

# Numeričko modeliranje udarnih oštećenja sandwich konstrukcija pri malim brzinama udara

---

**Markulin, Matej**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:947051>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-21**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Matej Markulin**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Darko Ivančević, mag. ing. aeroing.

Student:

Matej Markulin

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Darku Ivančeviću, ponajviše što mi je pružio priliku, zatim na uloženom trudu, korisnim savjetima i što me jako puno naučio kroz ovaj kratki period.

Također, zahvaljujem se svojoj djevojci, obitelji i prijateljima na podršci tokom studija.

Posebno se zahvaljujem svojoj prijateljici Ani Vrgoč što mi je pomogla oko izrade ovog rada i bez koje ne bih uspio završiti na vrijeme.

Hvala!

*Matej Markulin*



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Matej Markulin** Mat. br.: 0035186575

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numeričko modeliranje udarnih oštećenja sandwich konstrukcija pri malim brzinama udara**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Modelling of Low Velocity Impact Damage in Sandwich Structures**

Opis zadatka:

Izvršiti numeričku analizu udarnih oštećenja *sandwich* konstrukcija pri malim brzinama udara. Mehanička svojstva, parametre geometrije sačaste jezgre i svojstva vanjskih slojeva *sandwich* ploče je potrebno odabrati na temelju kompozitnih konstrukcija koje se koriste u zrakoplovstvu.

U uvodnom dijelu rada potrebno je napraviti pregled dostupne literature o numeričkim pristupima, materijalnim modelima i modelima oštećivanja koji se koriste za modeliranje *sandwich* konstrukcija. Numeričku analizu izvršiti korištenjem programa Abaqus/Standard ili Abaqus/Explicit, a za modeliranje *sandwich* konstrukcije treba koristiti dva pristupa. U prvom pristupu se jezgra *sandwich* konstrukcije modelira pojednostavljeno kao homogen materijal. Drugi pristup treba uzeti u obzir detaljnu geometriju sačaste jezgre *sandwich* konstrukcije. U radu treba koristiti svojstva materijala i geometrijska pojednostavljenja koja se koriste za modeliranje *sandwich* konstrukcija prema dostupnoj literaturi. Korištenjem dostupnih konstitutivnih modela potrebno je izvršiti numeričku analizu udarnog oštećenja *sandwich* konstrukcije, a primijenjenu numeričku metodologiju je potrebno validirati usporedbom s analitičkim metodama ili dostupnim eksperimentalnim rezultatima. Temeljem iskustva u radu potrebno je procijeniti mogućnosti korištene numeričke metodologije za analizu realnih *sandwich* konstrukcija.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

8. ožujka 2018.

Datum predaje rada:

10. svibnja 2018.

Predvideni datum obrane:

16., 17. i 18. svibnja 2018.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1. OPĆENITO O KOMPOZITIMA.....	1
1.2. PODJELA KOMPOZITA.....	3
1.3. VRSTE MEHANIČKIH MODELA KOMPOZITA.....	5
1.4. OZNAČAVANJE OSI KOMPOZITA .....	6
1.5. MATRICE KRUTOSTI I PODATLJIVOSTI ZAPISANE POMOĆU INŽENJERSKIH KONSTANTI.....	7
1.6. OPĆENITO O UDARNIM OPTEREĆENJIMA .....	10
1.7. OPIS ZADATKA.....	11
2. SANDWICH KONSTRUKCIJE.....	12
2.1. OPĆENITO.....	12
2.2. VANJSKI SLOJEVI.....	14
2.3. JEZGRA.....	18
2.4. SANDWICH PANELI.....	25
3. NUMERIČKI MODELI.....	34
3.1. NUMERIČKI MODELI ZA OPTEREĆENJE SAVIJANJEM.....	34
3.2. NUMERIČKI MODELI ZA MODELIRANJE UDARNIH OŠTEĆENJA .....	39
4. VALIDACIJA NUMERIČKIH MODELA.....	43
4.1. TEORIJSKI PRISTUP.....	43
4.2. HOMOGENIZIRANI MODEL.....	43
4.3. SAĆASTI MODEL.....	44
4.4. USPOREDBA.....	45
5. REZULTATI.....	46
5.1. EKSPERIMENTALNI REZULTATI.....	46
5.2. REZULTATI HOMOGENIZIRANOG MODELA.....	47
5.3. REZULTATI SAĆASTOG MODELA .....	53
5.4. USPOREDBA SAĆASTOG I HOMOGENIZIRANOG MODELA.....	58
6. ZAKLJUČAK.....	61

**POPIS SLIKA**

Slika 1: Sastav kompozita [1].....	2
Slika 2: Utjecaj promjera vlakana na čvrstoću [2] .....	3
Slika 3: Kompoziti ojačani česticama [1] .....	4
Slika 4 (a i b): Kompozit s jednosmjernim (a), kompozit s dvosmjernim ojačanjem(b) [1] .....	4
Slika 5: Kompozit s trosmjernim ojačanjem [1] .....	4
Slika 6 (a i b): Kompozit s usmjerenim vlaknima (a), kompozit sa slobodnim vlaknima (b) [1] .....	4
Slika 7: Laminati [1]	
Slika 8: Sandwich paneli [1].....	5
Slika 9: Primjeri ortotropnih kompozita ojačanih vlaknima [3] .....	5
Slika 10: Ortotropni materijal podvrgnut normalnom naprezanju [3] .....	6
Slika 11: Globalni x, y, z i lokalni $x_1, y_1, z_1$ koordinatni sustav [3].....	7
Slika 12: Transformacija vlakana [1] .....	9
Slika 13: Skica sandwich konstrukcije [9] .....	12
Slika 14 (a, b i c): Vrste jezgri sandwich konstrukcija [8].....	14
Slika 15: Kompozitni slojevi raznih orijentacija [9] .....	14
Slika 16: Raspodjela sila i momenata na ploči [9].....	15
Slika 17: Modeli oštećenja vanjskih slojeva [8].....	16
Slika 18: Sačasta jezgra[11] .....	18
Slika 19: Proces izrade NOMEX-a [12].....	19
Slika 20: Dvostruke i jednostruke stjenke NOMEX-a [11] .....	19
Slika 21: In-plane i out-of-plane opterećenje .....	20
Slika 22: Geometrija sačastih konstrukcija .....	20
Slika 23: Definicija sva 3 smjera NOMEX-a.....	21
Slika 24: Stvarni materijalni model NOMEX-a [15] .....	22
Slika 25: Dijagram naprezanje – istežanje u T, L i W smjeru [14].....	22
Slika 26: Kvazi-statički test [16].....	23
Slika 27: Dinamički test [16] .....	24
Slika 28: Mehanizmi loma jezgre [8].....	24
Slika 29: Teorija sandwich konstrukcija [3] .....	26
Slika 30: Sile i momenti koji djeluju na diferencijalnom elementu [3] .....	27
Slika 31: Geometrija sandwich panela [3] .....	30

Slika 32: Model slobodno oslonjene ploče [3].....	30
Slika 33: Homogenizirani model opterećen na savijanje .....	35
Slika 34: Diskretizacija homogeniziranog modela.....	35
Slika 35: Model polovice saće .....	36
Slika 36: Opterećenje i rubni uvjeti modela sa saćastom jezgrom opterećenog na savijanje ..	37
Slika 37: Jezgra diskretizirana s 24 816 elemenata.....	38
Slika 38: Diskretizirani detaljan model opterećen na savijanje .....	38
Slika 39: Materijalni model homogeniziranog NOMEX-a .....	40
Slika 40: Položaji sandwich konstrukcije pod kutom: 0°, 5° i 15° .....	41
Slika 41: Opterećenje saćaste konstrukcije .....	41
Slika 42: Mreža konačnih elemenata saćastog modela .....	42
Slika 43: Prikaz raspodjele pomaka[m] na homogeniziranom modelu savijanja .....	44
Slika 44: Raspodjela progiba [m] za savijanje saćastog modela.....	45
Slika 45: C – scan područja oštećenja gornje ploče u ovisnosti o brzini i kutu udara [7] .....	47
Slika 46: Raspodjela naprezanja po Von Misesu [Pa] za homogenizirani model za energiju udara 10J.....	48
Slika 47:Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije [-] tijekom trajanja kontakta – homogenizirani model 0° / 10 J.....	49
Slika 48: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udara 3J – homogenizirani model.....	50
Slika 49: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udara 7J – homogenizirani model.....	50
Slika 50: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udarca 10J – homogenizirani model.....	51
Slika 51:Dijagram ovisnosti maksimalne kontaktne sile o energiji udara – homogenizirani model.....	51
Slika 52: Vrijednost Hashinovog kriterija popuštanja matrice – homogenizirani model .....	53
Slika 53: Oštećenje vanjskog sloja matrice na mjestu udara za slučaj 0° / 10J .....	53
Slika 54: Raspodjela naprezanja po Von Misesu [Pa] za saćasti model za energiju udara 10J i kut udara 0° .....	54
Slika 55: Raspodjela plastične deformacije tijekom trajanja kontakta – saćasti model 0° / 10 J .....	54



---

Slika 56: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udarca 3J – saćasti model .....	55
Slika 57: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udarca 7J – saćasti model .....	55
Slika 58: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti vremena za energiju udarca 10J – saćasti model .....	56
Slika 59: Ovisnost maksimalne kontaktne sile o energiji udara.....	56
Slika 60: Prikaz oštećenja za sve modele – saćasti model .....	58
Slika 61: Prikaz vlačnog oštećenja matrice.....	58
Slika 62: Dijagram kontaktne sile u vremenu za energiju udara 3J – za homogenizirani i saćasti model .....	59
Slika 63: Dijagram kontaktne sile u vremenu za energiju udara 7J – za homogenizirani i saćasti model .....	59
Slika 64: Dijagram kontaktne sile u vremenu za energiju udara 10J – za homogenizirani i saćasti model .....	60

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1: Matrica podatljivosti za sve vrste materijala.....	7
Tablica 2: Usporedba sandwich konstrukcija i laminata [9] .....	13
Tablica 3: Matrice krutosti sandwich konstrukcija za simetrične i nesimetrične konstrukcije	29
Tablica 4: Elementi matrice F .....	33
Tablica 5: Mehanička svojstva vanjskih slojeva [5] .....	34
Tablica 6: Mehanička svojstva NOMEX-a [6] .....	34
Tablica 7: Mehanička svojstva vanjskih slojeva za modeliranje udara [5].....	39
Tablica 8: Usporedba modula elastičnosti u ovisnosti o progibu homogeniziranog modela...	45

---

**POPIS OZNAKA**
**Latinične oznake**

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
<b>A</b>	N/mm	Matrica istežne krutosti
<b>B</b>	N	Matrica spregnute krutosti
<b>C</b>	N/mm <sup>2</sup>	Tenzor elastičnosti
$\bar{\mathbf{C}}^c$	N/mm <sup>2</sup>	Matrica krutosti jezgre <i>sandwich</i> konstrukcije
<b>D</b>	Nmm	Matrica savojne krutosti
<b>E</b>	GPa	Modul elastičnosti
$E_{ij}, i,j=1,2,3$	GPa	Moduli elastičnosti u pravcu glavnih materijalnih osi
$E_k$	J	Kinetička energija prilikom udara
<b>G</b>	GPa	Modul smičnosti
$G_{ij}, i,j=1,2,3$	GPa	Moduli elastičnosti u pravcu glavnih materijalnih osi
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijska konstanta
$h$	mm	Visina laminata
$k$	N/mm	Konstanta krutosti opruge
$k_{opr}$	-	Broj slojeva laminata
$L$	mm	Dimenzija u smjeru okomito na smjer pružanja ćelija <i>sandwich</i> konstrukcije
$L_x, L_y$	mm	Dimenzija ploče
<b>M</b>	Nmm	Vektor momenata u laminatu
$m$	kg	Masa
<b>N</b>	N	Vektor sila u laminatu
$p$	N/mm <sup>2</sup>	Jednoliko kontinuirano opterećenje
<b>Q</b>	N/mm <sup>2</sup>	Reducirana matrica elastičnosti u sustavu glavnih materijalnih osi

---

$\bar{\mathbf{Q}}$	N/mm <sup>2</sup>	Reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu
$\bar{\mathbf{Q}}_k$	N/mm <sup>2</sup>	Reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu za sloj $k$
$\mathbf{S}$	mm <sup>2</sup> /N	Tenzor podatljivosti
$\bar{\mathbf{S}}$	N/mm	Matrica smične krutosti <i>sandwich</i> konstrukcije
$\mathbf{T}_\sigma$	-	Matrica transformacije tenzora naprezanja
$\mathbf{T}_\varepsilon$	-	Matrica transformacije tenzora deformacija
$T$	mm	Dimenzija u smjeru pružanja ćelija <i>sandwich</i> konstrukcije
$t$	mm	Debljina stijenke ćelije <i>sandwich</i> konstrukcije
$U$	J	Energija deformiranja
$u, v, w$	mm	Pomaci u smjeru osi $x, y$ i $z$
$u^0, v^0, w^0$	mm	Pomaci srednje površine višeslojnog kompozita u smjeru osi $x, y$ i $z$
$V_x, V_y$	N	Poprečne sile
$W$	mm	Dimenzija u smjeru okomito na smjer pružanja ćelija <i>sandwich</i> konstrukcije
$Z_T$	MPa	Vlačna čvrstoća u smjeru osi $z$
$Z_C$	MPa	Tlačna čvrstoća u smjeru osi $z$
$z$	mm	Udaljenost $i$ -tog sloja laminata od referentne ravnine
$X_T$	MPa	Vlačna čvrstoća u smjeru vlakna
$X_C$	MPa	Tlačna čvrstoća u smjeru vlakna
$Y_T$	MPa	Vlačna čvrstoća okomito na smjer vlakna
$Y_C$	MPa	Tlačna čvrstoća okomito na smjer vlakna

---

**Grčke oznake**

Oznaka	Mjerna jedinica	Opis oznake
$\gamma$	-	Kutna deformacija
$\boldsymbol{\varepsilon}$	-	Vektor deformacija
$\boldsymbol{\varepsilon}^0$	-	Vektor deformacije srednje površine laminata
$\varepsilon_c$	-	Deformacija kolapsa
$\boldsymbol{\kappa}$	$\text{m}^{-1}$	Vektor zakrivljenosti
$\theta$	-	Postavni kut sloja
$\nu_{ij}, i,j=1,2,3$	-	Poissonovi koeficijenti s obzirom na glavne materijalnih osi
$\boldsymbol{\sigma}$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Vektor naprezanja
$\sigma_c$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Naprezanje kolapsa
$\sigma_p$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Naprezanje platoa
$\chi_{xz}, \chi_{yz}$	-	Zakreti normala u $x$ - $z$ i $y$ - $z$ ravnini
$\Omega$	J	Potencijal vanjskih sila

---

## SAŽETAK

U ovom radu provedeno je numeričko modeliranje udarnih oštećenja *sandwich* konstrukcija pri malim brzinama. Modeliranje će se vršiti na dva načina. Prvi je da jezgra bude modelirana kao homogenizirano tijelo. Drugim načinom će se modelirati stvarna geometrija saća. Materijal jezgre je NOMEX, dok se vanjski slojevi izrađuju od ugljičnih vlaknima ojačanih kompozita. Pretražena je dostupna literatura o navedenom području. Potom dane su osnove kompozitnih materijala, te temeljne jednadžbe za analitički proračun *sandwich* konstrukcija. Prikazani su modeli oštećenja jezgre i vanjskih slojeva, svojstva materijala i njihovi materijalni modeli. Proces modeliranja započinje s opisom numeričkih modela za homogenizirani i stvarni model za slučaj savijanja u linearno elastičnom području, koji će se kasnije validirati s teorijskim pristupom, te će se pronaći veza između krutosti homogeniziranog i saćastog modela. Potom opisan je postupak numeričkih modela za modeliranje udarnih oštećenja. Numeričko modeliranje oštećenja se sastojalo od variranja nekoliko brzina i nekoliko kutova udara. Zatim su se prikazali rezultati ovisnosti kontaktne sile o vremenu, te kako oni ovise o promjenama brzine i kuta udarca, te je na kraju će se sve usporediti s rezultatima dobivenim eksperimentom. Dodatno, može se vidjeti usporedba oštećenja vanjskih slojeva dobivena eksperimentalnim i numeričkim putem. Na samom kraju, ocijenjene su obje metode s obzirom na provedeni eksperiment.

Ključne riječi:

saće, modeliranje, udar, *sandwich*, NOMEX, oštećenje, homogeniziran, male brzine udara

---

**SUMMARY**

This thesis deals with numerical modeling of low velocity induced impact damage in honeycomb sandwich structures. The finite element modeling was performed employing two methods. The first method uses homogenization technique (the honeycomb core is modeled as a homogenized body), while the second model of honeycomb core represents the actual geometry. The investigated sandwich panel consists of a carbon fibre reinforced composite as facesheets and NOMEX honeycomb core. In the first, introductory section, the review of available literature is presented. In addition, the basics of mechanics of composite materials are presented, as well as the fundamental analytical equations for analysis of sandwich structures. Furthermore, FE impact damage models of core and facesheets are presented and the appropriate constitutive material model is elaborated. The finite element modeling begins with the description of numerical models for aforementioned modeling techniques of a honeycomb core. The numerical results for linear elastic bending are compared with reference theoretical data and relation between stiffness of homogenized and honeycomb model is presented. Moreover, the course of creating numerical impact damage models is shown, as well as a number of velocity and impact angle variations. The results of conducted analyses are presented in terms of time-dependent contact force during impact. Additionally, the contact force - time results dependent on the velocity and impact angle variations are shown. Finally, the obtained results are compared to the available experimental data, which enables the validation of both modeling techniques.

Keywords: honeycomb core, impact, sandwich, NOMEX, damage, homogenized, low velocity impact

## 1. UVOD

*Sandwich* kompoziti saćastih jezgri (eng. *honeycomb* ili HC) široko se koriste za komponente transporta masivnih objekata zbog pogodnih svojstava kao sposobnost apsorpcije energije, otpora tlačenju, te maloj masi.

Iako su *sandwich* HC-konstrukcije pogodne za mnoge primjene, temeljite studije su i dalje potrebne za određivanje njihovog ponašanja prilikom oštećenja (eng. *damage behaviour*).

Postoje dva prevladavajuća pristupa za proučavanje problema udarnih oštećenja kompozitnih *sandwich* HC-konstrukcija: eksperimentalna i numerička metoda. Eksperimentalno ispitivanje osigurava direktnu viziju udara i forme oštećenja i stoga je pogodno i učinkovito za dobivanje temeljnih informacija za daljnju analizu.

Numeričke simulacije predstavljaju brži, jeftiniji i jednostavniji način ispitivanja materijala, za razliku od eksperimentalnog.

Konstrukcije visokih performansi nosivih komponenti uvijek se traže u *high - tech* primjenama kao zrakoplovima, svemirskoj tehnici, satelitima ili F1 bolidima. Ove konstrukcije trebaju imati minimalnu masu, uz visoku krutost, zadovoljavajuću čvrstoću i otpornost na oštećenja (eng. *damage tolerance*). To zahtijeva konstrukciju koja zadovoljava sva zadana opterećenja, a to se postiže primjenom najboljeg materijala ili optimizacijom geometrije konstrukcije. Da se postigne optimalna konstrukcija, oba ova faktora trebaju se uzeti u obzir tijekom svih konstrukcijskih faza.

Kompozitni materijali nude mnoge prednosti u odnosu na izotropne materijale kao što je čelik, aluminij i ostali metali. Te prednosti uključuju visoku čvrstoću, nisku masu, dobru otpornost na zamor, te korozijsku postojanost. Dodatno, drugačijim rasporedom kompozitnih slojeva, svojstva materijala mogu se određivati prema posebnim zahtjevima.

### 1.1. OPĆENITO O KOMPOZITIMA

Kompoziti su materijali koji kombiniranjem dva različita materijala i njihovih svojstava dobijemo jedan novi materijal koji je kombinacija svojstava tih dvaju materijala. Ta dva materijala su matrica i ojačalo, kao što je prikazano na slici 1. I matrica i ojačalo imaju svoje zadaće.



Uloga matrice:

- Povezuje vlakna,
- Štiti vlakna od vanjskog utjecaja,
- Prenosi opterećenje na vlakna,
- Formira vanjski oblik kompozita.

Materijali iz kojih se izrađuje matrica su:

- Metali (MMC): Al, Cu, Ti, Mg legure,
- keramika (CMC):  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , SiC,
- polimeri (PMC): poliester, epoksid, vinilester, poliamid, polipropilen, polikarbonat.

Zadaća ojačala:

- osnovni nosivi element
- daje čvrstoću i krutost kompozita

Materijali iz kojih se izrađuju ojačala:

- metali: Al, W, Si, Be
- keramika: staklena vlakna
- polimeri: polietilen, aramid, ugljično vlakno [1].

Svojstva matrice i ojačala dakako ovise o samom materijalu, ali ono što ih obično karakterizira je:

Matrica:

- mala gustoća
- dobra smična nosivost

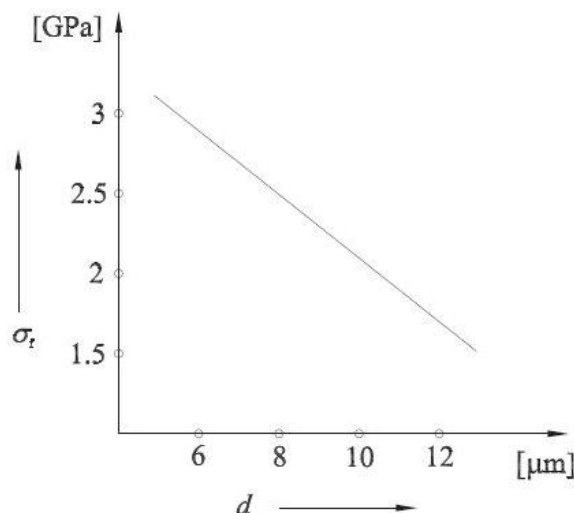
Ojačala:

- visoka krutost
- visoka čvrstoća
- mala gustoća



Slika 1: Sastav kompozita [1]

Većina materijala vlakana nema izraženo plastično tečenje nakon prestanka elastične faze, te se krhki lom događa uslijed pojave mikroskopskih pukotina, kojih je manje što su vlakna manjeg poprečnog presjeka. Naravno da tako sitnija vlakna bolje popune praznine, te time eliminiraju pukotine. Stoga vjerojatnost pojave pukotine, kasnije i loma je veća što je veći poprečni presjek vlakana, što se vidi na slici 2. Kod ovakvih materijala je često odstupanje od referentnih vrijednosti, te to svojstvo predstavlja velik problem kod proračuna i konstruiranja proizvoda od kompozita.



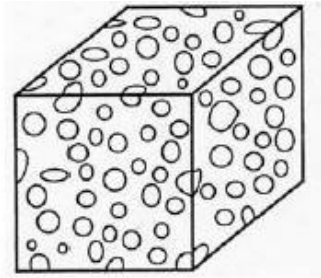
Slika 2: Utjecaj promjera vlakana na čvrstoću [2]

Svojstva matrice bitna su za određivanje uzdužne tlačne, poprečne vlačne i među slojne posmične čvrstoće, te može se reći da su ta svojstva uvjetovana matricom. U slučaju da se kompozit nalazi u agresivnom okruženju, prva stradava matrica, a preko nje opadaju mehanička svojstva kompozita [2].

## 1.2. PODJELA KOMPOZITA

Glavna podjela je prema ojačalima. Tako postoje kompoziti ojačani česticama, vlaknima i strukturni kompoziti. U ovom radu će se proučavati ponašanje *sandwich* panela, koji će kao ploče imati laminate.

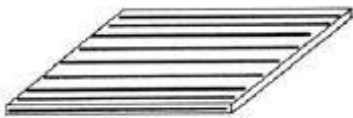
- 1) Kompoziti ojačani česticama (eng. *Particulate composite*), slika 3.



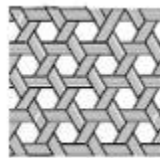
Slika 3: Kompoziti ojačani česticama [1]

2) Kompoziti ojačani vlaknima (eng. *Fibre reinforced composite*)

- Kontinuirana vlakna (duga vlakna)
  - Jednosmjerno ojačanje (eng. *unidirectional reinforcement*), slika 4a,
  - Dvosmjerno ojačanje (eng. *bidirectional reinforcement, woven reinforcement*), slika 4b,
  - Trosmjerno ojačanje (eng. *Triaxial reinforcement, woven reinforcement*), slika 5.



Slika 4 (a i b): Kompozit s jednosmjernim (a), kompozit s dvosmjernim ojačanjem(b) [1]



Slika 5: Kompozit s trosmjernim ojačanjem [1]

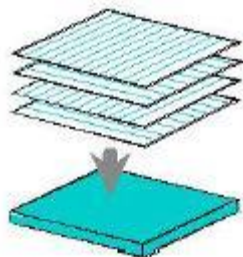
- Diskontinuirana vlakna (kratka vlakna)
  - Usmjerena vlakna (eng. *aligned*), slika 6a,
  - Slobodna vlakna (eng. *randomly oriented*), slika 6b.



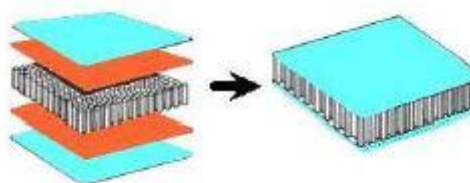
Slika 6 (a i b): Kompozit s usmjerenim vlaknima (a), kompozit sa slobodnim vlaknima (b) [1]

3) Slojeviti kompoziti (eng. *multylayered composite*)

- Laminati (eng. *laminates*), slika 7.
- Sandwich paneli (eng. *Sandwich panels*), slika 8.



Slika 7: Laminati [1]



Slika 8: Sandwich paneli [1]

### 1.3. VRSTE MEHANIČKIH MODELA KOMPOZITA

Prema njihovom ponašanju, kompoziti mogu biti karakterizirani kao anizotropni, monociklički, ortotropni, poprečno izotropni (eng. *transversely isotropic*). Odnos naprezanje – istežanje u općem obliku vrijedi za sve vrste materijala i zapisuje se

$$[\sigma] = [C] [\varepsilon] \quad (1.1)$$

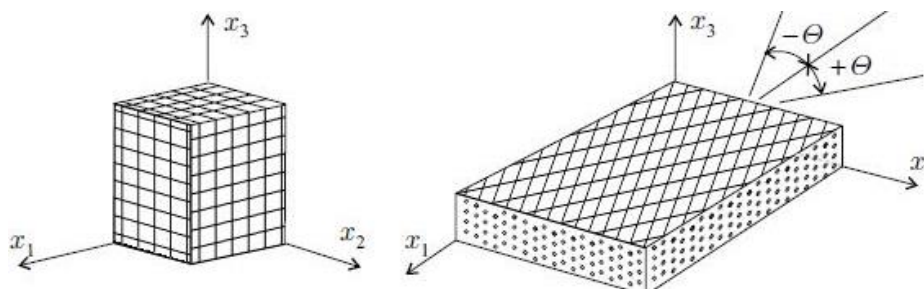
$[\sigma]$  predstavlja vektor naprezanja,  $[C]$  matricu elastičnosti, a  $[\varepsilon]$  vektor deformacija. Jednadžba se može zapisati i u inverznom obliku:

$$[\varepsilon] = [S] [\sigma] \quad (1.2)$$

gdje  $[S]$  je matrica podatljivosti, koja je inverzna matrica matrice krutosti  $[C]$ .

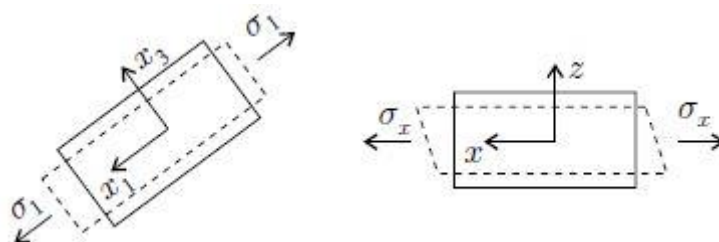
#### 1.3.1. Ortotropan materijal

Materijal je ortotropan ako postoje 3 međusobno okomite ravnine u odnosu na smjer pružanja vlakana. Slika 9 prikazuje primjere ortotropnih materijala. Lijevo je kompozit s vlaknima usmjerenim u tri međusobno okomita smjera, dok desno su vlakna usmjerena u 2 smjera:  $+\Theta$  i  $-\Theta$ , prema slici.



Slika 9: Primjeri ortotropnih kompozita ojačanih vlaknima [3]

Kod ortotropnih materijala normalna naprezanja ne uzrokuju posmične deformacije kada su ta naprezanja u  $x_1$ ,  $x_2$  ili  $x_3$  smjeru, ali opterećenja u  $x$ ,  $y$ ,  $z$  smjeru (koji se ne podudara s  $x_1$ ,  $x_2$  ili  $x_3$ ) uzrokuju smične deformacije, što je prikazano na slici 10. Lijeva slika nema posmične deformacije jer opterećenje djeluje u smjeru vlakana, dok na desnoj slici postoji smična deformacija jer nije opterećenje u smjeru ortotropije.



Slika 10: Ortotropni materijal podvrgnut normalnom naprezanju [3]

### 1.3.2. Izotropan materijal

U ovoj vrsti materijala ne postoji smjer koji ima drugačije ponašanje od drugih, te svaka ravnina je ravnina simetrije. Kompozit također može biti izotropan, a to se postiže velikim brojem vlakana, orijentiranih u velikom broju smjerova. Koordinatni sustav se može izabrati proizvoljno. Zbog svega navedenog vrijedi:

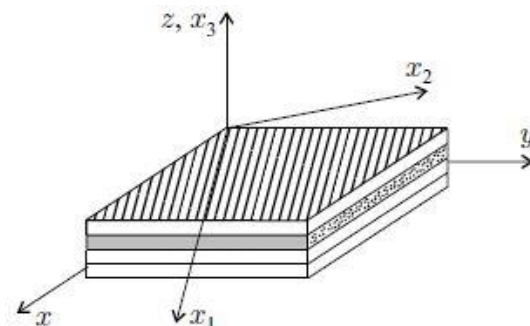
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = E; G_{12} = G_{13} = G_{23} = G; \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu; G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.3)$$

## 1.4. OZNAČAVANJE OSI KOMPOZITA

Kako je kompozit heterogen, svojstva mu variraju iz točke u točku. Na ljestvici koja je velika s obzirom na promjer vlakana, svojstva vlakana i matrice mogu biti uprosječena i materijal se može smatrati homogenim. Ta pretpostavka koristi se u makromehaničkoj analizi kompozitnih konstrukcija.

Kontinuiranim vlaknima ojačani kompozitni materijali obično imaju smjer u kojem su svojstva najbolja, te ga je lako identificirati prema orijentaciji vlakana ili ravnini simetrije. Prema tome, ako postoje više slojeva s različitim orijentacijama vlakana, logično je da će imati dva koordinatna sustava za svaki sloj. Postojat će jedan globalni sustav, koji će biti pridružen fiksnoj točki, te za svaki sloj lokalni, koji će ovisiti o smjeru pružanja vlakana. Postavni kutovi se mjere u odnosu na globalni koordinatni sustav. Lokalni koordinatni sustav se još naziva glavni materijalni koordinatni sustav.

Prema slici 11 globalni koordinatni sustav će se označiti  $x, y, z$ , a lokalni  $x_1, y_1, z_1$  koordinatni sustav. Shodno tome, pomaci će se označiti  $u_1, v_1, w_1$  za lokalni sustav, te  $u, v, w$  za globalni.



Slika 11: Globalni  $x, y, z$  i lokalni  $x_1, y_1, z_1$  koordinatni sustav [3]

Označavanje osi glavnog materijalnog koordinatnog sustava se vrši tako da:  $x_1$  je usmjeren u smjeru vlakana,  $x_2$  je okomita na taj smjer u ravnini sloja,  $x_3$  prema pravilu desne ruke.

### 1.5. MATRICE KRUTOSTI I PODATLJIVOSTI ZAPISANE POMOĆU INŽENJERSKIH KONSTANTI

Radi jednostavnijeg snalaženja, matrice podatljivosti  $S$  i matrice krutosti  $C$  obje vrste materijala su prikazane pomoću inženjerskih konstanti u tablici 1.

Tablica 1: Matrica podatljivosti za sve vrste materijala

$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{61}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{62}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{63}}{G_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$	Ortotropan materijal
---	----------------------

$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}$	Izotropan materijal
---	---------------------

Ako se radi o jednom kompozitnom sloju, on se razmatra kao ortotropan i u ravninskom stanju naprezanja, te se umjesto matrice elastičnosti  $\mathbf{C}$  koristi reducirana matrica elastičnosti  $\mathbf{Q}$ . Važno je napomenuti da se elementi  $\mathbf{Q}$  ne mogu direktno dobiti iz elemenata  $\mathbf{C}$  – članovi matrice  $\mathbf{Q}$  imaju nešto manje vrijednosti od odgovarajućih elemenata matrice  $\mathbf{C}$ . Elementi  $\mathbf{Q}$  se mogu dobiti invertiranjem  $\mathbf{S}$ , čiji se elementi ne mijenjaju pri razmatranju jednog sloja u stanju ravninskog naprezanja [2].

Odnos deformacija - naprezanje (za ortotropan element - kompozitni sloj):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ sim & S_{22} & 0 \\ S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} \quad (1.5)$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}}; \quad (1.6)$$

ili inverzno za određivanja naprezanja

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

pri čemu je  $\mathbf{Q}$  reducirana matrica elastičnosti, a ona iznosi:

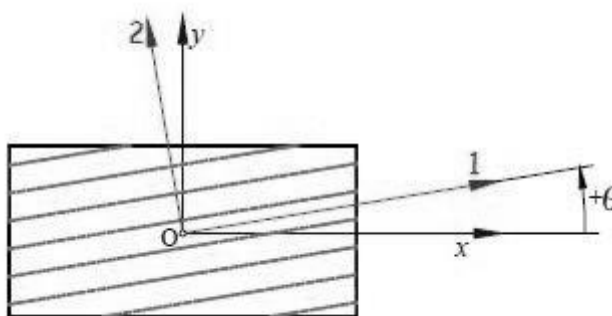
$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Članovi reducirane matrice krutosti se mogu izračunati pomoću inženjerskih konstanti:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}; \\ G_{12} &= \nu_{12} \cdot E_{21} - \nu_{12} \cdot \nu_{21} = \nu_{21} \cdot E_{12} - \nu_{12} \cdot \nu_{21}; \\ Q_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

što ukupno sadrži 4 nezavisne varijable:  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  uz  $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ .

U slučaju da postoje vlakna usmjerena pod kutom koji se ne podudara s glavnim osima globalnog koordinatnog sustava, moramo provesti transformaciju vlakana. Ovo će se osobito koristiti kod višeslojnih kompozita.



Slika 12: Transformacija vlakana [1]

$(x, y)$  – globalni koordinatni sustav

$(1, 2)$  – sustav glavnih osi materijala

Transformacija reducirane matrice krutosti se vrši prema:

$$\bar{Q} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_\varepsilon \quad (1.10)$$

gdje su transformacijske matrice  $\mathbf{T}_\sigma$  i  $\mathbf{T}_\varepsilon$  definirane kao

$$[\mathbf{T}_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$[\mathbf{T}_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$



Za materijale čija je orijentacija vlakana  $\theta = 0^\circ$ , transformirana reducirana matrica krutosti jednaka je

$$\bar{Q}^0 = [Q] \quad (1.13)$$

a za matricu gdje  $\theta \neq 0^\circ$ , transformirana reducirana matrica krutosti je jednaka

$$[\bar{Q}] = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

a njezini članovi se računaju kao

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \cos^4 \theta \cdot Q_{11} + 2 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (Q_{12} + 2Q_{66}) + \sin^4 \theta \cdot Q_{22} \\ \bar{Q}_{12} &= \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \cdot Q_{12} \\ \bar{Q}_{22} &= \sin^4 \theta \cdot Q_{11} + 2 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (Q_{12} + 2Q_{66}) + \cos^4 \theta \cdot Q_{22} \\ \bar{Q}_{16} &= \cos^3 \theta \cdot \sin \theta (Q_{11} - Q_{12}) + \cos \theta \cdot \sin^3 \theta (Q_{12} - Q_{22}) - 2 \cos \theta \cdot \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot Q_{66} \\ \bar{Q}_{26} &= \cos \theta \cdot \sin^3 \theta \cdot (Q_{11} - Q_{12}) + \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \cdot (Q_{12} - Q_{22}) + 2 \cos \theta \cdot \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot Q_{66} \\ \bar{Q}_{66} &= \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) + (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) \cdot Q_{66}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 1.6. OPĆENITO O UDARNIM OPTEREĆENJIMA

Udari se obično karakteriziraju u:

- udare pri malim brzinama (eng. *low velocity impact* - LVI),
- udare pri srednjim brzinama (eng. *intermediate velocity impact*),
- udare pri visokim brzinama (eng. *high velocity impact*),
- udare pri hiper brzinama (eng. *hyper velocity impact*).

Udari pri malim brzinama nastaju primjerice prilikom pada alata i obično ne prelaze 10 m/s. Obično se nakon ovih udaraca oštećenje ne nalazi na površini, nego je sakriveno u unutrašnjosti, a njegova pojava imaće za rezultat pad preostale čvrstoće i kraće vrijeme trajanja konstrukcije. LVI se tretiraju kao kvazi-statički slučajevi, gdje konstrukcija može biti modelirana kao opruga krutosti  $k_{opr}$ , a progib konstrukcije je proporcionalan pomaku [4].

Kinetička energija prilikom udarca iznosi

$$E_k = \frac{m v^2}{2}, \quad (1.16)$$

---

dok se brzina može izračunati, ako pada slobodnim padom:

$$v = \sqrt{2 g h}, \quad (1.17)$$

gdje je  $h$  visina, a  $g$  gravitacijska konstanta.

Postoje mnogi načini ispitivanja udara, ali najrealnije rezultate daje uređaj za testiranje udara izazvanih slobodnim padom. Na konstrukciji je moguće podesiti željenu visinu i težinu kako bismo dobili željenu energiju (brzinu) udara [4].

Brzina udara se mjeri pomoću dva senzora koji mjere vrijeme prolaska kroz njih, te pomoću međusobne udaljenosti između njih računaju brzinu projektila. Energija se računa integracijom dijagrama ovisnosti sile o vremenu. Ostali korisni dijagrami koji se mogu dobiti su energija - vrijeme i sila – pomak [4].

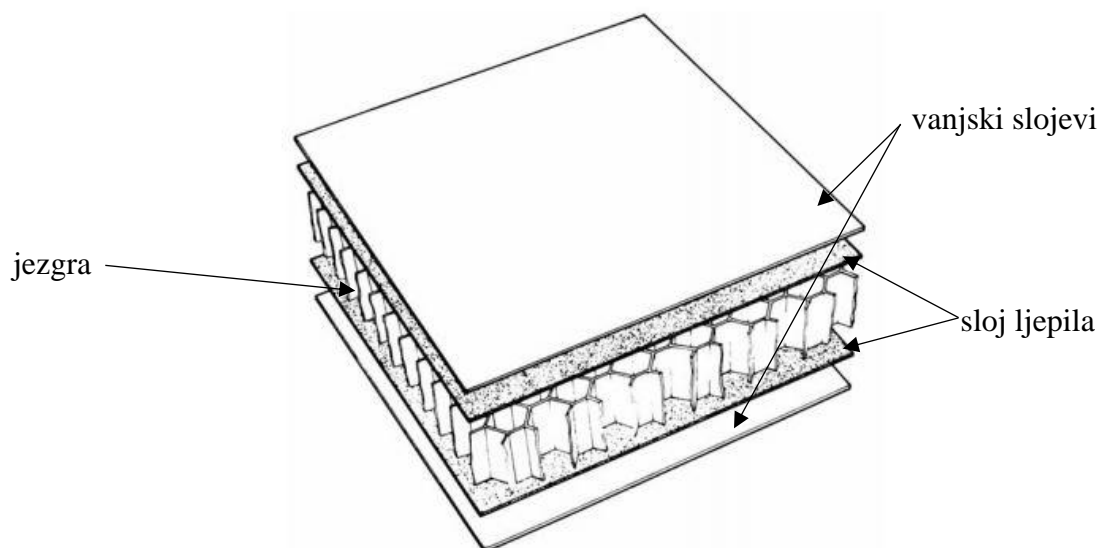
## 1.7. OPIS ZADATKA

U zadatku će biti potrebno izvršiti analizu udarnih oštećenja *sandwich* konstrukcija za male brzine udara. Numerička analiza provest će se korištenjem programa Abaqus/Explicit, i to korištenjem dva pristupa. U prvom pristupu jezgra se modelira kao homogenizirano tijelo. U drugom pristupu uzet će se u obzir detaljnu geometriju sačaste jezgre. Materijalne modele za kompozitne slojeve se preuzelo iz [5], dok se za homogenizirani NOMEX uzima iz [6]. Potrebno je izvršiti validaciju rješenja numeričkih analiza s teorijom iz [3], pošto nije pronađeno analitičko rješenje za udarno opterećenje. Dobivene rezultate potom je potrebno usporediti s onima dobivenim eksperimentalnim putem iz [7]. Na kraju potrebno je temeljem iskustva u radu dati općenitu usporedbu dvaju konstitutivnih modela, te mogućnost primjene numeričke metodologije za analizu realnih problema.

## 2. SANDWICH KONSTRUKCIJE

### 2.1. OPĆENITO




Između svih konceptualnih izvedbi kompozitnih konstrukcija, *sandwich* kompoziti su postali popularni zbog razvoja ćelijastih konstrukcija kao koncepata jezgri [9]. Sastoje se od para tankih, krutih i čvrstih vanjskih slojeva (eng. *facing, facesheet*) i relativno debele i lagane jezgre (eng. *core*), koja razdvaja ploče i prenosi opterećenje s jedne na drugu, te sloj ljepila (eng. *adhesive layer*) koje prenosi smična i aksijalna opterećenja na jezgru. Glavna uloga jezgre je povećanje momenta tromosti presjeka zbog Steinerovog dodatka koji nastaje kad se vanjski slojevi udalje jedan od drugoga.



Slika 13: Skica *sandwich* konstrukcije [9]

Tablica 2 prikazuje usporedbu savojne krutosti i čvrstoće *sandwich* konstrukcije i pune, čvrste grede koristeći jednostavnu teoriju grede [9]. Razdvajajući čvrstu gredu na dva dijela i stavljajući između njih jezgru dobivamo *sandwich* panel. Srednji panel teži malo više nego laminat, ali su mu svojstva znatno bolja. Povećavajući visinu jezgre, ta razlika još više dolazi do izražaja.

Tablica 2: Usporedba *sandwich* konstrukcija i laminata [9]

			
Relativna savojna krutost	1	7,0	37
Relativna savojna čvrstoća	1	3,5	9,2
Relativna težina	1	1,03	1,06

Zbog toga su *sandwich* konstrukcije pogodne za uporabu gdje su potrebne visoke performanse uz minimalnu masu, kao što su brze jahte, sportski automobili i zrakoplovna industrija.

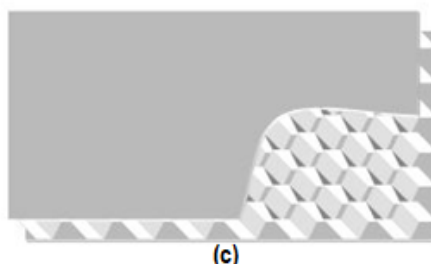
Vanjski slojevi *sandwich* konstrukcije mogu biti izrađeni od izotropnog materijala ili od vlaknima ojačanih kompozita, ali moraju biti upareni s jezgrom. Jezgra mora imati simetriju po poprečnom presjeku, te malu krutost u odnosu na ploče. Materijali korišteni za jezgru su polimeri, aluminij, drvo i kompoziti [9]. Da se smanji masa korišteni su u obliku pjena (eng. *foam*), saće (eng. *honeycomb*), i s valovitom strukturom (eng. *corrugated structure*). Pjena se nalazi na slici 14 (a), saće na slici 14 (b), a valovita struktura na slici 14 (c).



(a)



(b)



Slika 14 (a, b i c): Vrste jezgri *sandwich* konstrukcija [8]

## 2.2. VANJSKI SLOJEVI

Raspored vlakana u konstrukciji je određen zahtjevima na konstrukciju i procesom izrade dijela. Često, kompoziti su napravljeni od tankih slojeva (eng. *Laminae* ili *plies*). Nekoliko kompozitnih slojeva kombiniranih zajedno daju višeslojni kompozit ili laminat (eng. *Laminate*) kako bi se kreirala željena svojstva konstrukcije. Ako pojedini sloj ima sva vlakna u jednom smjeru on se zove jednosmjerni (eng. *unidirectional*). Svaki sloj, prema tome, može imati istu orijentaciju kao i svi ostali slojevi u konstrukciji, a može imati i različitu u odnosu na ostale. Ako je kompozitni sloj proizveden pletenjem vlakana u više smjerova zove se pleteni kompozit (eng. *Woven composite*). Isto tako, kompozitni slojevi mogu imati kratka vlakna orijentirana u istom smjeru ili raspodijeljeno nasumično.

### 2.2.1. TEORIJA VIŠESLOJNIH KOMPOZITNIH PLOČA

Jedan od najčešćih formi vlaknom ojačanih kompozitnih konstrukcija su višeslojne kompozitne konstrukcije, u kojem se jednoosno ojačani slojevi (eng. *Unidirectional ply*) raznih orijentacija slažu jedan na drugi, kao što je prikazano na slici 15.

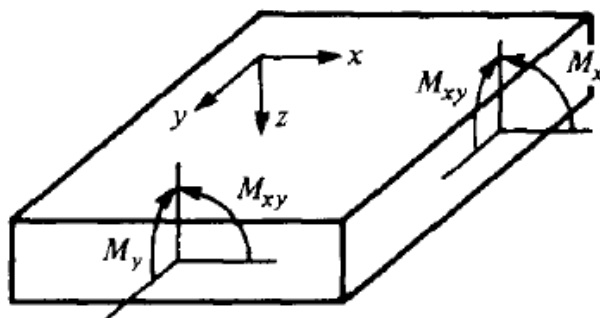


Slika 15: Kompozitni slojevi raznih orijentacija [9]

Svaki sloj je obično vrlo tanak (približno 0,1 - 0,15 mm) impregniran smolom ili drugim termičkim polimernim materijalom matrice. Orijentacija svakog pojedinog sloja u rasporedu slojeva je odabrana tako da se postignu željena svojstva višeslojne kompozitne konstrukcije. Klasična teorija kompozitnog laminata je produljenje teorije savijanja homogenih ploča, ali s dopuštanjem ravninskih sila s dodatkom momenata savijanja i variranjem krutosti svakog pojedinog sloja [9]. Počinje se pretpostavkom sila  $\mathbf{N}$  i momenata  $\mathbf{M}$  dodijeljenih ploči:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Na slici 16 je prikazana raspodjela momenata i sila.



Slika 16: Raspodjela sila i momenata na ploči [9]

Izvod matrica krutosti višeslojnog kompozita može se pronaći u [9], a ovdje će se samo dati konačne jednadžbe. Vektor sila  $\mathbf{N}$  se može zapisati kao

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \quad (2.2)$$

gdje je  $\mathbf{A}$  matrica istezne krutosti, a  $\mathbf{B}$  matrica spregnute krutosti.

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{D}} (z_{k+1} - z_k), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{D}} (z_{k+1}^2 - z_k^2). \quad (2.4)$$

Matrica  $\mathbf{A}$  daje doprinos na deformaciju na srednjoj ravnini  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  na sile  $\mathbf{N}$ , a matrica  $\mathbf{B}$  daje doprinos zakrivljenosti  $\boldsymbol{\kappa}$ .

Isto tako, rezultatni momenti po jedinici širine moraju biti u ravnoteži s momentima nastalih zbog naprezanja

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{+h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.5)$$

gdje je  $\mathbf{D}$  matrica savojne krutosti i definirana je:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{D}}(z_{k+1}^3 - z_k^3). \quad (2.6)$$

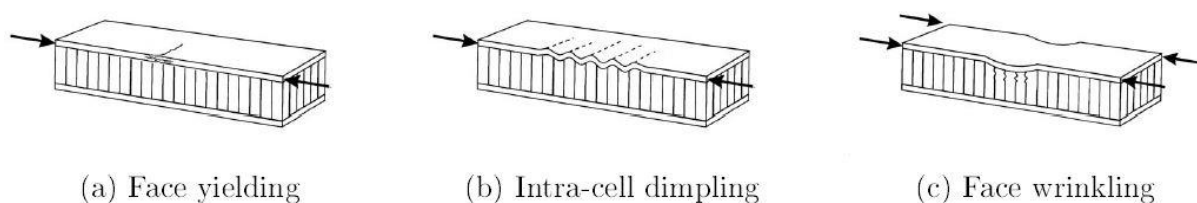
Ukupni set relacija između primijenjenih sila i momenata i rezultirajućih deformacija i zakrivljenosti u srednjoj ravnini, mogu biti sumirani u jednu matričnu jednadžbu

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  su matrice krutosti višeslojnog kompozita, dok inverzno nastaju matrice podatljivosti višeslojnog kompozita.

### 2.2.2. NAČINI POPUŠTANJA VANJSKIH SLOJEVA

Krutost sačastih konstrukcija se može lako predvidjeti, dok je čvrstoću puno teže odrediti. Tipični načini popuštanja su popuštanje vanjskih slojeva (eng. *face yielding*), gužvanje vanjskih slojeva (eng. *face wrinkling*), međucelijasto stvaranje pukotina (eng. *intra - cell dimpling*). Kritični načini loma ovise o svojstvima vanjskih slojeva, geometriji konstrukcije i primijenjenom opterećenju. Na slici 17 mogu se vidjeti sva tri modela oštećenja vanjskih slojeva.



Slika 17: Modeli oštećenja vanjskih slojeva [8]

Za opisivanje oštećenja vlaknima ojačanih kompozita u ovom radu se koristi Hashinov kriterij. Ovo je interaktivni kriterij loma gdje se koristi više od jedne komponente naprezanja za ocjenu različitih načina popuštanja. Ovaj kriterij je originalno izveden za jednousmjerne polimerne kompozite te zbog toga, primjena za druge tipove ojačanja i nepolimernih kompozita ima značajnu aproksimaciju. Obično je implementiran uz pretpostavku ravninskog stanja naprezanja u kompozitnom sloju uz modele koji uzimaju u obzir ponašanje materijala nakon inicijacije oštećenja.

Prema [10] Hashin-ov kriterij pokriva četiri načina popuštanja:

- pucanje vlakna pod vlačnim opterećenjem
- izvijanje vlakna pod tlačnim opterećenjem
- lom matrice pod poprečno vlačnim opterećenjem
- lom matrice pod poprečno tlačnim opterećenjem

Načini popuštanja uključeni u Hashinov kriterij slijede.

1. Vlačno opterećenje vlakana

$$F_f^t = \left(\frac{\hat{\sigma}_{11}}{X^T}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S^L}\right)^2 \quad (2.8)$$

2. Tlačno opterećenje vlakana

$$F_f^c = \left(\frac{\hat{\sigma}_{11}}{X^c}\right)^2 \quad (2.9)$$

3. Vlačno opterećenje matrice

$$F_m^t = \left(\frac{\hat{\sigma}_{22}}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S^L}\right)^2 \quad (2.10)$$

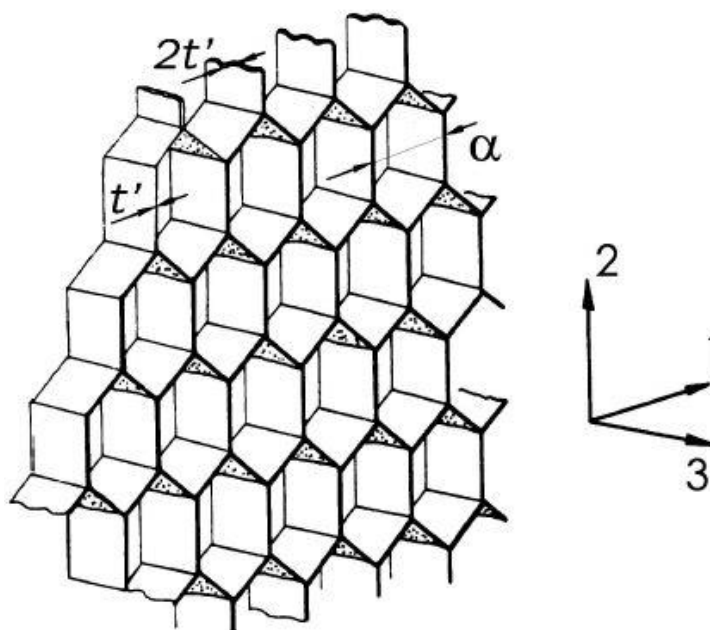
4. Tlačno opterećenje matrice

$$F_m^c = \left(\frac{\hat{\sigma}_{22}}{2S^T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y^c}{2S^T}\right) - 1\right] \left(\frac{\hat{\sigma}_{22}}{Y^c}\right) \left(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S^L}\right)^2 \quad (2.11)$$



### 2.3. JEZGRA

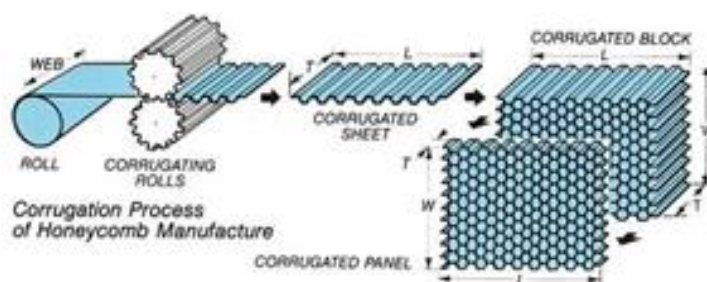
NOMEX saćaste *sandwich* konstrukcije imaju široku primjenu u zrakoplovnoj industriji, te njihova gustoća ovisi o veličini ćelije, debljini aramidnog papira i smole, te se kreće u granicama od 29 – 200 kg/m<sup>3</sup> [6]. NOMEX je vrlo popularan zbog toga što posjeduje visoki omjer čvrstoće i mase. Također je električni i termalni izolator, kemijski stabilan, samogasiv je, otporan na koroziju i zamor [11].



Slika 18: Saćasta jezgra[11]

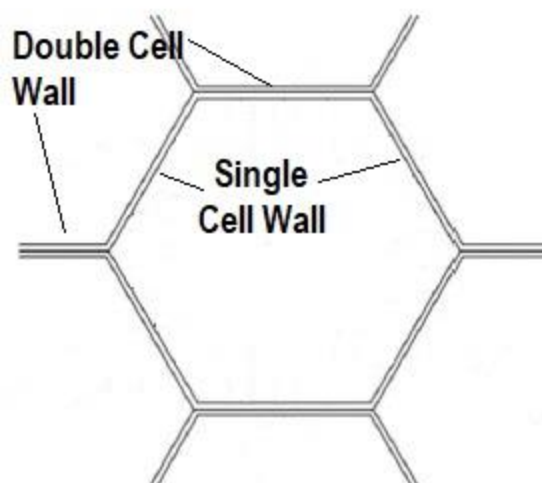
#### 2.3.1. PROIZVODNJA NOMEX MATERIJALA

NOMEX se izrađuje iz traka koje se obrađuju u smjeru označenom s 2 na slici 18 (longitudinalni smjer). Takvi se lijepe jedan za drugi u smjeru označenom s 1 (okomiti smjer) formirajući saćastu strukturu. Papirnata podloga se uranja u fenolnu smolu kako bi se izradila saćasta struktura. Zbog takvog postupka, HC struktura je anizotropna, a posebno su izražene vanravninska krutost i čvrstoća [11]. Formiranje traka u saćastu strukturu je prikazano na slici 19.



Slika 19: Proces izrade NOMEX-a [12]

Ako se pogleda proces izrade jezgre, prepoznat ćemo da se ćelije sastoje od jednostrukih i dvostrukih stjenki. Jednostruke sastoje se od jednog sloja aramidnog papira i 2 sloja fenolne smole. Dvostruki slojevi se sastoje od 2 sloja aramidnog papira i dva sloja fenolne smole. Dvostruki i jednostruki slojevi prikazani su na slici 20 [11].



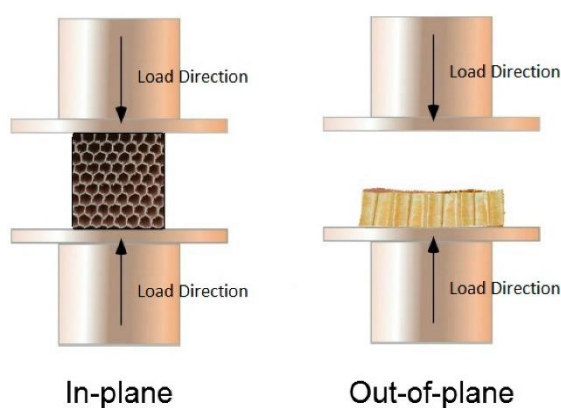
Slika 20: Dvostruke i jednostruke stjenke NOMEX-a [11]

### 2.3.2. MEHANIKA SAČASTIH KONSTRUKCIJA

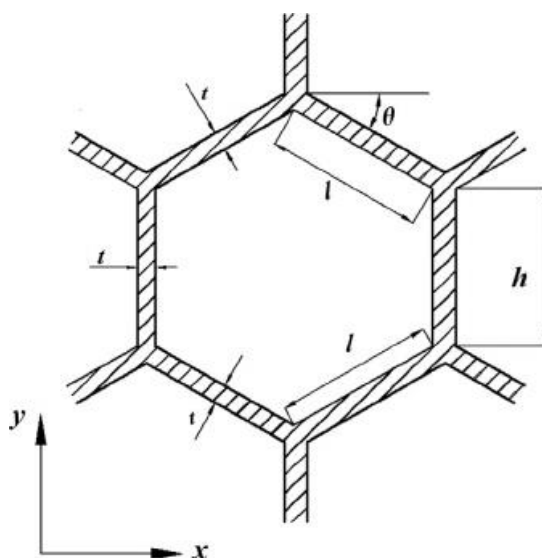
Ako se HC konstrukcija tlači u ravnini (eng. *In -plane*)(Slika 21, lijevo), ćelije se prvo tlače, te linearno elastično deformiraju. Ako se prekorači kritična deformacija, dolazi do kolapsa ćelije elastičnim izvijanjem, plastičnim pucanjem, puzanjem ili krhkim lomom, ovisno o vrsti materijalu stjenke. Kolaps ćelije završava kada stjenka ćelije dodirne susjednu stjenku. U vlačnom opterećenju ćelija prvo dolazi do savijanja (kao i kod tlačenja), ali elastično izvijanje

nije moguće. Ako materijal stjenke ćelije puca plastično, saće pokazuju izraženu plastičnost; ako su pak krhke, one odmah pucaju. Prilikom vanravninskog opterećenja (eng. *Out-of-plane*) (Slika 28, desno), stjenke ćelije trpe produljenje ili kompresiju, a modul elastičnosti i vlačna čvrstoća su mnogo viši u ovom smjeru. Razlika između ponašanja sačaste jezgre pri opterećenju u ravnini i vanravninskom opterećenju je prikazano na slici 21.

Ravninska krutost i čvrstoća ( $X_1$  i  $X_2$  smjer) imaju niže vrijednosti jer se u tim smjerovima ćelije savijaju. Vanravninska krutost i čvrstoća (u smjeru  $X_3$ ) mnogo su veće jer zahtijevaju razvlačenje i kompresiju ćelija. Gore spomenute osi  $X_1$  i  $X_2$  odgovaraju osima  $x$  i  $y$  sa slike 22, a  $X_3$  odnosi se na  $z$  os također na slici 22.



Slika 21: *In-plane* i *out-of-plane* opterećenje



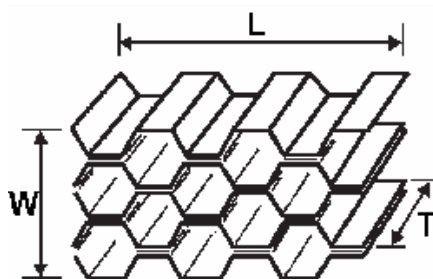
Slika 22: Geometrija sačastih konstrukcija

Na slici 22 je prikazana stvarna geometrija NOMEX ćelije. Važno je napomenuti da stranice  $h$  i  $l$  nisu jednake duljine. Za pravilne šesterokute, koji predstavljaju aproksimaciju, vrijedi  $l = h$  i  $\theta = 30^\circ$ .

Sačasti materijali deformiraju se različitim brojem mehanizama. Kod opterećenja u ravnini jezgre, stjenke ćelije se prvo savijaju, prema linearno – elastičnom zakonu, što može ići do deformacije od 10%. To je moguće jer se sačasti materijali ponašaju kao opruge. Kod vanravninskog opterećenja, ćelije mogu biti opterećene samo vlačno ili tlačno i konstrukcija je mnogo kruća [11].

Komplicirani opis modela se javlja nakon prestanka elastičnosti. Ako je riječ o plastičnom materijalu, ćelije pucaju plastičnim savijanjem za kompresiju i razvlačenje za ravninsko opterećenje, a plastičnim izvijanjem ili aksijalnim pucanjem za kompresiju i razvlačenje za vanravninsko opterećenje. To daje konstantnu vrijednost naprezanja (eng. *plateau*) u dijagramu naprezanje – istezanje (za razliku od elastičnog izvijanja), gdje je naprezanje konstantno duž velikog dijela povećanja deformacije (i do 70%) [11].

Uobičajena sačasta jezgra se sastoji od bazičnih ćelija i može biti definirana u 3 smjera: uzduž na smjer prostiranja ćelija (eng. *cross-machine direction, web direction*) – T i okomito na smjer prostiranja ćelija (eng. *machine direction, roll direction*) – L i W smjer. Orijentacija u W, L, i T smjeru je prikazano na slici 23.



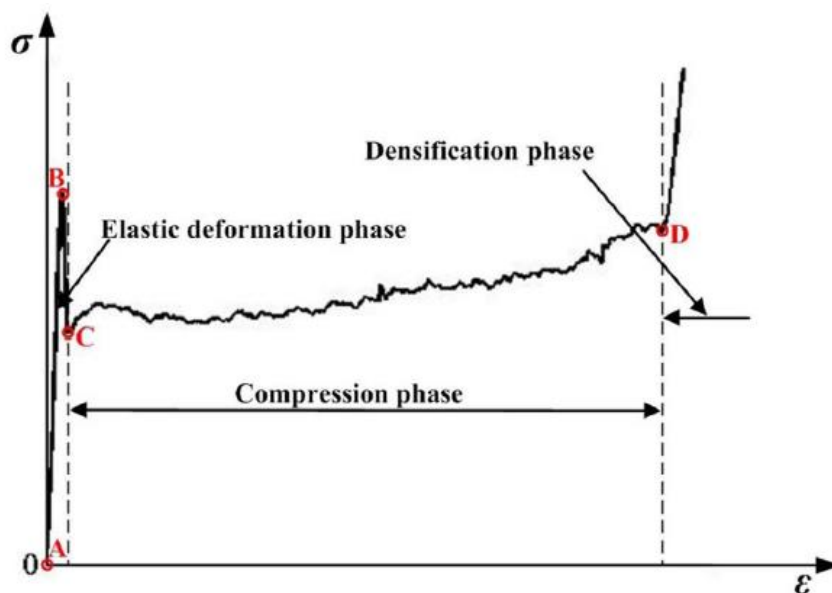
Slika 23: Definicija sva 3 smjera NOMEX-a

Materijalni model jezgre je izrazito složen. Opisuje se kao ortotropan nelinearno elasto-plastičan [13]. Stvarni model ispitivanja čvrstoće jezgre u T-smjeru je prikazan na slici 24. Sastoji se od tri faze: elastična deformacija, stabilnu deformaciju kolapsa (eng. *stable collapse deformation (plateau)*) i fazu pogušćenja (eng. *densification phase*). U prvoj fazi materijal se ponaša linearno elastično. Potom slijedi inicijacija oštećenja što rezultira naglim padom čvrstoće za jako malu deformaciju. Od te točke počinje plato faza u kojoj naprezanje ostaje približno konstantno, dok deformacija raste. Važnije oznake u dijagramu koje su nam potrebne za potpuno definiranje materijala su:

$\sigma_c$  – Naprezanje kolapsa (oznaka B),

$\varepsilon_c$  – Deformacija kolapsa (oznaka B),

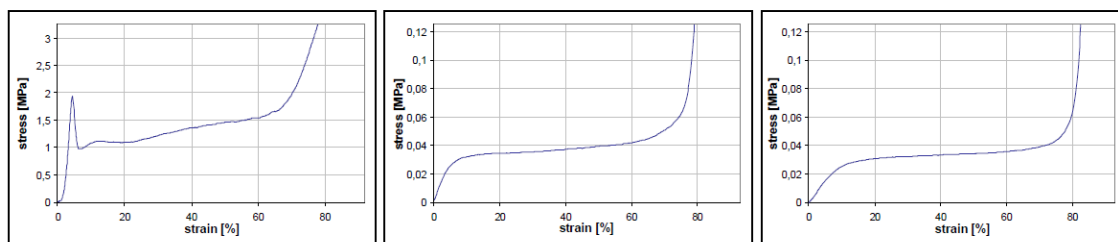
$\sigma_p$  – Naprezanje platoa (eng. *Plateau Stress*) (linija C-D) [15].



Slika 24: Stvarni materijalni model NOMEX-a [15]

Mnoge znanstvene studije su prilikom numeričke simulacije modelirale ponašanje sačaste jezgre, definirajući materijalni model jezgre kao jedan sloj sa izotropnim linearno elastično – plastičnim ponašanjem ili jedan sloj sa ortotropnim linearno elasto – plastičnim materijalnim modelom. Neki pristupi su definirali stvarno ponašanje modela, dok su drugi modelirali kao elastično – idealno plastično ponašanje.

Za primjer, dani su dijagrami na slici 25 kao orijentacijske vrijednosti. Prikazani su dijagrami naprezanje-istezanje za tlačno opterećenje u T, L i W smjeru.



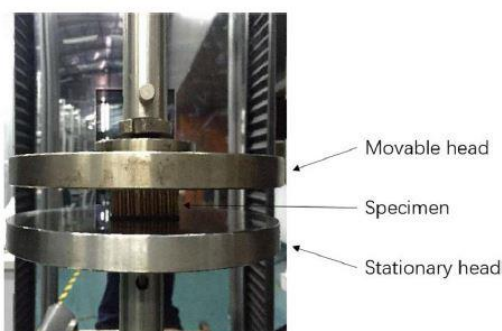
Slika 25: Dijagram naprezanje – istezanje u T, L i W smjeru [14]

Saćasti materijali sadrže jako puno zraka unutar svojih ćelija. Analizirajući efekt zarobljenog zraka pravilno, od velike je pomoći da se procijeni sposobnost apsorpcije energije materijala podvrgnutim *crash* testom (eng. *flatwise compression test*) [14].

Usporedbom saća (bez vanjskih slojeva) i jezgre kao sastavnog dijela *sandwich* konstrukcije je jedan način ispitivanja uloge zarobljenog zraka. Došlo se do zaključka da sposobnost apsorpcije energije *sandwich* panela može biti povećana kroz efekt zarobljenog zraka prilikom izrade. Prema [16], apsorbirana energija same HC jezgre bila je 47,4 kJ, dok *sandwich* konstrukcije je bila 51,5 kJ, što znači da je zarobljeni zrak preuzeo na sebe energiju u iznosu od 4,1 kJ ili 8% ukupne energije, što bi u konačnici značilo da će trebati primijeniti veću silu na *sandwich* konstrukcijama nego na samoj jezgri da bi se postiglo isto oštećenje.

### 2.3.3. ISPITIVANJE SVOJSTAVA NOMEX MATERIJALA

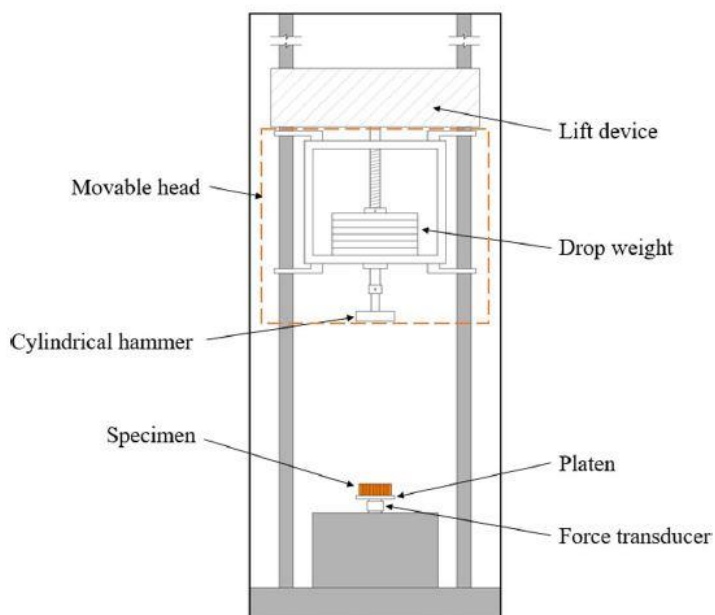
Obično postoje 2 metode mjerenje svojstava jezgre. Prvi je kvazi – statički test prikazan na slici 26. Uzorak se postavlja između stacionarne glave i pomične glave ispitnog uređaja, te je podvrgnut jednoosnom tlačnom opterećenju duž smjer T sa slike 23. Dijagram sila - pomak se dobiva iz ugrađenog sila – pomak pretvarača. Opterećenje se postavlja u obliku pomaka u vremenu, te okvirna vrijednost iznosi 0,2 mm/min, a frekvencija zapisa podataka je  $10\text{ s}^{-1}$ , tijekom cijele kvazi – statične kompresije [16].



Slika 26: Kvazi-statički test [16]

Drugi način je dinamički, udarni test, koji je prikazan na slici 27. Pretvarač sile se postavlja ispod statične ploče na kojoj se nalazi uzorak, te se spaja na instrument za dobivanje podataka. Cilindrični čekić je ugrađen na pomičnu glavu. Pomična glava se postavlja na zadanu poziciju, te se čekiću zadaje brzina (energija) kojom udara u uzorak. Uzorak se s donje strane zalijepi za

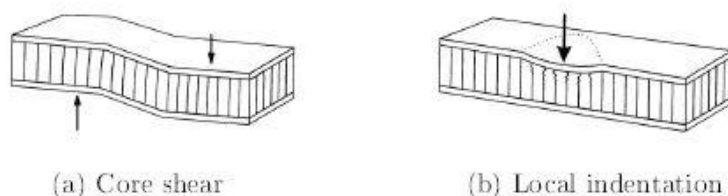
ploču, kako bi se spriječilo njegovo pomicanje u stranu i minimalizirala greška mjerenja. Brzine udarca su ovdje veće, te iznose 1 – 10 m/s za udare malih brzina. Frekvencija zapisa podataka je manja, te se zapis dobiva svakih 100 ms<sup>-1</sup>.



Slika 27: Dinamički test [16]

#### 2.3.4. MODELI OŠTEĆENJA JEZGRE

Saćaste *sandwich* konstrukcije opterećene na savijanje popuštaju tijekom sloma jezgre. Značajni načini popuštanja su smicanje jezgre (eng. *core shear*) i lokalno prodiranje (eng. *local indentation*). Kritični načini loma ovise o svojstvima jezgre, geometriji strukture i primijenjenom opterećenju. Dok je ponašanje ploča dosta jednostavno, modeliranje ponašanja jezgri je puno složenije. Ponašanje najviše ovisi o materijalu jezgre i njezinoj gustoći [8].



Slika 28: Mehanizmi loma jezgre [8]

## Smicanje jezgre

Za primjer uzima se test savijanje u 3 točke. Kako su ploče puno kruće, posmično naprezanje kroz ploče bit će linearno, a kroz jezgru konstantno. Slom nastaje kada se primijenjeno posmično naprezanje izjednači s posmičnom čvrstoćom u tom smjeru. NOMEX – i manje gustoće su posebno osjetljivi na ovu vrstu loma. Zbog anizotropnosti sačaste konstrukcije, posmična čvrstoća ovisi o smjeru opterećenja [8].

## Lokalno prodiranje

Može nastati prilikom testa savijanje u 3 točke na mjesto dodira s valjkom, te prilikom udarca stranog tijela. Krutost ploče i jezgre određuje koliko će se oštećenje širiti od točke kontakta. Slom nastaje kada se tlačno naprezanje uslijed kontakta izjednači s vanravninskom tlačnom čvrstoćom jezgre.

## 2.4. SANDWICH PANELI

### 2.4.1. MATRICE KRUTOSTI SANDWICH PANELA

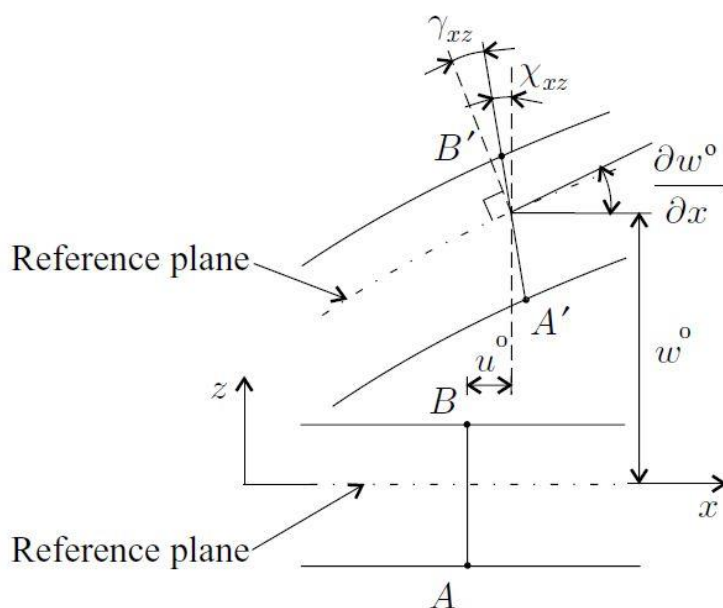
S obzirom da se nije uspjelo naći analitičko rješenje s udarnim opterećenjem, koristit će se ova metoda za analitički izračun progiba *sandwich* konstrukcije pri savijanju, te će se koristiti za validaciju numeričkih modela kasnije.

Ponašanje *sandwich* konstrukcija pri savijanju se modelira na temelju Kirchhoffovog pravila za tanke ploče, prema kojem normale na referentnu plohu ostaju ravne i okomite na srednju površinu. Pretpostavka ravnih normala je razumna, dok pretpostavka okomitosti na srednju površinu ploče više nije, jer normale na referentnu plohu (eng. *Reference plane*) ne ostaju nužno okomite, pa se piše za pomake u smjeru osi  $x$  i  $y$  na udaljenosti od referentne plohe:

$$u = u^0 - z\chi_{xz}, \quad v = v^0 - z\chi_{yz}, \quad (2.12)$$

pri čemu su  $u^0, v^0$  pomaci srednje površine ploče u smjeru osi  $x$  i  $y$ , a  $\chi_{xz}, \chi_{yz}$  zakreti normale u  $x$ - $z$  i  $y$ - $z$  ravnini.





Slika 29: Teorija sandwich konstrukcija [3]

Prema tome, prva derivacija progiba je zadana izrazom:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \chi_{xz} + \gamma_{xz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \chi_{yz} + \gamma_{yz}. \quad (2.13)$$

Deformacije na referentnoj ravni su:

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Poprečni kutovi zakreta se definiraju prema

$$\gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial x} - \chi_{xz}, \quad \gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial y} - \chi_{yz}. \quad (2.15)$$

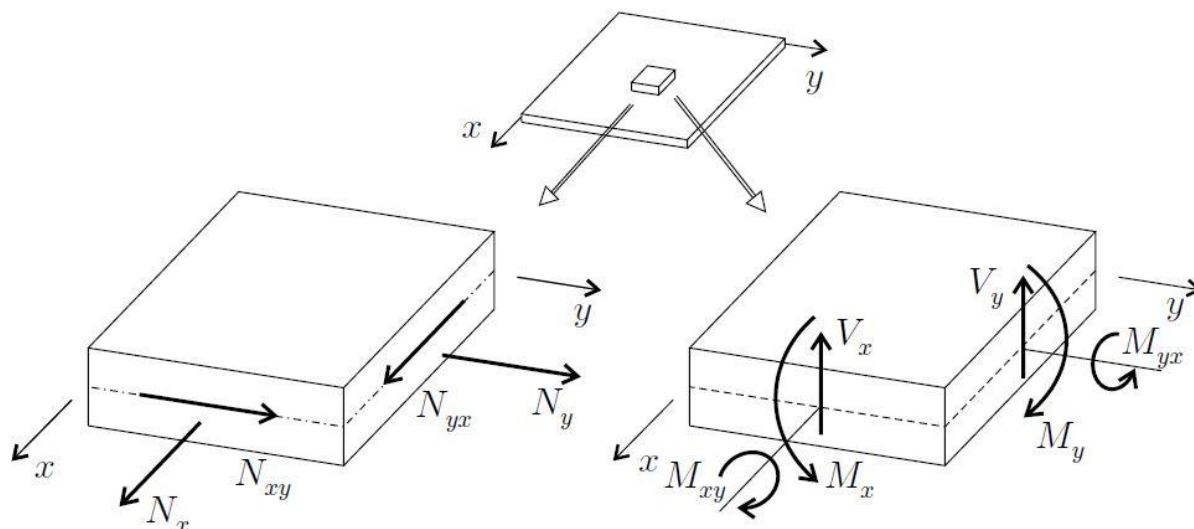
Sile i momenti na diferencijalnom elementu su:

$$N_x = \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xy} dz, \quad (2.16)$$

$$M_x = \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-h_b}^{h_t} z \tau_{xy} dz, \quad (2.16)$$

$$V_x = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xz} dz, \quad V_y = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{yz} dz, \quad (2.17)$$

gdje su  $M$  i  $N$  momenti i sile (po jedinici duljine), a  $h_t$  i  $h_b$  udaljenosti od referentne plohe.  $V_x$  i  $V_y$  predstavljaju poprečne smične sile (po jedinici duljine), a  $z$  je udaljenost po  $z$  osi. Sve sile i momenti se mogu vidjeti na slici 30.



Slika 30: Sile i momenti koji djeluju na diferencijalnom elementu [3]

Odnos naprezanje – istežanje se opisuje:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Nakon uvrštavanja gornjih jednadžbi dobivamo vezu normalnih opterećenja i deformacija:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \\ -\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \\ -\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (2.20)$$

dok za poprečna opterećenja i poprečne deformacije veza izgleda:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

gdje je  $[\tilde{S}]$  matrica smične krutosti *sandwich* konstrukcije, dok su  $[A]$ ,  $[B]$  i  $[D]$  matrice krutosti laminata definirane prema:

$$[A] = \int_{-h_b}^{h_t} [\bar{Q}] dz, \quad (2.22)$$

$$[B] = \int_{-h_b}^{h_t} z[\bar{Q}] dz \quad (2.23)$$

$$[D] = \int_{-h_b}^{h_t} z^2[\bar{Q}] dz. \quad (2.24)$$

S ciljem određivanja progiba *sandwich* konstrukcije pri savijanju, moraju se odrediti rubni uvjeti duž sva 4 ruba. Rub može biti ukliješten, slobodan ili slobodno oslonjen.

Duž ukliještenog ruba vrijedit će da su svi pomaci i kutovi zakreta jednaki nuli:

$$w^0 = u^0 = v^0 = \chi_{xz}^0 = \chi_{yz}^0. \quad (2.25)$$

Duž slobodnog ruba, gdje nema vanjskog opterećenja, vrijedit će:

$$M_x = M_{xy} = V_x = N_x = N_{xy} = 0, \quad (2.26)$$

a u slučaju slobodno oslonjenog ruba *in-plane* sile neće biti nula, te se postavlja:

$$w^0 = u^0 = 0. \quad (2.27)$$

Iz energije deformiranja linearno elastičnog materijala će se riješiti problem savijanja ploča.

Pretpostavlja se da debljina ostaje konstantna, tj.  $\epsilon_z = 0$ . Energija deformiranja je:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right)^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \left( \begin{array}{l} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right) \\ + \{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} dydx \quad (2.28)$$

U tablici 3 se nalaze izrazi za simetrične i nesimetrične *sandwich* konstrukcije za matrice krutosti. Indeksi  $t$  i  $b$  odnose se na gornji vanjski sloj (eng. *Top facesheet*) i donji vanjski sloj (eng. *Bottom facesheet*). Matrice su izvedene u koordinatnom sustavu čije ishodište se nalazi na referentnoj ravnini svake ploče. Ako su ploče simetrične po referentnoj ravnini ploče prema debljini i rasporedu slojeva,  $\mathbf{B}$  matrica iznosi nula, dok matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  se bitno pojednostave.

**Tablica 3: Matrice krutosti *sandwich* konstrukcija za simetrične i nesimetrične konstrukcije**

<b>Raspored svakog vanjskog sloja u odnosu na srednju ravninu vanjskih slojeva</b>		
	Nesimetrično	Simetrično (identični vanjski slojevi)
$[A]$	$[A]^t + [A]^b$	$2[A]^t$
$[B]$	$d^t [A]^t - d^b [A]^b + [B]^t + [B]^b$	$0$
$[D]$	$(d^t)^2 [A]^t + (d^b)^2 [A]^b + [D]^t + [D]^b$ $+ 2d^t [B]^t - 2d^b [B]^b$	$\frac{1}{2}d^2 [A]^t + 2[D]^t$

U slučaju da su gornja i donja ploča nesimetrične u odnosu na referentnu plohu svake ploče, ali su simetrični u odnosu na referentnu ravninu kompozita, matrice postanu:

$$\begin{aligned}
 [A] &= 2[A]^t, \\
 [B] &= [0], \\
 [D] &= \frac{1}{2}d^2[A]^t + 2[D]^t + 2d[B]^t.
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Odnos naprezanje istežanje za jezgru je

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{yz}^c \end{Bmatrix},
 \tag{2.30}$$

gdje su  $\bar{C}_{ij}^c$  elementi matrice krutosti jezgre, a indeks  $c$  označava da se radi o jezgri, prema engleskom nazivu *core*.

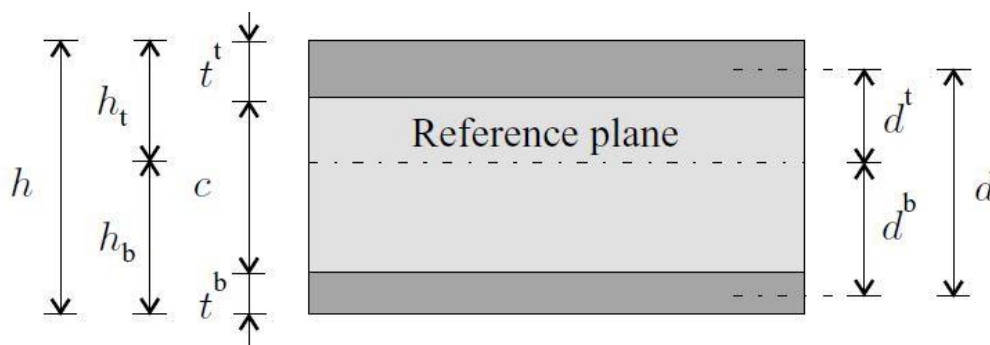
Relacija između poprečnih smičnih sila i smičnih deformacija:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \frac{d^2}{c} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (2.31)$$

Uspoređujući prethodnu jednadžbu s matricom  $\mathbf{S}$  dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} = \frac{d^2}{c} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55}^c & \bar{C}_{45}^c \\ \bar{C}_{45}^c & \bar{C}_{44}^c \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

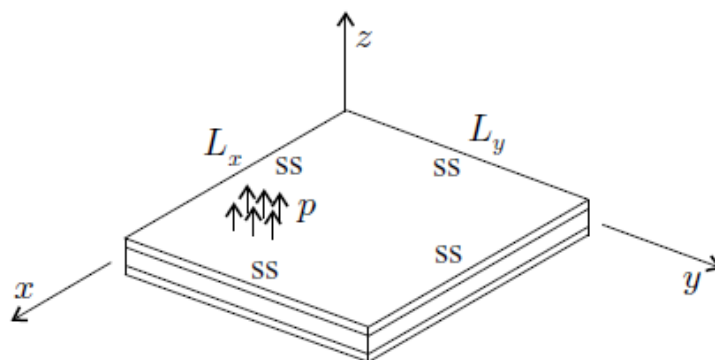
gdje je  $d = c + \frac{t_t}{2} + \frac{t_b}{2}$  prema slici 31, a sva četiri  $C^c$  elemenata matrice predstavljaju krutost jezgre. Mora se naglasiti da  $[\tilde{S}]$  nije inverzno moguće dobiti iz  $[C^c]$ .



Slika 31: Geometrija sandwich panela [3]

#### 2.4.2. PROGIB PRAVOKUTNIH SANDWICH PANELA

Razmatra se slobodno oslonjena pravokutna sandwich ploča dimenzija  $L_x$  i  $L_y$  na koju djeluje jednoliko kontinuirano opterećenje  $p$  prema slici 32. Ploča je ortotropna sa simetričnim rasporedom slojeva obzirom na srednju ravninu.



Slika 32: Model slobodno oslonjene ploče [3]

Kako bi se proračun mogao provesti potrebno je odrediti ukupnu potencijalnu energiju koja je jednaka zbroju energije deformiranja i potencijalne energije vanjskih sila. Za slobodno oslonjenu ploču opterećenu vanravninskim silama vrijedi:

$$\varepsilon^0_x = 0, \quad \varepsilon^0_y = 0, \quad \gamma^0_{xy} = 0. \quad (2.33)$$

Energija deformiranja nakon uvođenja gornjih jednažbi definirana je sljedećim izrazom:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \begin{matrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{matrix} [D] \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} + \begin{matrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{matrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \right\} dydx. \quad (2.34)$$

Za ortotropnu *sandwich* ploču vrijedit će:

$$D_{16} = D_{26} = \tilde{S}_{12} = 0, \quad (2.35)$$

a nakon uvođenja jedn. (2.14) i (2.15) energija deformiranja će iznositi:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ \left( \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \right)^2 D_{11} + \left( \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \right)^2 D_{22} + 2 \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} D_{12} + \left( \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial x} \right)^2 D_{66} + \left( \frac{\partial w^0}{\partial x} - \chi_{xz} \right)^2 \tilde{S}_{11} + \left( \frac{\partial w^0}{\partial y} - \chi_{yz} \right)^2 \tilde{S}_{22} \right] dydx. \quad (2.36)$$

Za primijenjeno okomito opterećenje  $p$ , potencijal vanjskih sila iznosi:

$$\Omega = - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (pw^0) dx dy. \quad (2.37)$$

Za slobodno oslonjenu ploču vrijede rubni uvjeti za progib, momente savijanja i kut zakreta normale:

$$w^0 = za \begin{cases} x = 0 & i & 0 \leq y \leq L_y, \\ x = L_x & i & 0 \leq y \leq L_y, \\ 0 \leq x \leq L_x & i & y = 0, \\ 0 \leq x \leq L_x & i & y = L_y, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$M_x = za \begin{cases} x = 0 & i & 0 \leq y \leq L_y, \\ x = L_x & i & 0 \leq y \leq L_y, \end{cases} \quad (2.39)$$

$$M_y = za \begin{cases} 0 \leq x \leq L_x & i & y = 0, \\ 0 \leq x \leq L_x & i & y = L_y, \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\chi_{yz} = za \begin{cases} x = 0 & i & 0 \leq y \leq L_y, \\ x = L_x & i & 0 \leq y \leq L_y, \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\chi_{xz} = za \begin{cases} 0 \leq x \leq L_x & i & y = 0, \\ 0 \leq x \leq L_x & i & y = L_y. \end{cases} \quad (2.42)$$

Progib i kutovi zakreta se definiraju prema:

$$w^0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y}, \quad (2.43)$$

$$\chi_{xz} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\chi_{xz})_{ij} \cos \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y}, \quad (2.44)$$

$$\chi_{yz} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\chi_{yz})_{ij} \sin \frac{i\pi x}{L_x} \cos \frac{j\pi y}{L_y}, \quad (2.45)$$

gdje su  $I$  i  $J$  članovi reda, izabrani proizvoljno, a  $w_{ij}$ ,  $(\chi_{xz})_{ij}$  i  $(\chi_{yz})_{ij}$  su nepoznati i procjenjuju se iz principa stacionarne potencijalne energije izražene kao:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U + \Omega)}{\partial(\chi_{xz})_{ij}} &= 0, \\ \frac{\partial(U + \Omega)}{\partial(\chi_{yz})_{ij}} &= 0, \\ \frac{\partial(U + \Omega)}{\partial w_{ij}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

U jednadžbe za energiju deformiranja i potencijal vanjskih sila potrebno je ubaciti  $w^0$ ,  $\chi_{xz}$  i  $\chi_{yz}$ . Algebarskim manipulacijama slijedi jednadžba:

$$\frac{L_x L_y}{4} \begin{bmatrix} F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{34} & F_{44} & F_{45} \\ F_{35} & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{ij} \\ (\chi_{xz})_{ij} \\ (\chi_{yz})_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4pL_x L_y}{\pi^2 ij} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.47)$$

gdje su  $i, j = 1, 3, 5 \dots$   $w_{ij}$ ,  $(\chi_{xz})_{ij}$  i  $(\chi_{yz})_{ij} = 0$  kada su  $i, j = 2, 4, 6 \dots$ . Elementi matrice  $\mathbf{F}$  su dani tablici 7, a  $(\chi_{xz})_{ij}$  i  $(\chi_{yz})_{ij}$  su definirani kao:

$$(\gamma_{xz})_{ij} = \frac{i\pi}{L_x} w_{ij} - (\chi_{xz})_{ij}, \quad (\gamma_{yz})_{ij} = \frac{j\pi}{L_y} w_{ij} - (\chi_{yz})_{ij}. \quad (2.48)$$

Tablica 4: Elementi matrice F

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= D_{11} \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^2 \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^4 \\
 F_{34} &= -D_{11} \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^3 - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{i\pi}{L_x} \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^2 \\
 F_{35} &= -D_{22} \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^3 - (D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^2 \frac{j\pi}{L_y} \\
 F_{44} &= D_{11} \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^2 + \tilde{S}_{11} \\
 F_{45} &= (D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{i\pi}{L_x} \right) \left( \frac{j\pi}{L_y} \right) \\
 F_{55} &= D_{22} \left( \frac{j\pi}{L_y} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{i\pi}{L_x} \right)^2 + \tilde{S}_{22}
 \end{aligned}$$

Progib i rotacije se određuju prema jednadžbama (2.43) i (2.48).



### 3. NUMERIČKI MODELI

#### 3.1. NUMERIČKI MODELI ZA OPTEREĆENJE SAVIJANJEM

Numerička simulacija se provela na savijanje da se napravi validacija analitičkog i numeričkog pristupa. Razlog zašto se odabire savijanje je jer će analiza kraće trajati nego udar, a i za opterećenje udarom nije bilo analitičkog rješenja.

U ovom poglavlju prikazat će se geometrija, svojstva, mreže konačnih elemenata i rezultati progiba za dva modela koji će se koristiti u analizi: homogeniziranog i sačastog. Također će se prikazati i numerički modeli za modeliranje udarnih oštećenja, te sve što je potrebno za njihovu izradu. Analize će se provesti u Abaqus/Standard tipu analize.

##### 3.1.1. MEHANIČKA SVOJSTVA KOMPOZITNIH SLOJEVA I JEZGRE

Vanjski slojevi su ugljičnim vlaknima ojačani kompoziti AS4/8552 (eng. *carbon fibre reinforced epoxy*), debljine 1,2 mm. Modelirani su kao poprečno izotropan materijal, a svojstva su dana u tablici 5. Modelira se kao linearno – elastičan model. Broj slojeva nije zadan pa se pretpostavila debljina sloja 0,12 mm. Svojstva su preuzeta iz [5].

Tablica 5: Mehanička svojstva vanjskih slojeva [5]

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$ (-)	$\nu_{13}$ (-)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
135	9,1	0,31	0,31	4,8	4,8	1600

Materijal jezgre je NOMEX oznake HRN-10-1/8-3.0 debljine 10 mm. Modul elastičnosti i gustoća su preuzeti iz [6], a prikazani su u tablici 6. Veličina ćelije se može pročitati iz oznake 1/8 (*inch*) i ona iznosi 3,175 mm. Također isto vrijedi i za gustoću, čije oznaka 3.0 (lb/ft<sup>3</sup>) definira 48 kg/m<sup>3</sup>.

Tablica 6: Mehanička svojstva NOMEX-a [6]

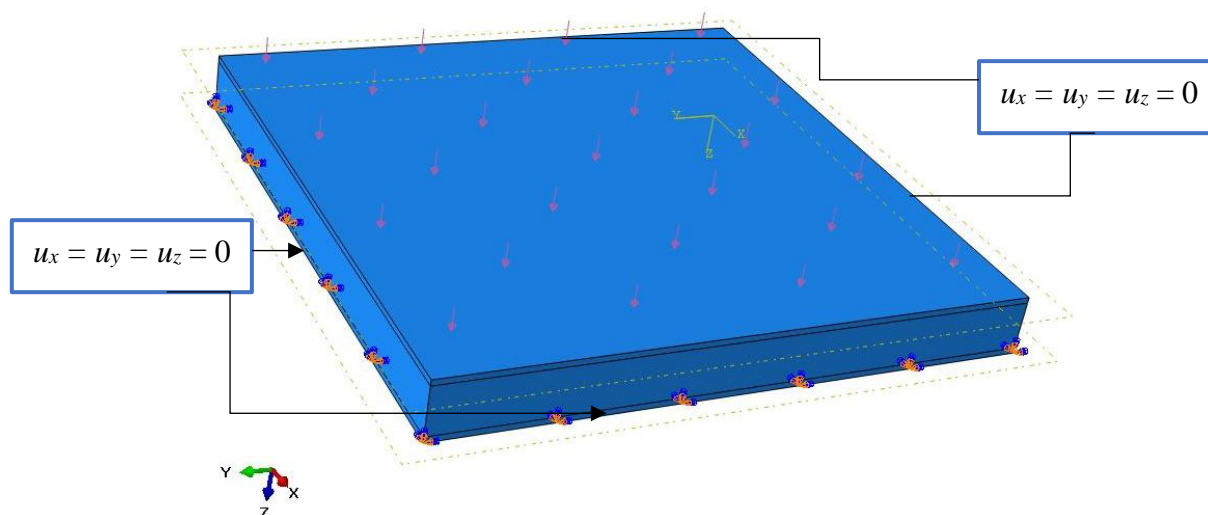
$E$ (MPa)	$\sigma_Y$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
138	2,24	48

##### 3.1.2. HOMOGENIZIRANI MODEL

Homogenizirani model *sandwich* konstrukcije je modeliran kao jedno tijelo, i jezgra i vanjski slojevi. Dimenzije modela su 120 x 120 x 12,4 mm. Debljina, 12,4 mm, se sastoji od 3 sloja:

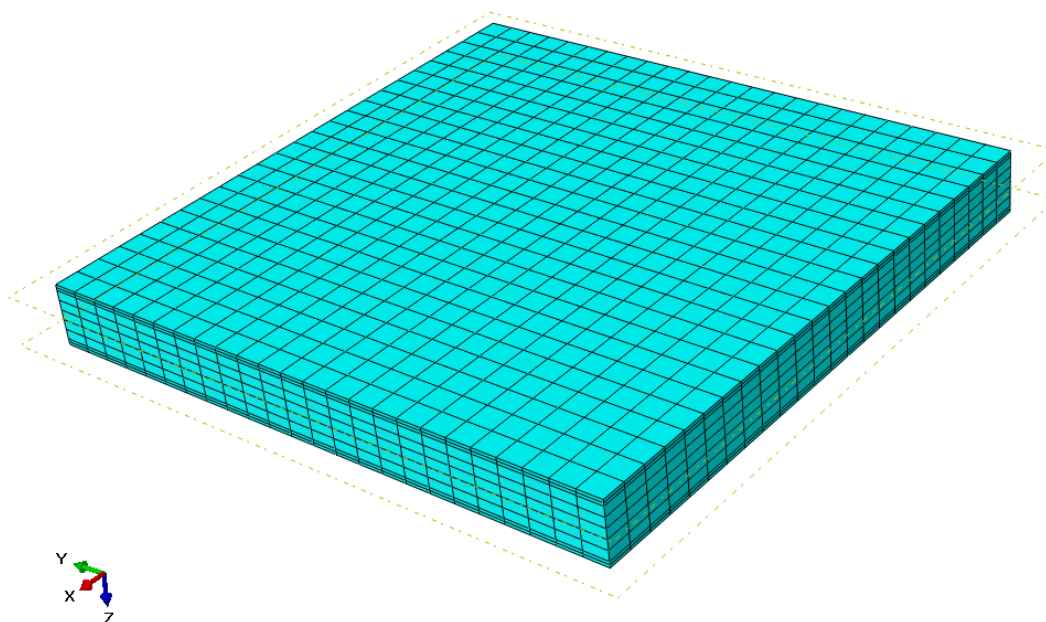
1,2 mm gornji vanjski sloj, 10 mm jezgre, te 1,2 mm donja vanjska ploče. Da bi se razdvojili vanjski slojevi od jezgre, napravljene su particije pomoću ravnina.

Na slici 33 je prikazan model opterećen tlakom iznosa 0,5 MPa s gornje strane, a rubni uvjeti su spriječeni pomaci u sva tri smjera na donjim rubovima.



**Slika 33: Homogenizirani model opterećen na savijanje**

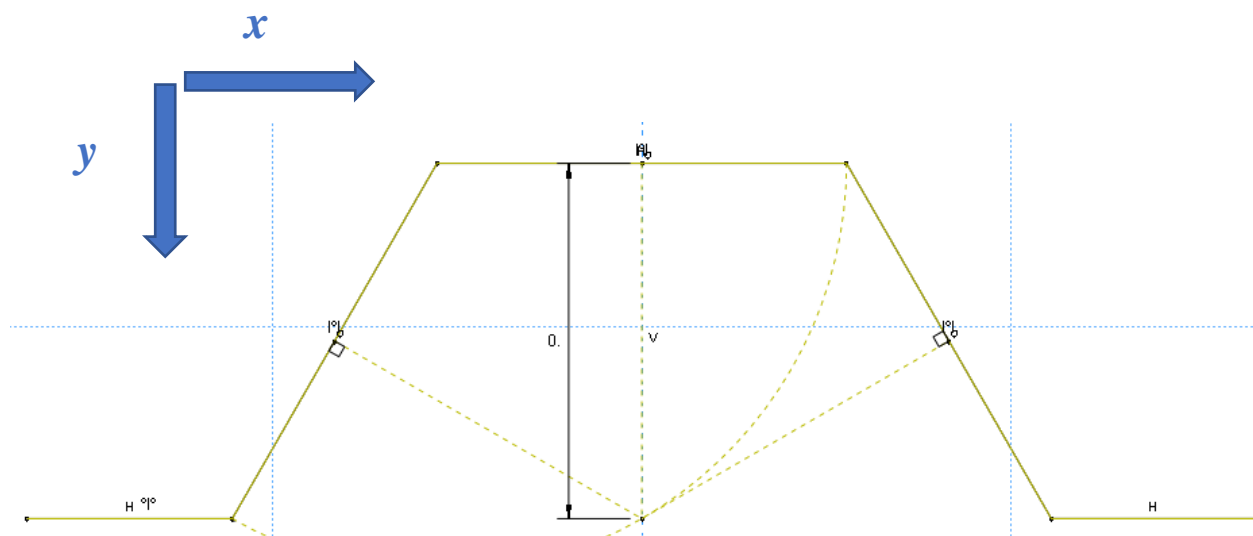
Za diskretizaciju je korišteno ukupno 5184 konačnih elemenata, od toga 2304 *Shell* heksaedarskih SC8R elemenata prvog reda, te 2 880 heksaedarskih *3D Stress* linearnih elemenata, oznake C3D8R. *Shell* elementi su korišteni za modeliranje ploča, te imaju 8 čvorova po elementu i tri stupnja slobode po čvoru, dok *3D Stress* za jezgru i također posjeduju isto osam čvorova i tri stupnja slobode po čvoru. Sve navedeno je prikazano na slici 34.



**Slika 34: Diskretizacija homogeniziranog modela**

### 3.1.3. MODEL SAĆASTE GEOMETRIJE

Dalje će se prikazati model savijanja *sandwich* konstrukcije s modeliranom saćastom geometrijom jezgre. Kako je modeliranje u drugim CAD programima, te nakon toga importiranje nazad u Abaqus, stvaralo geometrijske probleme, model se stvarao direktno u programu Abaqusu/CAE. Najprije se napravila polovica saćaste ćelije, kao što je prikazano na slici 35. Potom se model kopirao iz početne u krajnju točku, te smo dobili dvije polovice saće. Ovaj se postupak ponovio dok se nije dobio konačan broj polovica saća u  $x$  smjeru. Naredbom *Pattern* ovaj problem nije se mogao riješiti jer nije postojala dimenzija u obliku cijelog ili racionalnog broja u  $x$  smjeru koju smo mogli kopirati dovoljno puta, nego svaka dimenzija je bila iracionalni broj što je stvaralo poteškoće. Zrcaljenjem (opcijom *Mirror*) u  $y$  smjeru dobio bi se jedan red cijelih saća. Ovaj postupak se također ponovio kako bi se dobio konačan broj ćelija u  $y$  smjeru. Konačni model jezgre je dimenzija 120 x 114 mm, te debljine 10 mm. Modeliran je kao 3D *Shell* tijelo, opcijom *Extrude*, s debljinom sjenke 0,1 mm.

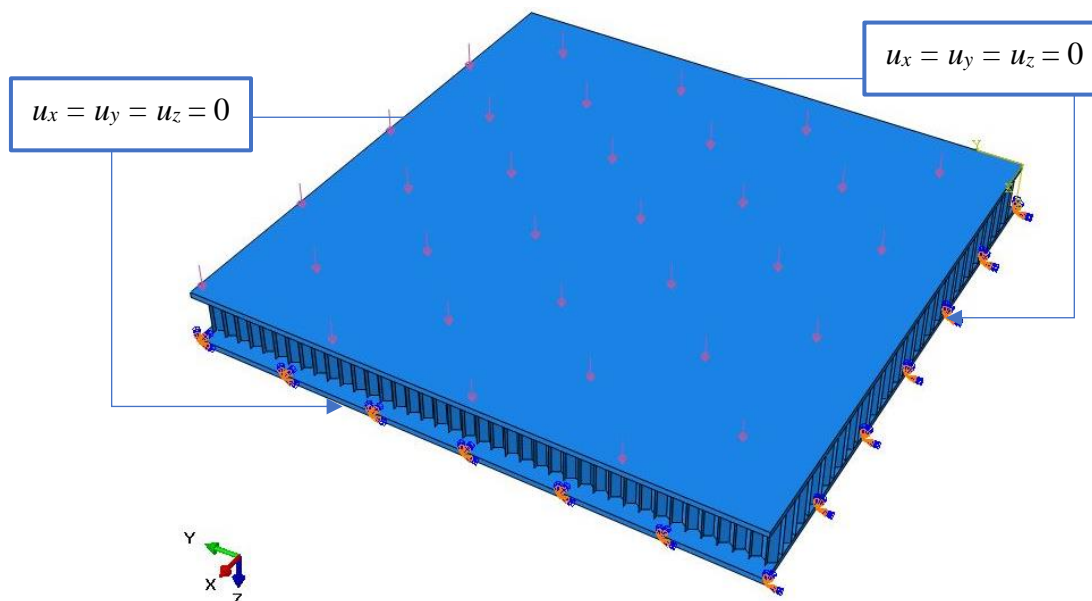


Slika 35: Model polovice saće

Pri modeliranju saćaste geometrije jezgre uvedene su brojne pretpostavke zbog pojednostavljenja procesa izrade numeričkog modela. Prvo, saće je modelirano kao regularni heksagon, što zapravo nije (vidi sliku 22). Drugo, modelirana je s jednostrukom debljinom stjenke, a kod komercijalnih kompozita prilikom proizvodnje nastaju bridovi saća koji imaju dvostruke stjenke (vidi sliku 20). Treće, jezgra se ponaša ortotropno, ali kako djeluje

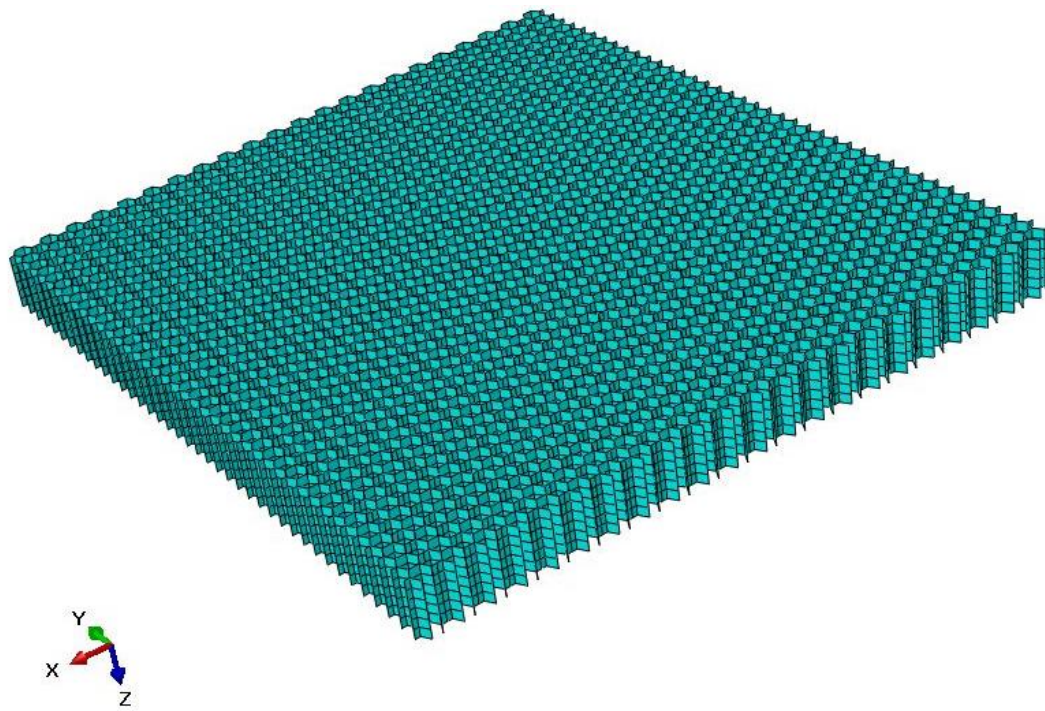
opterećenje samo u jednom smjeru, možemo ju aproksimirati linearno - elastičnim izotropnim modelom. Sve ove pretpostavke dovest će do odstupanja u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima.

Nakon modeliranja ploče i jezgre, te dodijeljivanja svojstva materijala, dolazi se do dodijeljivanja veza između pojedinih komponenata. Kako se ploče lijepe za jezgru, te se zajedno deformiraju s njom, dodijeljuje se opcija *Tie* između njih, koja ih povezuje zajedno kao jedno tijelo. Gornja ploča je opterećena ponovo tlakom 0,5 MPa tlačno kao u prethodnom primjeru. Za rubne uvjete uzima se da su na donjem rubovima svi pomaci su jednaki nuli.

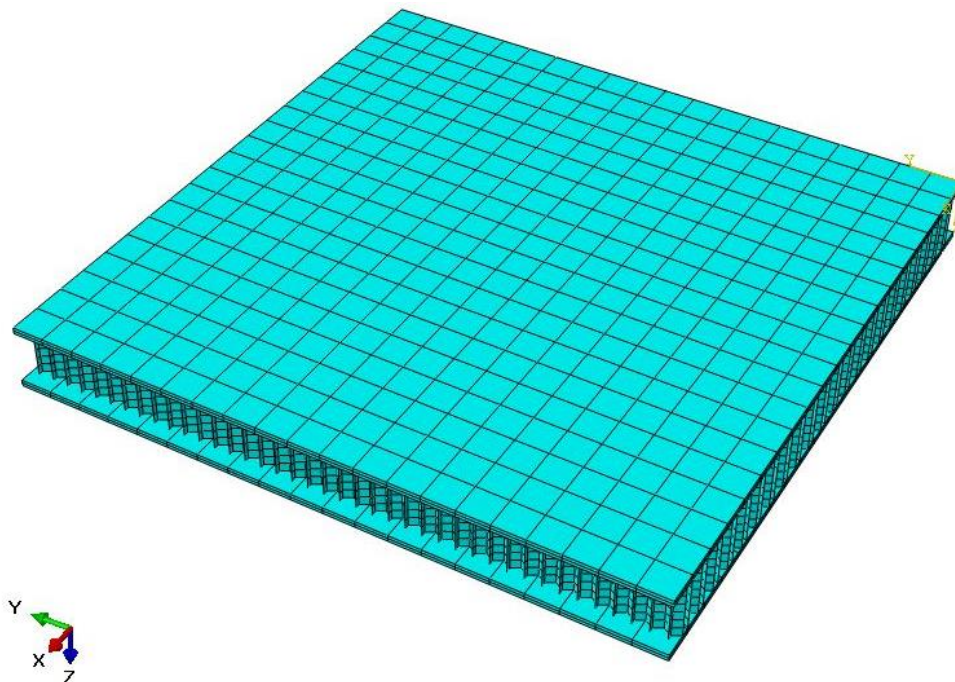


**Slika 36: Opterećenje i rubni uvjeti modela sa sačastom jezgrom opterećenog na savijanje**

36 960 S4R elemenata se koristilo za modeliranje jezgre, dok se za vanjske slojeve koristilo 800 konačnih elemenata, SC8R ljuskastih elemenata. S4R su 2D ljuskasti elementi sa 4 čvora i 6 stupnjeva slobode po čvoru, a SC8R predstavljaju 3D ljuskaste elemente s 8 čvorova i tri stupnja slobode po čvoru. Na slici 37 daje se prikaz modela diskretizacije jezgre, a na slici 38 cjelokupni model.



**Slika 37: Jezgra diskretizirana s 24 816 elemenata**



**Slika 38: Diskretizirani detaljan model opterećen na savijanje**

### 3.2. NUMERIČKI MODELI ZA MODELIRANJE UDARNIH OŠTEĆENJA

U ovom radu modelirat će se tri različite energije udara (3J, 7J i 10J), te tri različita kuta udara ( $0^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $15^\circ$ ), te će se međusobno kombinirati što daje 9 različitih slučajeva. Pokušat će se istražiti kako djeluje promjena kuta i brzine udara na oštećenje *sandwich* konstrukcije. Svi dobiveni rezultati će se usporediti s onim eksperimentalnim iz [7].

*Sandwich* konstrukcije su istih dimenzija, samo se dodaje još udarač. Udarač je kruto tijelo u obliku kugle dimenzija  $\phi 20$  mm i mase 3,62 kg. Udarač se modelirao kao 3D Shell element opcijom *Revolution*. Udaraču se pridružila inercija u iznosu mase u njegovo središte.

#### 3.2.1. MEHANIČKA SVOJSTVA KOMPOZITA

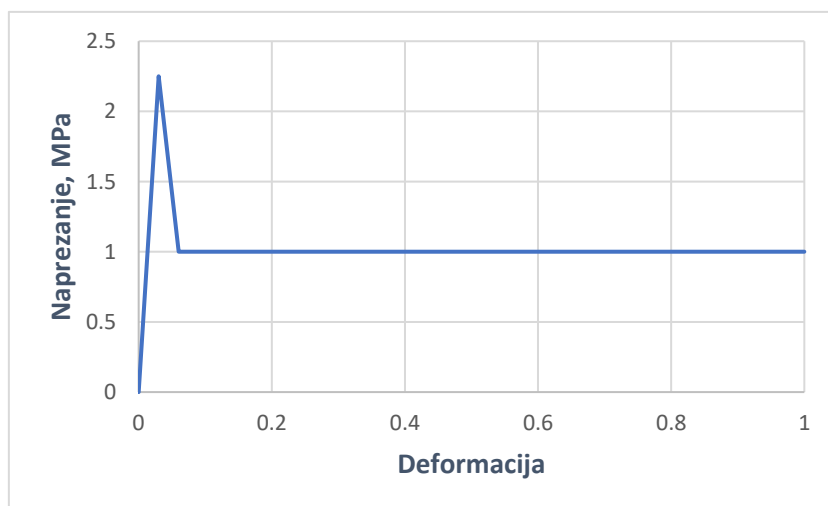
Materijal vanjskih slojeva je *Woven* kompozit koji nije jednoosno orijentiran. Jedina energije načina popuštanja za Hashinov razvoj oštećenja koja se posjedovala je bila je za jednoosno orijentirane kompozite. Stoga se vanjski sloj aproksimirao kao kompozit načinjen od 0,12 mm debelih slojeva nasumično orijentiran  $0^\circ$  i  $90^\circ$ .

Materijalni model vanjskih slojeva se modelira linearno elastičan do popuštanja koje se određuje primjenom Hashinovog kriterija prema izrazima (2.8) – (2.11). Podaci za opisivanje ponašanja vanjskih slojeva se nalaze u tablici 7 [5]. Hashinov kriterij se modelirao također prema podacima iz Tablice 7. Modelirao se i razvoj oštećenja, a koristile su se vrijednosti iz [18].

**Tablica 7: Mehanička svojstva vanjskih slojeva za modeliranje udara [5]**

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$ (-)	$\nu_{13}$ (-)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$X_T$ (MPa)	$X_C$ (MPa)	$Y_T$ (MPa)	$Y_C$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
135	9,1	0,22	0,49	4,8	4,8	2060	1570	52	267	91	1600

Ponašanje jezgre se modelira kao linearno elastično – plastično, kao što je opisano na slici 24. Svojstva su dana u tablici 6 i na slici 39, uz  $\sigma_p = 1$  MPa i  $\varepsilon = 0,03$  [6] za homogenizirani materijal.

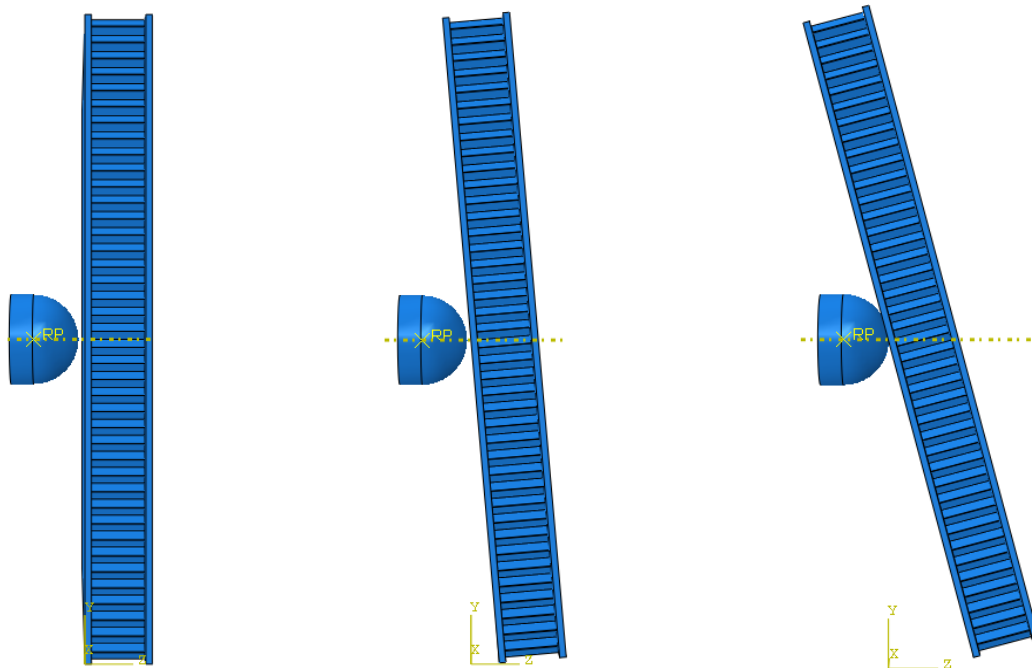


Slika 39: Materijalni model homogeniziranog NOMEX-a

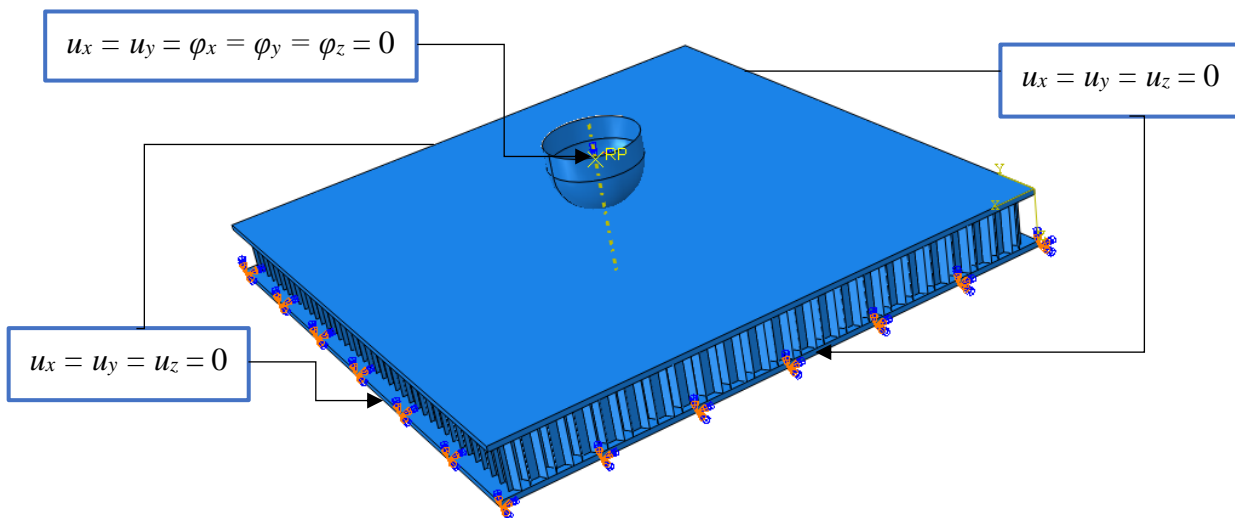
Što se tiče materijalnog modela sačastog modela, razlika je u krutosti i čvrstoći. Kod sačastog modela krutost je postavljena 138 MPa, a kod homogeniziranog 1930 MPa (vidi poglavlje 4). Što se tiče čvrstoće sačastog modela, ona iznosi  $\sigma_p = 17$  MPa i  $\sigma_c = 37$  MPa, a deformacija  $\varepsilon = 0,03$ . Vrijednost se uzela iz [19], te prilagodila krutosti od 1930 MPa.

### 3.2.2. RUBNI UVIJETI

Model je istih dimenzija kao i kod ispitivanja na savijanje. Slika 40 pokazuje sva tri položaja pod kutom pod kojim udarač udara u konstrukciju. Za rubne uvjete se uzima uklještenje donjih bridova donjeg vanjskog sloja, što znači da su sve translacije jednake nuli (rotacije nema jer elementi nemaju rotacijske stupnjeve slobode).



Slika 40: Položaji sandwich konstrukcije pod kutom:  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $15^\circ$



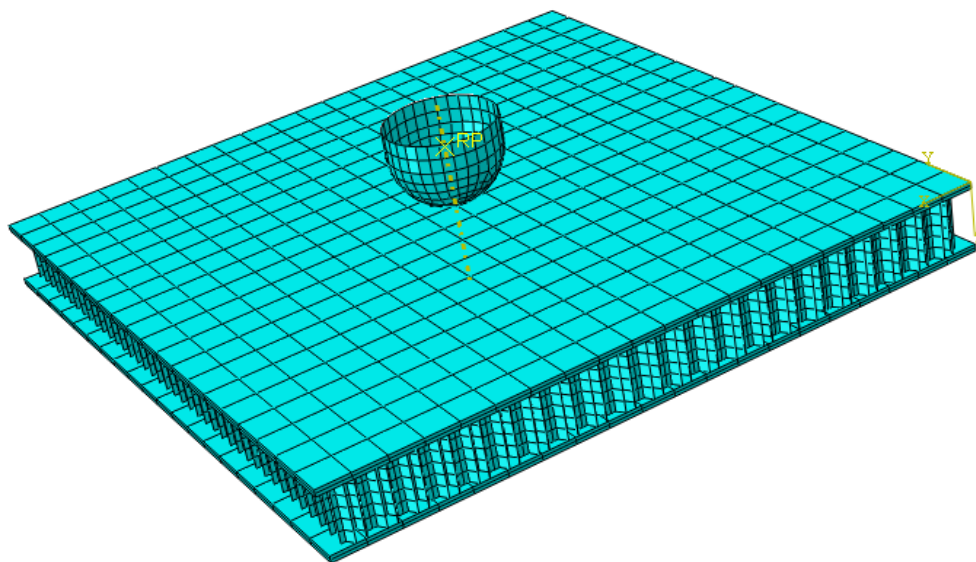
Slika 41: Opterećenje sačaste konstrukcije

Udarač se giba samo u smjeru osi  $z$ , te je potrebno ograničiti njegove stupnjeve slobode. To se postiže s  $u_1 = u_2 = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ , kao što je prikazano na slici 41. Dodatno, udaraču se zadaje brzina preko opcije *Predefined Field*. Brzina se računa iz kinetičke energije udarca (1.16), koje su zadane: 3J, 7J i 10J. Kada se pretvore one ispadnu: 3J = 1,287 m/s, 7J = 1,967 m/s i 10J = 2,351 m/s.



### 3.2.3. DISKRETIZACIJA

Mreža konačnih elemenata se sastoji od: 1600 linearnih heksaedarskih elemenata SC8R (vanjski slojevi), 248 linearnih kvadratnih R3D4 i 3 trokutna elementa R3D3 (udarač) za kruto tijelo i 30 800 linearnih kvadratnih elemenata tipa S4R (jezgra). Mreža konačnih elemenata koja se koristila u udarnim simulacijama prikazana je na Slici 42.



**Slika 42: Mreža konačnih elemenata sačastog modela**

248 linearnih kvadratnih R3D4 i 3 trokutna elementa R3D3 se koristilo za udarač, 1 600 linearnih heksagonalnih elemenata SC8R za vanjske slojeve, a 2 000 heksagonalnih linearnih elemenata naziva C3D8R bilo je potrebno za diskretizaciju jezgre.

## 4. VALIDACIJA NUMERIČKIH MODELA

U ovom poglavlju izvršit će se validacija numeričkih pristupa primjenom rezultata analitičkog pristupa za određivanje progiba pri savijanju *sandwich* ploča. Teorija je preuzeta iz [3], a opisana je u ovom radu u 2.4.2. Programski kôd je dan u dodatku ovog rada, a jedan njegov dio je preuzet iz [19]. Nastao je u matematičkom programu Wolfram Mathematica. Numeričkom metodom modelirani su dva različita pristupa: homogenizirani i sačasti. Homogenizirani je pojednostavljena verzija koja realnu geometriju aproksimira punim tijelom, dok sačasti model oponaša stvarnu geometriju jezgre. Na kraju će biti dani rezultati i njihove usporedbe.

### 4.1. TEORIJSKI PRISTUP

Pomoću programskog kôda koji je programiran prema teoriji u poglavlju 2.4.2 uz unošenje konstanti:

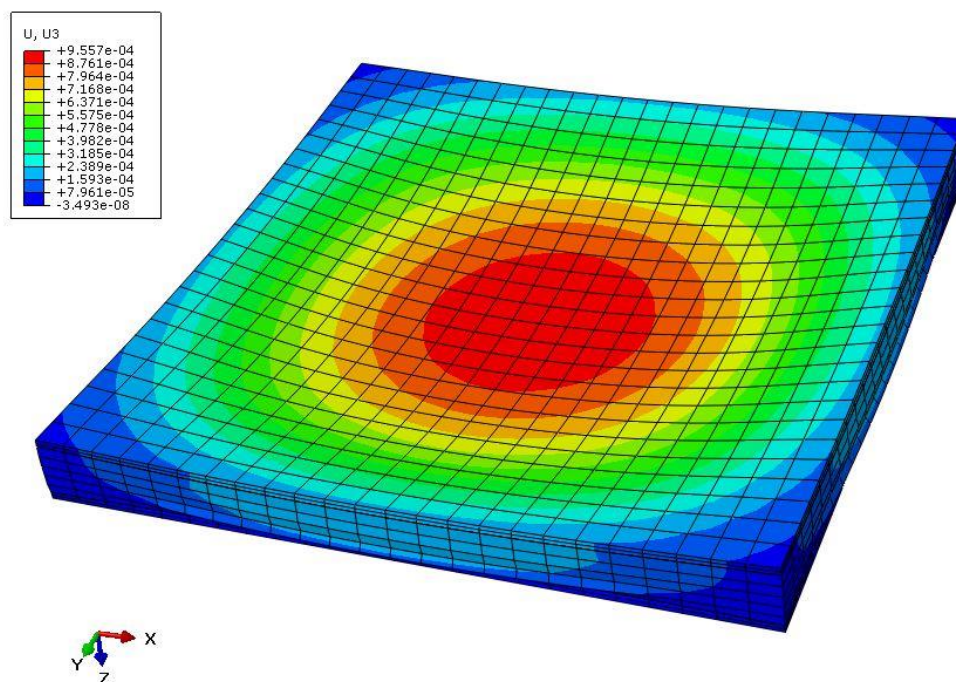
coefI = 5 ;	p = 500 000 ;	G12 = 3,7 ;	vc = 0.28 ;
coefJ = 5 ;	E1 = 68.5e9 ;	t = 0,0012 ;	vc = 0.28 ;
Lx = 0,12 ;	E2 = 9e9 ;	c = 0,01 ;	h11 = - 0,0012 ;
Ly = 0,12 ;	v12 = 0,22 ;	Ec = 138e6 ;	h21 = 0 ;
fi1 = 0 ;			

dobivamo rješenje u obliku progiba

$$w = 0,997931 \text{ mm}$$

### 4.2. HOMOGENIZIRANI MODEL

Raspodjela progiba po modelu je prikazana na slici 43. Iz slike se vidi da je maksimalni progib 0,9557 mm, što je za 4,2 % različito od analitičkog rješenja. Mogući razlozi su odnos dimenzija ploče (120 x 120 x 10 mm), pri čemu debljina iznosi više od 8% dužine (širine), te kao takva možda ne zadovoljava uvjete prema kojima je ova teorija izvedena.

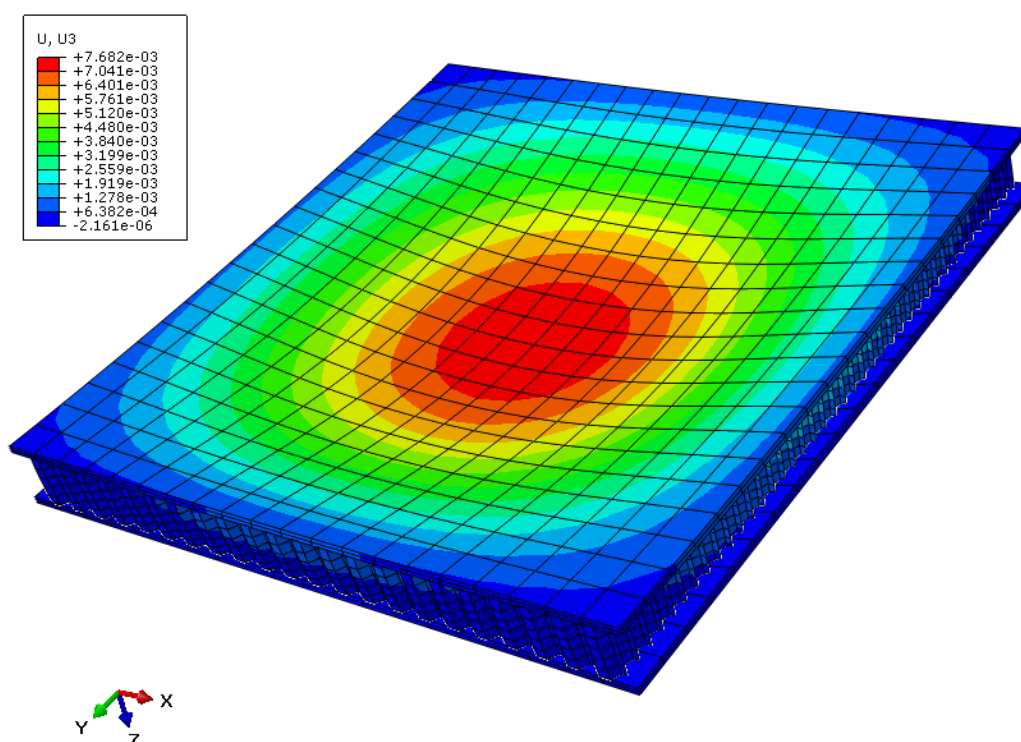


**Slika 43: Prikaz raspodjele pomaka[m] na homogeniziranom modelu savijanja**

### 4.3. SAČASTI MODEL

Izuzev geometrije, istim pristupom, kao i za homogenizirani model, dobiva se progib za sačasti model. Progib iznosi 7,68 mm. Kako je u homogeniziranom modelu model saće zamijenjen punim tijelom, bez praznina koje realni model sadrži, jasno je da ima puno više materijala koji nosi opterećenje u odnosu na realni model. Ako je naprezanje definirano kao opterećenje podijeljeno s otporom materijala, jasno je da naprezanje neće biti isto ako se na realnom materijalu znatno smanji njegova masa koja nosi to opterećenje.

Da bismo mogli modelirati udarac pomoću obje metode, potrebno je naći korelaciju između homogeniziranog i sačastog modela. Radi jednostavnijeg i bržeg računanja, ali i točnijeg, neće se uspoređivati modeli pri opterećenju udarcem nego ovi modeli opterećeni tlakom. A da bi ti progibi bili jednaki, morat ćemo povećati krutost stvarnog modela, što znači da će mu modul elastičnosti porasti. Drugog načina nije bilo, s obzirom da u dostupnoj literaturi nisu se uspjeli naći podaci za sačasti NOMEX model HRH-10-1/8-3.0.



Slika 44: Raspodjela progiba [m] za savijanje sačastog modela

#### 4.4. USPOREDBA

Nakon izrade cjelokupnog modela, a prije provedene analize bilo je potrebno varirati modul elastičnosti tako da progib oba modela bude isti, a provodila se iterativnim povećanjem vrijednosti modula elastičnosti. Nakon 10-tak provedenih analiza, progibi se slažu u drugu decimalu, što možemo nazvati pristojnom točnosti s obzirom na numeričku pogrešku.

Prikaz progiba u ovisnosti o modulu elastičnosti homogeniziranog modela je prikazan u tablici 8.

Tablica 8: Usporedba modula elastičnosti u ovisnosti o progibu homogeniziranog modela

Modul elastičnosti, MPa	138	400	800	1 500	1 800	1 950	1 930
Progib, mm	7,68	3,61	2,03	1,18	1,01	0,943	0,951

---

## 5. REZULTATI

### 5.1. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

U znanstvenom radu [7] provedena su eksperimentalna istraživanja udara u *Sandwich* konstrukcije koja će se u ovom radu uspoređivati s numeričkim rezultatima. Konstrukcija se sastoji od ugljičnim vlaknima ojačan kompozitnih ploča AS4/8552 debljine 1,2 mm i NOMEX jezgre, tipa HRH – 10 -1/8 - 3.0. Eksperiment se sastojao od udara pod četiri različita kuta i pri četiri različitim energija udara. Uz eksperimentalno istraživanje je u [7] provedena i numerička analiza udarnih oštećenja uz korištenje sačastog modela stvarne geometrije. U članku su dani dijagrami kontaktna sila – vrijeme, energija – vrijeme, progib na mjestu udara u ovisnosti o energiji udara i maksimalna kontaktna sila u ovisnosti o energiji udara. Kako je u članku navedeno da se numerički rezultati poklapaju s eksperimentom, te su tvrdnje potkrepljene pravilnim numeričkim rezultatima, pokušat će se dobiti što bliži rezultati onim eksperimentalnim. Analiza oštećenja *C-Scan* metodom je utvrdila da vidljivo oštećenje nije nastupilo pri udarima od 3J, nego se počelo inicirati pri 4,5 J.

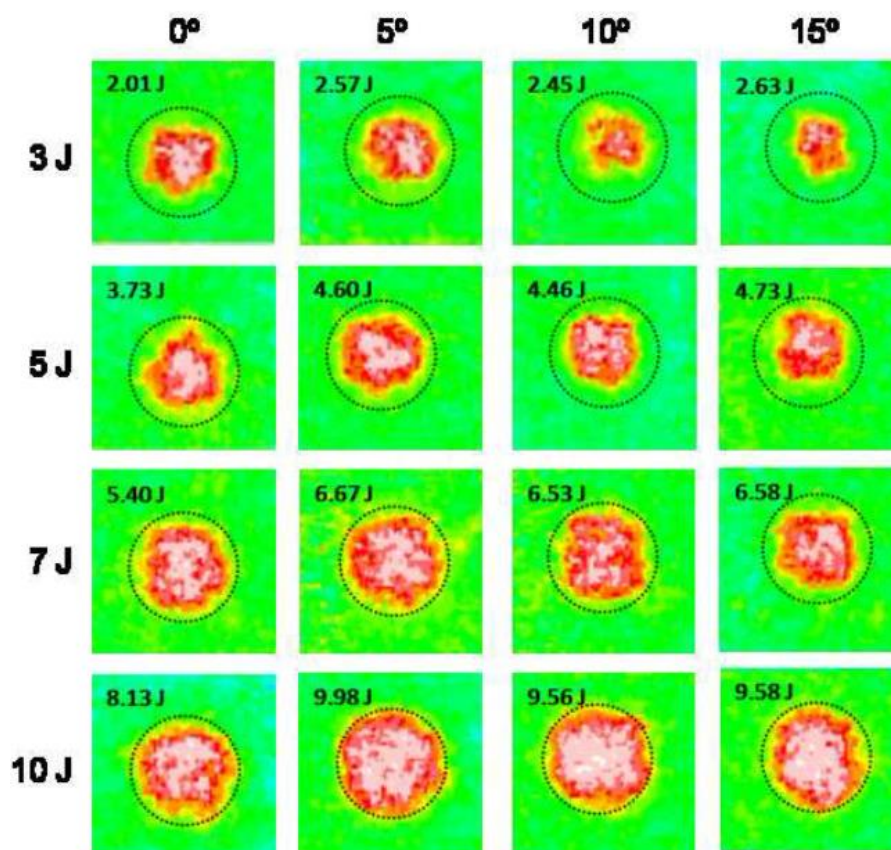
Iz istraživanja se zaključilo da vršno opterećenje raste s porastom energije udarca, a pada s porastom kuta, dok promjena kuta udara ne utječe na vrijeme trajanja kontakta. Također je utvrđeno da apsorbirana energija pada s porastom kuta udarca. Isto tako se može potvrditi da veća energija udara rezultira većim prodorom udarača, te duljim trajanjem kontakta.

Na kraju je navedeno da se rezultati eksperimenta i numerike dobro poklapaju. Maksimalna kontaktna sila se razlikuje za 8,59%, dok maksimalno vrijeme trajanja kontakta ima razliku od 16%.

Kako su dijagrami bili dosta nepregledni, odlučilo se da se pretvore u pregledniji oblik. Pomoću Web Plot Digitizer programa dijagrami u slikovnom obliku su se pretvorili digitalnom obradom u digitalni oblik, kako bi bili što čitljiviji. Program za prevođenje u digitalni oblik radi na principu prepoznavanja boje, te ide redom i pronalazi pigmente te zadane boje, zatim im pridružuje točke, prema zadanom razmaku. Jedna krivulja se sastojala od 40-tak točaka koje aproksimiraju pravo ponašanje krivulje, te se mogu izvaditi i ubaciti u program za obradu, u ovom slučaju Excel, gdje se pretvaraju u dijagrame jednostavnom interpolacijom.

Dijagrami ovisnosti kontaktne sile o vremenu neće se zasebno pokazivati, nego će se ubaciti u dijagrame za rezultate za homogenizirani i za sačasti model.

Na slici 45 mogu se vidjeti slike oštećenja za različite kutove i energije udara. Vidljivo je da se područje oštećenja značajno povećava s porastom energije udarca. Za udare pod kutom područje oštećenja se sve više lokalizira, te je najveće za  $0^\circ$ , a dalje pada s porastom kuta. Također je spomenuto da ne postoji velika razlika između rezultata za kutove  $0^\circ$  i  $5^\circ$ .



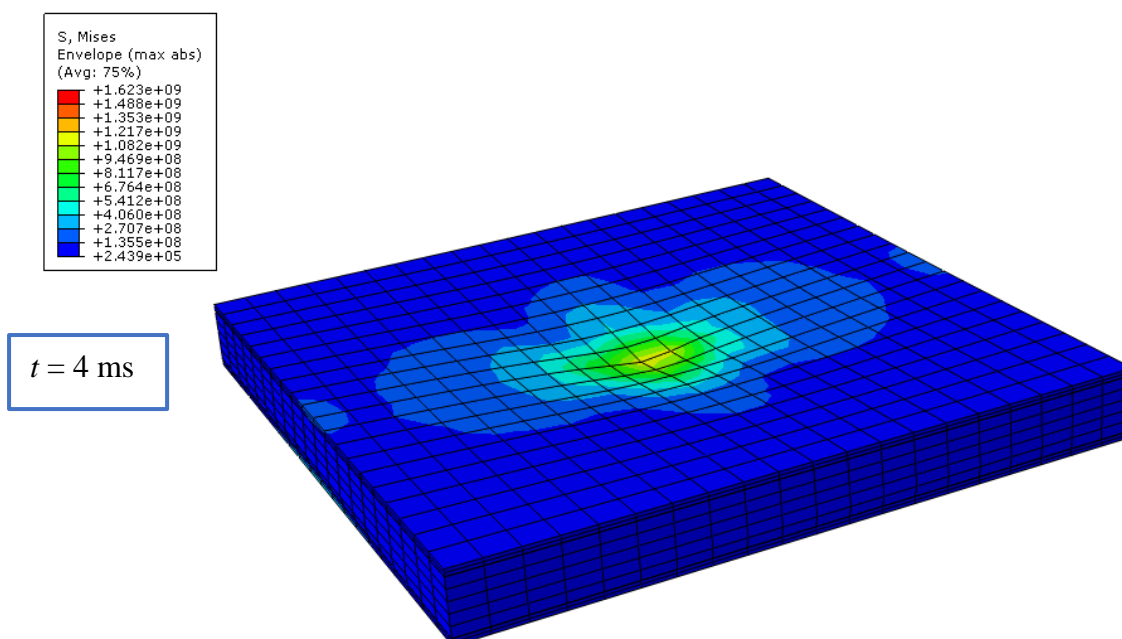
Slika 45: C – scan područja oštećenja gornje ploče u ovisnosti o brzini i kutu udara [7]

## 5.2. REZULTATI HOMOGENIZIRANOG MODELA

Svi rezultati su provedeni na računalu s procesorom Intel Core i5 3570 CPU 3,40 GHz s 8 GB radne memorije. Da bi se skratilo vrijeme trajanja simulacija, sve simulacije su pokrenute korištenjem sve četiri procesorske jezgre.

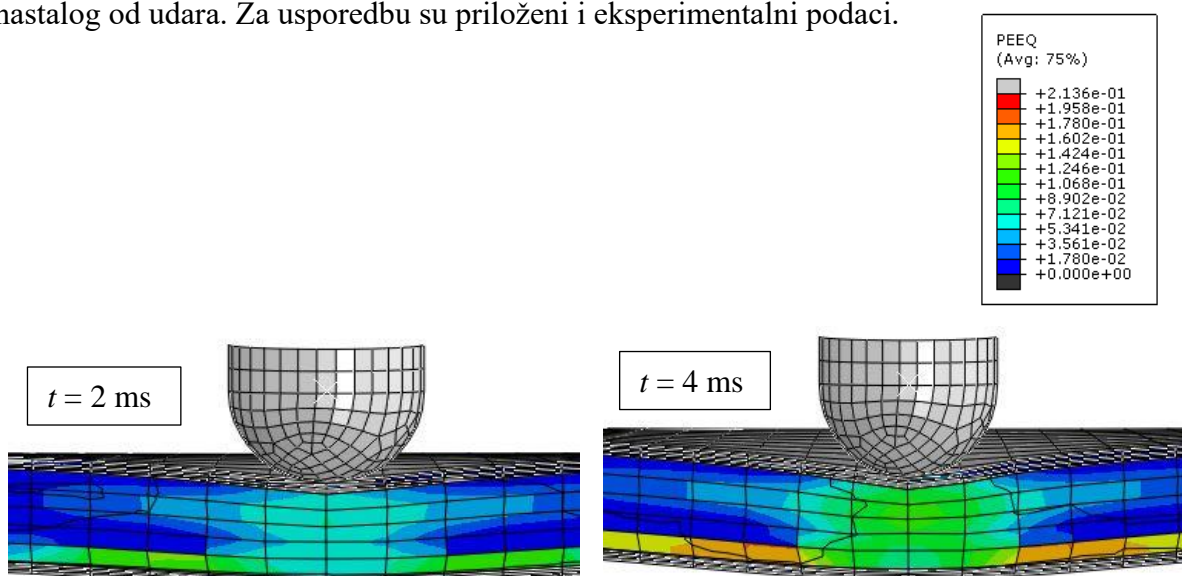
Analizirano je ukupno vrijeme od 0,012 s, a udarač je postavljen 1 mm od ploče, te mu treba oko 0,5 ms da udari u ploču. Analizirali su se slučajevi od  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $15^\circ$  i 3J, 7J i 10J sa svim međusobnim kombinacijama.

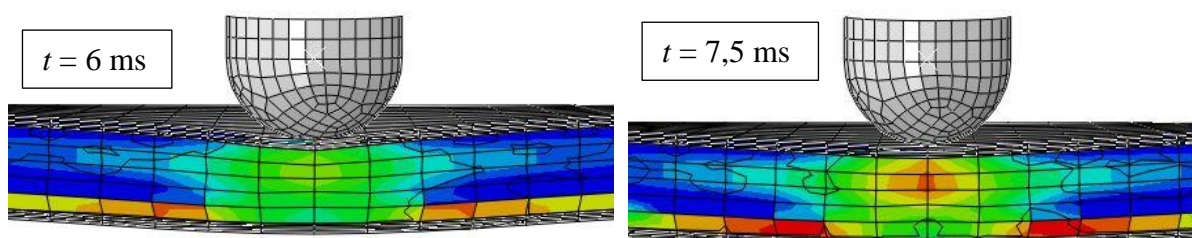
Prvotno su rezultati prikazani za homogenizirani model. Kod ove vrste analize, zbog jednostavne geometrije, analize su trajale do nekoliko minuta. Na Slika 46 46 može se vidjeti prikaz ekvivalentnog Von Mises napreznja u točki najvećeg progiba udarača ( $t = 4$  ms).



**Slika 46: Raspodjela naprezanja po Von Misesu [Pa] za homogenizirani model za energiju udara 10J**

Na slici 48, slici 49 i slici 50 prikazana je ovisnost kontaktne sile s vremenom za kutove  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $15^\circ$ . Svaki dijagram je prikazan za različitu energiju udara: 3J, 7J i 10J. Vidi se ono što se postiglo eksperimentom: vršno opterećenje raste s porastom energije udarca, a pada s porastom kuta. Naravno, i vrijeme trajanje kontakta se povećalo za veće iznose energije udara. Vidljivo je iz dijagrama da pri većim brzinama udara dolazi do oscilacija kontaktne sile, ponajviše u području maksimalne kontaktne sile. Oscilacije nastaju zbog vibracija ploče uslijed širenja vala, nastalog od udara. Za usporedbu su priloženi i eksperimentalni podaci.





**Slika 47: Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije [-] tijekom trajanja kontakta – homogenizirani model  $0^\circ$  / 10 J**

Kašnjenje za numeričke rezultate u dijagramu je uzrokovano postavljanjem udarača 1 mm od ploče, tako da mu je trebalo neko vrijeme da stigne do ploče.

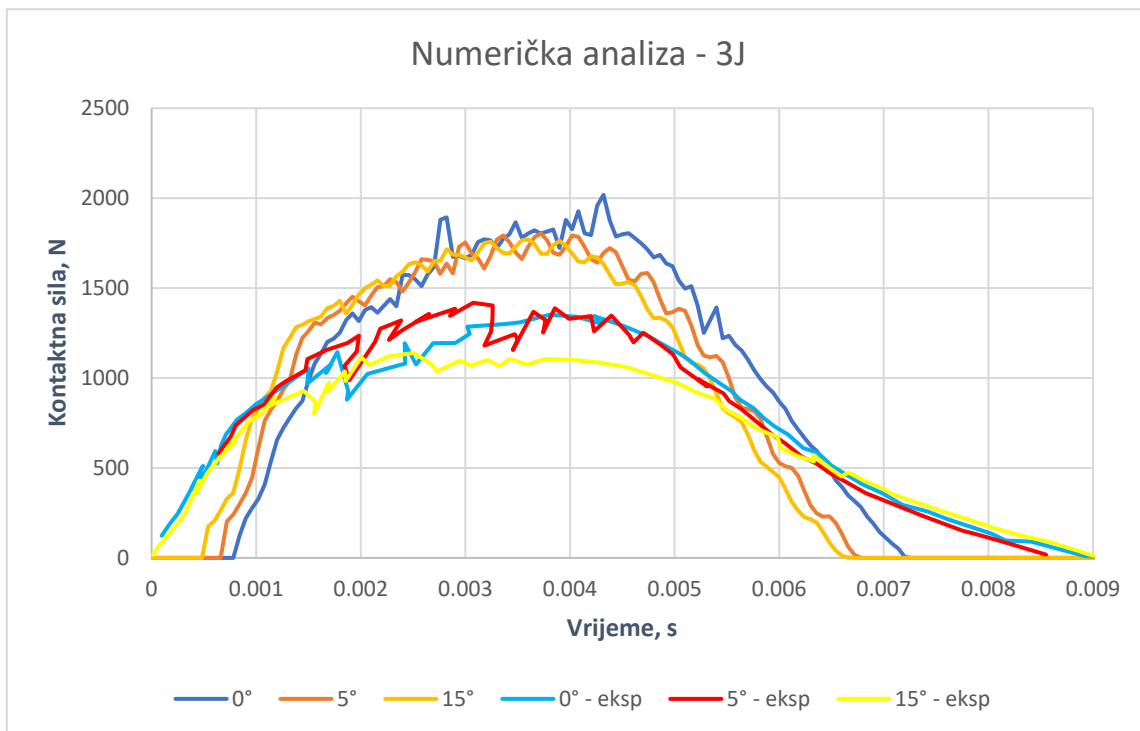
Na slici 48, slici 49 i slici 50 prikazana je ovisnost kontaktne sile s vremenom za kutove  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $15^\circ$ . Svaki dijagram je prikazan za različitu energiju udara: 3J, 7J i 10J. Vidi se ono što se postiglo eksperimentom: vršno opterećenje raste s porastom energije udarača, a pada s porastom kuta. Naravno, i vrijeme trajanje kontakta se povećalo za veće iznose energije udara. Vidljivo je iz dijagrama da pri većim brzinama udara dolazi do oscilacija kontaktne sile, ponajviše u području maksimalne kontaktne sile. Oscilacije nastaju zbog vibracija ploče uslijed širenja vala, nastalog od udara.

Mogući razlog zašto ne postoji na eksperimentalnim rezultatima je taj što tijekom numeričke analize se izvršilo preko 60 000 zapisa (inkremenata), a to se vjerojatno nije moglo zapisati prilikom eksperimentalnog istraživanja. Još jedan od mogućih razloga je nemogućnost homogeniziranog modela da dovoljno realno opiše stvarno ponašanje konstrukcije prilikom opterećenja.

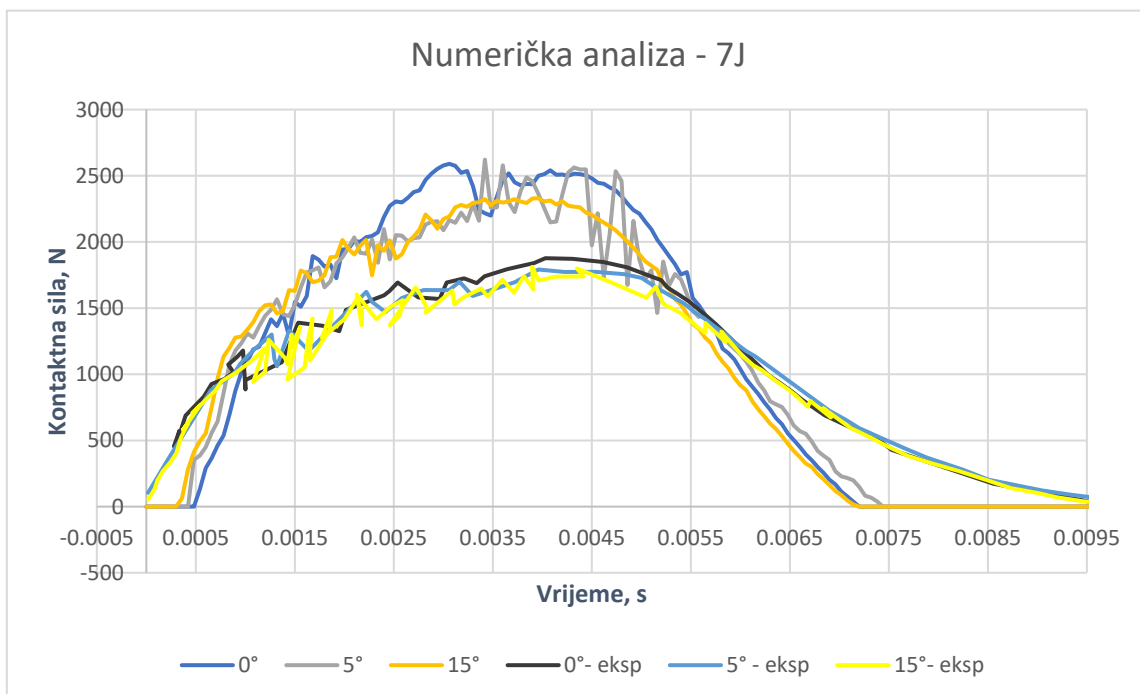
Također, uz vrijednosti dobivene numeričkim putem, priložene su i vrijednosti dobivene eksperimentom, kako bi se mogli direktno usporediti.

Za lakše snalaženje u dijagramima, uspoređuju se dvije slične boje: siva sa sivom, crvena s crvenom, žuta sa žutom i plava s plavom jer jedna boja predstavlja eksperimentalni rezultat, a druga numerički.

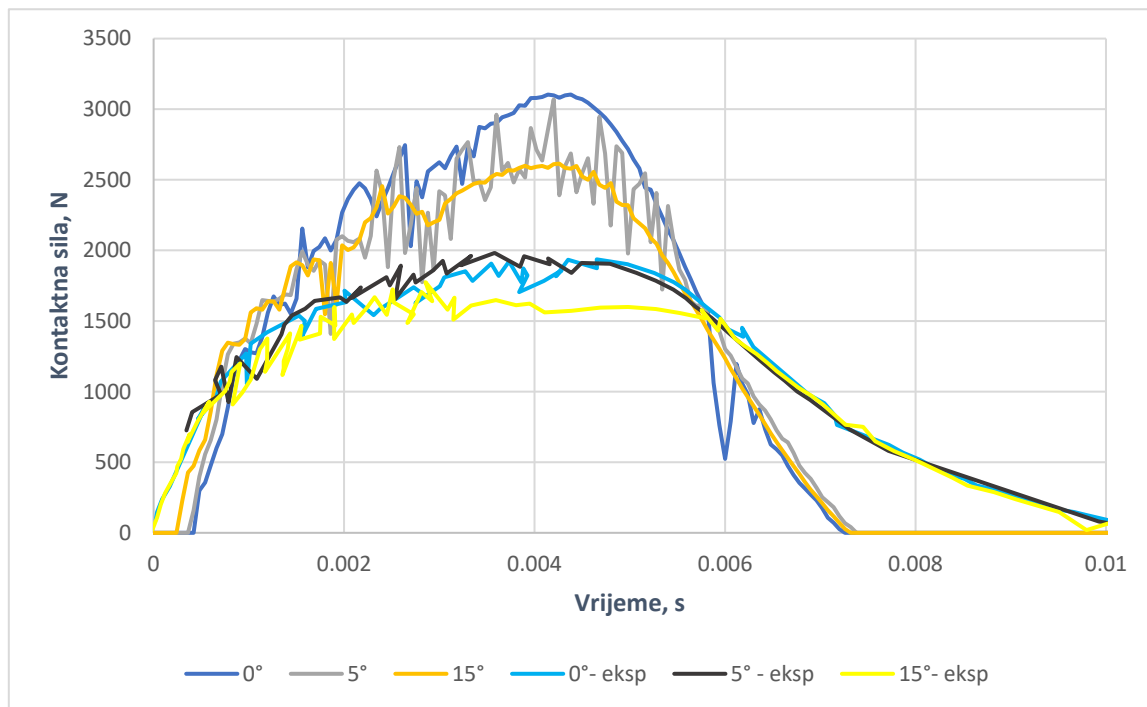




Slika 48: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udara 3J – homogenizirani model

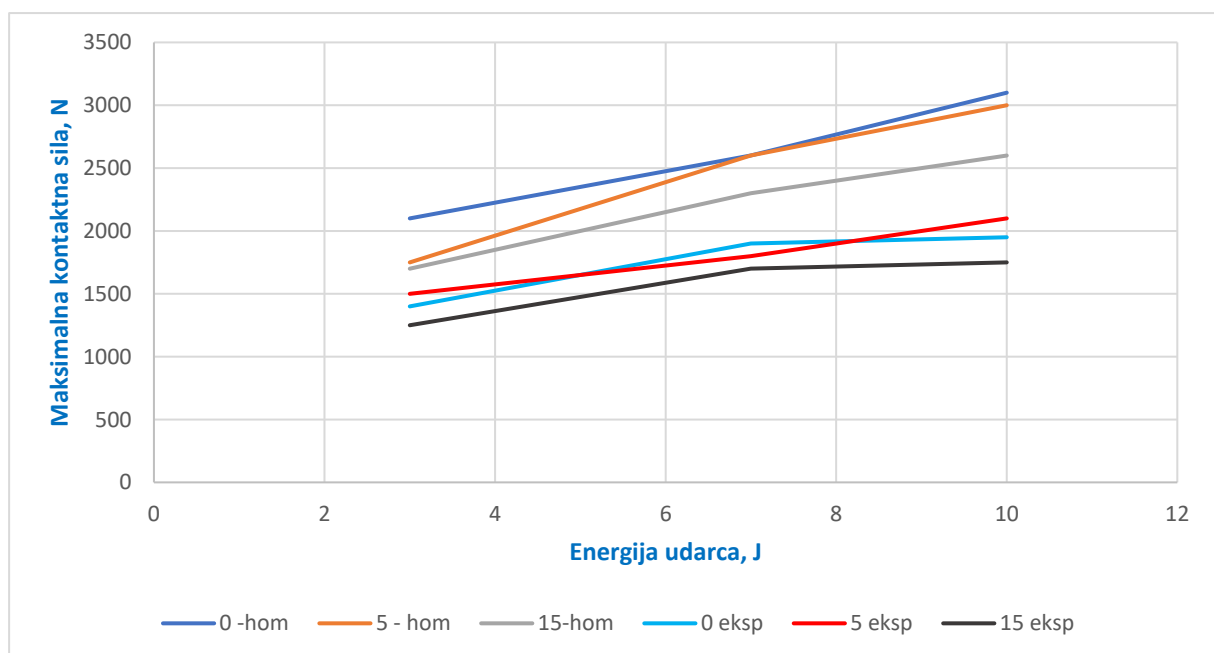


Slika 49: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udara 7J – homogenizirani model



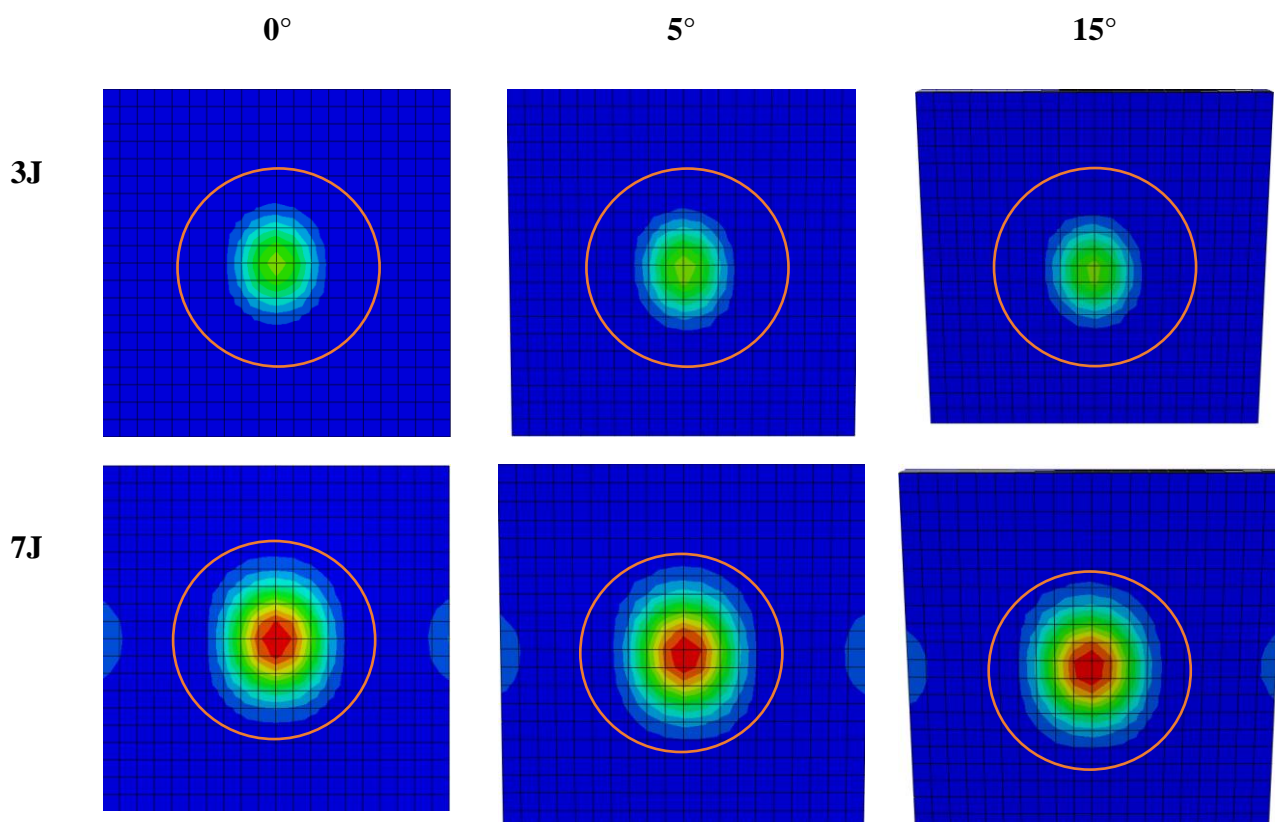
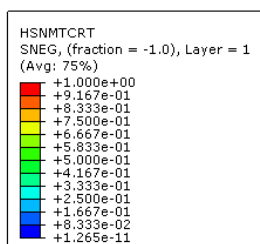
**Slika 50: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udarca 10J – homogenizirani model**

Svi gore navedeni zaključci o porastu / padu parametara u ovisnosti o napadnom kutu potkrijepljeni su na slici 51.

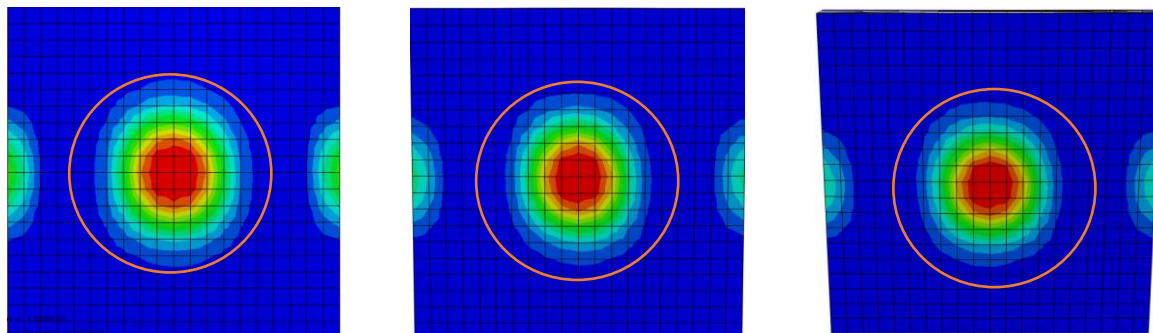


**Slika 51: Dijagram ovisnosti maksimalne kontaktne sile o energiji udara – homogenizirani model**

Na slici 52 može se vidjeti raspodjela Hashinovog kriterija popuštanja matrice (HSHMTCRT) za SNEG sloj orijentacije  $90^\circ$ . Narančasti krug služi kao referentna vrijednost – jednak je na svim slikama i prema njemu se može vidjeti oštećeno područje u odnosu na druge. Isto tako, kao što su prikazali eksperimentalni rezultati, površina oštećenog dijela raste s brzinom udara. Također, između rezultata za kutove udara  $0^\circ$  i  $5^\circ$  nije vidljiva velika razlika, ali između rezultata za  $0^\circ$  i  $15^\circ$  postoji znatna razlika. Iz rezultata na slici 52 se i vidi da oštećenje će biti manje ako se kut udara poveća.

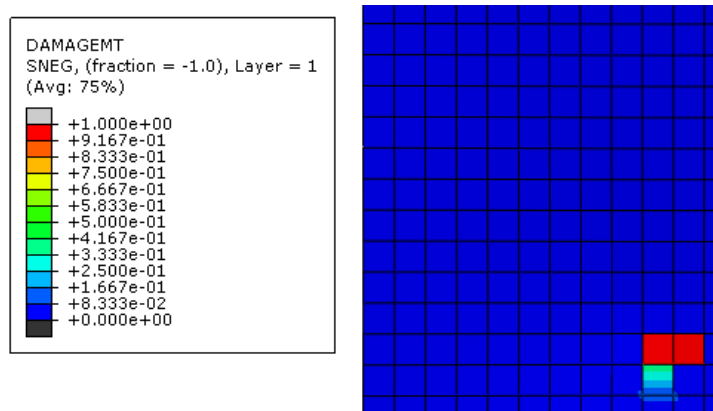


10J



**Slika 52: Vrijednost Hashinogovog kriterija popuštanja matrice – homogenizirani model**

Isto tako vidljivo je da oštećenje postoji, prema kriteriju vlačnog oštećenja matrice (DAMADENT), slika 53. Oštećenje nastaje na mjestu udara.

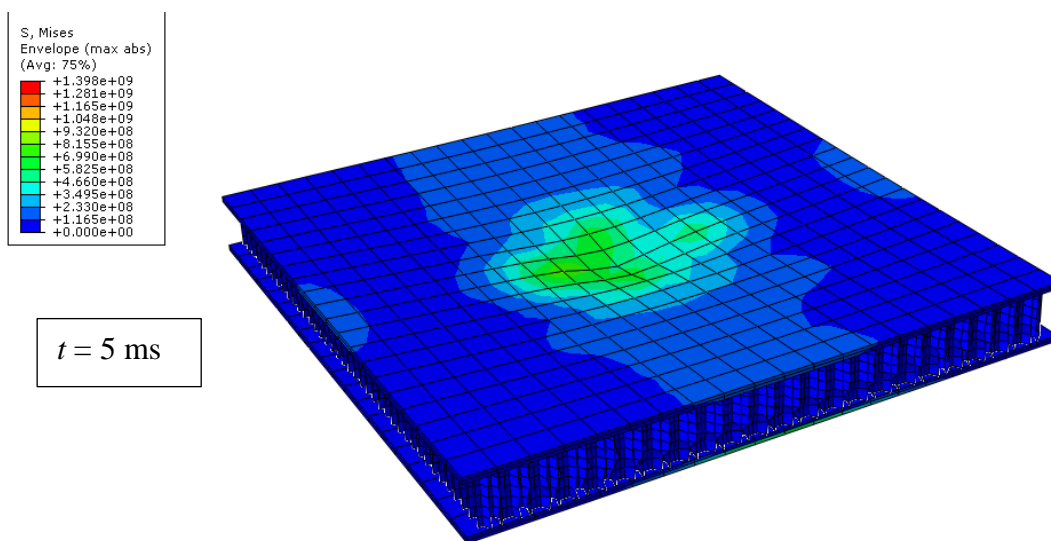


**Slika 53: Oštećenje vanjskog sloja matrice na mjestu udara za slučaj 0° / 10J**

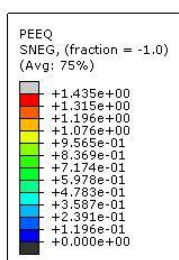
### 5.3. REZULTATI SAČASTOG MODELA

Ovim pristupom pokušat će se približiti eksperimentalnim rezultatima pošto se modelira stvarna geometrija jezgre *sandwich* konstrukcije. Kod ove vrste analize, zbog složenije geometrije, analize su trajale u prosjeku dvadeset minuta. Na slici 54 je prikazana raspodjela ekvivalentnog Von Mises napreznja u trenutku  $t = 5$  ms.

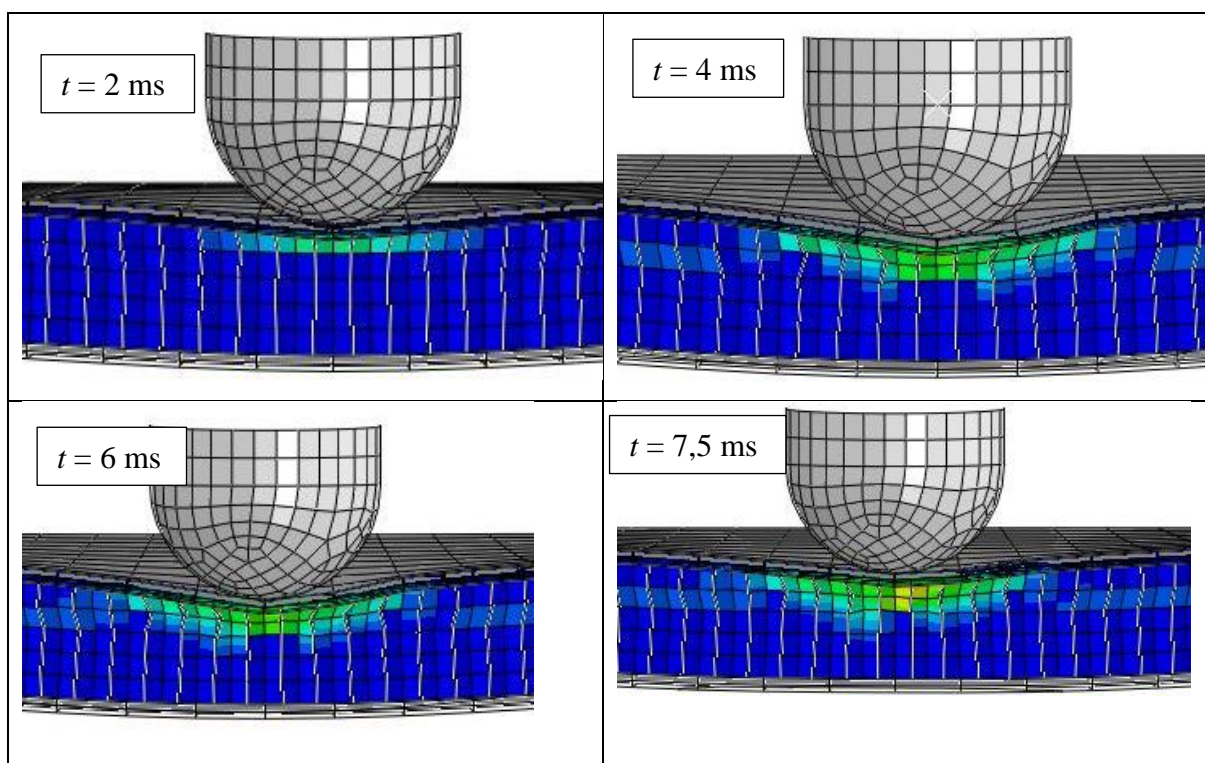
Sve analize provedene su na istom računalu kao i za homogenizirani model. Ovaj model puno je zahtjevniji, dok je za homogenizirani model trajala 3-4min.



**Slika 54: Raspodjela napreznja po Von Misesu [Pa] za sačasti model za energiju udara 10J i kut udara 0°**

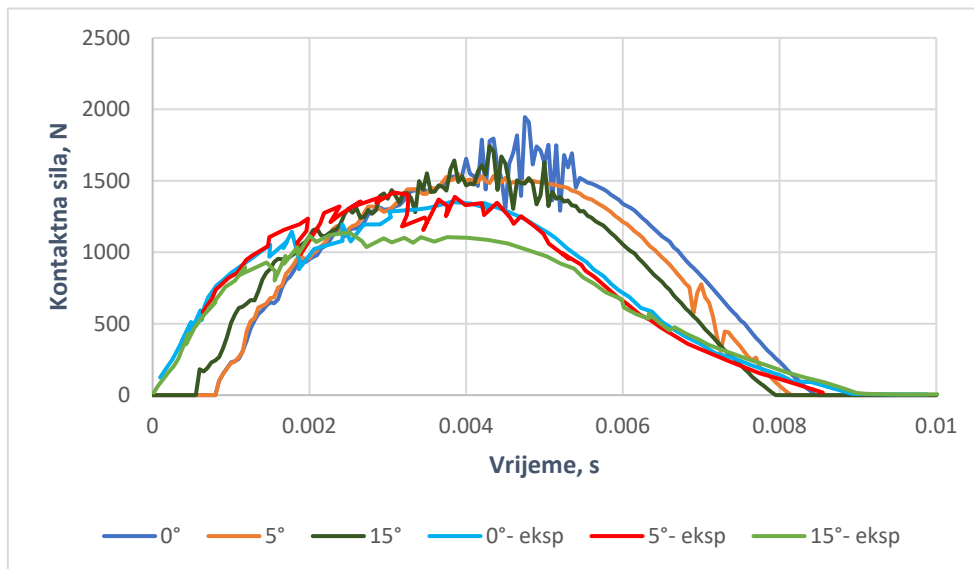


Raspodjela plastične deformacije u vremenu se nalazi na slici 55. Vidljivo je kako područje zahvaćeno plastičnom deformacijom raste s prodoranjem udarača. Mjesta najveće plastične deformacije se ispod gornjeg vanjskog sloja u centru osi kretanja udarača.

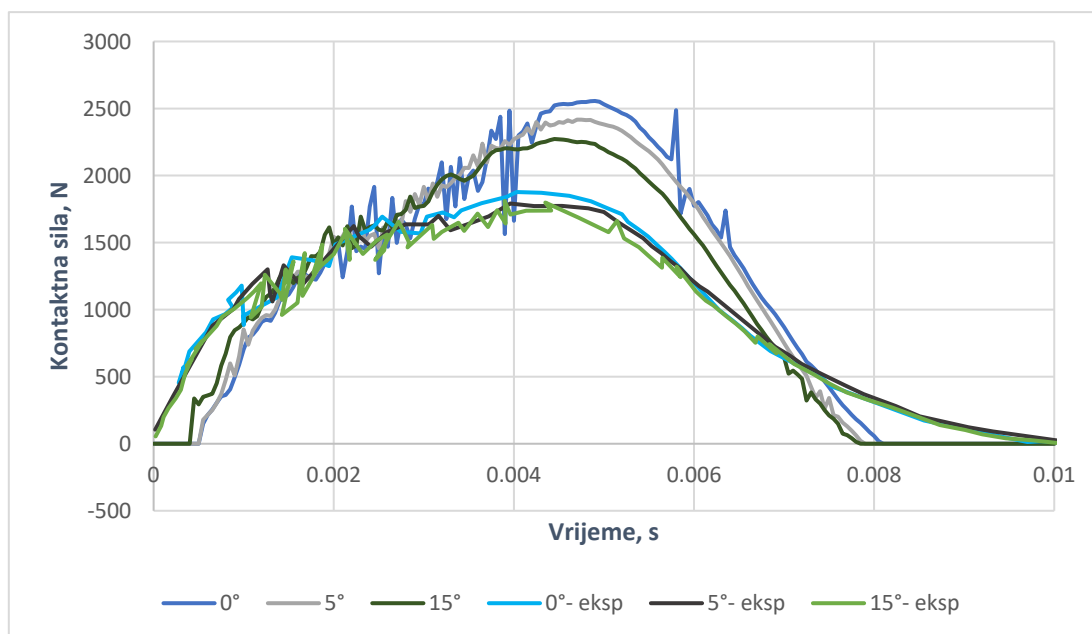


**Slika 55: Raspodjela plastične deformacije tijekom trajanja kontakta – sačasti model 0° / 10 J**

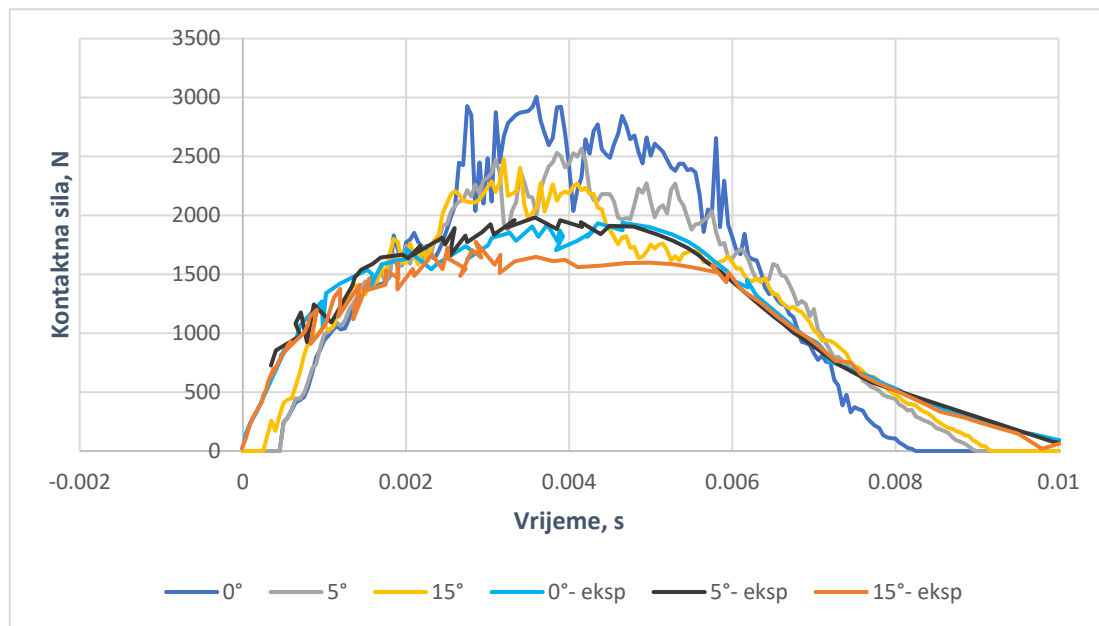
Na slici 56, slici 57 i slici 58 prikazana je ovisnost kontaktne sile s vremenom za kutove  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $15^\circ$  za sačasti model. Svaki dijagram je prikazan za različitu energiju udara: 3J, 7J i 10J. Vidljivo je iz dijagrama pri udaru pod kutom od  $0^\circ$  ima najviše oscilacija, posebno u području maksimalne kontaktne sile, vjerojatno zato jer je opterećenje najveće. Uz numeričke rezultate prikazani su i eksperimentalni. Vrijedi također pravilo za usporedbu po bojama, kao i u prošlom potpoglavlju.



**Slika 56:** Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udarca 3J – sačasti model

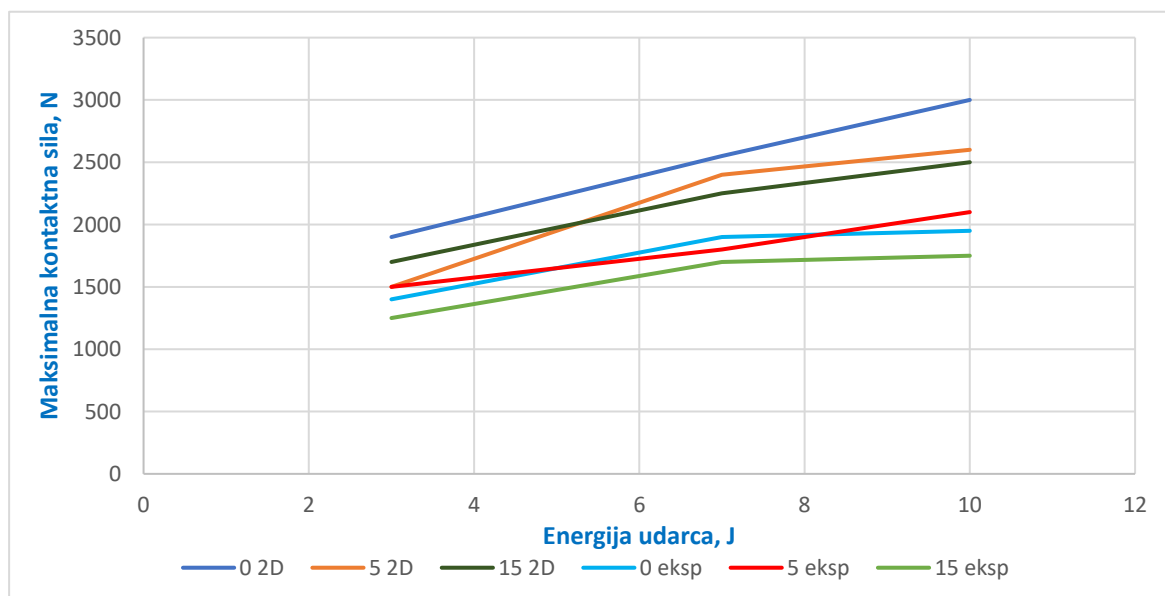


**Slika 57:** Dijagram kontaktne sile u ovisnosti o vremenu za energiju udarca 7J – sačasti model



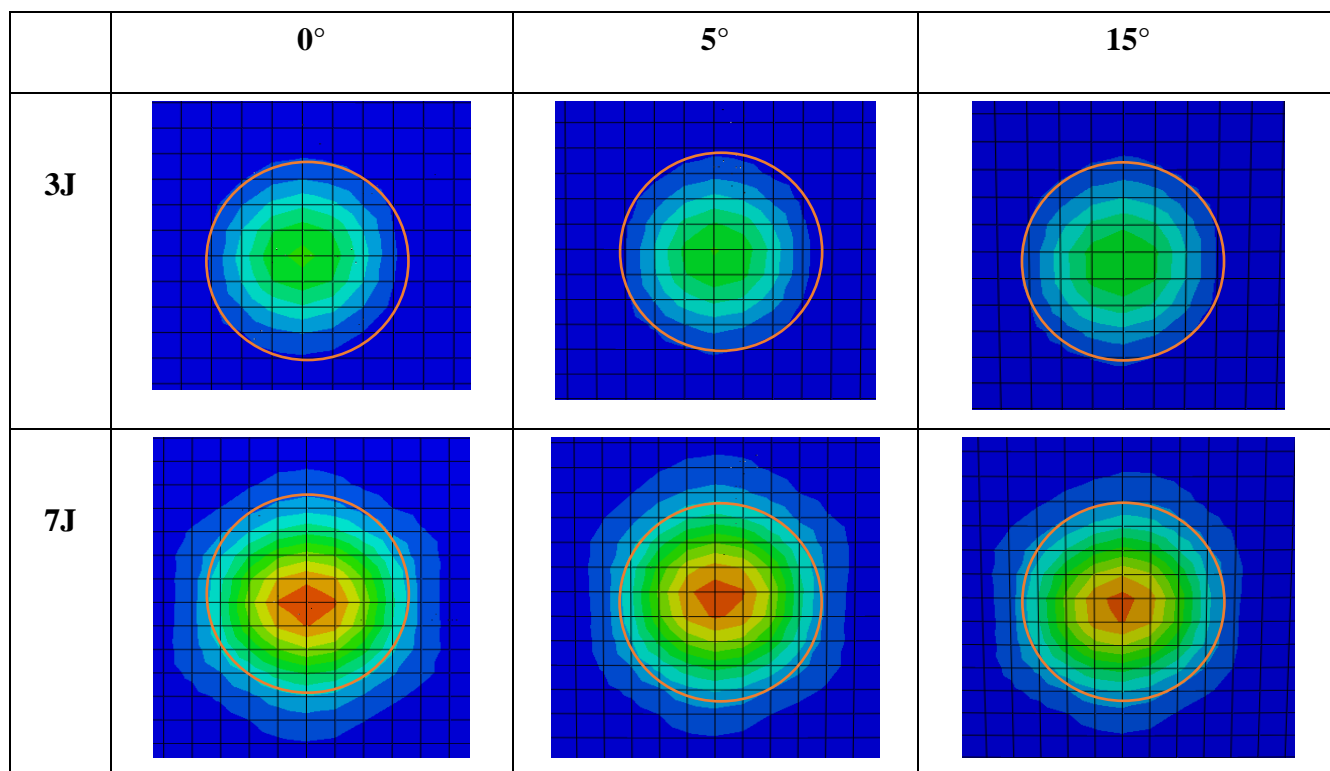
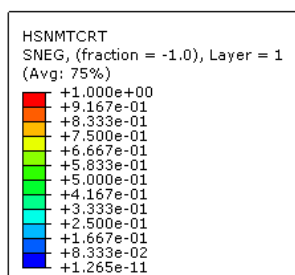
**Slika 58: Dijagram kontaktne sile u ovisnosti vremena za energiju udarca 10J – sačasti model**

Slika 59 prikazuje ovisnost maksimalne kontaktne sile o energiji udara. Na temelju dobivenih rezultata može se zaključiti da numerički model realistično opisuje ponašanje *sandwich* konstrukcije pri udarnom opterećenju. Može se također vidjeti i usporedba sa eksperimentalnim rezultatima.

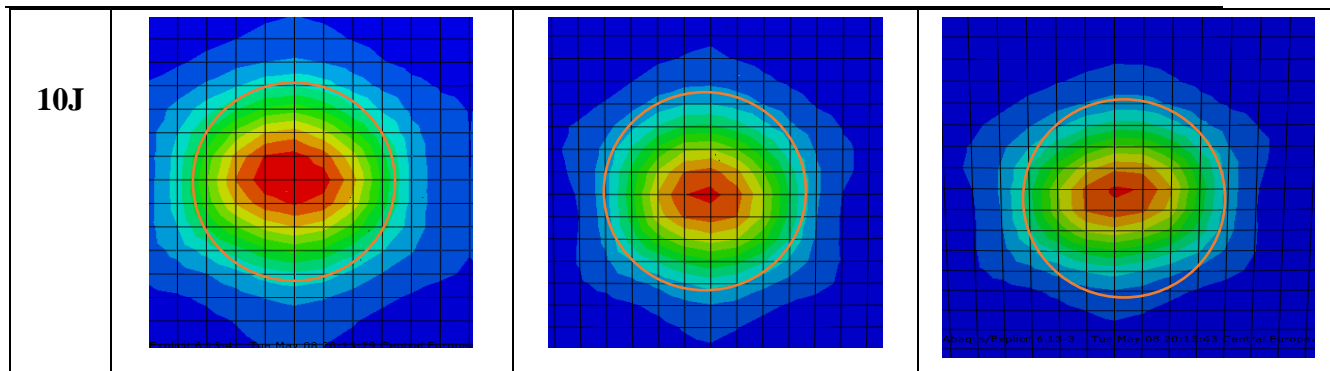


**Slika 59: Ovisnost maksimalne kontaktne sile o energiji udara**

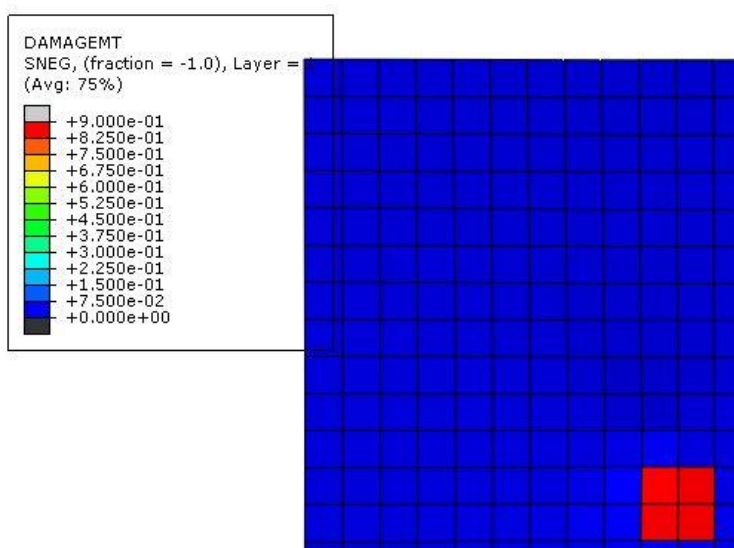
Na slici 60 mogu se vidjeti oštećenja svih modela nakon udara za Hashinov kriterij vlačnog popuštanja matrice (HSHMTCRT) za SNEG sloj i orijentaciju  $90^\circ$ . Ponovo je na tim rezultatima dodana narančasta kružnica koja služi kao referentna vrijednost i prema njoj se može vidjeti veličina oštećenog područja u odnosu na druge. Isto tako, prema eksperimentalnim rezultatima, površina oštećenog dijela raste s brzinom udara. Također, između  $0^\circ$  i  $5^\circ$  nije vidljiva velika razlika, osim za slučaj udara od 10J, ali već između  $5^\circ$  i  $15^\circ$  se može primijetiti razlika u veličini na slici. Iz tablice se može vidjeti da će oštećenje biti veće ako se kut udara smanji, tj. ako je  $0^\circ$  bit će najveće oštećenje.







Slika 60: Prikaz oštećenja za sve modele – sačasti model



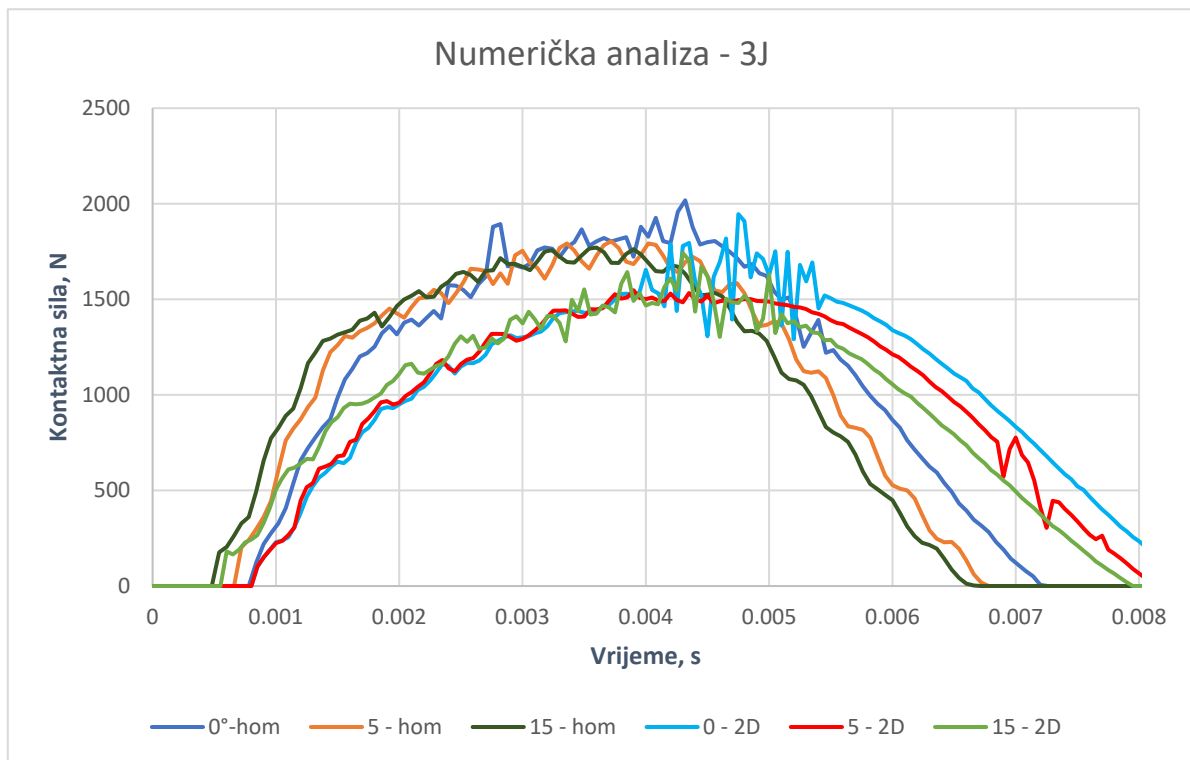
Slika 61: Prikaz vlačnog oštećenja matrice

Na slici 61 vidi se oštećenje matrice za DAMAGEMT kriterij, tako da oštećenje postoji i u ovom modelu, a nastaje na mjestu udara.

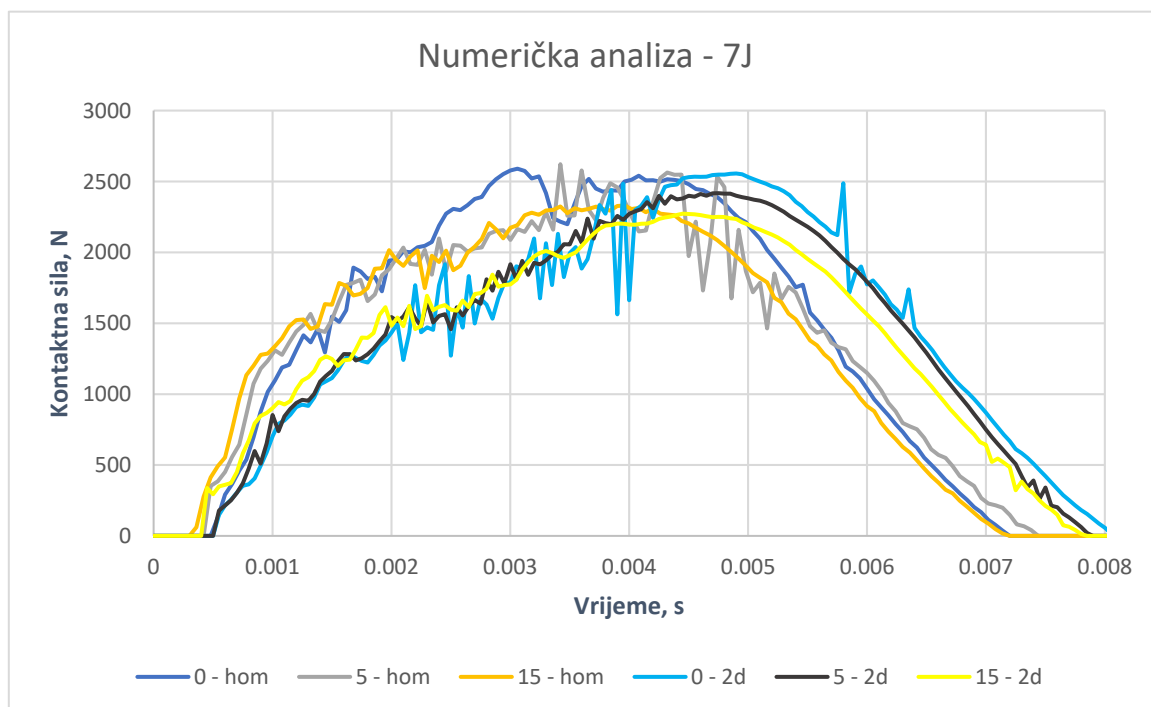
#### 5.4. USPOREDBA SAČASTOG I HOMOGENIZIRANOG MODELA

Oba numerička modela daju vrlo slične rezultate, što se može vidjeti iz priloženih dijagrama na slici 62, slici 63 i slici 64. Sva tri dijagrama prikazuju ovisnost kontaktne sile o vremenu za oba modela, tako da se direktno mogu vidjeti rezultati analize.

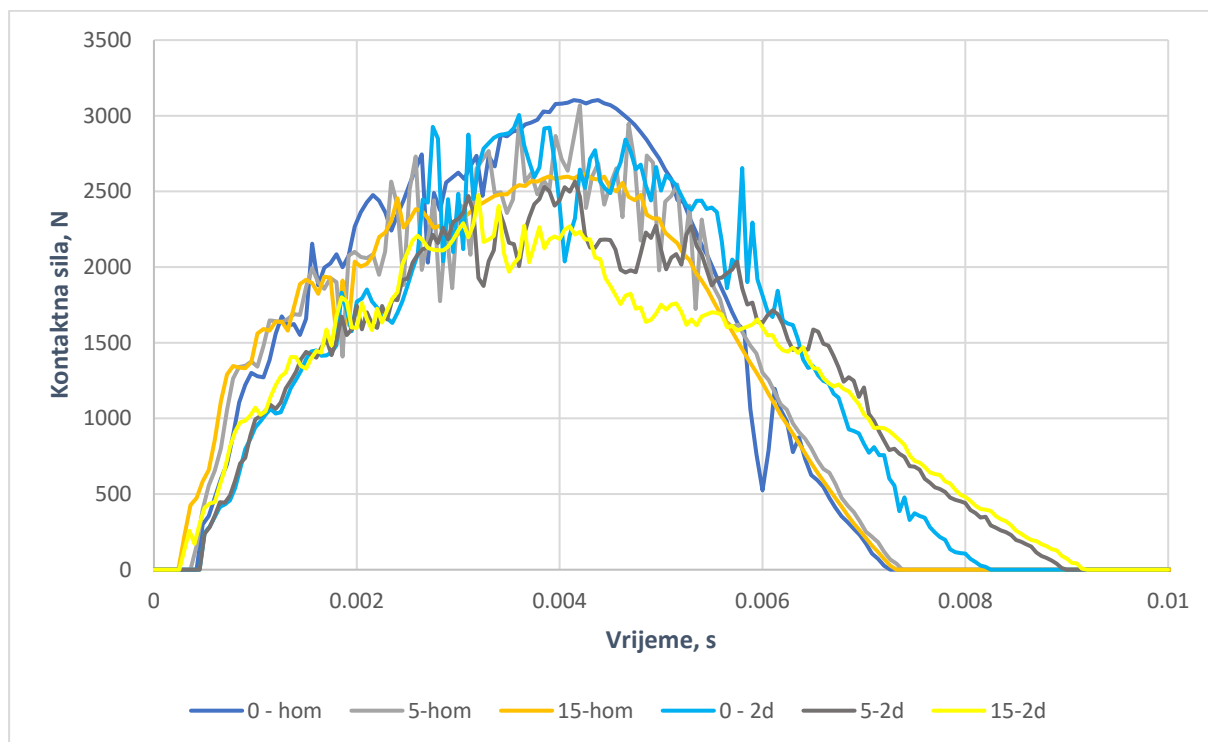
Rezultati numeričkog modela sa sačastom geometrijom jezgre su malo bliži rezultatima eksperimentalnih testova iz [7], što se moglo i očekivati zbog točnije geometrije.



**Slika 62: Dijagram kontaktne sile u vremenu za energiju udara 3J – za homogenizirani i sačasti model**



**Slika 63: Dijagram kontaktne sile u vremenu za energiju udara 7J – za homogenizirani i sačasti model**



**Slika 64:** Dijagram kontaktne sile u vremenu za energiju udara 10J – za homogenizirani i sačasti model

---

## 6. ZAKLJUČAK

Nakon provedenih mnogo analiza, za homogenizirani model i za sačasti model, možemo reći da na temelju dobivenih rezultata može se zaključiti da numerički model realistično opisuje ponašanje *sandwich* konstrukcije pri udarnom opterećenju. Kada se usporede oba pristupa, sačasti daje bolje rezultate, što se tiče vremena trajanja analize i maksimalnih kontaktnih sila.

Kod oba modela, inicira se oštećenje prema DEMAGMT kriteriju, a Hashinov kriterij popuštanja daje slične rezultate.

Također, nisu bile poznate sve materijalne konstante, pa su se mnoge morale pronalaziti u raznim literaturama ili pogađati. Bitna je razlika u korištenju pristupa: u članku se koristilo modeliranje *woven* kompozita, dok se ovdje kao materijalni model koristio proračun *unidirectional* kompozitnog sloja. Dakako kad se sve to uzme u obzir, rezultati su zadovoljavajući.

Na kraju može se reći da sačasti materijalni model zbog geometrije bolje opisuje stvarno ponašanje udara, numerička analiza zbog toga nekoliko puta dulje traje, ali da su poznate sve materijalne konstante korištene u eksperimentu, rezultati bi bili točniji.

---

**LITERATURA**

- [1] Mehanika kompozitnih materijala, predavanja, RiTeh
- [2] Ivica Smojver: Mehanika kompozitnih materijala, Zagreb, 2007
- [3] Kollar, Springer: Mechanics of Composite Structures, Cambridge
- [4] S. R. Reid: Impact Behaviour of Fibre-Reinforced Composite Materials and Structures, 2000.
- [5] Nikolaos G Perogamvros, George N Lameas: Experimental and numerical investigation of AS4/8552 interlaminar shear strength under impact loading conditions, Vol. 50(19) 2669–2685
- [6] Matweb, <http://www.matweb.com/>
- [7] I. Ivañez, M.M. Moure, S.K. Garcia-Castillo, S. Sanchez-Saez: The oblique impact response of composite sandwich plates
- [8] Achilles Petras: Design of Sandwich Structures, PhD, Robinson College, Cambridge
- [9] David Roylance: Laminated Composite Plates, MIT, 2000
- [10] Abaqus 6.13 Manual
- [11] Gibson L., Ashby M. : Cellular Solids
- [12] Honeycomb Sandwich Panels, <https://www.youtube.com/watch?v=ZyWRc0V9Yko>
- [13] Costantino Menna, Alberto Zinno, Domenico Asprone, Andrea Prota: Numerical assessment of the impact behavior of honeycomb sandwich structures
- [14] S. Heimbs, P. Middendorf, M. Meier: Honeycomb Sandwich Material Modeling for Dynamic Simulations of Aircraft Interior Components
- [15] Hui Zhoua, Ping Xua, Suchao Xiea, Zhejun Fenga, Da Wang : Mechanical performance and energy absorption properties of structures combining two Nomex honeycombs
- [16] Han Fenga, Longquan Liua, Qi Zhaob: Experimental and numerical investigation of the effect of entrapped air on the mechanical response of Nomex honeycomb under flatwise compression
- [17] M. Giglio, A. Gilioli, A. Manes: Numerical investigation of a three point bending test on sandwich panels with aluminum skins and Nomex™ honeycomb core
- [18] Darko Ivančević: Osnove numeričkog proračuna kompozitnih konstrukcija
- [19] Han Fenga, Longquan Liua, Qi Zhaob: Experimental and numerical investigation of the effect of entrapped air on the mechanical response of Nomex honeycomb under flatwise compression

---

[20] Dominik Ešegović: Programski zadatak ČPZK

## **PRILOZI**

- I. CD-R disc
- II. Programski kôd

Programski kôd

### Zadavanje ulaznih varijabli

```

ClearAll["Global`*"]
coefl = Input["Unesite l"];
coefJ = Input["Unesite J"];
Lx=Input["Unesite duljinu ploče Lx u smjeru osi x u m"];
Ly=Input["Unesite duljinu ploče Ly u smjeru osi y u m"];
p=Input["Unesite vrijednost jednolikog kontinuiranog opterećenja p u smjeru osi z u kN/m^2"];
E1 = Input["Unesite E1 za facing"];
E2=Input["Unesite E2 za facing"];
v12=Input["Unesite v12 za facing"];
G12 =Input["Unesite G za facing"];
t=Input["Unesite debljinu facinga"];
c=Input["Unesite debljinu jezgre"];
Ec= Input["Unesite modul elastičnosti jezgre"];
vc= Input["Unesite Poissonov faktor za jezgru"];

h11=Input["Unesite početnu udaljenost sloja 1 od referentne plohe"];
h21=Input["Unesite krajnju udaljenost sloja 1 od referentne plohe"];

fi1=Input["Unesite orijentaciju sloja"];

```

### Izračunavanje nepoznatih koeficijenata - rješavanje sustava

```

frontCoef = Lx * Ly / 4;
wij = ConstantArray[0, {coefl, coefJ}];
χXZij = ConstantArray[0, {coefl, coefJ}];
χYZij = ConstantArray[0, {coefl, coefJ}];
For[i=1, i <= coefl, i ++,
  For[j = 1, j <= coefJ, j ++,
    θ1=fi1*π/180;

    Q11= E1/Dq;
    Q12=(E2*v12)/Dq;
    Q22=E2/Dq;
    Q66=G12;
    Dq=1-E2/E1*v12^2;
    Qtrans1={
      {Q11t1, Q12t1, Q16t1},

```



```

{Q12t1, Q22t1, Q26t1},
{Q16t1, Q26t1, Q66t1}
});
Q11t1=(Cos[θ1])4*Q11+2 (Cos[θ1])2*(Sin[θ1])2 (Q12+2Q66)+(Sin[θ1])4*Q22;
Q12t1=(Cos[θ1])2*(Sin[θ1])2*(Q11+Q22-4Q66)+((Sin[θ1])4+(Cos[θ1])4)*Q12;
Q22t1=(Sin[θ1])4*Q11+2*(Cos[θ1])2*(Sin[θ1])2 (Q12+2Q66)+(Cos[θ1])4*Q22;
Q16t1=(Cos[θ1])3*Sin[θ1]*(Q11-Q12)+Cos[θ1]*(Sin[θ1])3 (Q12-Q22)-2
Cos[θ1]*Sin[θ1]*((Cos[θ1])2-(Sin[θ1])2)*Q66;
Q26t1= Cos[θ1]*(Sin[θ1])3 (Q11-Q12)+(Cos[θ1])3*Sin[θ1] (Q12-
Q22)+2Cos[θ1]*Sin[θ1]*((Cos[θ1])2-(Sin[θ1])2)*Q66;
Q66t1=(Cos[θ1])2*(Sin[θ1])2 (Q11+Q22-2Q12-2Q66)+((Cos[θ1])4-(Sin[θ1])4)*Q66;

D1 = 1/3 Qtrans1*(h213-h113);

Df=D1;

A1 =Qtrans1*(h21-h11);

Af=A1;
Dsand=1/2 d2*Af+2Df;
d=t+c;
(*S11=S22*)
(*C44=C55= Ec/(2(1+vc))*
Cc={
{Ec/(2(1+vc)), 0},
{0, Ec/(2(1+vc))}}
});
S=(d2/c)*Cc;
F33 = Part[Dsand,1,1]* (i * Pi / Lx) ^ 4 + 2 * (Part[Dsand,1,2]+ 2 * Part[Dsand,3,3]) *
((i * Pi / Lx) ^ 2) * ((j * Pi / Ly) ^ 2) + Part[Dsand,2,2] * (j * Pi / Ly) ^ 4;
F34 = - Part[Dsand,1,1] * (i * Pi / Lx)^ 3 - ( Part[Dsand,1,2]+ 2 * Part[Dsand,3,3]) * (i
* Pi / Lx) * ((j * Pi / Ly) ^ 2);
F35 = - Part[Dsand,2,2] * (j * Pi / Ly)^ 3 - ( Part[Dsand,1,2]+ 2 * Part[Dsand,3,3]) * ((i
* Pi / Lx) ^ 2) * (j * Pi / Ly);
F44 = Part[Dsand,1,1]* (i * Pi / Lx) ^ 2 + Part[Dsand,3,3]* (j * Pi / Ly) ^ 2 +
Part[S,1,1];
F45 =( Part[Dsand,1,2]+ 2 * Part[Dsand,3,3])* (i * Pi / Lx) * (j * Pi / Ly);
F55 = Part[Dsand,2,2]* (j * Pi / Ly) ^ 2 + Part[Dsand,3,3]* (i * Pi / Lx) ^ 2 +
Part[S,2,2];
firstRightSideCoef = 4 * p * Lx * Ly / ((Pi ^ 2) * i * j);
A = {{F33, F34, F35}, {F34, F44, F45}, {F35, F45, F55}};
B = {firstRightSideCoef, 0 , 0};
solution = LinearSolve[frontCoef * A, B];

```

```
wij[[i, j]] = solution [[1]];
χXZij[[i, j]] = i * Pi / Lx * solution[[1]] - solution [[2]];
χYZij[[i, j]] = j * Pi / Ly * solution[[1]] - solution[[3]];
]
]
```

#### Određivanje progiba i zakreta

```
w0 = 0;
χXZ = 0;
χYZ = 0;
For[i=1, i <= coefl, i=i+2,
For[j = 1, j <= coefJ, j=j+2,
w0 = w0 + wij[[i, j]] * Sin[ i * Pi * x / Lx] * Sin[j * Pi * y / Ly];
χXZ = χXZ + χXZij[[i, j]] * Cos[i * Pi * x / Lx] * Sin[j * Pi * y / Ly];
χYZ = χYZ + χYZij[[i, j]] * Sin[i * Pi * x / Lx] * Cos[j * Pi * y / Ly];
]
]
```

#### Izračunavanje progiba i zakreta u proizvoljnoj točki ploče

```
x=Input["Unesite x koordinatu točke"];
y=Input["Unesite y koordinatu točke"];
Print["Za koordinate ", "x = ", x, " ; ", "y = ", y, " progib i zakreti ploče iznose:"]
Print["w0 = ", w0*1000, " mm" ];
```