

Analiza strujanja krvi u intrakranijskoj aneurizmi

Živić, Josip

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:751760>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-27**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Josip Živić

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Igor Karšaj

Student:

Josip Živić

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru, izv. prof. dr. sc. Igoru Karšaju što mi je omogućio priliku za rad na ovako zanimljivoj temi, dr. sc. Lani Virag na uputama pri pisanju te mag. ing. Nini Horvatu na pomoći s računalnim programom.

Također se zahvaljujem prof. dr. sc. Zdravku Viragu na dobrovoljnoj pomoći tijekom izrade diplomskog rada.

Posebno se zahvaljujem obitelji na potpori te prijateljima što su mi vrijeme studiranja učinili najljepšim razdobljem u životu.

Josip Živić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

| | |
|--|--------|
| Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje | |
| Datum | Prilog |
| Klasa: | |
| Ur. broj: | |

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Josip Živić** Mat. br.: 0035190361

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza strujanja krvi u intrakranijskoj aneurizmi**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Hemodynamic analysis of intracranial aneurysm**

Opis zadatka:

Intrakranijske arterije opskrbljuju mozak kisikom i hranjivim tvarima. Intrakranijska aneurizma je lokalno ispučenje lumena koje se najčešće pojavljuje na mjestima račvanja glavnih arterija. U većini slučajeva intrakranijske aneurizme su asimptomatske i ne dolazi do njihove rupture. Vjeruje se da lokalni hemodinamički uvjeti igraju važnu ulogu u inicijaciji, rastu i rupturi intrakranijskih aneurizmi.

U okviru ovog diplomskog rada potrebno je na stvarnoj geometriji intrakranijske aneurizme proučiti karakteristike strujanja krvi prema sljedećim koracima:

- na osnovi dostupnih mjernih metoda ili literature odrediti potrebne ulazne i izlazne profile tlaka i protoka krvi,
- korištenjem programskog paketa za strujanje fluida potrebno je odrediti profil strujanja krvi u području aneurizme,
- odrediti opterećenje koje se javlja na dijelu zdrave arterije te unutar aneurizmatičke vreće koje se može koristiti kao opterećenje u analizi konačnim elementima prilikom određivanja naprezanja u stijenci arterije.

Dodatne informacije dostupne su prema potrebi.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

3. svibnja 2018.

Datum predaje rada:

5. srpnja 2018.

Predviđeni datum obrane:

11., 12. i 13. srpnja 2018.

Zadatak zadao:

Izv.prof.dr.sc. Igor Karšaj

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

| | |
|--|------|
| SADRŽAJ | I |
| POPIS SLIKA | III |
| POPIS TABLICA..... | V |
| POPIS OZNAKA | VI |
| SAŽETAK..... | VII |
| SUMMARY | VIII |
| 1. UVOD..... | 1 |
| 2. TEORIJSKE MEDICINSKE OSNOVE | 2 |
| 3. TEORIJSKE OSNOVE MEHANIKE FLUIDA | 14 |
| 3.1. Koncept kontrolnog volumena..... | 14 |
| 3.2. Osnovni zakoni mehanike fluida..... | 15 |
| 3.2.1. Zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta | 15 |
| 3.2.2. Zakon očuvanja količine gibanja | 16 |
| 3.2.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja | 16 |
| 3.2.4. Zakon očuvanja energije glasi: | 17 |
| 3.2.5. Drugi zakon termodinamike..... | 17 |
| 3.2.6. Smično naprezanje | 18 |
| 3.2.7. Reynoldsov broj | 19 |
| 3.2.8. Ukupna energija | 19 |
| 4. METODA KONAČNIH ELEMENATA | 21 |
| 4.1. Tetradarski konačni element. | 21 |
| 4.2. Numerički postupak rješavanja jednadžbe količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta u CRIMSON-u. | 22 |
| 5. RAČUNALNA SIMULACIJA | 26 |
| 5.1. Rubni uvjeti..... | 26 |
| 5.1.1. Slučaj stacionarnog strujanja s konstantnim tlakom na izlazima..... | 28 |
| 5.1.2. Slučaj stacionarnog strujanja s Windkessel modelom izlazima..... | 29 |
| 5.1.3. Slučaj pulsirajućeg strujanja s Windkessel modelom na izlazima..... | 34 |
| 5.2. CRIMSON primjer za pulsirajuće strujanje..... | 34 |
| 6. REZULTATI | 44 |
| 6.1. Stacionarno strujanje s konstantnim tlakom na izlazima | 44 |
| 6.2. Stacionarno strujanje s Windkessel modelom na izlazima | 45 |
| 6.3. Pulsirajuće strujanje | 49 |
| 6.3.1. Ukupni rezultati vremenske integracije | 49 |
| 6.3.2. Analiza periodičnog rješenja..... | 51 |
| 6.4. Usporedba rezultata..... | 65 |
| 7. ZAKLJUČAK..... | 67 |
| LITERATURA..... | 69 |

PRILOZI..... 71

POPIS SLIKA

| | |
|--|----|
| Slika 1. Dijelovi srca, preuzeto iz [3]..... | 3 |
| Slika 2. Veliki (plavo) i mali (crveno) krvotok, preuzeto iz [5]..... | 4 |
| Slika 3. Promjena krvnog tlaka sa starenjem, preuzeto iz [7] | 6 |
| Slika 4. Sastav krvi, preuzeto iz [9] | 7 |
| Slika 5. CT Snimka krvnog sustava lubanje, preuzeto iz [11] | 8 |
| Slika 6. Willisov krug, preuzeto iz [12] | 9 |
| Slika 7. Cerebralna aneurizma, preuzeto iz [13] | 10 |
| Slika 8. Sakularna aneurizma, preuzeto iz [14]..... | 11 |
| Slika 9. Fuziformna aneurizma, preuzeto iz [14]..... | 12 |
| Slika 10. Protok krvi u arterijama glave, preuzeto iz [11] | 13 |
| Slika 11. Tetraedarski konačni element prvog stupnja, preuzeto iz [15] | 22 |
| Slika 12. Richtmayerova shema konačnih elemenata, preuzeto iz [16]..... | 25 |
| Slika 13. Nazivi izlaza krvne žile..... | 27 |
| Slika 14. Windkessel model čitavog arterijskog stabla, preuzeto iz [7] | 30 |
| Slika 15. RC krug, shema, preuzeto iz [7] | 32 |
| Slika 16. Funkcija pulsirajućeg protoka, preuzeto iz [17]..... | 34 |
| Slika 17. Sučelje programskog paketa Crimson..... | 35 |
| Slika 18. Prikaz mreže konačnih elemenata u Crimsonu (1) | 36 |
| Slika 19. Podaci o broju elemenata i kvaliteti mreže | 36 |
| Slika 20. Crimson, odabiranje ploha ulaza, izlaza i zida..... | 37 |
| Slika 21. Mreža konačnih elemenata..... | 38 |
| Slika 22. Dijelovi mreže detalja Lijevo izlaza i aneurizme..... | 39 |
| Slika 23. Presjek mreže, detalj | 39 |
| Slika 24. Crimson, ulazna brzina | 40 |
| Slika 25. Crimson, rubni uvjet RCR lijevo | 40 |
| Slika 26. Crimson, rubni uvjeti RCR desno | 41 |
| Slika 27. Crimson, rubni uvjet Initial pressure..... | 41 |
| Slika 28. Crimson, rubni uvjet no slip..... | 41 |
| Slika 29. Crimson, postavke solvera | 42 |
| Slika 30. Brzine u izlaznim presjecima, stacionarno strujanje, nulti pretlak u izlaznim presjecima..... | 44 |
| Slika 31. Tlakovi u izlaznim presjecima, stacionarno strujanje bez otpora na izlazima..... | 45 |
| Slika 32. Sve brzine, stacionarno strujanje Windkessel modelom na izlazima | 46 |
| Slika 33. Svi tlakovi, stacionarno strujanje s otporom..... | 47 |
| Slika 34. Pozicije poprečnih presjeka u kojima se računala energija..... | 48 |
| Slika 35. Vremenske promjene srednjih brzina u izlaznim presjecima tijekom ukupnog vremena integracije | 50 |
| Slika 36. Vremenske promjene srednjeg tlaka u izlaznim presjecima tijekom ukupnog vremena integracije | 50 |
| Slika 37. Vremenske promjene smičnog naprezanja u jednoj točki aneurizme tijekom ukupnog vremena integracije | 51 |
| Slika 38. Brzina na Lijevo izlazu, pulsirajuće strujanje..... | 52 |
| Slika 39. Brzina na Desno-Lijevo izlazu, pulsirajuće strujanje | 52 |
| Slika 40. Brzina na Desno-Desno izlazu, pulsirajuće strujanje | 53 |
| Slika 41. Brzine na svim izlazima, pulsirajuće strujanje..... | 53 |
| Slika 42. Tlak na Lijevo izlazu, pulsirajuće strujanje | 54 |
| Slika 43. Tlak na Desno-Lijevo izlazu, pulsirajuće strujanje | 55 |
| Slika 44. Tlak na Lijevo izlazu, pulsirajuće strujanje | 55 |

| | |
|---|----|
| Slika 45. Takovi na svim izlazima, pulsirajuće strujanje | 56 |
| Slika 46. Vremenski osrednjeno smično naprezanje, pogled 1 | 57 |
| Slika 47. Vremenski osrednjeno smično naprezanje, pogled 2..... | 58 |
| Slika 48. Smično naprezanje, pogled 3 | 59 |
| Slika 49. Osrednjeno smično naprezanje na aneurizmi..... | 60 |
| Slika 50. Smično naprezanje $> 0,4$ [$\text{g}/\text{mm}\cdot\text{s}^2$] na aneurizmi..... | 60 |
| Slika 51. Smično naprezanje > 1 [$\text{g}/\text{mm}\cdot\text{s}^2$] na cijeloj geometriji | 61 |
| Slika 52. Smično naprezanje > 1 [$\text{g}/\text{mm}\cdot\text{s}^2$] na aneurizmi..... | 62 |
| Slika 53. Vektori brzine u blizini aneurizme (pogled 1)..... | 62 |
| Slika 54. Vektori brzine u blizini aneurizme (pogled 2)..... | 63 |
| Slika 55. Strujnice u blizini aneurizme | 63 |
| Slika 56. Strujnice na desnim izlazima | 64 |
| Slika 57. Profil brzine na izlazu | 65 |

POPIS TABLICA

| | |
|--|----|
| Tablica 1. Stacionarni protok | 28 |
| Tablica 2. Ukupna energija u presjecima prema slici 34 | 48 |
| Tablica 3. Usporedba brzina..... | 66 |
| Tablica 4. Usporedba tlakova..... | 66 |

POPIS OZNAKA

| Oznaka | Jedinica | Opis |
|-----------|---|--|
| ρ | $[\text{kg/m}^3]$ | Gustoća krvi |
| t | $[\text{s}]$ | Vrijeme |
| u | $[\text{m/s}]$ | Brzina strujanja krvi |
| D | $[\text{m}]$ | Promjer krvne žile |
| M | $[\text{Nm}]$ | Moment |
| μ | $[\text{Pa} \cdot \text{s}]$ | Koef. dinamičke viskoznosti |
| p | $[\text{Pa}]$ | Tlak |
| u | $[\text{m}]$ | Pomak u smjeru osi x |
| v | $[\text{m}]$ | Pomak u smjeru osi y |
| w | $[\text{m}]$ | Pomak u smjeru osi z |
| τ | $[\text{Pa}]$ | Smično naprezanje |
| Q | $[\text{mm}^3 / \text{s}]$ | Protok |
| p_L | $[\text{mmHg}]$ | Tlak na lijevom izlazu |
| p_{D-L} | $[\text{mmHg}]$ | Tlak na desnom - lijevom izlazu |
| p_{D-D} | $[\text{mmHg}]$ | Tlak na desnom - desnom izlazu |
| v_L | $[\text{mm} / \text{s}]$ | Brzina na lijevom izlazu |
| v_{D-L} | $[\text{mm} / \text{s}]$ | Brzina na desnom - lijevom izlazu |
| v_{D-D} | $[\text{mm} / \text{s}]$ | Brzina na desnom - desnom izlazu |
| Q_L | $[\text{mm}^3 / \text{s}]$ | Protok na lijevom izlazu |
| Q_{D-L} | $[\text{mm}^3 / \text{s}]$ | Protok na desnom - lijevom izlazu |
| Q_{D-D} | $[\text{mm}^3 / \text{s}]$ | Protok na desnom - desnom izlazu |
| τ | $[\text{g} / \text{mm} \cdot \text{s}^2]$ | Uprosječeno smično naprezanje |
| C_L | $[\text{mm}^4 \cdot \text{s}^2 / \text{g}]$ | Kapacitet na lijevom izlazu |
| C_D | $[\text{mm}^4 \cdot \text{s}^2 / \text{g}]$ | Kapacitet na desnim izlazima |
| R_L | $[\text{g} / \text{mm}^4 \cdot \text{s}]$ | Periferni otpor na lijevom izlazu |
| r_L | $[\text{g} / \text{mm}^4 \cdot \text{s}]$ | Karakteristični otpor na lijevom izlazu |
| R_D | $[\text{g} / \text{mm}^4 \cdot \text{s}]$ | Periferni otpor na desnim izlazima |
| r_D | $[\text{g} / \text{mm}^4 \cdot \text{s}]$ | Karakteristični otpor na desnim izlazima |
| e | $[\text{g} / \text{mm} \cdot \text{s}^2]$ | Ukupna energija |

SAŽETAK

Paralelno s razvitkom računala i novih algoritama sve se više primjenjuju numeričke metode (npr. metode konačnih elemenata (MKE) i metode konačnih volumena (MKV)) u području biomehanike i mehanike bioloških strujanja. Razvojem različitih područja biomehanike postupno se olakšava pronalaženje pravih tretmana za pacijente te se uvelike pospješuje njihovo liječenje.

Tema ovog diplomskog rada je analiza strujanja krvi kroz intrakranijsku aneurizmu. Intrakranijske aneurizme podrazumijevaju abnormalno patološko proširenje arterija na području mozga. Tijekom vremena stijenka žile gubi čvrstoću pod utjecajem sile tlaka te nastaje vrećasto proširenje. Potencijali problemi koje uzrokuje aneurizma su usporavanje cirkulacije i stvaranje krvnih ugrušaka dok je najopasniji ishod njena ruptura i unutarnje krvarenje koje je opasno po život. Aneurizme su najčešće asimptomatske te se najčešće otkrivaju slučajno na fizikalnom pregledu, ultrazvuku ili čak nakon smrtnog slučaja uzrokovanog rupturom aneurizme.

Proračun je proveden u programskom paketu CRIMSON a analiza rezultata u programskom paketu ParaView i Python 3. Analizirani su slučajevi stacionarnog i pulsirajućeg strujanja za više različitih rubnih uvjeta. Zaključeno je da srednje vrijednosti protoka i tlaka u izlaznim presjecima dobivenim iz analize pulsirajućeg strujanja odgovaraju srednjim vrijednostima tih veličina iz stacionarne analize, kada se u stacionarnoj analizi koristi vremenski osrednjeni ulazni protok iz nestacionarne analize. Dobivena raspodjela smičnih naprezanja može poslužiti kao osnova za određivanje potencijalne opasnosti za razvoj aneurizme.

Ključne riječi: Intrakranijska aneurizma, strujanje krvi, biomehanika, metoda konačnih elemenata

SUMMARY

With the development of computers and new algorithms in modern age, new numerical methods (such as finite element methods (FEM) and finite volume method (FVM)) are being used in the biomechanic science and mechanic of biological flow. By the same time with the development of biomechanics, right treatments are much easier to find so patients have better recovery chances.

Master thesis theme is analysis of the blood flow through intracranial aneurysm. Intracranial aneurism is abnormal pathological expanding in the brain area. Through the time vessel wall loses its strength because of pressure force and baggy expansion is made. Slow circulation and clot formation are potential problems caused by aneurysm while its most dangerous outcome is aneurysm rupture and internal bleeding which can be lethal. Most of aneurysms are asymptomatic and they are discovered mostly by accident during the physical examinations, ultrasonic examinations or posthumously after death caused by aneurysms rupture.

Calculations were made in software program CRIMSON (Cardiovascular Integrated Modelling and Simulation) and visualizations were made in software programs Paraview and Python 3. Steady and pulsed analysis were made for several boundary conditions.

It is proven that the mean values of flow and pressure in the pulsing simulation are just the same as mean values in the steady simulation when mean input flow is used as input. Obtained residual stress distribution can be used as starting point for determining potential danger of developing aneurysm.

Key words: Intracranial aneurysm, blood flow, biomechanics, finite element method

1. UVOD

Biomehanika je znanost koja se bavi proučavanjem bioloških modela. Obuhvaća razna područja koja proučavaju čvrstoću tkiva i strujanje krvi. U ovom diplomskom radu bit će analizirani različiti modeli strujanja krvi kroz krvne žile. Strujanje krvi u krvnim žilama samo je jedan od mogućih modela strujanja i nije ništa drugo nego strujanje fluida kroz cijev složene geometrije. Modeliranje i analiziranje izvršeno je pomoću programskog paketa CRIMSON koji je posebno prilagođen za tu namjenu. Naravno, morali su se poštovati osnovni zakoni mehanike fluida kao što su zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja momenta količine gibanja, zakon očuvanja energije te drugi zakon termodinamike. Jednadžbe koje opisuju strujanje rješavale su se najzastupljenijom numeričkom metodom - metodom konačnih elemenata. Kako su jednadžbe koje opisuju strujanje parcijalne diferencijalne jednadžbe, potrebno je provesti diskretizaciju područja na kojem se jednadžbe rješavaju. Područje biomehanike uvelike pomaže medicini u rješavanju i analizi problema s kojima se pacijenti susreću. Time se omogućuje kvalitetnije liječenje pacijenata te se produžava njihov životni vijek i unaprjeđuje kvaliteta života. Pomoć inženjera i biomehaničara od neizmjerne je koristi doktorima i kirurzima koji se bave kardiovaskularnim bolestima. Stopa smrtnosti moždanih i srčanog udara u stalnom je padu zahvaljujući konstantnom razvijanju biomehanike.

Mehanika fluida grana je fizike koja se bavi proučavanjem strujanja fluida te ju možemo promatrati kao teorijsku i eksperimentalnu znanost. Zbog kompleksnosti i velikog broja različitih pojava koje mehanika fluida pokušava opisati, postoji veliki broj modela te se uvodi niz pojednostavljenja kada je to moguće. Mehanika fluida iznimno je bitna je za područje biomehanike.

U drugom poglavlju bit će obrazložena medicinska terminologija i teorija nužna za razumijevanje teme s naglaskom na problem intrakranijske aneurizme i modeliranje strujanja kroz nju. U trećem poglavlju bit će objašnjene teorijske osnove mehanike fluida te jednadžbe koje su korištene da bi se opisao problem strujanja u krvnim žilama. Također bit će opisana metoda konačnih elemenata pomoću koje se vrši sam proračun strujanja. Nadalje, bit će obrazložena važnost istraživanja i daljnjeg razvijanja područja biomehanike. Na kraju, u šestom poglavlju bit će pokazani rezultati te će se dati usporedba različitih analiza kao i objašnjenje istih.

2. TEORIJSKE MEDICINSKE OSNOVE

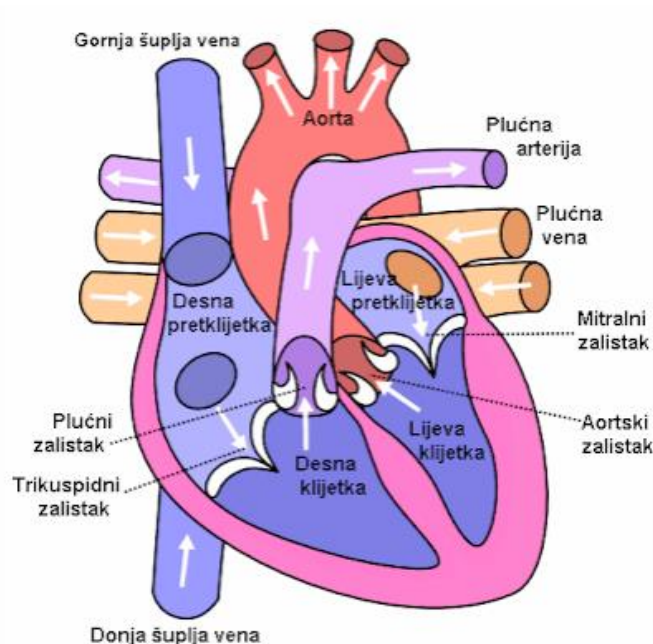
Kardiovaskularni sustav obuhvaća srce, krv i krvne žile. Uloge kardiovaskularnog sustava su [1]:

- opskrbljivanje stanica hranjivim tvarima i kisikom,
- odvođenje ugljikovog dioksida iz stanica,
- opskrba tijela vodom, elektrolitima i hormonima,
- pomoć pri radu imunološkom sustavu,
- regulacija temperature tijela.

2.1. Dijelovi kardiovaskularnog sustava

2.1.1. Srce

Središnji dio kardiovaskularnog sustava je srce. Srce je mišićni organ veličine ljudske šake a nalazi se u središnjem dijelu prsne šupljine, između dva plućna krila [2], kao što je prikazano na slici 1. Građeno je od posebne vrste mišićnog tkiva – srčanog mišićnog tkiva sastoji se od lijeve i desne polovice. Svaka polovica se sastoji od komora koje se nazivaju klijetka (veća) i pretklijetka (manja). Između pretklijetke i klijetke nalaze se srčani zalisci koji sprječavaju povratak krvi u suprotnom smjeru. Srce radi tijekom čitavog života bez prestanka, pumpa krv naizmjeničnim stezanjem i otpuštanjem pretklijetki i klijetki. Brzina rada ovisi o potrebama organizma. Rad srca ubrzava se uslijed fizičkog napora kada je povećana potreba organizma za hranjivim tvarima i kisikom. U stanju mirovanja prosječni broj otkucaja je 60 – 80 puta u minuti.



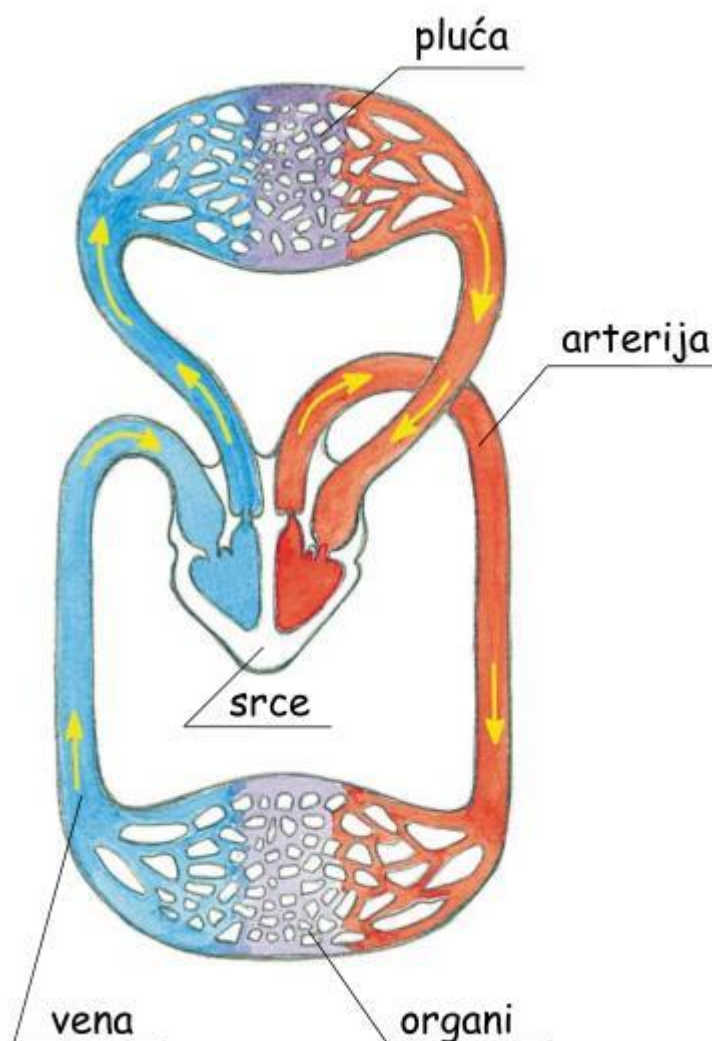
Slika 1. Dijelovi srca, preuzeto iz [3]

2.1.2. Krvne žile

Krvne žile dovode krv bogatu hranjivim tvarima i kisikom od srca do svih stanica te odvođe krv s ugljikovim dioksidom iz stanica natrag do srca. Krvotok, prikazan na slici 2, se dijeli u dva dijela: veliki i mali krvotok[4].

Veliki krvotok zadužen je za opskrbu svih organa i tkiva svježom krvi. Početak velikog krvotoka je u lijevoj srčanoj klijetki gdje kroz aortu provodi krv dalje prema tijelu. Funkcija velikog krvotoka je dovođenje kisika i hranjivih tvari do svake stanice u tkivu kako bi se omogućilo stanično disanje te odvođenje ugljikovog dioksida i otpadnih tvari iz stanica.

Mali krvotok je sustav koji opskrbljuje pluća kisikom i hranjivim tvarima. Početak malog krvotoka je u desnoj srčanoj klijetki gdje krv puna ugljikovog dioksida ide kroz plućnu arteriju prema plućima gdje se krv obogaćuje kisikom i rješava ugljikovog dioksida. U plućima se arterija grana sve do najmanjih kapilara gdje se u plućnim mjehurićima odvija izmjena plinova. Tada se ta krv obogaćena kisikom vraća u lijevu predkljetku gdje nakon prelaska u klijetku počinje krug velikog krvotoka. Mali krvotok je izuzetno važna veza između krvožilnog i dišnog sustava



Slika 2. Veliki (plavo) i mali (crveno) krvotok, preuzeto iz [5]

Postoje tri osnovne skupine krvnih žila: Arterije, vene i kapilare.

Arterije su najveće krvne žile koje imaju čvrstu, debelu stijenku građenu od elastičnih i mišićnih niti koje pomažu da se tlačni podražaj nastao kontrakcijom lijeve srčane klijetke proširi do periferije i tako pomogne opskrbi tkiva i organa krvlju. Građene su od debljeg sloja glatkih mišića pa su zbog toga elastične.

Vene su krvne žile veće elastičnosti koje dovode krv do srca iz tkiva nakon što je obavljena izmjena hranjivih tvari i kisika. Krv u venama uvijek struji prema srcu, suprotno djelovanju sile teže. Zbog toga su potrebni venski zalisci koji sprječavaju neželjeni povratak krvi. Vene započinju u tkivima kao mikroskopski sitni ogranci koji se postupno spajaju i postaju veće žile.

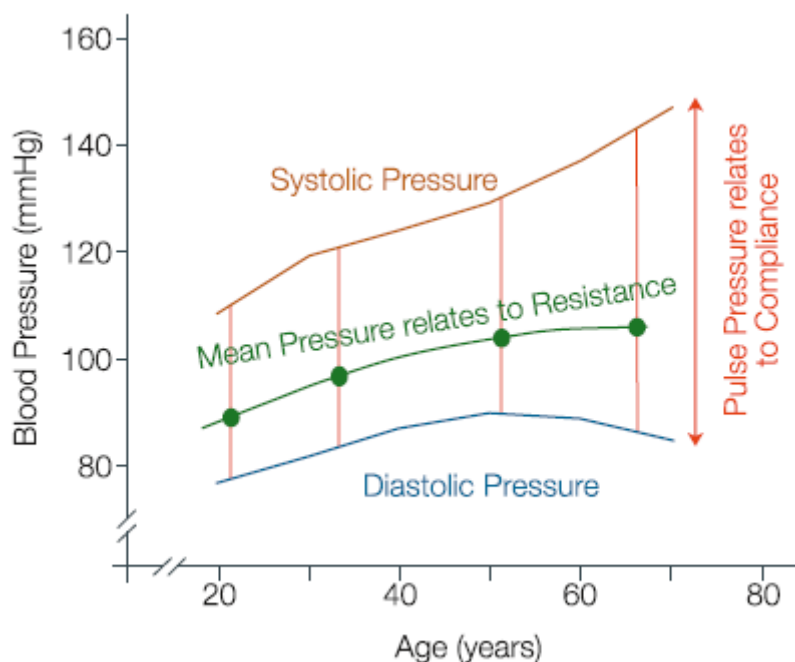
Kapilare su najtanje krvne žile koje povezuju ogranke najsitnijih arterija i vena. Kroz kapilare se obavlja izmjena plinova krvi i stanica u tkivu odnosno događa se izmjena hranjivih i otpadnih tvari.

2.1.3. *Krv*

Krv je tekuća suspenzija različitih skupina tjelesnih stanica koje se nalaze u krvnoj plazmi. Krv ubrajamo u tekuće vezivno tkivo. Ukupni volumen krvi u odrasle osobe je oko 5 litara a sastoji se od tekućeg dijela, krvne plazme te od krvnih stanica (leukocita i eritrocita) i krvnih pločica (trombocita). U broje uloge krvi ubrajamo:

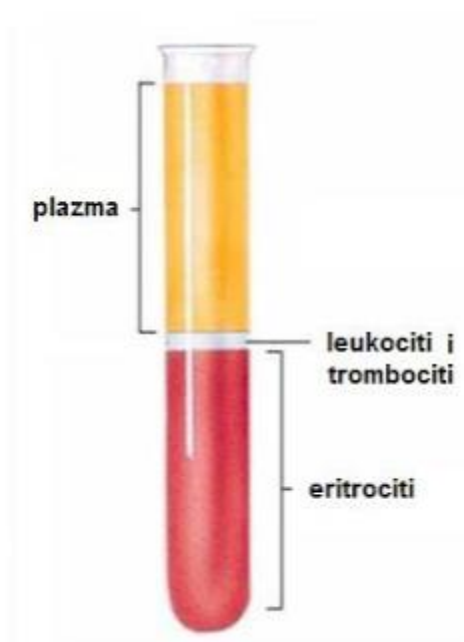
- funkcija disanja (prijenos kisika i ugljikovog dioksida),
- funkcija prehrane (prijenos hranjivih tvari iz crijeva u stanice),
- izlučivanje i filtriranje štetnih tvari iz tijela,
- održavanje tjelesne temperature,
- održavanje količine vode u tijelu,
- održavanje ionskog sastava i pH,
- obrana tijela od infekcija,
- prijenos različitih tvari (hormoni, vitamini).

Krvni tlak ovisi od osobe do osobe, stanju krvnih žila, starosti osobe i mnogim drugim faktorima. Razlikujemo sistolički (gornja vrijednost) i dijastolički tlak (donja vrijednost). Promjena krvnog tlaka sa starošću prikazana je na slici 3. Iz dijagrama je vidljivo da sistolički tlak raste s godinama, ali i da se razlika sistoličkog i dijastoličkog tlaka povećava [6].



Slika 3. Promjena krvnog tlaka sa starenjem, preuzeto iz [7]

Krvna plazma je žućkasta tekućina koja se dobije uklanjanjem krvnih tjelešaca, a većinom se sastoji od vode (oko 90%) dok na ostalih 10% otpadaju proteini, glukoza i anorganske soli. Upravo zbog velikog udjela krvne plazme, krv i voda imaju određene sličnosti u fizikalnim svojstvima. Krvna plazma obuhvaća oko 5% ukupne mase tijela odraslog čovjeka. Osim plazme, svojstva krvi daju krvna tjelešca, poglavito crvene i bijele krvne stanice te trombociti. Crvene krvne stanice (eritrociti) najbrojnije su i najveće od tri stanična sastojaka te čine gotovo polovicu krvnog volumena. Te su stanice ispunjene hemoglobinom, što im omogućava da prenose kisik iz pluća i dostavljaju ga svim tjelesnim tkivima. Bijelih krvnih stanica (leukocita) ima znatno manje: jedna bijela krvna stanica dolazi na svakih 660 crvenih krvnih stanica. Razlikujemo pet glavnih vrsta bijelih krvnih stanica, a ključne su za imunološki sustav te osiguravaju tijelu mehanizam za borbu protiv infekcija, uključujući stvaranje protutijela. Krvne pločice (trombociti) su fragmenti stanice bez jezgre koji nastaju u koštanoj srži. Dio su zaštitnog mehanizma za zaustavljanje krvarenja, skupljaju se na mjestu ozljeda gdje se aktiviraju i započinju proces koagulacije (zgrušavanja) krvi. Omjer krvne plazme i krvnih stanica prikazan je na slici 4. [8]



Slika 4. Sastav krvi, preuzeto iz [9]

Kada je riječ o krvnim stanicama, najveći utjecaj na fizikalna svojstva (pogotovo viskoznost) imaju eritrociti koji po brojnosti za nekoliko redova nadmašuju trombocite i leukocite.

2.2. Krvni sustav glave

Mozak je opskrbljen krvlju putem dva arterijska sustava. Prednji arterijski sustav koji služi za prehranu velikog mozga čine lijeva i desna unutarnja karotidna arterija sa svojim ograncima: srednjom moždanom arterijom i prednjom moždanom arterijom. Stražnji arterijski sustav koji služi za prehranu moždanom debla i malog mozga čine lijeva i desna vertebralna arterija koje se u visini pontocerebralnog žlijeba spajaju u arteriju bazilaris.

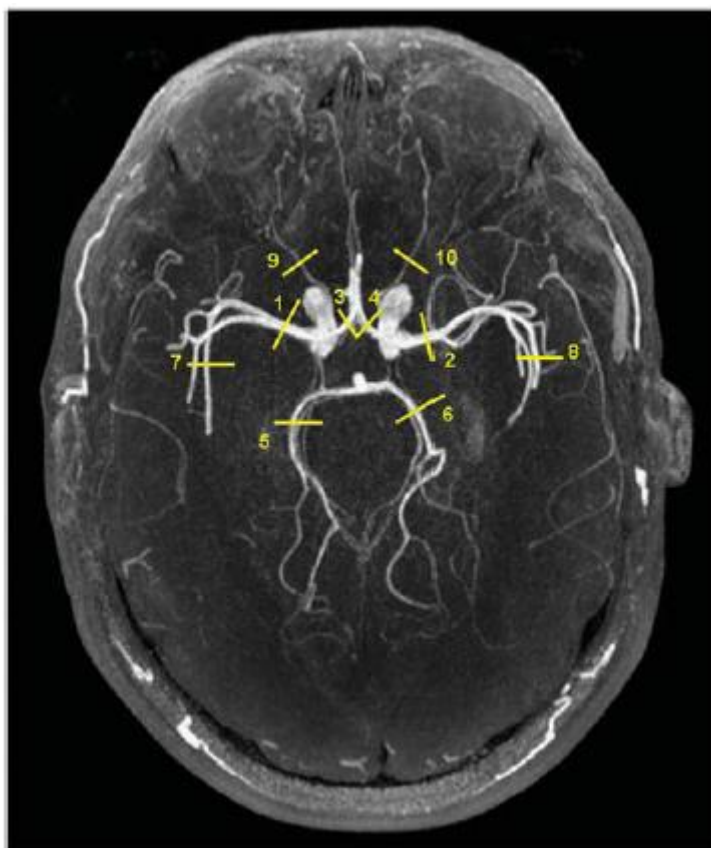
Odvajanjem od zajedničke arterije glave unutarnja karotidna arterija usmjerena je duž lateralne strane ždrijela prema gore i ulazi u lubanju kroz kanal u piramidi sljepoočne kosti. U cerebralnoj osnovici odnosno bazi, dijeli se na završne grane: očnu arteriju, te prednju i srednju mozgovnu arteriju.

Prednja cerebralna arterija usmjerena je prema naprijed, a s istoimenom je arterijom suprotne strane povezuje prednja spojna arterija. Arterija oblikuje luk oko žuljevitoj tijela i daje ogranke za medijalno područje cerebralna polutke.

Srednja cerebralna arterija usmjerena je lateralno i kroz postranu jamu dolazi na konveksnu površinu mozgovne polutke. Srednja cerebralna arterija ima mnoštvo ogranaka za otočni režanj, te za gornje i lateralne dijelove polutke i sljepoočnog režnja koji obuhvaćaju veći dio motoričke, osjetne i slušne mozgovne kore.

Vertebralna arterija (kralježnička) prolazi kroz otvore poprečnih nastavaka vratnih kralježaka te kroz veliki zatiljni otvor ulazi u lubanju, gdje se lijeva i desna kralježnička arterija spajaju u arteriju basilaris.

Arterija basilaris (osnovička) nastaje spajanjem vertebralnih arterija i leži u brazdi na prednjoj strani mosta, te daje ogranke za mozgovno deblo. Završava na prednjem gornjem rubu mosta razdvajanjem na dvije stražnje cerebralna arterije. Na objema stranama daje za mali mozak donju prednju arteriju, te gornju arteriju. [10]



Slika 5. CT Snimka krvnog sustava lubanje, preuzeto iz [11]

Snimka arterijskih sustava dobivena kompjuteriziranom tomografijom (CT) pacijenta je prikazana na slici 5. Na slici brojevi označuju arterije kako slijedi:

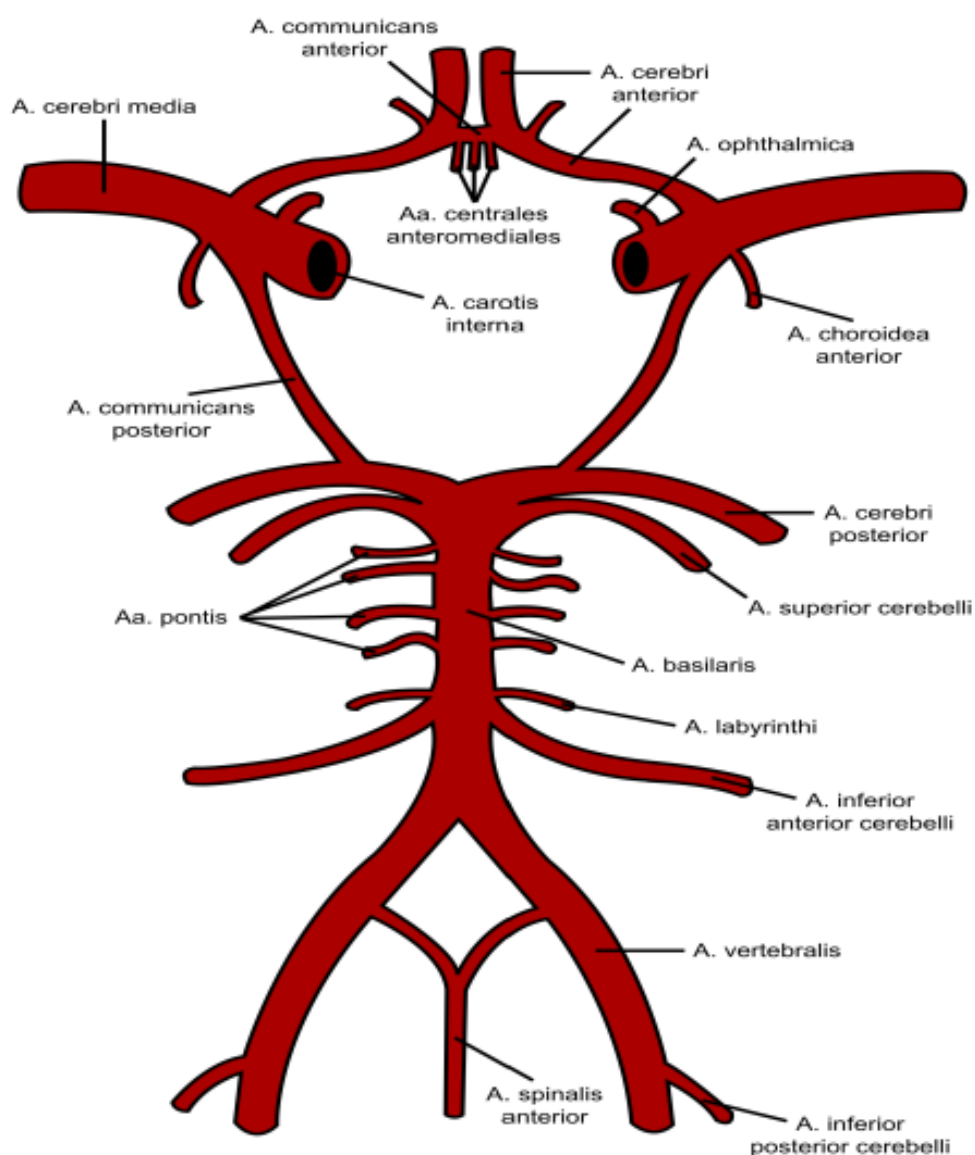
- (1, 2) desna (R) i lijeva (L) središnja cerebralna arterija (MCA)
- (3, 4) R and L prednja cerebralna arterija (ACA)

(5, 6) R and L stražnja cerebralna arterija

(7, 8) R and L distalna MCA

(9, 10) R and L očna arterija

Prednji cerebralni arterijski krug (Willisov krug) je arterijski krug u obliku pentagona na ventralnoj (unutarnjoj) površini mozga. Važna je anastomoza na bazi mozga između četiriju arterija (dvije vertebralne i dvije a.carotis interna) koje opskrbljuju mozak. Willisov arterijski, kako je prikazano na pojednostavljenoj shemi na slici 6, krug čine :

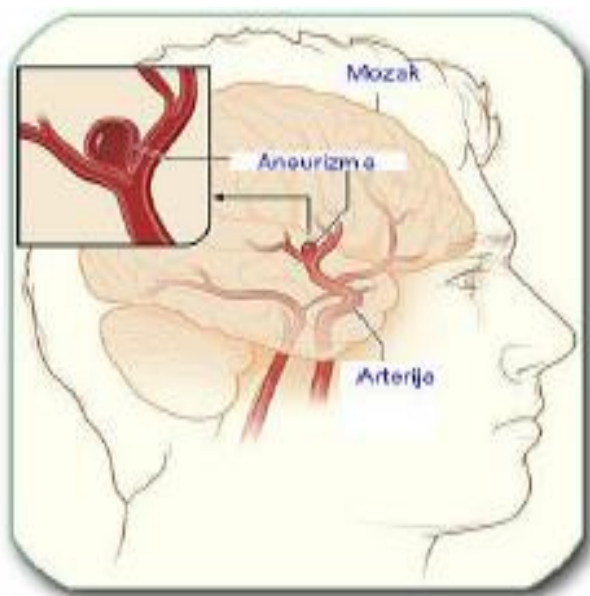


Slika 6. Willisov krug, preuzeto iz [12]

2.3. Aneurizme

Pojam aneurizma vuče korjen iz grčkog jezika od riječi *aneurynein* koja znači proširenje. U medicini se upotrebljava kako bi se označilo postojanje lokaliziranog proširenja na stijenci krvne žile, najčešće arterije. Aneurizma se definira kao proširenje od 50% u odnosu na bliski, zdravi presjek žile. Intrakranijska aneurizma može imati promjer od nekoliko milimetara pa sve do nekoliko centimetara. Aneurizme koje imaju promjer više od 5 centimetara rjeđe se susreću u praksi i moraju se operirati. Promjer aneurizme može se procijeniti u tijeku operacije, pomoću kompjutorizirane tomografije mozga ili obdukcijom.

Aneurizme najčešće postaju manifestne između 40. i 60. godine života. Prema lokalizaciji 86% intrakranijskih aneurizmi pripada prednjoj cirkulaciji, u trećine pacijenata na prednjoj su komunikantnoj arteriji, u druge trećine na mjestu izlaska stražnje komunikantne arterije iz karotide, dok se oko 20% aneurizmi nalazi na bifurkaciji središnje moždane arterije. Nažalost, aneurizma je najčešće asimptomatska, u većini slučajeva prvi simptomi njenog postojanja se javljaju tek nakon njene rupture. Kod malog broja ljudi praćenja je kroničnim glavoboljama migrenskog tipa. Neliječena aneurizma nosi prijetnju rupture koja dovodi do krvarenja, uslijed kojeg može doći do trajnog oštećenja ili čak smrti. Sudbina bolesnika nakon krvarenja ovisna je o veličini aneurizme i stanju njezine stijenke, o veličini arterije na kojoj se aneurizma nalazi i ponajviše o reflektornom spazmu proksimalnog dijela arterije i mehanizmima prestanka krvarenja. Ilustracija mjesta nastanka neke cerebralne aneurizme prikazana je na slici 7.



Slika 7. Cerebralna aneurizma, preuzeto iz [13]

Veći broj faktora rizika može dovesti do slabljenja arterijskih stijenki i povećati rizik nastanka aneurizme. Aneurizme su češće kod odraslih nego kod djece i češće su kod žena nego kod muškaraca. Neki od faktora razvijaju se tijekom vremena dok su drugi prisutni pri rođenju.

Faktori rizika koji utječu na porast rizika za razvijanja aneurizme:

- starija dob,
- pušenje,
- hipertenzija (povišeni krvni tlak),
- ateroskleroza,
- zloupotreba droge, posebice kokaina,
- traume glave,
- pretjerano konzumiranje alkohola,
- određene infekcije krvi.

Tri su osnovna tipa aneurizmi:

- sakularne (bobičaste, vrećaste),
- fuziformne (vretenaste),
- disekantne (nastaju raslojavanjem slojeva koji čine krvožilnu stijenkku).

Intrakranijske aneurizme na račvištima krvnih žila su tipično sakularne aneurizme te se manifestiraju kao bobičasto proširenje zbog promjena u krvožilnoj stijenci, slika 8. Lumen aneurizme obično je u manjoj ili većoj mjeri ispunjen trombom.



Slika 8. Sakularna aneurizma, preuzeto iz [14]

Fuziformne aneurizme (slika 9) nastaju na izduženom segmentu krvne žile. Najčešće se nalaze u vertebro-bazilarnoj cirkulaciji. Sklone su tromboziranju, te se češće očituju znakovima

ishemije ili infarkta moždanog debla nego krvarenjem. Vrlo su rijetke, predstavljaju oko 2% svih intrakranijalnih aneurizmi. Nastanak fuziformnih aneurizmi povezuje se sa aterosklerozom.



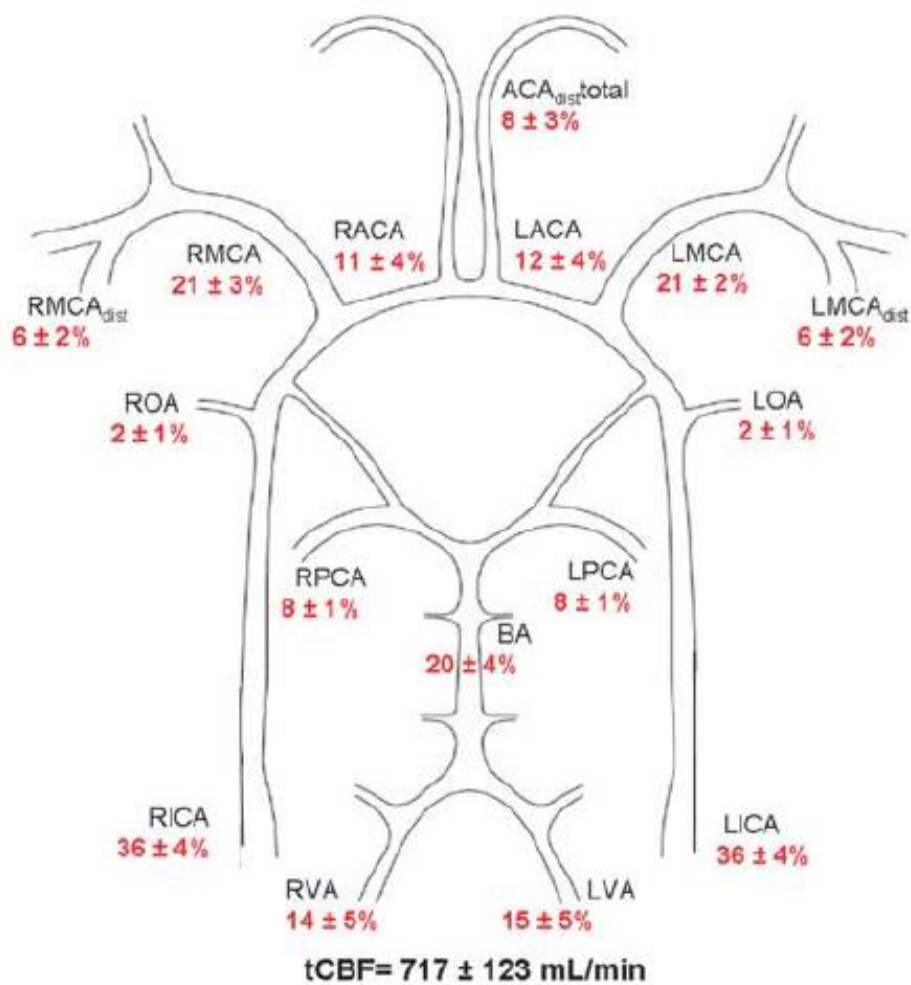
Slika 9. Fuziformna aneurizma, preuzeto iz [14]

Disekantne aneurizme nastaju kada je intima oštećena te krv prodire između tankog sloja stanica koje se nalaze na unutrašnjoj površini krvnih žila, endotela i medije što uzrokuje suženje lumena. Ostale vrste aneurizmi koje postoje su: mikotične aneurizme, traumatske aneurizme, višestruke aneurizme, nerupturirane aneurizme, gigantske aneurizme.[10]

2.4. Aneurizma na desnoj intrakranijskoj karotidnoj arteriji (RICA)

Aneurizma na kojoj je u ovom radu analizirano strujanje nalazi se desnoj internoj karotidnoj arteriji (RICA), odnosno na grananju gdje se ona dijeli na desnu središnju cerebralnu arteriju (RMCA) i desnu arteriornu cerebralnu arteriju (RACA).

Ukupni protok kroz cerebralni krvotok iznosi 717 ± 123 mL/min. Omjer strujanja kroz cerebralnu i vertebralnu arteriju iznosi 72% : 28%, [11]. Taj postotak nije povezan s dobi, fizičkom spremom i spolom pacijenata. Ukupni cerebralni protok dijeli se po žilama u svakoj polovici mozga na: središnja cerebralna arterija (MCA) 21%, distalna (MCA) 6%, anteriorna cerebralna arterija (ACA) 12%, distalna anteriorna cerebralna arterija 4%, očna arterija 2%, stražnja cerebralna arterija (PCA) 8% te basilarna arterija 20%, kao što je prikazano na slici 10.



Slika 10. Protok krvi u arterijama glave, preuzeto iz [11]

3. TEORIJSKE OSNOVE MEHANIKE FLUIDA

Hidrodinamika je grana mehanike fluida koja proučava gibanja tekućina (brzine, protoci) i pojavama uzrokovanim uzajamnim djelovanjem struje tekućine i tijela koje graniči s tekućinom u gibanju (posmična naprezanja na stijenci). Osnovna pretpostavka koja se koristi je koncept mehanike kontinuuma, odnosno pretpostavke da se molekularna građa fluida može zanemariti. Kontinuum je matematički model materije prema kojem materija zadržava sva svoja fizikalna svojstva pri smanjivanju volumena do razine točke. Čestica kontinuuma (materijalna točka) ima infinitezimalno mali volumen dV a svaka čestica zauzima samo jednu točku u prostoru dok se u isto vrijeme u jednoj točki prostora može nalaziti samo jedna čestica kontinuuma. Hipoteza kontinuuma omogućuje primjenu integralnog i diferencijalnog računa u mehanici fluida. Kada se to primjeni na određenu fizikalnu veličinu (gustoću na primjer), ona se može zapisati u matematičkom obliku kao:

$$\rho = \lim_{\Delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (3.1)$$

Druga bitna pretpostavka je ta da se raspodjela svih karakterističnih fizikalnih veličina medija (npr. gustoća, viskoznost) također smatraju kontinuiranim i neprekinutim. Mehanika kontinuuma grana je mehanike posvećena proučavanju gibanja i ravnoteže plinova, tekućina i krutih tijela. Budući da je fluid na mikrorazini građen od atoma odnosno molekula, oni su osnova i nositelji fizikalnih svojstava. Kako je spomenuto, podrazumijevamo da je sav prostor u svakom trenutku ispunjen molekulama fluida pa zato možemo reći da su svojstva uniformna.

3.1. Koncept kontrolnog volumena

U ovom radu je modeliranje strujanja fluida napravljeno kroz geometriju koja predstavlja krvnu žilu s aneurizmom. Geometrija predstavlja stvarni prikaz krvne žile i dobivena je metodom magnetske rezonance (MRI). Volumen kroz koji krv struji naziva se lumen. Tu se uvodi koncept kontrolnog volumena koji predstavlja spomenuti lumen. Kontrolni volumen je definiran kao volumen u prostoru koji se ne pomiče te kroz njega prolaze čestice fluida kako fluid struji. Suprotno kontrolnom volumenu, materijalni volumen promjenjivog je oblika te se cijelo vrijeme sastoji od istih čestica. Svi osnovni zakoni mehanike fluida izvorno su definirani za materijalni volumen. Da bi se oni mogli primijeniti na kontrolni volumen, potrebno je provesti transformaciju jednadžbi uz pomoć Reynoldsova transportnog teorema.

Reynoldsov transportni teorem za nepomični kontrolni volumen glasi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \phi dV = \int_{V_M} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_j)}{\partial x_j} \right] dV = \int_{V_M} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_S \phi v_j n_j dS \quad (3.1)$$

dok za kontrolni volumen koji se giba brzinom u_j a omeđen je granicom S , vrijedi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_{KV}} \phi dV = \int_{V_{KV}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_j)}{\partial x_j} \right] dV = \int_{V_{KV}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_S \phi (v_j - u_j) n_j dS \quad (3.2)$$

3.2. Osnovni zakoni mehanike fluida

Osnovni zakoni očuvanja gibanja su:

- Zakon očuvanja mase
- Zakon očuvanja količine gibanja
- Zakon očuvanja momenta količine gibanja
- Zakon očuvanja energije
- Drugi zakon termodinamike

3.2.1. Zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta

Zakon očuvanja mase glasi:

Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli, pod pretpostavkom da unutar volumena ne postoji izvorski član ili ponor mase. Zakon očuvanja mase matematički se zapisuje kao:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho dV = 0. \quad (3.3)$$

Ako se na taj izraz primjeni Reynoldsov transportni teorem on postaje:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho dV + \int_{S_{KV}} u_j n_j dS = 0. \quad (3.4)$$

U diferencijalnim obliku zakon očuvanja mase glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (3.5)$$

3.2.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja glasi:

Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je zbroju vanjskih sila (masenih i površinskih) koje djeluju na materijalni volumen. Zakon očuvanja količine gibanja matematički se zapisuje kao:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho v_i dV = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_{ji} n_j dS. \quad (3.6)$$

Ako se na taj izraz primjeni Reynoldsov transportni teorem on postaje:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho v_i v_j dV + \int_{S_{KV}} \rho v_i v_j n_j dS + \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_{ji} n_j dS. \quad (3.7)$$

U diferencijalnim obliku zakon očuvanja količine gibanja glasi:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i. \quad (3.8)$$

3.2.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Zakon očuvanja momenta količine gibanja glasi:

Brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena u odnosu na određenu točku jednaka je sumi svih momenata vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen u odnosu na tu odabranu točku. Za specijalni slučaj kada nema spregova sila po površini materijalnog volumena zakon očuvanja momenta količine gibanja se svodi na simetričnost tenzora naprezanja. Zakon očuvanja momenta količine gibanja matematički se zapisuje kao:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \varepsilon_{kji} x_j \rho v_i dV = \int_{V_M} \varepsilon_{kji} x_j \rho f_i dV + \int_{S_M} \varepsilon_{kji} x_j n_m \sigma_{mi} dS. \quad (3.9)$$

Ako se na taj izraz primjeni Reynoldsov transportni teorem on postaje:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \rho v_i dV + \int_{S_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \rho v_i v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \sigma_i dS. \quad (3.10)$$

3.2.4. Zakon očuvanja energije glasi:

Brzina promjene energije (zbroja kinetičke i unutarnje energije $e = v^2/2 + u$) materijalnog volumena jednaka je zbroju snaga vanjskih sila (masenih i površinskih) koje djeluju na materijalni volumen i brzini dovođenja topline. Zakon očuvanja energije matematički se zapisuje kao:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho e dV = \int_{V_M} \rho f_i v_i dV + \int_{S_M} \sigma_{ji} n_j v_i dS - \int_{S_M} q_j n_j dS. \quad (3.10)$$

Ako se na taj izraz primjeni Reynoldsov transportni teorem on postaje:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho e dV + \int_{S_{KV}} \rho e v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \rho f_i v_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_i v_i dS - \int_{S_{KV}} q_j n_j dS. \quad (3.11)$$

U diferencijalnom obliku zakon očuvanja energije glasi:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j e)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (3.12)$$

3.2.5. Drugi zakon termodinamike

Drugi zakon termodinamike ima više različitih definicija. Jedna od definicija za drugi zakon termodinamike glasi:

Entropija izoliranog sustava kod svake izmjene energije mora rasti ili u najboljem (idealnom) slučaju ostati ista. Drugim riječima, produkcija entropije u otvorenom termodinamičkom sustavu mora biti pozitivna ili za idealni slučaj jednaka nuli. Glavna primjena ovog zakona je procjena valjanosti (fizikalnosti) dobivenih rješenja strujanja fluida. Ukoliko postoji više dobivenih rješenja nekog problema strujanja uzima se ono koje je u skladu s drugim zakonom termodinamike. Brzina promjene entropije čestice fluida definirana je Gibbsovom jednadžbom koja u matematičkom zapisu glasi:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt} + p \frac{D\rho}{Dt}. \quad (3.13)$$

Matematički zapisi drugog zakone termodinamike glase:

$$\sigma = \int_1^2 \left(ds - \frac{\delta q}{T} \right) \geq 0, \quad (3.14)$$

$$\Sigma = \int_1^2 \left(dS - \frac{\delta Q}{T} \right) \geq 0. \quad (3.16)$$

Diferencijalni oblik drugog zakona termodinamike glasi:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Du}{Dt} + p \frac{Dv_j}{Dx_j}. \quad (3.17)$$

Sušтина ovog zakona je to da govori o jednosmjernosti procesa odnosno o njegovoj nepovratnosti. U jednadžbama (3.15.) i (3.16.) se pojavljuje entropija koja nije navedena u prijašnjim zakonima očuvanja te se zbog toga jednadžba (3.17.) ne mora rješavati unutar simultanog sustava, pa se zbog toga naziva i pasivnom jednadžbom.

3.2.6. Smično naprezanje

Smično naprezanje u osnosimetričnom strujanju u cijevi se za slučaj nenevtonskih fluida računa prema modelu Ostwald-de Waele-a koji se matematički zapisuje:

$$\tau = K \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n, \quad n > 0, \quad (3.18)$$

gdje u označuje aksijalnu brzinu, a r radijalnu koordinatu, K predstavlja koeficijent strujanja dok je n indeks ponašanja toka. Za slučaj strujanja u intrakranijskoj arteriji kao i u svim većim žilama kada se krv uzima kao nestlačivi, newtonovski fluid. U tom slučaju se tenzor naprezanja σ_{ji} prikazuje kao:

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji}, \quad (3.19)$$

gdje je tenzor viskoznih naprezanja,

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad (3.20)$$

δ_{ji} Kroneckerov tenzor a p tlak.

Komponente na glavnoj dijagonali ovog tenzora su normalna viskozna naprezanja, a izvan glavne dijagonale smična naprezanja. Specijalno u slučaju osnosimetričnog strujanja, smično naprezanje je

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3.21)$$

Smično naprezanje na stijenci se zapisuje:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (3.22)$$

Kada se krv tretira kao nenevtonovski fluid, smično naprezanje se često računa se prema Cassonovom modelu. Time se mijenja i izraz za smično naprezanje koje se u ovom slučaju računa kao:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \mu_{\infty} \frac{\partial u}{\partial r} + \tau_0 + 2\sqrt{\mu_{\infty}\tau_0} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.23)$$

Za ovaj slučaj viskoznost nije konstantna nego je funkcija smičnog napreznja. Neće se dalje ulaziti u obrazloženje Cassonovog modela budući da u analizi nije korišten.

3.2.7. Reynoldsov broj

Glavni kriterij za određivanje tipa strujanja, bilo ono laminarno, prijelazno ili turbulentno je bezdimenzijski Reynoldsov broj. Za laminarno strujanja u cijevima uzima se da vrijednost Re mora biti ispod 2000. Prijelazno strujanje uzima se za vrijednosti Re preko 2300 dok se turbulentno strujanje definira s Re preko 25000. Reynoldsov broj računa se prema izrazu:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{\text{inercijske sile}}{\text{viskozne sile}} \quad (3.24)$$

Kod pulsirajućeg strujanja kakvo je u jednom dijelu zadatka razmatrano Re broj kreće se u određenom rasponu ovisno o brzini koja je pak funkcija vremena tijekom jednog pulsa.

3.2.8. Ukupna energija

U cirkulacijskom krugu se utjecaj gravitacije ne mora razmatrati, budući da ona ne doprinosi strujanju krvi, već samo definira hidrostatsku komponentu tlaka, koja se uvijek može dodati na polje tlaka dobiveno rješavanjem osnovnih jednadžbi bez uzimanja gravitacije. Stoga je u provedenim analizama gravitacija zanemarena (ne postoji utjecaj komponenta visine). Također se pretpostavlja nestlačivo strujanje bez izmjene topline, te se unutarnja energija fluida također ne razmatra. Od svih oblika energije ostaju kinetička energija i potencijalna energija tlaka. U nekom poprečnom presjeku krvne žile vrijednost ukupne specifične energije po jedinici volumena fluida se definira izrazom:

$$e = \frac{1}{A} \int_A \left[p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right] dS. \quad (3.25)$$

U gornjem izrazu se uzima u obzir da se tlak i brzina mijenjaju po poprečnom presjeku, te se računa njihova srednja integralna vrijednost.

4. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda za rješavanje problema diferencijalnih jednadžbi koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji, u kojoj se razmatrano područje dijeli na konačan broj potpodručja koja se nazivaju konačni elementi. Elementi su međusobno povezani u točkama na konturi koje se nazivaju čvorovi. Za svaki element pretpostavlja se rješenje zadane diferencijalne jednadžbe u obliku interpolacijskih funkcija koje povezuju zavisne varijable s njihovim vrijednostima u čvorovima. Izvodi se sustav algebarskih jednadžbi za cijeli diskretizirani model, u kojem su nepoznanice čvorne vrijednosti svih elemenata diskretiziranog područja.

Programski paket CRIMSON za rješavanje koristi troosni tetraedarski konačni element.

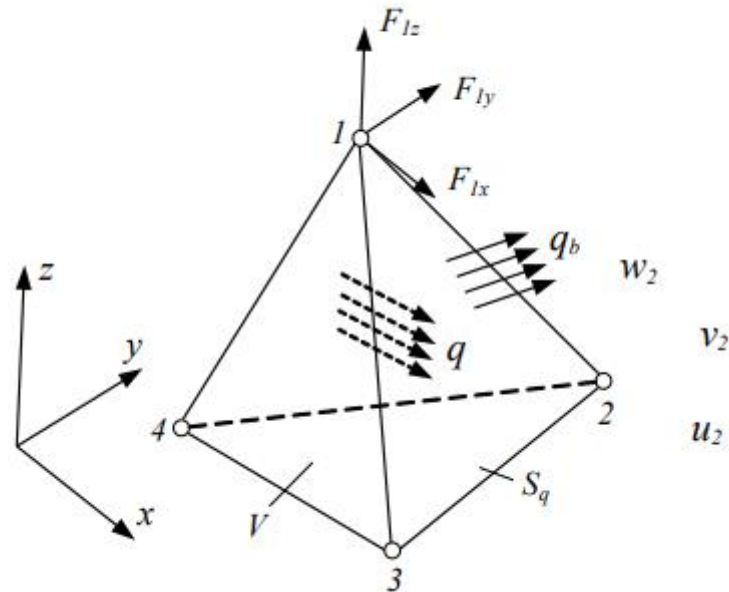
4.1. Tetraedarski konačni element.

Tetraedarski konačni element za trodimenzijsku analizu kontinuuma ima ukupno 12 stupnjeva slobode. Sastoji se od četiri čvora u vrhovima tetraeda s po tri komponente pomaka, u, v, w , u pravcu Kartezijevih koordinatnih osi. Stupnjevi slobode su komponente pomaka u čvorovima:

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4]. \quad (4.1)$$

Raspodjela pomaka u elementu opisana je potpunim polinomima prvog stupnja:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ v &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8z \\ w &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \end{aligned} \quad (4.2)$$



Slika 11. Tetraedarski konačni element prvog stupnja, preuzeto iz [15]

Iako je primarna namjena metode konačnih elemenata rješavanja problema iz područja čvrstoće, oni se naravno mogu primijeniti i na rješavanje problema strujanja. U tom slučaju se pomaci zamjenjuju komponentama brzine. Za primjer će biti objašnjeno rješavanje jednadžbe očuvanja količine gibanja i jednadžba očuvanja mase (jednadžbe kontinuiteta) na primjeru jednodimenzijskog strujanja.

4.2. Numerički postupak rješavanja jednadžbe količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta u CRIMSON-u.

Jednadžbe očuvanja količine gibanja i jednadžba očuvanja mase raspisane su u poglavlju Teorijske osnove mehanike fluida. Zbog jasnoće zapisa i korištenih oznaka u samom programu CRIMSON te jednadžbe bit će ponovno zapisane za slučaj jednodimenzijskog strujanja, s drugim oznakama. U jednodimenzijskom strujanju koriste se veličine koje su funkcije vremena t i uzdužne koordinate x , koja prolazi simetralom cijevi. Tlak i brzina koji se u općem slučaju mijenjaju, osrednjavaju se po poprečnom presjeku tako da su i te veličine funkcije samo od x i t .

Volumen u krvnoj žili između dva presjeka, definirana koordinatama x_1 i x_2 , definiran je kao:

$$V(t; x_1; x_2) = \int_{x_1}^{x_2} A(x, t) dx \quad (4.3)$$

Količina gibanja u tom volumenu je:

$$M(t; x_1; x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(2\pi \int_0^{R(x,t)} v(r, x, t) r dr \right) dx \quad (4.4)$$

Vremenskom derivacijom volumena dobiva se volumenski protok:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx = Au, \quad (4.5)$$

Iz te jednadžbe slijedi jednadžba kontinuiteta, koja glasi

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial x} = 0, \quad (4.6)$$

gdje je u srednja aksijalna brzina definirana kao:

$$u(x, t) = \frac{2\pi}{A} \int_0^{R(x,t)} v(r, x, t) r dr \quad (4.7)$$

Vremenskom derivacijom količine gibanja dobiva se:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2\pi\rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{R(x,t)} v(r, x, t) r dr \right) dx \quad (4.8)$$

Kada se brzina promjene količine gibanja ($\partial M / \partial t$) izjednači sa silama tlaka i silama trenja na stijenci dobije se:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (uA) + \frac{\partial}{\partial t} (wA) \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} = fA, \quad (4.9)$$

gdje w predstavlja kvadrat brzine strujanja:

$$w(x, t) = \frac{2\pi}{A} \int_0^{R(x,t)} (v(r, x, t))^2 r dr, \quad (4.10)$$

a f predstavlja specifičnu silu trenja:

$$f = \frac{2}{R} \mu \frac{\partial v(R(x, t), x, t)}{\partial r} \quad (4.11)$$

Konačno, jednačba količine gibanja se može preurediti u oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial (A(u^2 - w))}{\partial x} + \frac{f}{\rho}. \quad (4.12)$$

U gornje dvije jednačbe su tri nepoznanice: $p(x,t)$, $A(x,t)$ i $u(x,t)$, a treća jednačba je konstitutivna jednačba za stijenu, koja je definirana funkcijom koja daje vezu između tlaka i površine poprečnog presjeka:

$$p = p(A). \quad (4.13)$$

Uvođenjem poznate funkcije $p(A)$ u jednačbu količine gibanja, ona se može zapisati kao

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p(A) \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\rho}{A} \frac{\partial (A(u^2 - w))}{\partial x} + f \quad (4.14)$$

Objekt jednačbe se mogu zapisati u matričnom obliku, kao

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ A \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 + \frac{p(A)}{\rho} \\ uA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} \frac{\partial (A(u^2 - w))}{\partial x} + f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

gdje je prva jednačba zakon očuvanja mase, a druga jednačba zakon očuvanja količine gibanja. Taj se sustav može poopćiti u sljedećem zapisu

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial G(g)}{\partial x} = H, \quad (4.16)$$

$$g = \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix}, \quad G(f) = \begin{pmatrix} uA \\ -\frac{1}{2}u^2 + w + \frac{p(A)}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u^2 - w}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + f \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Sustav gornjih jednačbi se rješava metodom konačnih elemenata na mreži prikazanoj na slikama 20, 21, 22. Prema shemi koja se primjenjuje u metodi konačnih elemenata sustav se rješava za svaki vremenski trenutak, kroz dva koraka. U prvom se računaju površine i brzine na polovištima spojnice čvorova, na sredini vremenskog intervala integracije, prema izrazima

$$A_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (A_l^n + A_{l+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\phi_{l+1}^n + \phi_l^n) + \frac{\Delta t}{4} ((h_1)_{l+1}^n - (h_1)_l^n)$$

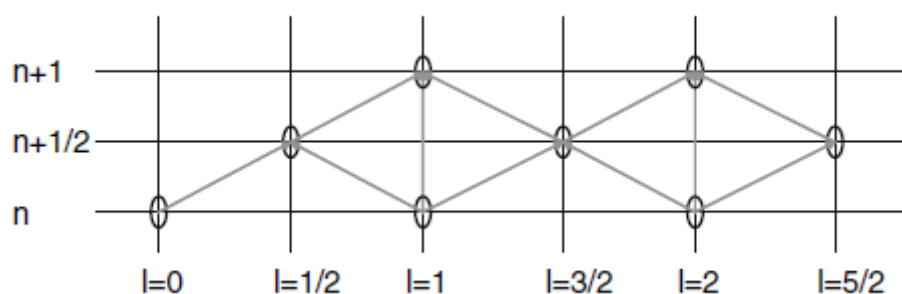
$$u_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_l^n + u_{l+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\psi_{l+1}^n + \psi_l^n) + \frac{\Delta t}{4}((h_2)_{l+1}^n - (h_2)_l^n), \quad (4.18)$$

A u drugom, u čvorovima na kraju vremenskog intervala integracije:

$$A_l^{n+1} = A_l^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{l-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left((h_1)_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (h_1)_{l-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$u_l^{n+1} = u_l^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\psi_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{l-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left((h_2)_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (h_2)_{l-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (4.19)$$

Slika 12 prikazuje vremensko-prostornu mrežu za rješavanje jednodimenzijuskog strujanja, prema Richtmeyeru. Unutar programa se provode interpolacijske funkcije u čvorovima te se računaju vrijednosti traženih veličina.



Slika 12. Richtmeyerova shema konačnih elemenata, preuzeto iz [16]

5. RAČUNALNA SIMULACIJA

Rješavanje problema strujanja napravljeno je u programskom paketu CRIMSON kojemu je primarna funkcija analiza strujanja iz područja hemodinamike. S obzirom da je to specijalizirani program, rad s njim malo je drugačiji nego rad u uobičajenim CFD programima opće namjene, pa će na primjeru biti pokazano postavljanje rubnih uvjeta kao i provođenje same simulacije. Simulacija je provedena s tri različita slučaja rubnih uvjeta te s različitim mrežama kako bi se pokazalo da su rezultati mrežno neovisni. Također bit će objašnjena i grafički prikazana značajna razlika između pulsirajućeg i stacionarnog strujanja.

5.1. Rubni uvjeti

Ispravno postavljanje rubnih uvjeta od iznimne je važnosti za rješavanje problema strujanja fluida. Ukoliko rubni i početni uvjeti nisu dobro određeni nemoguće je dobiti fizikalno dobra rješenja te samim time simulacija nije od koristi.

Strujanje krvi kroz krvne žile može se promatrati kao kompliciraniji model strujanja fluida kroz složenu geometriju cijevi. U tom slučaju zadaju se rubni uvjeti na ulazu, na stijenci, na izlazu te početni uvjeti.

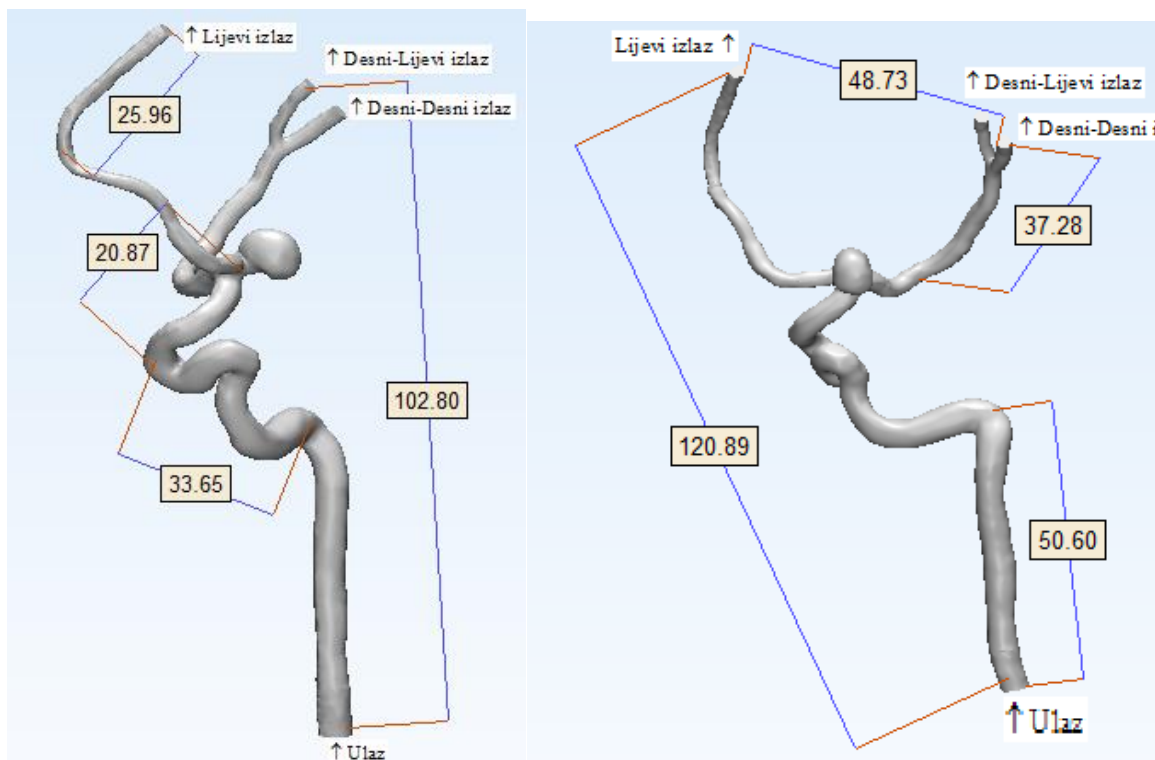
Rubni uvjeti koji su korišteni:

- ulazna brzina koja je izražena preko protoka koji ovisi o vremenu, a korisnik može birati oblik profila brzine: jednolik po presjeku ili oblika paraboloida
- „no slip“ rubni uvjet na stijenci, što podrazumijeva da nema relativne brzine između krvi i stijenke
- rubni uvjet na izlazu se modelira ili zadanim konstantnim tlakom po presjeku ili modelom s koncentriranim parametrima (također zvanom Windkessel model). Naime, simulacija se uvijek odnosi na strujanje u velikim arterijama (prve dvije-tri generacije arterija, a ostatak sustava se može dobro modelirati pomoću tri-elementnog Windkessel modela, kako će biti kasnije objašnjeno).

Početni uvjeti podrazumijevaju zadavanje početne raspodjele tlaka i brzine strujanja krvi. Korisnik zadaje razinu početnog tlaka, a početnu raspodjelu brzine program automatski generira temeljem rubnog uvjeta na ulazu. Važno je napomenuti da početni uvjeti nisu relevantni za konačni rezultat, što je jasno kad se radi o analizi stacionarnog strujanja. U slučaju

pulsirajućeg strujanja, simulacija se provodi dovoljno dugo da se postigne periodično pulsirajuće strujanje, tj. dok utjecaj početnih uvjeta ne iščezne.

Važno je napomenuti da programski paket CRIMSON u kojemu su simulacije napravljene ne radi sa SI sustavom jedinica nego sve fizikalne veličine izražava preko jedinica: [g], [mm], [s]. Geometrija žile na kojoj se nalazi intrakranijska aneurizma dobivena je MRI metodom te je takva prebačena u STL format koji je onda direktno korišten dalje u CRIMSON-u:



Slika 13. Nazivi izlaza krvne žile

Krv se tretira kao nenevtonski fluid samo pri jako malim vrijednostima tangencijalnih napreznja ili u slučaju kada je promjer krvne žile mali u odnosu na promjer crvenih krvnih zrnaca. Prema tome, krv se razmatra kao nenevtonski fluid u slučaju strujanja u malim arterijama i kapilarama s veličinom promjera manjim od 200 [μm]. Kako je veličina promjera najuže žile RMCA-e za red veličine većeg promjera krv se može smatrati kao nevtonski fluid. Za slučaj kada postoje uvjeti za tretiranje krvi kao nenevtonskog fluida CRIMSON samostalno određuje parametre što znači da se korisnik ne mora brinuti oko postavki. Također krv se smatra nestlačivim fluidom. Podaci koji su korišteni u svim daljnjim simulacijama su: Viskoznost krvi

$$\mu = 0,004 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm} \cdot \text{s}} \right],$$

$$\text{Gustoća krvi } \rho = 0,00106 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \right].$$

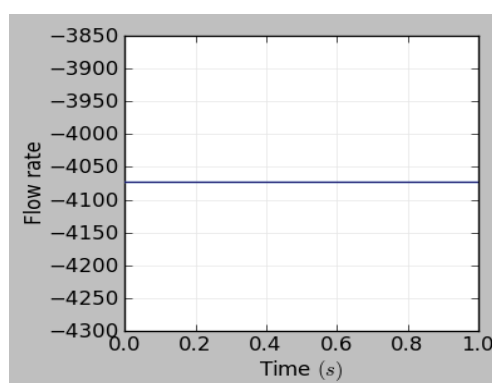
5.1.1. Slučaj stacionarnog strujanja s konstantnim tlakom na izlazima

- Ulazna brzina (protok)

U analiziranom slučaju postoji jedan ulazni presjek (na slici označen s Ulaz) kroz koju fluid ulazi u promatrani lumen. Na ulazu se općenito zadaje protok u funkciji vremena. To se radi tablično, u dva stupca, od kojih prvi označuje vrijeme u sekundama, a drugi protok u $[\text{mm}^3/\text{s}]$. U slučaju stacionarnog strujanja (kada je ulazni protok isti tijekom cijelog takta), dovoljno je zadati samo dva retka (protok u početnom i krajnjem trenutku), kako to prikazuje Tablica 1. Program CRIMSON automatski crta zadani protok u vremenu, kako je prikazano na slici uz Tablicu 1. U izobraženom laminarnom strujanju u okrugloj cijevi, profil brzine ima oblik rotacionog paraboloida. Program CRIMSON će iz zadanog protoka automatski generirati takav profil.

| Vrijeme [s] | Protok $[\text{mm}^3/\text{s}]$ |
|-------------|---------------------------------|
| 0 | -4072,9 |
| 1 | -4.072,9 |

Tablica 1. Stacionarni protok



Važno je uočiti da brzina na ulazu ima negativan predznak jer vanjska normala na ulazni presjek gleda u suprotnom smjeru od vektora brzine. Po toj konvenciji brzine na izlaznom presjeku će biti pozitivne.

- Stijenka

Viskozni fluid se lijepi na stijenku, zbog čega nastaje granični sloj. To se u programu CRIMSON jednostavno zadaje izborom rubnog uvjeta „no slip“.

- Rubni uvjet na izlazu

Poznato je da u nestlačivom strujanju razina tlaka nije bitna, tj. proračun možemo vršiti ili s apsolutnim tlakom ili s pretlakom. Uobičajeno je raditi s pretlakom. U programskom paketu

CRIMSON jednostavno je simulirati istjecanje u prostor s nulnim pretlakom, odabirom izlaznog rubnog uvjeta „no pressure“. U slučaju stacionarnog strujanja ovaj rubni uvjet će osigurati brzu konvergenciju rješenja, međutim on ne osigurava fizikalnost strujanja u krvnim žilama. Naime, konstantni tlak na izlazu bi podrazumijevao istjecanje u veliki prostor u kojem se tlak ne mijenja, bez obzira na protok. U stvarnoj situaciji strujanja u krvnim žilama, strujanje na izlazu iz analiziranog volumena se nastavlja kroz krvne žile u kojima tlak i te kako zavisi od izlaznog protoka, pa je Windkessel model za opis izlaznog rubnog uvjeta puno bolja opcija.

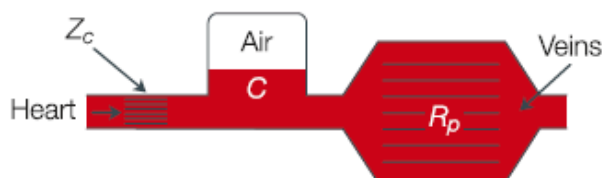
- Početni tlak

Kao što je rečeno, početni uvjeti ne utječu na krajnji rezultat simulacije, ali utječu na brzinu postizanja stacionarnog stanja, ili periodičkog pulsirajućeg strujanja, pa je dobro zadati početni tlak što bliže srednjem tlaku u konačnom rješenju. Preporučuje se za početni tlak zadati srednju vrijednost tlaka u ljudskom organizmu. Srednji tlak se nalazi između vrijednosti sistoličkog tlaka (za zdrave osobe je to oko 120 [mmHg]) i dijastoličkog tlaka [80 mmHg]. Ovdje je za početni tlak uzeto $13332 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$, što odgovara tlaku od 100 mm stupca žive [100 mmHg].

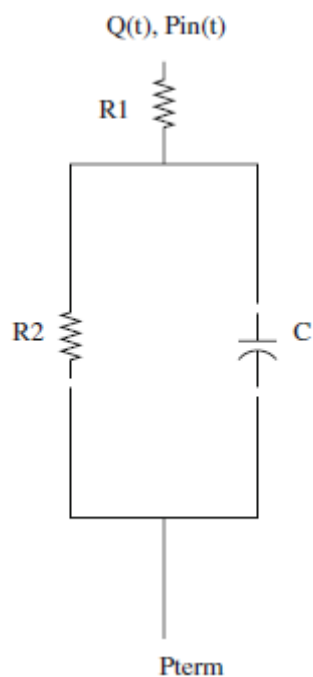
5.1.2. Slučaj stacionarnog strujanja s Windkessel modelom izlazima

Modeliranje rubnih uvjeta na izlazu napravljeno je pomoću Windkessel modela koji se sastoji od otpora Z_C i R_p , te kapaciteta C . Naime, analiza strujanja krvi u čitavom arterijskom stablu pokazuje da takav model vrlo dobro opisuje mjerenu ulaznu impedanciju arterijskog stabla (ulazna impedancija je omjer fazora tlaka i protoka na ulazu u arterijsko stablo) [7]. Mjerenja također pokazuju da je impedancija u bilo kojoj točki arterijskog stabla slična ulaznoj impedanciji, pa se izlazni rubni uvjet može dobro opisati Windkessel modelom. Uobičajeno je za Windkessel model koristiti analognu električnu shemu, jer postoji analogija između hidrauličkih i električnih veličina; struja odgovara protoku, a napon tlaku. Hidraulički otpor (otpor trenja) odgovara električnom otporu, inercija odgovara induktivitetu (modelira se zavojnicom), a popustljivost kapacitetu (modelira se kondenzatorom). Slika 13 shematski prikazuje hidrauličku shemu Windkessel modela s tri elementa, a slika 14 analognu električnu shemu, koja se koristi za modeliranje izlaznog rubnog uvjeta. U hidrauličkoj shemi otpor Z_c označuje takozvanu karakterističnu impedanciju, što je u rubnom uvjetu označeno otporom R_l , C označuje popustljivost (kapacitet) arterijskog stabla, a u rubnom uvjetu je to kapacitet preostalih krvnih žila u koje krv istječe iz analiziranog sustava. Otpor R_p je periferni otpor (otpor

svih arteriola i kapilara), a u električnoj shemi je to otpor R_2 i označuje periferni otpor svih arteriola i kapilara koje se opskrbljuju krvlju iz promatrane izlazne grane. Tlak P_{term} , na slici 14 je terminalni pretlak, za koji se uzima da je jednak nuli, a $Q(t)$ i $P_{in(t)}$ su protok i tlak u izlaznom presjeku, čija je zavisnost definirana Windkessel modelom.



Slika 14. Windkessel model čitavog arterijskog stabla, preuzeto iz [7]



Slika 15. Analogna električna shema (RCR krug) Windkessel modela za definiranje izlaznog rubnog uvjeta, preuzeto iz [7]

Periferni otpor R_p glavni je i primarni otpor strujanja krvi te nosi većinu ukupnog iznosa otpora, jer predstavlja ukupni otpor svih malih arterija, arteriola i kapilara. Umnožak kapaciteta i perifernog otpora definira vremensku konstantu τ koja nam govori o brzini smanjenja tlaka ($p(t) = p_{početno} \exp(-t/\tau)$) nakon prestanka eejkcije krvi iz srca (za vrijeme dijastole), Ako se uzme da dijastola traje oko 65% takta, te da u to vrijeme tlak padne od srednje vrijednosti tlaka (približno jednako tlaku na kraju sistole) do dijastoličkog tlaka, tada vrijedi:

$$\tau = R_p C = \frac{0.65T}{\ln\left(\frac{P_{sr}}{P_{dij}}\right)} = \frac{0.65 \cdot 1s}{\ln\left(\frac{100\text{mmHg}}{80\text{mmHg}}\right)} = 2.91[\text{s}] \quad (5.1)$$

Karakteristični ili proksimalni otpor Z_C predstavlja otpor strujanja u proksimalnoj aorti. Mjerenja pokazuju da se omjer Z_C/R_p kreće u rasponu 0,05 do 0,15 a ovdje će se uzeti

$$Z_C \approx 0.1R_p \quad (5.2)$$

Na izlazima se otpori računaju preko omjera protoka. Što je protok veći to će otpor biti manji kako bi se taj protok mogao postići. Omjer protoka i otpora u pojednostavljenom obliku može se zapisati kao:

$$R = R_p + Z_C = \frac{P_{sr}}{Q}, \quad (5.3)$$

Za srednje protoke vrijedi $p_{sr} = R_{\text{tot}}Q_{\text{in}} = R_1Q_1 = R_2Q_2 = R_3Q_3 = \dots$, odakle za omjer i -tog i j -tog izlaznog protoka vrijedi

$$\frac{Q_i}{Q_j} = \frac{R_j}{R_i} \quad (5.4)$$

Zadnji izraz nam govori da su protok i otpor u recipročnom odnosu. Ako imamo mjerenja protoka kroz pojedine izlazne grane, možemo izračunati izlazne otpore $R_p + Z_C$, pa se iz pretpostavke $Z_C \approx 0.1R_p$ mogu izračunati pojedini otpori, a iz vremenske konstante τ se dolazi do kapaciteta C .

Tlak i protok u izlaznom presjeku su prema opisanom Winkessel modelu povezani diferencijalnom jednačinom:

$$P_{\text{in}} + R_p C \frac{dP_{\text{in}}}{dt} = (Z_C + R_p)Q + P_{\text{term}} + Z_C R_p C \frac{dQ}{dt} \quad (5.5)$$

Za slučaj periodičkog pulsirajućeg strujanja se gornja jednačina može primjenom Fourierove transformacije prevesti u frekvencijsku domenu, gdje ona prelazi u algebarsku jednačinu:

$$\hat{P}_k = \hat{Q}_k \frac{Z_C + R_p + i\omega_k Z_C R_p C}{1 + i\omega_k R_p C}, \quad (5.6)$$

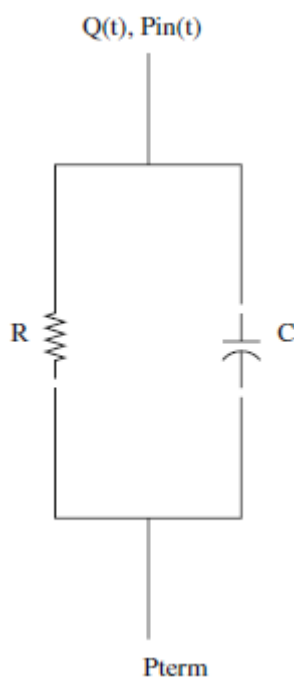
gdje su \hat{P}_k i \hat{Q}_k fazori tlaka i protoka na frekvenciji $\omega_k = k\omega_0 = k2\pi/T$, dobiveni Fourierovom transformacijom. Odnos između tlaka i protoka definira impedanciju $Z(\omega)$:

$$Z_k = Z(\omega_k) = \frac{\hat{P}(\omega_k)}{\hat{Q}(\omega_k)} = \frac{\hat{P}_k}{\hat{Q}_k} = \frac{Z_c + R_p + i\omega_k Z_c R_p C}{1 + i\omega_k R_p C} \quad (5.7)$$

Bitno je naglasiti da kombinacija elemenata otpora i kapaciteta u RCR krugu djeluje kao niskofrekventni filter (propušta niske frekvencije, a prigušuje visoke). Poznato je iz literature da kada se za izlazni rubni uvjet koristi samo otpornik, rješenje sadrži nefizikalne oscilacije, pa se zato preporučuje koristiti Windkessel model koji uključuje kapacitet. Za slučaj $Z_c = 0$, dobije se poznati dvoelementni Windkessel model, kao na Slici 15, čija je diferencijalna jednadžba;

$$P_{in} - P_{term} + RC \frac{dP_{in}}{dt} = RQ \quad (5.8)$$

U ovom modelu impedancija pri visokim frekvencijama teži k nuli što je suprotno mjerenjima, koja pokazuju da impedancija pri visokim frekvencijama poprima konstantnu realnu vrijednost, koja upravo odgovara karakterističnoj impedanciji Z_c . Ovdje će se koristiti Windkessel model sa tri elementa.



Slika 15. RC krug, shema, preuzeto iz [7]

U nastavku se daje proračun parametara u Windkessel modelu za sve tri izlazne grane, nazvane u skladu sa slikom 13: Lijevi, Desni-Lijevi, Desni-Desni. Pretpostavlja se da su udjeli protoka u ukupnom protoku kroz ove grane redom: 12/33; 10,5/33 i 10,5/33.

Lijevi izlaz

Srednji tlak na lijevom izlazu, kao i na ostalim izlazima jednak je početnom tlaku te je to približno srednji tlak koji prevladava u cijelom krvnom sustavu :

$$p_{sr} = 13332 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm} \cdot \text{s}^2} \right].$$

Protok na lijevom izlazu:

$$Q_L = Q_U \frac{12}{12+21} = 1481,02 \left[\frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \right].$$

Karakteristični i periferni otpori su u programskom paketu CRIMSON označeni sa slovima r i R umjesto slovima Z_C i R_p .

$$r_L + R_L = \frac{p_{sr}}{Q_{sr,L}} = \frac{13332 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm} \cdot \text{s}^2} \right]}{1481,021 \left[\frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \right]} = 9,063 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^4 \cdot \text{s}} \right],$$

$$r_L = 0,1R_L = 0,821 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^4 \cdot \text{s}} \right],$$

$$R_L = 8,242 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^4 \cdot \text{s}} \right],$$

$$\tau = R_L C_L = 2,91 [\text{s}],$$

$$C_L = \frac{\tau_L}{R_L} = 0,354 \left[\frac{\text{s}^2 \cdot \text{mm}^4}{\text{g}} \right],$$

Desni-Desni izlaz

$$Q_{D-D} = Q_U \frac{1}{2} \frac{21}{12+21} = 1295,920 \left[\frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \right],$$

$$r_{D-D} + R_{D-D} = \frac{p_{sr}}{Q_{sr,D-D}} = \frac{13332 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm} \cdot \text{s}^2} \right]}{1295,920 \left[\frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \right]} = 10,294 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^4 \cdot \text{s}} \right],$$

$$r_{D-D} = 0,1R_{D-D} = 0,934 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^4 \cdot \text{s}} \right],$$

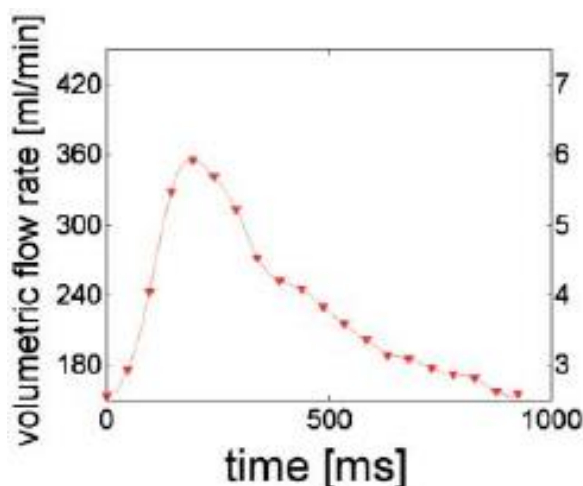
$$R_{D-D} = 9,350 \left[\frac{\text{g}}{\text{mm}^4 \cdot \text{s}} \right],$$

$$\tau = R_{D-D} C_{D-D} = 2.91 [\text{s}].$$

Svi podaci za izlaz Desni-Lijevi isti su kao i podaci za Desni-Desni izlaz zbog toga što su protoci na tim izlazima jednaki.

5.1.3. Slučaj pulsirajućeg strujanja s Windkessel modelom na izlazima

Rubni uvjeti na izlazu, na stijenci te početni uvjet tlaka isti su kao u prethodnom slučaju gdje se analiziralo stacionarno strujanje s otporom na izlazu. Ono što je drugačije je ulazna brzina odnosno funkcija protoka na ulazu u lumen. U stvarnosti srce radi kao pumpa. Kroz taktove ono se kontrahira i relaksira te tako tjera krv kroz krvne žile. Na slici 16. dana je funkcija protoka u vremenu preuzeto iz [17] iz stvarnih snimaka 3 nerupturirane aneurizme korištenjem 3D fazno-kontrastnog MR snimanja. Pretpostavljen je parabolični profil brzine na ulazu.



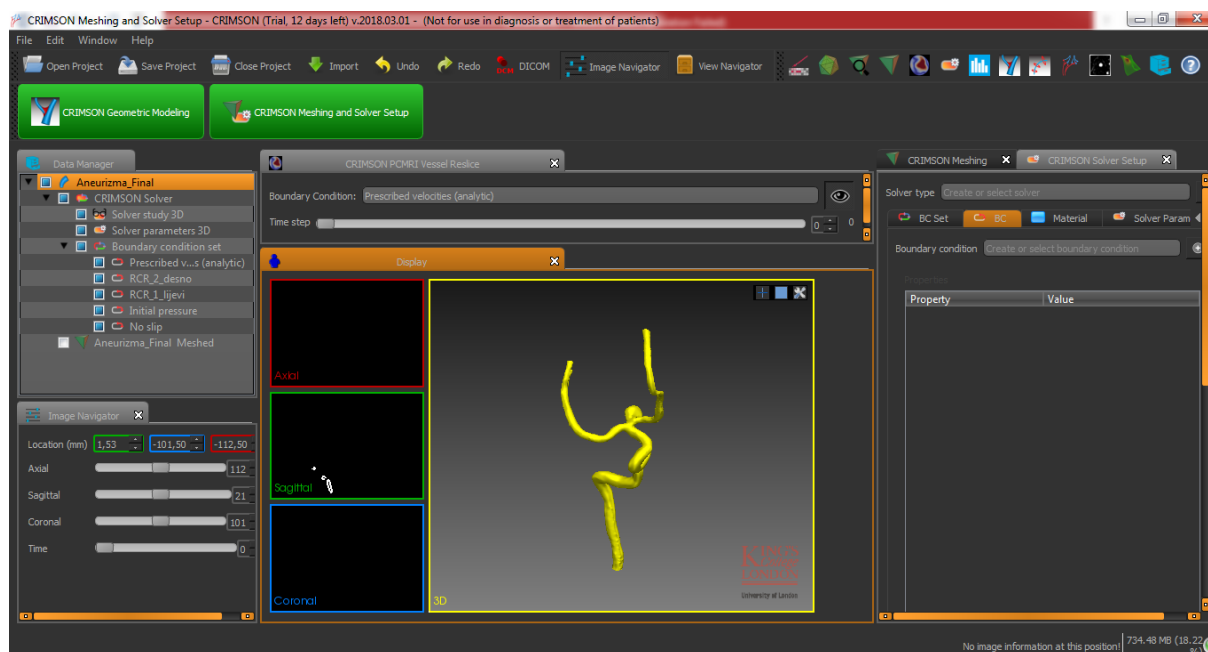
Slika 16. Funkcija pulsirajućeg protoka, preuzeto iz [17]

5.2. CRIMSON primjer za pulsirajuće strujanje

CRIMSON programski paket prvenstveno je namijenjen za analiziranje strujanja krvi u krvnim žilama. Ono što ga razlikuje od drugih CFD programa je to što se mogu direktno učitavati medicinske slike i skenovi određenih geometrija (organa). Ova opcija uvelike olakšava probleme računanja i analiziranja pojedinih stvari u biomehanici zbog izrazito kompleksne geometrije pojedinih objekata kao što su žile, kosti itd. te bi ih bilo iznimno teško modelirati.

CRIMSON je program kod kojeg postoji korisničko sučelje koje pojednostavljuje rad. Kada se otvori početni prozor pojavljuju se prozori među kojima postoje:

- Izbornik sa stablom značajki postojećih elemenata
- Prikaz geometrije za odabiranje površina
- Postavke mreže
- Postavke rubnih uvjeta
- Postavke *solvera*
- Zasebni pogled u sve tri ravnine kao i glavni izometrijski pogled



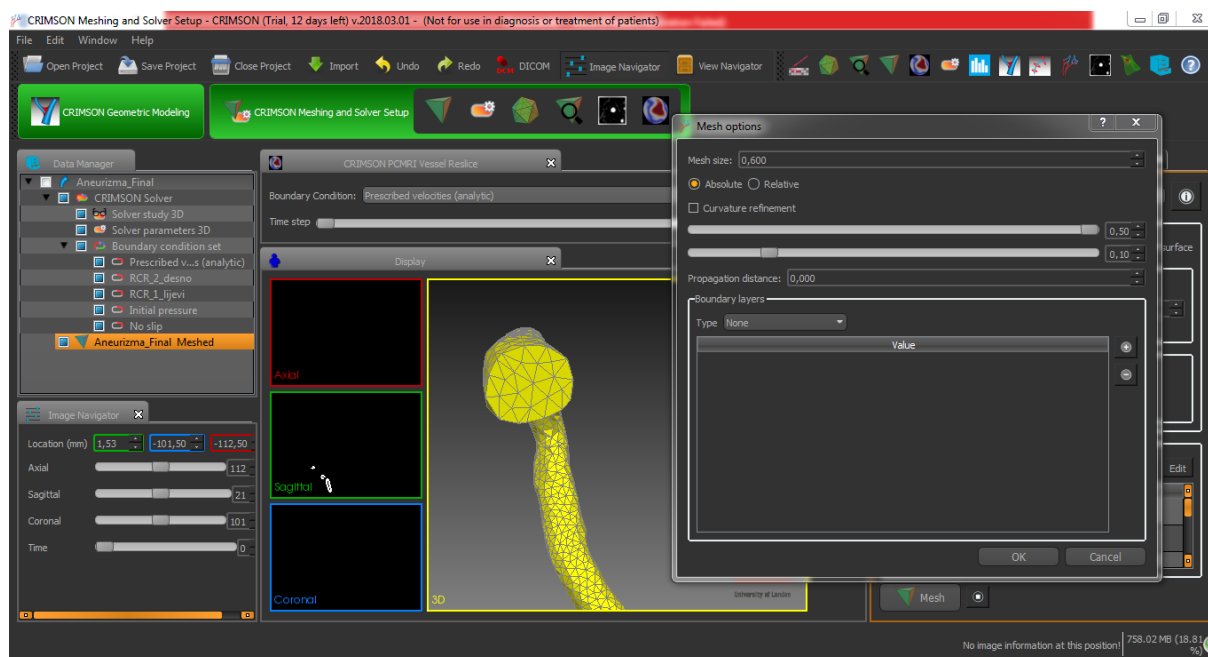
Slika 17. Sučelje programskog paketa Crimson

Mreža

Kod odabiranja mreže, opcije koje su ponuđene za odabir su:

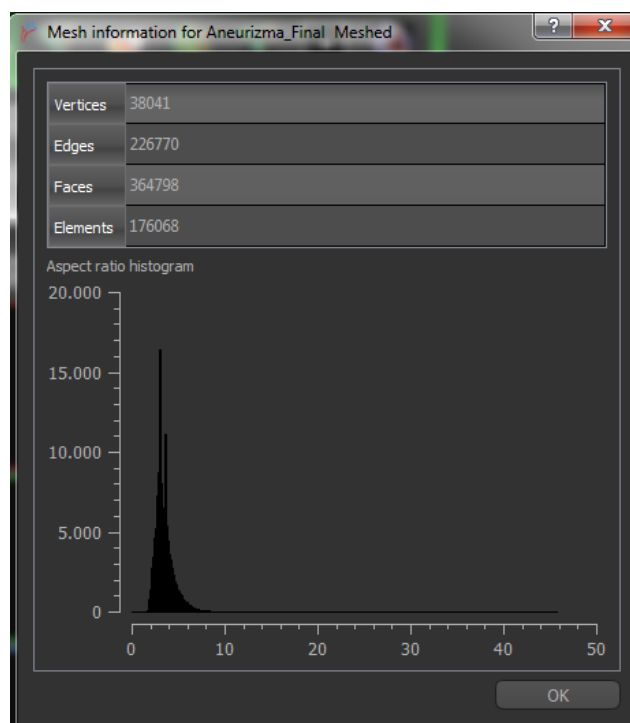
- Apsolutni ili relativni broj elemenata u objektu
- Gustoća elemenata uz rub
- Gustoća elemenata po konturama

Jedini konačni element koji CRIMSON trenutno posjeduje za analizu je tetraedarski konačni element prvog reda.



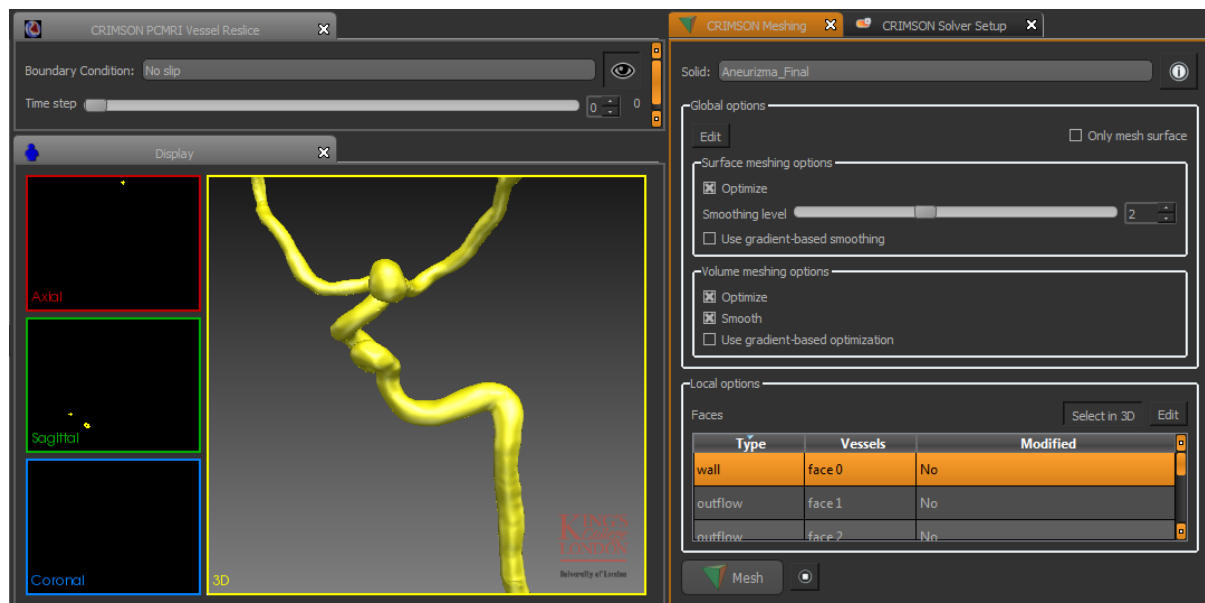
Slika 18. Prikaz mreže konačnih elemenata u Crimsonu (1)

Nakon što je mreža napravljena mogu se dobiti informacije o gotovoj mreži te ukupnom broju elemenata.



Slika 19. Podaci o broju elemenata i kvaliteti mreže

Prije postavljanja rubnih uvjeta na određenim stranicama mreže treba definirati ulaze i izlaze kroz koje struji krv te zid. CRIMSON intuitivno prepoznaje površine te u većini slučajeva nije potrebno mijenjati njegove pretpostavke.



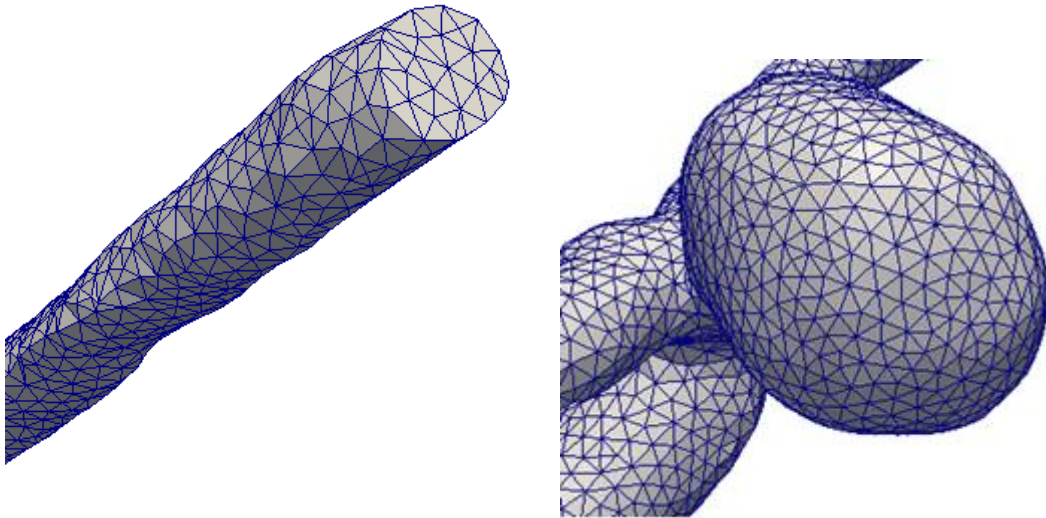
Slika 20. Crimson, odabiranje ploha ulaza, izlaza i zida

Na slici 21 prikazana je mreža konačnih elemenata geometrije žile korištena u simulaciji:

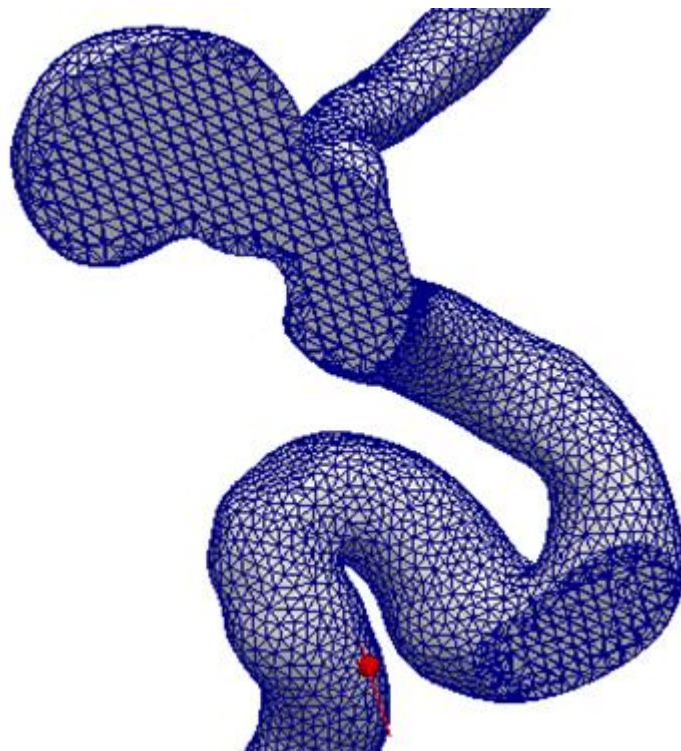


Slika 21. Mreža konačnih elemenata

Na slikama 21, 22 i 23 prikazana je mreža konačnih elemenata dijelova geometrije žile korištena u simulaciji:



Slika 22. Dijelovi mreže detalja Lijevo izlaza i aneurizme

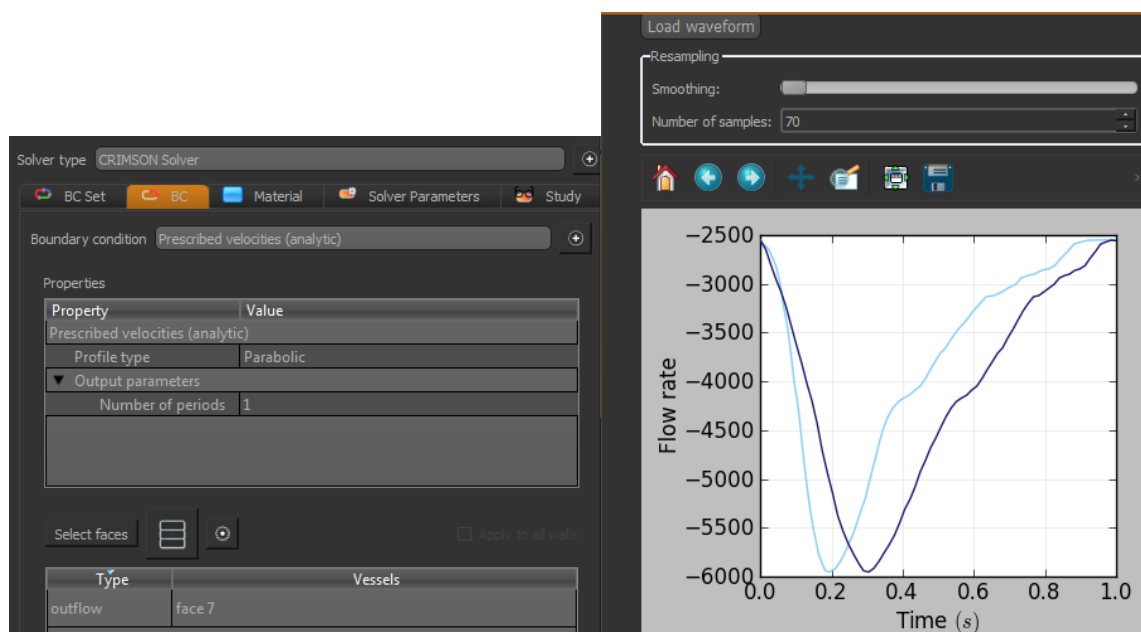


Slika 23. Presjek mreže, detalj

Rubni uvjeti

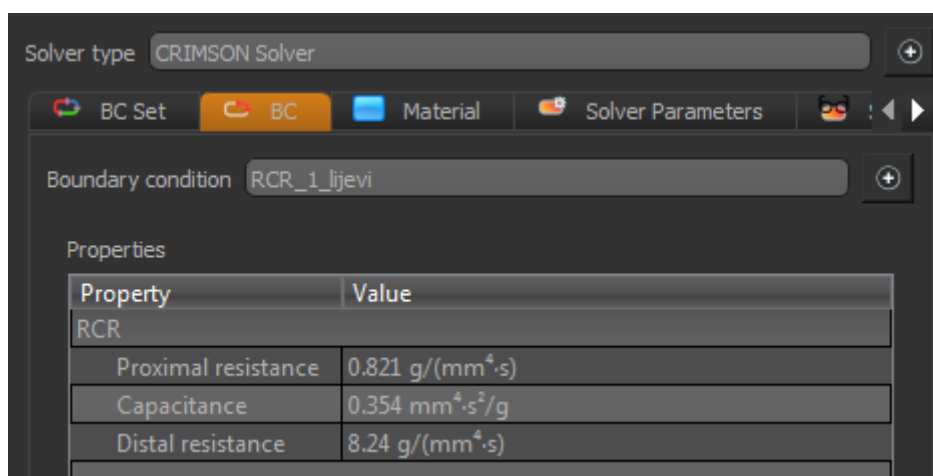
Rubni uvjeti koji su korišteni opisani su u poglavlju Računalna simulacija.

Prvi rubni uvjet koji je korišten je funkcija ulazne brzine odnosno ulaznog protoka. Nakon označavanja površine funkcija se unosi kao učitana tablica podataka sa zapisanim vrijednostima protoka ovisno o vremenu. Funkcija brzine po presjeku definirana je kao parabolična. To implicira da maksimalna brzina po presjeku nema više nego dvostruku vrijednost srednje brzine po presjeku.

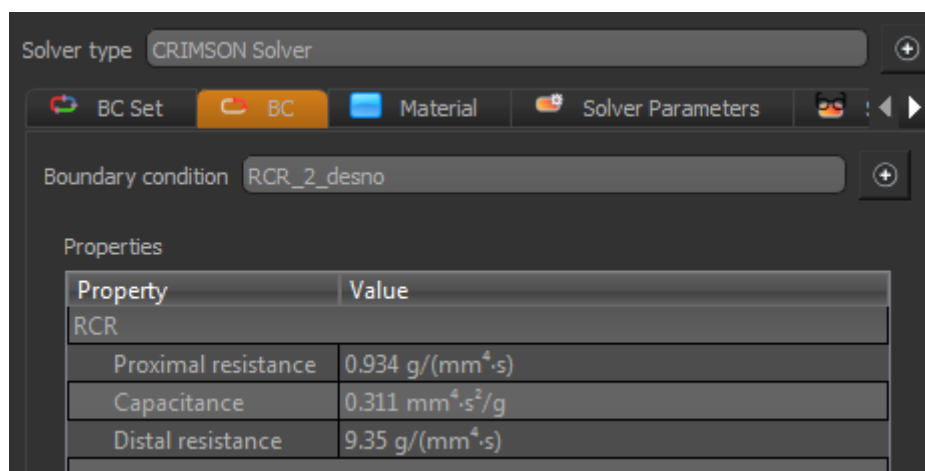


Slika 24. Crimson, ulazna brzina

Rubni uvjeti na izlazu definirani su preko otpora i kapaciteta. Njihove vrijednosti se unose kao rubni uvjet pod imenom RCR a površina izlaza označava se na isti način kao i ulaz.

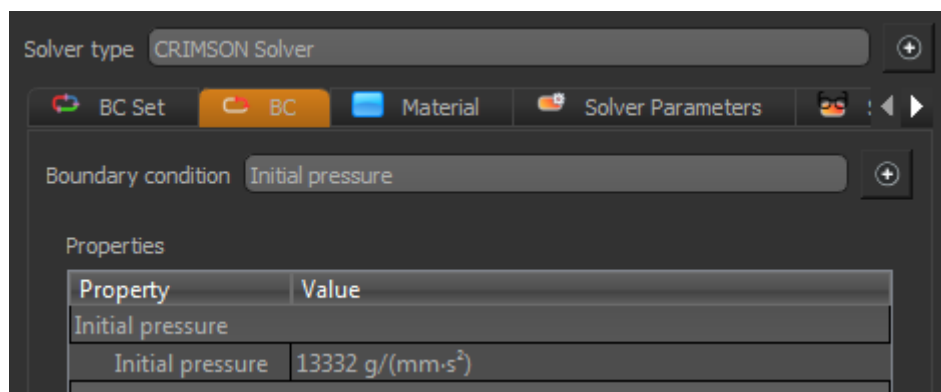


Slika 25. Crimson, rubni uvjet RCR lijevo



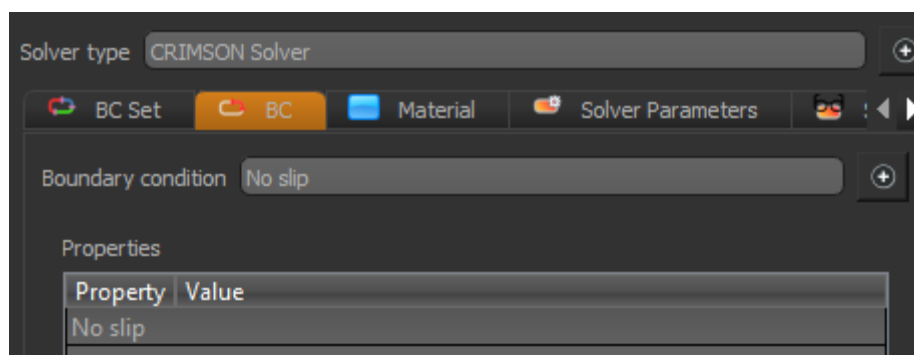
Slika 26. Crimson, rubni uvjeti RCR desno

Za rubni uvjet inicijalnog tlaka jednostavno se unosi iznos



Slika 27. Crimson, rubni uvjet Initial pressure

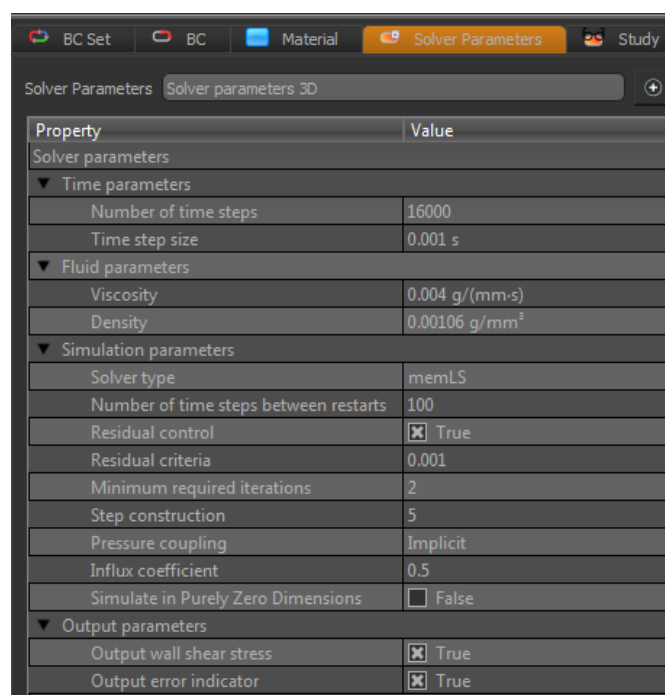
Rubni uvjet *no slip* unosi se kao opcija nakon označavanja površine zida.



Slika 28. Crimson, rubni uvjet no slip

Solver

Postavke solvera unose u prozoru Solver te se biraju vrijednosti koje su prikazane:



Slika 29. Crimson, postavke solvera

Među mnogim opcijama glavne za odabir su:

- Number of time steps: 16000– ukupan broj koraka od kojih se sastoji simulacija
- Time step size: 0,001 – vrijeme trajanja svakog pojedinog koraka
- Viscosity – viskoznost krvi
- Density – gustoća krvi
- Number of tome steps between restart: 100 – zapisivanje svakog n. koraka u datoteku s podacima

Iz odabranih veličina vremenskih parametara može se zaključiti sljedeće uz početnu pretpostavku da zadano vrijeme jednog takta iznosi 1[s] :

Ukupno vrijeme simulacije trajat će 16 taktova odnosno 16 sekundi:

$$T_{\text{int}} = N_{\text{steps}} \Delta t = 16000 \cdot 0,001 = 16 \text{ s}$$

Ukupni broj taktova za koje će se analiza razviti je 16 zbog toga što svaki traje točno jednu sekundu. Kada bi se smanjivalo vrijeme pojedinog koraka dobile bi se točnije vrijednosti za manje vremenskih taktova odnosno za manje vrijeme ukupnog trajanja simulacije. Kako je broj

zapisivanja između vremenskih koraka 100, bit će ukupno 160 vremenskih trenutaka u kojima su zapisane vrijednosti tlaka brzine itd.

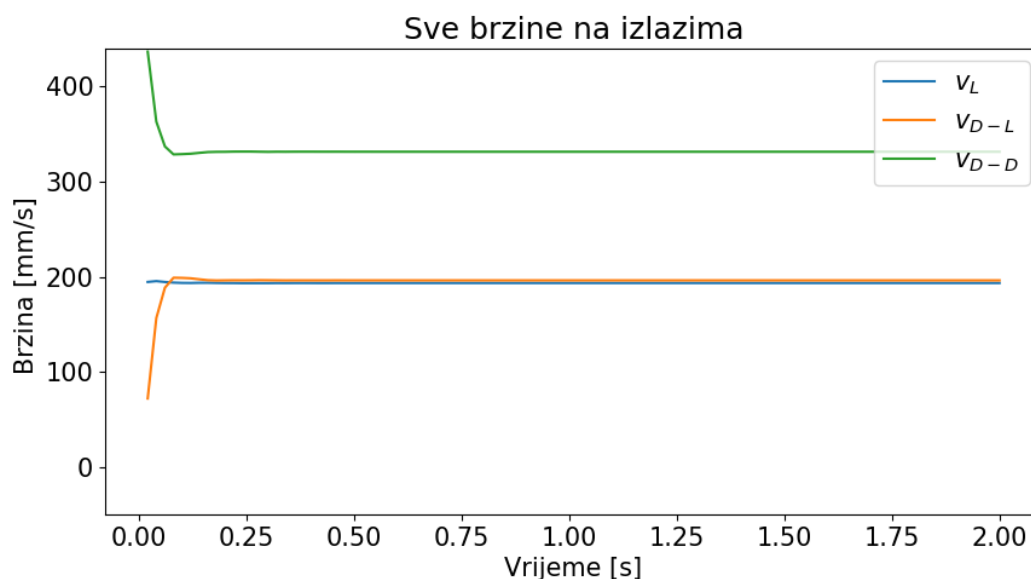
6. REZULTATI

Proračuni strujanja izvedeni su u programskom paketu CRIMSON (Cardiovascular Integrated Modelling and Simulation), prvenstveno namijenjenom za analizu strujanja krvi u krvnim žilama. Nažalost, CRIMSON u ovom trenutku još nije do kraja razvijen te postoje određene poteškoće u radu pri prikazu rezultata, koje bi se trebale otkloniti u budućnosti (razdvajanje površina, prikaz vektorskih veličina po komponentama u smjeru vektora normale i sl.). Kada program bude u potpunosti gotov, trebao bi biti open-source što je od velikog značaja za područje biomehanike.

Vizualizacija i grafika napravljene su programskom paketu ParaView nakon gotove simulacije. Grafovi su crtani u programskom paketu PYTHON 3 iz razloga što je postojala potreba za sumiranjem podataka kroz vremenske korake koji se dobivaju iz CRIMSON-a i ParaView-a.

6.1. Stacionarno strujanje s konstantnim tlakom na izlazima

Stacionarno strujanje aproksimacija je stvarnog pulsirajućeg strujanja. Kao ulazna vrijednost u lumen uzeta je vremenski srednja vrijednost protoka (odnosno brzine) tijekom jednog srčanog perioda. Na izlazima ne postoji otpor pa je pretlak u izlaznim presjecima jednak nuli. Raspodjela protoka po granama će ovisiti isključivo o otporima unutar krvne žile. Sve brzine na izlazima prikazane su na donjoj slici:



Slika 30. Brzine u izlaznim presjecima, stacionarno strujanje, nulti pretlak u izlaznim presjecima

Iz slike je vidljivo da se stacionarno stanje postiže unutar 0,25 s, a ustaljene vrijednosti brzina i protoka na izlazima su:

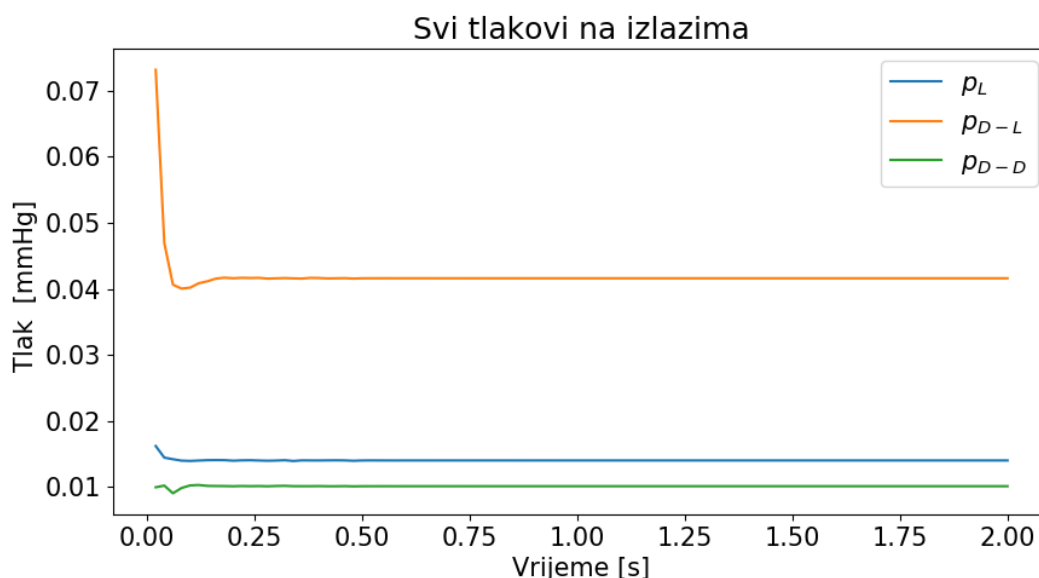
$$v_L = 199,2 \text{ [mm/s]} \quad Q_L = 1160,3 \text{ [mm}^3\text{/s]}$$

$$v_{D-L} = 196,2 \text{ [mm/s]} \quad Q_{D-L} = 1024,3 \text{ [mm}^3\text{/s]}$$

$$v_{D-D} = 331,5 \text{ [mm/s]} \quad Q_{D-D} = 2004,2 \text{ [mm}^3\text{/s]}$$

Ukupni izlazni protok je 4185 mm³/s, što približno odgovara zadanom ulaznom protoku 4073 mm³/s.

Tlakovi na svim izlazima prikazani su na slici:



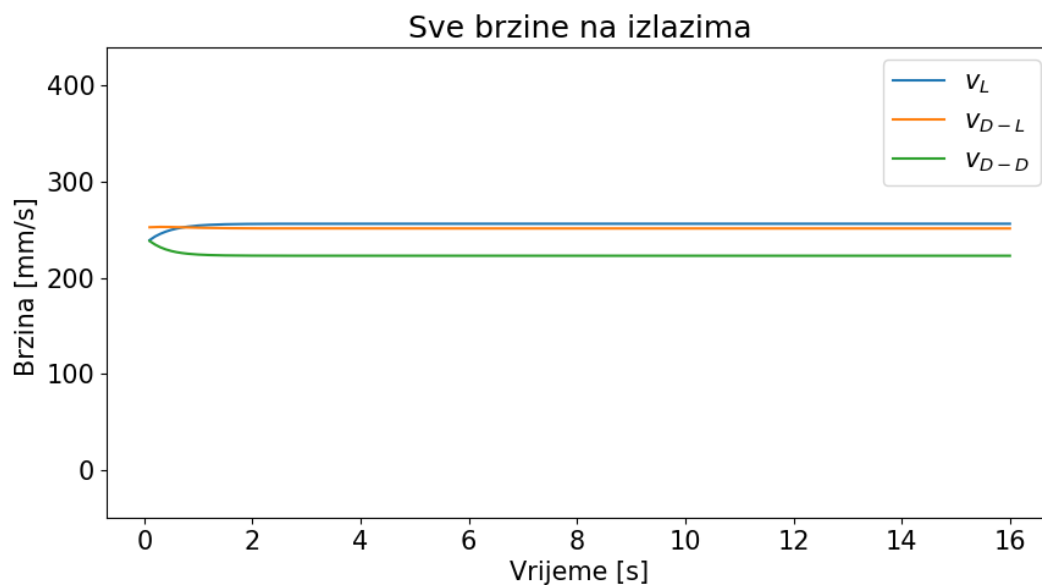
Slika 31. Tlakovi u izlaznim presjecima, stacionarno strujanje bez otpora na izlazima

Vrijednosti tlakova kreću se blizu nule što je i zadanu rubnim uvjetima pa daljnja analiza nije potrebna. Minimalna razlika u odnosu na zadanu vrijednost se uzima kao numerička pogreška.

6.2. Stacionarno strujanje s Windkessel modelom na izlazima

Vrijednosti brzine stacionarnog strujanja s Windkessel modelom na izlazima (parametri Windkessel modela su dani u prethodnom poglavlju) razlikuju se od vrijednosti dobivenih u analizi stacionarnog strujanja bez otpora (nulti pretlak u izlaznim presjecima), jer ovdje izlazne

brzine zavise i od otpora u Windkessel modelu. Grafovi koji prikazuju vrijednosti brzine i tlaka na izlazima dani su na slici 32:



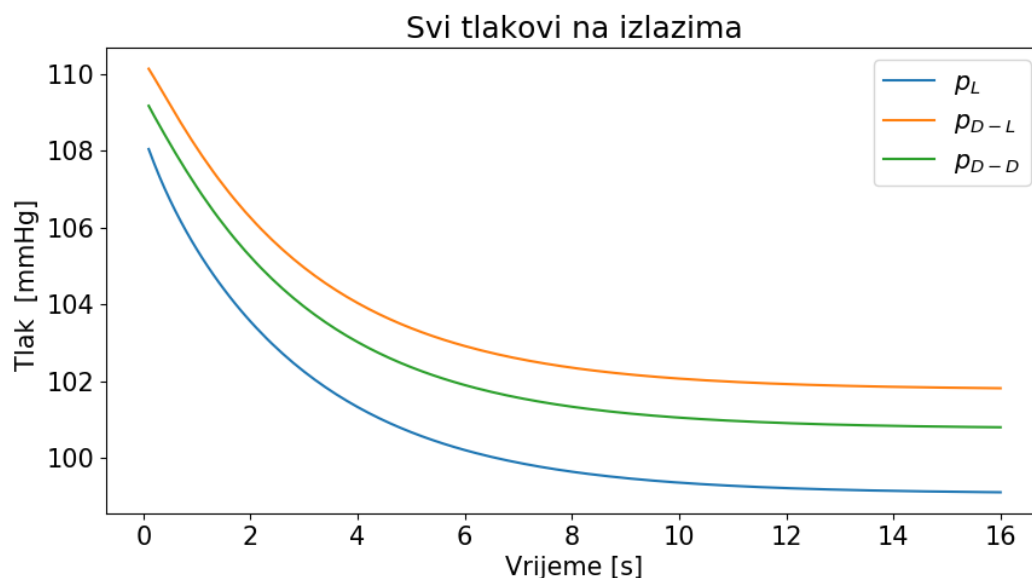
Slika 32. Sve brzine, stacionarno strujanje Windkessel modelom na izlazima

$$v_L = 256,2 \text{ [mm/s]} \quad Q_L = 1538 \text{ [mm}^3\text{/s]}$$

$$v_{D-L} = 251,3 \text{ [mm/s]} \quad Q_{D-L} = 1312 \text{ [mm}^3\text{/s]}$$

$$v_{D-D} = 222,9 \text{ [mm/s]} \quad Q_{D-D} = 1347 \text{ [mm}^3\text{/s]}$$

Ukupni protok kroz izlazne grane je $4197 \text{ mm}^3\text{/s}$, što odgovara zadanom protoku na ulazu.



Slika 33. Svi tlakovi, stacionarno strujanje s otporom

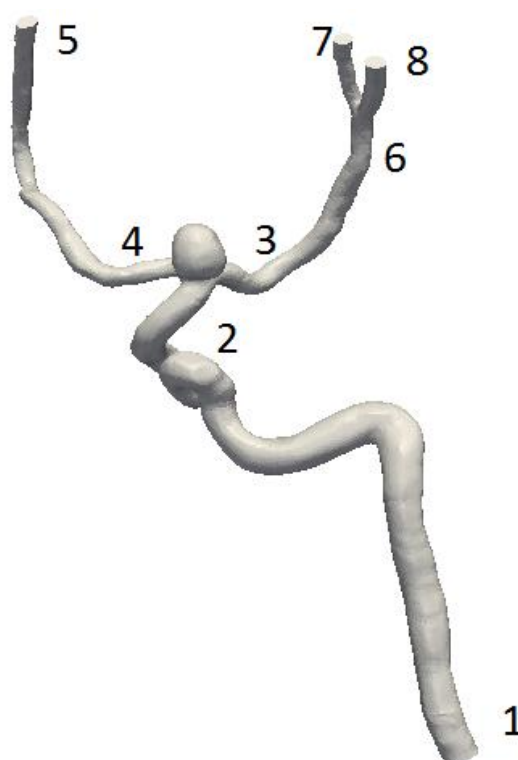
$$p_L = 99,4 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{D-L} = 102,8 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{D-D} = 101,2 \text{ [mmHg]}$$

Iz slike 33 je vidljivo da se stacionarno stanje strujanja postiže nakon desetak sekundi, što je dulje nego u slučaju bez otpora na izlazima. To se može objasniti elastičnosti sustava, koje uvodi kapacitet u Windkessel model. Također se vidi da su tlakovi u izlaznim presjecima reda veličine 100 mmHg, što je definirano zadanim vrijednostima otpora u Windkessel modelu, koji definira rubni uvjet na izlaznom presjeku..

Još jedna stavka koja će se gledati je pad visine energije duž krvne žile. Izraz za specifičnu energiju po jedinici volumena fluida je dan formulom: (3.25) Ukupna energija je računata u karakterističnim presjecima označenim brojevima na slici Slika 34, izračunate vrijednosti energije su dane u tablici 2.



Slika 34. Pozicije poprečnih presjeka u kojima se računala energija

| Točka br. | Ukupna energija e [g·mm/s ²] |
|-----------|---|
| 1 | 114,28 |
| 2 | 104,65 |
| 3 | 103,92 |
| 4 | 103,93 |
| 5 | 99,48 |
| 6 | 102,53 |
| 7 | 101,18 |
| 8 | 102,18 |

Tablica 2. Ukupna energija u presjecima prema slici 34

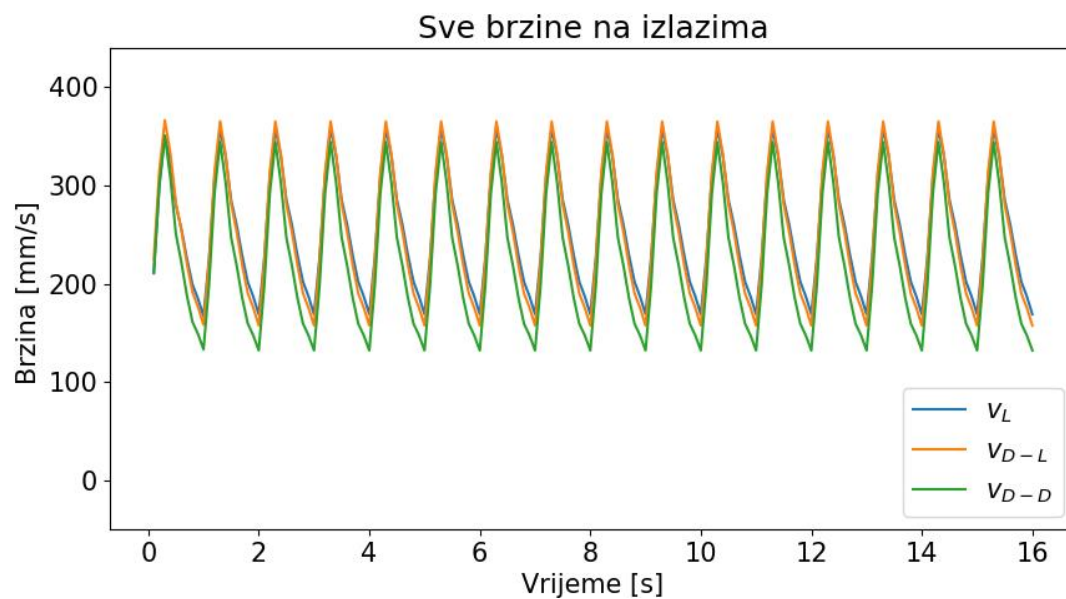
Iz tablice Tablica 2 može se vidjeti da vrijednosti specifične energije opadaju od ulaza prema izlazima. Pad tlaka uzrokovan je trenjem pa to čini proces strujanja nepovratnim. Iz rezultata je vidljivo da je najveći gubitak energije od ulaza u analiziranu krvnu žilu do račvanja, u kojem je

aneurizma, tj. od presjeka 1 do 2, (gubitak energije je $9,63 \text{ [g}\cdot\text{mm/s}^2]$). Gubitak energije od presjeka 2 do 3 i od presjeka 2 do 4 je približno jednak, dok gubitak u račvi na desnoj izlaznoj grani nije jednak u obje grane. Od presjeka 6 do 7 gubitak je $1,35 \text{ [g}\cdot\text{mm/s}^2]$ dok je gubitak od presjeka 6 do 8 $0,35 \text{ [g}\cdot\text{mm/s}^2]$. Ova razlika se može objasniti činjenicom da grana od presjeka 6 do 7 ima manji promjer, pa je uz približno jednak protok, gubitak energije veći. Također treba uzeti u obzir i promjenu smjera strujanja zbog nepravilne geometrije.

6.3. Pulsirajuće strujanje

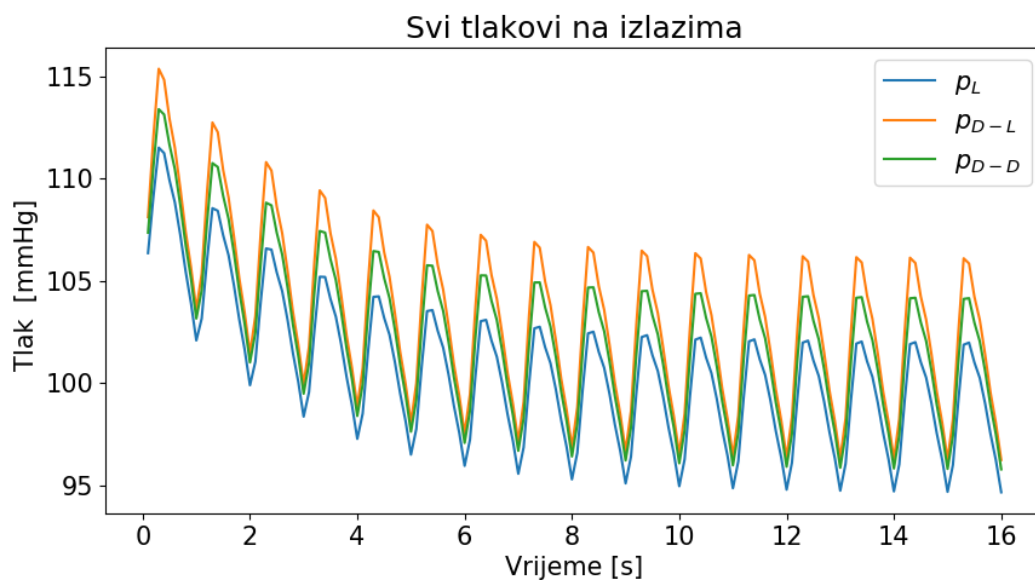
6.3.1. Ukupni rezultati vremenske integracije

Strujanje krvi je pulsirajuće, što podrazumijeva da je nestacionarno, ali je i periodično. Predmet interesa u principu jesu rezultati nakon što se postigne periodičnost strujanja, tj. kada iščezne utjecaj početnih uvjeta. U svakoj simulaciji je potrebno provesti simulaciju tijekom dovoljno dugog vremena integracije, da se ta periodičnost postigne. Na kraju se analiziraju rezultati iz zadnja dva perioda, koji zadovoljavaju uvjet periodičnosti rješenja. Slika 35 prikazuje vremensku promjenu srednjih brzina u izlaznim presjecima, a slika 36 vremensku promjenu tlaka u tim istim presjecima. Slika 37 prikazuje vremensku promjenu smičnog naprezanja u jednoj točki unutar aneurizme tijekom ukupnog vremena integracije. U ovom slučaju je trajanje srčanog perioda 1 [s] , a vrijeme integracije je bilo 16 [s] . Očito je da se periodičnost strujanja sa stajališta brzina postiže već u samom startu na svim izlaznim granama.

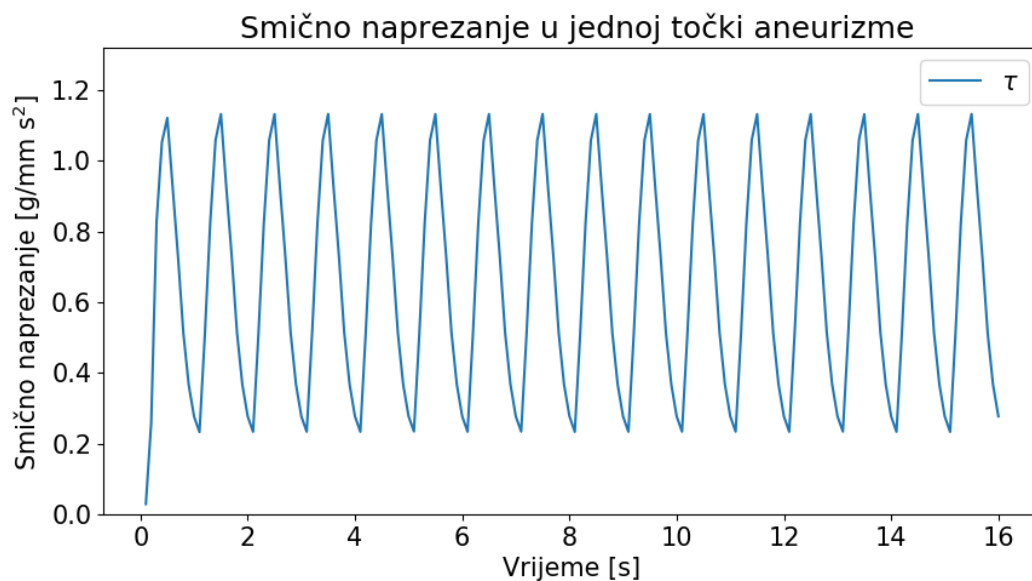


Slika 35. Vremenske promjene srednjih brzina u izlaznim presjecima tijekom ukupnog vremena integracije

Iz slike tlaka je vidljivo da je vrijeme potrebno da bi tlak postao periodičan oko deset sekundi, što odgovara vremenu postizanja stacionarnog strujanja u slučaju Windkessel modela na izlazima.



Slika 36. Vremenske promjene srednjeg tlaka u izlaznim presjecima tijekom ukupnog vremena integracije



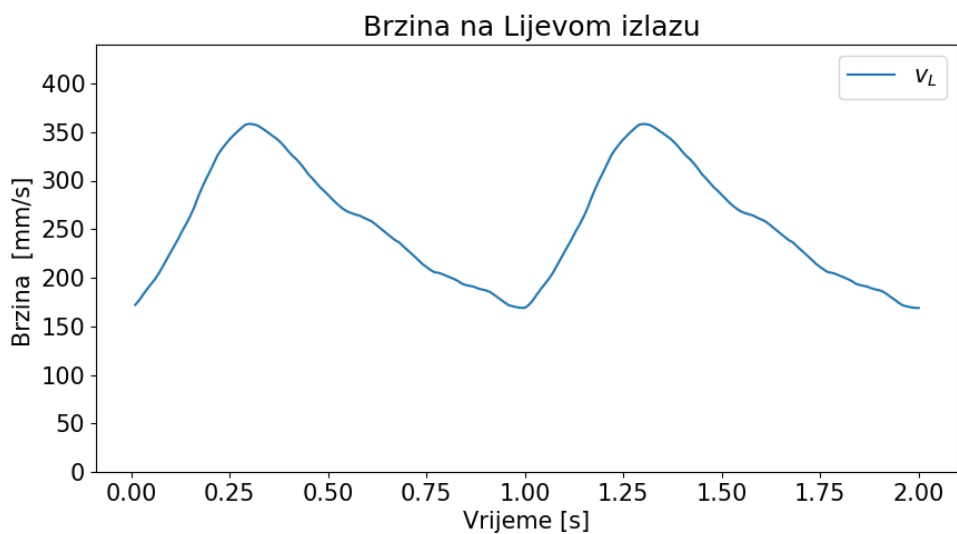
Slika 37. Vremenske promjene smičnog naprezanja u jednoj točki aneurizme tijekom ukupnog vremena integracije

Rezultati na slici 37 također potvrđuju da se unutar vremena integracije postiglo periodično rješenje. U nastavku se analiziraju rezultati periodičnog rješenja iz zadnja dva takta.

6.3.2. Analiza periodičnog rješenja

Od rezultata razmatrat će se vrijednosti tlaka i brzine na izlaznim presjecima. Smično naprezanje također je od velike važnosti jer su područja na stijenci s velikim vrijednostima smičnih naprezanja podložna nastanku tromba.

Kada je pokazano da rješenje konvergira te da su se vrijednosti vremenski ustalile, mogu se zasebno analizirati pojedine vrijednosti. Kao promatrano vrijeme odabrana su 2 posljednja takta u ukupnom trajanju 2 sekunde. U svakom taktu postoji 100 vremenskih koraka pa su samim time grafovi dosta precizniji od prijašnjeg slučaja gdje je bilo 10 koraka po srčanom periodu. Ispod svakog grafa bit će dana maksimalna, minimalna i prosječna brzina u taktu. Brzine na izlazim granama su prikazane na slikama 38 do 41:

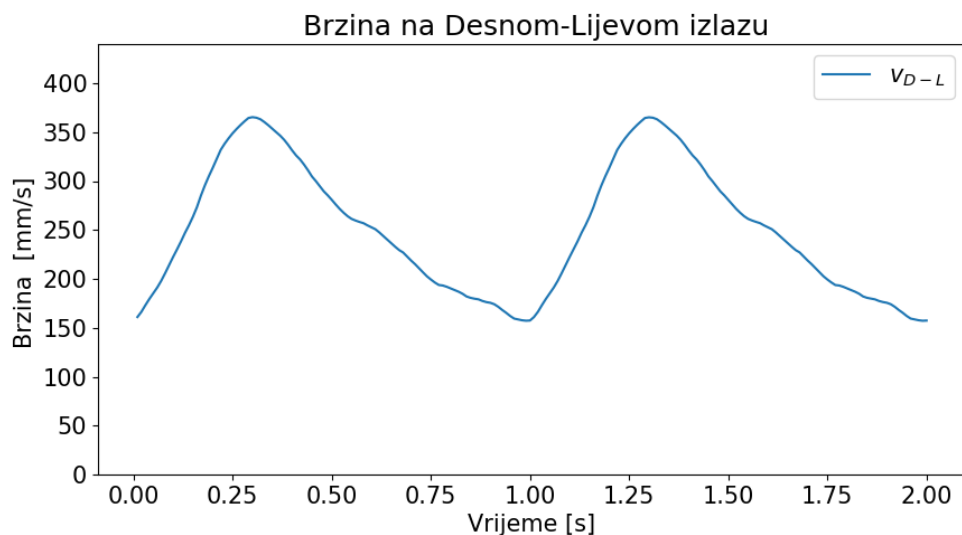


Slika 38. Brzina na Lijevom izlazu, pulsirajuće strujanje

$$v_{L,max} = 358,4 \text{ [mm/s]}$$

$$v_{L,min} = 168,9 \text{ [mm/s]}$$

$$v_{L,avg} = 255,2 \text{ [mm/s]}$$

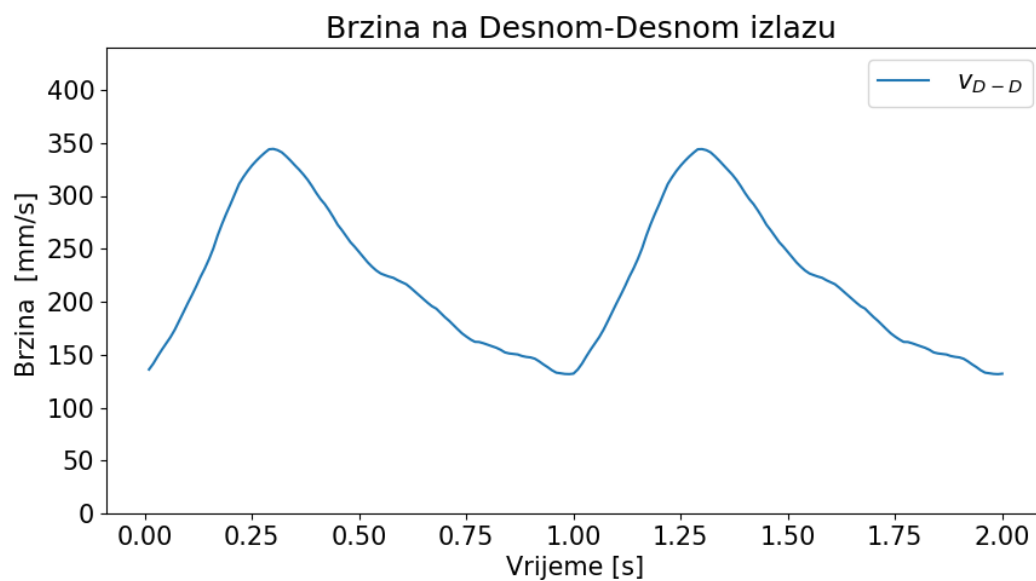


Slika 39. Brzina na Desnom-Lijevom izlazu, pulsirajuće strujanje

$$v_{D-L,max} = 365,3 \text{ [mm/s]}$$

$$v_{D-L,min} = 157,2 \text{ [mm/s]}$$

$$v_{D-L,avg} = 250,4 \text{ [mm/s]}$$

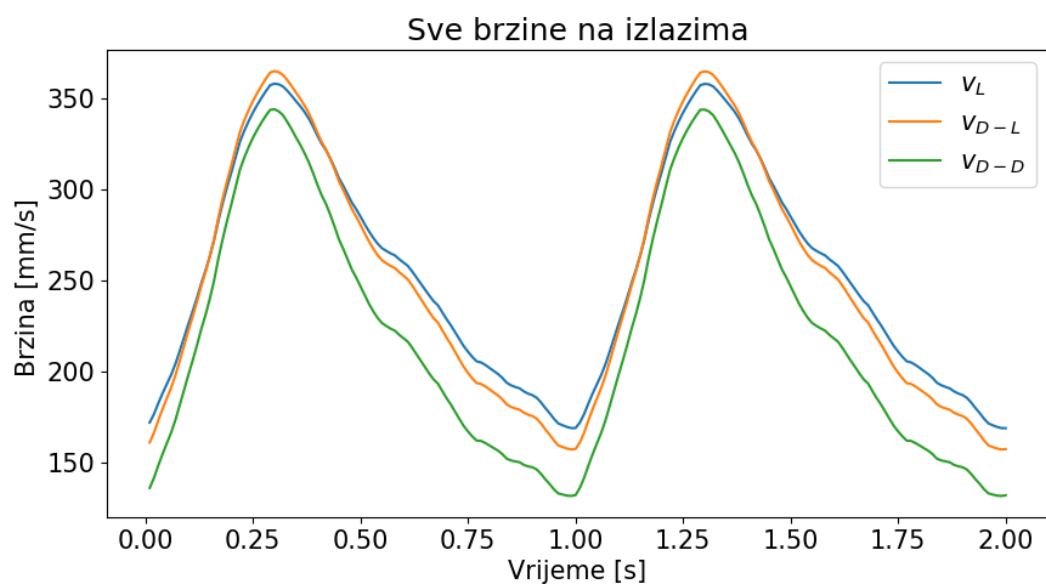


Slika 40. Brzina na Desnom-Desnom izlazu, pulsirajuće strujanje

$$v_{D-D,max} = 344,3 \text{ [mm/s]}$$

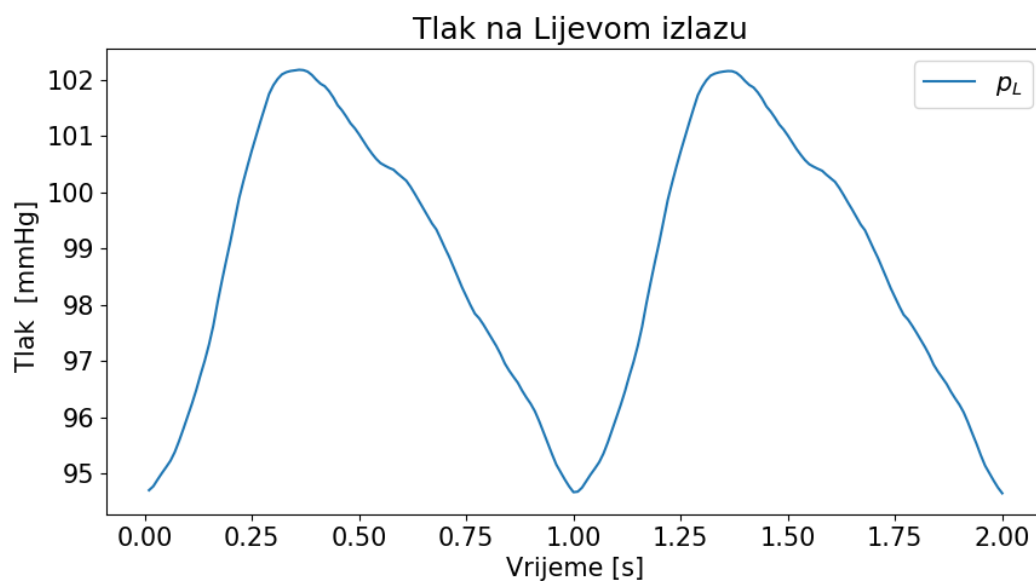
$$v_{D-D,min} = 131,6 \text{ [mm/s]}$$

$$v_{D-L,avg} = 250,4 \text{ [mm/s]}$$



Slika 41. Brzine na svim izlazima, pulsirajuće strujanje

Iz grafova je vidljivo da su vrijednosti brzine približno slične na svim izlaznim granama. Budući da je uzeta pretpostavka da su protoci na izlazima gotovo jednaki te da su izlazne površine presjeka vrlo slične, može se s opravdanjem potvrditi da su takvi rezultati fizikalni. Srednji tlakovi na izlaznim presjecima prikazani su na slikama 42 do 46. Ispod svake slike su ispisani maksimalni, minimalni i vremenski osrednjeni tlak.

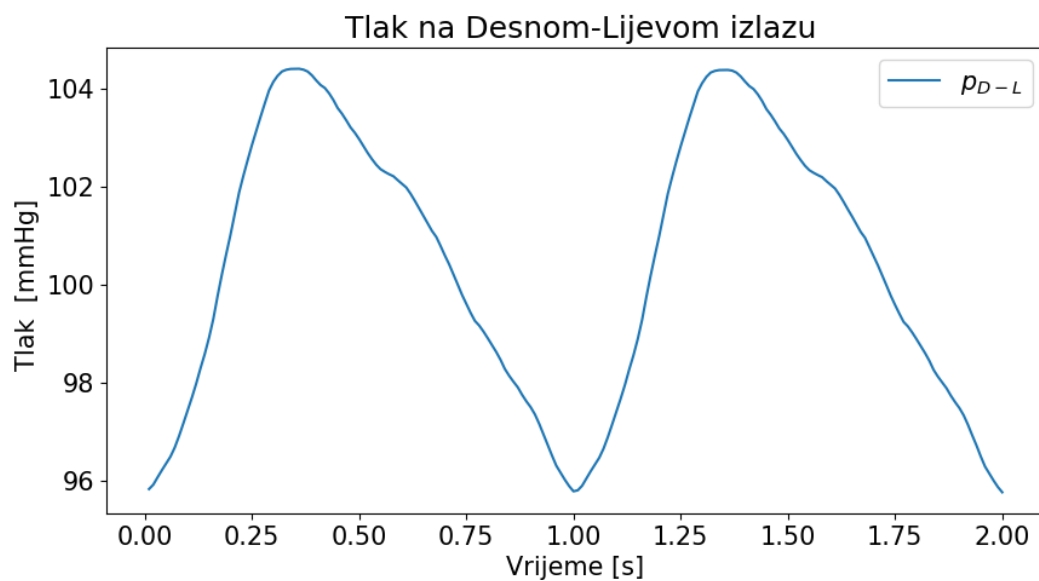


Slika 42. Tlak na Lijevom izlazu, pulsirajuće strujanje

$$p_{L,max} = 102,2 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{L,min} = 94,6 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{L,avg} = 98,8 \text{ [mmHg]}$$

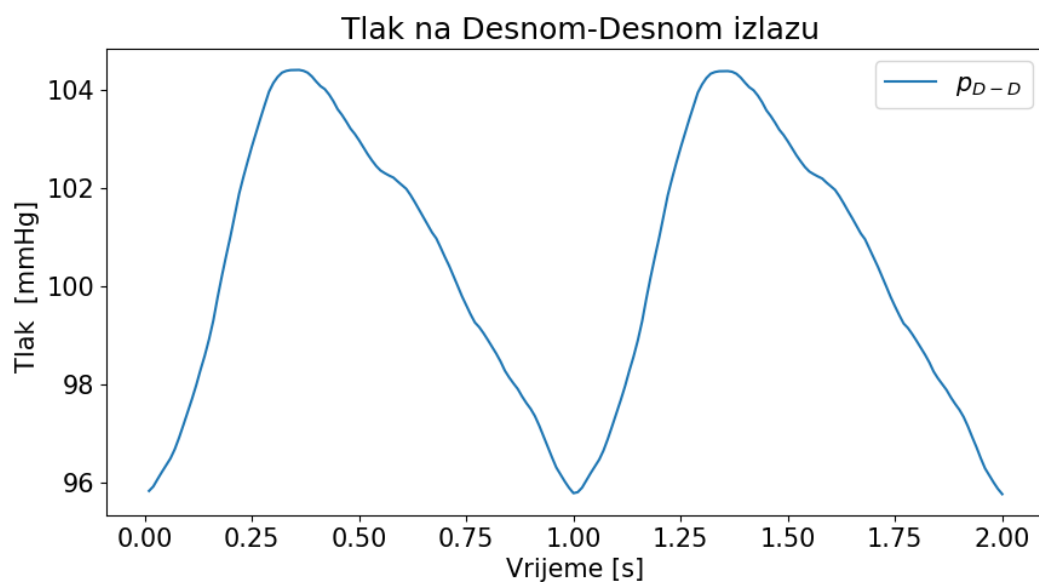


Slika 43. Tlak na Desnom-Lijevom izlazu, pulsirajuće strujanje

$$p_{D-L,max} = 104,6 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{D-L,min} = 95,8 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{D-L,avg} = 100,4 \text{ [mmHg]}$$

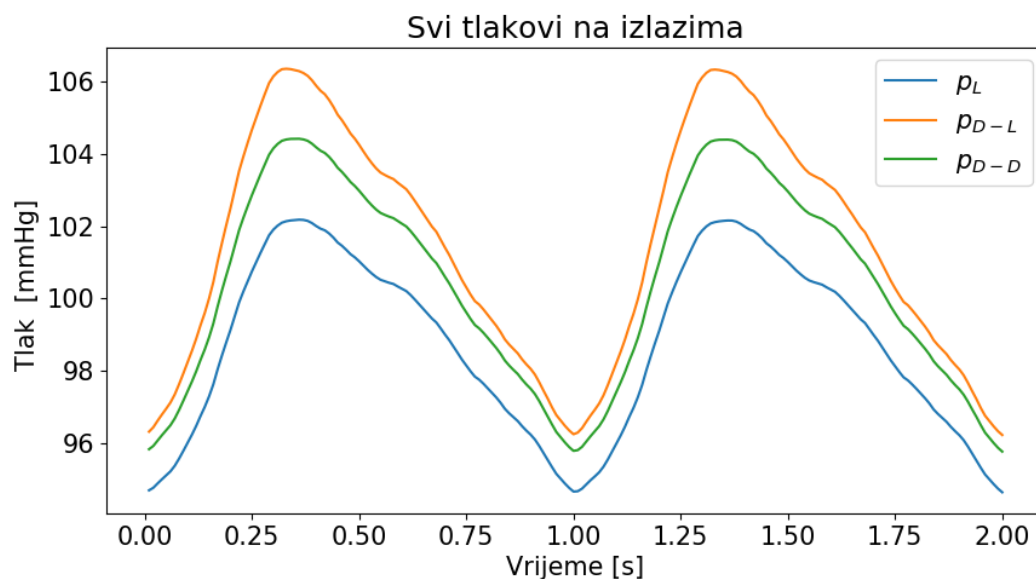


Slika 44. Tlak na Lijevom izlazu, pulsirajuće strujanje

$$p_{D-D,max} = 106,3 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{D-D,min} = 96,2 \text{ [mmHg]}$$

$$p_{D-D,avg} = 101,5 \text{ [mmHg]}$$



Slika 45. Takovi na svim izlazima, pulsirajuće strujanje

Jasno je da je srednja vrijednost tlaka oko [100 mmHg] što je bilo zadano početnim uvjetom. Razlika u tlakovima između određenih izlaznih grana može se objasniti drugačijim vrijednostima rubnih uvjeta. Redoslijed vrijednosti tlaka na izlazima isti je kao kod stacionarnog strujanja s otporom. Naime, omjer srednjih vrijednosti tlakova vidi se kao rezultat međusobnog recipročnog omjer otpora i površine izlaznog presjeka. Isti slučaj i vrijednosti bile su kod stacionarnog strujanja s otporom. Također se vidi da je srednja vrijednost tlaka jednaka vrijednosti kod analize stacionarnog strujanja s otporom (usporediti vremenski osrednjene vrijednosti tlaka uz slike sa srednjom vrijednosti tlaka iz simulacije stacionarnog strujanja s Windkessel modelom na izlazima).

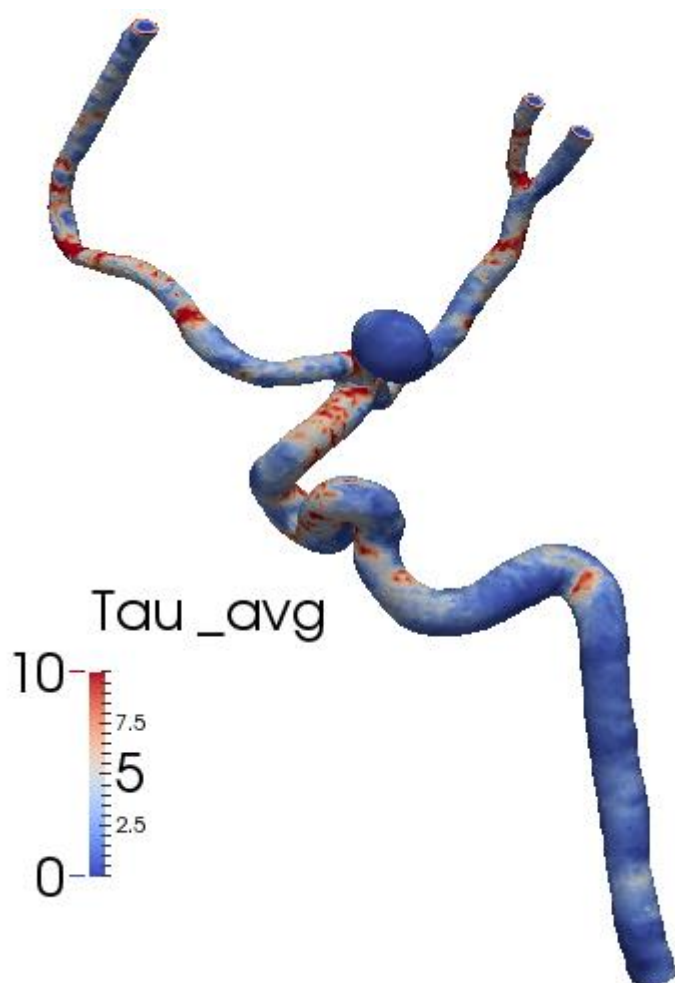
Usporede li se brzine stacionarnih analiza s brzinama pulsirajućeg strujanja može se primijetiti da su srednje vrijednosti pulsirajućeg strujanja gotovo iste kao brzine kod stacionarnog strujanja s otporom. To je logično budući da su vremenski osrednjene vrijednosti pulsirajućeg strujanje upravo jednake stacionarnima uz uvjet da su ostali rubni uvjeti isti što je istinito za ovaj slučaj.

Kod stacionarnog strujanja bez otpora brzine nisu jednake kao kod ostalih slučajeva jer se protok raspodjeljuje u drugačijim omjerima. Zbog različitih protoka i nepromijenjenih izlaznih

površina i brzine moraju biti drugačije u skladu s protocima. Jednadžba očuvanja mase je valjana pa se može zaključiti da je model strujanja ispravan za navedene rubne uvjete.

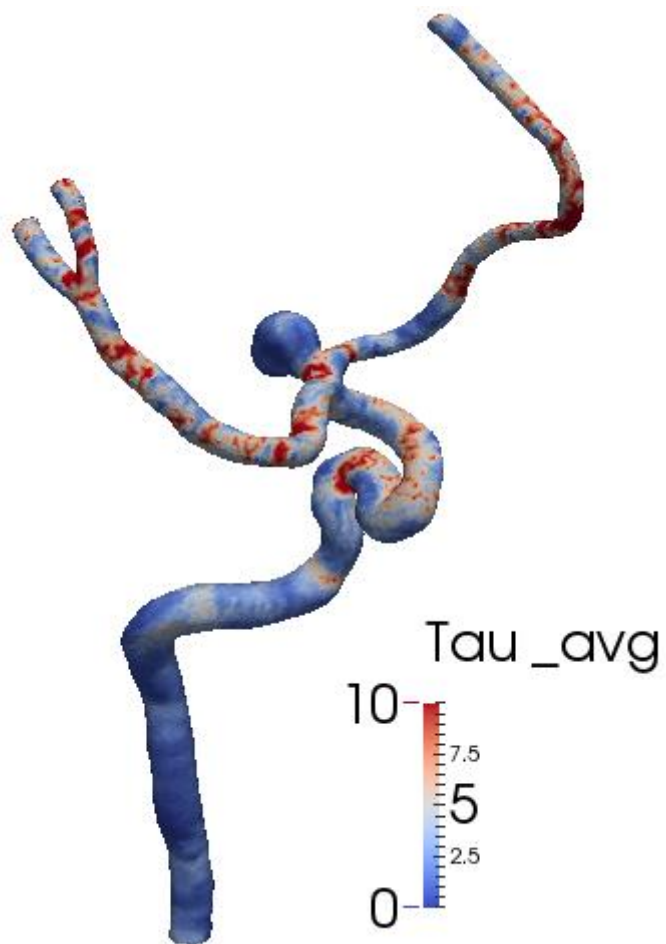
Smično naprezanje

Smično naprezanje na stijenci je važan parametar u strujanju u krvnim žilama jer visoka vrijednost smičnog naprezanja inicira razvijanje tromba. Stvarni mehanizam nastanka tromba je vrlo složen si još ne istražen do kraja. Prema jednoj teoriji postoji kritična vrijednost smičnog naprezanja, kod koje postoji mogućnost razvoja tromba. . Za kritičnu vrijednosti smičnih naprezanja uzima se $0,4 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ ili $0,4 \text{ [Pa]}$, te će se istražiti područja stijenke u kojima je to naprezanje veće od kritičnog. Budući da se aneurizma razvija godinama, mogu se uzeti uprosječene vrijednosti smičnih naprezanja tijekom vremena. Na daljnjim slikama prikazano je smično naprezanje kao skalarna vrijednost u jedinicama $\text{[g/mm}\cdot\text{s}^2]$. Uprosječene vrijednosti smičnih naprezanja tijekom vremena izgledaju:



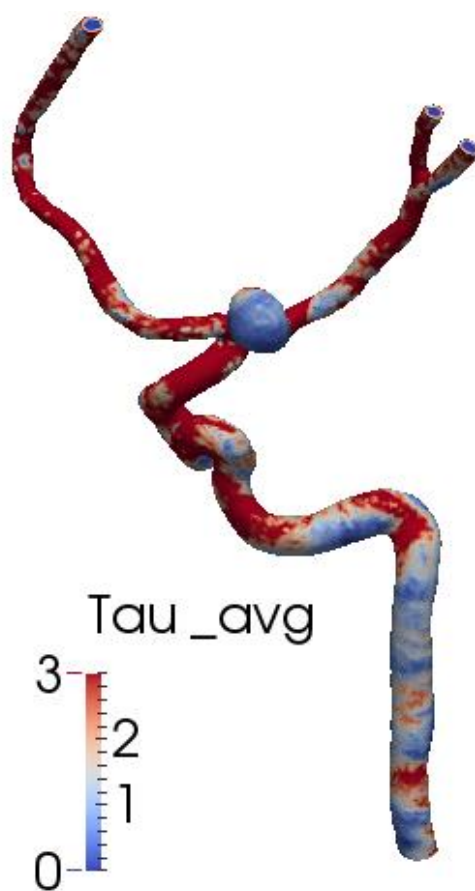
Slika 46. Vremenski osrednjeno smično naprezanje, pogled 1

Pogled s druge strane:



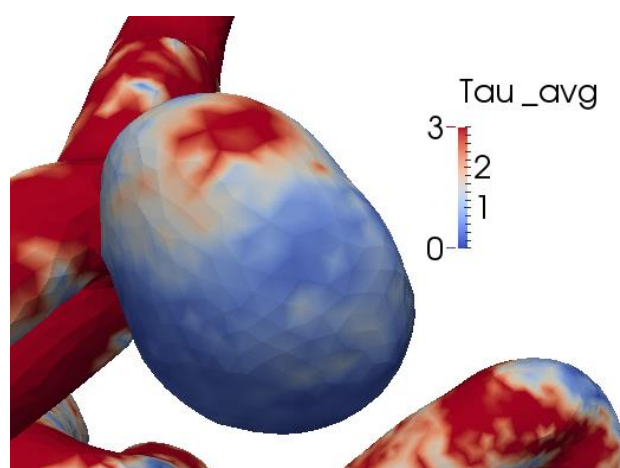
Slika 47. Vremenski osrednjeno smično naprezanje, pogled 2

Smično naprezanje prikazano u drugačijoj skali:



Slika 48. Smično naprezanje, pogled 3

Kritični dio cijele geometrije je aneurizma koja će biti поближе prikazana. Aneurizma je kritičan dio zato što je na tim mjestima stijenka već stanjena te je veće opterećenje pa je to prvo mjesto gdje bi moglo doći do rupture. Slika detalja aneurizme s drugačijim rasponom na skali prikazana je na slici:



Slika 49. Osrednjeno smično naprezanje na aneurizmi

Može se primijetiti da je veće smično naprezanje na ostatku zdrave žile nego na samoj aneurizmi. Treba imati na umu su skale opterećenja također u drugačijem rasponu. To je i logično budući da je zdrava žila manjeg promjera te krv više prijanja dok je promjer aneurizme ipak nešto veći.

Ono što je od posebnog značaja su područja na aneurizmi s opterećenjem većim od $0,4 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ jer se u tim slučajevima aktiviraju trombociti koji mogu voditi do nastanka tromba. Ta izolirana područja prikazana su na slikama crvenom bojom:

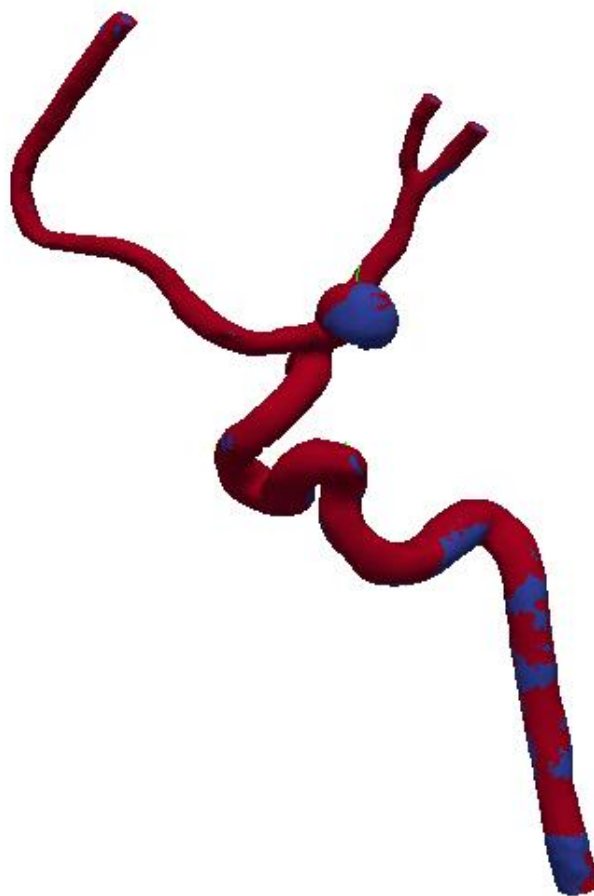


Slika 50. Smično naprezanje $> 0,4 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ na aneurizmi

Može se primijetiti da je i ostatak krvne žile u tako definiranom kritičnom području no budući da je ostatak zdravog dijela žile tijekom vremena nepromjenjive geometrije te da je njegova stijenka dosta deblja nego stijenka aneurizme, nema razloga za daljnjim proučavanjem toga dijela.

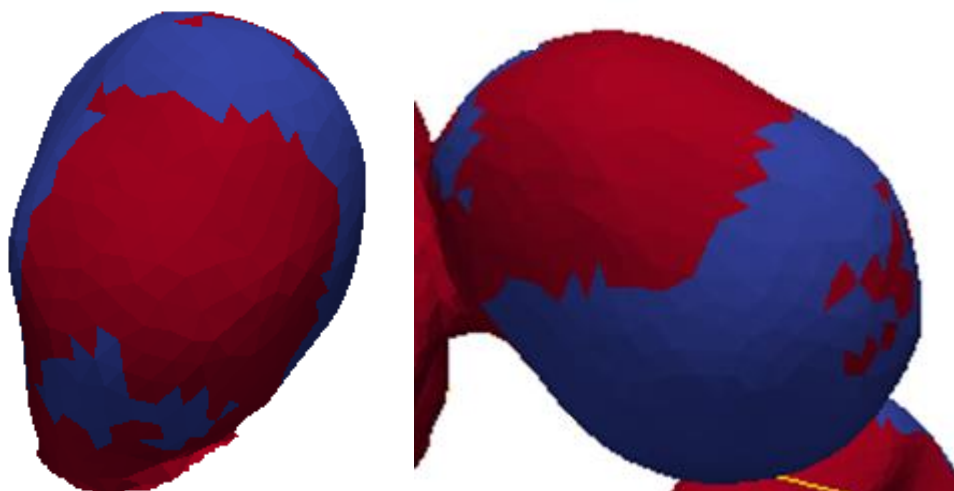
Kod same aneurizme može se primijetiti da postoji velik dio koji nije pod opterećenjem većim od $0,4 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ što je dobro. Dio koji je pod većim opterećenjem treba se dalje razmatrati.

Kada se analiziraju opterećenja veća od $1 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ na aneurizmi dobiva se prikaz:



Slika 51. Smično naprezanje $> 1 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ na cijeloj geometriji

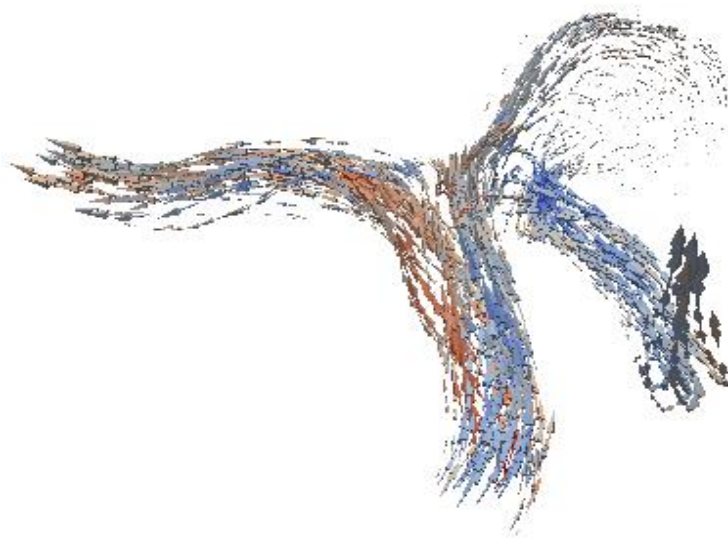
Poseban prikaz aneurizme koja je pod opterećenjem preko $1 \text{ [g/mm}\cdot\text{s}^2]$ također je prikazano crvenom bojom :



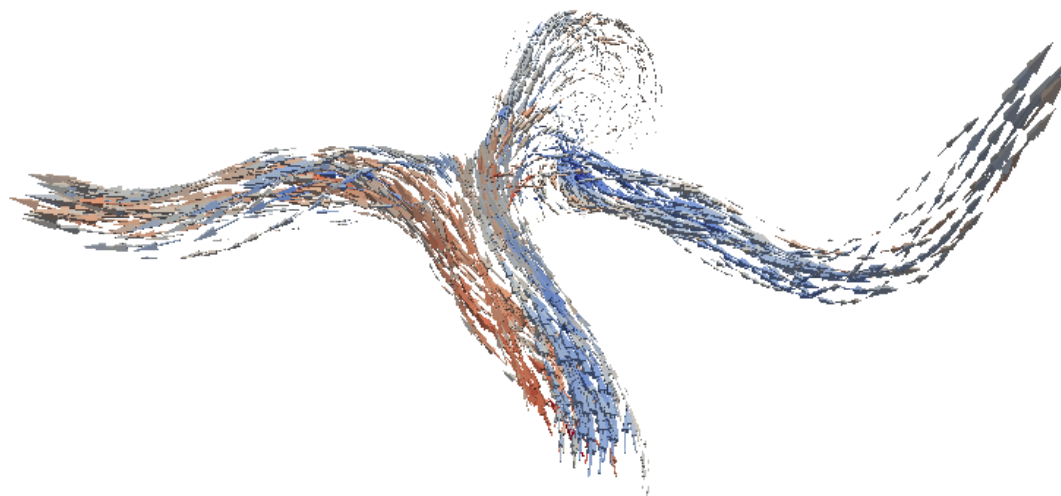
Slika 52. Smično naprezanje > 1 [g/mm \cdot s 2] na aneurizmi

Iz slika je vidljivo da je kritično mjesto za nastanak tromba po pojednostavljenom modelu na gornjem dijelu aneurizme. Također, gornji dio bi se trebao dalje razmatrati i kontrolirati tijekom vremena kako bi se eventualna ruptura preduhitrila kirurškim procesom.

Vektori brzine unutar aneurizme prikazani su na slikama 53 i 54, a slika strujnica na slici 55.



Slika 53. Vektori brzine u blizini aneurizme (pogled 1)



Slika 54. Vektori brzine u blizini aneurizme (pogled 2)

Same strujnice pri strujanju kroz aneurizmu prikazane su na slici:



Slika 55. Strujnice u blizini aneurizme

Može se primijetiti vrtloženje krvi unutar aneurizme što implicira da na tom području strujanje prelazi u turbulentno.

Strujanje u manjim krvnim žilama većinom je laminarno. Da bi se to pokazalo kao kriterij laminarnog odnosno turbulentnog strujanja računat će se maksimalni Reynoldsov broj na izlaznoj grani RACA-e (vidjeti sliku odnosno desne anteriorne cerebralne arterije. Budući da

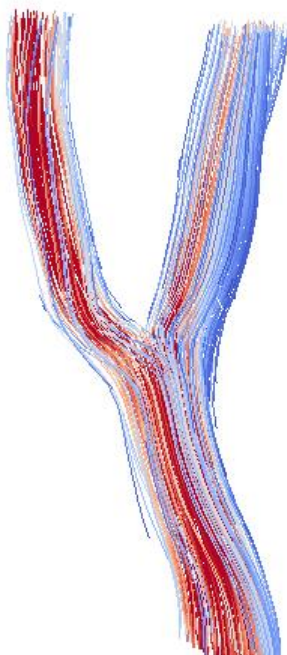
su izlazni presjeci na granama RMCA-e, desne središnje cerebralne arterije jednaki ili čak i manji a brzina približna nema potrebe zasebno računati Re broj jer se opravdano može zaključiti da su približno isti.

Maksimalni Re na RACA-i :

$$\text{Re}_{\max} = \frac{\rho_{\infty} v_{\infty, \max} d}{\mu_{\infty}} = 274,61$$

Vidljivo je da je Re broj debelo u sigurnoj zoni laminarnog strujanja te nema govora o prelasku u turbulentno strujanje. Također promatran je samo dio cjelokupne geometrije. Putanja žile je nepravilna no uz mali promjer pa u stvarnosti nema prostora za razvijanje turbulentnog strujanja u žilama takve veličine.

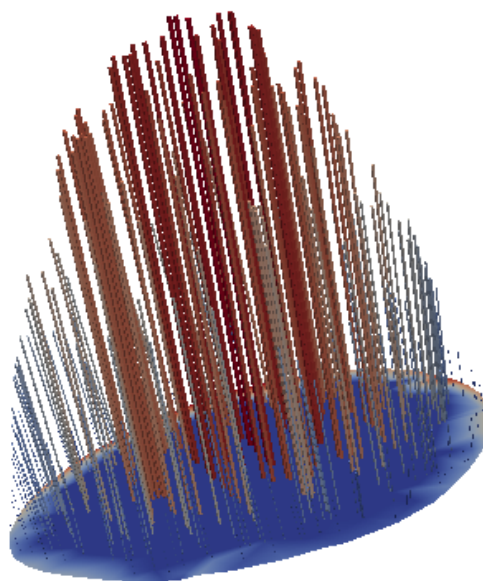
Strujnice na desnom izlazu prije grananja prikazane su slikom 56:



Slika 56. Strujnice na desnim izlazima

Može se primijetiti da se uz vanjski rub Desnog-Desnog izlaza usporava strujanje, prikazano plavom bojom. To se može objasniti kao pojava koja se događa kod odvajanja strujanja zbog nepravilne geometrije.

Slika na kojoj je prikazan profil brzine na Ljevom izlazu:



Slika 57. Profil brzine na izlazu

Vidljivo je da se izlazna brzina manifestira kao parabola što je bilo zadano u početnim postavkama simulacije. Profili brzina na ostalim izlazima približno su isti zbog sličnih vrijednosti brzina i poprečnih presjeka pa nema potrebe za njihovim prikazivanjem.

6.4. Usporedba rezultata

U tablici dane su usporedne vrijednosti brzina za pulsirajuće i stacionarno strujanje:

| Tip strujanja | Brzina na Ljevom izlazu [mm/s] | Brzina na Desnom-Ljevom izlazu, [mm/s] | Brzina na Desnom-Desnom izlazu, [mm/s] |
|------------------------|--------------------------------|--|--|
| Stacionarno bez otpora | $v_L = 199,2$ | $v_{D-L} = 196,2$ | $v_{D-D} = 331,4$ |
| Stacionarno s otporom | $v_L = 256,2$ | $v_{D-L} = 251,3$ | $v_{D-D} = 222,9$ |
| Pulsirajuće | $v_{L,max} = 358,3$ | $v_{D-L,max} = 365,2$ | $v_{D-D,max} = 344,3$ |
| | $v_{L,min} = 168,8$ | $v_{D-L,min} = 157,1$ | $v_{D-D,min} = 131,5$ |

| | | | |
|--|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| | $v_{L,avg} = 255,2$ | $v_{D-L,avg} = 250,4$ | $v_{D-L,avg} = 222,4$ |
|--|---------------------|-----------------------|-----------------------|

Tablica 3. Usporedba brzina

U tablici dane su usporedne vrijednosti tlaka za pulsirajuće i stacionarno strujanje:

| Tip strujanja | Tlak na Lijevom izlazu [g/mms ²] | Tlak na Desnom-Lijevom izlazu, [g/mms ²] | Tlak na Desnom-Desnom izlazu, [g/mms ²] |
|------------------------|--|--|---|
| Stacionarno bez otpora | $p_L = 0,01$ | $p_{D-L} = 0,04$ | $p_{D-D} = 0,01$ |
| Stacionarno s otporom | $p_L = 99,4$ | $p_{D-L} = 102,8$ | $p_{D-D} = 101,1$ |
| Pulsirajuće | $p_{L,max} = 102,2$ | $p_{D-L,max} = 104,4$ | $p_{D-D,max} = 106,3$ |
| | $p_{L,min} = 94,6$ | $p_{D-L,min} = 95,7$ | $p_{D-D,min} = 96,2$ |
| | $p_{L,avg} = 98,7$ | $p_{D-L,avg} = 100,4$ | $p_{D-D,avg} = 101,5$ |

Tablica 4. Usporedba tlakova

7. ZAKLJUČAK

Kontinuiranom suradnjom tehničkih znanosti i medicine razvija se i područje biomehanike. Njena važnost leži u primjenjivom i kvalitetnijem liječenju pacijenata te je od velike pomoći liječnicima i zdravstvenim radnicima.

U diplomskom zadatku analizirano je strujanje kroz desnu intrakranijsku karotidnu arteriju (RICA-u). Analizirana su strujanja s različitim ulaznim i izlaznim rubnim uvjetima: ulazna brzina imala je pulsirajući ili stacionarni karakter dok su na izlazu postavljeni rubni uvjeti s Windkessel modelom i uvjetom nultog pretlaka.

Stacionarno strujanje zapravo je uprosječeno pulsirajuće strujanje što je i pokazano u rezultatima. Krvna žila modelirana je kao kruta stijenka što vrijedi za arterije dok je za krv uzeto da je newtonovski fluid, a na stijenci je primijenjen uvjet lijepljenja fluida. Krvna žila modelirana je kao kruta stijenka dobivena snimanjem pacijenta. Iako su krvne žile anizotropne i hiperelastične, u ovom radu interakcija između fluida i stijenske (takozvani FSI problem – *fluid-structure-interaction*) nije uzet u obzir zbog trenutnog ograničenja programskog paketa CRIMSON-a da modelira nelinearno ponašanje stijenske. Krv je predstavljena kao newtonovski fluid u žilama većeg poprečnog presjeka i za veća smična naprezanja koja se pojavljuju u modelu. Uz stijenkku je korišten model graničnog sloja dok unutar lumena postoji inicijalni tlak. Pokazani rezultati obuhvaćaju smično naprezanje na stijenci i brzine na izlazima. Iznosi smičnog naprezanja se trenutno smatraju ključnim za mogući nastanak tromba koji aneurizme može štititi mehanički, ali i biokemijski razgrađivati stijenkku, zbog čega raste opasnost od rupture aneurizme zbog stanjene debljine stijenske. Profil izlaznih brzina kao i njihov iznos ovisi o ulaznoj brzini i opisuje karakter strujanja koji je bitan kod daljnje analize. Zaključeno je da srednje vrijednosti protoka i tlaka u izlaznim presjecima dobivenim iz analize pulsirajućeg strujanja odgovaraju srednjim vrijednostima tih veličina iz stacionarne analize, kada se u stacionarnoj analizi koristi vremenski osrednjeni ulazni protok iz nestacionarne analize. Dobivena raspodjela smičnih naprezanja može poslužiti kao osnova za određivanje potencijalne opasnosti za razvoj aneurizme.

Riješeni problem strujanja ima niz pojednostavljenja koja su nužna zbog ograničenja korištenog programa i raspoloživih računalnih resursa. Stalnim razvijanjem sve jačih računala i numeričkih metoda sve realnije se mogu opisati složene pojave koje postoje u stvarnosti. Dodavanjem složenijih modela omogućit će se realniji rezultati i dati bolji uvid stvarno stanje realnih

procesa. S obzirom da su bolesti kardiovaskularnog sustava među najraširenijim bolestima čak i kod mlađe populacije takav napredak od iznimne će važnosti biti za sve ljude.

LITERATURA

- [1] “Krvožilni sustav – Wikipedija.” [Online]. Available: https://hr.wikipedia.org/wiki/Krvožilni_sustav. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [2] “Dijelovi kardiovaskularnog sustava.” [Online]. Available: <https://sites.google.com/site/hdugwedji/home/srce>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [3] “Srce_shema.” [Online]. Available: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/82/Heart_labelled_large_prevedeno.PNG/260px-Heart_labelled_large_prevedeno.PNG. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [4] “žile | Hrvatska enciklopedija.” [Online]. Available: <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=67730>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [5] “Veliki i mali krvotok, shema.” [Online]. Available: <https://image.slidesharecdn.com/krvotokidisanje-171025191636/95/krvotok-i-disanje-12-638.jpg?cb=1508959039>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [6] “Krv – Wikipedija.” [Online]. Available: <https://hr.wikipedia.org/wiki/Krv>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [7] M. Westerhof, Nicolaas; Stergiopoulos, Nikos; Noble I. M., *Snapshots of Hemodynamic*. .
- [8] “Stanični sastojci krvi.” [Online]. Available: <http://www.msdpriprucnici.placebo.hr/msd-za-pacijente/bolesti-krvi-i-krvotoka/biologija-krvi/stanicni-sastojci>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [9] “Sastav krvi.” [Online]. Available: <https://image.slidesharecdn.com/krvotokidisanje-171025191636/95/krvotok-i-disanje-7-638.jpg?cb=1508959039>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [10] M. Kurtak, “Suvremeni pristup u liječenju intrakranijalnih aneurizmi,” 2016.
- [11] P. Chittiboina, B. Guthikonda, C. Wollblad, and S. A. Conrad, “A Computational Simulation of the Effect of Hemodilution on Oxygen Transport in Middle Cerebral Artery Vasospasm,” *J. Cereb. Blood Flow Metab.*, vol. 31, no. 11, pp. 2209–2217, 2011.
- [12] “Willisov krug.” [Online]. Available: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e5/Circle_of_Willis_la.svg/220px-Circle_of_Willis_la.svg.png. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [13] “Moždane aneurizme - Zdravlje.” [Online]. Available: <https://zdravlje.eu/2010/05/11/mozdane-aneurizme/>. [Accessed: 01-Jul-2018].

-
- [14] “Aneurysm, pictures.” [Online]. Available:
<http://www.daviddarling.info/encyclopedia/A/aneurysm.html>. [Accessed: 01-Jul-2018].
- [15] J. Stanković, “Diplomski rad,” 2010.
- [16] K. Azer and C. S. Peskin, “A one-dimensional model of blood flow in arteries with friction and convection based on the Womersley velocity profile,” *Cardiovasc. Eng.*, vol. 7, no. 2, pp. 51–73, 2007.
- [17] C. Karmonik, R. Klucznik, and G. Benndorf, “Blood Flow in Cerebral Aneurysms: Comparison of Phase Contrast Magnetic Resonance and Computational Fluid Dynamics - Preliminary Experience,” *RöFo - Fortschritte auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen und der Bildgeb. Verfahren*, vol. 180, no. 3, pp. 209–215, 2008.

PRILOZI

- I. CD-R disc