zakretni momenti obje letjelice,  $u_3$  i  $u_4$ , su približno jednakih vrijednosti.

Kao i kod sustava s jednom letjelicom da bi se provjerila uspješnost pojednostavljenog modela, upravljanje je implementirano i na nelinearni model. Primjena upravljanja na nelinearnom sustavu je prikazana na slici [Slika 37] kao i usporedba s upravljačkim varijablama [Slika 38]. Rezultati sada ne prikazuju varijacije kutova nego prikazuju prave kutove  $\beta$  i  $\alpha$  koji imaju referentne vrijednosti  $\alpha_{10} = 45^\circ$ ,  $\alpha_{20} = -45^\circ$ ,  $\beta_{10} = 11,3^\circ$  i  $\beta_{20} = -11,3^\circ$ .

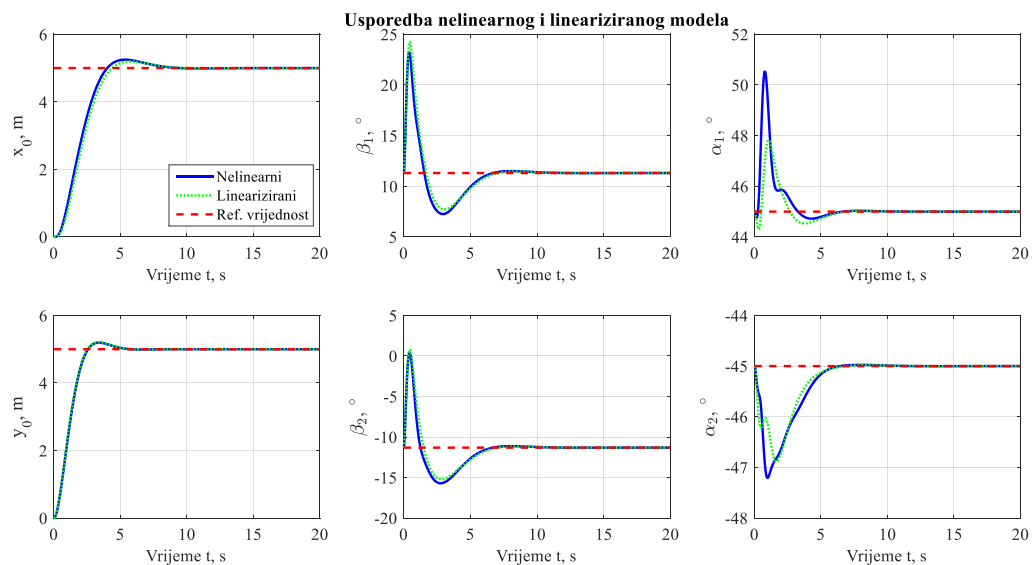


**Slika 37.** Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje

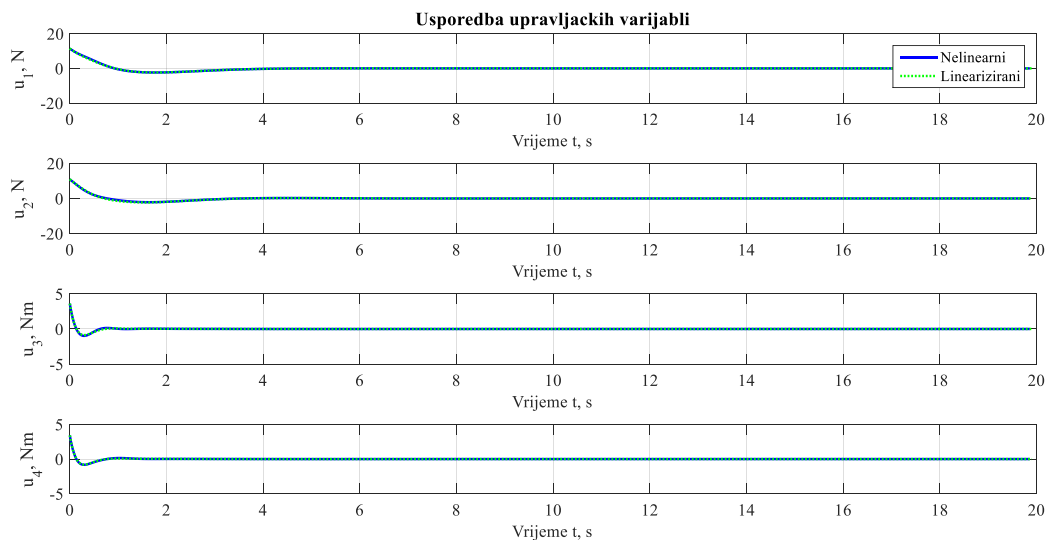


**Slika 38. Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje**

Prikazano je veliko odstupanje među kutovima [Slika 37], što je posljedica početnih uvjeta. Zbog linearizacije modela oko stacionarnih kutova, za početni uvjet nula, početni kut je stacionarni kut. Kod nelinearnog modela, kako nema stacionarnog kuta, za početni uvjet nula, i početni kut je nula. Za usporedbu istih kutova, za početne uvjete nelinearnog modela su odabrani  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_{10}$ ,  $\beta_2 = \beta_{20}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20}$  te je provedena simulacija dala sljedeće rezultate.



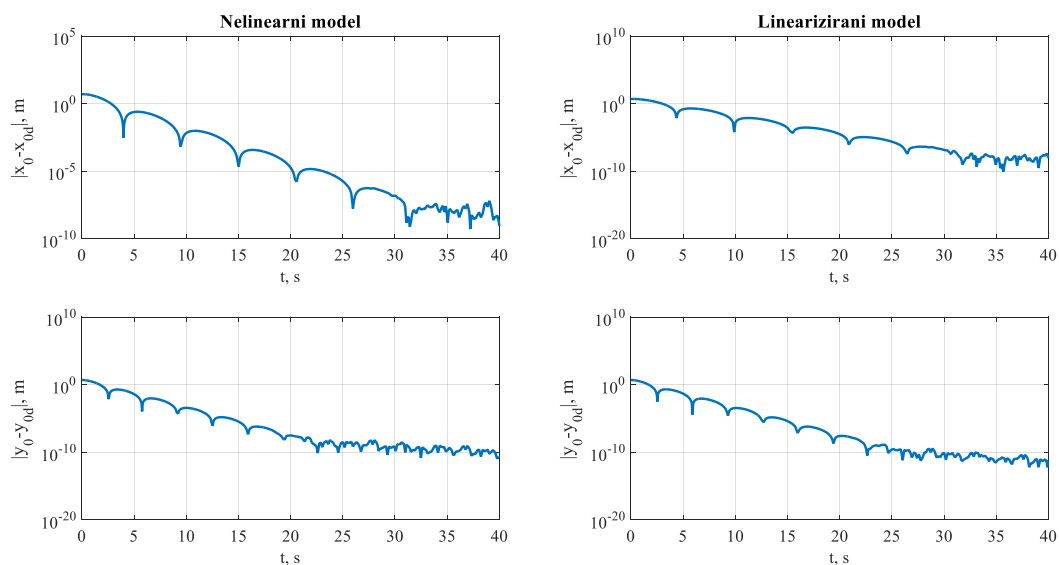
**Slika 39. Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje s istim početnim kutovima**



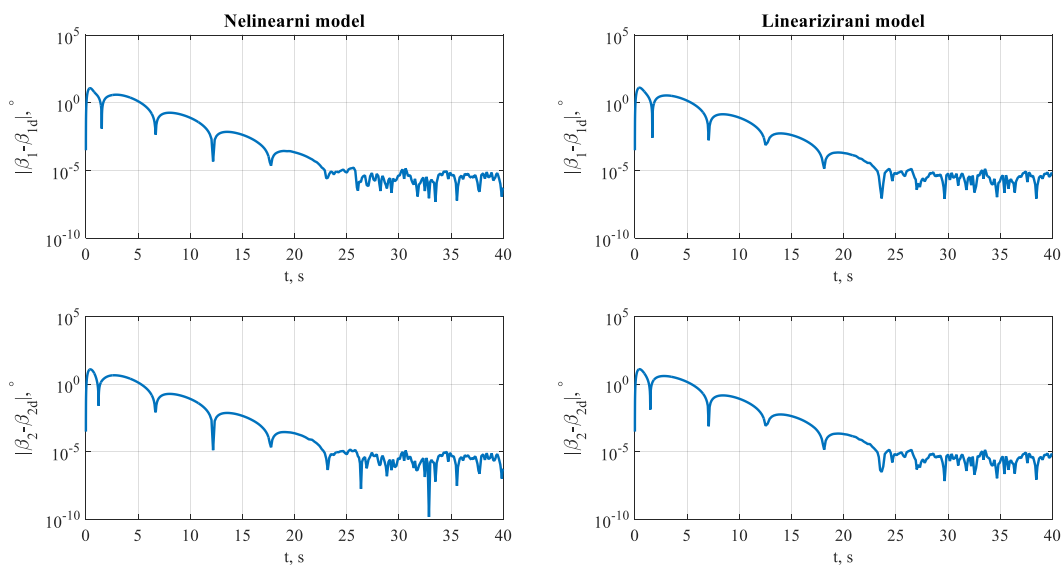
**Slika 40. Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela s dvije letjelice za LQR upravljanje s istim početnim kutovima**

Prikaz performansi upravljanja na slici [Slika 39] sada pokazuje jednako ponašanje pomaka kutova te iste početne kutove. Nelinearni model prati odzive linearnog modela i postigne željene vrijednosti. Kod pomaka kutova ima razlike u iznosu, što je najvidljivije kod  $\alpha_1$  gdje nelinearni model odstupa od linearnog za nekoliko stupnjeva. Upravljačke varijable isto tako pokazuju jednake iznose varijabli [Slika 40].

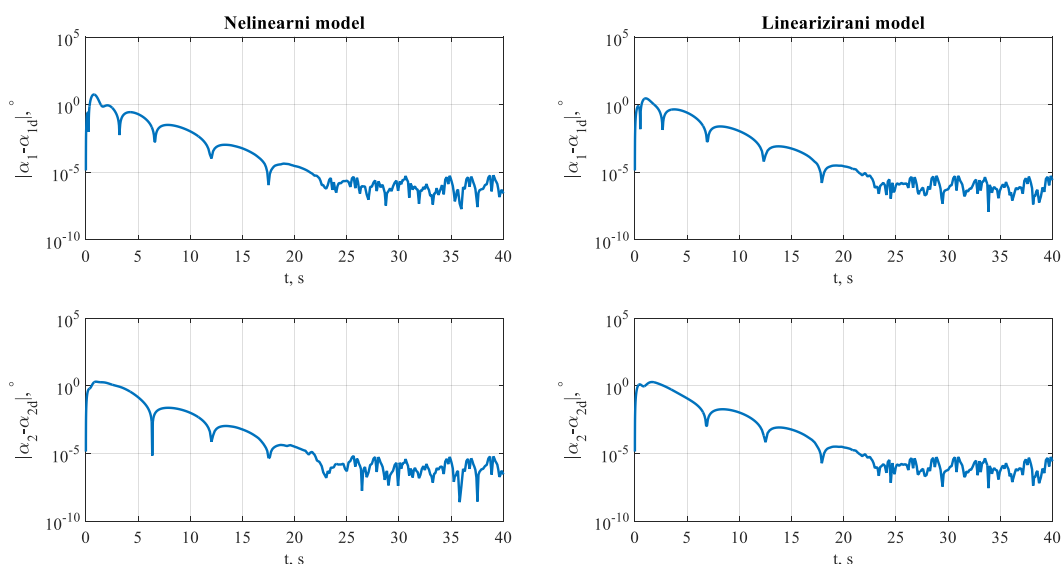
Provjerena je i točnost upravljanja sustava LQR-om. Uspoređene su apsolutne pogreške sustava nelinearnog i lineariziranog modela na sljedećim slikama.



**Slika 41. Usporedba apsolutnih pogreški pozicije tereta nelinearnog i lineariziranog modela**



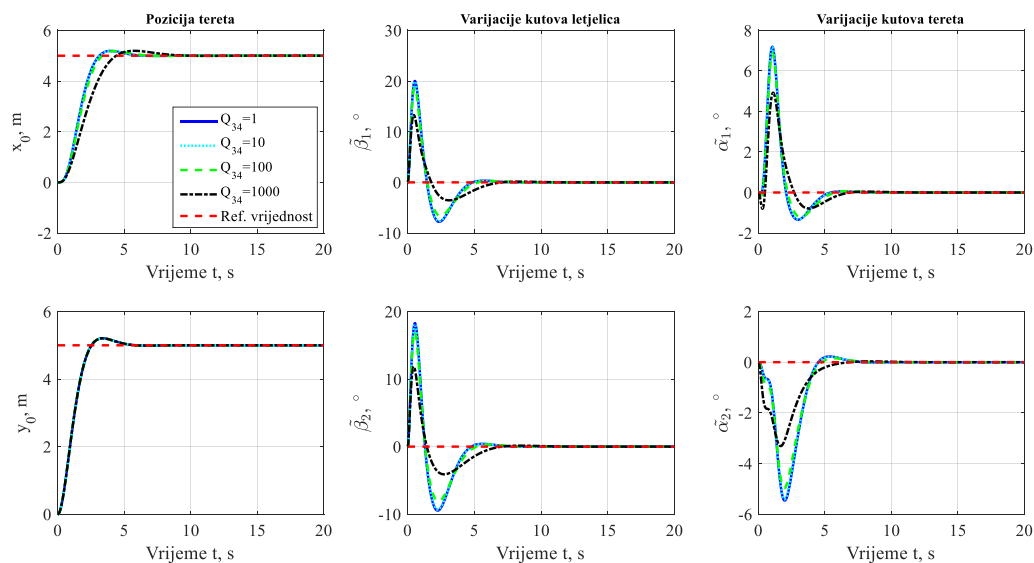
**Slika 42.** Usporedba apsolutnih pogreški kutova zakreta dvije letjelice nelinearnog i lineariziranog modela



**Slika 43.** Usporedba kutova između tereta i dvije letjelice nelinearnog i lineariziranog modela. Pogreška pozicije tereta je zanemariva [Slika 41], i kod lineariziranog i nelinearnog modela. Pogreška kutova sustava [Slika 42] i [Slika 43] je reda  $10^{-5}$  što također pokazuje zanemarivu pogrešku. Sintaza LQR regulatora na pojednostavljenom modelu se pokazala uspješna i da ju je moguće implementirati i na nelinearni model.

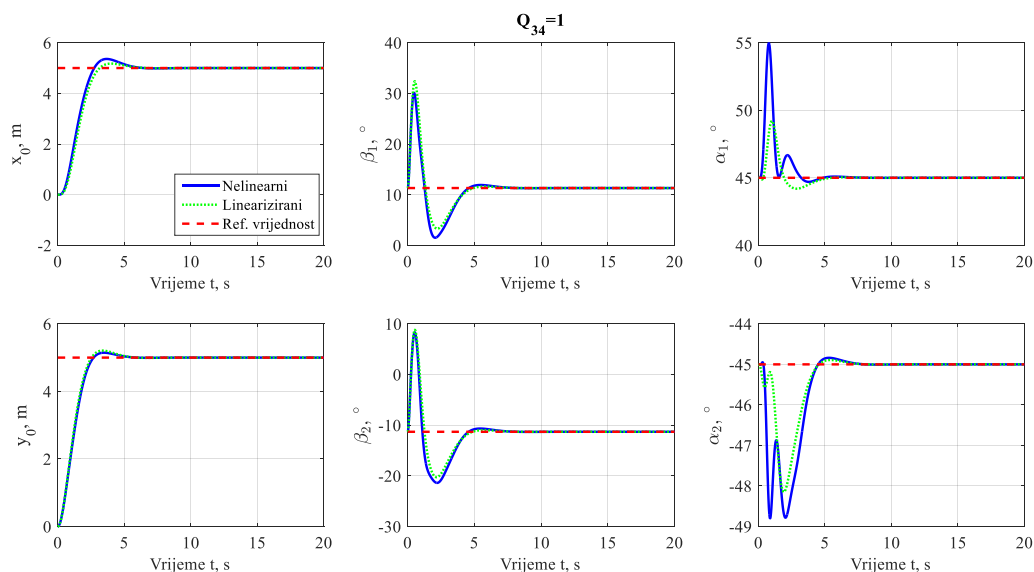
Za razliku od LQR-a s jednom letjelicom (podpoglavlje 4.1.3.), kada je najveća težina bila postavljena uz pogrešku  $\alpha$ , na sustavu s dvije letjelice su iste te težine postavljene i za pogrešku kutova zakreta. Sljedeće provedene simulacije su za različite težinske faktore  $Q_{33}$  i  $Q_{44}$  za  $\beta$  te nakon toga različite  $Q_{55}$  i  $Q_{66}$  za  $\alpha$ , odnosno za njihove varijacije  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$  jer

se radi o lineariziranom modelu. Iako se faktori odnose na varijacije kutova oni naravno samim time utječu i na same kutove  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Na svim sljedećim rezultatima kod lineariziranog modela prikazane su varijacije kutova, a na rezultatima kod usporedbe s nelinearnim modelom prikazani su pravi kutovi. Najprije su implementirani različiti  $Q_{33}$  i  $Q_{44}$  koji su jednakog iznosa te se označuju kao  $Q_{34}$ , te matrica  $\mathbf{Q}$  iznosi  $\mathbf{Q} = \text{diag} [10, 100, Q_{34}, Q_{34}, 1000, 1000, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ . Provedene su simulacije za vrijednosti  $Q_{34} = 1, 10, 100$  i 1000.



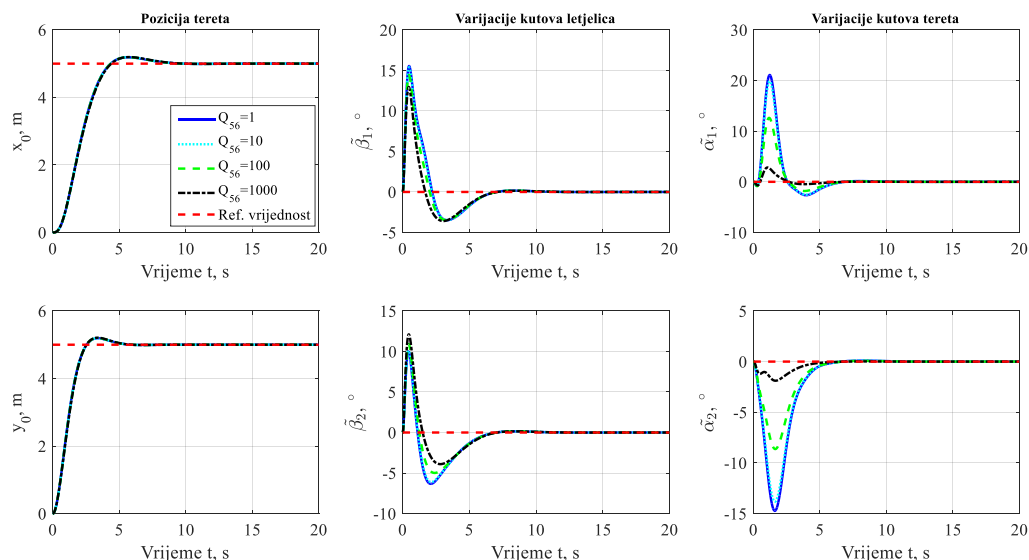
**Slika 44. Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za različite  $Q_{33}$  i  $Q_{44}$**

Rezultati [Slika 44] su pokazali da manji iznos  $Q_{34}$  daje brži odziv  $x_0$ , ali veće varijacije to jest pomake kutova  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Kako se povećava  $Q_{34}$  tako se smanjuju pomaci kutova sustava. Također je prikazano da i kod najmanjeg iznosa  $Q_{34} = 1$ , varijable postižu svoje željene vrijednosti i zadržavaju ih kroz vrijeme. Rezultati su pokazali da mijenjanje težina  $\tilde{\beta}_1$ ,  $\tilde{\beta}_2$  to jest promjena  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ne utječe na vertikalni pomak tereta. Usporedba s nelinearnim modelom kod najveće vrijednosti  $Q_{34} = 1000$  je već prikazana [Slika 39], a kako na model utječe najmanja vrijednost tog faktora je na slici [Slika 45]. Rezultati kod usporedbe nelinearnog s linearnim modelom prikazuju kutove  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , a ne njihove varijacije. Simulacija s najmanjim težinskim faktorom pokazuje velike pomake kutova  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  te odstupanja od lineariziranog modela u vrijednostima kod kutova  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .



**Slika 45.** Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za  $Q_{33} = Q_{44} = 1$

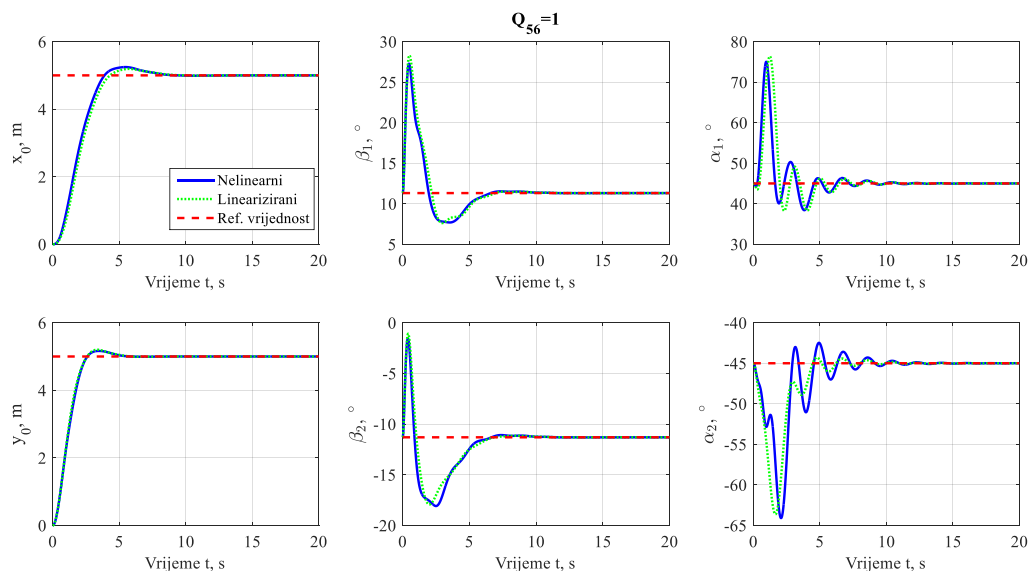
Nakon različitih faktora za varijacije kutova  $\beta_1, \beta_2$  su implementirani različiti  $Q_{55}$  i  $Q_{66}$  koji su jednakog iznosa te se označuju kao  $Q_{56}$ . Matrica  $Q$  iznosi  $Q = \text{diag} [10, 100, 1000, 1000, Q_{56}, Q_{56}, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ . Provedene su simulacije za vrijednosti  $Q_{56} = 1, 10, 100$  i  $1000$ .



**Slika 46.** Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za različite  $Q_{55}$  i  $Q_{66}$

Slika [Slika 46] pokazuje utjecaj različitih težinskih faktora uz  $\alpha_1, \alpha_2$  na cijeli model. Kod najmanje vrijednosti  $Q_{56} = 1$  pomak kutova tereta je najveći, te se povećanjem tih vrijednosti smanjuje, i kod  $Q_{56} = 1000$  je najmanji. Iz jednadžbi sustava (148)-(153) se može primjetiti da  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  ne utječu direktno na  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , ali skupa s  $\beta_1$  i  $\beta_2$  utječu na  $x_0$ . Rezultati pokazuju da promjenom težine  $\alpha$ , se mijenjaju  $\beta$ , a ne  $x_0$ , što znači da se pomoću kutova  $\beta$  kompenzira utjecaj kutova  $\alpha$  na horizontalni smjer. Usporedba s nelinearnim modelom kod najveće

vrijednosti  $Q_{56}$  je na slici [Slika 39], a usporedba kod najmanje vrijednosti je na slici [Slika 47]. Kako nema velike težine na smanjenju greške kutova  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  u nelinearnom modelu su se pojavile oscilacije na početku kretanja koje su se smirile tek nakon 10 sekunde te su kutovi dostigli željenu vrijednost od  $45^\circ$ , odnosno  $-45^\circ$  za drugu letjelicu.



**Slika 47. Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za  $Q_{55} = Q_{66} = 1$**

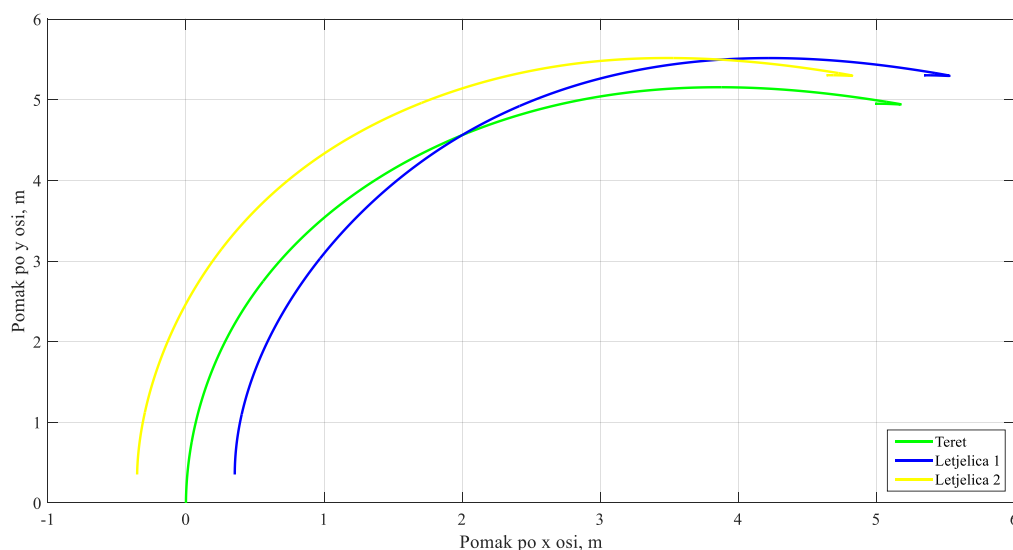
Promjenama težina pogreški kutova sustava se pokazalo da su pomaci manji i upravljanja točnija što su faktori  $Q_{33}$ ,  $Q_{44}$ ,  $Q_{55}$  i  $Q_{66}$  veći, te su i tada odstupanja od nelinearnog modela manja. Kod velikih faktora uz kutove, upravljanje je uspješno implementirano kod originalnog, nelinearnog sustava.

#### 4.2.2. Rezultati upravljanja primjenom LQR na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\beta_{10}$ , $\beta_{20}$ i $\alpha_{10}$ , $\alpha_{20}$

U ovom dijelu su provedene simulacije na modelu koji je lineariziran oko stacionarnih kutova  $\beta_{10}$ ,  $\beta_{20}$  i  $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{20}$ , i s upravljačkim varijablama (158) i (159). Za razliku od modela na kojemu su provedene prethodne simulacije (podpoglavlje 4.2.1.), ovaj odabir upravljačkih varijabli u jednadžbama sustava ne eliminira sve konstantne članove. Sinteza za takav sustav se provela na način da su ti konstantni članovi smatrani kao poremećaj. Najprije su provedene simulacije kada je sinteza LQR-a provedena na standardni način to jest poremećaj se ne uklanja preko LQR-a. Nakon toga su provedene simulacije kada je sinteza LQR-a provedena tako da LQR uklanja i poremećaj.

## 4.2.2.1. Rezultati primjene LQR bez uklanjanja poremećaja

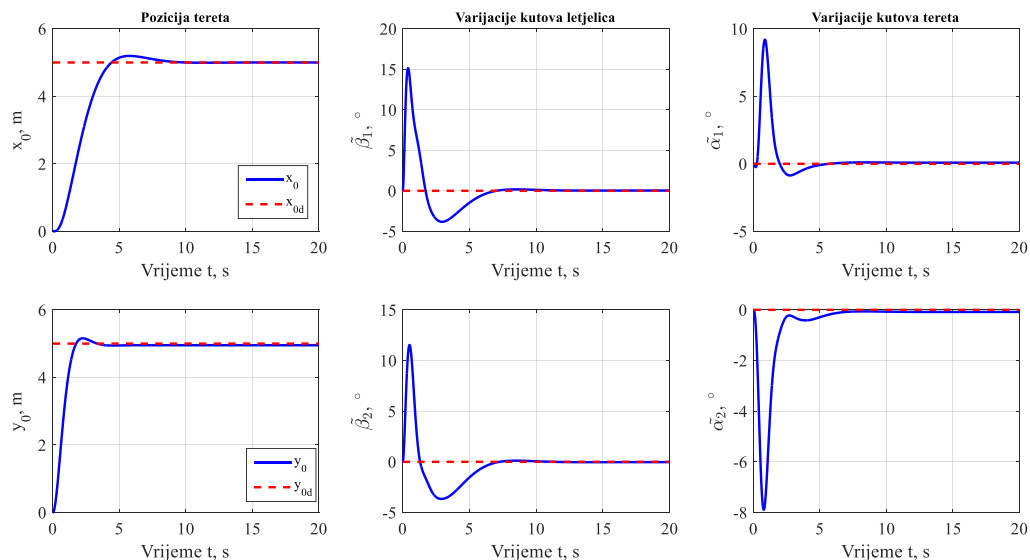
Cilj upravljanja je prenijeti teret na željenu poziciju i održavati zadane stacionarne kutove između letjelica i tereta. Zadane su referentne vrijednosti varijabli gdje je konstantna željena pozicija tereta  $x_{0d} = 5$  m,  $y_{0d} = 5$  m, kutovi između tereta i letjelica  $\alpha_{10} = 45^\circ$  i  $\alpha_{20} = -45^\circ$  i odgovarajući kutovi zakreta  $\beta_{10} = 11,3^\circ$  i  $\beta_{20} = -11,3^\circ$ . Odabrane matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  imaju na dijagonalama sljedeće vrijednosti:  $\mathbf{Q} = \text{diag} [10, 500, 1000, 1000, 1000, 1000, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  i  $\mathbf{R} = \text{diag} [10, 10, 10, 10]$  i skupa s upravljačkim zakonom  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_d)$  su provedene sljedeće simulacije. Prikaz pomaka letjelica s teretom u  $XY$  ravnini je na slici [Slika 48].



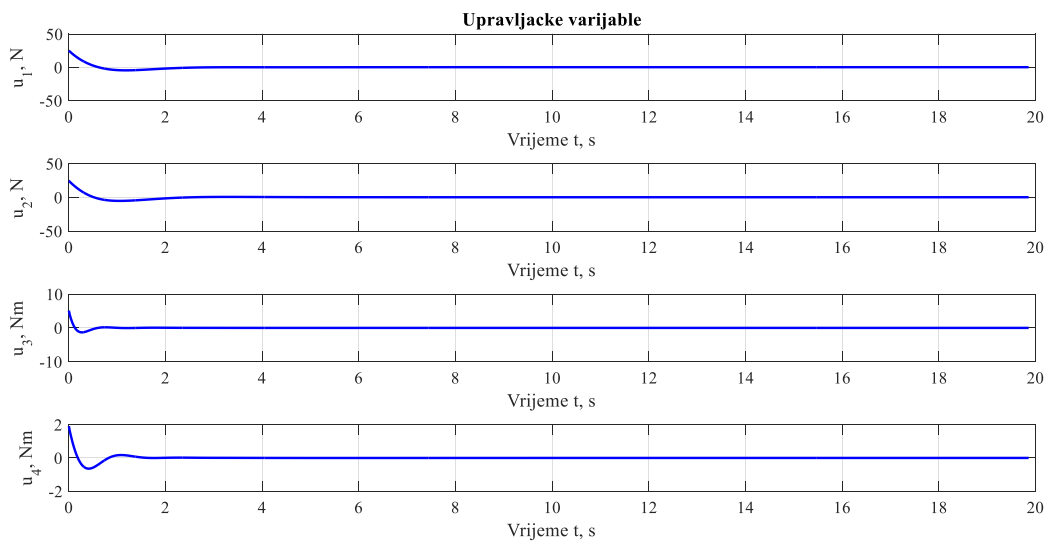
**Slika 48. Prikaz pomaka dvije letjelice s teretom upravljanim LQR bez uklanjanja poremećaja u  $XY$  ravnini**

Ovisnost pozicije tereta i varijacija kutova sustava je prikazana na slici [Slika 49]. Vrijednost  $x_{0d}$  je nakon 10 sekunde uspješno postignuta te se i zadržava. Na varijabli  $y_0$  se vidi konstantno odstupanje od reference što se događa zbog neuklonjenog konstantnog utjecaja gravitacije. Varijacije kutova  $\beta$  na početku dostižu vrijednosti od  $10^\circ$  te nakon 5 sekunde se približe nuli uz jako malo odstupanje. Isto tako i varijacije kutova  $\alpha$  na početku kretanja imaju pomake do  $8^\circ$  te nakon 5 sekunde se približe željenoj nuli uz malo odstupanje.





**Slika 49. Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja**



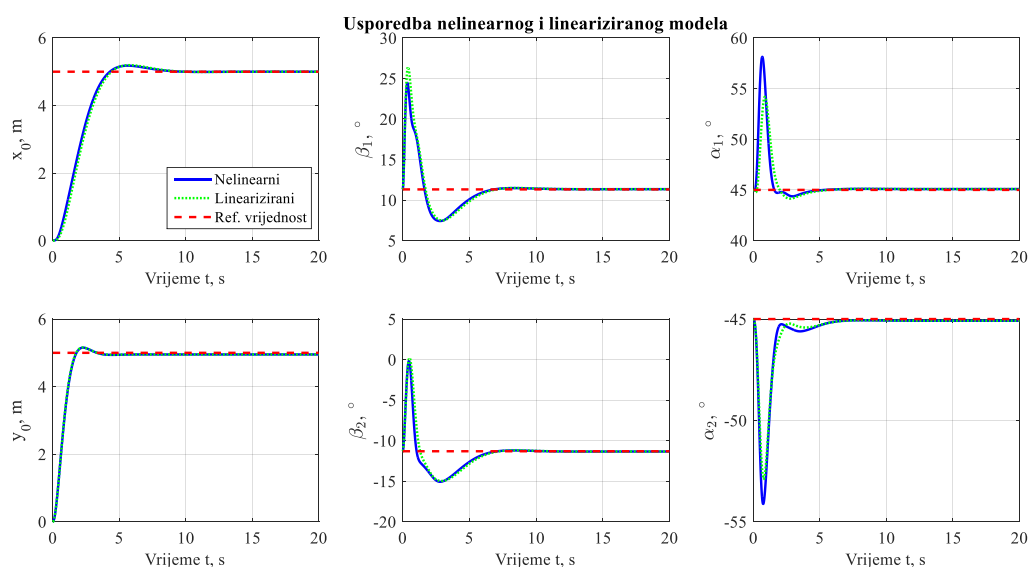
**Slika 50. Upravljačke varijable za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja**

Na slici [Slika 50] su prikazane upravljačke varijable  $u$  ovisnosti o vremenu. Sile  $u_1$  i  $u_2$  su jednakog iznosa i njima se upravlja let u vertikalnom smjeru. Moment  $u_3$  prve letjelice je većeg iznosa, nego moment  $u_4$ , što se vidjelo i iz prikaza kutova, da su veći pomaci prve letjelice.

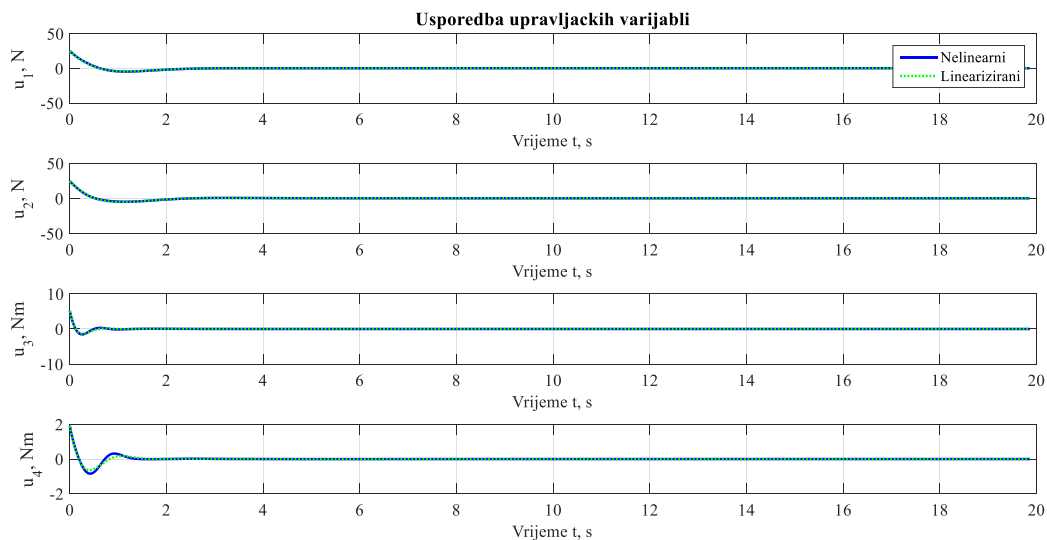
U ovom slučaju kada poremećaj nije uklonjen, javljaju se odstupanja od željenih stanja, ali su ona konstantnog iznosa. Takvim sustavom s poremećajem se uspjelo upravljati jer iznosi poremećaja nisu veliki. Iz modela (161)-(166) gdje je poremećaj  $\mathbf{d}$  (172) i za provedene

simulacije je  $d_y$  reda  $10^{-1}$  dok je  $d_\alpha$  reda  $10^{-15}$ . Da bi se provjerila valjanost sinteze ovog upravljanja, linearizirani model je uspoređen s nelinearnim.

Parametri sustava i željena stanja su ista kao i za prethodno provedene simulacije, i sa početnim uvjetima nelinearnog sustava  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_{10}$ ,  $\beta_2 = \beta_{20}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20}$ , kako bi početni kutovi nelinearnog i linearnog modela bili jednaki. Rezultati [Slika 51] prikazuju poziciju tereta te kutove  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  u ovisnosti o vremenu. Nelinearni model prati ponašanje linearnog modela, postoje mala odstupanja na početku kretanja, ali se nakon 5 sekundi željene vrijednosti stacionarnih kutova zadržavaju. Također se i upravljačke varijable [Slika 52] skoro pa ni ne razlikuju u iznosima kroz vrijeme. I kod nelinearnog modela varijabla  $y_0$  ima vidljivo konstantno odstupanje od željene vrijednosti.

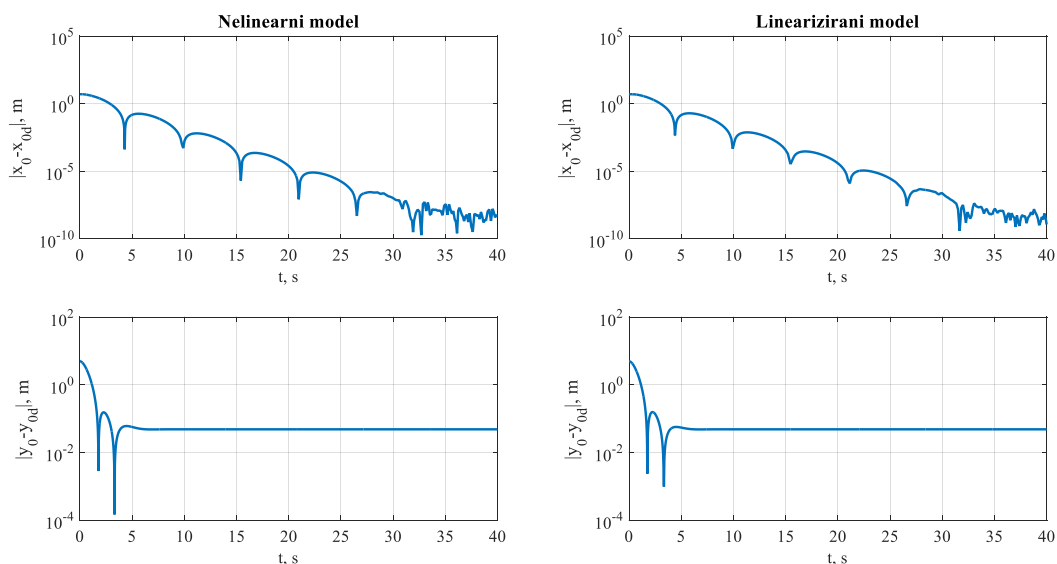


**Slika 51. Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja**

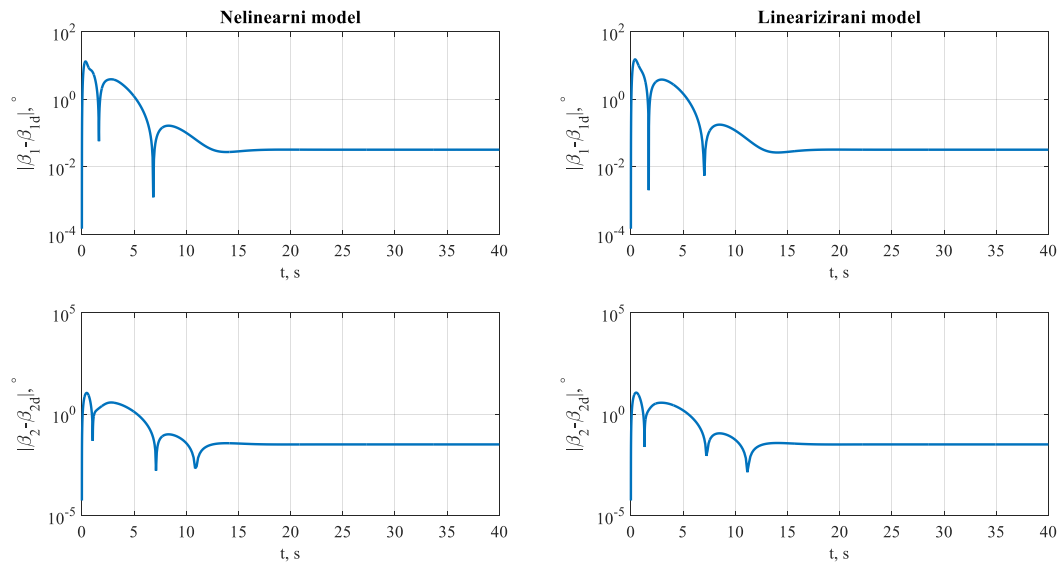


**Slika 52. Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje bez uklanjanja poremećaja**

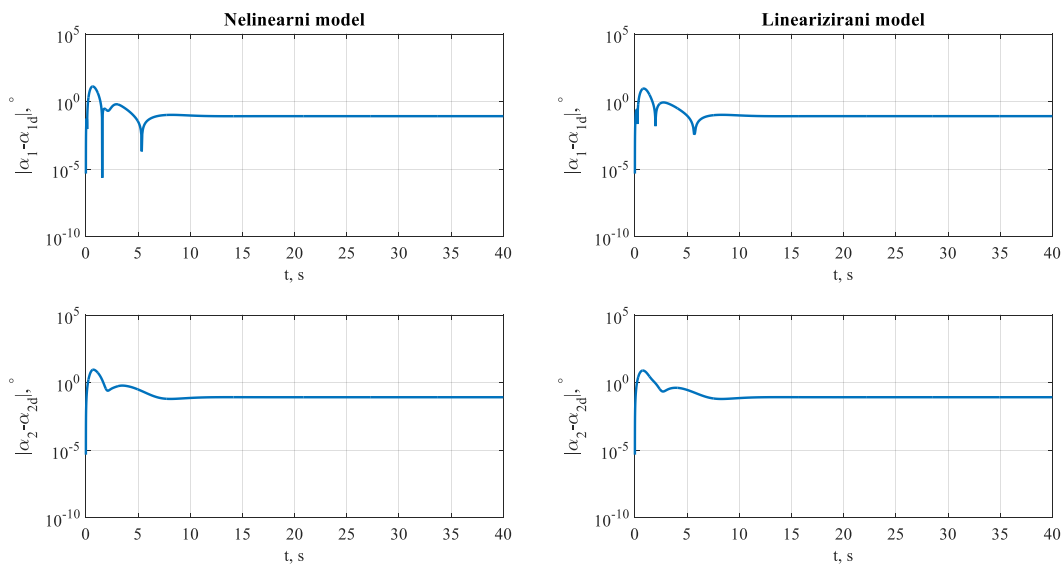
S obzirom na to da se u sustavu javljaju vidljive pogreške, prikazane su i njihove apsolutne vrijednosti. Prikaz pogreške pozicija tereta [Slika 53] pokazuje da je greška u  $x$  smjeru zanemariva, jer na nju ne utječe poremećaj te nema pogreške. Regulacijsko odstupanje koje se javlja kod  $y$  je reda  $10^{-1}$  što nije tako zanemarivo i kako se vidi je konstantno kroz vrijeme. Na slikama [Slika 54] i [Slika 55] su odstupanja kutova, koja su reda  $10^{-2}$ , što s obzirom da je riječ o stupnjevima su u dopuštenim granicama.



**Slika 53. Usporedba apsolutnih pogreški pozicije tereta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR bez uklanjanja poremećaja**



**Slika 54. Usporedba apsolutnih pogreški kutova zakreta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR bez uklanjanja poremećaja**

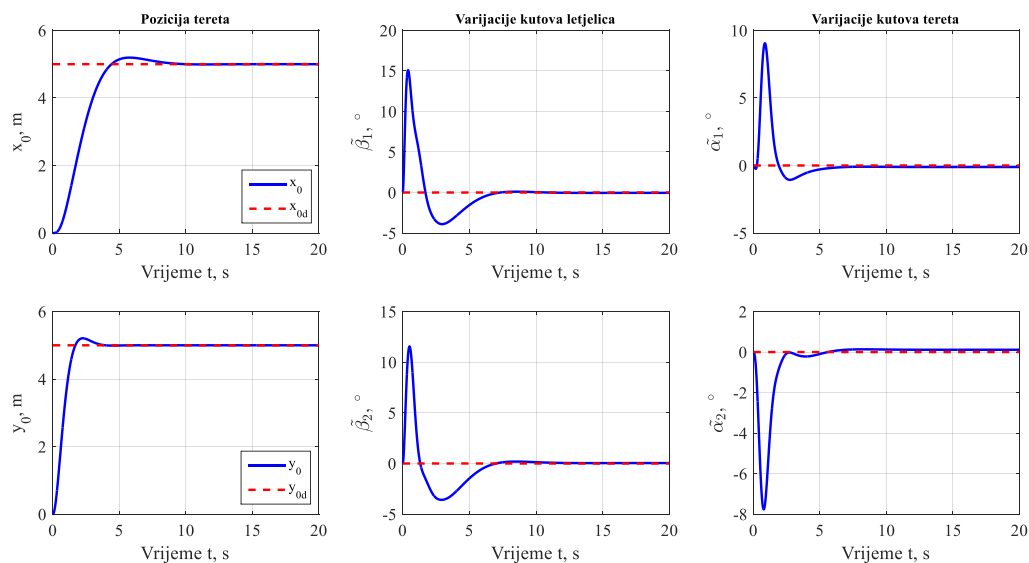


**Slika 55. Usporedba apsolutnih pogreški kutova između tereta i dviju letjelica nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR bez uklanjanja poremećaja**

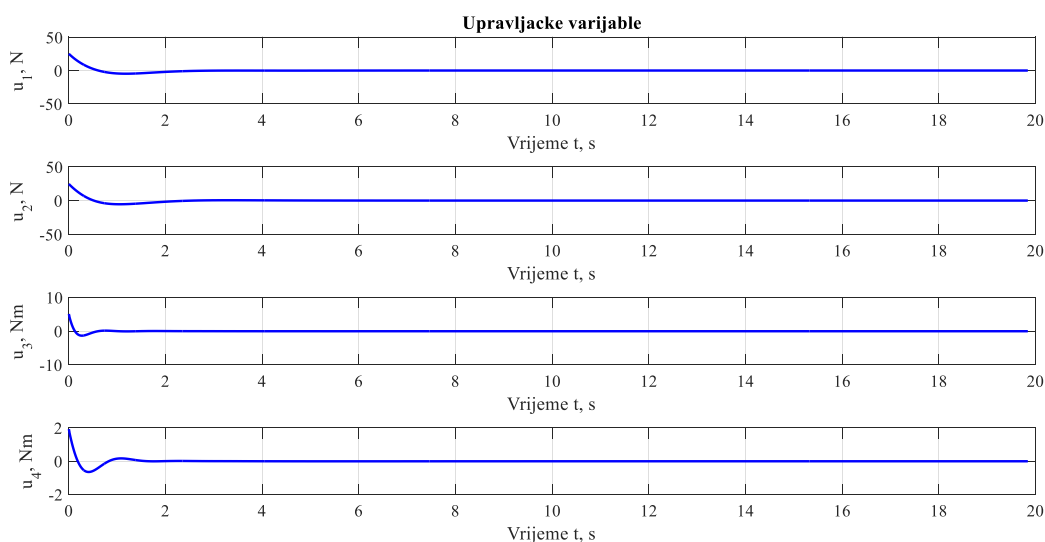
#### 4.2.2.2. Rezultati primjene LQR s uklanjanjem poremećaja

U ovom dijelu su provedene simulacije upravljanja primjenom LQR-a uz uklanjanje poremećaja te je upravljački zakon  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_d) + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{x}}_d$ . Zadane su referentne vrijednosti varijabli  $x_{0d} = 5$  m,  $y_{0d} = 5$  m, kutovi između tereta i letjelica  $\alpha_{10} = 45^\circ$  i  $\alpha_{20} = -45^\circ$  i odgovarajući kutovi zakreta  $\beta_{10} = 11,3^\circ$  i  $\beta_{20} = -11,3^\circ$  i svi početni uvjeti nula. Odabrane matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  su iste kao i kod prethodnog LQR-a, i iznose:  $\mathbf{Q} = \text{diag} [10, 500, 1000, 1000,$

1000, 1000, 1, 1, 1, 1, 1, 1] i  $\mathbf{R} = \text{diag} [10, 10, 10, 10]$ . Rezultati varijabli sustava u ovisnosti o vremenu nakon provedene simulacije su na slici [Slika 56]. Odmah je vidljiva razlika u varijabli  $y_0$  nego kad nije bilo uklanjanja poremećaja (odjeljak 4.2.1.). Sada teret bez odstupanja prati  $y_{0d}$  oko 3 sekunde, ali isto tako i  $x_{0d}$  samo oko 10 sekunde. Pomaci varijacija kutova su isti kao i kad nije bilo uklanjanja poremećaja te nakon 5 sekunde prate nulu. Prikaz upravljačkih varijabli [Slika 57] ne pokazuje vidljive razlike od upravljanja bez poremećaja, što je i posljedica male vrijednosti konstantnih poremećaja.

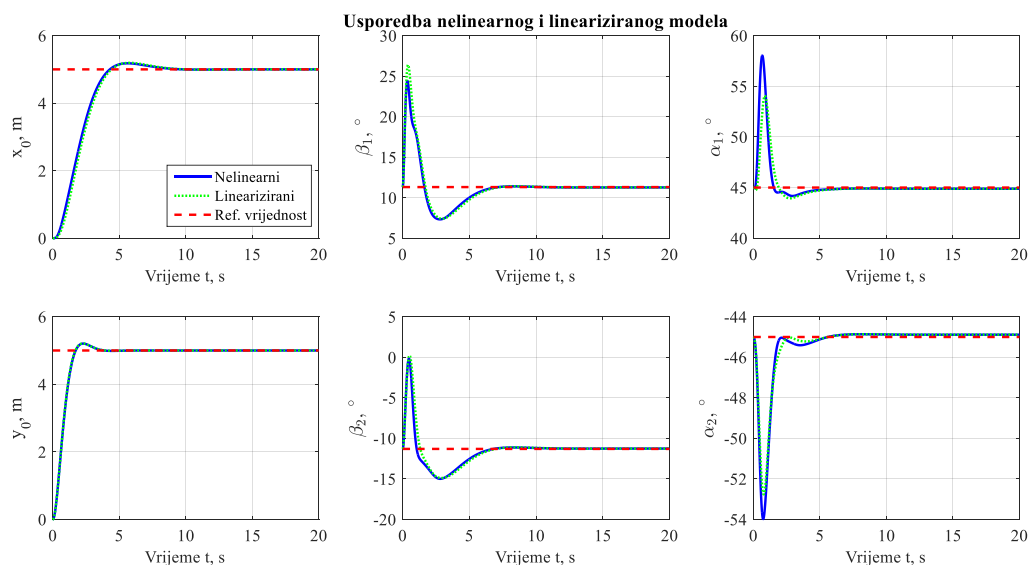


**Slika 56. Pozicija tereta, varijacije kutova zakreta i tereta za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja**

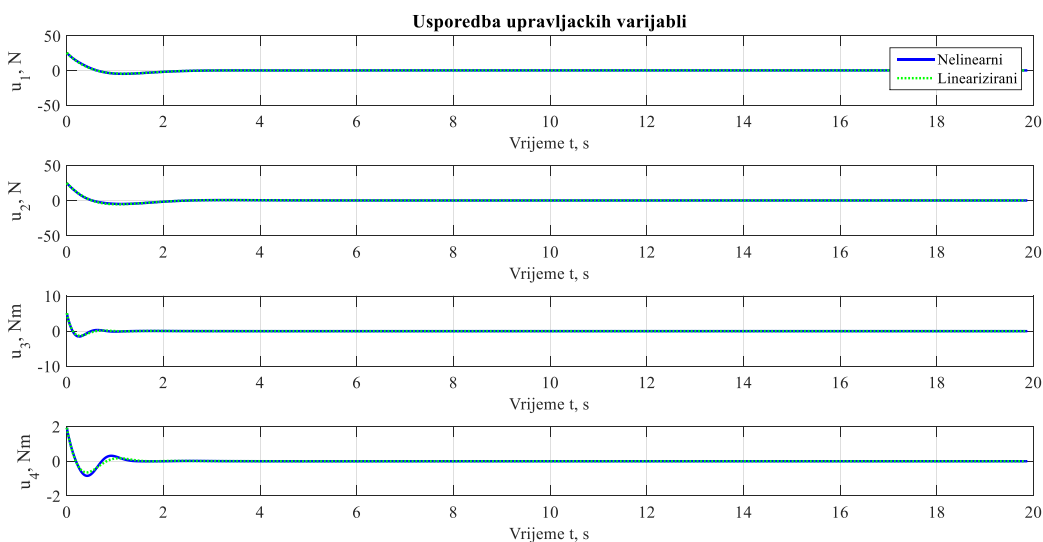


**Slika 57. Upravljačke varijable za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja**

I ovaj način upravljanja modelom je implementiran na nelinearni model. Početni uvjeti nelinearnog modela su  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_{10}$ ,  $\beta_2 = \beta_{20}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20}$ , te je provedena simulacija dala sljedeće rezultate za usporedbu nelinearnog i lineariziranog modela, gdje su uspoređeni kutovi sustava, a ne njihove varijacije.



**Slika 58. Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja**

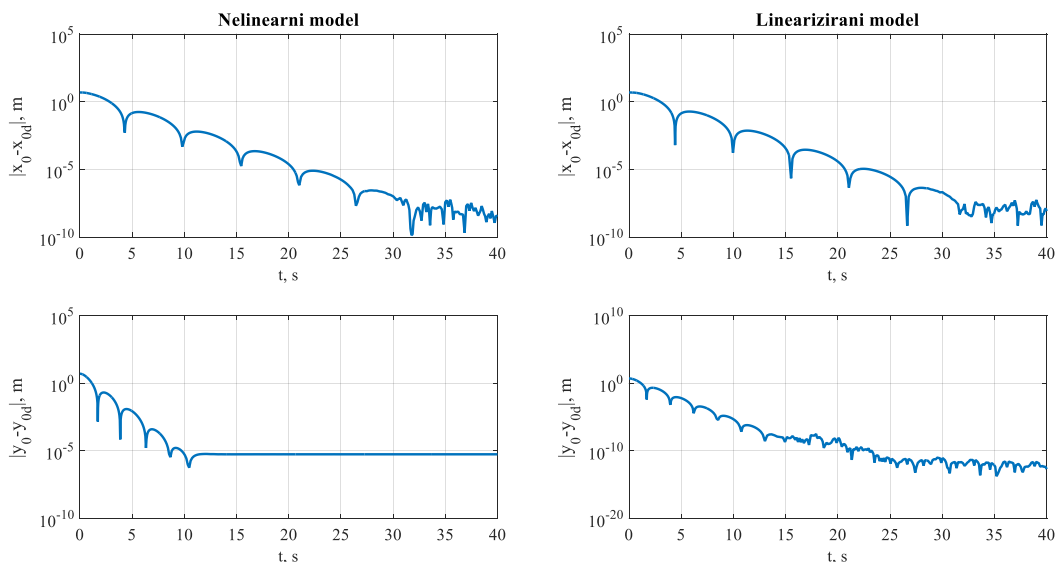


**Slika 59. Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog i lineariziranog modela za LQR upravljanje uz uklanjanje poremećaja**

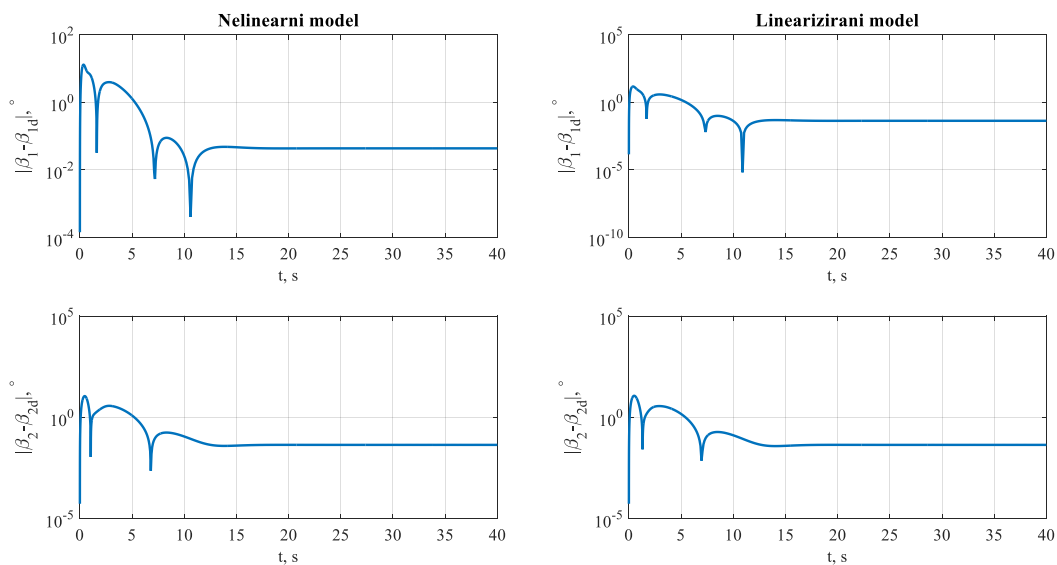
Slika [Slika 58] pokazuje preklapanje odziva nelinearnog i linearnog modela kod pozicije tereta, i nema pogreške kod  $y_0$  varijable. I odzivi kutova nelinearnog modela prate ponašanje linearnog modela, ali s malim odstupanjima u vrijednostima. Usporedba upravljačkih varijabli

[Slika 59] isto tako je pokazala jednake varijable  $u_1$  i  $u_2$  oba modela. Momenti  $u_3$  i  $u_4$  pokazuju male razlike u iznosima između dva modela, ali su istih oblika.

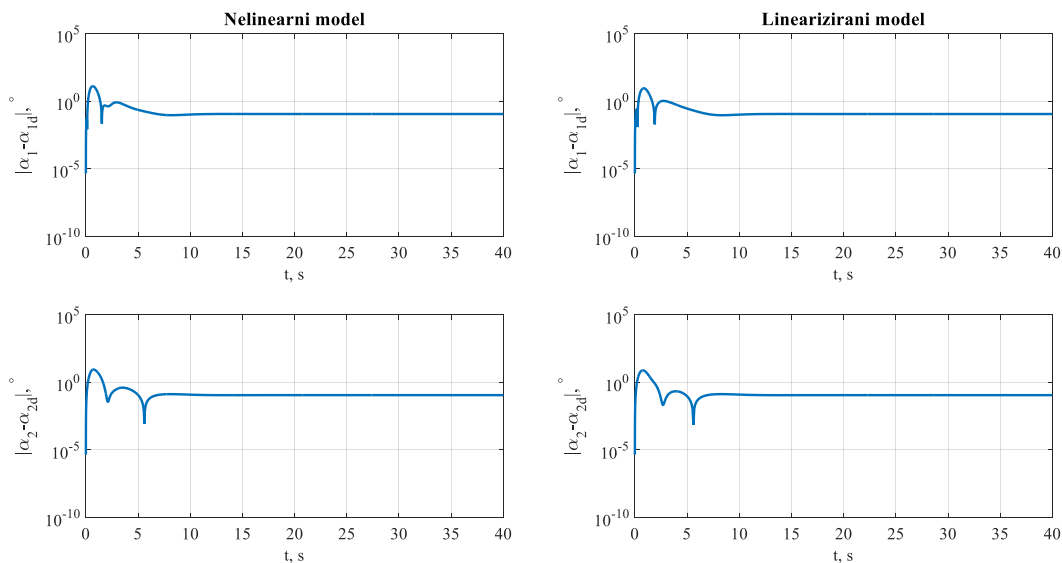
Uspješnost sinteze LQR-a s uklanjanjem poremećaja je dodatno provjerena pomoću apsolutnih pogrešaka sustava.



**Slika 60. Usporedba apsolutnih pogreški pozicije tereta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR uz uklanjanje poremećaja**



**Slika 61. Usporedba apsolutnih pogreški kutova zakreta nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR uz uklanjanje poremećaja**



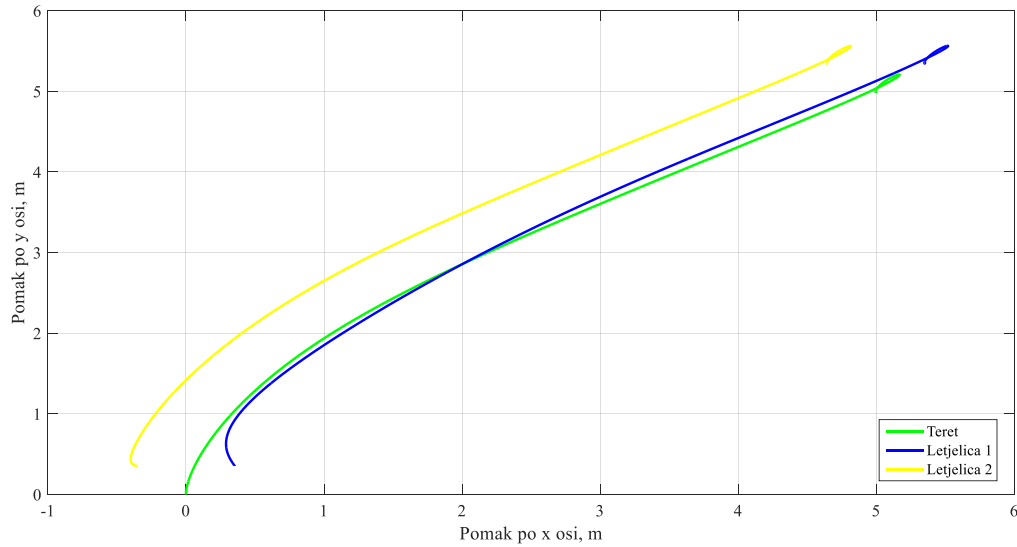
**Slika 62. Usporedba apsolutnih pogreški kutova između tereta i dviju letjelica nelinearnog i lineariziranog modela kod LQR uz uklanjanje poremećaja**

Pogreške [Slika 60] pozicije tereta i u  $x$  i  $y$  smjeru su se pokazale zanemarive. Prednost uklanjanja poremećaja je vidljiva iz toga što kod linearnog modela greška prelazi red  $10^{-10}$  dok je kod nelinearnog modela  $10^{-5}$ . Kod pogrešaka kutova sustava [Slika 61] i [Slika 62] nema vidljive razlike od upravljanja bez uklanjanja pogreške. Pogreške kutova se ni ovim upravljanjem nisu potpuno uklonile, ali su reda  $10^{-2}$ .

#### 4.2.3. Rezultati upravljanja primjenom LQR na modelu s poremećajem i stacionarnim kutovima $\alpha_{10}$ , $\alpha_{20}$

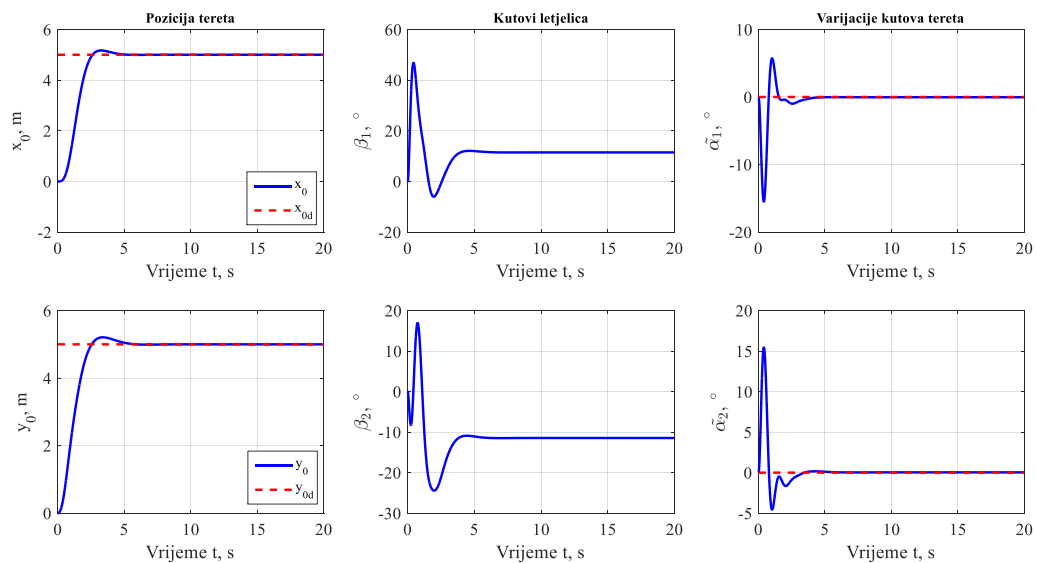
U ovom dijelu su provedene simulacije na modelu koji je lineariziran uz pretpostavku o malim kutovima zakreta  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , te stacionarnim kutovima  $\alpha_{10}$  i  $\alpha_{20}$ . Razlog provođenja simulacija na takvom modelu je zbog provjere uspješnosti upravljanja ako nisu izvedene statičke jednadžbe ravnoteže. Zadane su željene vrijednosti  $x_{0d} = 5$  m,  $y_{0d} = 5$  m, i kutovi  $\alpha_{10} = 45^\circ$  i  $\alpha_{20} = -45^\circ$  i za razliku od prethodnih slučajeva (podpoglavlje 4.2.2.), u ovom slučaju nema zadanih stacionarnih kutova  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$ . Svi početni uvjeti su nula i odabrane matrice su  $\mathbf{Q} = \text{diag} [10, 100, 10, 10, 1000, 1000, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  i  $\mathbf{R} = \text{diag} [10, 10, 10, 10]$ . Prikaz kretanja sustava dvije letjelice s teretom u  $XY$  ravnini je na slici [Slika 63]. Prije nego teret dostigne željenu poziciju, letjelice naprave zamahe i u horizontalnom i u vertikalnom smjeru.



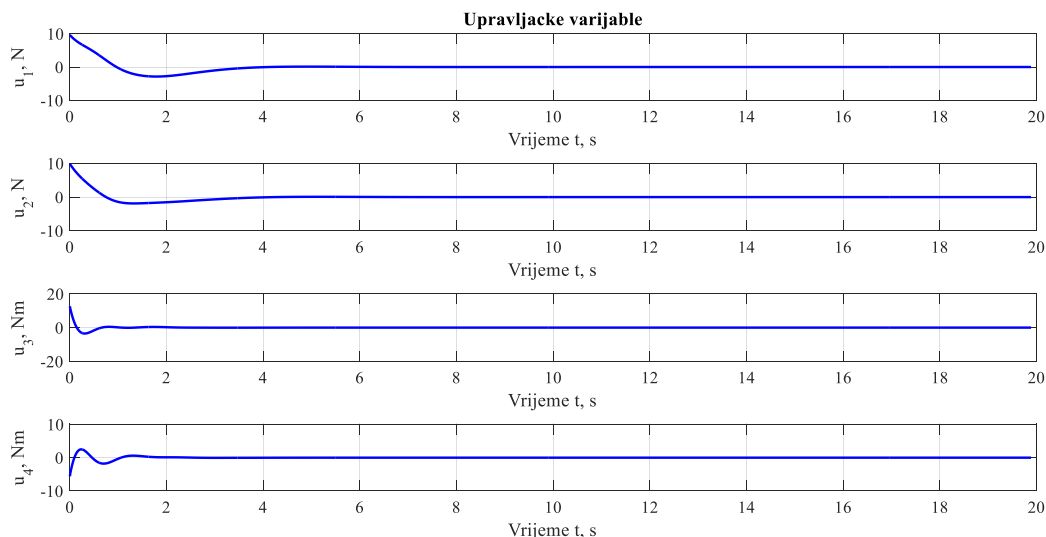


**Slika 63. Prikaz pomaka dvije letjelice s teretom upravljanih LQR-om u XY ravnini na modelu bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$**

Prikazi varijabli sustava u ovisnosti o vremenu su na sljedećim slikama [Slika 64] i [Slika 65].



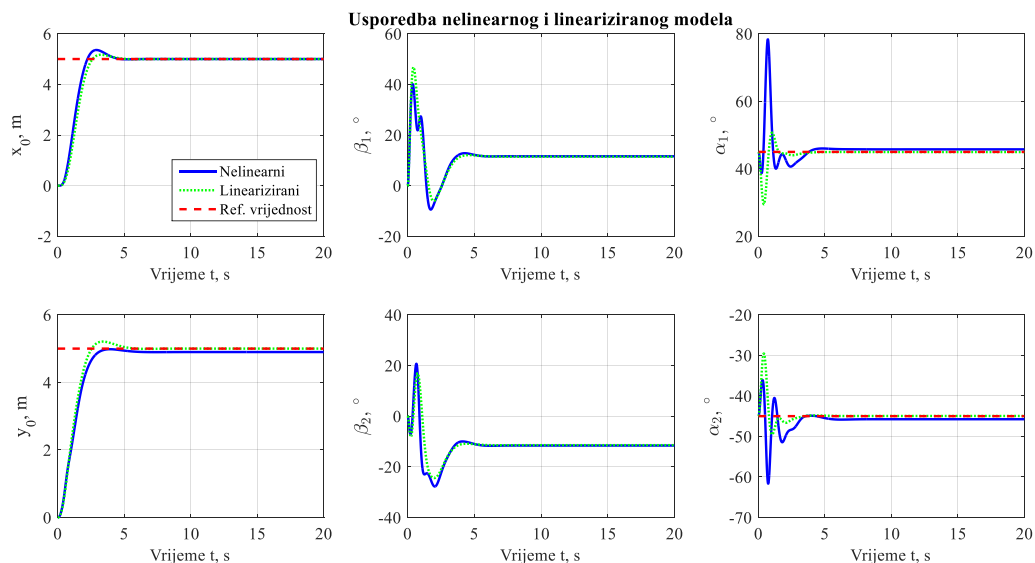
**Slika 64. Pozicija tereta, kutovi letjelice i varijacije kutova tereta upravljanih LQR-om na modelu bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$**



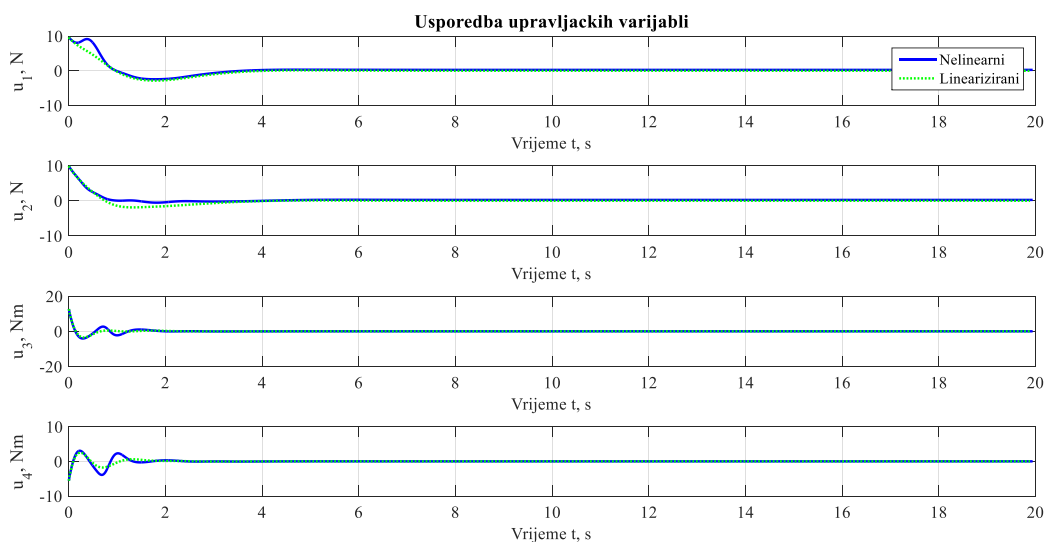
**Slika 65. Upravljačke varijable upravljane LQR-om na modelu bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$**

Rezultati [Slika 64] su pokazali uspješno postizanje i zadržavanje željene vrijednosti varijabli  $x_0$  i  $y_0$ , obje oko 5 sekunde. Kutovi  $\beta_1$  i  $\beta_2$  imaju konstantne vrijednosti, iznosa  $11,4^\circ$ . Kako se može primjetiti, takav kut nije slučajan, nego je približan vrijednosti stacionarnog kuta koji je dobiven iz uvjeta ravnoteže,  $\beta_{10} = 11,3^\circ$ . Iz tog razloga je faktor uz  $\beta_1$  i  $\beta_2$  iznosa 10, a ne veći, jer se povećanjem tog faktora taj kut sve više približava nuli. Varijacije kutova između tereta i letjelica na početku kretanja postižu vrijednosti i do  $15^\circ$  što nije poželjno, ali su oko 5 sekunde uspješno svedene na nulu. Prikaz odgovarajućih upravljačkih varijabli je na slici [Slika 65].

Kao i sve prethodno provedene simulacije na pojednostavljenim modelima i ovaj model je uspoređen s nelinearnim modelom. Početni uvjeti nelinearnog sustava su  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20}$  te su dobiveni sljedeći rezultati. Na slici [Slika 66] je prikazana samo uspješna regulacija varijable  $x_0$ . Kod varijable  $y_0$  je nakon 5 sekunde vidljivo konstantno odstupanje od željene vrijednosti. Kutovi letjelica prate ponašanje linearnog modela do 5 sekunde i dalje se zadržavaju na konstantnoj vrijednosti. Kutovi  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  su pokazali velika odstupanja kod nelinearnog modela, na početku kretanja skoro do  $80^\circ$  te za razliku od linearnog modela, postoji i konstantno odstupanje od željene stacionarne vrijednosti. I upravljačke varijable su pokazala odstupanja između dva modela [Slika 67].

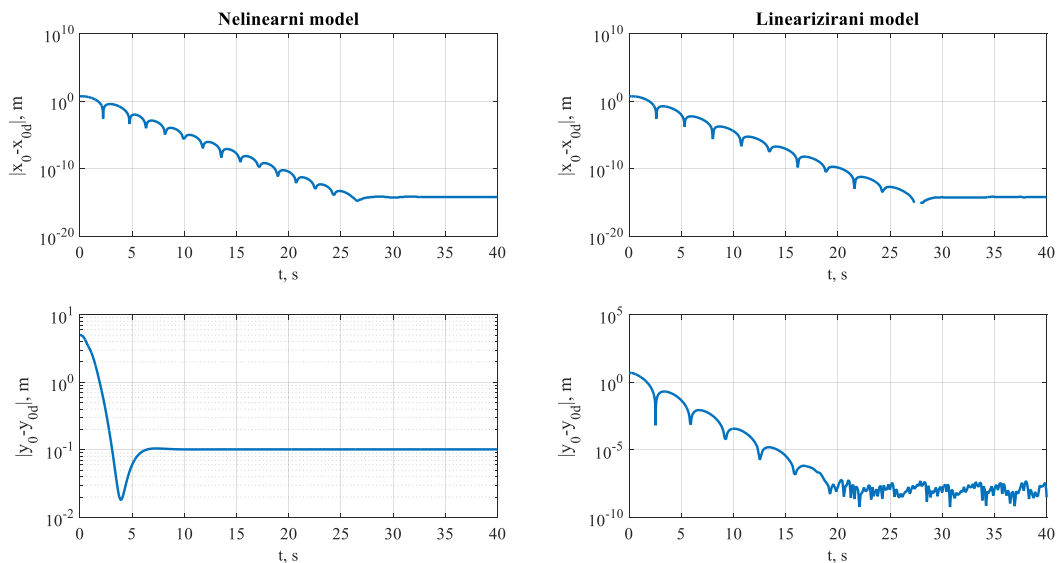


**Slika 66. Usporedba nelinearnog modela s linearnim modelom bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$**

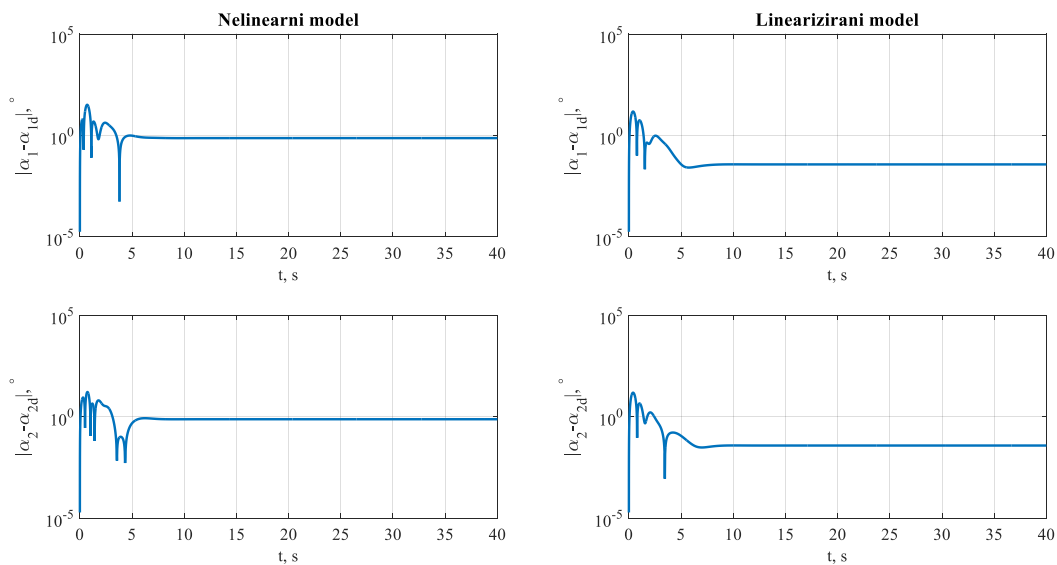


**Slika 67. Usporedba upravljačkih varijabli nelinearnog modela s linearnim modelom bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$**

Ovakvi rezultati su pokazali da primjena ovog upravljanja na nelinearni model nije najuspješnija jer postoje konstanta odstupanja od željenih vrijednosti. Veličina tih odstupanja se također prikazala usporedbom apsolutnih pogreški ta dva modela.



**Slika 68.** Apsolutna pogreška pozicije tereta nelinearnog modela i linearnog modela bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$



**Slika 69.** Apsolutna pogreška kutova tereta nelinearnog modela i linearnog modela bez  $\beta_{10}$  i  $\beta_{20}$

Slika [Slika 68] prikazuje zanemarivu pogrešku varijable  $x_0$  i kod nelinearnog i kod linearnog modela. Kod nelinearnog modela, pozicija  $y_0$  ima konstantnu pogrešku reda  $10^{-1}$  što nije zanemariva vrijednost. Prikaz pogreške kutova između tereta i obje letjelice [Slika 69] je pokazala pogrešku reda  $10^0$  kod nelinearnog modela dok je kod linearnog modela ta pogreška manja, reda  $10^{-2}$ . Upravljanje izvedeno na ovom modelu se pokazalo uspješnije za sami model nego kada je implementirano na nelinearni model. Nelinearni model je pokazao konstantnu pogrešku od željenih varijabli osim u slučaju varijable  $x_0$ .

## 5. ZAKLJUČAK

Upravljanje prijenosom tereta primjenom autonomnih letjelica je u ovom radu izvedeno pomoću dvije metode, metodom eksterne linearizacije i sintezom linearnog kvadratičnog regulatora. Simulacijski rezultati su ilustrirali zadovoljavajuće performanse upravljačkih sustava. Na sustavu s jednom letjelicom je pokazan i primjer kada teret nije pasivno ovješeno, odnosno kad je moguće njime direktno manipulirati. Upravljanje provedeno metodom eksterne linearizacije pokazalo se uspješno na takvom modelu dok je na modelu kod pasivno ovješeno tereta došlo do malih oscilacija kutova sustava. U oba slučaja, slijeđenje vremenski promjenjive trajektorije je provedeno sa zanemarivo malim pogreškama. Metoda eksterne linearizacije je isto tako provedena na bilinearnom i potpuno lineariziranom modelu, gdje su se razlike između odziva ta dva modela pojavila samo kod konvergencije pogreške prema nuli. Samo u tom pogledu se potpuno linearizirani model pokazao uspješnijim od bilinearnog. Sinteza LQR-a na sustavu s jednom letjelicom se provela na potpuno lineariziranom modelu te su rezultati zadovoljavajući. Cilj LQR-a je bilo dovođenje letjelice na zadanu poziciju uz minimalno njihanje tereta što je uspješno i odrađeno uz zanemarive pogreške. Također su se i obje metode pokazale primjenjivima na originalni, nelinearni model.

Sustav prijenosa tereta s dvije letjelice je umjesto minimalnog kuta njihanja tereta za zadatak imao održavati jednake kutove između obje letjelice i tereta. Model je lineariziran oko stacionarnih kutova dobivenih iz statičkih jednadžbi ravnoteže. Na sustavu s dvije letjelice je provedena samo sinteza LQR-a koja se pokazala uspješna u dovođenju tereta na željenu poziciju uz održavanje zadanih kutova sustava. Sinteza upravljačkog zakona dobivena preko linearnog modela pokazala se uspješna i na nelinearnom modelu.

Dodatno je izveden još i model koji ne koristi upravljačke varijable dobivene iz statičke ravnoteže te i model koji ne koristi ni stacionarne kutove zakreta dobivene iz statičke ravnoteže. Takvi modeli imali su poremećaje u sustavu koji su se pokušali eliminirati preko LQR-a. Pogreška u vertikalnom smjeru je uspješno uklonjena nakon kompenzacije poremećaja, ali samo kod modela sa zadanim stacionarnim kutovima zakreta. Kod modela bez zadanih stacionarnih kutova zakreta, uklanjanje poremećaja preko LQR-a nije uklonilo pogrešku i ostalo je konstantno regulacijsko odstupanje u varijablama.

---

U ovom radu su sinteze upravljačkih zakona svih upravljanja provedene na pojednostavljenim modelima, što se i u slučaju s jednom i s dvije letjelice pokazalo kao uspješna metoda. Isto tako se i implementacija tih zakona na nelinearni model pokazala uspješnom.

## LITERATURA

- [1] M. Bernard and K. Kondak, “Generic slung load transportation system using small size helicopters,” in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, May 2009., pp. 3258–3264.
- [2] I. Palunko, P. Cruz, and R. Fierro, “Agile load transportation: Safe and efficient load manipulation with aerial robots,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 19, no. 3, pp. 69–79, 2012.
- [3] J. Kasać, S. Stevanović, T. Žilić and J. Stepanić, “Robust Output Tracking Control of a Quadrotor in the Presence of External Disturbances,” *Transactions of Famena* 37(4), 29–42, 2013.
- [4] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak and J. Kasać, “Chattering free tracking control of a fully actuated multicopter with passively tilted rotors,” *Transactions of FAMENA*, vol. 42, no. 1, 2018, pp. 1-14.
- [5] I. H. B. Pizetta, A. S. Brand, and M. Sarcinelli-Filho, “Modelling and control of a PVTOL quadrotor carrying a suspended load,” in *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2015 International Conference on*, pages 444–450, June 2015.
- [6] M. Nicotra, E. Garone, R. Naldi, and L. Marconi, “Nested saturation control of an uav carrying a suspended load,” in *American Control Conference (ACC)*, 2014, June 2014, pp. 3585–3590.
- [7] K. Sreenath, N. Michael, and V. Kumar, “Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load - a differentially-flat hybrid system,” in *Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on*, May 2013., pp. 4888–4895.
- [8] Y. Alothman, M. Guo and D. Gu, “Using Iterative LQR to Control Two Quadrotors Transporting a Cable-Suspended Load,” *IFAC-Papers Online*, 50(1), pp. 4324–4329, 2017.
- [9] I. H. Beloti Pizetta, A. Santos Brandao and M. Sarcinelli-Filho, “Cooperative Quadrotors Carrying a Suspended Load,” *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Jun 2016.

- [10] I. H. B. Pizetta, A. S. Brandao and M. Sarcinelli, “Stability comparison for a suspended load by one and two UAVs,” *2017 Latin American Robotics Symposium (LARS) and 2017 Brazilian Symposium on Robotics (SBR)*, Curitiba, 2017, pp. 1-6.
- [11] T. Šurina, M. Crneković, *Industrijski roboti*. Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [12] J. Kasać, *Vođenje tehničkih sustava, materijali za predavanja i vježbe*, Zagreb, 2007.
- [13] E. Hendricks, O. Jannerup and P. Haase Sorensen, *Linear Systems Control – Deterministic and Stochastic Methods*. Springer, 2008.
- [14] J. Čosić Lesičar, T. radišić, T. Bucak and J. Stepanić, “Static sensitivity of the aerial load transport by two rotocopter unmanned aerial vehicles,” in *Tehnički vjesnik*, vol. 19, no. 4, pp. 709-715, 2012.
- [15] D. Majetić, J. Kasać, D. Brezak, *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja - Viševarijabilni sustavi*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [16] H. J. Marquez, *Nonlinear Control Systems – Analysis and Design*. Wiley-Interscience, 2003.
- [17] A. Sinha, *Linear Systems – Optimal and Robust Control*. CRC Press, 2007.
- [18] B. Gao, J. Hong, S. Yu and H. Chen, “Linear-quadratic output regulator with disturbance rejection: Application to vehicle launch control,” *2017 American Control Conference (ACC)*, Seattle, WA, 2017, pp. 1960-1965.



## **PRILOZI**

I. CD-R disc