

# Neizrazito analitičko upravljanje mobilnim robotom u nepoznatoj okolini pomoću metode potencijalnih polja

---

Cizelj, Igor

Master's thesis / Diplomski rad

2009

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:383683>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-03**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# DIPLOMSKI RAD

Igor Cizelj

Zagreb, 2009

Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# DIPLOMSKI RAD

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Bojan Jerbić

Igor Cizelj

Zagreb, 2009

## SAŽETAK

U sklopu ovog diplomskog rada izrađen je program za simulaciju gibanja mobilnog robota u radnom prostoru, od početne pozicije do cilja a da pritom izbjegava prepreke pri čemu se koristi metoda potencijalnih polja te analitičko neizravno upravljanje.

Uz kratki opis povijesnog razvoja mobilnih robota, naznačeni su njihovi osnovni podsustavi te je izvršena sistematizacija mobilnih robota. Naglasak je na mobilnim robotima u industriji i dan je prikaz osnovnih problema koji se javljaju prilikom upravljanje mobilnim robotima.

U radu su iznesene osnove neizravne logike i metode potencijalnih polja, dva područja na kojima se bazira upravljački zakon. Uz to, objašnjen je kinematički model mobilnog robota te pojedina područja analitičke geometrije ravnine koja se primjenjuju u radu.

Računalni program pisan je u *Matlabu*, a metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi je funkcija za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi *ode45*, čiji je osnovni princip opisan u radu.

Rezultati simulacija prikazuju gibanje mobilnog robota u radnom prostoru između prepreka u pravokutnom koordinatnom sustavu, a uz to dana je ovisnost upravljačkih varijabli o vremenu za svaku simulaciju.

# SADRŽAJ

Uvod.....	1
1. Mobilni roboti .....	3
1.1. Klasifikacija mobilnih robota .....	4
1.2. Motivi razvoja mobilnih robota .....	5
1.3. Povijest mobilnih robota.....	5
1.4. Moguće primjene mobilnih robota.....	6
1.5. Glavni podsustavi mobilnih robota.....	7
1.6. Sustav za pokretanje mobilnih robota.....	8
1.7. Mobilni roboti u industriji.....	9
2. Metoda potencijalnih polja .....	11
2.1. Planiranje referentne trajektorije.....	11
2.2. Planiranje trajektorije i upravljanje.....	13
2.3. Metoda potencijalnih polja .....	14
2.3.1. Atraktivni potencijal .....	16
2.3.2. Repulzivni potencijal .....	18
2.3.3. Ukupno potencijalno polje.....	22
2.4. Generiranje referentne trajektorije.....	28
2.4.1. Numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi .....	30
2.4.2. Ograničenja brzina .....	33
2.4.3. Rezultati simulacije generiranja referentne trajektorije .....	34
3. Kinematički model mobilnog robota .....	41
4. Neizrazita logika .....	44
4.1. Neizraziti skupovi i funkcijska pripadnost .....	44
4.2. Operacije nad neizrazitim skupovima.....	46
4.3. Neizrazito upravljanje.....	47
5. Upravljački zakon .....	51
5.1. Provjera ispravnosti upravljačkog zakona .....	58
6. Detektiranje prepreka.....	63
7. Opis i dijagram toka računalnog programa.....	65

8. Rezultati simulacija.....	69
8.1. Prva simulacija.....	69
8.2. Druga simulacija .....	71
8.3. Treća simulacija .....	73
8.4. Četvrta simulacija .....	77
9. Zaključak.....	80
10. Literatura.....	82
11. Prilozi.....	84
11.1. Prilog 1 .....	84
11.2. Prilog 1 na CD-u	
11.3. Prilog 2 na CD-u	
11.4. Prilog 3 na CD-u	
11.5. Prilog 4 na CD-u	

## POPIS SLIKA

Slika 1: Prikaz gradijenta potencijalnog polja .....	15
Slika 2: Prikaz gradijenta atraktivnog potencijalnog polja .....	16
Slika 3: Radni prostor .....	17
Slika 4: Atraktivni potencijal .....	17
Slika 5: Prikaz gradijenta repulzivnog potencijalnog polja .....	18
Slika 6: Repulzivni potencijal za FIRAS funkciju .....	19
Slika 7: Repulzivni potencijal za eksponencijalnu funkciju .....	20
Slika 8: Repulzivni potencijal za Ge funkciju .....	21
Slika 9: Ukupno potencijalno polje (FIRAS funkcija) .....	22
Slika 10: Ukupno potencijalno polje (eksponencijalna funkcija) .....	22
Slika 11: Potencijalno polje i gradijent potencijala .....	23
Slika 12: Potencijalno polje, gradijent potencijala i ukupna sila .....	24
Slika 13: Klasični mehanički sustav .....	25
Slika 14: Gibanje kuglice kod metode potencijalnih polja .....	26
Slika 15: Vrtložna polja za pravokutnu prepreku .....	27
Slika 16: Rješavanje obične diferencijalne jednačbe .....	30
Slika 17: Radni prostor .....	34
Slika 18: Ukupno potencijalno polje s FIRAS funkcijom za repulzivni potencijal .....	35
Slika 19: Referentna trajektorija na potencijalnom polju .....	36
Slika 20: Referentna trajektorija na potencijalu gledana iz drugog kuta .....	36
Slika 21: Referentna trajektorija u radnom prostoru .....	37
Slika 22: Neuspješna trajektorija kada je cilj blizu prepreke .....	37
Slika 23: Referentna trajektorija kada se koristi Ge funkcija za repulzivni potencijal .....	38
Slika 24: Uspješna trajektorija kada je cilj blizu prepreke .....	38
Slika 25: Ukupno potencijalno polje s eksponencijalnom funkcijom za repulzivni potencijal .....	39
Slika 26: Referentna trajektorija na potencijalnom polju .....	39
Slika 27: Referentna trajektorija u radnom prostoru .....	40
Slika 28: Mobilni robot s diferencijalnim pogonom .....	42

Slika 29: Model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom .....	42
Slika 30: Funkcije pripadnosti izrazitog i neizrazitog skupa <i>vruće</i> .....	45
Slika 31: Osnovne operacije nad neizrazitim skupovima .....	47
Slika 32: Osnovni postupci neizrazitih sustava .....	48
Slika 33: Regulacija temperature .....	49
Slika 34: Gaussova funkcija.....	50
Slika 35: Vektori potrebni za izvod upravljačkih veličina.....	51
Slika 36: Pozitivan (lijevo) i negativan (desno) vektorski produkt .....	53
Slika 37: Funkcija $u_1 = K_1 \cdot no$ .....	55
Slika 38: Funkcija $u_1 = K_2 \cdot \exp(-K_3 \cdot vp^2)$ .....	56
Slika 39: Funkcija $u_2 = k_5 \cdot \tanh(vp)$ .....	57
Slika 40: Radni prostor .....	59
Slika 41: Ukupno potencijalno polje.....	59
Slika 42: Gibanje robota po potencijalnom polju .....	60
Slika 43: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru .....	60
Slika 44: Greška praćenja u x i y smjeru.....	61
Slika 45: Gibanje mobilnog robota u x i y smjeru, te upravljačke veličine .....	62
Slika 46: Detektiranje prepreka .....	63
Slika 47: Gibanje mobilnog robota u prvoj simulaciji.....	69
Slika 48: x,y pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za prvu simulaciju.....	70
Slika 49: Greška praćenja referentne trajektorije za prvu simulaciju .....	70
Slika 50: Gibanje mobilnog robota u drugoj simulaciji.....	71
Slika 51: x,y pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za drugu simulaciju .....	72
Slika 52: Greška praćenja referentne trajektorije za drugu simulaciju .....	72
Slika 53: Gibanje mobilnog robota u trećoj simulaciji .....	73
Slika 54: x,y pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za treću simulaciju.....	74
Slika 55: Greška praćenja referentne trajektorije za drugu simulaciju .....	74
Slika 56: Gibanje mobilnog robota u trećoj simulaciji uz $V_a = 0.1 \text{ m/s}$ .....	75
Slika 57: x,y pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za treću simulaciju uz $V_a = 0.1 \text{ m/s}$ .....	76



Slika 58: Greška praćenja referentne trajektorije za drugu simulaciju uz $v_a = 0.1 \text{ m/s}$ ....	76
Slika 59: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 1. verzija.....	78
Slika 60: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 2. verzija.....	78
Slika 61: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 3. verzija.....	79
Slika 62: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 4. verzija.....	79

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Parametri sustava prve simulacije.....	69
Tablica 2: Parametri sustava druge simulacije.....	71
Tablica 3: Parametri sustava treće simulacije.....	73
Tablica 4: Parametri sustava četvrte simulacije.....	77
Tablica 5: Početne i krajnje pozicije mobilnog robota .....	77

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam diplomski rad izradio samostalno uz stručnu pomoć prof. dr. sc. Bojana Jerbića, kojem se posebno zahvaljujem.

Također se zahvaljujem prof. dr. sc. Josipu Kasaću na pomoći i korisnim savjetima.

Igor Cizelj

*If you want to truly understand something, try to change it.*  
*- Kurt Lewin*

# Uvod

Sve veći broj industrijskih postrojenja i skladišnih prostora koristi mobilne robote za aktivnosti rukovanja materijalom. To najčešće podrazumijeva transport materijala unutar radnog prostora, od točke preuzimanja do određenog cilja. Danas se u većini slučajeva lokalizacija mobilnog robota te planiranje referentne trajektorije bazira na markerima koji su postavljeni po radnom prostoru. Iako takvi sustavi daju vrlo dobre rezultate (skladišni sustav tvrtke Kiva Systems [1]), oni zahtijevaju visoku središnjost radnog prostora, odnosno ne dozvoljavaju neplanirane promjene u radnoj okolini. Upravo taj problem, nefleksibilnost, jedna je od osnovnih motivacija prilikom definiranja problema ovog diplomskog rada. U radu je razvijen sustav upravljanja mobilnim robotom baziran na metodi potencijalnih polja korištenjem neizrazitog analitičkog upravljanja. Osnovni zadatak je da mobilni robot dođe iz početne pozicije u krajnju a da pritom izbjegava prepreke, odnosno da ne dođe do kolizije s preprekama. U opisu metode potencijalnih polja zorno je grafički prikazana osnovna ideja metode, koja u slučaju mobilnih robota iste promatra kao kuglicu koja se giba po potencijalnom polju pod utjecajem gravitacije. Prilikom opisa metode potencijalnih polja te njene primjene u mobilnoj robotici promatrati će se slučaj kada je mobilni robot u svakom trenutku svjestan svih prepreka u radnom prostoru. To je idealizirani slučaj koji bi bio moguć kada bi mobilni robot primao informaciju o radnom prostoru iz neke kamere postavljene iznad samog radnog prostora. U protivnom, mobilni robot dobiva informacije iz senzora koji se nalaze na njemu samom. Tako se za potrebe ovog rada koriste virtualni senzori udaljenosti koji detektiraju prepreke u radnom prostoru u ovisnosti o trenutnoj poziciji mobilnog robota. To odgovara realnoj situaciji u kojoj se mobilni robot giba prostorom te ovisno o svojoj poziciji detektira prepreke koje mu se nađu na putu te ih izbjegava. Za razvoj upravljačkog zakona mobilnog robota koristi se neizrazita logika. Prvi razlog je izbjegavanje korištenja upravljačkog zakona baziranog na pseudoinverzu, koji se vrlo često koristi u sličnoj problematici ali zna rezultirati problemima nedefiniranosti prilikom izvršavanja simulacije u nekom programskom paketu. Drugi razlog je povećanje fleksibilnosti sustava koja se postiže korištenjem neizrazite logike.

Dakle, u ovom radu izveden je upravljački zakon čiji je zadatak osigurati da se mobilni robot pozicionira iz neke početne u zadanu krajnju točku u nepoznatoj okolini. Mobilni robot nalazi se u radnom prostoru zajedno s ravnim zidovima, tj. preprekama koje su definirane kao dužine. Prepreke su definirane u *Matlab* kodu, ali na početku izvršavanja simulacije one su nepoznate za mobilni robot. Ovisno o trenutnoj poziciji mobilnog robota, kao i o broju virtualnih senzora (broj pravaca čiji će se presjek tražiti s zidovima) određuju se točke koje predstavljaju prepreku za mobilni robot. Na temelju trenutne pozicije mobilnog robota, koordinata cilja te na temelju određenih točaka koje predstavljaju prepreke, primjenom metode potencijalnih polja određuje se referentna trajektorija. U trenutku kada je poznata referentna trajektorija na temelju kinematike točke i krutog tijela, primjenom analitičkog neizravnog upravljanja određuju se upravljačke veličine koje omogućuju pomak mobilnog robota na način da se zahtijeva minimalno odstupanje trenutne pozicije mobilnog robota od referentne pozicije.

Računalni program pisan je u *Matlabu*, a funkcija koja se koristi za rješavanje diferencijalnih jednadžbi je funkcija za numeričko integriranje *ode45*. Rezultati simulacija koji su predočeni u radu sadrže prikaz gibanja mobilnog robota i prikaz prepreka sustava u pravokutnom koordinatnom sustavu. Uz to, prikazana je ovisnost upravljačkih varijabli o vremenu za svaku simulaciju, jer je na taj način vrlo jednostavno provjeriti da li su dobiveni rezultati u realnim fizikalnim okvirima.

# 1. Mobilni roboti

Riječ robot dolazi od staroslavenske riječi robota, što znači rad, odnosno teški rad (na ruskom se rad kaže rabota). Riječ robot prvi je upotrijebio Karel Čapek, češki pisac, 1921. g. u svojoj utopističkoj drami R.U.R. (*Rossumu's Universal Robots*).

Prema ISO 8373 definicija robota je slijedeća: „robot je automatski upravljani, reprogramibilan, višenamjenski manipulator s mogućnošću programiranja u tri ili više osi, koji može biti ili stacionaran ili mobilan za primjenu u industrijskoj automatizaciji“. Ova definicija vrijedi za industrijske robote, ali ne vrijedi za mobilne robote. Za njih se postavljaju novi, daleko složeniji zahtjevi. Zahtjevi na mobilne robote su [2]:

- Autonomno gibanje u nepoznatom prostoru (Gdje je? Kamo ide? Kako do tamo doći? Kako izbjeći koliziju?). Robot autonomno modelira prostor u kojem se giba na temelju skupa svojih senzora.
- Obavljanje zadane misije, odnosno zadanog zadatka.
- Interakcija s ljudima i/ili s drugim robotima u okruženju
- Sposobnost samoučenja i inteligentnog zaključivanja.

Dakle, jedna od mogućih definicija mobilnog robota je slijedeća: „mobilni robot je mobilan i manipulativni fizički sustav koji se autonomno giba kroz nestrukturirani prostor, ostvarujući pritom interakciju s ljudskim bićima ili autonomno obavljajući neki posao umjesto njih“.

Roboti predstavljaju mehatroničke sustave (mehanika + elektronika = mehatronika). Mehatronički sustav moguće je podijeliti na više podsustava: mehanička konstrukcija, energetska elektronika, upravljačka elektronika, programski jezici, navigacija, komunikacija čovjek-robot, inteligentno upravljanje, računalne arhitekture, senzorski sustavi i aktuatori.

Mobilni roboti se smatraju uslužnim robotima koji će se uskoro pojaviti među ljudima i time su to roboti neposredne budućnosti. Uslužni roboti predstavljaju prijelazno stanje od industrijskih do personaliziranih robota. Personalizirani roboti će nastati kao rezultat evolucije uslužnih robota – povećanjem stupnja inteligencije. Vjeruje se da će ti

personalizirani roboti u budućnosti biti inteligentne kreature koji će moći hodati, govoriti, misliti i slušati, slično kao i ljudi.

Područje tehnike koje se bavi mobilnim robotima je mobilna robotika, višedisciplinarno područje koje se bavi razvojem i izvedbom mobilnih robota. Mobilna robotika integrira veliki broj znanstvenih disciplina:

- Strojstvo – konstrukcija mobilnog robota, posebno pogonskog mehanizma, sensorika
- Elektroenergetika – sustav napajanja, energetski pretvarači, pogonski motori
- Elektronika – upravljačka i komunikacijska elektronika
- Automatika – planiranje i upravljanje gibanjem mobilnog robota, interpretacija i fuzija senzorskih informacija
- Računalstvo – obrada slike, obrada govora, izrada softvera
- Matematika, umjetna inteligencija – složena strategijska odlučivanja
- Kognitivna psihologija, percepcija, neurologija – daju uvid kako biološki organizmi rješavaju slične probleme.

### ***1.1. Klasifikacija mobilnih robota***

Mobilni roboti mogu se klasificirati po nekoliko neovisnih značajki [3], od kojih svaka u velikoj mjeri određuje ključne aspekte njihova sustava upravljanja i navigacije. Najčešća je klasifikacija po prijenosnom mediju: zračni, kopneni, svemirski, vodeni. Ostale klasifikacije su: po stupnju autonomnosti (od teleoperatorskog upravljanja do potpune autonomnosti – utječe na složenost svih razina sustava upravljanja), po fleksibilnosti tijela robota (kruto ili fleksibilno tijelo, jedno ili više tijela – utječe na složenost procesiranja percepcijskih podataka), po obliku tijela robota (jednostavan ili složen, pravilno geometrijsko tijelo, mobilni robot u obliku insekta – utječe na složenost algoritma izbjegavanja prepreka pri planiranju putanje robota u prostoru), po vrsti terena za koji je predviđen (unutarnji prostor, vanjski prostor, ravni podovi, neravan teren – utječe na složenost modela prostora), po mehanizmu lokomocije (kotači, noge, gusjenice,

puzajući mehanizmi – utječe na planiranje putanje i sustava upravljanja), po vrsti upravljanja (diferencijalni pogon, sinkroni pogon, klizanje – utječe na planiranje putanje), po općoj primjeni (uslužni roboti, istraživanje, edukacija – utječe na izvedbu korisničkih sučelja) i po načinu nastanka (modernizirana stara vozila ili nova vozila – utječe na troškove razvoja).

## **1.2. Motivi razvoja mobilnih robota**

Jedan od osnovnih motiva zašto se razvijaju mobilni roboti, ali i roboti općenito je čovjekova lijenost. Roboti se razvijaju kako bi zamijenili čovjeka u obavljanju poslova koji su za čovjeka umarajući, dosadni ili neprilični. Zbog vrijednosti čovjekova života mobilni roboti se razvijaju jer imaju mogućnost pristupa mjestima koja su za čovjeka: opasna po život (minska polja, nuklearna postrojenja, eksplozivne zone, podmorje), previše udaljena (planeti) ili nedostupna (mali, mikroskopski prostori). Kao i svugdje veliki i važan faktor je novac. Mobilni roboti se razvijaju da bi se smanjili troškovi i povećala produktivnost rada (manji dodatni troškovi rada zbog smanjenja administracije i potrebnog prostora, veća sveukupna raspoloživost robota; brži rad u odnosu na čovjeka, povećana kvaliteta proizvoda/usluga). Uz nabrojano motiv za razvoj mobilnih robota je ljudsko čuđenje, tj. fasciniranost ljudi kreaturama koje mogu hodati, govoriti, misliti, slušati i gledati kao i oni sami.

## **1.3 Povijest mobilnih robota**

Prvi stvarni mobilni robot bio je proizvod Nikole Tesle. Oko 1890. Nikola Tesla konstruirao je i realizirao bežično upravljana vozila, od kojih je jedno bilo daljinski upravljano plovilo. U ranim 1940. Norbert Wiener razvio je sustav upravljanja za automatski protuzrakoplovni top (radar + analogno računalo + algoritam automatskog usmjeravanja topa i opaljivanja). Wiener se smatra utemeljiteljem kibernetike, a time i moderne robotike. Istodobno su u Njemačkoj razvijeni bespilotni zrakoplovi i



samonavodene rakete (projekti V1 i V2). 1950. g. Grey Walter razvio je elektroničku kornjaču i dao joj je ime Tortoise. To se smatra prvim potpuno autonomnim vozilom. Oči su joj bile fotocijevi, uši mikrofoni, ticala kontakti prekidači a pamćenje joj je bilo izvedeno pomoću kondenzatora. U razdoblju od 1966. do 1972. g u Stanford Reserach Institutu razvijena je prva mobilna platforma opće namjene. Zadatak joj je bio pronaći kutiju zadane veličine, oblika i boje u prostoru od nekoliko soba te ju premjestiti na definirano mjesto. Sredinom 1980.-tih istraživanja i razvoj mobilnih robota doživljavaju nagli napredak te se tako danas na tržištu nalazi veći broj tvrtki koje proizvode mobilne robote.

#### ***1.4. Moguće primjene mobilnih robota***

Mobilni roboti mogu se koristiti svugdje gdje se danas koriste vozila s vozačem, svugdje gdje se koriste transportne trake i/ili manipulatori, te svugdje gdje se danas koriste domaće životinje za obavljanje rada. Primjena je moguća u medicinskim uslugama (raznošenje hrane, vode, lijekova i rublja u bolnicama, obavljanje laboratorijskih analiza, osobito s opasnim materijalima), kod komercijalnih čišćenja (zračne luke, supermarketi, tvorničke hale, razna tretiranja podova – pranje, ribanje, brisanje, poliranje, usisavanje, brušenje, kupljenje otpadaka), kod prodaje potrošne robe, kod poljoprivrednih radova (sadnja, sijanje, plijevljenje, prskanje, okopavanje, branje plodova), kod šumskih radova, kod pregledavanja riskantnih zona (otkrivanje i uništavanje mina, pregled nuklearnih reaktora, parogeneratora, pregled i analiza otpadnih voda, pregledavanje cjevovoda, pregledavanje visokonaponskih energetske vodova), kod kopanja i iskopavanja rude (površinski kopovi, prijevoz rude po zonama u rudnicima, automatizirano kopanje u rudnicima), kod građevinskih radova (automatizirani kranovi, isporuka i ugradnja betona), kod utovara/istovara i manipuliranje materijalima (utovar/istovar brodova, kamiona, vlakova, zrakoplova, manipuliranje materijalom u automatiziranim industrijskim postrojenjima). Moguće su primjene u svemiru (pregledavanje svemirskih letjelica, istraživanje planeta), u podmorju (pregled podmorskih bušotina, polaganje podmorskih kabela, istraživanje podmorja). Velika

primjena mobilnih robota očekuje se i u vojsci (vozila za izviđanje, zamjena vojnih trupa, automatizirane ambulante). Mobilni roboti se mogu koristiti za nadzor velikih skladišta, zgrada, garaža i u civilnom prijevozu. Za kraj, treba spomenuti primjenu mobilnih robota koja je već danas prisutna a to je u obliku zabave, kao robotski psi i robotski nogomet. Uskoro se očekuje da će mobilni roboti služiti kao osobna pripomoć (pomoć hendikepiranim i starijim osobama) te kao pomoć u kućanskim poslovima.

### **1.5. Glavni podsustavi mobilnih robota**

Glavni podsustavi mobilnog robota su mehanički, električni, senzorski i upravljački.

Mehanički podsustav sastoji se od kućišta mobilnog robota koji nosi sve komponente robota, propulzije koja osigurava pogonsku energiju, suspenzije koja raspodjeljuje opterećenje mobilnog robota radi održavanja stabilnosti, i lokomocije, mehanizam koji pretvara energiju propulzije u gibanje mobilnog robota. Mehanički podsustav još uključuje i pomoćne mehanizme kao što su ruke, glave senzora i prihvatnice. Električni podsustav mobilnog robota sastoji se od pomoćne energetske jedinice koja generira dodatnu energiju propulzijskoj energiji, tipično dizelski ili plinski generatori i solarne ćelije. Uz to moraju biti prisutni spremnici i pretvarači energije (akumulatori, punjači akumulatora, besprekidni izvor napajanja). Dio električnog podsustava su kabeli za signala. Senzorski podsustav se dijeli na tri dijela, na propriocepcijske i percepcijske senzore, te antene. Propriocepcijski senzori mobilnog robota mjere unutarnja gibanja mehanizama robota (enkoderi, rezolveri, akcelerometri, kompasi, žiroskopi), a percepcijski senzori mobilnog robota mjere pojave vezane uz okoliš mobilnog robota (kontaktni senzor udaljenosti, IR senzori, ultrazvučni senzori udaljenosti, laserski senzori udaljenosti, CCD kamere). Antene služe za bežičnu komunikaciju s glavnim računalima i/ili drugim mobilnim robotima. Upravljački podsustav mobilnog robota upravlja gibanjem mobilnog robota. Kod upravljanja gibanja određuje se zakret mobilnog robota (upravljanje smjerom gibanja robota) i brzina mobilnog robota (upravljanje brzinom gibanja robota u željenom smjeru). Ova dva

upravljačka zadatka mogu biti spregnuta ili neovisna. Gibanje mobilnog robota može se upravljati korištenjem infrastrukture u prostoru. U infrastrukturu u prostoru ubrajaju se aktivni odašiljači i prijemnici radio-frekvencijskih signala (eng. *Active RF beacons*), GPS (eng. *Global Positioning System*) sustav, bar kodovi i reflektirajuće naljepnice. U velikim halama i skladištima definirani putovi zasnovani su na ukopanim žicama, obojenim prugama, ultraljubičastim premazima, a koriste se i umjetna optička polja, npr. mreža uzoraka na podu i sl.

## **1.6. Sustav za pokretanje mobilnih robota**

Sustavi za pokretanje robota ovise o sredstvu u kojem se mobilni robot kreće. To sredstvo može biti: glatka površina, neravna površina, površina vode, voda, zrak ili vakuum u svemiru (bestežinsko stanje). Za zemaljske robote koji se kreću po glatkim površinama najbolja vrsta pogona su kotači, koji se pokreću nekim elektromotorom, najčešće servomotorom. Servomotori su najpogodniji za pogon robota i njihovih sustava zbog vrlo jednostavnog upravljanja i ostalih tehničkih karakteristika. Najjednostavniji način pokretanja robota kotačima je s dva kotača – mobilni robot s diferencijalnim pogonom. Takvi roboti obično imaju i treći kotač koji služi samo za stabilnost robota. Svaki od kotača se zasebno upravlja, tako da je time omogućen vrlo jednostavan način skretanja te gibanja naprijed i nazad. Mobilni robot s diferencijalnim pogonom giba se pravocrtno u slučaju kada se oba kotača vrte u istom smjeru, a zakreće ako su kutne brzine kotača suprotnog predznaka. Roboti koji imaju četiri ili više kotača, moraju imati drugačiji sustav za skretanje od ovoga gore navedenog. Takvi roboti obično imaju prednje ili zadnje kotače prilagođene okretanju oko svoje osi, kao npr. automobil. Roboti koji su namijenjeni kretanju po neravnim površinama koriste kotače, gusjenice ili noge. Kotači na takvim robotima moraju imati dobre sustave za amortizaciju, te sustave za skretanje prilagođene takvim uvjetima. Gusjenice su zasigurno bolji način kretanja po neravnim površinama zato jer one ne moraju imati amortizaciju, a i sustav za skretanje (kao kod tenkova) im je vrlo efikasan na svim terenima. Pošto su roboti prvotno zamišljeni kao mehanički ljudi, postoje varijante koje se kreću nogama. Kod realizacije

hoda robota na dvije noge dolazi do mnogobrojnih problema. Zato je bolje krenuti od početka i pogledati koji su živi organizmi prvi počeli hodati na nogama. Ti organizmi su bili člankonošci (rakovi, pauzi, kukci...). Kod mobilnih robota najzanimljiviji su i vrlo često se pokušavaju oponašati rakovi koji se kreću na šest nogu i lako je za zaključiti da je hod na šest nogu najjednostavniji. Šest nogu osigurava stabilno stanje na tri noge (kao tronožac), dok se druge tri noge pripremaju za novu poziciju, na koju će se tijelo pomaknuti.

## **1.7. Mobilni roboti u industriji**

Primjena mobilnih robota u industriji dobiva na važnosti zahvaljujući njihovoj pouzdanosti (neprekidno i pouzdano izvođenje monotonih zadataka kao što je nadgledanje), njihovoj mogućnosti pristupa teško dostupnim lokacijama (lokacije koje nisu dostupne čovjeku, kao što su uski prolazi, po zdravlje opasna okolina, udaljene lokacije) i cijeni (sustav transporta baziran na mobilnim robotima može biti jeftiniji od primjene standardnih transportnih traka). Trenutno su u primjeni mobilni roboti koji se koriste za nadgledanje, inspekciju i poslove transporta. Da bi se mobilni robot mogao smatrati korisnim potrebno je da ispuni nekoliko osnovnih zahtjeva. Mobilni robot mora obavljati svoju zadaću na siguran način, npr. mora izbjegavati opasnosti kao što su prepreke ili stepenice, a uz to ne smije predstavljati opasnost odnosno rizik za čovjeka u svojoj blizini.

Mobilnost u osnovi nema smisla bez mogućnosti vođenja odnosno upravljanja. Nasumično gibanje, koje ne zahtjeva upravljanje, može biti korisno u situacijama sigurnosnog nadgledavanja neke lokacije ili u slučaju čišćenja nekog prostora, ali većina industrijske uporabe mobilnih robota zahtjeva mogućnost upravljanja mobilnim robotom. Prije no što se pokušaju izvesti neki zadaci više razine potrebno je osigurati da se mobilni robot giba sigurno, da izbjegava prepreke, da izvodi osnovna ponašanja kao što je praćenje kontura, prolazak kroz otvore, te da ne predstavlja nikakvu opasnost za okolinu i ljude u njoj. Standardni način da se to postigne je implementiranje upravljačkog programa koji je definirao programer u mobilni robot. Glavni nedostatak

takvog pristupa je nemogućnost prilagodbe na promjene u okolini (promjene boje ili teksture površine) ili nemogućnost prilagodbe mobilnog robota na promjene na njemu samom (otkazivanje određenog senzora). To je posljedica krutosti upravljačkog programa, odnosno ne robusnost upravljačkog programa. Zbog gore navedenih razloga, vrlo često se primjenjuju upravljačke jedinice s mogućnošću učenja, koje omogućuju da se mobilni robot adaptira na promjene te da je u interakciji s okolinom. U tim slučajevima vrlo često se koriste neuronske mreže pomoću kojih mobilni robot uči povezati izlaze njegovih senzora o stanju okoline s njegovim aktuatorima. Rezultat je upravljački zakon koji je baziran na percepciji okoline i na specifičnim parametrima senzora.

Za mobilnog robota vođenje prema nekom zadanom cilju je jedna od najvažnijih sposobnosti. Da bi mobilni robot u industrijskim uvjetima bio funkcionalan mora izbjegavati prepreke te mora ograničiti svoje kretanje na sigurnu okolinu i uz to mora izvršavati zadatak za koji je zadužen. Da bi se to sve ostvarilo potrebno je njegovo navođenje.

Navođenje se može definirati kao kombinacija sljedeće tri zadaće:

1. Samostalna lokalizacija
2. Planiranje referentne trajektorije
3. Izgradnja mape prostora i interpretacija mape

Za sve navedene zadaće navođenja, osnovni je izbor da li da se koriste informacije dobivene korištenjem senzora mobilnog robota (enkoderi na kotačima) ili da se koriste vanjske informacije (obilježja okoline, markeri) za samostalnu lokalizaciju, planiranje referentne trajektorije i izgradnju mape.

Potpuno autonomni mobilni roboti ne mogu se očekivati u skorijoj budućnosti – to bi bili roboti sposobni osigurati svoje vlastito preživljavanje te sami postavljati ciljeve svoje misije. Danas se autonomnim mobilnim robotom smatra mobilni robot koji je sposoban samostalno se gibati kroz prostor bez prethodne pripreme prostora te da pri tome obavlja postavljeni mu zadatak.

## 2. Metoda potencijalnih polja

Jedan od začetnika znanstvene discipline socijalne psihologije, Kurt Zadek Lewin (1890. – 1947.), poznat po izrazu

$$B = f(P, E)$$

kojim tvrdi da je ponašanje čovjeka (eng. *behavior*) definirano njegovom okolinom (eng. *environment*) i njegovom osobnošću (eng. *personality*) razvio je pojam polja sila (eng. *force field*) u sociologiji [4]. Tim pojmom objašnjava koji faktori (sile) utječu na određene socijalne situacije. Tako razlikuje atraktivne sile koje vode k ostvarenju nekog cilja i repulzivne sile koje otežavaju ostvarenje nekog cilja. Ovisno o tome koje sile prevladavaju određeni cilj će se ostvariti ili neće.

Moguće je povući paralelu između Lewinove teorije polja sila i teorije potencijalnih polja, koju je prvi primijenio Oussama Khatib [5] sredinom 80-tih. U teoriji potencijalnih polja, umjetno potencijalno polje definirano je tako da u idealnom slučaju minimum potencijala predstavlja cilj, a prepreke, odnosno zidovi tvore uzvisine višeg potencijala. U takvom potencijalnom polju cilj privlači mobilnog robota, a istovremeno prepreke u radnom prostoru ga odbijaju. Suma svih sila određuje smjer i brzinu gibanja mobilnog robota. Kod planiranja gibanja koristi se gradijent potencijala kreiranog metodom potencijalnog polja kao ulazna veličina, odnosno brzina u kinematičkim jednadžbama koje rezultiraju gibanjem robota prema minimumu, a da pritom izbjegava prepreke.

### 2.1. Planiranje referentne trajektorije

Roboti, u koje se ubrajaju mobilni roboti, manipulatori i njihova kombinacija – mobilni manipulatori koriste se za poslove kao što su rukovanje materijalom, zavarivanje, bojanje, montaža, transport, itd. Da bi ostvarili svoju funkciju, primarni, odnosno osnovni zadatak jest ostvariti gibanje iz početne pozicije (često s definiranom konfiguracijom) u konačnu konfiguraciju a da se pritom izbjegne kolizija s preprekama. Osim u rijetkim

situacijama, postoji beskonačno mnogo putanja (trajektorija) koje će ispuniti gore navedeni zadatak. Roboti vrlo često imaju veći broj stupnjeva slobode gibanja nego što je to potrebno da bi se ostvarilo zahtijevano gibanje (redundancija). Čak i u radnom prostoru koji sadrži prepreke, gdje interakcija robota s okolinom nalaže neka ograničenja na gibanje, postoji veći broj mogućih rješenja. Uz to, za dano gibanje, postoji više vrijednosti ulaznih veličina koje će rezultirati traženim gibanjem. Zbog svega navedenog, termin planiranje putanje gibanja, odnosno planiranje referentne trajektorije, u pogledu robotike može se definirati kao: „proces određivanja referentne trajektorije i odgovarajućih ulaznih sila i momenata iz skupa svih mogućih trajektorija i ulaznih veličina koje osiguravaju zadovoljavanje svih ograničenja“.

Gibanje mobilnog robota moguće je opisati u tri različita sustava. Pomoću Kartezijevog pravokutnog koordinatnog sustava (eng. *Cartesian space*), gdje se definira pozicija mobilnog robota i njegova orijentacija u odnosu na neku od koordinatnih osi. Kod robota koji ima  $n$  stupnjeva slobode gibanja često je potrebno njegovo gibanje opisati pomoću sustava zglobova (eng. *joint space*) na način da se definira gibanje svih  $n$  nezavisnih zglobova robota. Na posljeticu, zbog toga što je robot mehanički sustav koji podliježe jednadžbama gibanja koje slijede iz fizikalnih zakona, za svako gibanje koje je konzistentno s kinematičkim i dinamičkim ograničenjima, mora postojati bar jedan set ulaznih sila i momenata koji ostvaruju gibanje robota. Sile i momenti aktuatora koje ostvaruju gibanje definiraju sustav aktuatora (eng. *actuator space*). Pošto se u radu opisuje neholonomni mobilni robot s diferencijalnim pogonom koji ima tri stupnja slobode gibanja, njegovo gibanje opisuje se u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu.

Postoji više metoda kojima se traži referentna trajektorija, no kod svih metoda zajednička je osnovna ideja: pronalaženje trajektorije koja će prolaziti između prepreka na putu od početne do krajnje pozicije. Većina algoritama svrstava se u jednu od sljedeće dvije kategorije: eksplicitno planiranje referentne trajektorije i implicitno planiranje referentne trajektorije.

## **2.2. Planiranje trajektorije i upravljanje**

Tradicionalno gledano, planiranje trajektorije podrazumijeva proces određivanja referentne trajektorije i odgovarajućih ulaznih veličina (sile i momenti) iz skupa svih mogućih trajektorija i ulaznih veličina, a da su pritom zadovoljena sva ograničenja. Ovaj proces može se razmatrati kao proces koji se odvijaju *offline* i koji kao izlaz daje niz međukoraka odnosno niz pozicija za proces upravljanja. Taj proces i rezultatna trajektorija bazirani su na određenom modelu robota i modelu njegove okoline, odnosno radnog prostora.

Upravljanje mobilnim robotom može se definirati kao zadatak čiji je cilj osigurati da mobilni robot prati generiranu referentnu trajektoriju. Dakle, upravljanje mobilnim robotom uključuje uspoređivanje referentne trajektorije s izmjerenom, odnosno stvarnom pozicijom mobilnog robota, definiranje ulaznih veličina kao nominalne veličine i podešavanje aktuatora da ostvare potrebnu silu odnosno moment kako bi se postiglo željeno gibanje. Generalno, zahtjevi koji se postavljaju na aktuatore odstupaju od nominalnih veličina kako bi se kompenzirale greške modeliranja te nesavršenosti aktuatora i senzora.

Kako je planiranje trajektorije proces generiranja niza pozicija između početne pozicije i cilja, kroz koje robot treba proći, a to se može odvijati i *online*, vrlo često je nemoguće odrediti razliku između planiranja i upravljanja. Za razliku od eksplicitnog planiranja, kod implicitnog planiranja, trajektorija i ulazne veličine aktuatora nisu eksplicitno određene prije nego što se ostvari gibanje. Umjesto toga, definiran je plan gibanja koji određuje interakciju robota s okolinom, te kako će robot reagirati na informacije koju prima sa senzora. Jedan od najjednostavnijih pristupa je korištenje metode potencijalnih polja koji je razvio Khatib. Nadalje, ovakav način upravljanja osigurava zatvorenu petlju jer se referentna vrijednost pozicije mobilnog robota uspoređuje s stvarnom pozicijom mobilnog robota.



### **2.3. Metoda potencijalnih polja**

U prethodna dva desetljeća, metoda potencijalnih polja postala je vrlo popularna u robotici, posebno u području mobilne robotike, prvenstveno zbog svoje matematičke jednostavnosti i elegancije. Metoda potencijalnih polja naziva se još „Pristup potencijalnih polja“, „Umjetna potencijalna polja“ te „Pristup virtualnih potencijala“. U najjednostavnijem obliku, metoda potencijalnih polja vrlo jednostavno se implementira i osigurava zadovoljavajuće rezultate bez previše podešavanje metode. U principu, ova metoda omogućava implementaciju i korištenje u realnom vremenu, pri čemu zahtjeva samo informaciju o lokalnom gradijentu bez potrebe za poznavanjem globalnih informacija.

U metodi potencijalnih polja cilj je predstavljen atraktivnim potencijalom koji privlači mobilnog robota, a prepreke su predstavljene kao uzvišenja odnosno repulzivni potencijal. Linearnom superpozicijom atraktivnog i repulzivnog potencijala dobiva se ukupni potencijal. Metoda potencijalnih polja promatra mobilnog robota kao točku, odnosno kuglicu koja se giba po potencijalu pod utjecajem gravitacijske sile. U prvom dijelu rada promatrati će se gibanje kuglice po potencijalnom polju s ciljem dobivanja referentne trajektorije koju mobilni robot treba pratiti pomoću upravljačkog zakona. Gibanje kuglice po potencijalnom polju predstavlja holonomno gibanje, jer kuglica nema ograničenja u smjeru gibanja, dok je gibanje mobilnog robota neholonomno i ono je ograničeno kinematičkim modelom robota. Atraktivni i repulzivni potencijal opisuju se matematičkim funkcijama o kojima se govori u nastavku rada.

Osnovni nedostatak metode potencijalnih polja je situacija kada u prisutnosti prepreka potencijalno polje nije konveksno te tada lokalni minimum može zaustaviti gibanje kuglice po potencijalu, a time i robota, prije nego što stigne u minimum odnosno cilj. Drugi nedostatak je nemogućnost predviđanja trajektorije. Potrebno je vrlo pažljivo odabirati konstante unutar funkcije potencijala kako bi se osiguralo zaobilazanje prepreka. Nadalje, dobivene trajektorije nisu optimalne ni po kojem kriteriju te je zbog

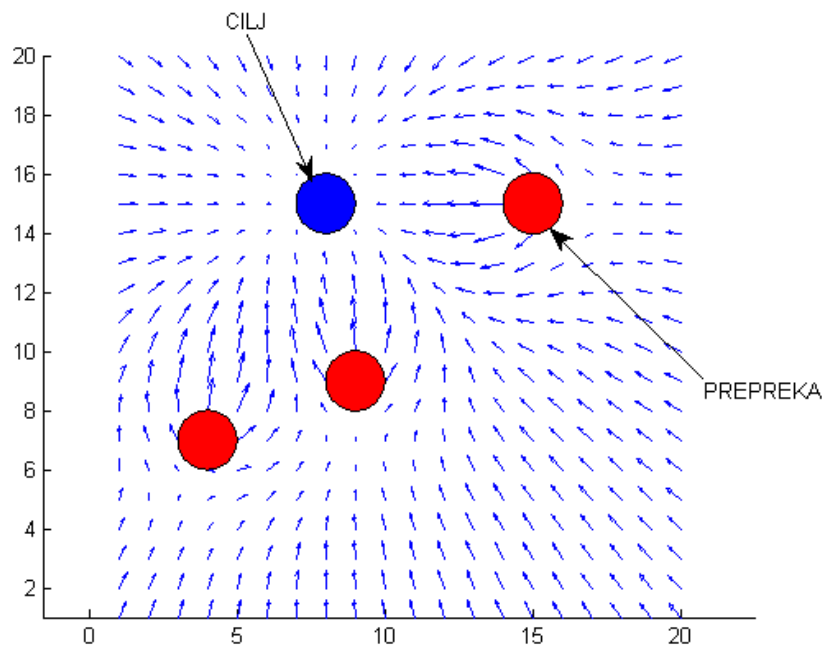
toga potrebno koristiti neke dodatne metode uz metodu potencijalnih polja da bi se ostvarilo optimalno gibanje.

Dakle, ukupni potencijal jednak je zbroju atraktivnog i repulzivnog potencijala pri čemu je atraktivni potencijal jednak globalnom minimumu, a prepreke su viši potencijali predstavljeni repulzivnim potencijalom:

$$U_u(q) = U_a(q) + U_r(q) \quad (1)$$

gdje je  $U_u(q)$  ukupni potencijal,  $U_a(q)$  atraktivni potencijal,  $U_r(q)$  repulzivni potencijal, a  $q$  je pozicija u Kartezijevom koordinatnom sustavu tako da vrijedi da je  $q = [x, y]^T$  u dvodimenzionalnom radnom prostoru. Ako je gibanje kuglice po potencijalnom polju definirano tako da prati negativni gradijent (Slika 1), što je rezultat gravitacijske sile, kuglica će konvergirati prema cilju jer je to točka sa najnižim iznosom potencijala.

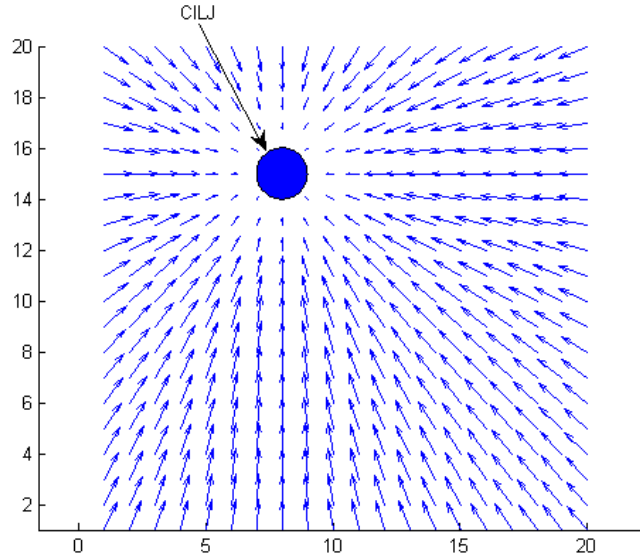
*Matlab računalni program koji generira grafički prikaz gradijenta potencijala na Slikama 1, 2 i 5 nalazi se u sklopu ovog rada kao Prilog 2 na CD-u.*



**Slika 1: Prikaz gradijenta potencijalnog polja**

### 2.3.1. Atraktivni potencijal

Atraktivni potencijal ima formu prikazanu na Slici 2, gdje je u svakoj točki radnog prostora negativni gradijent usmjeren prema cilju.



Slika 2: Prikaz gradijenta atraktivnog potencijalnog polja

Iako postoji više matematičkih funkcija kojima se opisuje atraktivni potencijal, najčešće se koristi [6], pa tako i u ovom radu, sljedeća kvadratna funkcija:

$$U_a(q) = \frac{1}{2} \cdot k_a \cdot \rho_c^2(q) \quad (2)$$

pri čemu je  $k_a$  pozitivna konstanta, a  $\rho_c$  predstavlja udaljenost mobilnog robota od cilja  $q_c = [x_c, y_c]^T$ , tako da vrijedi:

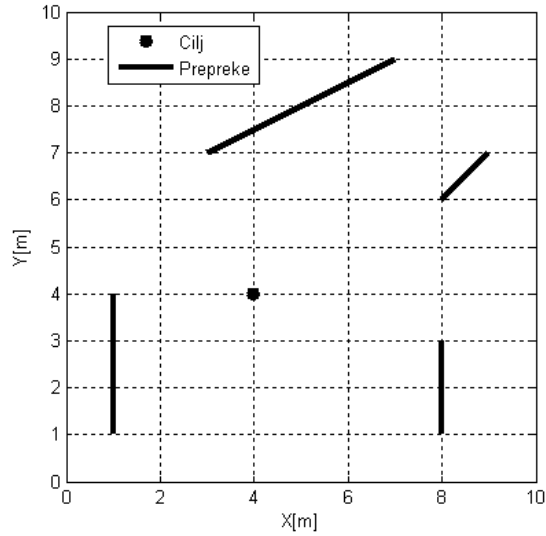
$$\rho_c(q) = \|q - q_c\| \quad (3)$$

Ako se izraz (3) uvrsti u (2) slijedi:

$$U_a(q) = \frac{1}{2} \cdot k_a \cdot (q - q_c)^T (q - q_c) \quad (4)$$

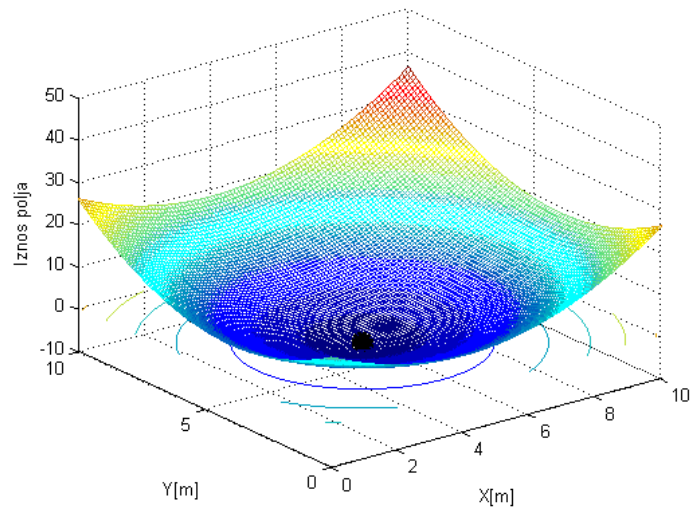
iz čega je očito da funkcija ima minimum u slučaju kada vrijedi  $q = q_c$ , odnosno kada mobilni robot dođe u cilj tada je atraktivni potencijal jednak nuli.

Slika 3 prikazuje radni prostor u kojemu je definiran cilj u točki  $q_c = [x_c, y_c]^T = [4, 4]^T$  te zidovi, tj. prepreke.



**Slika 3: Radni prostor**

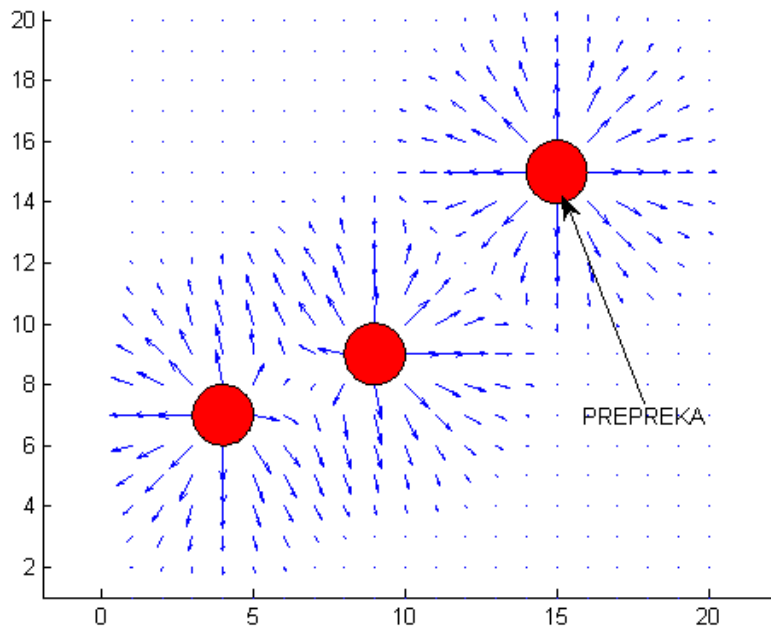
Za tako definirani radni prostor te koristeći izraz (2) moguće je dobiti atraktivno potencijalno polje na način da se svakoj točki radnog prostora pridoda vrijednost atraktivnog potencijala u ovisnosti o udaljenosti te točke od cilja (Slika 4).



**Slika 4: Atraktivni potencijal**

### 2.3.2. Repulzivni potencijal

Repulzivni potencijal služi za opis prepreka u radnom prostoru te postoji više matematičkih funkcija kojima se opisuju prepreke. Prepreka, u metodi potencijalnih polja predstavljena je točkom u radnom prostoru  $q_p = [x_p, y_p]^T$ . No, pošto je vrlo često slučaj da se u radnom prostoru nalazi veći broj prepreka tada je  $q_{p,i} = (x_{p,i}, y_{p,i}), i = 1, \dots, n$  lokacija  $i$ -te prepreke u prostoru, a  $n$  je broj prepreka. Repulzivni potencijal ima formu prikazanu na Slici 5 gdje je negativni gradijent usmjeren od prepreka. Vidljivo je da točke radnog prostora koje su više udaljene od prepreka imaju gradijent jednak nuli, odnosno prepreka neće utjecati na gibanje mobilnog robota ako se mobilni robot nalazi izvan radijusa utjecaja prepreke. Kako se udaljenost robota od prepreke smanjuje gradijent raste tj. raste iznos potencijalnog polja. U sklopu ovog rada prepreke se razmatraju kao zidovi odnosno dužine te se zbog toga vrši diskretizacija dužine na točke, tako da se jedan zid sastoji od više točaka, pri čemu je svaka točka prepreka.



Slika 5: Prikaz gradijenta repulzivnog potencijalnog polja

U metodi potencijalnih polja koristi se više matematičkih funkcija za opis repulzivnog potencijalnog polja. Jedna od tih funkcija naziva se FIRAS funkcija [6] (eng. *Force Involving and Artificial Repulsion from the Surface Function*). Potencijal FIRAS funkcije matematički je opisan na sljedeći način:

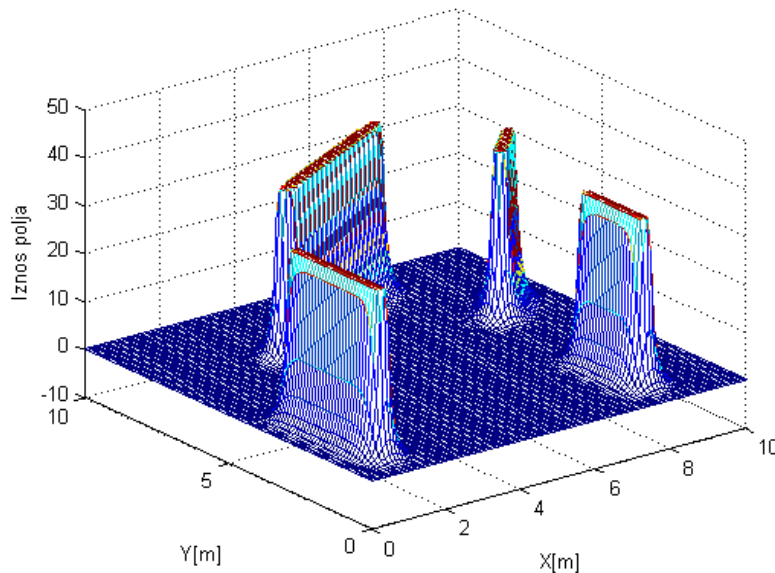
$$U_r(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k_r \cdot \left( \frac{1}{\eta_i(q)} - \frac{1}{\eta_0} \right)^2, & \text{za } \eta_i(q) \leq \eta_0, \quad i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{za } \eta_i(q) > \eta_0 \end{cases} \quad (5)$$

pri čemu je  $k_r$  pozitivna konstanta, tj. faktor pojačanja repulzivnog potencijala, a

$$\eta_i(q) = \|q_{p,i} - q\|, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

predstavlja najmanju udaljenost mobilnog robota od  $i$ -te prepreke, a  $\eta_0$  je konstanta koja govori koliki je utjecaj repulzivnog polja prepreke.  $\eta_0$  se naziva radijus utjecaja prepreke. Iz (5) je vidljivo da ako se mobilni robot nalazi izvan radijusa utjecaja prepreke tada je repulzivni potencijal jednak nuli, a ako se mobilni robot nalazi unutar radijusa utjecaja tada je iznos repulzivnog potencijala proporcionalan udaljenosti mobilnog robota od prepreke i faktoru pojačanja.

Slika 6 prikazuje repulzivni potencijal prepreka radnog prostora predstavljenog na Slici 3 u slučaju kada se za opis repulzivnog potencijala koristi FIRAS funkcija.

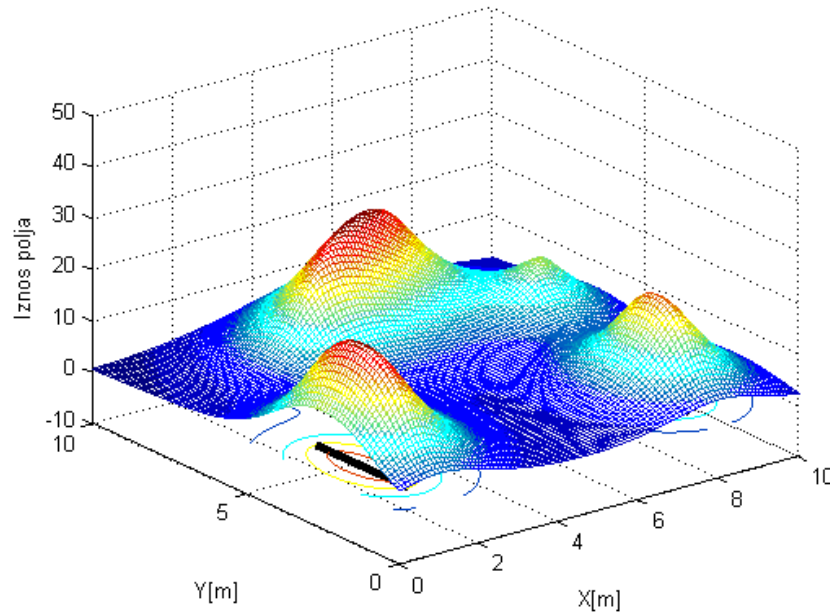


**Slika 6: Repulzivni potencijal za FIRAS funkciju**

Uz FIRAS funkciju za opis repulzivnog potencijala često se koristi i jedan oblik eksponencijalne funkcije čiji je izraz jednak:

$$U_r(q) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left[-k_r \cdot (q_{p,i} - q)^2\right], \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

gdje je  $k_r$  ponovno faktor pojačanja repulzivnog potencijala. Za bolje razumijevanje izraza (7) dan je njegov prikaz, na Slici 7, za slučaj prepreka na Slici 3.

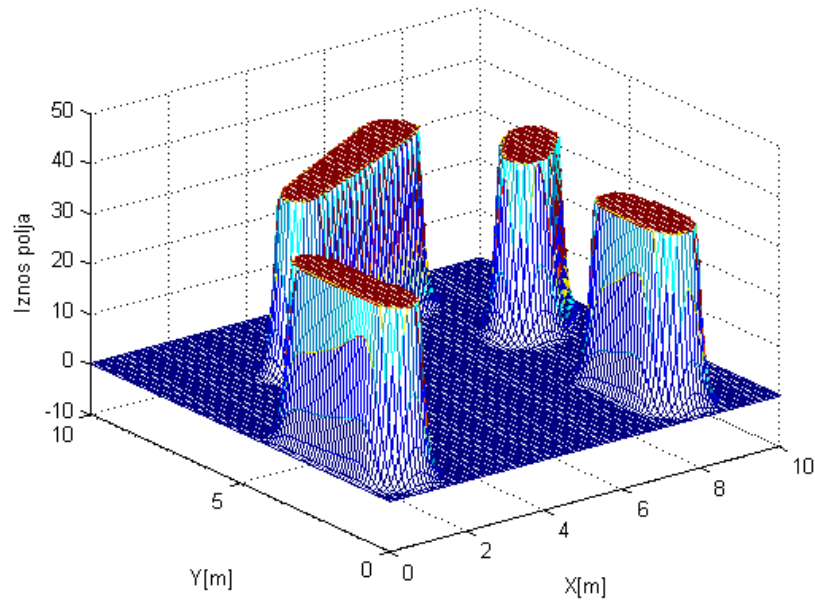


**Slika 7: Repulzivni potencijal za eksponencijalnu funkciju**

Usporedbom grafičkog prikaza repulzivnog potencijala na Slici 6 i Slici 7 očito je da će se korištenjem FIRAS funkcije bolje riješiti problem kada se cilj nalazi blizu prepreke te je zbog toga robot u nemogućnosti doći u cilj. Upravo zbog tog problema [7] koji se naziva GNRON (eng. *Goal Non-Reachable with Obstacles Nearby*), razvijena je Ge funkcija (8) koja je svojevrsna modifikacija klasične FIRAS funkcije.

$$U_r(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k_r \cdot \left(\frac{1}{\eta_i(q)} - \frac{1}{\eta_0}\right)^2 \cdot \rho_c^2, & \text{za } \eta_i(q) \leq \eta_0, \quad i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{za } \eta_i(q) > \eta_0 \end{cases} \quad (8)$$

Iz (8) je vidljivo da će se globalni minimum ostvariti tek onda kada robot dođe do cilja, odnosno tek onda kada će udaljenost robota od cilja  $\rho_c$  biti jednaka nuli. Slika 8 prikazuje repulzivni potencijal koji se dobije korištenjem Ge funkcije.



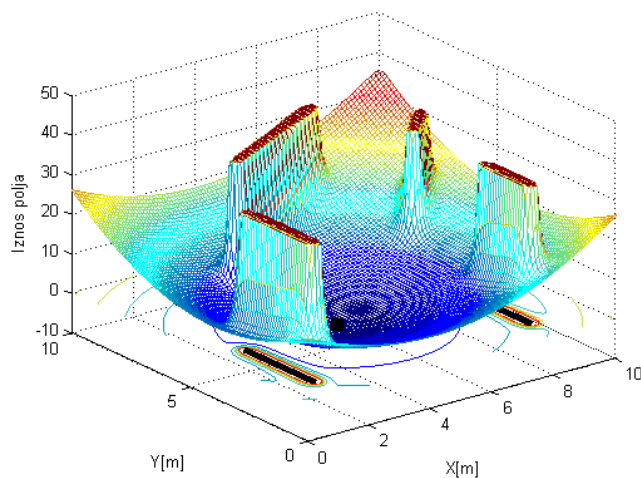
**Slika 8: Repulzivni potencijal za Ge funkciju**

*Matlab računalni program koji generira grafički prikaz potencijala na Slikama 4, 6, 7 i 8 nalazi se u sklopu ovog rada kao Prilog 3 na CD-u.*



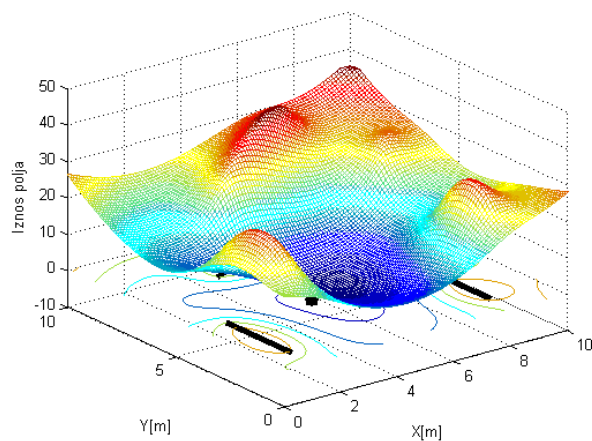
### 2.3.3. Ukupno potencijalno polje

Ukupno potencijalno polje prema (1) jednako je linearnoj superpoziciji atraktivnog i repulzivnog polja. Slika 9 prikazuje ukupno potencijalno polje koje se dobije zbrajanje atraktivnog potencijala (2) i repulzivnog potencijala opisanog FIRAS funkcijom (5).



Slika 9: Ukupno potencijalno polje (FIRAS funkcija)

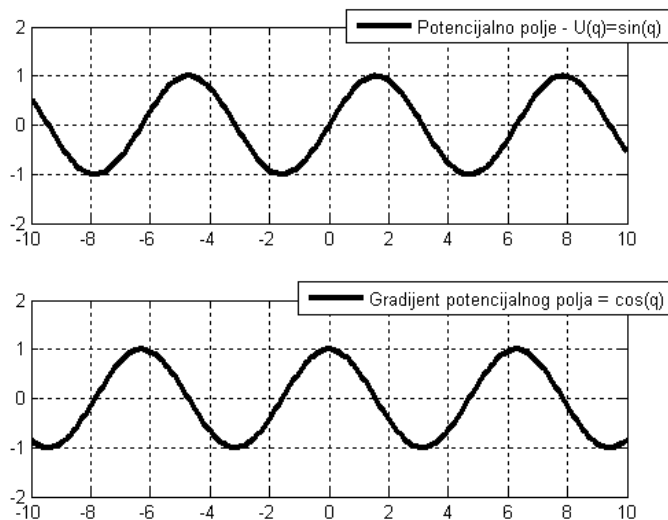
Sljedeća slika prikazuje ukupno potencijalno polje koje se dobije zbrajanjem atraktivnog kvadratnog potencijala (2) te repulzivnog potencijala definiranog eksponencijalnom funkcijom (7).



Slika 10: Ukupno potencijalno polje (eksponencijalna funkcija)

Jednom kada je formirano ukupno potencijalno polje jednostavno je za zamisliti gibanje kuglice po tom polju pod utjecajem gravitacijske sile. Kuglica će se s mjesta višeg potencijala gibati prema mjestu nižeg potencijala, sve dok ne postigne globalni ili lokalni minimum, no to gibanje je potrebno matematički opisati. Na Slici 11 gornji graf prikazuje potencijalno polje u obliku  $\sin(q)$ . Ako se na to potencijalno polje stavi kuglica, ona će se početi gibati ovisno o nagibu potencijalnog polja u toj točki. Kuglica će se gibati zbog sile gravitacije koja djeluje na nju. Upravo zbog toga moguće je zaključiti da će sila koja djeluje na kuglicu biti proporcionalna nagibu, odnosno gradijentu potencijala. Nagib funkcije u nekoj točki jednak je derivaciji te funkcije što je za dani primjer i prikazano na donjem grafu Slike 11 kao  $\cos(q)$  :

$$F_u(q) \sim \nabla U_u(q) \quad (9)$$



**Slika 11: Potencijalno polje i gradijent potencijala**

Ako kuglicu na potencijalnom polju u obliku sinusa promatra kao tijelo na kosini tada je vektor gravitacijske sile koja djeluje na kuglicu je jednaka

$$\vec{F}_g = -m\vec{g} \quad (10)$$

Tu silu moguće je rastaviti na komponentu koja je okomita na kosinu te na komponentu koja je paralelna s kosinom.

Sila okomita na kosinu poništava se sa silom reakcije podloge te ostaje sila koja je paralelna s kosinom, i koja je presudna za gibanje tijela na kosini:

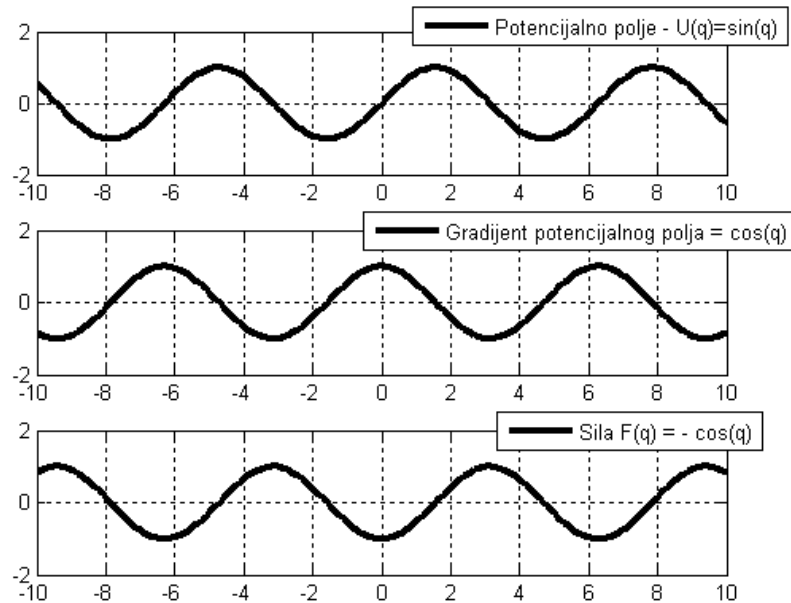
$$\vec{F}_s = -m\vec{g} \sin \theta \quad (11)$$

pri čemu je kut  $\theta$  kut kosine, odnosno gradijent potencijala.

Upravo je zbog negativnog predznaka u izrazu (11) ukupna sila koja djeluje na tijelo pod utjecajem potencijalnog polja jednaka:

$$F_u(q) = -\nabla U_u(q) \quad (12)$$

Slika 12 prikazuje odnos ukupnog potencijalnog polja, gradijenta potencijalnog polja i ukupne sile koja djeluje na kuglicu koja se nalazi na potencijalnom polju, pod utjecajem gravitacijske sile, za slučaj kada je potencijalno polje sinusoida.



**Slika 12: Potencijalno polje, gradijent potencijala i ukupna sila**

Ako se na Slici 12 promatra kuglica sa početnim uvjetom  $q = \frac{\pi}{2}$  tada je ukupni potencijal

u toj točki jednak  $U(q) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Gradijent u toj točki jednak je 0, jer se kuglica

nalazi na tjemenu potencijalnog polja, odnosno derivacija potencijala jednaka je 0 što rezultira činjenicom da je i sila jednaka također 0. To odgovara situaciji kada kuglica

miruje u nestabilnom ravnotežnom stanju. Ako se razmatra situacija kada je početni uvjet  $q = \pi$ , tada će gradijent potencijala biti -1 a samim time je sila jednaka 1, odnosno na kuglicu će djelovati maksimalna pozitivna sila koja će rezultirati gibanjem kuglice u pozitivnom smjeru, prema stabilnom ravnotežnom stanju.

Ukupna sila koja djeluje na mobilni robot, odnosno kuglicu jednaka je negativnom gradijentu ukupnog potencijala kako je definirano u (12), odnosno linearnoj superpoziciji atraktivne i repulzivne sile tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} F_u(q) &= F_a(q) + F_r(q) \\ F_u(q) &= -\nabla U_a(q) - \nabla U_r(q) \end{aligned} \quad (13)$$

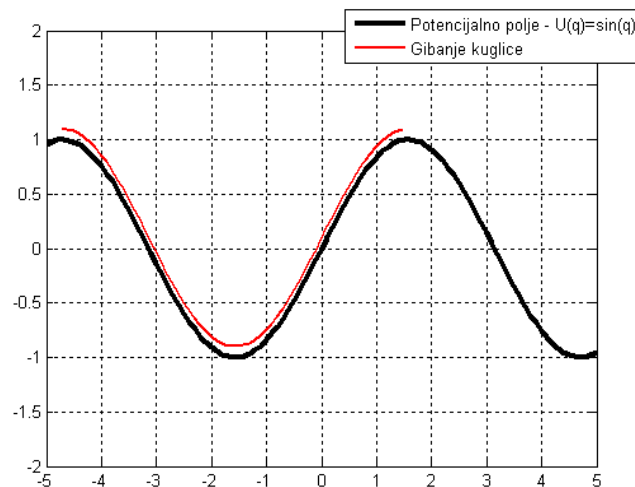
Pošto je  $q = [x, y]^T$  pozicija, odnosno uređeni par koordinata, da bi se dobila ukupna sila potrebno je izvršiti parcijalno deriviranje potencijala po  $x$  i  $y$ .

Kod klasičnih mehaničkih sustava vrijedi odnos da je akceleracija proporcionalna sili, odnosno moguće je zapisati za potrebe izvoda da je akceleracija jednaka sili:

$$\ddot{q} = F_u \quad (14)$$

Bez disipacije energije takav sustav će u slučaju gore navedenog primjera rezultirati beskonačnim titranjem kuglice između dva nestabilna ravnotežna stanja.

Ako se uzme da je početni uvjet infinitezimalno malo pomaknut u desno od nestabilnog ravnotežnog stanja  $q = -3\pi/2$ , i ako se kuglica pusti ona će se beskonačno gibati po potencijalnom polju između  $q_1 = -3\pi/2$  i  $q_2 = \pi/2$  kako je prikazano na Slici 13.

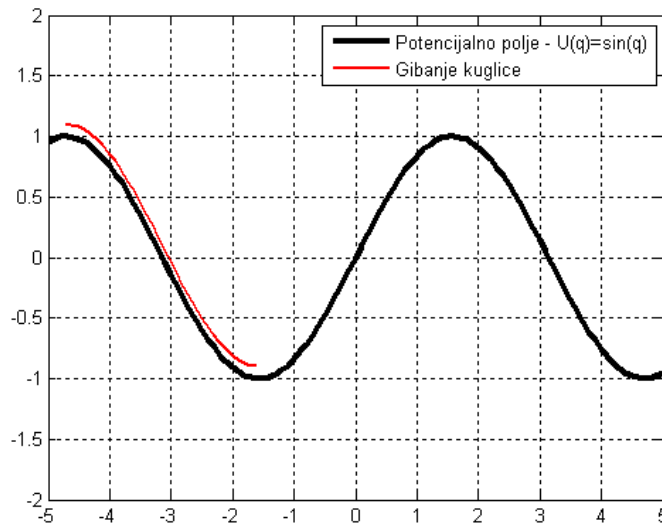


Slika 13: Klasični mehanički sustav

Kod metode potencijalnih polja ideja je da se kuglica zaustavi u minimumu, prvenstveno globalnom, ali za objašnjenje principa poslužiti će i lokalni minimum. Za to je potrebna disipacija energije koja se može predstaviti kao trenje. Sa Slike 12 vidljivo je da ako bi kuglica bila puštena sa početnog uvjeta infinitezimalno malo pomaknutog u desno od nestabilnog ravnotežnog stanja  $q = -3\pi/2$ , da je prvi minimum u kojem se kuglica može zaustaviti, prvo stabilno ravnotežno stanje  $q = -\pi/2$ . Ako se kuglica zaustavi to znači da je brzina kuglice jednaka 0, a vidljivo je sa Slike 12 da je u tom slučaju i sila jednaka 0. Upravo se ta zavisnost, da je sila jednaka brzini koristi u metodi potencijalnih polja:

$$\dot{q} = F_u \quad (15)$$

Primjer takvog gibanja dan je na Slici 14.



Slika 14: Gibanje kuglice kod metode potencijalnih polja

Izraz (15) konačan je izraz za određivanje referentnog konfiguracijskog vektora brzina

$\dot{q}_r = \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix}$ , koji predstavlja brzine gibanja kuglice u  $x$  i  $y$  smjeru, po potencijalnom

polju odnosno brzine holonomnog gibanja kuglice.

Iz izraza (13) i (15) slijedi:

$$\dot{q}_r = -\nabla_q (U_a(q) + U_r(q)) \quad (16)$$

pri čemu je gradijent potencijala

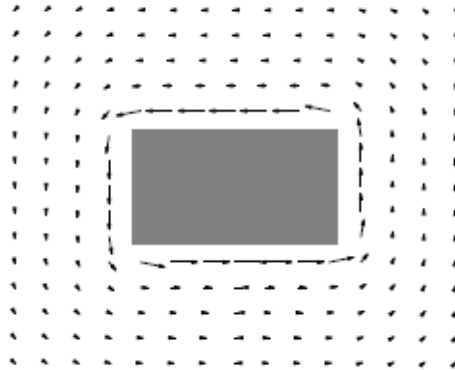
$$\nabla U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Izraz (16) moguće je nadograditi dodavanjem vrtložnih polja koja djeluju oko prepreke te vode kuglicu, odnosno mobilni robot oko prepreke. Tada je konfiguracijski vektor brzina jednak:

$$\dot{q}_r = -\nabla_q U_a(q) - \nabla_q U_r(q) + F_v(q) \quad (18)$$

koji predstavlja metodu potencijalnih polja s vrtložnim poljima oko prepreke (Slika 15), pri čemu je

$$F_v(q) = \pm \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r(q)}{\partial y} \\ -\frac{\partial U_r(q)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19)$$



**Slika 15: Vrtložna polja za pravokutnu prepreku**

Izraz (18) zapisuje se i pomoću antisimetrične matrice  $J$ :

$$\dot{q}_r = -\nabla_q U_a(q) - \nabla_q U_r(q) \pm J \nabla_q U_r(q) \quad (20)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Valja napomenuti da predznak + (plus) odgovara situaciji u kojoj mobilni robot zaobilazi prepreku u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, odnosno gibanje vrtložnog polja je u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Predznak – (minus) osigurava suprotno zaobilaženje prepreke. Izraz (20), potencijalno polje s vrtložnim poljima oko prepreka je konačan oblik koji se i koristi u ovom radu.

## 2.4. Generiranje referentne trajektorije

U prethodnom poglavlju definiran je izraz (20) pomoću kojeg je moguće dobiti referentne brzine  $\dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix}^T$  za holonomno gibanje kuglice po potencijalnom polju.

Na temelju izraza (17) i (20), tj. nakon parcijalnog deriviranja izrazi za brzine su sljedeći:

$$\dot{x}_r = -a \frac{\partial U_a}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \left( -b_1 \frac{\partial U_r}{\partial x} + b_2 \frac{\partial U_r}{\partial y} \right) \quad (22)$$

$$\dot{y}_r = -a \frac{\partial U_a}{\partial y} + \sum_{i=1}^n \left( -b_1 \frac{\partial U_r}{\partial y} - b_2 \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) \quad (23)$$

U prethodna dva izraza faktor  $a$  je faktor pojačanja atraktivnog potencijala,  $b_1$  je faktor pojačanja repulzivnog potencijala a  $b_2$  utječe na brzinu vrtložnog polja.

Cilj je dobiti referentnu trajektoriju,  $q_r = [x_r, y_r]^T$ , koju mobilni robot mora pratiti na temelju upravljačkog zakona te kinematičkog modela mobilnog robota. Da se dobije referentna trajektorija potrebno je raspisati i riješiti sustav diferencijalnih jednadžbi izvedenih iz izraza (4), (5) i (20) ako se kao repulzivna funkcija koristi FIRAS funkcija, kako slijedi:

$$\dot{q}_r = -\nabla_q U_a(q) - \nabla_q U_r(q) \pm J \nabla_q U_r(q) \quad (24)$$

$$U_a(q) = \frac{1}{2} k_a \cdot \left[ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \right] \quad (25)$$

$$U_r(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k_r \cdot \left( \frac{1}{\eta_i(q)} - \frac{1}{\eta_0} \right)^2, & \text{za } \eta_i(q) \leq \eta_0, \quad i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{za } \eta_i(q) > \eta_0 \end{cases} \quad (26)$$

pri čemu je  $\eta_i(q)$  udaljenost mobilnog robota od prepreke

$$\eta_i(q) = \sqrt{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (27)$$

Nakon uvrštavanja izraza (27) u izraz (26), moguće je izvršiti parcijalno deriviranje funkcija atraktivnog i repulzivnog potencijala s ciljem dobivanja referentnih brzina, odnosno članova izraza (22) i (23):

$$\frac{\partial U_a}{\partial x} = k_a (x - x_c) \quad (28)$$

$$\frac{\partial U_a}{\partial y} = k_a (y - y_c) \quad (29)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial x} = k_r \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2}} - \frac{1}{\eta_0} \right) \cdot \frac{(x - x_{p,i})}{\sqrt{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2}} \cdot \frac{1}{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial y} = k_r \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2}} - \frac{1}{\eta_0} \right) \cdot \frac{(y - y_{p,i})}{\sqrt{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2}} \cdot \frac{1}{(x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2} \quad (31)$$

Ako se umjesto FIRAS funkcije za opis repulzivnog polja koristi eksponencijalna funkcija tada je potrebno izraz (26) zamijeniti s izrazom (7). U tom slučaju izrazi u funkcijama referentnih brzina (22) i (23) poprimaju sljedeći oblik:

$$\frac{\partial U_a}{\partial x} = -k_a (x - x_c) \quad (32)$$

$$\frac{\partial U_a}{\partial y} = -k_a (y - y_c) \quad (33)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial x} = k_r (x - x_{p,i}) \cdot \exp\left(-k_r \left( (x - x_{p,i})^2 + (y - y_{p,i})^2 \right)\right) \quad (34)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial y} = k_r (y - y_{p,i}) \cdot \exp\left(-k_r \left( (y - y_{p,i})^2 + (x - x_{p,i})^2 \right)\right) \quad (35)$$



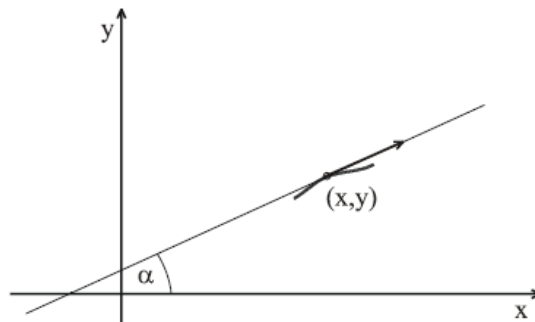
Jednom kada je u potpunosti definiran izraz  $\dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix}^T$ , moguće je riješiti sustav diferencijalnih jednačbi  $\dot{x}_r, \dot{y}_r$ , kako bi se dobila referentna trajektorija. Pošto je program u sklopu ovog rada pisan u *Matlabu*, za rješavanje diferencijalnih jednačbi koristi se ugrađena funkcija za numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi, *ode45*.

### 2.4.1. Numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi

Promatra se obična diferencijalna jednačba prvog reda oblika:

$$y' = f(x, y) \quad (36)$$

koju treba riješiti po  $y = y(x)$  uz početni uvjet  $y(x_0) = y_0$ .



Slika 16: Rješavanje obične diferencijalne jednačbe

Za proizvoljnu točku u ravnini  $(x, y) \in R^2$  gleda se pravac (Slika 16) s koeficijentom nagiba

$$\tan \alpha = f(x, y) \in R^2. \quad (37)$$

Krivulja koja prolazi kroz točku te u toj točki ima navedeni pravac kao tangentu zadovoljava običnu diferencijalnu jednačbu u toj točki. Očito je da je takvih krivulja ima beskonačno mnogo pa je potreban uvjet koji će izdvojiti jednu – početni uvjet znači da se traži baš ona krivulja koja prolazi kroz točku  $(x_0, y_0)$ .

Postoji puno slučajeva kada je običnu diferencijalnu jednačbu nemoguće riješiti analitički, dakle kada je jedini mogući pristup neka od numeričkih metoda. Numerički

naći rješenje znači numerički naći krivulju  $y = y(x)$ , tj. niz točaka na toj krivulji. Uzima se mali korak  $h$  i numerički se nalaze točke na toj krivulji s apscisama:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots \quad (38)$$

Ako je  $(x_0, y_0)$  točka na krivulji i ako tangenta u toj točki ima nagib

$$k_0 = \tan \alpha_0 = f(x_0, y_0) \quad (39)$$

tada je sasvim blizu te točke navedeni pravac dobra zamjena za krivulju, te ako se uzme dovoljno mali  $h$  može se smatrati da je točka na pravcu za  $x_1 = x_0 + h$  praktično i na krivulji, tj. uzima se da je:

$$y_1 = y(x_1) \approx y_0 + k_0 h \quad (40)$$

Nakon pomaka u novu točku krivulje  $(x_1, y_1)$  promatra se pravac u toj točki s nagibom:

$$k_1 = \tan \alpha_1 = f(x_1, y_1) \quad (41)$$

te se ponovno vrši pomak za  $h$  po novom pravcu do točke s  $x_2 = x_1 + h$ , tj. uzima se da je:

$$y_2 = y(x_2) \approx y_1 + k_1 h \quad (42)$$

itd. Takva metoda naziva se Euler-Cauchy metoda i temeljna formula je

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (43)$$

Temeljno je pitanje kolika je greška te metode? Kada se izuzme greška zbog zaokruživanja vidljivo je da je jedan dio greške lokalne prirode: ako je neka točka  $(x_i, y_i)$  čak i točna iduća točka više neće biti, osim ako je krivulja pravac. Iz Taylorova razvoja

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + O(h^2) \quad (44)$$

vidljivo je da je lokalna greška 2. reda. Drugi dio greške je propagirajuće prirode: greška koja je nastala u jednom koraku održava se i propagira kroz korake koji slijede. To slabi ukupnu točnost metode i globalna greška je (lokalna + propagacija) 1. reda.

Zaključak je da metoda nije efikasna ali se točnost može kontrolirati smanjivanjem koraka  $h$ , a pored toga je atraktivna zbog svoje jednostavnosti i očiglednosti.

Želi li se postići veća točnost u numeričkom rješavanju obične diferencijalne jednadžbe potrebno je popraviti lokalnu grešku. Usporedbom Eulerove formule i Taylorovog razvoja vidljivo je da je lokalna greška 2. reda jer se Eulerova metoda zasniva na

zadržavanju članova Taylorovog razvoja do 1. reda, pa se zaključuje da se veća lokalna točnost može postići zadržavanjem viših članova razvoja:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2!} \frac{d^2y}{dx^2}(x_i)h^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3y}{dx^3}(x_i)h^3 + \dots \quad (45)$$

ali to je moguće ako su poznate više derivacije.

Druga metoda, kojom se smanjuje lokalna greška, te koja se koristi u ovom radu je Runge-Kutta metoda. Neka je početna točka  $(x_i, y_i)$  a koeficijent smjera tangente u toj točki  $k_1 = f(x_i, y_i)$ . Slijedi pomak ne za cijeli korak  $h$  nego do nekog  $x_i + p_1h$ , gdje će se  $p_1$  kasnije odrediti. Dakle pomak je u točku

$$(x_i + p_1h, y_i + p_1k_1h) \quad (46)$$

i tada se gleda koeficijent smjera tangente u toj točki:

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + p_1k_1h) \quad (47)$$

Sljedeći korak je linearna kombinacija smjerova  $a_1k_1 + a_2k_2$ . Postavlja se pitanje da li se može postići lokalna greška 3. reda tj. da bude:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h = \text{Taylorov razvoj 2. člana} \quad (48)$$

Izvodom se dobiva da je to moguće postići ako se uzme:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

Tako dobivene metode su Runge-Kutta metode drugog reda i razlikuju se po odabranim parametrima  $a_1, a_2, p_1$ . Slično kao do sada ali sa 3 točke i linearnom kombinacijom 3 koeficijenata dobiva se lokalna točnost 4. reda i to su Runge-Kutta metode trećeg reda, odnosno kada je lokalna točnost 5. reda tada je to Runge-Kutta metoda četvrtog reda.

U računalnom programu *Matlab* korištena je funkcija *ode45* (eng. *ordinary differential equations*), koja služi za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi pomoću Runge-Kutta metodom između 4. i 5. reda.

Matematička formulacija problema je:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(0) = y_0, 0 \leq t \leq T \quad (50)$$

a formulacija u *Matlabu* je

$$\text{ode45}('func', [0, T], y_0) \quad (51)$$

gdje je '*func*' *Matlab M-file* skripta koja prihvaća varijable  $(t, y)$  i vraća  $f(t, y)$ ,  $[0, T]$  je vektor koji definira vrijeme simulacije, a  $y_0$  je skup početnih uvjeta.

Za rješavanje diferencijalnih jednadžbi (22) i (23) u *Matlabu* se formira vektor  $y$  u kojemu su  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$ , kao početni uvjet definira se početna pozicija mobilnog robota u radnom prostoru te je potrebno odrediti ukupno vrijeme simulacije.

## 2.4.2. Ograničenja brzina

Prije prikazivanja rezultata simulacije potrebno je ponovno promotriti izraze (22) i (23) koji definiraju brzine holonomnog gibanja kuglice. Vidljivo je da ne postoje ograničenja tih brzina te prilikom gibanje robota na način da prati referentno gibanje kuglice može doći do fizikalno nerealnih zahtjeva gibanja koje mobilni robot mora ostvariti. Naime, ako brzina gibanja kuglice rezultira naglim skokovima do visokih vrijednosti (eng. *peak*) to će se ostvariti i kod mobilnog robota. U fizičkoj izvedbi mobilnog robota to bi rezultiralo uništavanjem aktuatora (elektromotora). Kako bi se takve, neželjene, situacije izbjegle potrebno je ograničiti brzine gibanja mobilnog robota, odnosno ograničenja postaviti na brzinu gibanja kuglice. To se postiže modificiranjem izraza (22) i (23):

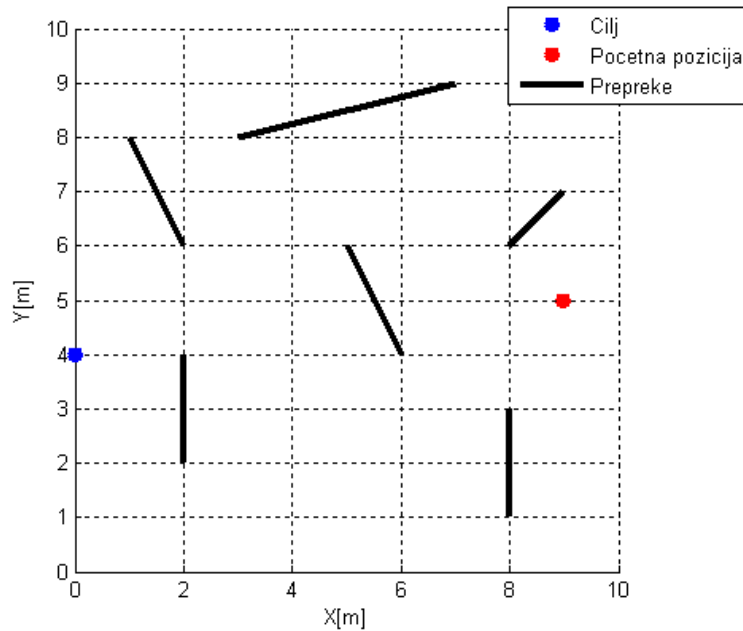
$$\dot{x}_r = -V_a \cdot \tanh\left(a \frac{\partial U_a}{\partial x}\right) + \sum_{i=1}^n \left( -V_{b_1} \cdot \tanh\left(b_1 \frac{\partial U_r}{\partial x}\right) + V_{b_2} \cdot \tanh\left(b_2 \frac{\partial U_r}{\partial y}\right) \right) \quad (52)$$

$$\dot{y}_r = -V_a \cdot \tanh\left(a \frac{\partial U_a}{\partial y}\right) + \sum_{i=1}^n \left( -V_{b_1} \cdot \tanh\left(b_1 \frac{\partial U_r}{\partial y}\right) - V_{b_2} \cdot \tanh\left(b_2 \frac{\partial U_r}{\partial x}\right) \right) \quad (53)$$

pri čemu je  $V_a$  maksimalna brzina atraktivnog polja cilja,  $V_{b_1}$  maksimalna brzina repulzivnog polja prepreke i  $V_{b_2}$  maksimalna brzina vrtložnog polja prepreke. Dakle, kada se koristi izraz  $V_{\max} \tanh(U)$  ukupni iznos je definiran unutar intervala  $\pm V_{\max}$ . Na taj način se osiguravaju realne izvedbe brzina kod gibanja mobilnog robota.

### 2.4.3. Rezultati simulacije generiranja referentne trajektorije

Prvotno je potrebno definirati radni prostor s preprekama, cilj i početnu poziciju mobilnog robota kako je prikazano na Slici 17:



Slika 17: Radni prostor

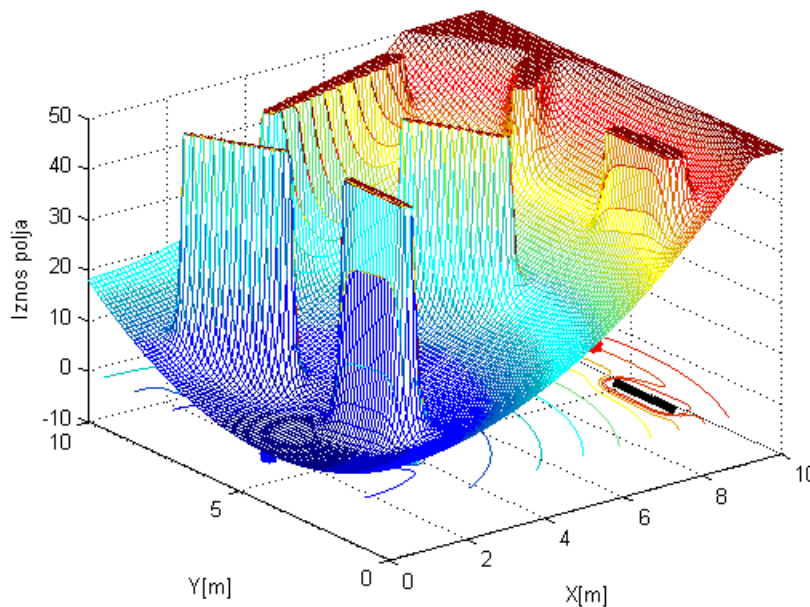
Prepreke se u sklopu ovog rada definiraju na način da se u *Matlab* računalnom programu unesu početna i krajnja pozicija zida, a zatim se generira dužina omeđena s te dvije točke. Tako su prepreke za slučaj prikazan na Slici 17 definirane na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= [2 \ 9 \ 3 \ 8 \ 6 \ 1] \\
 y_1 &= [2 \ 7 \ 8 \ 1 \ 4 \ 8] \\
 x_2 &= [2 \ 8 \ 7 \ 8 \ 5 \ 2] \\
 y_2 &= [4 \ 6 \ 9 \ 3 \ 6 \ 6]
 \end{aligned}$$

Tako uređeni par koordinata  $(x_1, y_1) = (2, 2)$  i  $(x_2, y_2) = (2, 4)$  definiraju prvi zid. U *Matlab* računalnom programu na temelju početne i krajnje pozicije dužina, vrši se diskretizacija zida te se tako dobiva skup točkastih prepreka. Kao početna pozicija mobilnog robota odabrana je točka  $(9, 5)$ , a pozicija cilja je  $(x_c, y_c) = (0, 4)$ . Valja napomenuti da u ovaj fazi rada orijentacija mobilnog robota nije potrebna jer se gibanje mobilnog robota promatra kao gibanje kuglice, koja nije pod utjecajem neholonomnih ograničenja i u svakom trenutku se može gibati u bilo kojem smjeru.

Za opis atraktivnog potencijala koristi se kvadratna funkcija (2), a biti će prikazani rezultati kada se za repulzivni potencijal koristi FIRAS funkcija (5) te eksponencijalna funkcija (7).

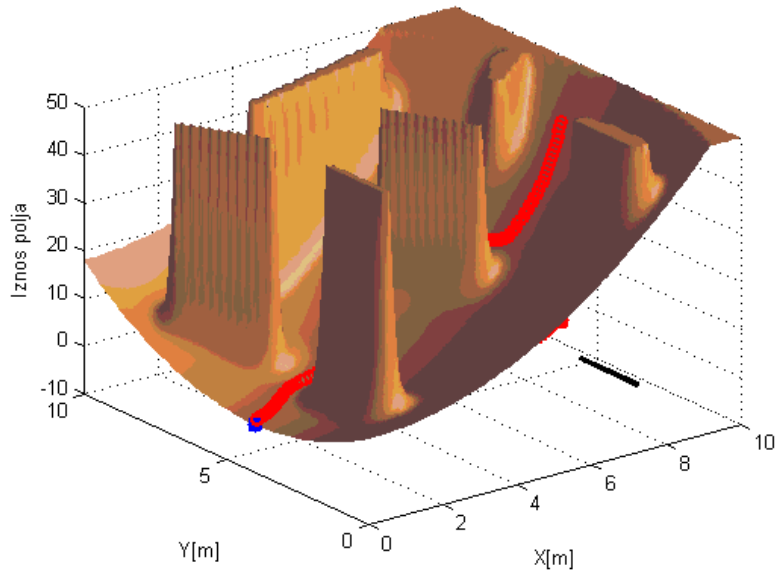
Slijede rezultati simulacije neholonomnog gibanja kuglice, za slučaj FIRAS funkcije kao repulzivnog potencijala kada se koriste izrazi (24) - (31).



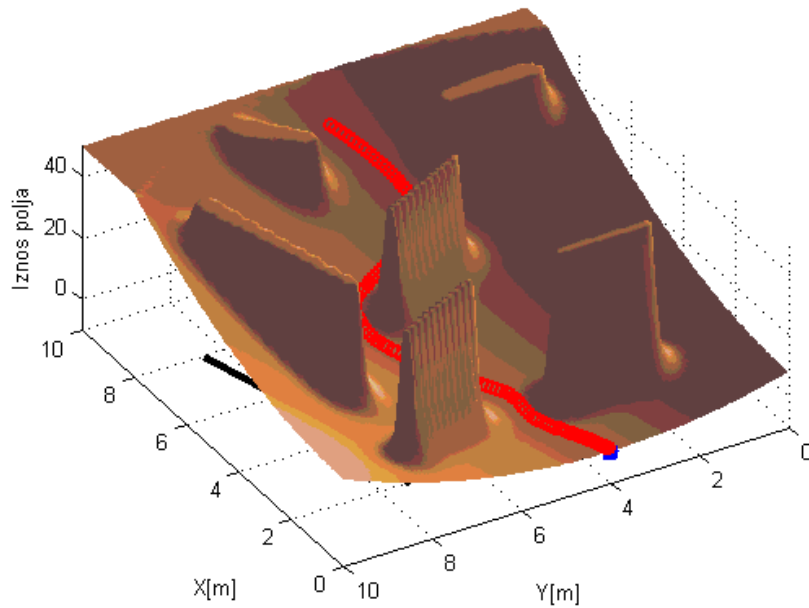
**Slika 18: Ukupno potencijalno polje s FIRAS funkcijom za repulzivni potencijal**

Slika 18 prikazuje generirano ukupno potencijalno polje kada se koristi FIRAS funkcija za opis repulzivnog potencijala. Vidljivo je da je ukupni potencijal ograničen na vrijednost 50. Ako se usporede Slika 17 i Slika 18 vidljivo je da se uzvisine formiraju iznad prepreka, kao rezultat repulzivnog potencijala, te da je minimum potencijala u točki

koja predstavlja cilj. Moguće je zamisliti da točku u kojoj se nalazi mobilni robot u početnom trenutku transliramo vertikalno na iznos potencijala u toj točki, te da se s te pozicije pusti fiktivna kuglica. Pod utjecajem gravitacije ona će se gibati prema minimumu dok ne dođe do cilja, što će rezultirati formiranjem referentne trajektorije na potencijalu. Takvo gibanje prikazano je na Slici 19 i Slici 20.

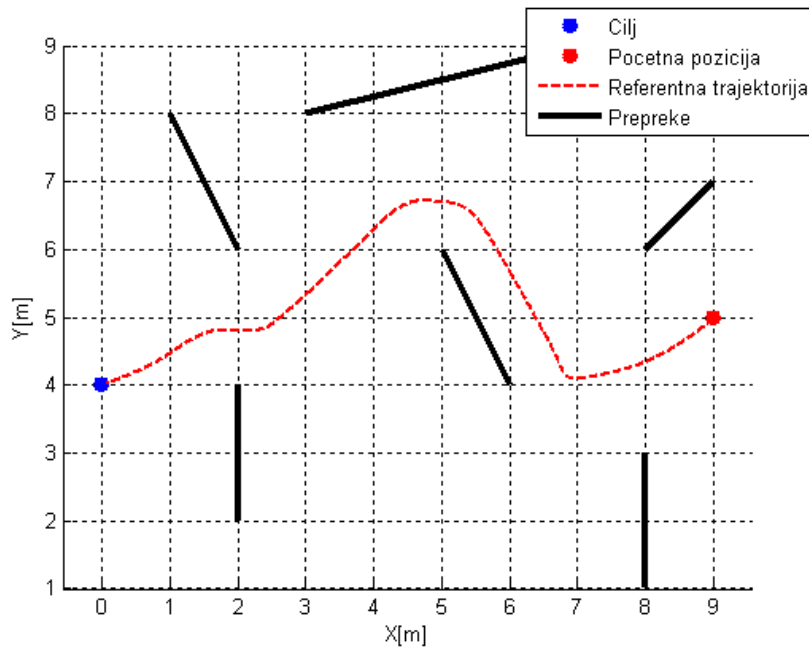


**Slika 19: Referentna trajektorija na potencijalnom polju**



**Slika 20: Referentna trajektorija na potencijalu gledana iz drugog kuta**

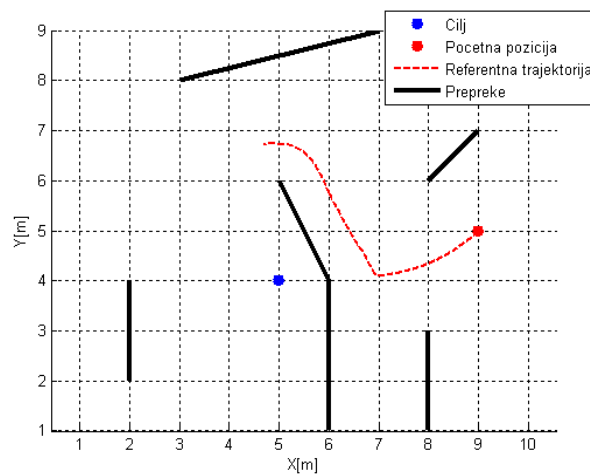
Sljedeći korak je projekcija referentne trajektorije na  $XY$  ravninu, odnosno na radni prostor, kako bi se grafički prikazala referentna trajektorija između prepreka (Slika 21).



**Slika 21: Referentna trajektorija u radnom prostoru**

Za gore navedenu simulaciju, parametri sustava za diferencijalne jednadžbe (52) i (53) su sljedeći:  $V_a = 0.2$ ,  $V_{b_1} = 0.2$ ,  $V_{b_2} = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $b_1 = 1$  i  $b_2 = 1$ .

Ovo je prilika da se pokaže i jedan od nedostataka metode, kada je cilj u blizini prepreke. Ako se za iste parametre sustava, promjeni pozicija cilja na način kako je prikazano na Slici 22, mobilni robot neće doći do cilja.

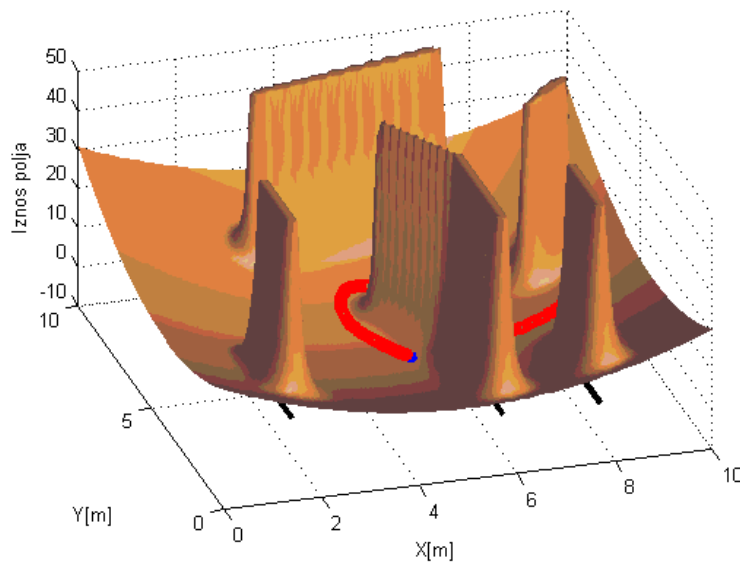


**Slika 22: Neuspješna trajektorija kada je cilj blizu prepreke**

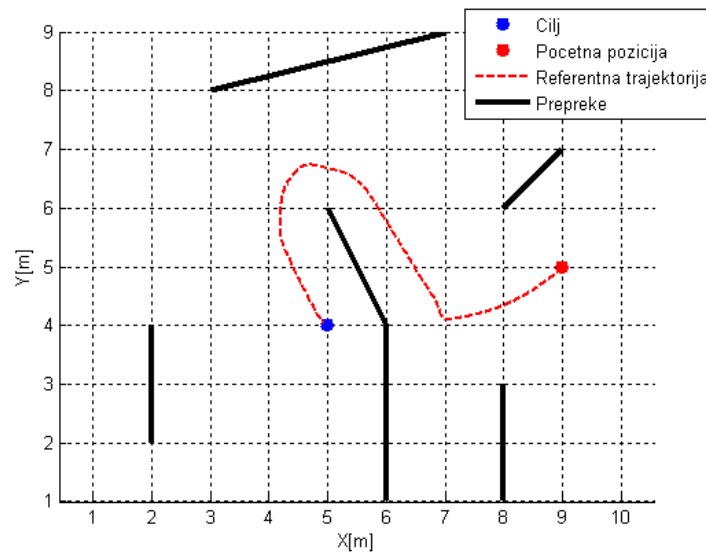


Razlog tomu je taj što se globalni minimum ne poklapa s pozicijom cilja jer je minimum atraktivnog potencijala preblizu prepreci koja generira repulzivni potencijal.

Taj problem je jednostavno moguće riješiti korištenjem modificirane FIRAS funkcije, koja se naziva Ge funkcija (8). Modificiranjem se postiže da je pozicija minimuma repulzivnog potencijala jednaka poziciji cilja, kao i kod atraktivnog potencijala. Rezultati simulacije kada se kao repulzivni potencijal koristi Ge funkcija su prikazani na Slici 23 i Slici 24.

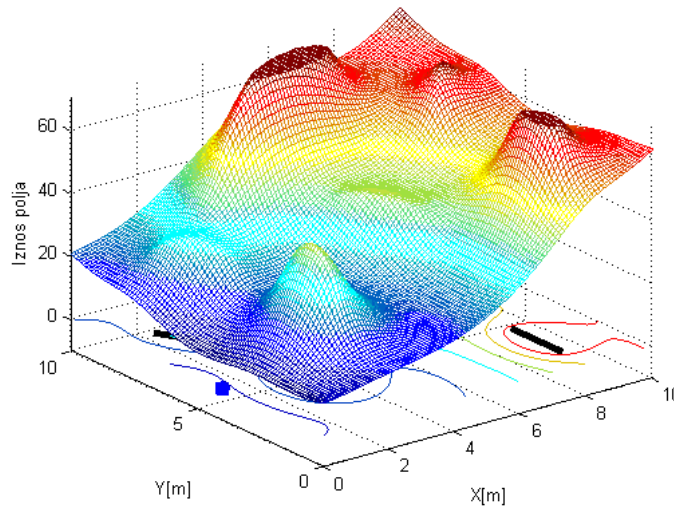


Slika 23: Referentna trajektorija kada se koristi Ge funkcija za repulzivni potencijal

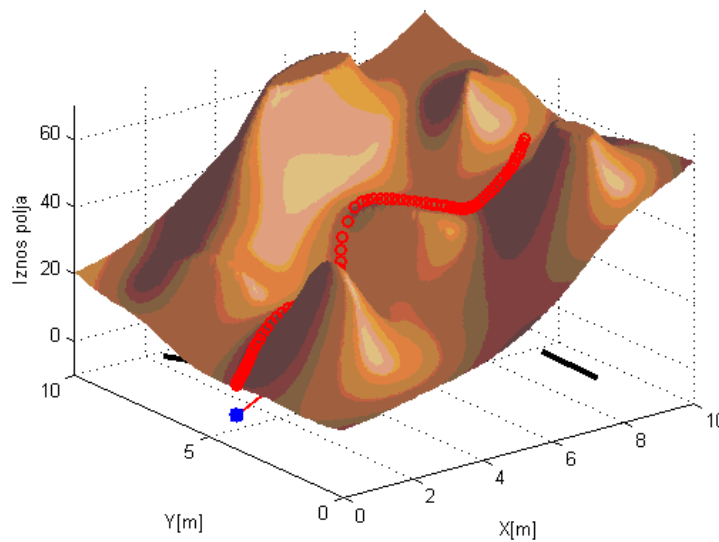


Slika 24: Uspješna trajektorija kada je cilj blizu prepreke

Za slučaj kada se ponovno koristi kvadratna funkcija za opis atraktivnog potencijala a eksponencijalna funkcija za opis repulzivnog potencijala u *Matlab* računalni program implementiraju se izrazi (32) - (35). Radni prostor je identičan onom prikazanom na Slici 17, a parametri sustava su sljedeći:  $V_a = 0.2$ ,  $V_{b_1} = 0.2$ ,  $V_{b_2} = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $b_1 = 3$  i  $b_2 = 3$ . Ukupno potencijalno polje koje se generira prikazano je na Slici 25:

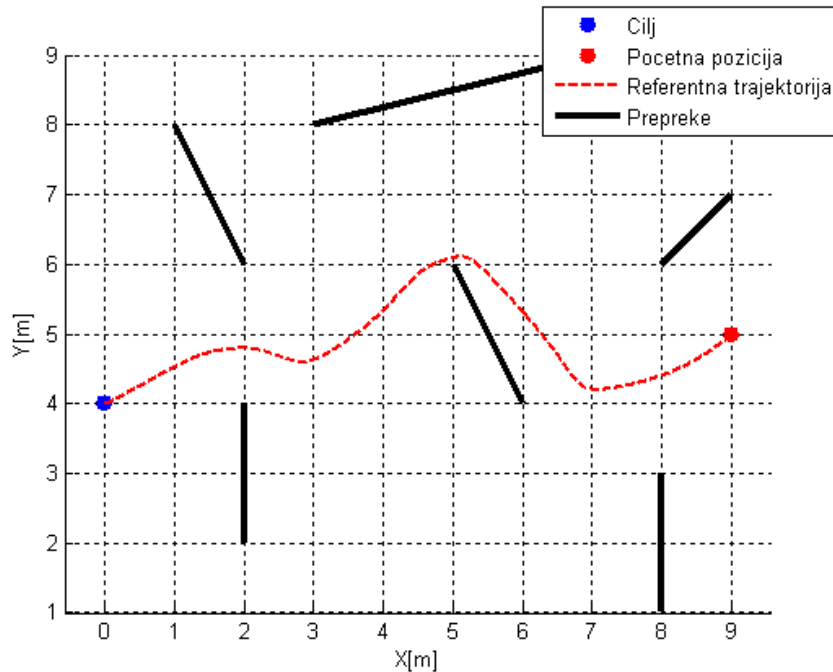


**Slika 25: Ukupno potencijalno polje s eksponencijalnom funkcijom za repulzivni potencijal**  
 Slika 26 prikazuje gibanje kuglice po potencijalnom polju od početne pozicije prema cilju.



**Slika 26: Referentna trajektorija na potencijalnom polju**

Za konačan prikaz referentne trajektorije u radnom prostoru, između prepreka, potrebno je projicirati gibanje kuglice po potencijalu na radni prostor, a rezultat je prikazan na Slici 27:



**Slika 27: Referentna trajektorija u radnom prostoru**

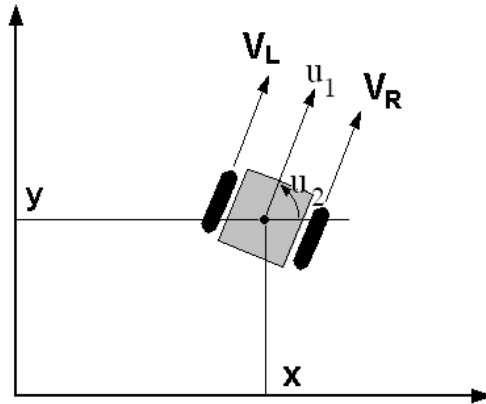
Jednom kada je generirana referentna trajektorija, koja predstavlja holonomno gibanje kuglice, odnosno holonomno gibanje robota potrebno je definirati kinematički model mobilnog robota, te upravljački zakon kako bi se osiguralo praćenje referentne trajektorije. U Matlabu, nakon numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi (52) i (53) kao izlaz se dobiva vektor pozicija  $x_r, y_r$ , odnosno svakom trenutku simulacije se pridodaje pozicija koju mobilni robot treba ostvariti.

### 3. Kinematički model mobilnog robota

U prvom poglavlju, u kojem se govori o mobilnim robotima, spomenuto je da postoji veliki broj mobilnih robota koji se međusobno razlikuju na temelju nekoliko karakteristika od kojih je i sustav za pokretanje. Tako postoje mobilni roboti s diferencijalnim pogonom (čiji se model koristi u ovom seminaru), mobilni roboti s pogonom kao kod automobila (eng. *car like mobile robots*), mobilni roboti s mogućnošću gibanja u svim smjerovima (eng. *omni directional mobile robots*), itd.

Prije no što se opiše kinematički model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom potrebno je objasniti pojam holonomnosti. U robotici, pojam holonomnosti odnosi se na odnos između upravljivosti i ukupnog broja stupnjeva slobode gibanja. Ako je broj upravljivih stupnjeva slobode gibanja jednak ukupnom broju stupnjeva slobode gibanja nekog robota tada se kaže da je taj robot holonoman i za takav robot predstavlja redundantan sustav. Ako je broj upravljivih stupnjeva slobode gibanja manji od ukupnog broja stupnjeva slobode gibanja tada je robot neholonoman. Tako je automobil neholonomni sustav jer ima tri stupnja slobode gibanja –  $x, y$  pozicija te njegova orijentacija, odnosno kut zakreta uzdužne osi u odnosu na os  $x$ , a ima samo dva upravljiva stupnja slobode gibanja. Upravljivi su akceleracija/kočenje i kut zakreta kotača, pomoću kojih se definira pozicija i orijentacija. Kretanje automobila (smjer u kojem se giba) uvijek je poravnato s orijentacijom automobila. Dakle, ako se zanemari bočno proklizavanje, kretanje automobila se uvijek podudara s njegovom orijentacijom i zbog toga je ponekad nemoguće ostvariti praćenje neke referentne trajektorije. Upravo zbog toga neholonomna ograničenja otežavaju bočno parkiranje i okretanje na cesti. Za razliku od navedenog primjera ljudska ruka je holonomni, redundantni sustava jer ima sedam stupnjeva slobode gibanja (tri u ramenu, dva u laktu i dva u zglobu iznad šake) a da se ostvari bilo koje gibanje u prostoru potrebno je šest stupnjeva slobode gibanja (translacija u  $x, y, z$  smjeru te rotacija oko  $x, y, z$  osi).

Mobilni robot s diferencijalnim pogonom prikazan je na Slici 28:



Slika 28: Mobilni robot s diferencijalnim pogonom

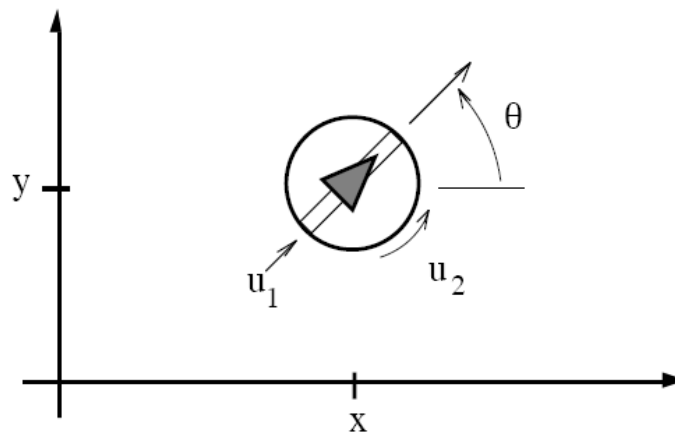
Mobilni robot se giba naprijed ili unazad ako su kutne brzine lijevog i desnog kotača istog predznaka i istog iznosa, a rotira ako su kutne brzine suprotnog predznaka ili ako jedan od kotača miruje, a drugi kotač ima kutnu brzinu. Ako je kutna brzina lijevog kotača  $\omega_L$ , a desnog kotača  $\omega_R$  te  $r$  radijus kotača tada su obodne brzine kotača:

$$V_L = r\omega_L, V_R = r\omega_R \quad (54)$$

Ako se razmak između kotača označi s  $L$  tada je moguće odrediti brzine  $u_1$  i  $u_2$  prikazane na Slici 29 koristeći izraz (54) kako slijedi:

$$u_1 = \frac{V_L + V_R}{2}, u_2 = \frac{V_L - V_R}{L} \quad (55)$$

Model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom prikazan je na Slici 29.



Slika 29: Model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom

Kod kinematičkog modela mobilnog robota s diferencijalnim pogonom vrijedi  $X = [x, y, \theta]$ , pri čemu je  $(x, y)$  uređeni par koji predstavlja koordinate mobilnog robota u Kartezijevom koordinatnom sustavu, a  $\theta$  je kut zakreta uzdužne osi robota u odnosu na os  $x$ . Kinematički model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom koji slijedi sa Slike 29 je:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta \cdot u_1 \\ \dot{y} &= \sin \theta \cdot u_1 \\ \dot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{56}$$

ili

$$\dot{X} = G(X)u\tag{57}$$

pri čemu je  $u_1$  linearna brzina a  $u_2$  je kutna brzina mobilnog robota.

Mobilni robot s diferencijalnim pogonom također je kao automobil neholonoman sustav, koji ima dva upravljiva stupnja slobode gibanja,  $u_1$  i  $u_2$ , od ukupno tri stupnja slobode gibanja (pozicija  $x$ ,  $y$  i orijentacija).

Neholonomno ograničenje je slijedeće:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ \dot{y} \\ y \end{bmatrix} = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0\tag{58}$$

## 4. Neizrazita logika

Nakon što je formiran kinematički model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom potrebno je definirati upravljački zakon. Zadaća upravljačkog zakona je definiranje upravljačkih veličina  $u_1$  i  $u_2$  (u ovisnosti o referentnoj trajektoriji) koje osiguravaju da mobilni robota prati referentnu trajektoriju dobivenu metodom potencijalnih polja. Upravljački zakon izveden je na temelju analitičke neizrazite logike te je stoga prvotno potrebno definirati neizrazitu logiku.

Koncept neizrazite logike uveden je 1965. godine u sklopu teorije neizrazitih skupova. Uvođenjem neizrazite logike omogućeno je modeliranje semantičkih neodređenosti govornog jezika. Iako se je očekivala primjena neizrazite logike u društvenim znanostima, područje pune afirmacije postala je tehnika, u kojoj se koristi u širokom rasponu industrijskih i znanstvenih primjena. Prva industrijska realizacija zabilježena je u procesu proizvodnje cementa, a nagli porast zanimanja za neizrazitu logiku i intenziviranje istraživanja počinje nakon uspješnih primjena u japanskim proizvodima široke potrošnje. Danas su najznačajnija područja tehničke primjene neizrazite logike: automatska regulacija, analiza podataka, te sustavi za nadzor i regulaciju. Neizrazita logika osigurava formalnu metodologiju za prikazivanje, manipulaciju i implementaciju ljudskog (ekspertnog) znanja o problemu regulacije procesa, što je i glavni razlog zašto je većina radova i primjena neizrazite logike povezana s područjem automatske regulacije.

### 4.1. Neizraziti skupovi i funkcijska pripadnost

U klasičnoj teoriji skupova skup predstavlja kolekciju objekata koji dijele neko zajedničko svojstvo. Pripadnost objekta klasičnom skupu egzaktno je određena: ili je objekt unutar skupa ili je izvan njega (1 ili 0). Ako se pripadnost objekta skupu želi izraziti funkcijski, tada funkcija pripadnosti objekta  $x$  skupu  $A$ ,  $\mu_A(x)$  ima samo dvije vrijednosti i definirana je s:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in A \\ 0, & \text{za } x \notin A \end{cases} \quad (59)$$

Skupovi klasične teorije često se nazivaju i izraziti.

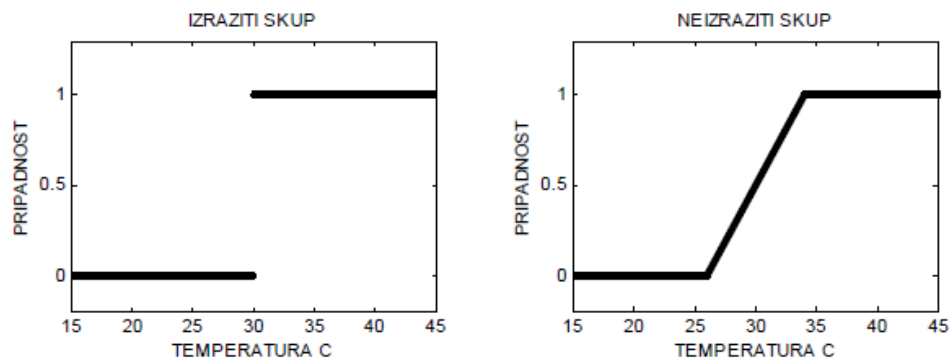
U nekim podjelama objekata na skupove stroge definicije pripadnosti nisu prikladne, jer koji put nije moguće odrediti zadovoljavajuću izrazitu granicu između objekata. Kao tipičan primjer često se navodi problem matematičkog opisa ljudske percepcije temperature okoline, gdje se po iznosu vrlo bliske numeričke vrijednosti mogu naći u različitim skupovima. Tako npr. osoba upitana za klasifikaciju temperatura zraka, u skupu *vruće* može smjestiti sve temperature veće od 30°C, dok će intuitivno vrlo bliska vrijednost od 29.9°C pripadati drugom skupu (npr. *toplo*). Simbolički zapis izrazitog skupa *vruće* preko funkcije pripadnosti bio bi sljedeći:

$$\mu_{vruće}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \geq 30^\circ\text{C} \\ 0, & \text{za } x < 30^\circ\text{C} \end{cases} \quad (60)$$

Za razliku od tradicionalnog pristupa, teorija neizrazitih skupova dopušta djelomičnu ili stupnjevanu pripadnost elementu skupa, a funkcijske vrijednosti funkcije pripadnosti nalaze se unutar intervala  $[0,1]$ . Pri tome vrijednost 0 označava da je objekt potpuno izvan skupa, 1 da je potpuno unutar skupa, a bilo koja vrijednost između označava djelomičnu pripadnost. Tako bi se neizraziti skup *vruće* (Slika 30) mogao definirati s:

$$\mu_{vruće}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x > 34^\circ\text{C} \\ (x - 26) / 8 & \text{za } 26^\circ\text{C} \leq x \leq 34^\circ\text{C} \\ 0, & \text{za } x < 26^\circ\text{C} \end{cases} \quad (61)$$

Ovakva definicija znatno je bliža načinu na koji čovjek doživljava i u govoru interpretira osjet temperature okoline.



Slika 30: Funkcije pripadnosti izrazitog i neizrazitog skupa *vruće*



Neizraziti skup određen je funkcijom pripadnosti. Način zadavanja funkcije pripadnosti najviše ovisi o karakteru objekata ili podataka koji se grupiraju (brojivi ili nebrojivi, diskretni ili kontinuirani) odnosno tipu domene (područje definicije) nad kojom se zadaju. Najčešće korištene funkcije pripadnosti su: trokutna, trapezna, nagibna i zvonolika.

## 4.2. Operacije nad neizrazitim skupovima

Unija, presjek i komplement osnove su teoretske operacije definirane nad klasičnim skupovima (Slika 31). Te su operacije ujedno i podloga operacijama disjunkcije, konjunkcije i negacije u klasičnoj (binarnoj) logici. Na sličan način na koji klasična teorija skupova predstavlja temelj klasične logike, teorija neizrazitih skupova temelj je neizrazite logike. Veza je uspostavljena preko definicije osnovnih operacija nad skupovima i njihovih logičkih ekvivalenata. Proširenje skupa funkcijskih vrijednosti funkcije pripadnosti sa samo dvije ( $\{0,1\}$ ) u klasičnoj, na čitav interval ( $[0,1]$ ) u neizrazitoj teoriji omogućilo je i znatno veći broj definicija osnovnih operacija nad neizrazitim skupovima.

Operacije s neizrazitim skupovima dobivaju se kao direktna generalizacija operacija s klasičnim skupovima i definiraju se preko njihovih funkcija pripadnosti.

Presjek neizrazitih skupova ( $A \cap B$ ) definiran je sa:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \text{ za } x \in U.$$

Unija neizrazitih skupova ( $A \cup B$ ) definirana je sa:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \text{ za } x \in U.$$

Komplement neizrazitog skupa  $A$  ( $\bar{A}$ ) definiran je sa:

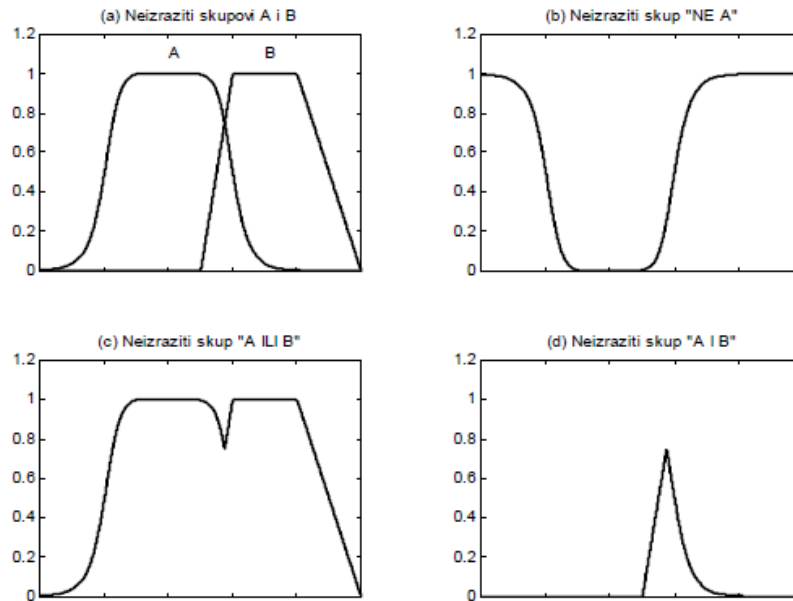
$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \text{ za } x \in U.$$

U formiranju kvantitativnih modela ljudskog razmišljanja polazi se od neizrazite propozicije. Općeniti oblik *neizrazite propozicije* dat je s “ $x$  je  $A$ ”, gdje je  $A$  jezična vrijednost zadana s neizrazitim skupom nad domenom varijable  $x$ . Neizrazita propozicija uspoređuje varijablu  $x$  i skup  $A$ , odnosno stupanj pripadnosti varijable  $x$  neizrazitom

skupu A. U općem slučaju varijabla  $x$  može biti izrazita (numerička) ili neizrazita (neki neizraziti skup).

Za povezivanje propozicija koriste se riječi *I*, *ILI*, te *AKO – ONDA*. Kombinacijom propozicija i veznika nastaje neizrazito pravilo koje u općem slučaju ima oblik:

*AKO x je A I y je B ONDA z je C*



**Slika 31: Osnovne operacije nad neizrazitim skupovima**

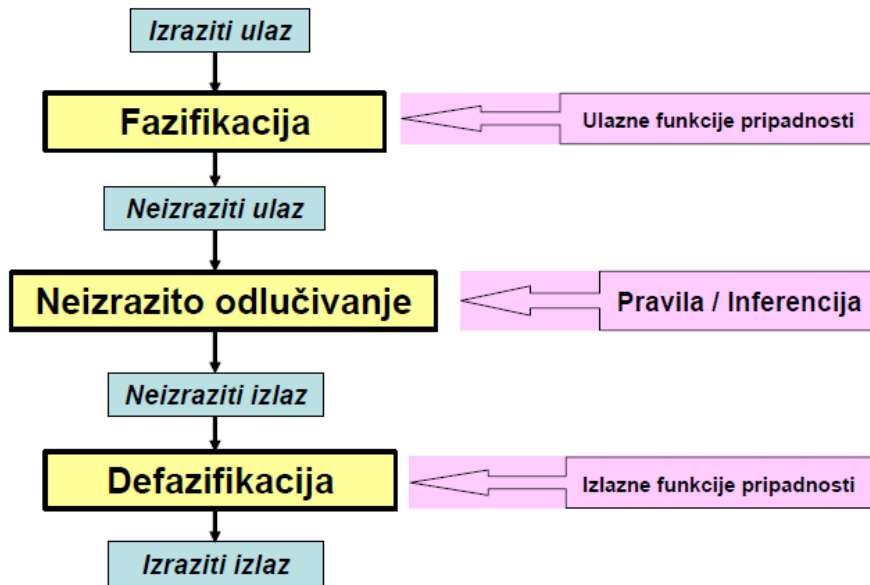
gdje “ $x$  je A I  $y$  je B” predstavlja premisu ili uvjet, a “ $z$  je C” zaključak ili posljedicu pravila. Slična pravila koriste se u svakodnevnom govoru za opisivanje različitih pojava, kao npr.: ako je brzina velika i nadolazeći zavoj je oštar, onda je kočenje naglo.

Za opis odabranog procesa, sustava ili događaja obično je potreban veći broj pravila pa se često govori i o skupu odnosno bazi neizrazitih pravila.

### **4.3. Neizrazito upravljanje**

Neizraziti skupovi, kojima opisujemo neprecizne pojmove, i neizrazita logika, kao formalna metodologija rezoniranja, čine osnovu neizrazitih sustava. Neizraziti sustavi je skupni naziv za neizrazite ekspertne sustava, neizrazitu teoriju odlučivanja, neizrazito upravljanje, itd. Osnovu svih neizrazitih sustava čine slijedeća tri postupka: omekšavanje

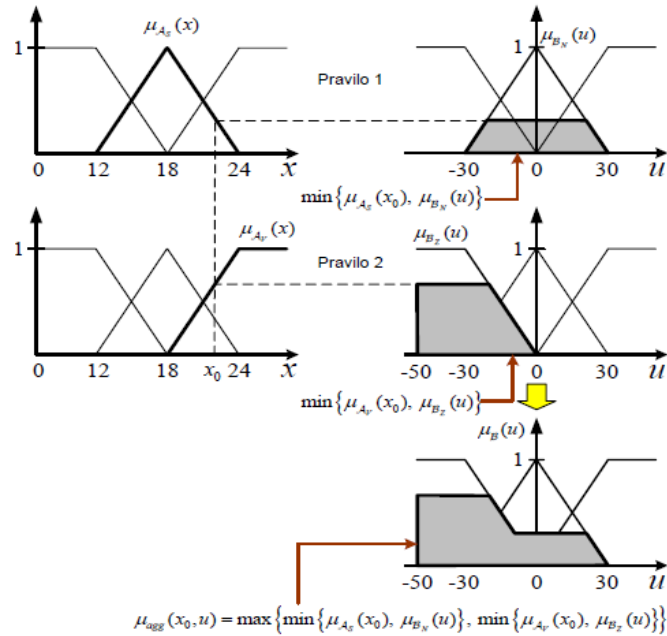
ili fazifikacija (eng. *fuzzyfication*), inferencija ili proces odlučivanja te izoštravanje ili defazifikacija (eng. *defuzzyfication*), Slika 32:



Slika 32: Osnovni postupci neizrazitih sustava

Omekšavanje ili fazifikacija je proces transformiranja ulaznih izrazitih vrijednosti u stupnjeve pripadnosti ulaznih neizrazitih skupova. Središnji dio tog postupka je određivanje ulaznih i izlaznih (jezičnih) varijabli, zatim određivanje područja definicije navedenih varijabli te određivanje broja i oblika funkcija pripadnosti koje prekrivaju područje definicije pojedinih jezičnih varijabli.

Drugi korak je inferencija ili proces odlučivanja, a to je proces transformiranja ulaznih neizrazitih skupova u neizrazite izlazne skupove. Središnji dio tog postupka je određivanje baze pravila ponašanja u obliku *AKO – ONDA* pravila. Baza pravila ponašanja predstavlja formalizirani oblik znanja eksperata ili operatera. Primjenom Mamdanijeve definicije neizrazite logičke implikacije (*min* operator), te primjenom definicije neizrazitog zbrajanja (*max* operator) dobivamo konačan izraz za agregiranu izlaznu funkciju pripadnosti. Slika 33 prikazuje primjer inferencije prilikom regulacije temperature za slučaj ulazne temperature  $x_0 = 22^{\circ}\text{C}$ .



**Slika 33: Regulacija temperature**

Posljednji korak je izoštravanje odnosno defazifikacija pri čemu dolazi do transformiranja neizraženih izlaznih skupova u izražene izlazne vrijednosti. Taj proces je nužan kod neizraženih regulatora s obzirom da izvršni član (aktuator) može raditi samo s izraženim vrijednostima. Ne postoji jedinstven način procesa defazifikacije, ali najčešće se koristi metoda težišta (eng. *center of area method* ili *center of gravity method*). Metoda težišta bazirana je na klasičnim formulama za izračunavanje koordinata težišta geometrijskih tijela

$$u_0 = \frac{\int u \cdot \mu_{agg}(x, u) du}{\int \mu_{agg}(x, u) du} \quad (62)$$

a u slučaju trokutastih i trapeznih funkcija pripadnosti gornji se izraz svodi na sumiranje po dijelovima trokutastih i pravokutnih površina. Cijeli postupak fazifikacija-inferencija-defazifikacija predstavlja proceduru nelinearnog statičkog preslikavanja izražene ulazne vrijednosti u izrazitu izlaznu vrijednost.

Kod neizraženog upravljanja neizraziti regulator predstavlja neizraziti sistem gdje su ulazne varijable pogreške tj. odstupanje od željenog referentnog stanja, a izlazi su upravljačke varijable. Upravo takva situacija se pojavljuje u ovom radu, gdje su ulazne veličine odstupanje pozicije mobilnog robota od referentne pozicije te vektorski produkt

vektora pozicije mobilnog robota i vektora referentne pozicije, a izlazne veličine su upravljačke veličine.

U radu se koristi analitički neizraziti regulator gdje je preslikavanje izrazite ulazne vrijednosti u izrazitu izlaznu vrijednost prikazano jednostavnim analitičkim funkcijama.

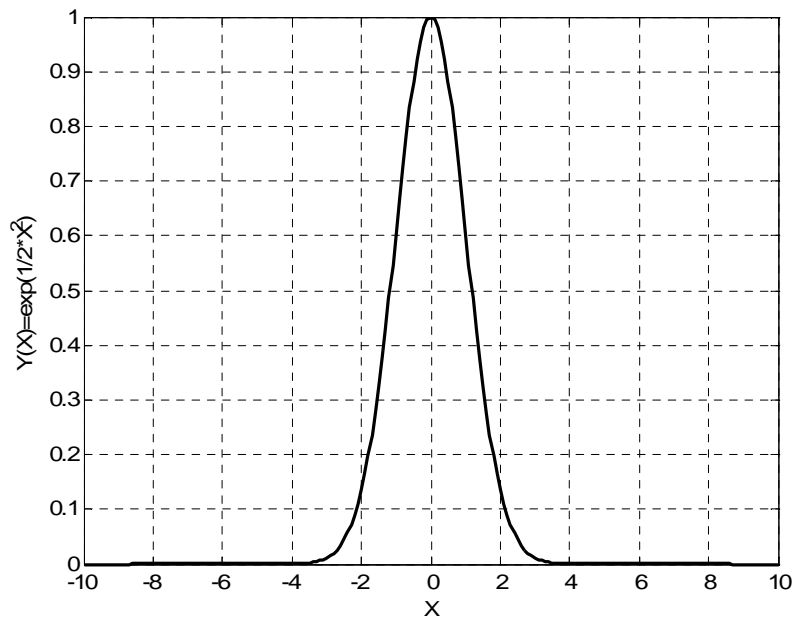
Sljedeći primjer prikazuje jedan takav analitički neizraziti regulator. Pretpostavimo sljedeću bazu pravila ponašanja u obliku dva *AKO – ONDA* pravila:

$$\begin{aligned} \text{AKO } x \text{ je mali TADA } y \text{ je velik} \\ \text{AKO } x \text{ je velik TADA } y \text{ je mali} \end{aligned} \quad (63)$$

Bazu pravila (63) moguće je zamijeniti analitičkom funkcijom sljedećeg oblika:

$$y(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (64)$$

Funkcija (64) je Gaussova funkcija i njeno ponašanja odgovara bazi pravila (63) što je i vidljivo sa Slike 34 na kojoj je prikazana dotična funkcija.



**Slika 34: Gaussova funkcija**

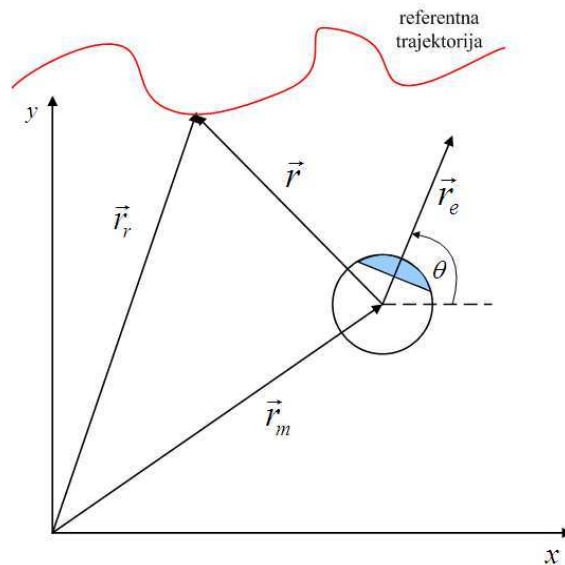
Sa Slike 34 vidljivo je da *AKO* je  $x$  mali *ONDA* je vrijednost  $y$  velika, odnosno *AKO* je  $x$  velik *ONDA* je vrijednost  $y$  mala (točnije bi bilo govoriti umjesto  $x$ ,  $|x|$ ).

Dakle, ideja je da nakon što se generira referentna trajektorija primjenom metode potencijalnih na temelju određene baze podataka koja je opisana analitičkim funkcijama kao izlaz dobiju upravljačke veličine koje uvedene u kinematički model mobilnog robota osiguravaju njegovo gibanje prema referentnoj poziciji.

## 5. Upravljački zakon

Korištenjem programskog paketa Matlab i funkcije *ode45* za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi, rješavaju se diferencijalne jednadžbe (52) i (53) čime se dobiva referentna pozicija mobilnog robota  $(x_r, y_r)$  koja se zatim uvrštava u upravljački zakon mobilnog robota.

Upravljački zakon mobilnog robota izveden je korištenjem kinematike točke i krutog tijela, a konačna implementacija, odnosno regulator je analitički neizraziti regulator izveden na osnovu niza pravila iz baze pravila ponašanja.



Slika 35: Vektori potrebni za izvod upravljačkih veličina

Slika 35 prikazuje mobilni robot te referentnu trajektoriju koju mobilni robot treba pratiti na način da vektor  $\vec{r}$  teži prema nul-vektoru,  $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$ .

Na Slici 35 su definirani sljedeći vektori:

- vektor pozicije mobilnog robota  $\vec{r}_m$

$$\vec{r}_m = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (65)$$

- vektor referentne pozicije pokretnog cilja u trenutku  $t$   $\vec{r}_r$

$$\vec{r}_r = x_r(t)\vec{i} + y_r(t)\vec{j} \quad (66)$$

- vektor udaljenosti robota od cilja  $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}_r - \vec{r}_m = (x_r - x)\vec{i} + (y_r - y)\vec{j} \quad (67)$$

- vektor orijentacije mobilnog robota  $\vec{r}_e$

$$\vec{r}_e = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad (68)$$

Za daljnji izvod potrebno je definirati normirani vektor vektora udaljenosti i normirani vektorski produkt vektora orijentacije i vektora udaljenosti. Norma vektora udaljenosti robota od cilja je

$$no = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2} \quad (69)$$

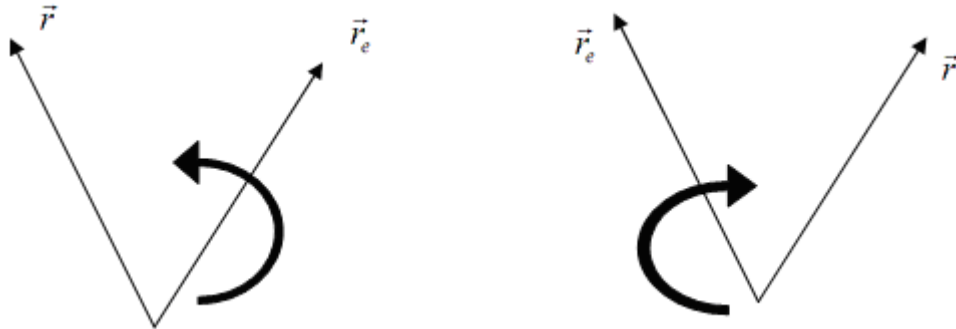
Vektorski produkt vektora orijentacije i vektora udaljenosti je sljedeći:

$$\vec{r}_e \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ x_r - x & y_r - y & 0 \end{vmatrix} = [(y_r - y)\cos \theta - (x_r - x)\sin \theta]\vec{k} \quad (70)$$

Iz (69) i (70) slijedi normirani vektorski produkt vektora orijentacije i vektora udaljenosti:

$$vp = \frac{\vec{r}_e \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad (71)$$

Ako se razmotri Slika 36 vidljivo je da je po pravilu desne ruke u prvom slučaju vektorski produkt pozitivan, odnosno u drugom slučaju da je vektorski produkt negativan.



Slika 36: Pozitivan (lijevo) i negativan (desno) vektorski produkt

Pošto je  $\vec{r}_e$  vektor orijentacije mobilnog robota, a cilj je da se mobilni robot giba prema referentnoj poziciji (smjer vektora  $\vec{r}$ ) treba osigurati da se kut između vektora  $\vec{r}_e$  i vektora  $\vec{r}$  smanji, a to se postiže povećanjem kutne brzine mobilnog robota  $u_2$  na odgovarajući način. Dakle, na Slici 36 lijevo vidljivo je da porast kutne brzine mobilnog robota  $u_2$  u pozitivnom smjeru (Slika 29 i izraz (56)) smanjuje taj kut. Suprotno tome na Slici 36 desno vidljivo je da se porastom kutne brzine u negativnom smjeru smanjuje taj kut.

Iz toga se može izvući zaključak da ako je vektorski produkt pozitivan tada i  $u_2$  treba biti pozitivan odnosno, ako je vektorski produkt negativan tada je i  $u_2$  negativan. Taj zaključak daje prva dva pravila oblika *AKO – ONDA* za bazu pravila ponašanja neizrazitog regulatora:

$$\begin{aligned} \text{AKO } (vp \text{ je pozitivan}) \text{ ONDA } (u_2 \text{ je pozitivan}) \\ \text{AKO } (vp \text{ je negativan}) \text{ ONDA } (u_2 \text{ je negativan}) \end{aligned} \quad (72)$$

Time je definirano preslikavanje ulazne veličine (vektorski produkt) u izlaznu veličinu (kutna brzina mobilnog robota). Ovakav način definiranja predstavlja samo heuristička pravila, a pošto je cilj seminara dobiti analitički neizraziti regulator konkretno analitičko



preslikavanje biti će obrađeno uskoro, ali prije toga potrebno je definirati zakon preslikavanja za linearnu brzinu mobilnog robota  $u_1$ .

Da bi se dobila pravila za linearnu brzinu  $u_1$ , prvotno će se razmotriti jedan problem blizak svakom vozaču automobila. Moguće je zamisliti situaciju u kojoj se vozač nalazi na parkiralištu i u daljini vidi jedno slobodno parkirno mjesto. Ako je to mjesto relativno udaljeno vozač slobodno može ubrzati automobil i voziti se prema tom mjestu. U trenutku kada procjeni da je relativno blizu počinje kočiti i smanjivati brzinu, sve dok ne dođe nadomak parkirnog mjesta kada jako uspori kako bi se mogao parkirati. Kada se parkira, odnosno kad se pozicija automobila poklapa s pozicijom parkirnog mjesta, vozač u potpunosti zaustavi automobil i brzina automobila jednaka je nuli. Ako taj primjer povežemo sa mobilnim robotom moguće je pretpostaviti da brzina mobilnog robota treba biti proporcionalna udaljenosti od referentne pozicije.

Kako mobilni robot uvijek teži referentnoj poziciji, te kako je norma vektora udaljenosti korijen zbroja kvadrata iznos norme ne može biti negativan.

Sada je moguće definirati pravila preslikavanja norme vektora udaljenosti u linearnu brzinu mobilnog robota  $u_1$ .

$$\begin{aligned} \text{AKO (no je pozitivna velika) ONDA (} u_1 \text{ je pozitivan velik)} \\ \text{AKO (no je pozitivna srednja) ONDA (} u_1 \text{ je pozitivan srednji)} \\ \text{AKO (no je nula) ONDA (} u_1 \text{ je nula)} \end{aligned} \quad (73)$$

Potrebno je dodati još pravila u bazu pravila ponašanja jer dosada još nije bilo riječi o ovisnosti linearne brzine mobilnog robota  $u_1$  s normiranim vektorskim produktom  $vp$ , odnosno kako regulirati iznos linearne brzine mobilnog robota prilikom zakretanja.

Poznato je da brzina automobila u zavoju mora biti manja od brzine na ravnom dijelu ceste. Ako se to heurističko pravilo primjeni na mobilni robot dolazi se do sljedećih pravila:

$$\begin{aligned} \text{AKO (} vp \text{ je pozitivan velik) ONDA (} u_1 \text{ je mali)} \\ \text{AKO (} vp \text{ je pozitivan mali) ONDA (} u_1 \text{ je velik)} \\ \text{AKO (} vp \text{ je negativan velik) ONDA (} u_1 \text{ je mali)} \\ \text{AKO (} vp \text{ je negativan mali) ONDA (} u_1 \text{ je velik)} \end{aligned} \quad (74)$$

Ovime je baza pravila ponašanja potpuna i sada je potrebno ta pravila preoblikovati u analitički neizraziti regulator, odnos odrediti sljedeće funkcije:

$$u_1 = u_1(vp, no) \quad (75)$$

$$u_2 = u_2(vp) \quad (76)$$

Prvo će se definirati funkcijska ovisnost  $u_1$  o veličinama  $vp$  i  $no$ . Ako se razmotre pravila ponašanja (73) vidljiva je klasična linearna ovisnost tipa

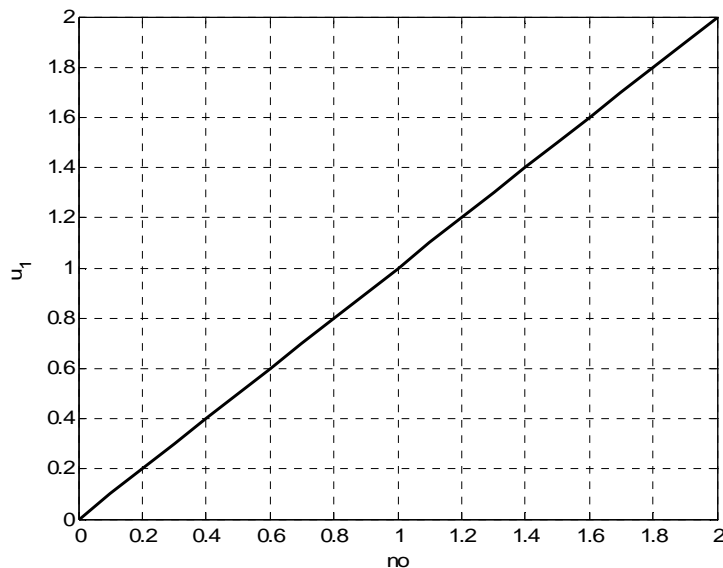
$$u_1 = K_1 \cdot no \quad (77)$$

pri čemu je  $K_1$  neki pozitivan realan broj. Slika 37 prikazuje ovisnost  $u_1$  o  $no$  za  $no \in [0, 2]$  te  $K_1 = 1$ .

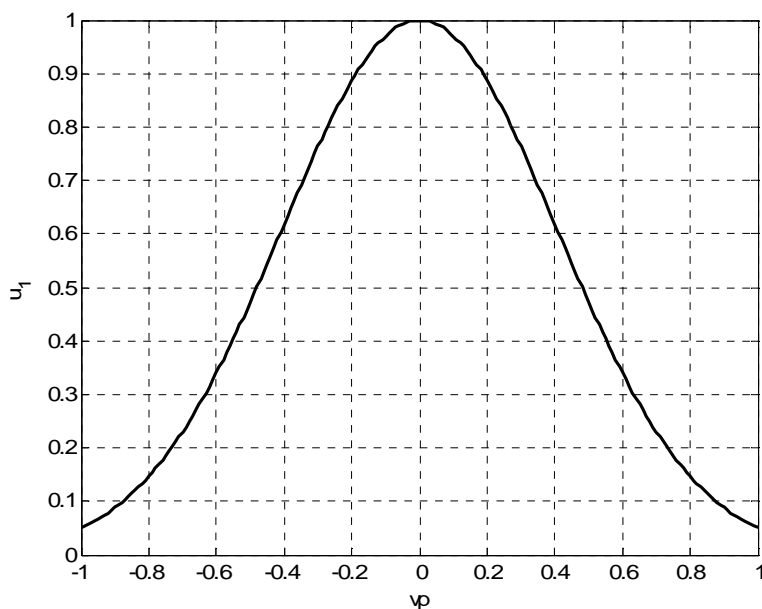
Pravila ponašanja (74) jednaka su primjeru koji je iznesen prije u radu ((63), Slika 34). Ta pravila opisuju Gaussovu krivulju na način da vrijedi sljedeće:

$$u_1 = K_2 \cdot \exp(-K_3 \cdot vp^2) \quad (78)$$

pri čemu su  $K_2$  i  $K_3$  neki pozitivni realni broj. Slika 38 prikazuje ovisnost  $u_1$  o  $vp$  za  $vp \in [-1, 1]$ ,  $K_2 = 1$  i  $K_3 = 3$ .



Slika 37: Funkcija  $u_1 = K_1 \cdot no$



**Slika 38: Funkcija  $u_1 = K_2 \cdot \exp(-K_3 \cdot v p^2)$**

Usporedi li se Slika 37 sa pravilima (73), te slika 38 sa pravilima (74) vidljivo je da funkcije (77), odnosno (78) dobro opisuju pravila ponašanja. Pošto je potrebno definirati ovisnost (75), potrebno je povezati dobivene funkcije kako bi se dobio analitički neizraziti regulator za upravljačku veličinu  $u_1$ . Ovdje će se iskoristiti neizrazite relacije, kojima je moguće modelirati jezične izraze koji se sastoje od više propozicija poput “ $x$  je velik  $I$   $y$  je jako mali”. U slučaju izvoda upravljačke veličine  $u_1$  potrebno je koristiti direktni *min* produkt, odnosno logičko množenje.

To se postiže na način da se izraz  $K_1 \cdot no$  pomnoži s izrazom  $K_2 \cdot \exp(-K_3 \cdot v p^2)$  čime se dobiva željeni regulator:

$$u_1 = K_1 \cdot no \cdot K_2 \cdot \exp(-K_3 \cdot v p^2) \quad (79)$$

Parametre  $K_1$  i  $K_2$  moguće je zamijeniti na način da vrijedi  $k_4 = K_1 \cdot K_2$ , a parametar  $K_3$  će u simulacijama biti jednak -3, te tada upravljačka veličina  $u_1$  poprima sljedeći oblik:

$$u_1 = k_4 \cdot \exp(-3 \cdot v p^2) \cdot no \quad (80)$$

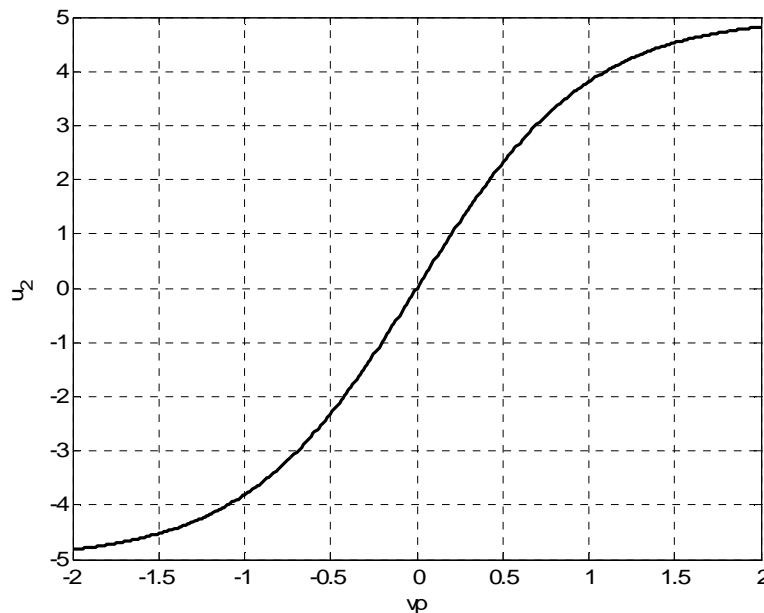
Nakon što je izveden upravljački zakon za  $u_1$ , na isti način se izvodi upravljačka veličina  $u_2$ . Potrebno je razmotriti pravila ponašanja (72), iz kojih je vidljiva linearna ovisnost  $u_2$  o veličini  $vp$ . Moguće je koristiti izraz  $u_2 = k_5 \cdot vp$  kao konačan izraz, ali se u ovom radu koristi modificirani oblik. Naime, kako bi se osigurala potpuna upravljivost iznosa upravljačke veličine  $u_2$  pomoću parametra  $k_5$  koristi se sljedeći izraz:

$$u_2 = k_5 \cdot \tanh(vp) \quad (81)$$

Funkcija  $\tanh$  ograničava veličinu  $vp$ , na način da je  $\tanh(vp) \in [-1,1]$  i zbog toga je upravljačka veličina  $u_2$  uvijek unutar sljedećih granica:  $u_2 \in [-k_5, k_5]$ .

Ako se pravilno odabere faktor  $k_5$  osigurava se da maksimalna kutna brzina mobilnog robota bude u fizikalno gledano realnim, odnosno izvedivim okvirima.

Slika 39 prikazuje funkciju (81) za  $vp \in [-1,1]$  te  $k_5 = 5$ .



**Slika 39: Funkcija  $u_2 = k_5 \cdot \tanh(vp)$**

Ovime je završen izvod upravljačkih veličina  $u_1$  i  $u_2$ , koje su bazirane na analitičkom neizravnom upravljanju. Dakle, nakon što se detektiraju prepreke, metodom potencijalnih polja traži se referentna trajektorija i kada je ona definirana na temelju trenutne pozicije

$(x, y)$  i referentne pozicije  $(x_r, y_r)$  određuju se veličine  $no$  i  $vp$ . Te veličine su ulazne varijable u analitički neizraziti regulator koji kao izlaze daje upravljačke veličine  $u_1$  i  $u_2$ .

Veličine  $u_1$  i  $u_2$  uvode se u kinematički model mobilnog robota (56).

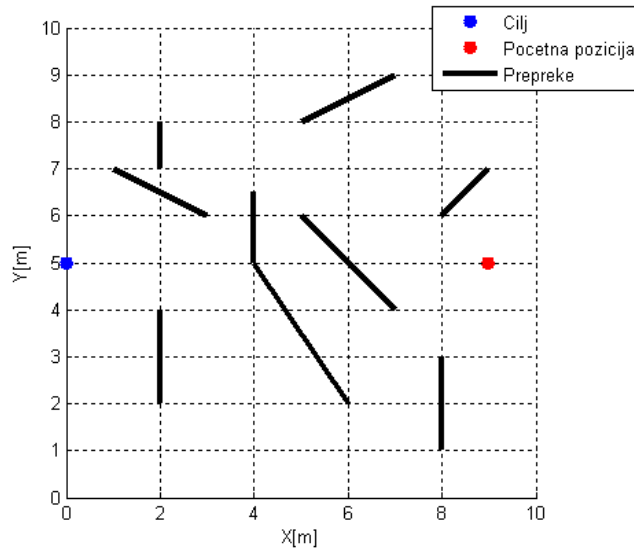
Korištenjem funkcije *ode45* za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi rješavaju se diferencijalne jednadžbe kinematičkog modela i kao rezultat dobiva se nova pozicija mobilnog robota  $(x, y)$ . Taj postupak se ponavlja onoliko dugo koliko je u *Matlabu* definirano vrijeme simulacije, a cilj je da u tom vremenu mobilni robot dođe iz početne u krajnju poziciju.

### **5.1. Provjera ispravnosti upravljačkog zakona**

Kada su definirani upravljački zakon te kinematički model mobilnog robota, a u prethodnim poglavljima je ispitana valjanost generiranja referentne trajektorije metodom potencijalnih polja, potrebno je izvršiti cjelokupnu simulaciju. Valja napomenuti da će prvotno biti prikazani rezultati simulacije kada mobilni robot, odnosno metoda potencijalnih polja imaju u svakom trenutku saznanje o svim preprekama u radnom prostoru. Za razliku od toga, kasnije će se prikazati simulacije kada mobilni robot detektira prepreke za vrijeme svojeg gibanja prema cilju, što je i osnovni zadatak ovog diplomskog rada.

Cjelokupni postupak je sljedeći: metoda potencijalnih polja na temelju trenutne pozicije mobilnog robota, te na temelju rasporeda prepreka i cilja generira potencijalno polje radnog prostora. Izjednačavanjem brzine holonomnog gibanja kuglice koja se giba po polju s negativnim gradijentom polja postavljaju se diferencijalne jednadžbe. Rješavanjem tih diferencijalnih jednadžbi dobiva se referentna trajektorija. Uvrštavanjem referentnih pozicija i trenutnih pozicija robota u upravljački zakon generiraju se upravljačke veličine koje se uvrštavaju u kinematički model mobilnog robota. Izlazi kinematičkog modela su nova pozicija i orijentacija mobilnog robota. Postupak se ponavlja onoliko dugo koliko je definirano trajanje simulacije.

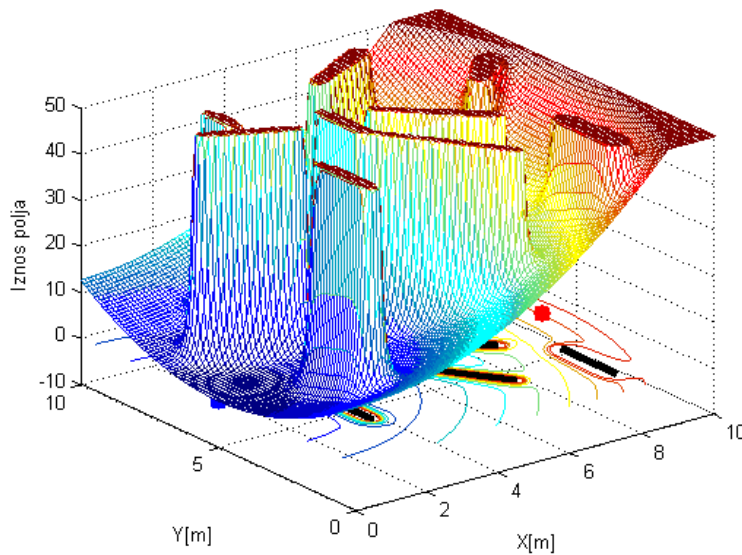
Slika 40 prikazuje radni prostor u kojemu se giba mobilni robot, prepreke, početnu poziciju i cilj.



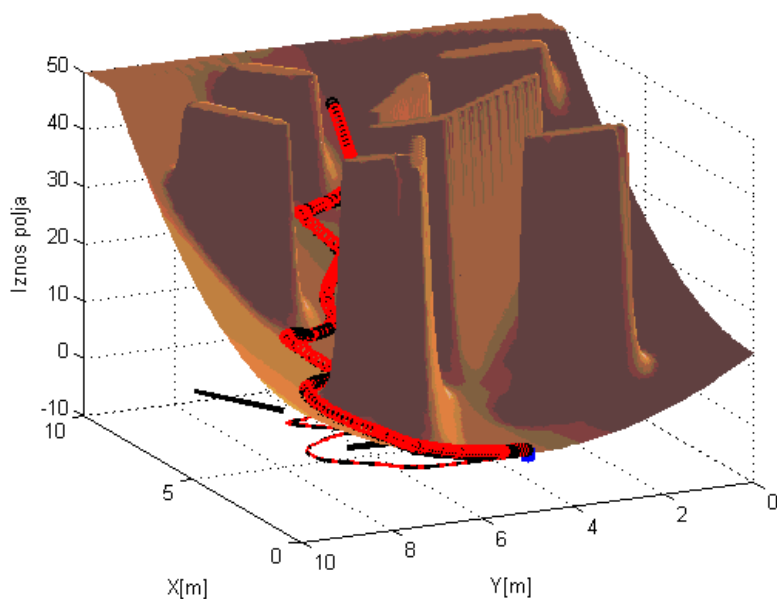
**Slika 40: Radni prostor**

Parametri sustava su sljedeći:  $V_a = 0.2$ ,  $V_{b_1} = 0.2$ ,  $V_{b_2} = 0.2$ ,  $a = 1$ ,  $b_1 = 1$  i  $b_2 = 1$ .

Za dani prostor generira se potencijalno polje prikazano na Slici 41:

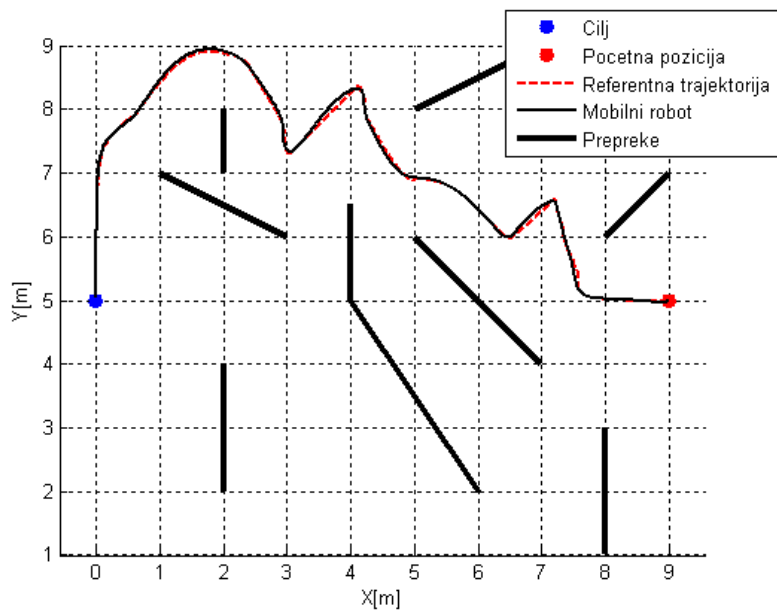


**Slika 41: Ukupno potencijalno polje**



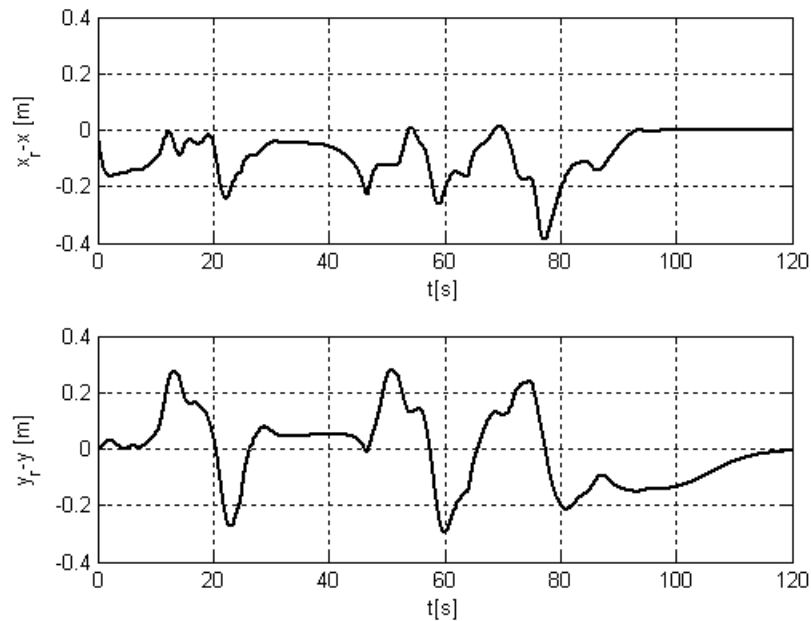
**Slika 42: Gibanje robota po potencijalnom polju**

Slika 42 prikazuje referentnu trajektoriju te gibanje mobilnog robota po potencijalu, što je bolje vidljivo na Slici 43, gdje je prikaz gibanja mobilnog robota između prepreka radnog prostora. Puna crna linija predstavlja gibanje mobilnog robota, koji prati crvenu isprekidanu liniju koja predstavlja referentnu trajektoriju. Vidljivo je da je mobilni robot došao u cilj te da je ostvareno izbjegavanje prepreka.



**Slika 43: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru**

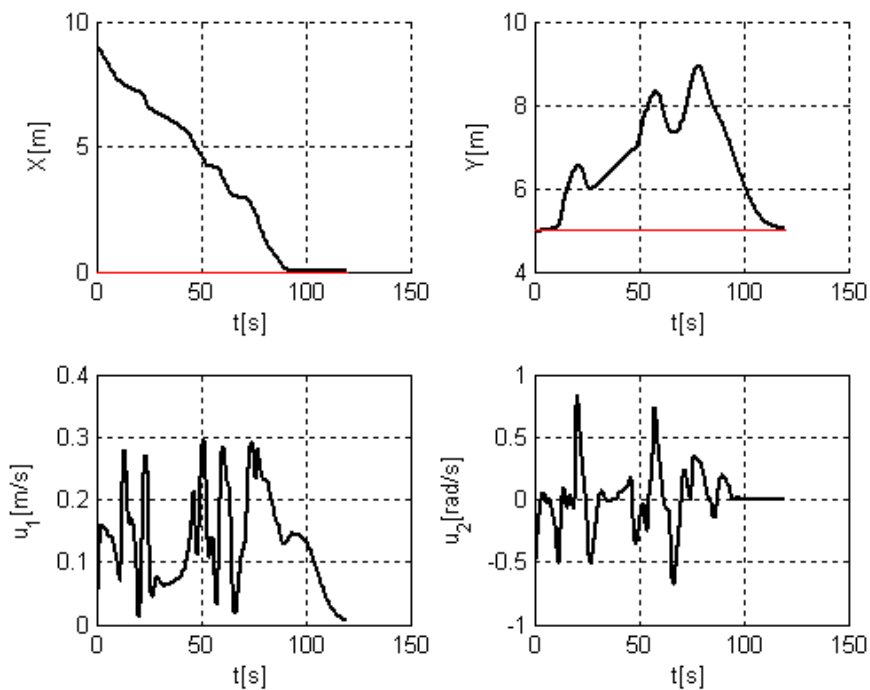
Iz Slike 43 vidljivo je dobro praćenje referentne trajektorije, no to je bolje vidljivo iz Slike 44 gdje je prikaz greške praćenja, odnosno odstupanje gibanja mobilnog robota od referente trajektorije. Za svaki trenutak simulacije izračunava se razlika stvarne pozicije od referente pozicije. Vidljivo je da odstupanje postoji, a bolji rezultati mogu se postići dodatnim smanjivanjem brzina potencijalnih i vrtložnih polja.



**Slika 44: Greška praćenja u x i y smjeru**

Pošto je iz Slika 42 i 43 vidljivo uspješno izbjegavanje prepreka te dolazak mobilnog robota u cilj, odnosno ispravnost metode potencijalnih polja, a na Slici 44 se utvrđuje korektnost neizrazitog upravljačkog zakona, potrebno je još utvrditi ispravnost ograničenja brzina. Prema (52) i (53), uzimajući u obzir upravljački zakon te parametre sustava gdje su maksimalne brzine  $0.2 \text{ m/s}$  za očekivati je i da upravljačke veličine  $u_1$  i  $u_2$  budu u realnim okvirima što potvrđuje Slika 45. Linearna brzina mobilnog robota ne prelazi  $0.3 \text{ m/s}$ , a kutna brzina je unutar intervala  $[-1,1] \text{ rad/s}$  što su fizikalne veličine koje mobilni robot može ostvariti u realnoj situaciji i vidljivo je da nema naglih skokova visokih iznosa koji mogu dovesti do uništenja aktuatora.





**Slika 45: Gibanje mobilnog robota u  $x$  i  $y$  smjeru, te upravljačke veličine**

Na Slici 45, gornja dva grafa prikazuju gibanje mobilnog robota u  $x$  i  $y$  smjeru, tj. njegovu poziciju za vrijeme izvođenja simulacije. Pošto je cilj u ovom primjeru postavljen na poziciju  $(0,4)$  s prethodne slike je vidljivo da mobilni robot nakon otprilike  $110s$  dođe u cilj.

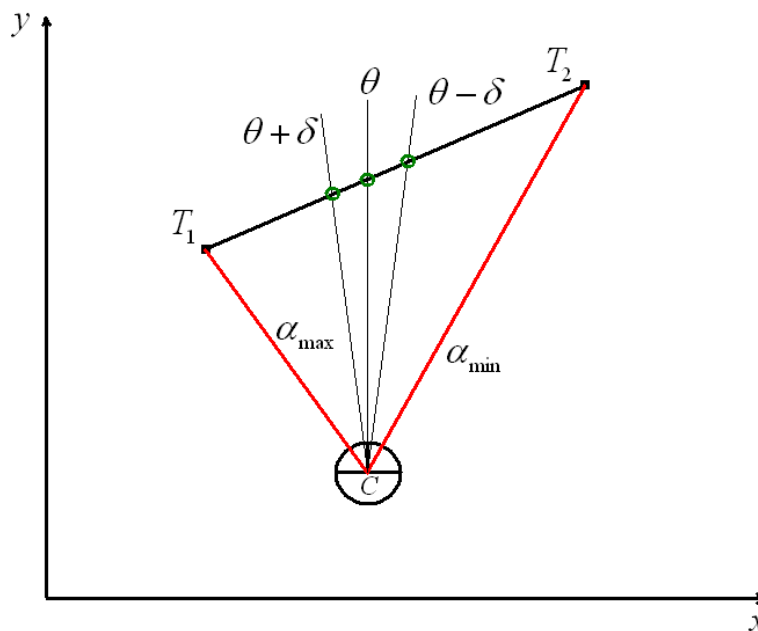
Ovim primjerom pokazana je ispravnost metode potencijalnih polja, upravljačkog zakona i kinematičkog modela mobilnog robota te zadovoljavajuće ograničenje brzina. Da bi se u potpunosti riješio zadatak diplomskog rada potrebno je modificirati *Matlab* računalni program, kako bi potencijalno polje bilo generirano na temelju prepreka koje mobilni robot detektira u ovisnosti o svojoj poziciji (pomoću „virtualnih senzora“) a ne na temelju svih prepreka u radnom prostoru. Na taj način se postiže veća realnost modela sustava jer se referentna trajektorija generira na temelju prepreka koje mobilni robot u određenom trenutku može detektirati sa svojim sensorima.

*Matlab računalni program koji se koristi za simulacije kada metoda potencijalnih polja ima saznanje o svim preprekama radnog prostora nalazi se u ovom radu kao Prilog 4 na CD-u.*

## 6. Detektiranje prepreka

Prepreka u sklopu ovog rada definira je kao dužina koja je omeđena s dvije zadane točke. Do sad se u radu prilikom izračunavanja repulzivnog potencijala na temelju te dvije točke definirala dužina, koja se je diskretizirala, odnosno za prepreku se uzimao niz točaka između dvije zadane točke na način da je svaka točka predstavljala točkastu prepreku, točkasti repulzivni potencijal. Uz to, mobilni robot je u svakom trenutku simulacije imao podatke o svim takvim točkastim preprekama unutar radnog prostora  $q_{p,i} = (x_{p,i}, y_{p,i}), i = 1, \dots, n$  gdje je  $n$  broj točkastih prepreka. Diplomski zadatak zahtjeva upravljanje mobilnim robotom u nepoznatoj okolini [8], odnosno mobilni robot za vrijeme svojeg gibanja detektira prepreke, a na temelju tih prepreka generira se potencijalno polje.

Za detektiranje prepreka u *Matlab* računalnom programu koristi se metoda traženje sjecišta dužine i polupravca, što odgovara realnoj situaciji kada mobilni robot koristi senzor udaljenost (ultrazvuk, laser, senzor dodira) kako bi detektirao neku prepreku. Dužinu u realnom slučaju predstavlja prepreka, dok je ishodište polupravca pozicija mobilnog robota.



Slika 46: Detektiranje prepreka

Slika 46 prikazuje metodu detektiranja prepreka. Točke  $T_1 = (x_{p1}, y_{p1})$  i  $T_2 = (x_{p2}, y_{p2})$  definiraju prepreku odnosno zid. Točka  $C$  predstavlja poziciju mobilnog robota  $(x, y)$  čija je orijentacija  $\theta$ , a to je kut koji zatvara uzdužna os mobilnog robota s koordinatnom osi  $x$ . Ako se spoje dužine  $\overline{CT_1}$  i  $\overline{CT_2}$  formiraju se dva nova kuta,  $\alpha_{\max}$  i  $\alpha_{\min}$ .  $\alpha_{\max}$  je kut koji zatvara dužina  $\overline{CT_1}$  s koordinatnom osi  $x$ , a  $\alpha_{\min}$  je kut koji zatvara dužina  $\overline{CT_2}$  s istom koordinatnom osi. Ako se orijentacija mobilnog robota, odnosno kut  $\theta$  nalazi unutar kutova  $\alpha_{\max}$  i  $\alpha_{\min}$ , to znači da je mobilni robot u mogućnosti detektirati prepreku. Zbog veće rezolucije, generira se veći broj „virtualnih senzora“, na način da se kutu koji predstavlja orijentaciju mobilnog robota dodaje odnosno oduzima kut  $\delta, 2\delta, 3\delta, \dots$ . Time se postiže da mobilni robot detektira više točaka zida. U procesu detektiranja, prva provjera je da li kut je kut senzora ( $\dots, \theta + 2\delta, \theta + \delta, \theta, \theta - \delta, \theta - 2\delta, \dots$ ) između kutova  $\alpha_{\max}$  i  $\alpha_{\min}$ . Ako je taj uvjet ispunjen određuje se sjecište dužine  $\overline{T_1T_2}$  i polpravca čije je ishodište točka  $C$ , a kut koji taj polpravac zatvara s osi  $x$  odgovara kutu senzora. Formira se jednadžba pravca određenog točkama  $T_1$  i  $T_2$ :

$$Y_p - y_{p1} = \frac{y_{p2} - y_{p1}}{x_{p2} - x_{p1}} (X_p - x_{p1}) \quad (82)$$

te jednadžba pravca kroz točku  $C = (x, y)$  uz poznati kut senzora  $\theta$ :

$$Y_p - y = k (X_p - x) \quad (83)$$

pri čemu je  $k = \tan \theta$ .

Time se dobiva sustav od dvije jednadžbe (82) - (83) s dvije nepoznanice  $(X_p, Y_p)$ . Rješavanjem sustava određuju se koordinate prepreke  $(X_p, Y_p)$ . Taj postupak se ponavlja za svaki „virtualni senzor“, te za svaku prepreku radnog prostora čime se formira skup točkastih prepreka koje je mobilni robot, u trenutačnoj poziciji, u mogućnosti detektirati. Nakon detektiranja skupa prepreka, metoda potencijalnih polja generira referentnu trajektoriju, tj. referentnu poziciju u koju se mobilni robot mora pomaknuti. Korištenjem upravljačkog zakona i kinematičkog modela mobilnog robota dobiva se stvarna, nova

pozicija mobilnog robota te se na temelju te pozicije detektiraju nove prepreke i postupak se ponavlja.

## 7. Opis i dijagram toka računalnog programa

Računalni program koji se koristi za rješavanje problema diplomskog zadatka sastoji se od dva djela – glavnog programa koji se naziva *Main* te skripte *MobRobot* koja se poziva unutar *ode45* funkcije za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi. U glavnom programu definiraju se početna pozicija i orijentacija mobilnog robota, definira se pozicija cilja, pozicije svih prepreka te svi globalni parametri sustava. Zatim se pokreće funkcija *ode45* koja kao izlaz daje rješenja diferencijalnih jednadžbi – gibanje i orijentaciju mobilnog robota za vrijeme simulacije, referentnu poziciju za vrijeme simulacije te linearnu i kutnu brzinu mobilnog robota. Unutar skripte *MobRobot* izračunavaju se prepreke koje mobilni robot detektira, generira se potencijalno polje, određuju se upravljačke veličine te se na temelju kinematičkog modela izračunavaju pozicije mobilnog robota za vrijeme njegova gibanja. Nakon završetka simulacije dobiveni rezultati se grafički prikazuju, i to gibanje mobilnog robota u radnom prostoru između prepreka, zatim pozicija mobilnog robota u  $x$  i  $y$  smjeru u svakom trenutku simulacije, upravljačke veličine  $u_1$  i  $u_2$  u ovisnosti o vremenu simulacije te odstupanje stvarne pozicije mobilnog robota od referente pozicije.

Za opis atraktivnog potencijala koristi se izraz (2), a za opis repulzivnog potencijala zbog boljih rezultata umjesto klasične FIRAS funkcije koristi se modificirana FIRAS funkcija (8). Za dobivanje referentne trajektorije koriste se ograničene funkcije (52) i (53). Za upravljački zakon koriste se prethodno izvedeni izrazi:

$$u_1 = k_4 \cdot \exp(-3 \cdot vp^2) \cdot no \quad (84)$$

$$u_2 = k_5 \cdot \tanh(vp) \quad (85)$$

Korištenjem svega navedenog formira se sustav od pet diferencijalnih jednadžbi:

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_r = -V_a \cdot \tanh\left(a \frac{\partial U_a}{\partial x}\right) + \sum_{i=1}^n \left( -V_{b_i} \cdot \tanh\left(b_i \frac{\partial U_r}{\partial x}\right) + V_{b_2} \cdot \tanh\left(b_2 \frac{\partial U_r}{\partial y}\right) \right) \quad (86)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_r = -V_a \cdot \tanh\left(a \frac{\partial U_a}{\partial y}\right) + \sum_{i=1}^n \left( -V_{b_i} \cdot \tanh\left(b_i \frac{\partial U_r}{\partial y}\right) - V_{b_2} \cdot \tanh\left(b_2 \frac{\partial U_r}{\partial x}\right) \right) \quad (87)$$

$$\dot{y}_3 = \dot{x} = \cos \theta \cdot u_1 \quad (88)$$

$$\dot{y}_4 = \dot{y} = \sin \theta \cdot u_1 \quad (89)$$

$$\dot{y}_5 = \dot{\theta} = u_2 \quad (90)$$

Rješavanjem diferencijalnih jednadžbi dobivaju se tražene veličine – referentna pozicija  $(x_r, y_r)$ , stvarna pozicija  $(x, y)$  te orijentacija mobilnog robota  $\theta$ . Kako bi se u glavnom programu mogle koristiti upravljačke veličine  $u_1$  i  $u_2$ , dodane su još dvije diferencijalne jednadžbe

$$\dot{y}_6 = u_1 \quad (91)$$

$$\dot{y}_7 = u_2 \quad (92)$$

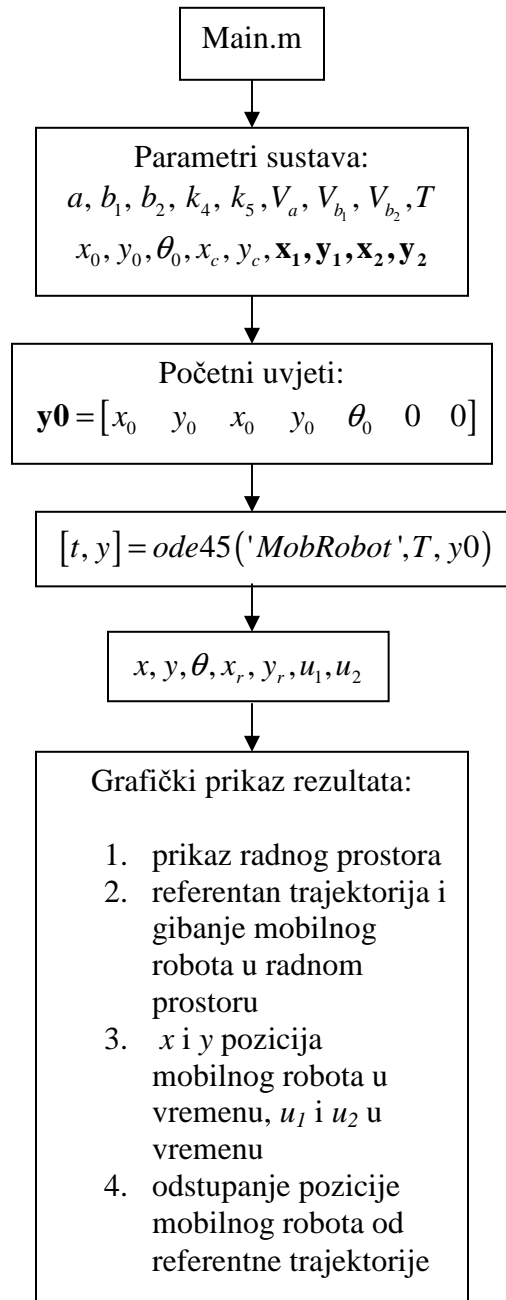
koje nisu spregnute s izrazima (86) - (90). Na taj način funkcija *ode45* vraća upravljačke veličine u glavni program. Izrazi (86) do (92) čine sustav od sedam diferencijalnih jednadžbi te je stoga potrebno prije pozivanja funkcije *ode45* definirati sedam početnih uvjeta, odnosno vektor početnih uvjeta  $\mathbf{y0}$ . Uzima se da u trenutku  $t=0$ , odnosno u početnom trenutku simulacije, pozicija mobilnog robota odgovara poziciji referentne trajektorije, da su linearna i kutna brzina jednake nula, a mobilni robot ima neku orijentaciju:

$$\mathbf{y0} = [x_0 \quad y_0 \quad x_0 \quad y_0 \quad \theta_0 \quad 0 \quad 0] \quad (93)$$

Parametri sustava koje je potrebno definirati prije pokretanja simulacije su početna pozicija mobilnog robota  $(x_0, y_0)$ , pozicija cilja  $(x_c, y_c)$ , početna orijentacija mobilnog robota  $\theta_0$ , pojačanja sustava  $a, b_1, b_2, k_4, k_5$ , brzine polja  $V_a, V_{b_1}, V_{b_2}$ , radijus utjecaja prepreke  $\eta_0$ , broj „virtualnih senzora“ mobilnog robota i kut koji isti obuhvaćaju,

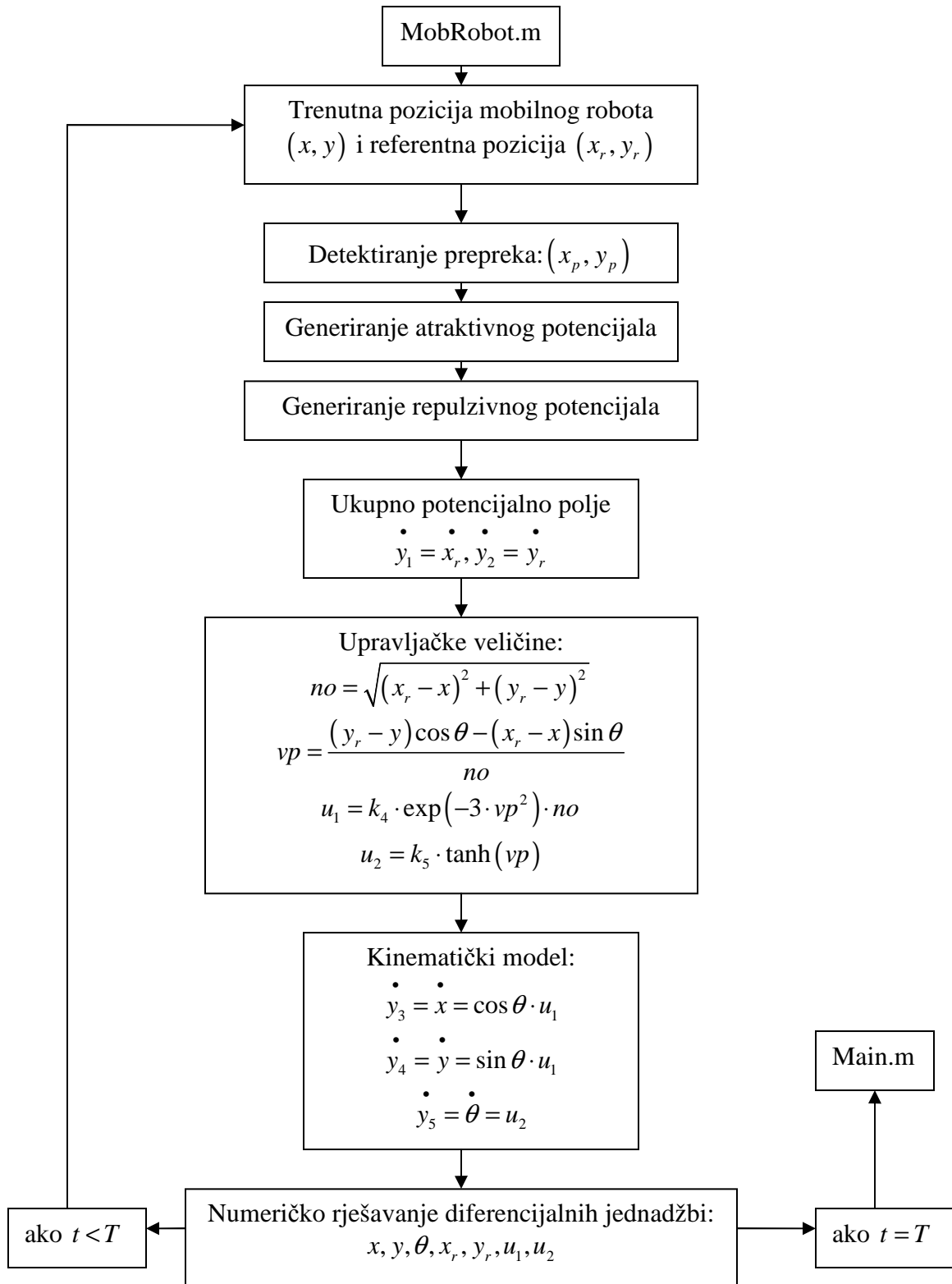
prepreke u radnom prostoru te ukupno vrijeme trajanja simulacije  $T$ . Prepreke se definiraju kao i u prethodnim primjerima na način da se formiraju četiri vektora  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2$ , gdje dvije točke  $(x_1(i), y_1(i))$  i  $(x_2(i), y_2(i))$  definiraju jedan ravni zid, pri čemu je  $i = 1, \dots, n$  a  $n$  je broj zidova u radnom prostoru.

Slijedi dijagram toka računalnog programa *Main*:



Funkcija *ode45* poziva računalni program *MobRobot* u kojemu su definirane diferencijalne jednadžbe i u kojem se detektiraju prepreke za vrijeme gibanja mobilnog

robota. Slijedi dijagram toka računalnog programa *MobRobot*:



Matlab skripte *Main.m* i *MobRobot.m* nalaze se u ovom radu kao Prilog 1 (i na CD-u).

## 8. Rezultati simulacija

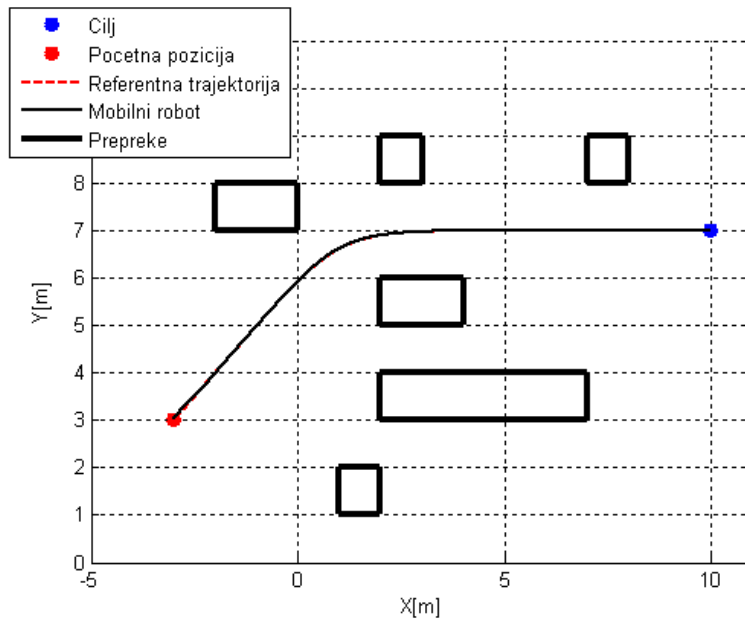
### 8.1. Prva simulacija

Prvo je prikazana simulacija u kojoj je mobilnom robotu jednostavno ostvariti zahtijevano gibanje od početne pozicije do cilja. Parametri sustava dani su Tablicom 1:

Tablica 1: Parametri sustava prve simulacije

$a$	$b_1$	$b_2$	$k_4$	$k_5$	$V_a$	$V_{b_1}$	$V_{b_2}$	$T$	$x_0$	$y_0$	$\theta_0$	$x_c$	$y_c$	$\eta_0$
1	5	5	1	1	0.2	0.4	0.8	100	-3	3	$\pi/2$	10	7	1.2

Uz parametre sustava navedene u Tablici 1 u računalnom programu definirani su zidovi tako da čine prepreke na način koji je prikazan na Slici 47:



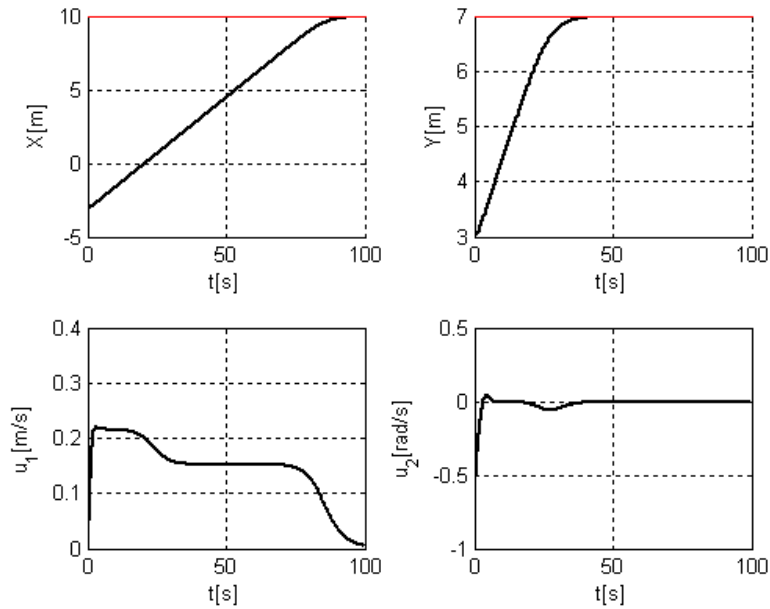
Slika 47: Gibanje mobilnog robota u prvoj simulaciji

Osnovni „virtualni senzor“ nalazi se u nastavku uzdužne osi mobilnog robota, što odgovara kutu  $\theta$ , a ostali senzori se generiraju na način  $\theta + \mathbf{k}$ , pri čemu je  $\mathbf{k} = -\frac{\pi}{8} : \frac{1}{10} : \frac{\pi}{8}$ .

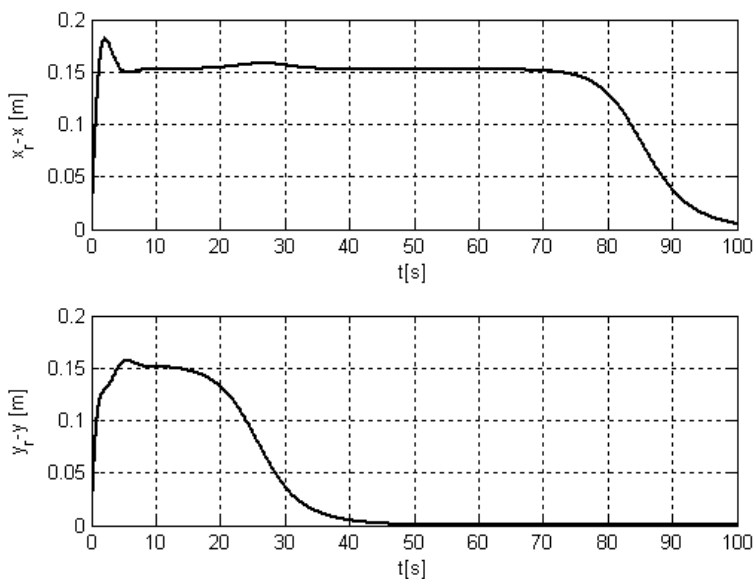
Obuhvatni kut koji virtualni senzori obuhvaćaju jednak je  $\frac{\pi}{4}$ .



Slika 47 također prikazuje rezultat simulacije, odnosno gibanje mobilnog robota u radnom prostoru na način da prati referentnu trajektoriju. Vidljivo je idealno praćenje referentne trajektorije, što znači da neće biti velikih odstupanja trenutne pozicije mobilnog robota od referentne pozicije što prikazuje Slika 49. Sa Slike 47 vidljivo je ujednačeno gibanje mobilnog robota prema cilju što je i potvrđeno na Slici 48 gdje nema naglih skokova upravljačkih veličina.



**Slika 48: x,y pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za prvu simulaciju**



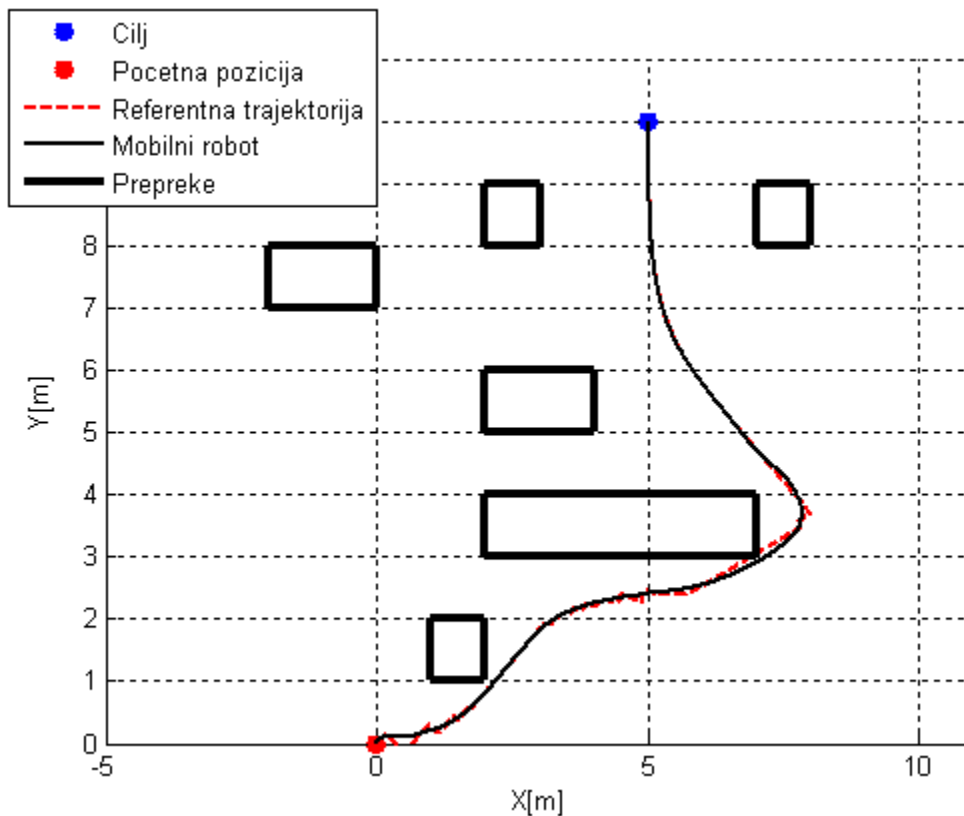
**Slika 49: Greška praćenja referentne trajektorije za prvu simulaciju**

## 8.2. Druga simulacija

Parametri sustava identični su onima definiranim u Simulaciji 1 uz promijenjenu početnu i krajnju poziciju mobilnog robota. Takvi parametri sustava prikazani su Tablicom 2:

Tablica 2: Parametri sustava druge simulacije

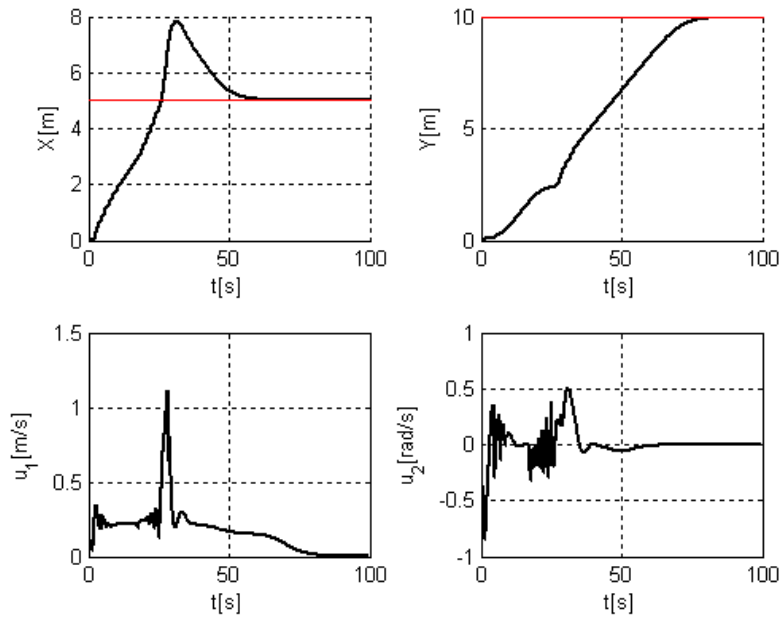
$a$	$b_1$	$b_2$	$k_4$	$k_5$	$V_a$	$V_{b_1}$	$V_{b_2}$	$T$	$x_0$	$y_0$	$\theta_0$	$x_c$	$y_c$	$\eta_0$
1	5	5	1	1	0.2	0.4	0.8	100	0	0	$\pi/2$	5	10	1.2



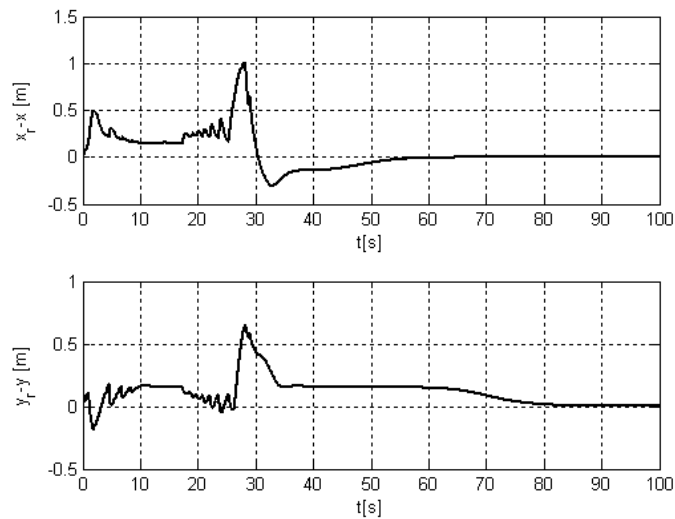
Slika 50: Gibanje mobilnog robota u drugoj simulaciji

Slika 50 prikazuje uspješno izbjegavanje prepreka prilikom gibanja prema cilju. U trenucima kada mobilni robot zaobilazi najdužu prepreku vidljivo je da postoji greška praćenja referentne trajektorije ali uz to vidljivo je i oscilatorno ponašanje referentne trajektorije (Slika 50 i Slika 52). Razlog tomu je što se kuglica pod utjecajem atraktivnog potencijala pokušava gibati prema cilju, ali u trenutku kada robot detektira prepreku

generira se repulzivni potencijal zbog kojeg se kuglica giba suprotno od cilja. Takvo ponašanje se ponavlja dok robot ne zaobiđe prepreku. Do greške praćenja, koja je vidljiva na Slici 52, dolazi zbog neholonomnih ograničenja koja onemogućuju brze promjene smjera gibanja robota prilikom praćenja referentne trajektorije. Slika 51 demonstrira zadovoljavajuće i izvedive upravljačke veličine ali kod kutne brzine vidljive su oscilacije koje odgovaraju zaobilaženju najduže prepreke.



Slika 51:  $x, y$  pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za drugu simulaciju



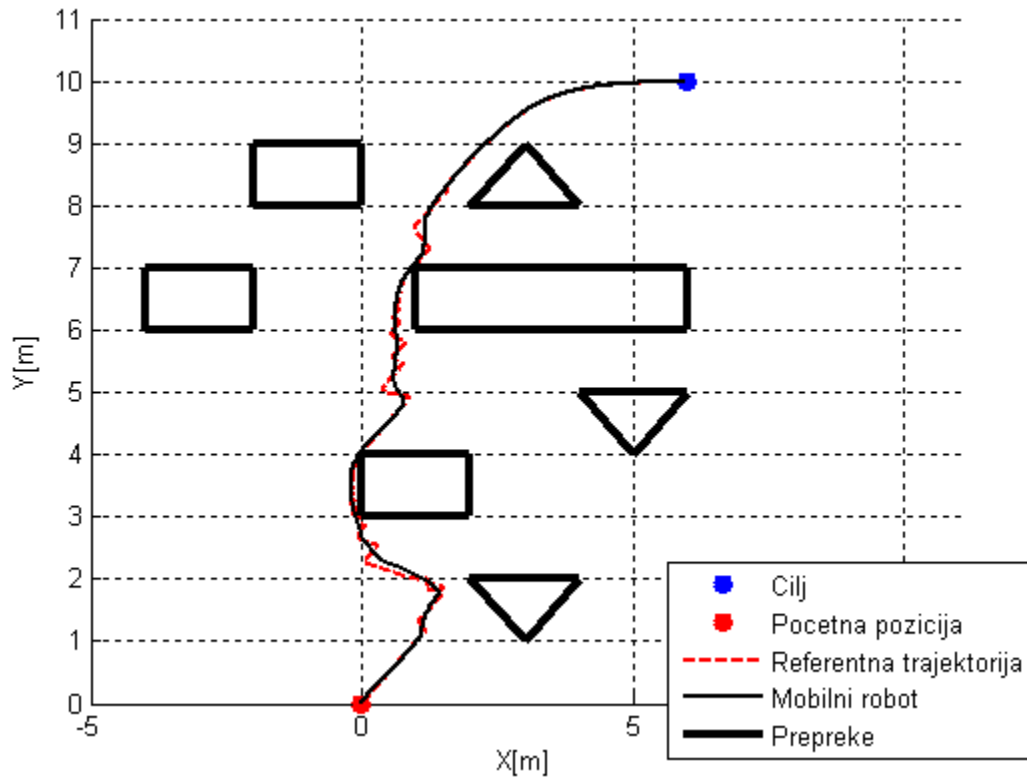
Slika 52: Greška praćenja referentne trajektorije za drugu simulaciju

### 8.3. Treća simulacija

Za treću i četvrtu simulaciju mijenja se radni prostor kako bi se uspješnost računalnog programa ispitala i za druge formacije radnog prostora. Parametri sustava treće simulacije prikazani su Tablicom 3, a radni prostor te gibanje mobilnog robota na Slici 53.

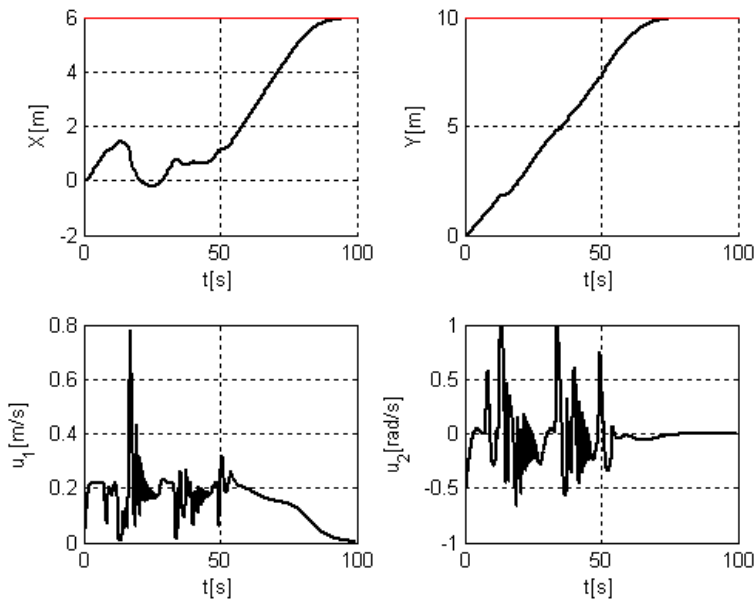
Tablica 3: Parametri sustava treće simulacije

$a$	$b_1$	$b_2$	$k_4$	$k_5$	$V_a$	$V_{b_1}$	$V_{b_2}$	$T$	$x_0$	$y_0$	$\theta_0$	$x_c$	$y_c$	$\eta_0$
1	5	5	1	1	0.2	0.6	0.8	100	0	0	$\pi/2$	6	10	1.2

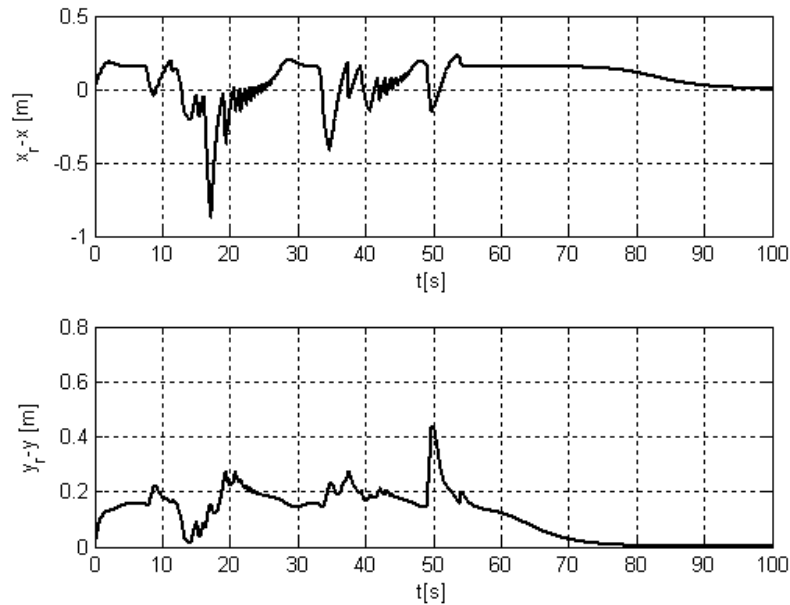


Slika 53: Gibanje mobilnog robota u trećoj simulaciji

Analiziranjem podataka sa Slika 53, 54 i 55 vidljivo je oscilatorno ponašanje referentne trajektorije koje utječe na iznos upravljačkih veličina. Na Slici 54 vidljivo je da su upravljačke veličine fizikalno gledano zadovoljavajućih iznosa, ali ostvaruju oscilatorno ponašanje.



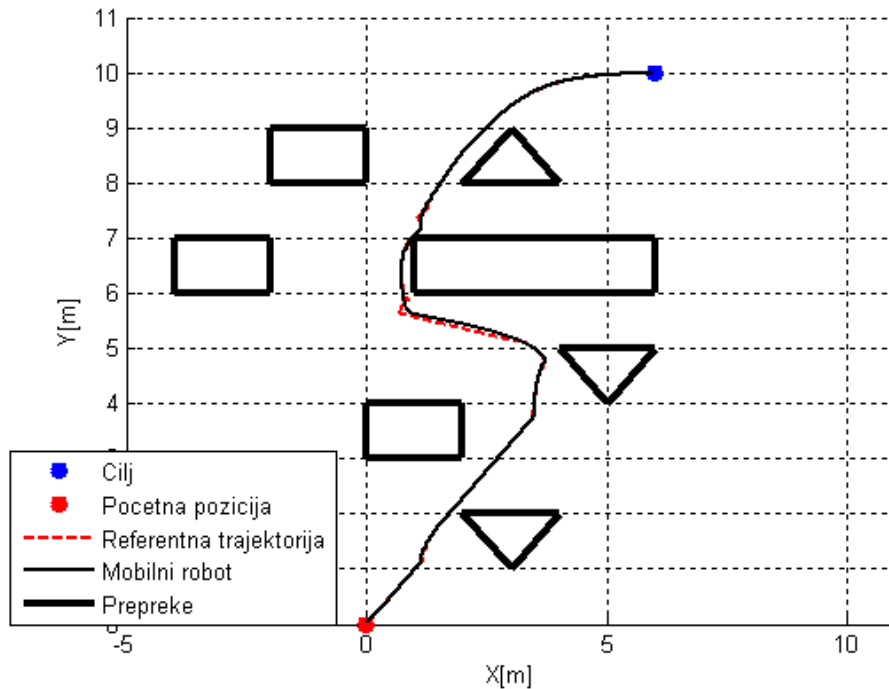
Slika 54:  $x, y$  pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za treću simulaciju



Slika 55: Greška praćenja referentne trajektorije za drugu simulaciju

Slika 53 demonstrira uspješno izbjegavanje prepreka, no vidljivo je da se mobilni robot giba vrlo blizu prepreka. Postoje dva načina kako to spriječiti, jedan je povećati radijus utjecaja prepreke  $\eta_0$ , a drugi način je smanjiti brzinu atraktivnog potencijala  $V_a$ . Povećanjem radijusa utjecaja prepreke može doći do negativnih posljedica na način da mobilni robot neće prolaziti između dvije blisko postavljene prepreke [9], odnosno da će

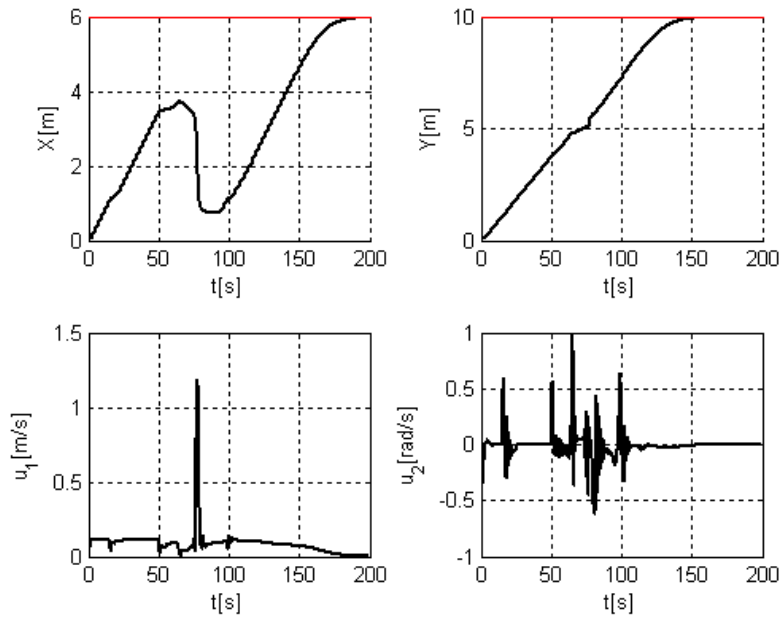
se robot zaustaviti u lokalnom minimumu. Zbog toga je bolje smanjiti brzinu atraktivnog potencijala. Ako se koriste parametri navedeni u Tablici 3, uz smanjenje brzine atraktivnog potencijala  $V_a = 0.1 \text{ m/s}$  postiže se rezultat prikazan na Slici 56:



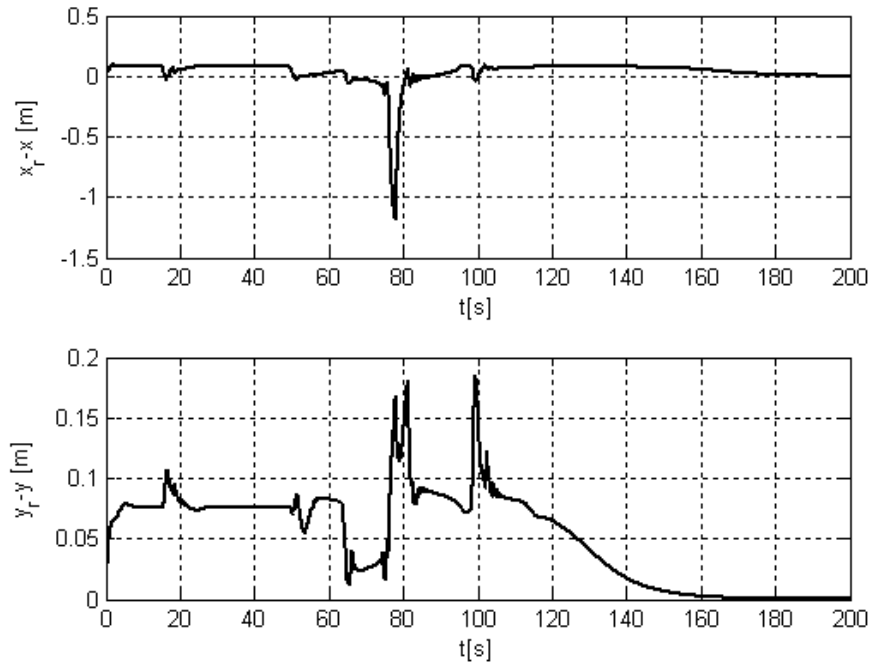
**Slika 56:** Gibanje mobilnog robota u trećoj simulaciji uz  $V_a = 0.1 \text{ m/s}$

Na taj način se postižu manji iznosi atraktivnog potencijala čime se automatski povećava utjecaj repulzivnog potencijala; mobilni robot se giba sporije i na većim udaljenostima od prepreka. Zbog smanjenja brzine atraktivnog potencijala mobilni robot ostvaruje brzine manjih vrijednosti što je i vidljivo usporedbom Slike 54 i Slike 57, a upravo zbog toga mobilnom robotu je potrebno duže vrijeme da stigne do cilja. Sa Slike 54 vidljivo je da mobilni robot stiže u cilj unutar  $80s$  kada je  $V_a = 0.2 \text{ m/s}$ , a u slučaju kada je  $V_a = 0.1 \text{ m/s}$  stiže unutar  $180s$  što je i vidljivo sa Slike 57.

Također, zbog niže linearne brzine mobilni robot bolje prati referentnu trajektoriju što je vidljivo na Slici 58.



Slika 57:  $x,y$  pozicija mobilnog robota i upravljačke veličine za treću simulaciju uz  $V_a = 0.1 \text{ m/s}$



Slika 58: Greška praćenja referentne trajektorije za drugu simulaciju uz  $V_a = 0.1 \text{ m/s}$

## 8.4. Četvrta simulacija

U tri prethodne simulacije utvrđena je uspješnost računalnog programa, odnosno ispunjenje zahtjeva diplomskog zadatka. Na temelju grafičkog prikaza greške praćenja referentne trajektorije te grafičkog prikaza upravljačkih veličina u ovisnosti o vremenu potvrđena je ispravnost upravljačkog zakona temeljenog na neizrastnoj logici. Na sljedećih nekoliko slika prikazani su rezultati simulacija kada se mobilni robot giba u radnom prostoru, uz konstantne parametre sustava s time da se u svakoj simulaciji mijenjaju početna i krajnja pozicija. Parametri sustava dani su Tablicom 4:

**Tablica 4: Parametri sustava četvrte simulacije**

$a$	$b_1$	$b_2$	$k_4$	$k_5$	$V_a$	$V_{b_1}$	$V_{b_2}$	$T$	$\theta_0$	$\eta_0$
1	5	5	1	1	0.2	0.75	0.8	300	$\pi/2$	1.5

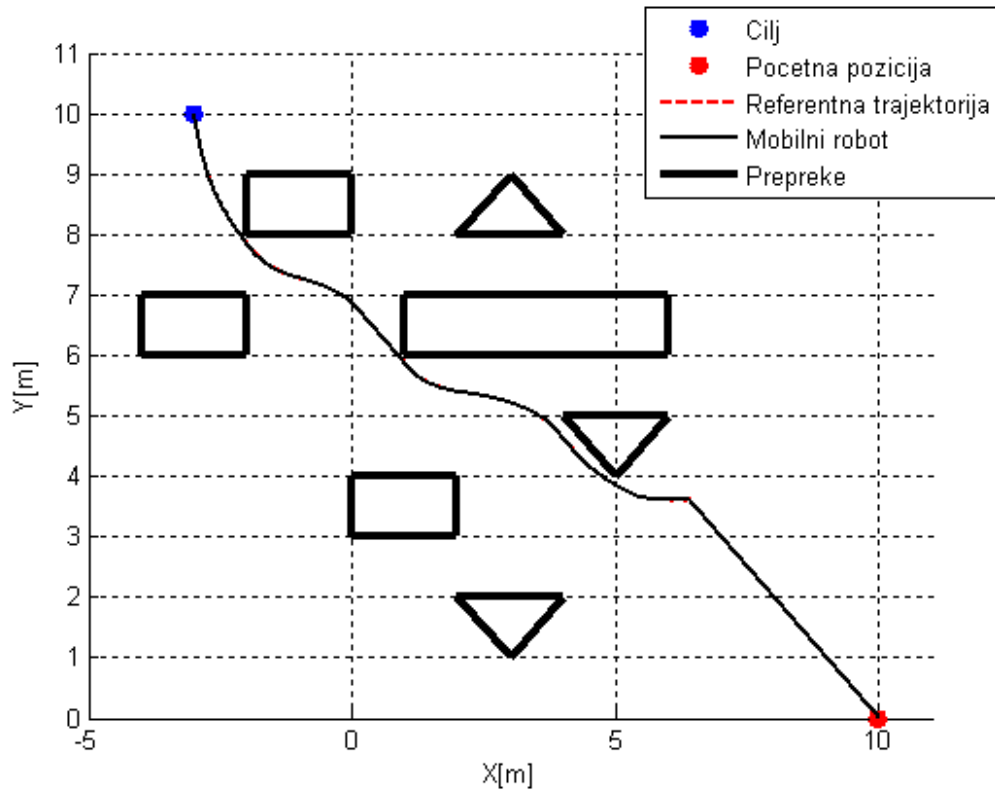
Početne i krajnje pozicije mobilnog robota u radnom prostoru dane su Tablicom 5:

**Tablica 5: Početne i krajnje pozicije mobilnog robota**

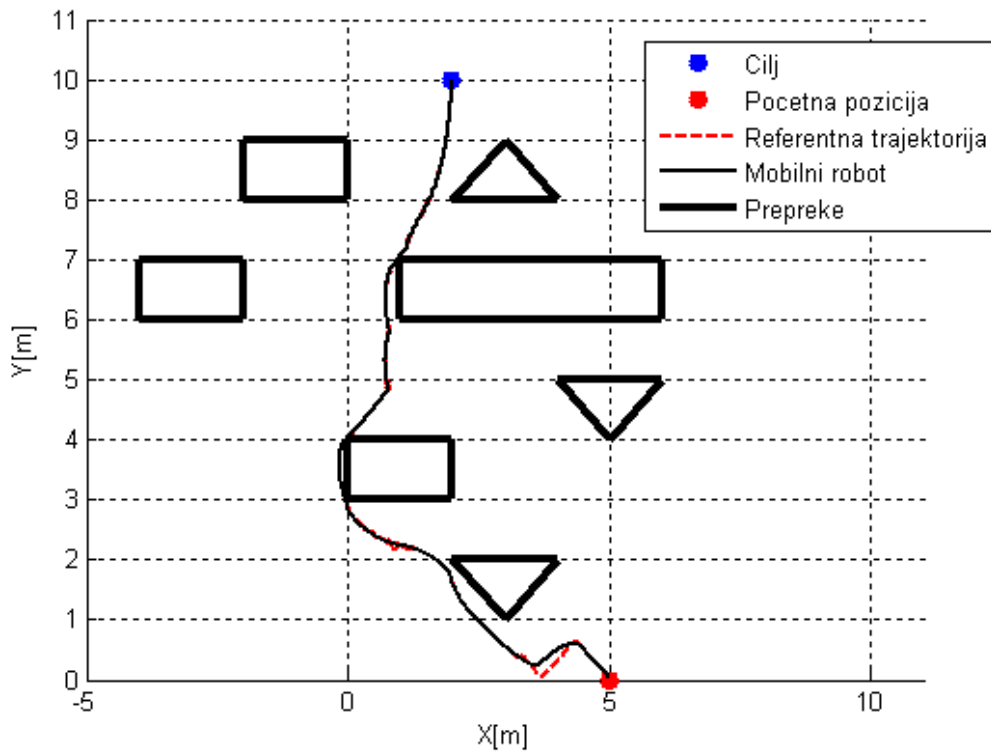
Verzija	$x_0$	$y_0$	$x_c$	$y_c$
1.	10	0	-3	10
2.	5	0	2	10
3.	10	0	-1	11
4.	5	-1	3	12

Od Slike 59 do Slike 62 prikazana su gibanja mobilnog robota u radnom prostoru između prepreka od početne pozicije do cilja. Zbog malih brzina atraktivnog i repulzivnog potencijala, te zbog dobro usklađenih parametara  $k_4$  i  $k_5$  u upravljačkom zakonu postignuto je gotovo idealno praćenje referentne trajektorije. Nema naglih promjena smjera prilikom gibanja, a također postignuta je dobra fleksibilnost sustava jer nije bilo potrebno za različite početne i krajnje pozicije mijenjati i neke od ostalih parametara sustava što je jedan on poznatih nedostataka metode potencijalnih polja.

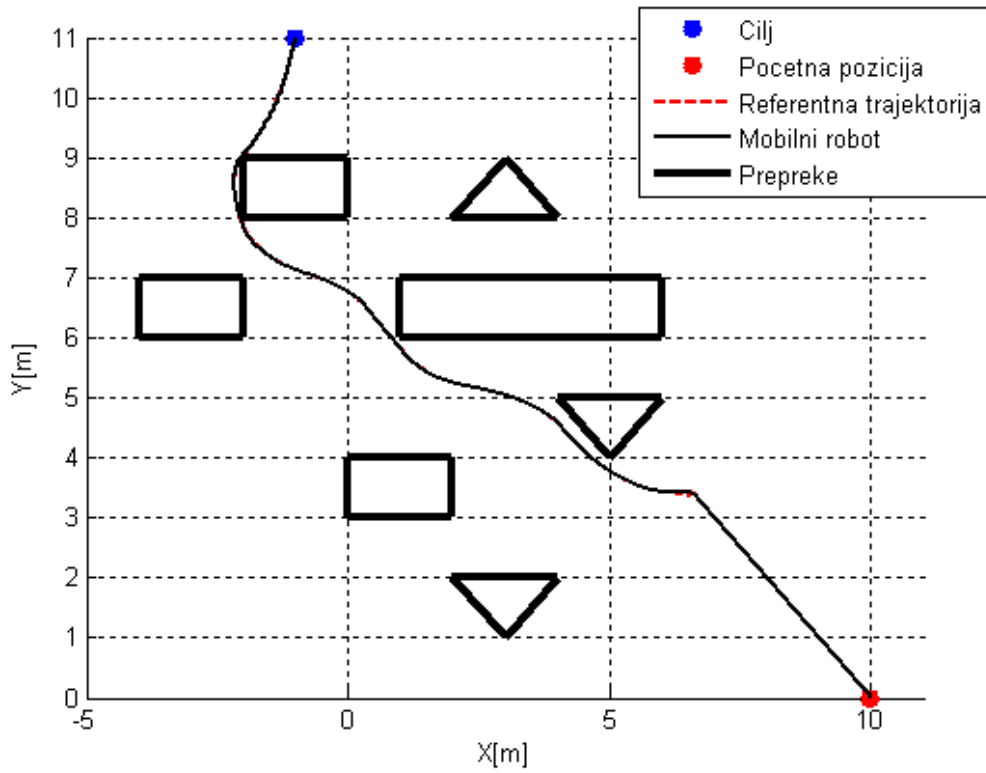




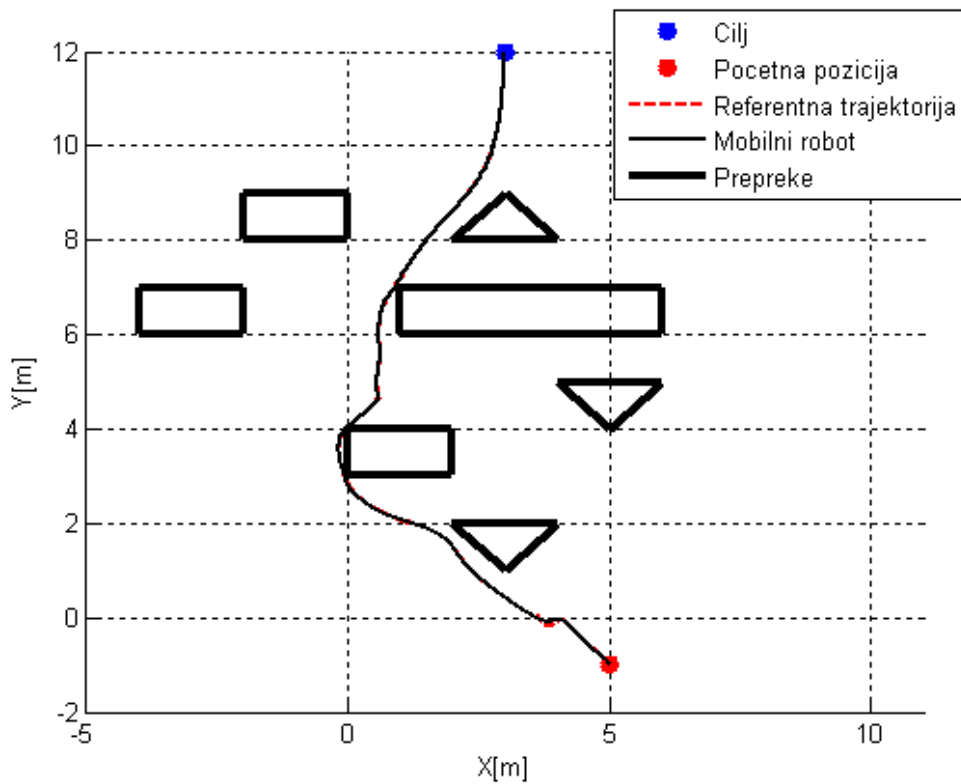
Slika 59: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 1. verzija



Slika 60: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 2. verzija



Slika 61: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 3. verzija



Slika 62: Gibanje mobilnog robota u radnom prostoru – 4. verzija

## 9. Zaključak

U ovom diplomskom radu naglasak je na metodi potencijalnih polja te na analitičkom neizravnom upravljanju. Prvenstveno je zanimljivo analitičko neizravno upravljanje gdje se kreće od jednostavnih heurističkih pravila, koja su jasna i razumljiva svima, da bi se korištenjem matematičke metodologije došlo do određenih analitičkih funkcija koje omogućuju upravljanje mobilnim robotom. To je ujedno i glavna prednost neizravne logike i neizravnog upravljanja, koja omogućuju upravljanje složenim procesima i sustavima na temelju iskustva. Upravo kako bi čovjek navodio mobilnog robota riječima „skreni malo desno“ ili „malo ubrzaj“, na isti način to radi neizravni analitički regulator na temelju definirane baze pravila ponašanja. Ovakav način izvoda upravljačkog zakona ne zahtjeva složene operacije matricama prilikom traženja pseudoinverza [6] ili korištenje funkcije *atan2* koja vrlo često zna predstavljati problem kod upravljanja mobilnim robotom.

Za razliku od klasičnih razmatranja metode potencijalnih polja, u sklopu diplomskog rada zahtjeva se kretanje mobilnog robota u nepoznatoj okolini, gdje se referentna trajektorija ne proračunava na temelju svih prepreka radnog prostora, već se proračunava na temelju nekoliko prepreka koje mobilni robot detektira u danom trenutku. Takav pristup omogućuje jednostavniju implementaciju upravljačkog algoritma na stvarni model, odnosno takav način razmišljanja predstavlja gotovo realnu situaciju u kojoj se mobilni robot giba kroz prostor koristeći npr. ultrazvučni senzor za detektiranje prepreka i njihovo izbjegavanje. Jedna od primjena metode potencijalnih polja je kod simulacija aktivnosti traženja i spašavanja [10] u nepoznatoj okolini zbog čega je potrebno i dalje razvijati spomenutu metodu, ali i njenu implementaciju na stvarne modele. Metoda potencijalnih polja se zbog svoje jednostavne implementacije i fleksibilnosti primjenjuje i prilikom upravljanja mobilnim robotima u industrijskim postrojenjima ili u skladištima prilikom rukovanja materijalom [1]. Rukovanje materijalom pomoću mobilnih robota čije je upravljanje bazirano na metodi potencijalnih polja razrađeno je u seminarskom radu iz kolegija Inteligentni montažni sustavi [11]. U ovom diplomskom radu koristi se modificirana FIRAS funkcija, Ge funkcija [7], koja se odlično uklopila u računalni program te pomoću koje su ostvareni vrlo dobri rezultati

simulacija i izbjegnut je problem nemogućnosti dolaska mobilnog robota do cilja zbog blizine prepreke. Valja napomenuti da su se u sklopu diplomskog rada samo spominju neki nedostaci metode potencijalnih polja [9], [12] te da bi se u potpunosti omogućila primjena metode potencijalnih polja u industriji potrebno je razviti naprednije metode koje će odstraniti nedostatke.

Zahvaljujući razvoju upravljačkih programa te razvojem tehnologije mobilni roboti postaju sve zastupljeniji u industriji, ali i u domaćinstvima (kao roboti usisavači koji čiste stambene i ine prostore ili rade kao kosioci trave). Iz toga se vidi da im primjena izlazi iz okvira industrije što otvara puno prostora za razvoj novih područja u mobilnoj robotici kao što su mobilni roboti kao dječje igračke. Umjetna inteligencija i mogućnost da roboti uče vodi cjelokupno čovječanstvo ka neslućenim mogućnostima. Vrlo vjerojatno će odigrati i značajnu ulogu u narednoj razvojnoj eri. Potrebno je biti oprezan i nadati se da na tom putu neće doći do uporabe robota u krajnje destruktivne svrhe.

## 10. Literatura

- [1] [www.kivasystems.com](http://www.kivasystems.com)
- [2] Nourbakhsh, I., Siegwart, R., Introduction to Autonomous Mobile Robots, MIT Press, Boston, 2004.
- [3] Bekey G., Autonomous robots, MIT Press, Boston, 2005.
- [4] Resolving Social Conflicts & Field Theory in Social Science, American Psychological Association, Washington, 1997.
- [5] Khatib O., Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots, Int. J. of Robotic Research, Vol.5, Str.60, 1986.
- [6] De Luca A., Oriolo G., Local incremental planning for nonholonomic mobile robots, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Str. 104–110, San Diego, 1994.
- [7] Cui Y.J., Ge S.S., New potential functions for mobile robot path planning Robotics and Automation, IEEE Transactions, Vol.16, Str. 615 – 620, 2000.
- [8] Li-Chun Lai, Chia-Ju Wu, Yeong-Nong Shiue, A potential field method for robot motion planing in unknown environments, Journal of Chinese Institute of Engineers, Vol. 30, Str. 369 – 377, 2007.
- [9] Borenstein J., Koren Y., Potential Field Methods and Their Inherent Limitations for Mobile Robot Navigation, IEEE Conference on Robotics and Automation, Str. 1398-1404, Sacramento, 1991.

- [10] Baxter J. L., Burke E. K., Garibaldi J. M., Multi-Robot Search and Rescue: A Potential Field Based Approach, University of Nottingham, Nottingham, 2007.
- [11] Cizelj I., Seminarski rad iz kolegija „Inteligentni montažni sustavi“, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [12] Cizelj I., Seminarski rad iz kolegija „Vođenje tehničkih sustava“, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2008.

# 11. Prilozi

## 11.1. Prilog 1

```
%Main
clear;
clc;
%-----
T=100;
DT=0.005;
global k1 k2 k3 k4 k5 a b xp1 xp2 yp1 yp2 Ro xc yc Va Vr Vr2 x_poc
a=1;
b=5;
%-----Koordinate pocetne pozicije, pocetna orijentacija i koordinate cilja---
% x_poc=2;
% y_poc=0;
% xc=3;
% yc=10;
% theta_poc=pi/2;
x_poc=10;
y_poc=0;
xc=-1;
yc=10;
theta_poc=pi/2;
%-----Parametri sustava-----
k1=1;
k2=1;
k3=1;
k4=1;
k5=1;
Va=0.2;
Vr=0.4;
Vr2=0.8;
Ro=1.2;
%-----Pocetni uvjeti-----
xy0=[x_poc y_poc x_poc y_poc theta_poc 0 0];
%-----Prepreke-----
% xp1=[2 2 2 7 2 2 4 2 -2 -2 0 0 2 3 2 2 7 7 8 8 1 2 2 1];
% yp1=[3 4 4 4 6 6 6 5 7 8 8 7 9 9 9 8 8 9 9 8 2 1 1 2];
% xp2=[7 2 7 7 2 4 4 4 -2 0 0 -2 2 3 3 3 7 8 8 7 1 1 2 2];
% yp2=[3 3 4 3 5 6 5 5 8 8 7 7 8 8 9 8 9 9 8 8 1 1 2 2];

xp1=[3 2 4 0 0 2 2 5 6 4 1 1 1 6 -2 0 -2 -2 3 3 2 -4 -4 -2 -2];
yp1=[1 2 2 4 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 8 9 9 8 6 7 7 6];
xp2=[2 4 3 0 2 2 0 6 4 5 6 1 6 6 -2 0 0 0 2 4 4 -4 -2 -2 -4];
yp2=[2 2 1 3 3 4 4 5 5 4 6 7 7 6 9 9 9 8 8 8 8 7 7 6 6];
%-----Numerika-----
tT=0:DT:T;
options=odeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-5);
[t,y]=ode45('MobRobot',tT,xy0,options);
```

```

%-----Plot-----
%-----Plot: Radni prostor-----
figure(1)
hold on
grid on
plot(xc,yc,'b*', 'Linewidth',6);
plot(x_poc,y_poc,'r*', 'Linewidth',6);
for i=1:length(xp1)
    line([xp1(i) xp2(i)],[yp1(i) yp2(i)], 'Color','k', 'Linewidth',3);
end
axis([-5 10 0 10]);
legend('Cilj', 'Pocetna pozicija', 'Prepreke');
xlabel('X[m]'); ylabel('Y[m]');
%-----Plot: Gibanja mobilnog robota u random prostoru-----
figure(2)
hold on
grid on
plot(xc,yc,'b*', 'Linewidth',6);
plot(x_poc,y_poc,'r*', 'Linewidth',6);
plot(y(:,1),y(:,2), 'r--', 'LineWidth', 2);
plot(y(:,3),y(:,4), 'k', 'LineWidth', 2);
for i=1:length(xp1)
    line([xp1(i) xp2(i)],[yp1(i) yp2(i)], 'Color','k', 'Linewidth',3);
    hold on
end
axis([-5 11 0 11]);
legend('Cilj', 'Pocetna pozicija', 'Referentna trajektorija',...
    'Mobilni robot', 'Prepreke');
xlabel('X[m]'); ylabel('Y[m]');
%-----Plot: Gibanja mobilnog robota u x i y smjeru-----
figure(3)
subplot(2,2,1)
hold on
plot(tT,y(:,3),'k', 'LineWidth',2); xlabel('t[s]'); ylabel('X[m]');
plot(tT,xc,'r--', 'LineWidth',2);
grid on
subplot(2,2,2)
hold on
plot(tT,y(:,4),'k', 'LineWidth',2); xlabel('t[s]'); ylabel('Y[m]');
plot(tT,yc,'r--', 'LineWidth',2);
grid on
%=====
for i=1:length(y)-1
    u1(i)= (y(i+1,6)-y(i,6))/DT;
    u2(i)= (y(i+1,7)-y(i,7))/DT;
    TT(i) = tT(i);
end
%=====
%-----Plot: Brzine mobilnog robota-----
subplot(2,2,3)
plot(TT,u1,'k', 'LineWidth',2); xlabel('t[s]'); ylabel('u_1[m/s]');
grid on
subplot(2,2,4)
plot(TT,u2,'k', 'LineWidth',2); xlabel('t[s]'); ylabel('u_2[rad/s]');
grid on

```



```

%-----Plot: Odstupanje od referentne vrijednosti-----
figure(4)
subplot(2,1,1)
plot(tT,y(:,1)-y(:,3),'k','LineWidth',2); xlabel('t[s]'); ylabel('x_r-x [m]');
grid on
subplot(2,1,2)
plot(tT,y(:,2)-y(:,4),'k','LineWidth',2); xlabel('t[s]'); ylabel('y_r-y [m]');
grid on

%Mobilni robot
function dy = MobRobot(t,y)
dy=zeros(7,1);
%-----
global k1 k2 k3 k4 k5 a b xp1 xp2 yp1 yp2 xc yc Ro Va Vr Vr2 x0 y0 x_poc
x1=y(3);
y1=y(4);
theta=y(5);
x0=[];
y0=[];
theta0=[];
%-----Trazenje prepreke-----
h=-pi/8:0.1:pi/8;
for i=1:length(h)
    kut(i)=theta+h(i);
end
for i=1:length(xp1)
    alfa1=atan2(yp1(i)-y1,xp1(i)-x1);
    alfa2=atan2(yp2(i)-y1,xp2(i)-x1);
    alfamax=max(alfa1,alfa2);
    alfamin=min(alfa1,alfa2);
    k=atan2(yp1(i)-yp2(i),xp1(i)-xp2(i));

    for j=1:length(kut)
        if and((kut(j)<=alfamax),(kut(j)>=alfamin))
            xp=(tan(k)*xp2(i)-yp2(i)+y1-tan(kut(j))*x1)/(tan(k)-tan(kut(j)));
            yp=tan(k)*(xp-xp2(i))+yp2(i);
            x0=[x0 xp];
            y0=[y0 yp];
            theta0=[theta0 kut(j)];
        end
    end
end
for i=1:length(x0)
    rx(i)=abs((y(1)-x0(i)));
    ry(i)=abs((y(2)-y0(i)));
    r(i)=(y(1)-x0(i))^2+(y(2)-y0(i))^2;
end
%-----Atraktivni potencijal-----
dUa_dx=tanh(a*(y(1)-xc));
dUa_dy=tanh(a*(y(2)-yc));
%-----Repulzivni potencijal-----
dUr_dx = 0;
dUr_dy = 0;
for i=1:length(x0)
    if sqrt(r(i))<=Ro;

```

```

%-----Ge FIRAS funkcija-----
dUr_dx2 = b * (1/sqrt(r(i))-1/Ro) * (rx(i)/sqrt(r(i))) * (1/r(i))*(y(1)-xc);
dUr_dy2 = b * (1/sqrt(r(i))-1/Ro) * (ry(i)/sqrt(r(i))) * (1/r(i))*(y(2)-yc);
%-----FIRAS-----
%    dUr_dx2 = b * (1/sqrt(r(i))-1/Ro) * (rx(i)/sqrt(r(i))) * (1/r(i));
%    dUr_dy2 = b * (1/sqrt(r(i))-1/Ro) * (ry(i)/sqrt(r(i))) * (1/r(i));
else
    dUr_dx2 = 0;
    dUr_dy2 = 0;
end
dUr_dx = dUr_dx - dUr_dx2;
dUr_dy = dUr_dy - dUr_dy2;
end

if ((xc-x_poc)<0)
    z=1;
else
    z=-1;
end

% -----Ukupno potencijalno polje-----
dxd = - Va*tanh(k1*dUa_dx) - Vr*tanh(k2*dUr_dx) - z*Vr2*tanh(k3*dUr_dy);
dyd = - Va*tanh(k1*dUa_dy) - Vr*tanh(k2*dUr_dy) + z*Vr2*tanh(k3*dUr_dx);
% =====
%-----Upravljacke velicine-----
no = sqrt( (y(1)-y(3))^2 + (y(2)-y(4))^2 )+eps;
vp = ((y(2)-y(4))*cos(y(5))-(y(1)-y(3))*sin(y(5))) / no;
kp = exp(-3*vp^2);
u1 = k4 * kp * no;
u2 = k5 * vp;
%-----Diff jedndzbe-----
%-----Referentna trajektorija-----
dy(1) = dxd;
dy(2) = dyd;
%-----Mobilni robot-----
dy(3) = cos(y(5))* u1;
dy(4) = sin(y(5))* u1;
dy(5) = u2;
%-----Ispis upravljackih velicina-----
dy(6) = u1;
dy(7) = u2;

```

### **11.2. Prilog 1 na CD-u**

CD/Diplomski rad/Prilog 1/Main.m  
CD/Diplomski rad/Prilog 1/MobRobot.m

### **11.3. Prilog 2 na CD-u**

CD/Diplomski rad/Prilog 2/Generiranje\_gradijenta.m

### **11.4. Prilog 3 na CD-u**

CD/Diplomski rad/Prilog 3/Generiranje\_potencijala.m

### **11.5. Prilog 4 na CD-u**

CD/Diplomski rad/Prilog 4/FIRAS funkcija/Main.m  
CD/Diplomski rad/Prilog 4/FIRAS funkcija/MobRobot.m

CD/Diplomski rad/Prilog 4/EXP funkcija/Main.m  
CD/Diplomski rad/Prilog 4/EXP funkcija/MobRobot.m