

Numerička analiza koljenastog vratila motora s unutarnjim izgaranjem

Domović, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:357841>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-09**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Filip Domović

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit, dipl. ing.

Student:

Filip Domović

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru rada docentu dr. sc. Ivici Skozritu na pruženoj pomoći, savjetima te stalnoj dostupnosti tijekom izrade diplomskog rada.

Nadalje, zahvaljujem svojim prijateljima i kolegama s Fakulteta strojarstva i brodogradnje na prelijepim godinama studiranja i nezaboravnim druženjima.

Posljednja i najveća zahvala pripada mojoj obitelji, roditeljima Anđelku i Katici, na bezuvjetnoj potpori i pomoći tijekom studiranja, bratu Matiji, s kojim sam zajedno prošao mnoge 'bitke' na fakultetu, sestri Lari na uvijek korisnim savjetima, i na kraju bratu Franu na mnogim lijepim zajedničkim trenucima.

Filip Domović



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum: 0 - 05- 2018	Prilog
Klasa: 602-04/18-G/3	
Ur. broj: 15-1703-18-205	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Filip Domović**

Mat. br.: 0035191215

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza koljenastog vratila motora s unutarnjim izgaranjem**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of the Crankshaft of Internal Combustion Engine**

Opis zadatka:

Koljenasto vratila motora s unutarnjim izgaranjem, ili radilica, je jedan od izrazito opterećenih dijelova motora. Preko klipnjače, nejednoliko pravocrtno gibanje klipa pretvara u rotacijsko gibanje samog vratila. Izgaranjem goriva u cilindru oslobađa se tlak koji djeluje na klip, koji preko klipnjače djeluje i na koljenasto vratilo, te se na taj način dobije zakretni moment koji se dalje preko spojke predaje na mjenjač.

U radu je potrebno:

- numeričke analize provesti primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata,
- za diskretizaciju numeričkih modela koristiti dostupne konačne elemente iz korištenog programskog paketa,
- na jednostavnijim problemima provesti verifikaciju svih kasnije u numeričkim analizama korištenih konačnih elemenata i rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rješenjima,
- za dobiveni CAD model koljenastog vratila, karakteristike materijala te opterećenje vratila provesti statičke numeričke analize koljenastog vratila, te odrediti optimalnu mrežu konačnih elemenata te prikazati konvergenciju rješenja,
- dati procjenu životnog vijeka vratila te odrediti kritična mjesta s obzirom na cjelovitost samog konstrukcijskog elementa.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

8. ožujka 2018.

Datum predaje rada:

10. svibnja 2018.

Predviđeni datum obrane:

16., 17. i 18. svibnja 2018.

Zadatak zadao:

Škrlit Ivica

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Predsjednica Povjerenstva:

Tanja Jurčević Lulić

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	VI
POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE	VII
POPIS OZNAKA	VIII
SAŽETAK.....	XI
SUMMARY	XII
1. UVOD.....	1
1.1. Vratila.....	1
1.2. Koljenasto vratilo	1
1.2.1. Dijelovi koljenastog vratila i opis	2
1.2.2. Materijal i način izrade	4
1.2.2.1. Koljenasta vratila nastala kovanjem	5
1.2.2.2. Koljenasta vratila nastala lijevanjem	5
1.2.2.3. Materijali za izradu koljenastih vratila	6
1.2.3. Opterećenje koljenastog vratila.....	6
1.2.4. Oštećenja koljenastog vratila	7
2. KINEMATIKA KLIPNOG MEHANIZMA	8
2.1. Put klipa	10
2.2. Brzina klipa	10
2.3. Ubrzanje klipa	11
2.4. Ovisnost kuta klipnjače (β) o kutu zakreta koljenastog vratila (α)	12
2.5. Analiza kinematike u programskom paketu MSC.Adams/View	13
3. DINAMIKA KLIPNOG MEHANIZMA	15
3.1. Dinamika	15
3.2. Opis rada četverotaktnog motora	15
3.3. Analiza opterećenja klipnog mehanizma	17
3.4. Zaključak analize dinamike	22
4. PRORAČUN KOLJENASTOG VRATILA NA ČVRSTOĆU	23
5. O METODI KONAČNIH ELEMENATA	26
5.1. Opis primjenjenih konačnih elemenata.....	27

5.1.1.	Osnovni tetraedarski element.....	27
5.1.2.	Tetraedarski konačni element 2. reda	28
6.	VERIFIKACIJA PRIMJENJENIH KONAČNIH ELEMENATA.....	29
6.1.	Savijanje konzole kružnog poprečnog presjeka	29
6.1.1.	Analitičko rješenje	30
6.1.2.	Rješenje dobiveno pomoću programa MITCalc	30
6.1.3.	Numeričko rješenje i prikaz konvergencije	31
6.2.	Uvijanje konzole kružnog poprečnog presjeka	35
6.2.1.	Analitičko rješenje	35
6.2.2.	Numeričko rješenje i prikaz konvergencije	36
6.3.	Složeno opterećenje konzole kružnog poprečnog presjeka (uvijanje + savijanje)	39
6.3.1.	Analitičko rješenje	39
6.3.1.1.	Naprezanje od savijanja	39
6.3.1.2.	Posmično naprezanje	40
6.3.1.3.	Ekvivalentno naprezanje	41
6.3.2.	Numeričko rješenje	41
6.4.	Zaključak verifikacije	43
7.	NUMERIČKI PRORAČUN KOLJENASTOG VRATILA.....	44
7.1.	CAD model	44
7.2.	Opis analize ciklusa	44
7.3.	Kreiranje proračunskog modela u ABAQUS-u	45
7.4.	Rubni uvjeti i opterećenje	46
7.5.	Generiranje mreže konačnih elemenata	47
7.6.	Rezultati analize	48
8.	ANALIZA ZAMORA I PROCJENA ŽIVOTNOG VIJEKA KOLJENASTOG VRATLA	53
8.1.	Procjena životnog vijeka koljenastog vratila	54
9.	ZAKLJUČAK.....	57
	LITERATURA.....	58
	PRILOZI.....	60

POPIS SLIKA

Slika 1.	a) Ravno vratilo b) Koljenasto vratilo	1
Slika 2.	Dijelovi koljenastog vratila	3
Slika 3.	Koljenasto vratilo u motoru.....	3
Slika 4.	Uležištenje koljenastog vratila u kućište motora.....	4
Slika 5.	Kovana koljenasta vratila	5
Slika 6.	Kritična mjesta na kojim najčešće dolazi do lomova radi dinamičkog opterećenja	7
Slika 7.	Pojednostavljeni klipni mehanizam kreiran u SolidWorks-u.....	8
Slika 8.	Shematski prikaz klipnog mehanizma.....	9
Slika 9.	Pomak klipa.....	10
Slika 10.	Brzina klipa	11
Slika 11.	Ubrzanje klipa	12
Slika 12.	Kut klipnjače β	12
Slika 13.	Proračunski model u programskom paketu MSC.Adams 2017.2	13
Slika 14.	Put klipa [MSC.ADAMS]	13
Slika 15.	Brzina klipa [MSC.ADAMS].....	14
Slika 16.	Ubrzanje klipa pojednostavljenog modela	14
Slika 17.	Teoretski p - V dijagram Ottovog četverotaktnog motora [8]	15
Slika 18.	a) usis ; b) kompresija ; c) paljenje smjese ; d) ekspanzija ; e) ispuh [8].....	16
Slika 19.	Sile koje djeluju u klipnom mehanizmu [10]	17
Slika 20.	p - V (indikatorski) dijagram	17
Slika 21.	Ovisnost tlaka u cilindru o kutu zakreta koljenastog vratila	18
Slika 22.	Sila plinova.....	18
Slika 23.	Ukupna sila koja djeluje na klip	19
Slika 24.	Smjer djelovanja centrifugalne sile [10]	20
Slika 25.	Sila koja djeluje na klipnjaču	21
Slika 26.	Tangencijalna i radijalna komponenta sile na letećem rukavcu koljnastog vratila [10]	21
Slika 27.	Radijalna i tangencijalna komponenta sile u ovisnosti o kutu zakreta koljenastog vratila.....	22
Slika 28.	Opterećenje koljenastog vratila radijalnim silama [4]	23
Slika 29.	Kvalitativno prikazani momenti savijanja i momenti torzije u koljenu koljenastog vratila [4]	24
Slika 30.	Smithov dijagram za materijal kovanog čelika i slučaj savijanja ($R = -1$).....	25

Slika 31.	Osnovni tetraedarski konačni element (C3D4)	27
Slika 32.	Tetraedarski element 2. reda (C3D10)	28
Slika 33.	Konzola kružnog poprečnog presjeka opterećena silom F_y	29
Slika 34.	MITCalc (progib i naprezanje od savijanja).....	30
Slika 35.	MITCalc (promjena progiba i maksimalnog naprezanja od savijanja s koordinatom x).....	31
Slika 36.	Rubni uvjeti i opterećenje konzole silom F_y	31
Slika 37.	Pomaci u smjeru osi y	32
Slika 38.	Raspodjela naprezanja prema von Misesu	32
Slika 39.	Konvergencija rješenja progiba proračunskog modela diskretiziranog C3D4 i C3D10 konačnim elementima	33
Slika 40.	Raspodjela pomaka duž uzdužne osi konzole (os x)	34
Slika 41.	Raspodjela naprezanja od savijanja po visini poprečnog presjeka.....	34
Slika 42.	Konzola kružnog poprečnog presjeka opterećena momentom torzije (uvijanja)..	35
Slika 43.	Rubni uvjeti i opterećenje konzole momentom torzije	36
Slika 44.	Kutevi uvijanja duž osi x	37
Slika 45.	Raspodjela naprezanja prema von Misesu	37
Slika 46.	Konvergencija rješenja kuta uvijanja proračunskog modela diskretiziranog C3D4 i C3D10 konačnim elementima	38
Slika 47.	Uklještena konzola sa složenim opterećenjem (sila + moment torzije)	39
Slika 48.	Raspodjela σ_x	40
Slika 49.	Raspodjela τ_{max}	40
Slika 50.	Naprezanja prema von Misesu (proračunski model diskretiziran s 102417 KE)..	41
Slika 51.	Konvergencija rješenja naprezanja prema von Misesu proračunskog modela diskretiziranog C3D4 i C3D10 konačnim elementima	42
Slika 52.	Dimenzije modeliranog koljenastog vratila	44
Slika 53.	Koljenasto vratilo – leteći rukavac i mjesta uležištenja razdjeljena na segmente od 30°	45
Slika 54.	Cilindrični koordinatni sustav u osi letećeg rukavca – položaj 300° KV	46
Slika 55.	Način montaže koljenastog vratila u sklop motora [5].....	46
Slika 56.	Rubni uvjeti i opterećenje: 360° KV	47
Slika 57.	Različita gustoća mreže konačnih elemenata: a) 22393 b) 32625 c) 47345 d) 80058 e) 113808.....	48
Slika 58.	Raspodjela von Mises naprezanja u najopterećenijem trenutku	49
Slika 59.	Kritične točke u kojima se javljaju koncentracije naprezanja tijekom ciklusa	50
Slika 60.	Iznos naprezanja u kritičnim točkama tijekom ciklusa	50

Slika 61.	Raspodjela pomaka: a) ukupan pomak b) u smjeru osi y c) u smjeru osi z....	51
Slika 62.	Točke u kojima je provjeravana konvergencija von Mises naprezanja.....	52
Slika 63.	Konvergencija von Mises naprezanja u točkama 1, 2, 3 i 4 sa [Slika 62.].....	52
Slika 64.	S-N krivulja materijala koljenastog vratila	54
Slika 65.	Rezultat statičke analize u SolidWorksu	55
Slika 66.	Rezltati analize zamora u SolidWorks-u (engl. <i>Fatigue analysis</i>).....	56

POPIS TABLICA

Tablica 1.	Materijali radilice i njihova svojstva [6]	6
Tablica 2.	Osnovne dimenzije klipnog mehanizma sa [Slika 26.] i [Slika 27.]	9
Tablica 3.	Zadani podaci	30
Tablica 4.	Konvergencija rezultata za progib konzole / mm.....	33
Tablica 5.	Zadani podaci	35
Tablica 6.	Konvergencija rezultata za kuta zakreta konzole, rad	38
Tablica 7.	Zadani podaci	39
Tablica 8.	Konvergencija rezultata za kuta zakreta konzole, rad	43

POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
a	m/s^2	Akceleracija klipa
$a_{k,\min}$	J	Udarni rad loma
A_{klip}	mm^2	Površina čela klipa
$A_{\min}$	%	Prekidno istezanje
d	mm	Promjer kružnog poprečnog presjeka
D	mm	Promjer čela klipa
E	N/mm^2	Modul elastičnosti
$F_{B,R}$	N	Radijalna sila u točki B
$F_{B,T}$	N	Tangencijalna sila u točki B
F_C	N	Centrifugalna sila
F_{in}	N	Sila inercije
F_{klipnj}	N	Sila u klipnjači
F_N	N	Normalna sila na stjenke cilindra
F_{pl}	N	Sila plinova
F_{uk}	N	Ukupna sila
F_y	N	Sila u smjeru osi y
G	N/mm^2	Modul smicanja
h	mm	Pomak klipa
H	mm	Duljina od GMT do DMT
I_p	mm^4	Polarni moment tromosti
I_z	mm^4	Aksijalni moment tromosti oko osi z
l	mm	Duljina klipnjače
L	mm	Duljina konzole

m_B	kg	Masa koncentrirana u točki B
M_t	Nm	Moment torzije
M_z	Nm	Moment savijanja oko osi z
n	min^{-1}	Broj okretaja u minuti
p	bar	Tlak u cilindru
p_{pl}	bar	Tlak plinova
r	mm	Krak letećeg rukavca
r	mm	Polumjer kružnog poprečnog presjeka
R_e	N/mm^2	Granica razvlačenja
R_m	N/mm^2	Vlačna čvrstoća
S_a	N/mm^2	Amplituda naprezanja
S_{a0}	N/mm^2	Efektivna amplituda naprezanja za $S_m = 0$
S_m	N/mm^2	Srednje naprezanje
t	s	Vrijeme
u, v, w	mm	Pomak u smjerovima osi x, y i z
V_{cil}	cm^3	Volumen cilindra
W_p	mm^3	Polarni moment otpora
Z_{min}	%	Prekidna kontrakcija
α	°	Kut zakreta koljenastog vratila
α_s	-	Faktor oblika kod savijanja
α_t	-	Faktor oblika kod torzije
$\alpha_{s,0}$	-	Utjecaj prelaznog zaobljenja -faktor
$\alpha_{t,0}$	-	Utjecaj prelaznog zaobljenja i provrta rukavca - faktor
β	°	Kut otklona klipnjače od vertikalne osi
δ_1	-	Utjecaj širine ramena – faktor
δ_2	-	Utjecaj debljine ramena -faktor

δ_3	-	Utjecaj prekrivanja rukavca - faktor
δ_4	-	Utjecaj ekscentričnosti i promjera provrta - faktor
ε	%	Relativno produljenje
ζ_1	-	Utjecaj širine ramena - faktor
ζ_2	-	Utjecaj provrta – faktor
ζ_3	-	Utjecaj provrta – faktor
ζ_4	-	Utjecaj prekrivanja rukavca i širine i debljine ramena - faktor
ζ_5	-	Utjecaj prekrivanja rukavca
ζ_6	-	Utjecaj prelaznog zaobljenja
λ	-	Omjer klipnjače
ν	-	Poissonov faktor
σ_{ekv}	N/mm ²	Ekvivalentno naprezanje
σ_x	N/mm ²	Normalno naprezanje u smjeru osi x
σ_y	N/mm ²	Normalno naprezanje u smjeru osi y
σ_z	N/mm ²	Normalno naprezanje u smjeru osi z
τ	N/mm ²	Tangencijalno naprezanje
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	rad	Kut zakreta oko osi x, y i z
ω	rad/s	Kutna brzina

SAŽETAK

Koljenasto vratilo ili radilica je jedna od većih komponenata konstrukcije motora s unutrašnjim izgaranjem. Služi tome kako bi se linearan pomak klipa, kojeg guraju sile plinova nastale izgaranjem goriva u cilindru, pretvorio u rotacijsko gibanje odnosno zakretni moment pogodan za pogon recimo automobila. Samo koljenasto vratilo veoma je složene geometrije i opterećenja.

U ovom radu provedena je numerička analiza koljenastog vratila, kako bi dobili uvid u stanje naprezanja u ovom konstrukcijskom elementu i na temelju toga proveli analizu zamora. Prije same numeričke analize opisali smo koljenasto vratilo, probleme, način izrade, proveli analizu kinematike klipnog mehanizma te zatim i dinamike. Rezultati dobiveni analizom dinamike poslužili su nam kao ulazni podaci za numeričku analizu. Objašnjene su i verificirane metode i procedure primjenjene u numeričkoj analizi. Za potrebe numeričke analize korišteni su tetraedarski konačni elementi jer su se prilikom verifikacije i analize konvergencije pokazali prikladnima i jednostavnima za ovaj problem. Numerički proračun je proveden pomoću metode konačnih elemenata (MKE) u programskom paketu Abaqus. Numerički proračun također je proveden i u programskom paketu Solidworks s analogo postavljenim rubnim uvjetima i opterećenjem onome u Abaqus-u. Nakon toga pristupilo se analizi zamora u Solidwork-ovom modulu *Fatigue analysis* u kojem smo okvirno dobili vrijednosti životnog vijeka pojedinih dijelova koljenastog vratila kako bi u slučaju eksploatacije u realnom svijetu znali odrediti vremenske periode inspekcije koljenastog vratila.

Ključne riječi: koljenasto vratilo, numerička analiza, zamor, metoda konačnih elemenata

SUMMARY

The crankshaft is one of the major components of the engine with internal combustion. Its purpose is to convert the linear displacement of the piston, which is pushed by the force of the gas generated by the ignition of fuel in the cylinder, into rotational motion or a torque suitable for the drive, for example the car drive. Crankshaft has very complex geometry, load and boundary conditions.

Numerical analysis of the crankshaft was performed in order to gain insight into the stress state in this structural element and on that basis carried out the fatigue analysis. Prior to the numerical analysis we described the crankshaft, problems, way of producing, analysis of the kinematics of the piston mechanism and then the dynamics. The results obtained by analyzing the dynamics served us as input data for numerical analysis. The methods and procedures applied in the numerical analysis are explained and verified. For the purposes of numerical analysis, the tetrahedral finite elements were used because they proved to be appropriate and simple for this problem when verifying and analyzing convergence. Analysis was performed using the finite element method (FEM) in the Abaqus software. The numerical calculation was also carried out in the Solidworks software with an analogue set boundary conditions and load. After that, fatigue analysis in Solidwork's Fatigue Analysis module was obtained, in which we have roughly obtained lifetime values of individual crankshaft parts to determine crankshaft inspection time in case of real-world exploitation.

Key words: Crankshaft, numerical analysis, fatigue, finite element method

1. UVOD

1.1. Vratila

Vratila, općenito, su strojni elementi koji se, za razliku od osovina, obavezno okreću te prenose okretni moment i snagu. Na sebi često nose različite strojne elemente kao što su remenice, lančanici, tarenice, spojke, zupčanici tj. dijelove koji također služe za prijenos snage [1].

Obzirom na vrstu i broj na sebe pričvršćenih elemenata, vratila mogu biti opterećena poprečnim, odnosno radijalnim, silama koje izazivaju savijanje i odrez, ali i uzdužnim, odnosno aksijalnim, silama koje izazivaju vlak ili tlak. Budući da vratila po svojoj definiciji služe za prijenos snage i okretnog momenta ona su obavezno opterećena i uvijanjem odnosno torzijom. Što se tiče podjele vratila, osnovna podjela, a koja je najinteresantnija u okviru ovog rada, jest podjela vratila izvršena s obzirom na položaj geometrijske osi i prema njoj vratila se dijele na:

- a) ravna vratila,
- b) koljenasta vratila,

kao što je prikazano na [Slika 1].



Slika 1. a) Ravno vratilo b) Koljenasto vratilo

1.2. Koljenasto vratilo

Koljenasto vratilo ili radilica je jedna od većih komponenata konstrukcije motora s unutrašnjim izgaranjem. Glavna je uloga koljenastog vratila da naizmjenično pravocrtno

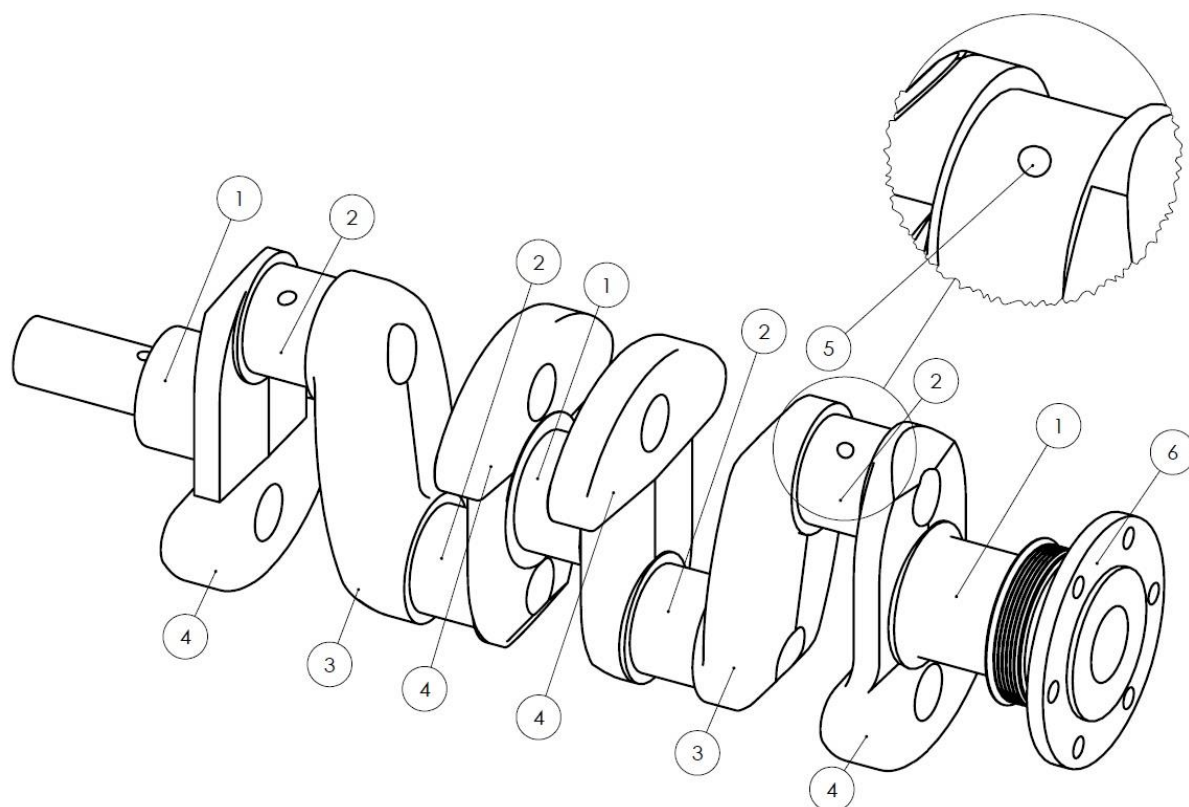
gibanje klipova pretvara u rotacijsko gibanje. Najčešću primjenu koljenastog vratila nalazimo kod automobilskih motora, gdje osim pogona samog vozila preko zupčanika, lančanika i klinastih remena pogoni i pomoćne uređaje motora kao što su bregasta osovina, razvodnik paljenja, crpka ulja za podmazivanje i vode za hlađenje, ventilator, generator te alternator, međutim postoje i mnoge druge primjene, sve od malih jednocilindričnih motora za pogon kosilica do ogromnih višecilindričnih brodskih motora [2].

Budući da kroz svoj životni vijek koljenasto vratilo "proživljava" vrlo velik broj ciklusa opterećenja, otpornost na zamor i izdržljivost ove komponente trebaju itekako biti uzeti u obzir u procesu konstruiranja. Istraživanja mogućnosti razvoja i poboljšanja uvijek su bila jedna od velikih preokupacija u svijetu proizvodnje koljenastih vratila, a sve u svrhu toga da se proizvede jeftinija komponenta sa što manjom mogućom masom i odgovarajućom zamornom čvrstoćom te ostalim funkcionalnim zahtjevima. Takva poboljšanja dovode do lakših i manjih motora sa boljom učinkovitosti s obzirom na potrošnju goriva i izlazni moment tj. snagu.

1.2.1. Dijelovi koljenastog vratila i opis

Postoje mnoge izvedbe koljenastih vratila i to u ovisnosti o broju cilindara koje motor ima, kakve je motor izvedbe (redni, V-izvedba, bokser, itd.) i ostalim faktorima. Koje god vrste da je koljenasto vratilo sastoji se od nekoliko uvijek prisutnih dijelova kao što je prikazano na [Slika 2]. Redom kao što je označeno na [Slika 2.]: (1) glavni rukavci, (2) leteći rukavci, (3) ramena, (4) protuutezi, (5) otvori za dovod ulja i (6) prirubnica za pričvršćenje zamašnjaka.

Koljenasto vratilo unutra motora rotira, a mjesta na kojima je uležišteno tj. na kojima "sjedaju", nazivaju se glavni ležajevi motora, dok dijelove koljenastog vratila koji "sjedaju" na tim ležajevima nazivamo glavnim rukavcima (1). Broj glavnih ležajeva i glavnih rukavaca ovisi o vrsti i veličini motora. Klip se preko klipnjače na koljenasto vratilo veže na dijelove koje nazivamo letećim rukavcima (2) koji su smješteni izvan osi vrtnje tj. ekscentrično, a tu ekscentričnost odnosno pomak osi letećeg rukavca od osi rotacije postižemo pomoću ramena (3). Zbog velikih brzina vrtnje koljenasto vratilo zahtjeva balansiranje. U slučaju da koljenasto vratilo nije balansirano može doći do velikih vibracija ili u krajnjem slučaju do oštećenja motora. Balansiranje je djelomično postignuto korištenjem protuutega (4). Fino balansiranje obično se postiže dodatnim bušenjem rupa na donjoj strani protuutega kako bi se odstranio materijal.



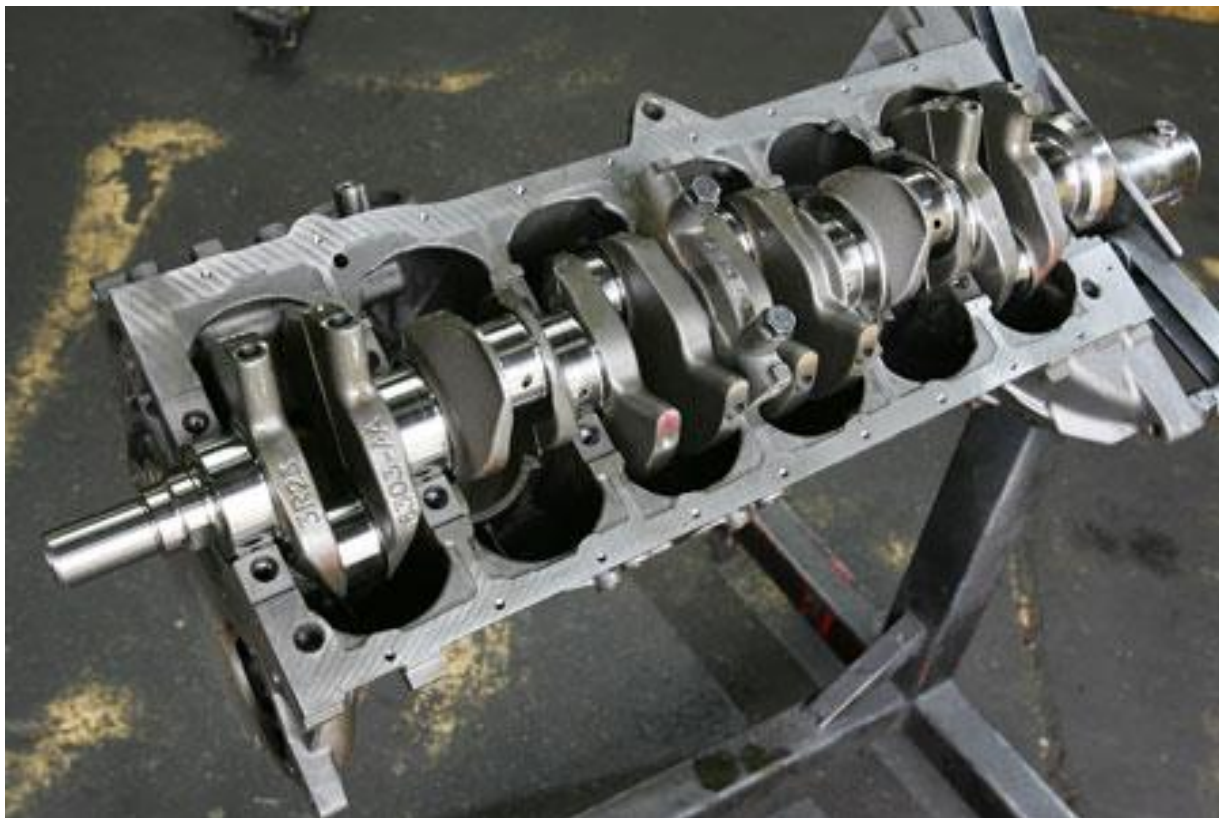
Slika 2. Dijelovi koljenastog vratila

Na [Slika 3.] u presjeku je prikazano koljenasto vratilo u kontekstu sklopa motora.



Slika 3. Koljenasto vratilo u motoru

Na [Slika 4.] prikazan je način uležištenja koljenastog vratila u kućište motora. Koljenasta vratila suvremenih motora imaju male razmake glavnih ležajeva u odnosu na promjere glavnih rukavaca i rukavaca klipnjače što za posljedicu ima to da su kritične brzine vrtnje s obzirom na poprečne vibracije daleko iznad pogonskih brzina vrtnje.



Slika 4. Uležištenje koljenastog vratila u kućište motora

1.2.2. Materijal i način izrade

Visoki zahtjevi na koljenasta vratila u pogledu čvrstoće i krutosti, otpornosti na zamor uslijed torizije i savijanja, otpornosti na trošenje u područjima uležištenja te uvijek prisutni zahtjevi za mogućnost smanjenja dimenzija (a samim time i mase), direktno za sobom povlače pitanje izbora materijala te izbora procesa izrade. U današnjem svijetu, u kojem je sve postalo podređeno što većoj zaradi i smanjenju troškova, veliki naponi ulažu se u optimizacije proizvodnih procesa, od izbora materijala, načina oblikovanja, pa sve do završne obrade. Izrada koljenastog vratila vrlo je složena, a samo koljenasto vratilo svrstavamo u najskuplje dijelove motora.

Što se tiče izrade koljenastih vratila, postoje dvije vrste izrade koje treba istaknuti:

1. koljenasta vratila nastala kovanjem
2. koljenasta vratila nastala lijevanjem

1.2.2.1. Koljenasta vratila nastala kovanjem

Kovanje, općenito, je oblikovanje metala deformiranjem u toplom (užarenom), polutoplom ili hladnom stanju. Kovati se može ručno, udarcima čekićem na nakovnju, ili strojno, udarcima bata odnosno malja [3].

Kovanje koljenastog vratila vrši se postupno u nekoliko ukovnja i zahtjeva veliko iskustvo. Naročito je teško kovanje radilice s protuutezima. Kovanjem se materijal sabija, nosiva vlakna u materijalu se zgušnjavaju te se postiže fina sitnozrnata struktura. Dobrom prokovanošću znatno se povećava trajna dinamička čvrstoća koljenastog vratila. Najčešće koljenasta vratila nastaju kovanjem konstrukcijskog čelika, odnosno čelika za poboljšavanje te nitriranog čelika vlačne čvrstoće 490-930 N/mm² [4]. Na [Slika 5.] prikazana su koljenasta vratila nastala kovanjem.



Slika 5. Kovana koljenasta vratila

1.2.2.2. Koljenasta vratila nastala lijevanjem

Lijevanje je postupak oblikovanja pri kojem se rastaljeni metal ulijeva u neku šupljinu (kalup), hladi se i skrućuje u njoj te poprima njen oblik (odljevak).

Za lijevana vratila koristi se posebno pripremljeni sivi lijev zbog dobrih svojstava pri lijevanju, male osjetljivosti na zareze pri obradi, te zbog dobrih kliznih svojstava. Troškovi izrade vratila od sivog lijeva znatno su niži od kovanih ili prešanih čeličnih vratila, iako je jedinična cijena (USD/kg) materijala za lijevanje veća od cijene čelika, jer zahtijevaju manje dodatne obrade [4], [5].

1.2.2.3. Materijali za izradu koljenastih vratila

U [Tablica 1.] navedeni su najčešće korišteni materijali za izradu koljenastih vratila i njihova svojstva [4].

Tablica 1. Materijali radilice i njihova svojstva [6]

Materijal	Granica razvlačenja R_e [N/mm ²]	Vlačna čvrstoća R_m [N/mm ²]	Prekidno istezanje A_{min} [%]	Prekidna kontrakcija Z_{min} [%]	Udarni rad loma $a_{k,min}$ (J, 20°C)	Toplinska obrada
Ck 45	370	630-780	17	45	25 DVM ^(*)	IK, KN
38 MnS 6	550	850-1000	12	25	-	IK
42 CrMo 4	650	900-1100	12	50	35 DVM	IK, KN
31 CrMoV 9	>800	1000-1200	11	-	50 DVM	N
GGG 70	>450	>700	>2	-	-	IK

IK-indukcijsko kaljenje; KN-kratkotrajno nitriranje (1,5-2h); N-dugotrajno nitriranje (80-120h)

(*)DVM-oznaka epruvete (DIN 50115)

U pogledu mehaničkih svojstava najbolja su dugotrajno nitrirana koljenasta vratila. Trajnost i nosivost takve radilice približno su 20% veća od najboljih radilica od poboljšanog čelika, a rukavci dobro kližu po svakom ležajnom materijalu bez stvaranja ogrebotina. Takva radilica je i najskuplja zbog skupe i dugotrajne termičke obrade.

1.2.3. Opterećenje koljenastog vratila

Opterećenje koljenastog vratila iznimno je složeno. Radi se o dinamičkom opterećenju koje se mijenja tokom vremena i ponavlja u ciklusima. Analizom opterećenja koljenastog vratila bavit ćemo se u kasnijim poglavljima, a ovdje ćemo samo navesti osnovna opterećenja kojima je koljenasto vratilo podvrgnuto.

Dakle, koljenasto vratilo opterećeno je:

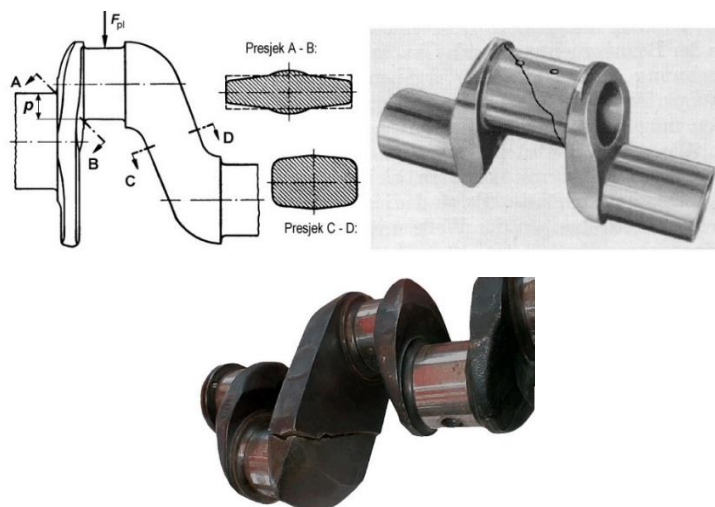
- a) silama plinova - F_{pl}
- b) silama inercije oscilirajućih i rotirajućih masa - F_{in}
- c) vibracijama : poprečnim, uzdužnim i torzijskim

1.2.4. Oštećenja koljenastog vratila

Naprezanje koljenastog vratila uslijed savijanja i torzije je izmjenično dinamičko naprezanje promjenjivog predznaka. Dopušteno naprezanje u ovom slučaju određuje se na temelju trajne dinamičke čvrstoće do koje se ne dolazi ispitivanjem glatkih normiranih epruveta već ispitivanjem u dugotrajnom radu provjerenih i dokazanih koljenastih vratila. Dinamička čvrstoća ponajviše ovisi o materijalu i dimenzijama koljenastog vratila, o obliku te toplinskoj i površinskoj obradi kojoj je koljenasto vratilo bilo podvrgnuto [4].

Koljenasto vratilo najčešće puca zbog zamora materijala, odnosno zbog prevelikih naprezanja na kritičnim mjestima. Ti lomovi započinju na prijelazu s letećeg rukavca na rame (uslijed izmjeničnog savijanja silom plinova i silom inercije ili uslijed torzijskih vibracija) i na izlazu uljnog kanala na površinu letećeg rukavca (uslijed izmjeničnog opterećenja na torziju izazvanog promjenjivim momentom pojedinih cilindara i torzijskim vibracijama).

Lom započinje od inicijalne pukotine, koja može biti površinska (nastala mehaničkom ili termičkom obradom), ili unutarnja (od falde nastale kovanjem, od šljake koja je ušla u materijal ili neke druge poroznosti). Na [Slika 6.] prikazana su mjesta najčešćih lomova koljenastog vratila.

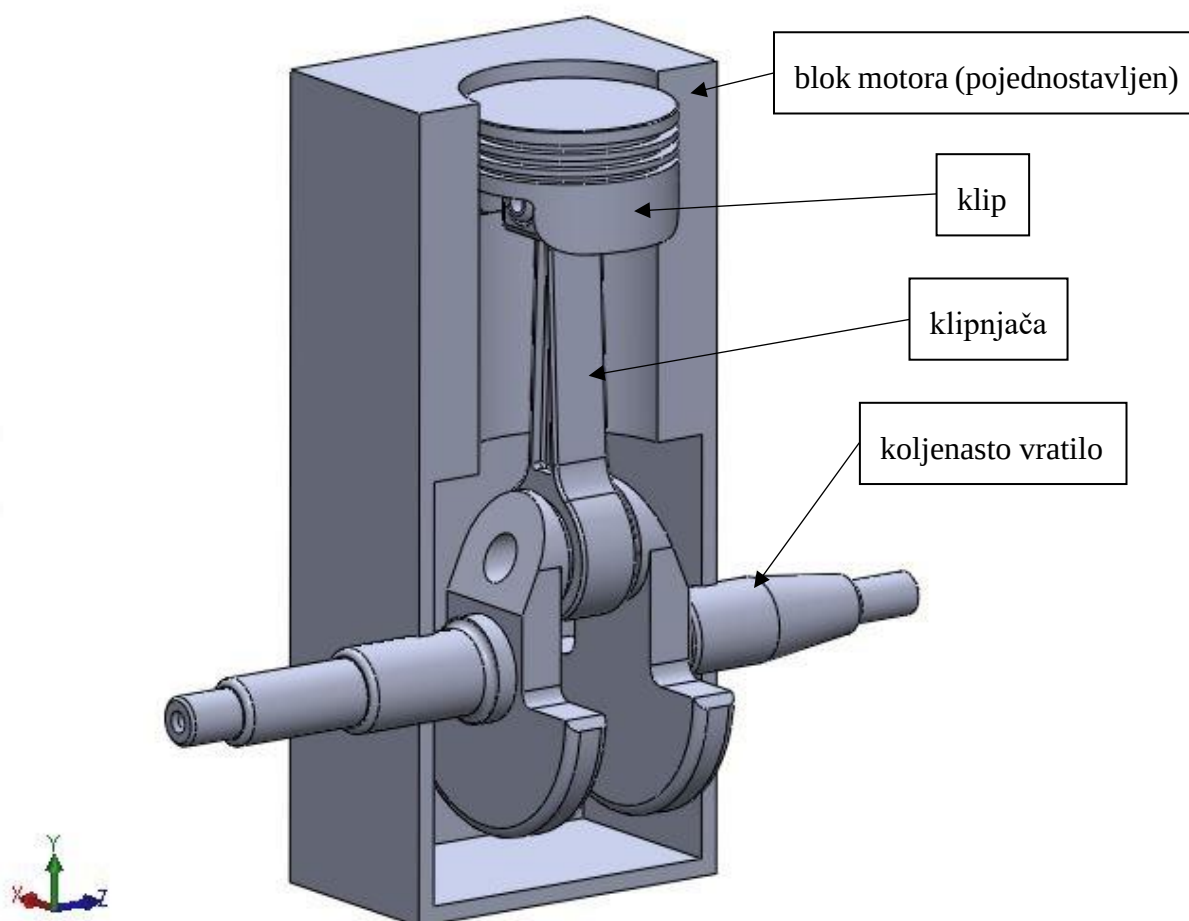


Slika 6. Kritična mjesta na kojim najčešće dolazi do lomova radi dinamičkog opterećenja

2. KINEMATIKA KLIPNOG MEHANIZMA

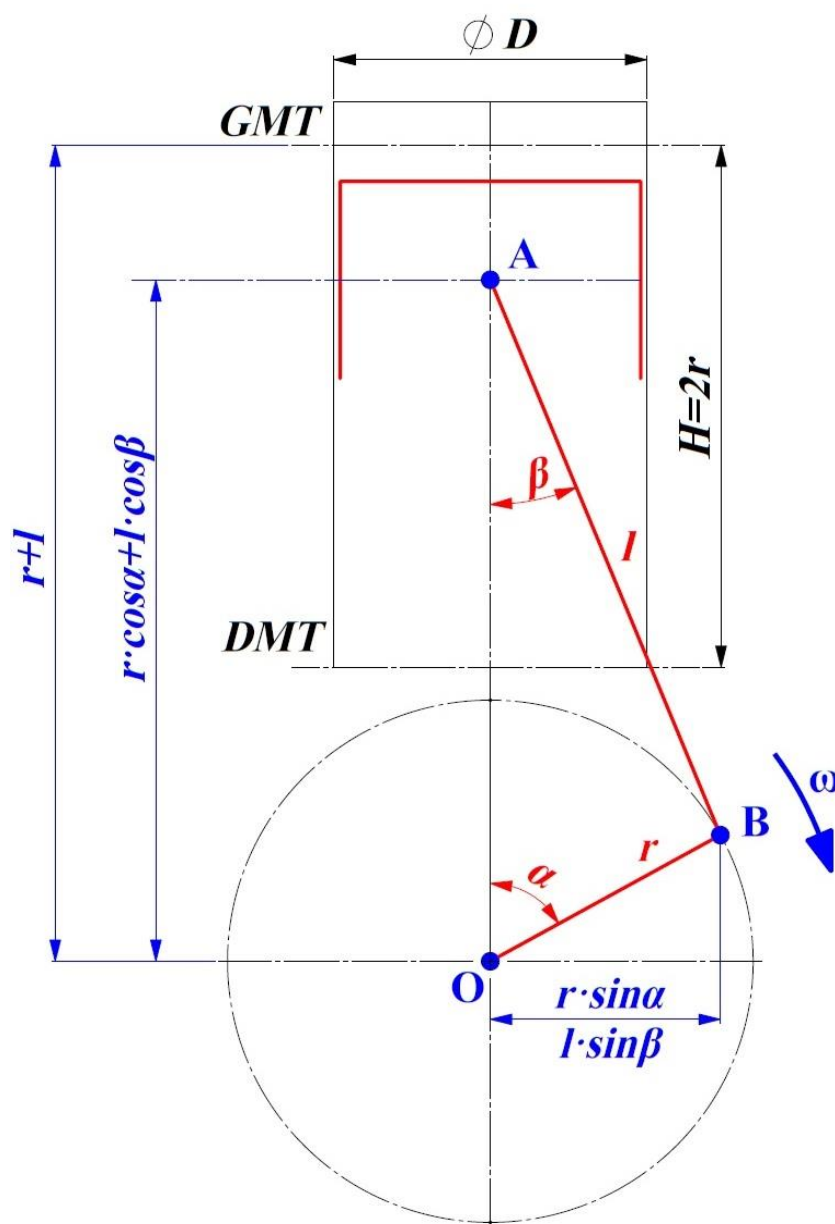
Kinematika je grana mehanike koja proučava gibanje tijela, ne uzimajući u obzir uzroke gibanja tijela (sile, momente). Gibanje neke čestice, točke ili tijela u prostoru, odnosno njegova putanja, brzina i ubrzanje, potpuno je određeno ako je poznata promjena triju koordinata položaja u vremenu. Kinematika mehanizma proučava gibanja sastavnih dijelova mehanizma, neovisno o uzrocima gibanja [6].

Određivanje kinematskih relacija u ovom radu izrazito nam je bitno iz razloga što treba odrediti smjerove sila koje djeluju na koljenasto vratilo, što bi bilo nemoguće bez razmatranja kinematike, budući da je riječ o mehanizmu čiji se dijelovi neprestano kreću jedan naspram drugoga, i rotacijski i translacijski. Na [Slika 7.] možemo vidjeti pojednostavljeni sklop klipnog mehanizma koji se sastoji od bloka motora, klipa, osovinice klipa, klipnjače i koljenastog vratila.



Slika 7. Pojednostavljeni klipni mehanizam kreiran u SolidWorks-u

Na [Slika 8.] shematski je prikazan klipni mehanizam te naznačene dimenzije iz kojih ćemo prema geometrijskim relacijama doći do kinematskih jednažbi.



Slika 8. Shematski prikaz klipnog mehanizma

Osnovne dimenzije klipnog mehanizma sa [Slika 8.] prikazane su u [Tablica 2.].

Tablica 2. Osnovne dimenzije klipnog mehanizma sa [Slika 26.] i [Slika 27.]

r / mm	l / mm	$\varnothing D$ / mm	n / o/min
30	100	60	4000

2.1. Put klipa

Pomak klipa h , može se odrediti postavljanjem jednadžbe prema [Slika 8.] :

$$h = r + l - (r \cdot \cos\alpha + l \cdot \cos\beta) = \dots = r \left[(1 - \cos\alpha) + \frac{r}{l} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2\beta} \right) \right]. \quad (1)$$

Uvođenjem omjera klipnjače, $\lambda = r/l$, te izračunavanje visine trokuta (O, A, B): $r \cdot \sin\alpha = l \cdot \sin\beta$, slijedi :

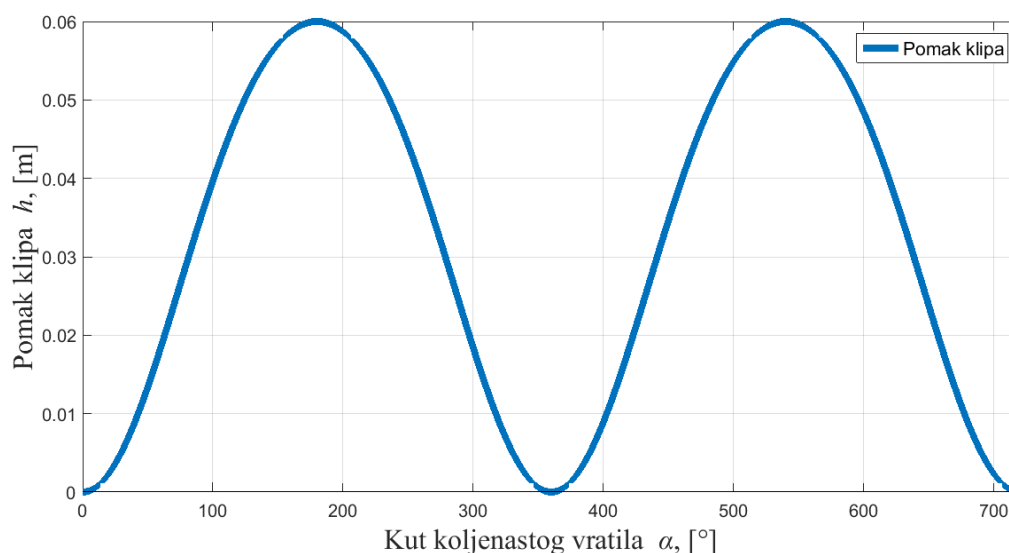
$$\sin\beta = r/l \sin\alpha = \lambda \sin\alpha. \quad (2)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2) u izraz (1) dobiva se :

$$h = r \cdot \left[(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2\alpha}) \right]. \quad (3)$$

Uvrstimo li podatke iz [Tablica 8.] u jednadžbu (3), dobit ćemo pomak odnosno put klipa s obzirom na kut zakreta koljenastog vratila što je prikazano na [Slika 9.]. Jednadžbu (3) isprogramirali smo u programskom paketu MatLab.

Ovako analitički dobivene izraze i dijagrame kasnije ćemo verificirati u programskom paketu MSC.Adams/View koji služi za detaljnu analizu kinematike i dinamike.



Slika 9. Pomak klipa

2.2. Brzina klipa

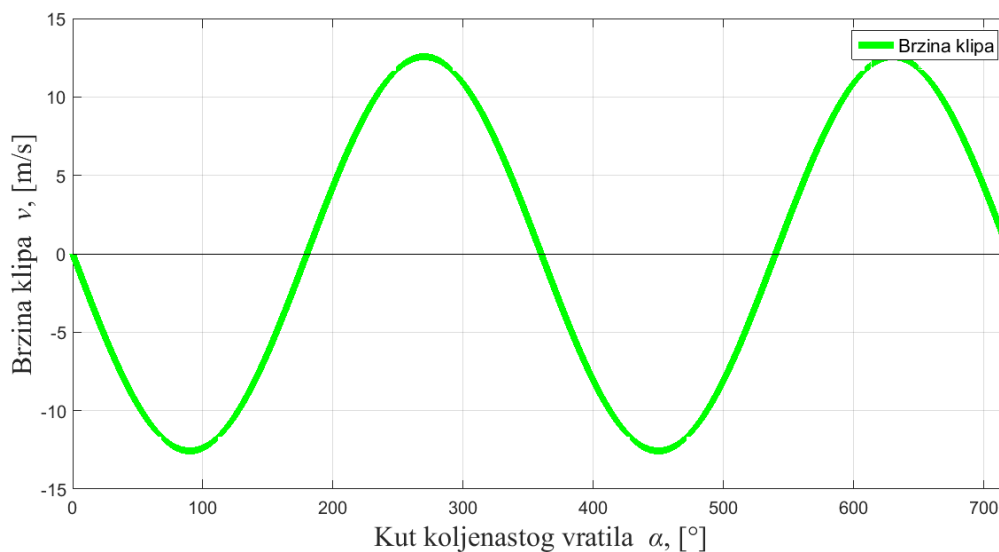
Brzina klipa jednaka je derivaciji puta po vremenu :

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}. \quad (4)$$

Dakle, izraz za brzinu klipa dobiva se derivacijom izraza (3) i glasi :

$$v = r \cdot \omega \cdot \left(\sin \alpha + \lambda \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \right). \quad (5)$$

Izraz (5) daje nam brzinu klipa u ovisnosti o kutu zakreta koljenastog vratila α , što je za naš slučaj, preuzevši podatke iz [Tablica 2.], prikazano na [Slika 10.].



Slika 10. Brzina klipa

2.3. Ubrzanje klipa

Ubrzanje klipa jednako je derivaciji njegove brzine po vremenu :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{d\alpha}{dt}. \quad (6)$$

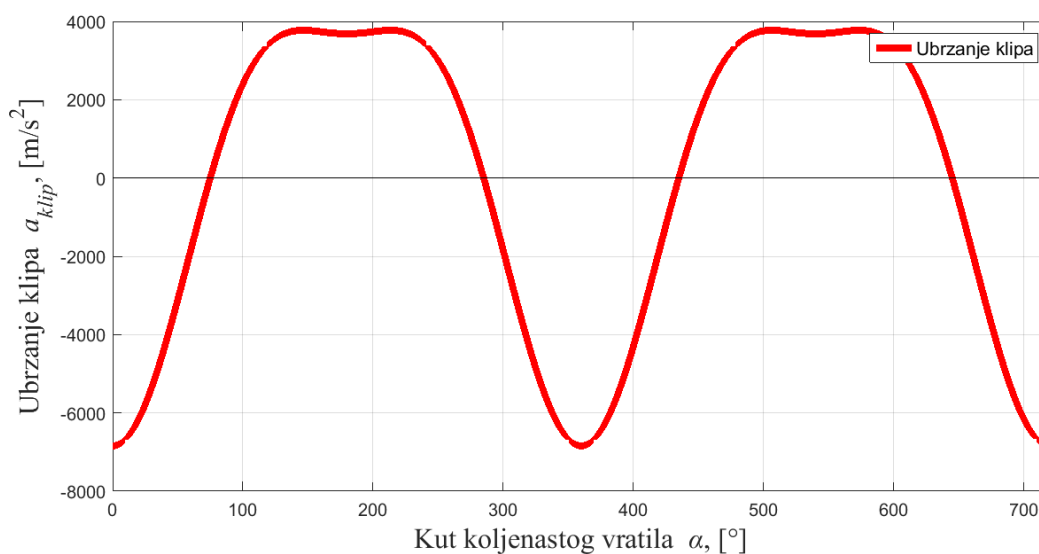
Dakle :

$$a \approx r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha). \quad (7)$$

Izraz (7) zgodno je rastaviti na (8), što je prikladno i važno kod izračunavanja inercijskih sila u klipnom mehanizmu uslijed oscilirajućih masa (masa koje se gibaju pravocrtno) :

$$a = a_1 + a_2; \quad a_1 = r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha; \quad a_2 = r \cdot \omega^2 \cdot \lambda \cdot \cos 2\alpha \quad (8)$$

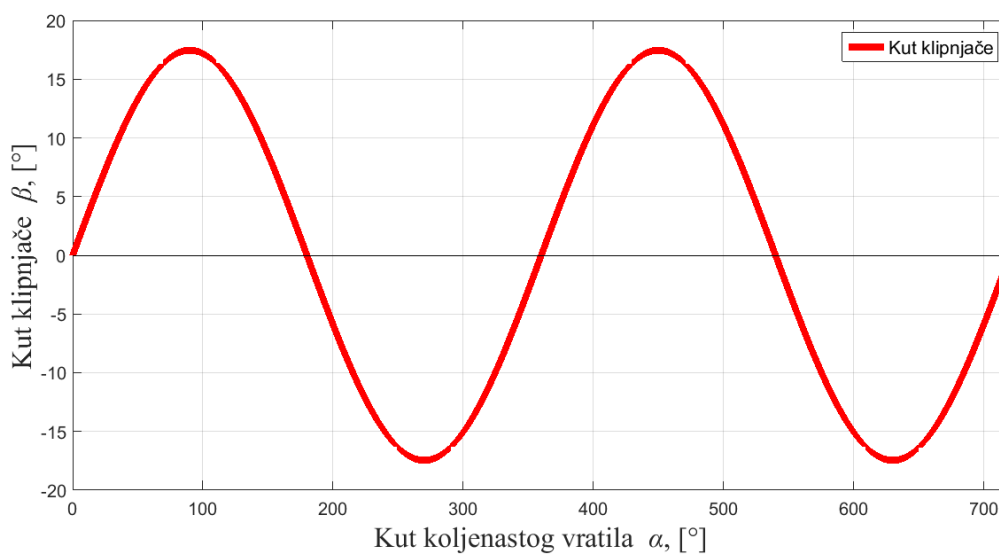
Izraz (8) daje nam brzinu klipa u ovisnosti o kutu zakreta koljenastog vratila α , što je za naš slučaj, preuzevši podatke iz [Tablica 2.], prikazano na [Slika 11.].



Slika 11. Ubrzanje klipa

2.4. Ovisnost kuta klipnjače (β) o kutu zakreta koljenastog vratila (α)

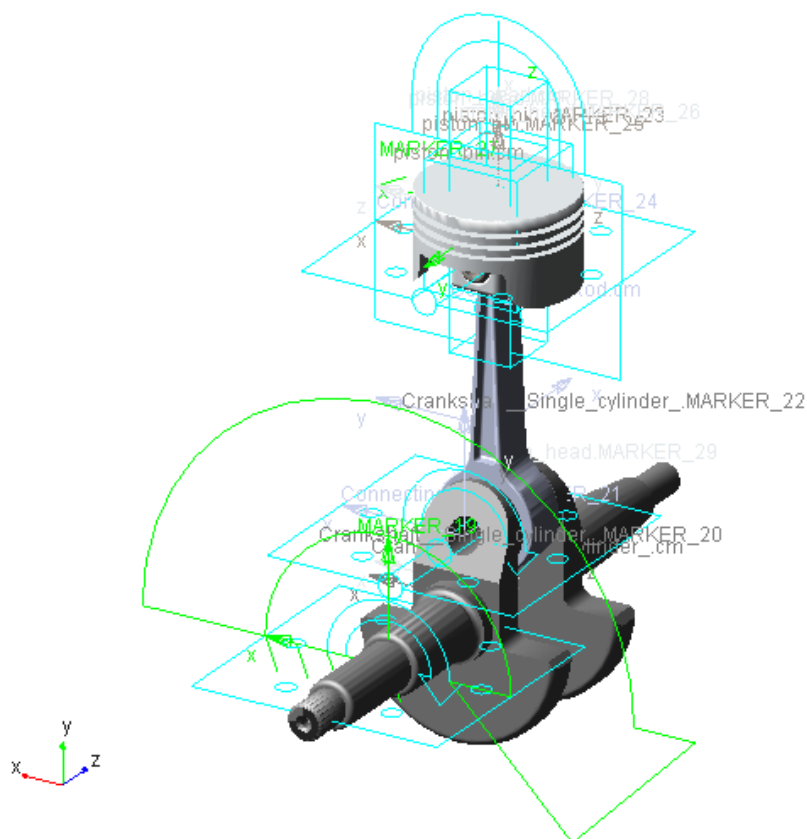
Ovu ovisnost već smo odredili izrazom (2), a na [Slika 12.] prikazana je grafički. Ovisnost kuta klipnjače, β , o kutu zakreta koljenastog vratila, α , bit će nam izrazitno bitna kod analize dinamike odnosno kod određivanja smjera djelovanja pojedinih sila na leteći rukavac koljenastog vratila.



Slika 12. Kut klipnjače β

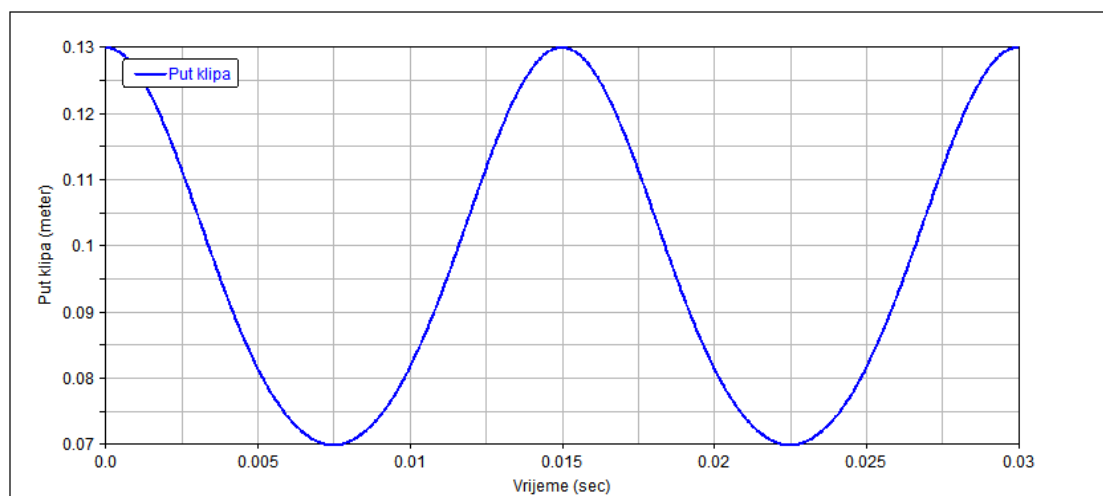
2.5. Analiza kinematike u programskom paketu MSC.Adams/View

MSC.Adams je programski paket koji inženjerima omogućuje proučavanje dinamike i analizu kinematike sklopova. Kako bi potvrdili da su naše jednadžbe ispravno postavljene napravili smo model u programskom paketu MSC.Adams, što je prikazano na [Slika 13.].

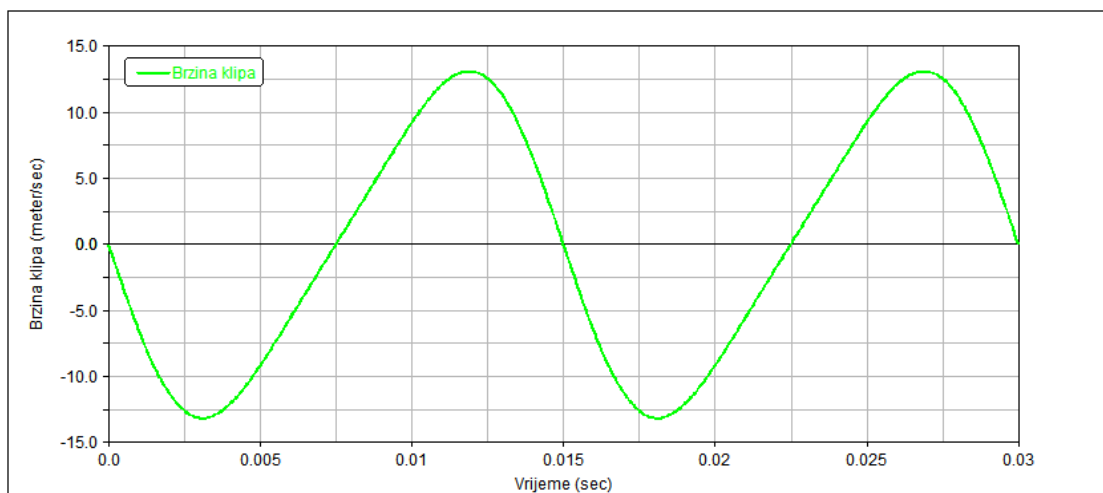


Slika 13. Proračunski model u programskom paketu MSC.Adams 2017.2

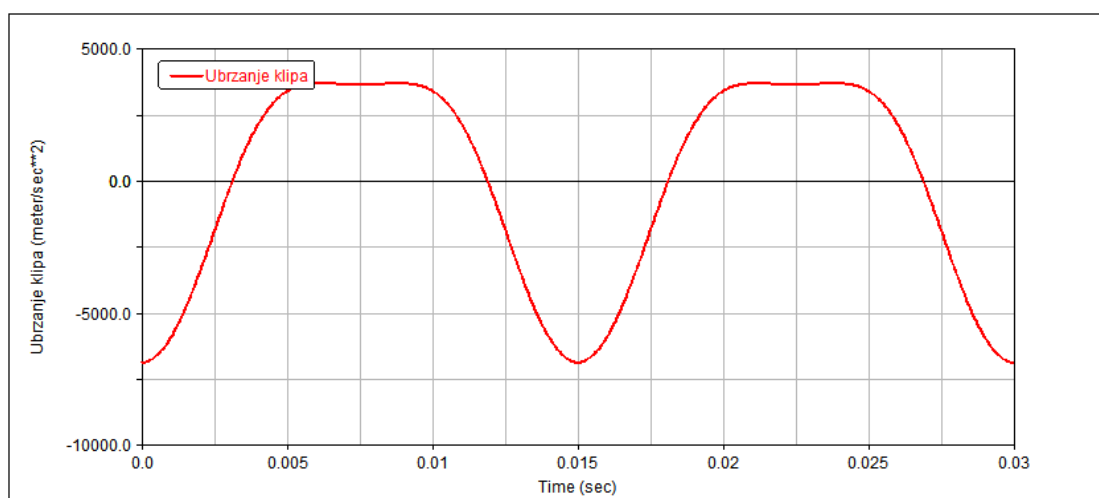
Rezultati kinematske analize prikazani su na [Slika 14.] do [Slika 16.]



Slika 14. Put klipa [MSC.ADAMS]



Slika 15. Brzina klipa [MSC.ADAMS]



Slika 16. Ubrzanje klipa pojednostavljenog modela

Ono što možemo uočiti je to da se rezultati analize u MSC.Adams-u poklapaju sa analitičkim rezultatima analize kinematike. U sljedećem poglavlju bavit ćemo se analizom dinamike, odnosno sila koje djeluju na klipni mehanizam.

3. DINAMIKA KLIPNOG MEHANIZMA

3.1. Dinamika

Dinamika je grana klasične mehanike koja povezuje gibanje tijela sa silama koje djeluju na tijelo. Temeljni su zakoni u rješavanju dinamičkih problema zakon očuvanja energije, zakon očuvanja količine gibanja, princip virtualnih pomaka, Lagrangeove generalizirane jednadžbe gibanja i Hamiltonov varijacijski princip [7].

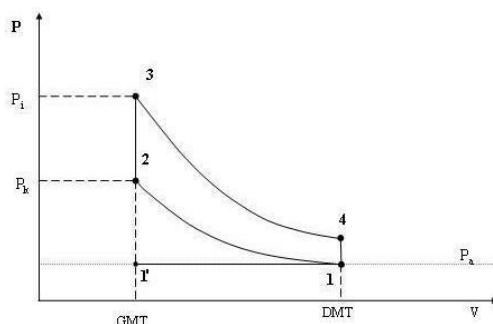
3.2. Opis rada četverotaktnog motora

Četverotaktni motor s unutarnjim izgaranjem je motor koji obavlja svoj radni ciklus u četiri takta, odnosno motor koji svoj radni ciklus obavi za dva okreta koljenastog vratila tj. 720° . Ottovi i Dieselovi motori mogu biti izvedeni da rade kao dvotaktni ili četverotaktni motori. Ta četiri takta su :

- usis zraka
- kompresija i paljenje smjese zraka i goriva
- izgaranje i ekspanzija (radni takt)
- ispuh i istiskivanje plinova van cilindra

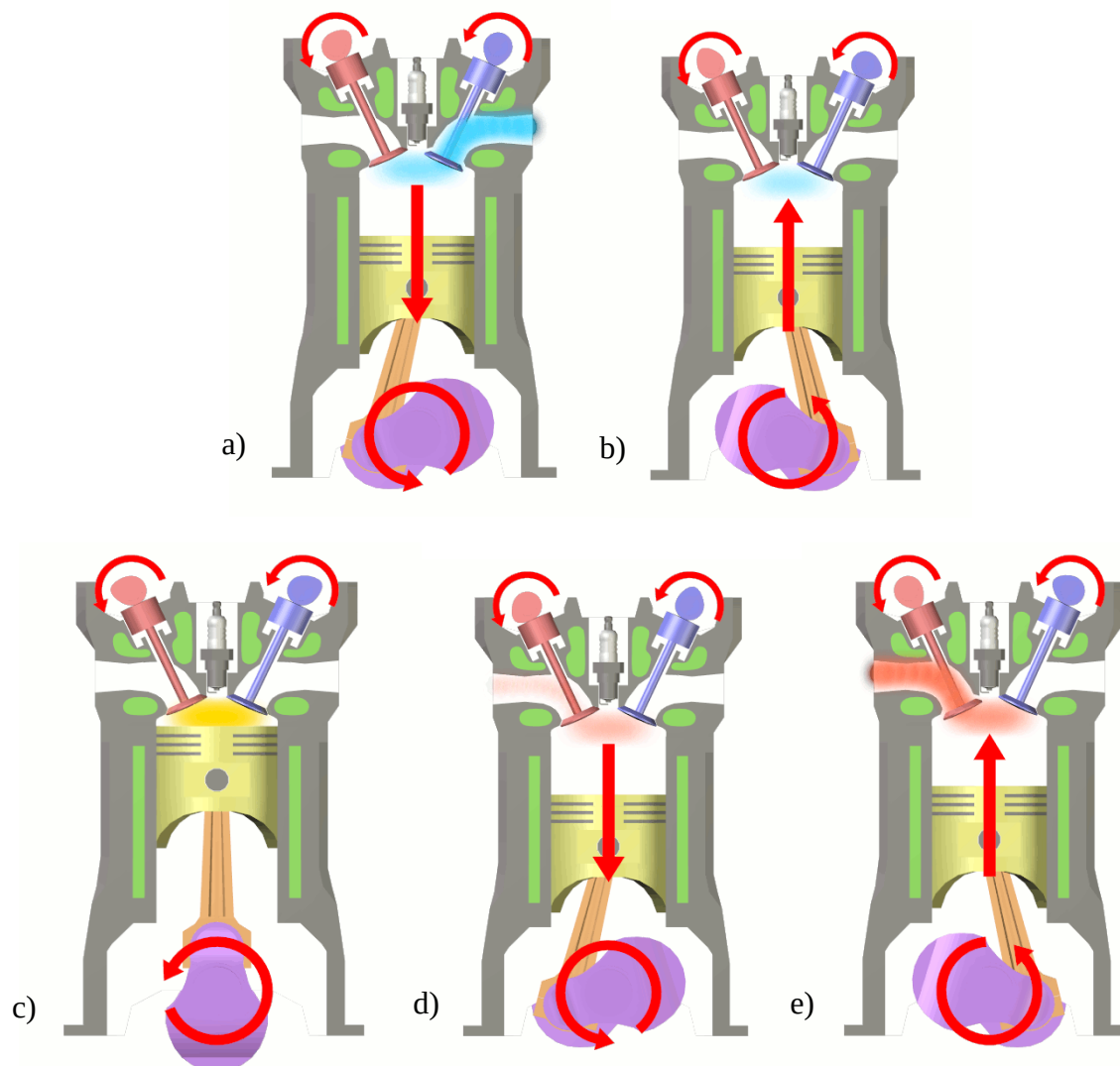
Na teoretskom p - V dijagramu četverotaktnog Ottovog motora prikazanog na [Slika 17.] možemo definirati ta četiri takta.

1. takt – od 1' do 1 $\rightarrow$ usis zraka
2. takt – od 1 do 2 $\rightarrow$ kompresija i paljenje u točki 2
3. takt – od 2 do 4 $\rightarrow$ 2-3 izgaranje, 3-4 ekspanzija
4. takt – od 4 do 1' $\rightarrow$ 4-1 slobodan ispuh, 1-1' ispuh potpomognut gibanjem klipa



Slika 17. Teoretski p - V dijagram Ottovog četverotaktnog motora [8]

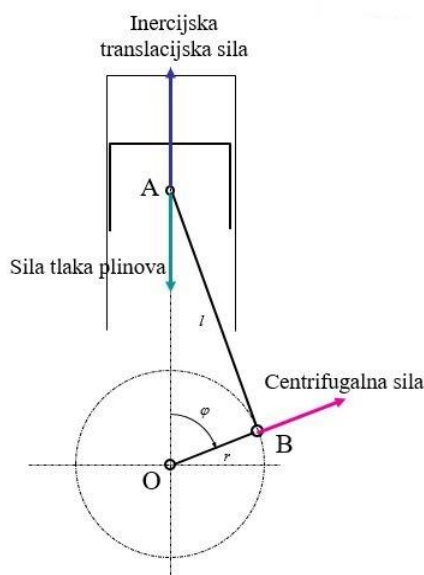
Proces sa [Slika 17.] slikovito je prikazan na [Slika 18.] radi boljeg razumijevanja [8].



Slika 18. a) usis ; b) kompresija ; c) paljenje smjese ; d) ekspanzija ; e) ispuh [8]

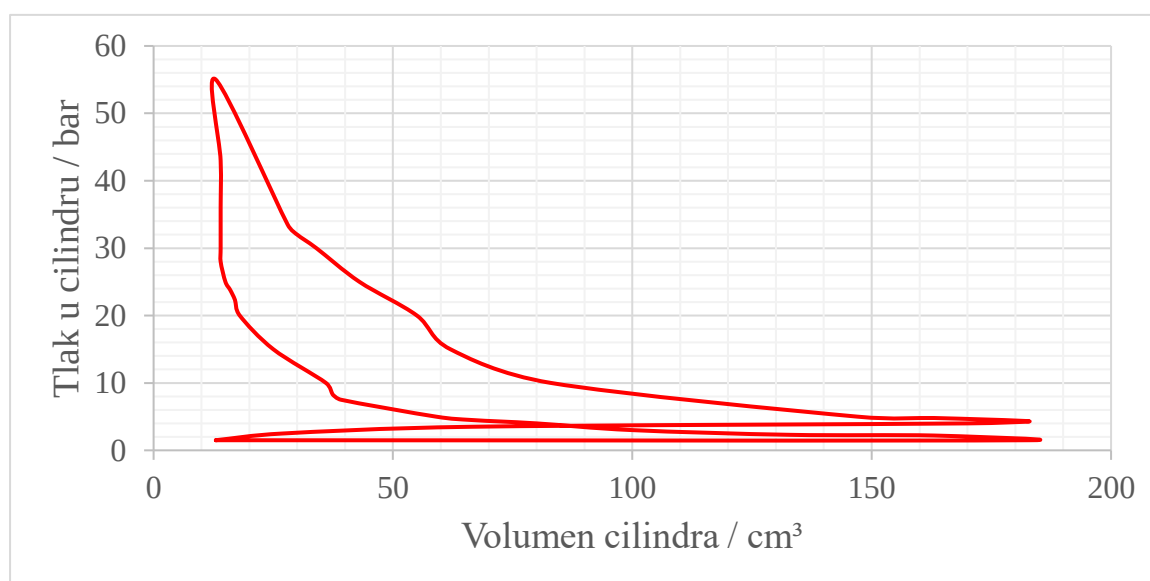
3.3. Analiza opterećenja klipnog mehanizma

Sile koje djeluju u klipnom mehanizmu prikazane su na [Slika 19.].

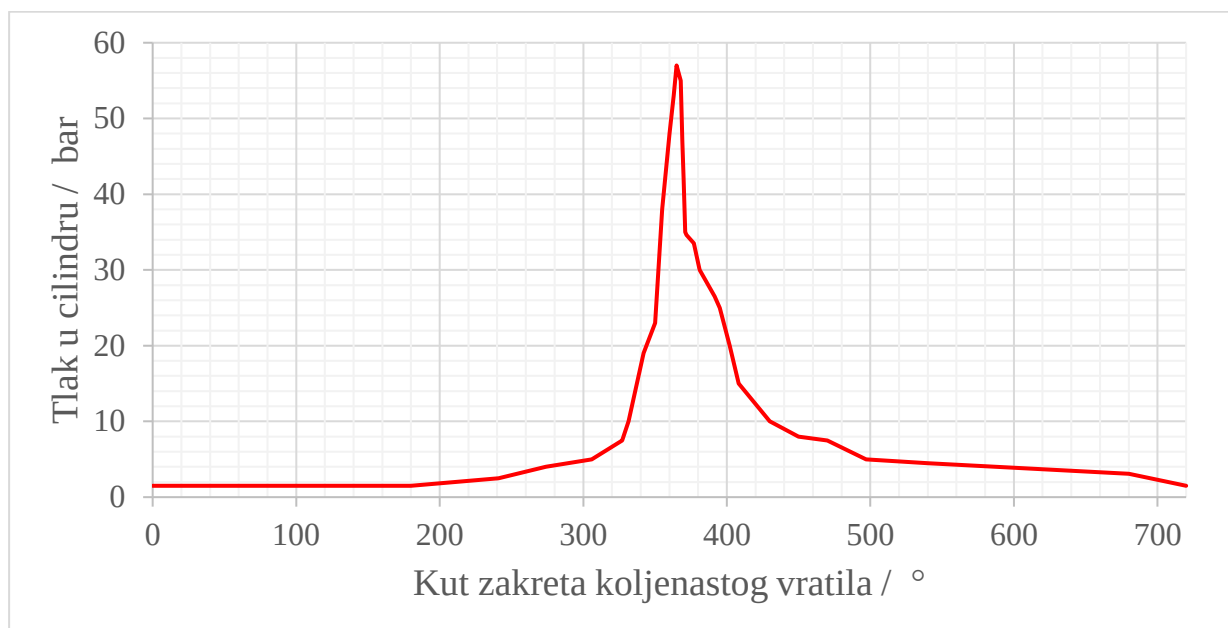


Slika 19. Sile koje djeluju u klipnom mehanizmu [10]

Kao što je to i inače slučaj u praksi, stvarni p - V dijagram četverotaktnog motora malo odudara od idealnog procesa prikazanog na [Slika 17.]. Budući da p - V dijagram motora iz kojeg je preuzeto koljenasto vratilo nije bio dostupan, poslužili smo se p - V dijagramom iz literature [9] što je prikazano na [Slika 20.]. Dijagram sa [Slika 20.] poslužio nam je da, preko povezanosti volumena u cilindru i kuta zakreta koljenastog vratila, dobijemo dijagram ovisnosti tlaka u cilindru o kutu zakreta koljenastog vratila, što je prikazano na [Slika 21.].



Slika 20. p - V (indikatorski) dijagram

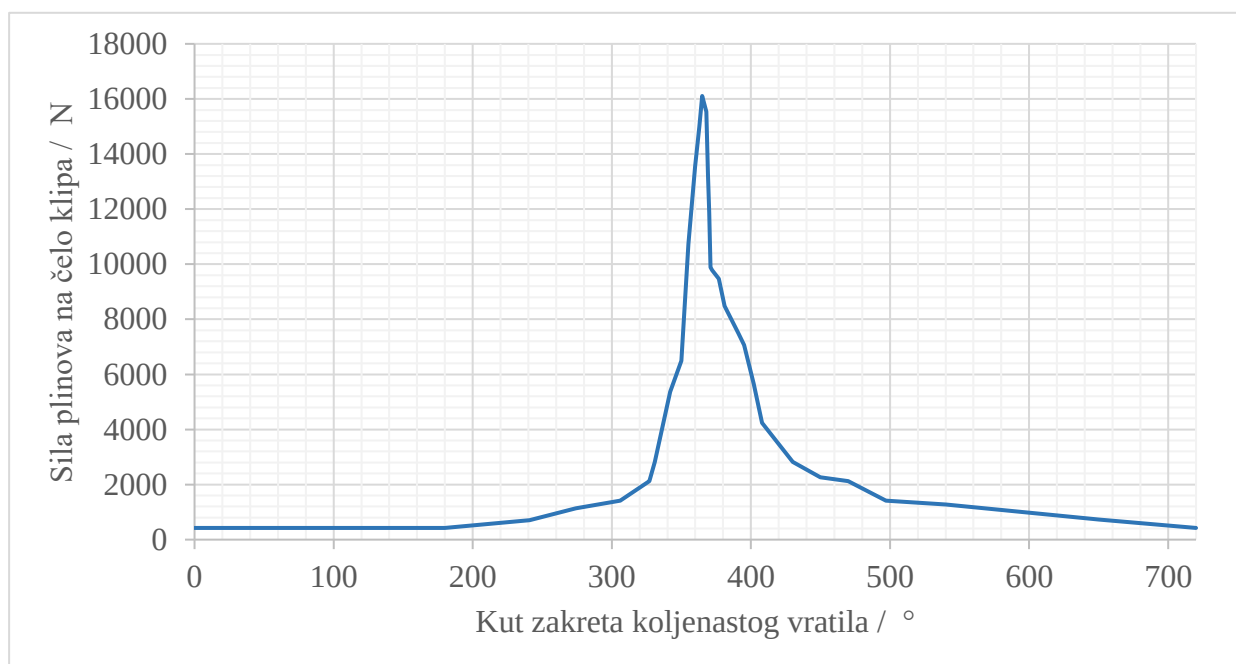


Slika 21. Ovisnost tlaka u cilindru o kutu zakreta koljenastog vratila

Kako znamo da silu možemo dobiti tako da tlak, koji se unutar cilindra (a i općenito) u svim smjerovima širi jednoliko, pomnožimo s površinom ($F = pA$), da bi dobili silu koja djeluje na klip (a preko klipnjače i na koljenasto vratilo) pomnožili smo promjenjiv tlak sa [Slika 21.] sa površinom čela klipa prema izrazu (9).

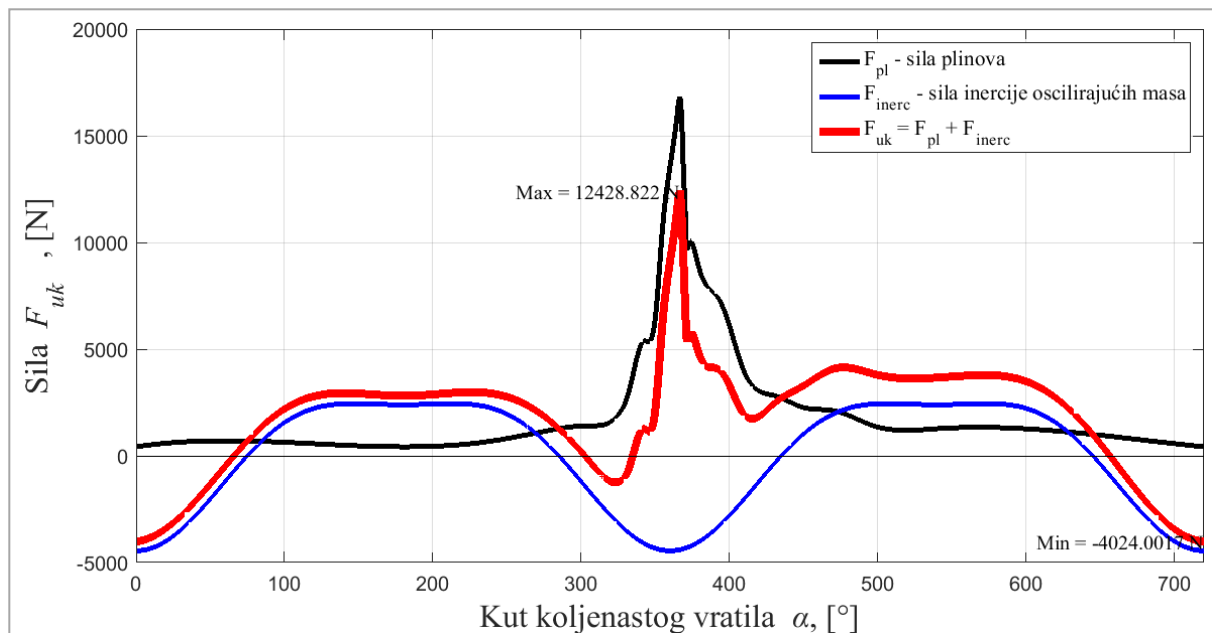
$$F_{pl} = p_{pl} \cdot A_{klip} \cdot \quad (9)$$

Iznos sile plinova kroz jedan ciklus prikazan je na [Slika 22.].



Slika 22. Sila plinova

Kada se zbroji sila plinova i sila inercije oscilirajućih masa, u koje spada masa klipa, dio mase klipnjače (2/3 mase klipnjače [10]), masa osovinice klipa, karika i osiguravajućih prstenova, dobije se ukupna sila koja djeluje na klip, a preko klipnjače i na koljenasto vratilo, kao što je prikazano na [Slika 23.].



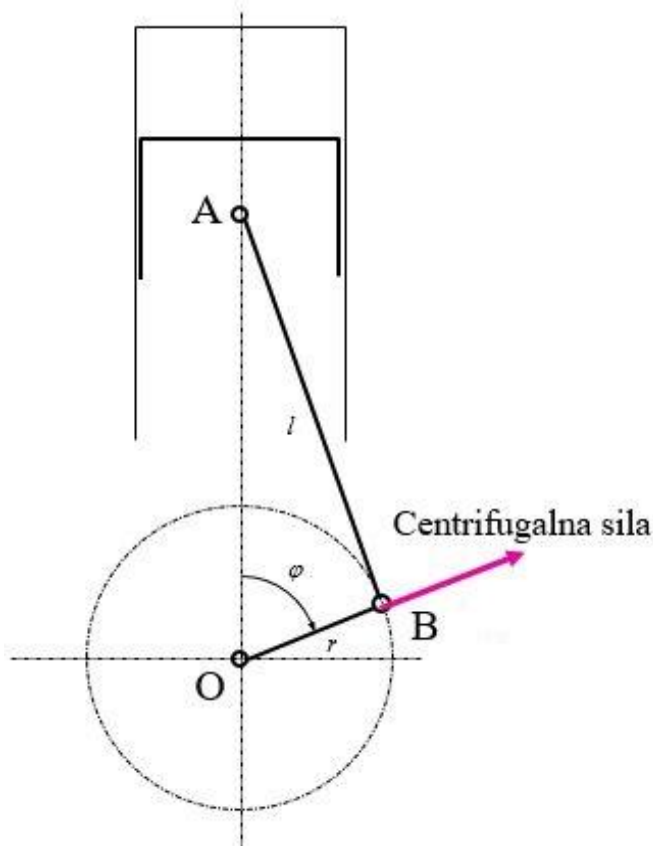
Slika 23. Ukupna sila koja djeluje na klip

Ono što nam je preostalo odrediti je iznos centrifugalne sile, koji je za konstantnu brzinu vrtnje također konstantan. Iznos centrifugalne sile računa se prema izrazu (10) :

$$F_c = m_B \cdot r \cdot \omega^2 = 0,3145 \cdot 0,03 \cdot 418,879^2 = 1655,6 \text{ N} . \quad (10)$$

gdje m_B predstavlja masu koncentriranu u točki B sa [Slika 8.] i [Slika 24.] tj. mase koje rotiraju odnosno gibaju se po kružnici promjera r kutnom brzinom ω . U tu masu spadaju masa letećeg rukavca koljenastog vratila, 1/3 mase klipnjače [11] te masa ramena koljenastog vratila.

Sljedeća stvar koju treba odrediti su smjerovi sila koje djeluju na leteći rukavac koljenastog vratila. Najlakši smjer za odrediti je smjer djelovanja centrifugalne sile koja uvijek djeluje u smjeru koljena u ravnini gibanja koljenastog mehanizma.



Slika 24. Smjer djelovanja centrifugalne sile [10]

Ukupna sila koja djeluje na klip F_{uk} rastavlja se na silu F_{klipnj} prema jednadžbi (11), koja se prenosi duž klipnjače, i na silu F_N prema jednadžbi (12), kojom se klip oslanja na stjenke cilindra odnosno kliznu površinu i koju ćemo u našem slučaju zanemariti.

$$F_{klipnj} = \frac{F_{uk}}{\cos \beta} \quad (11)$$

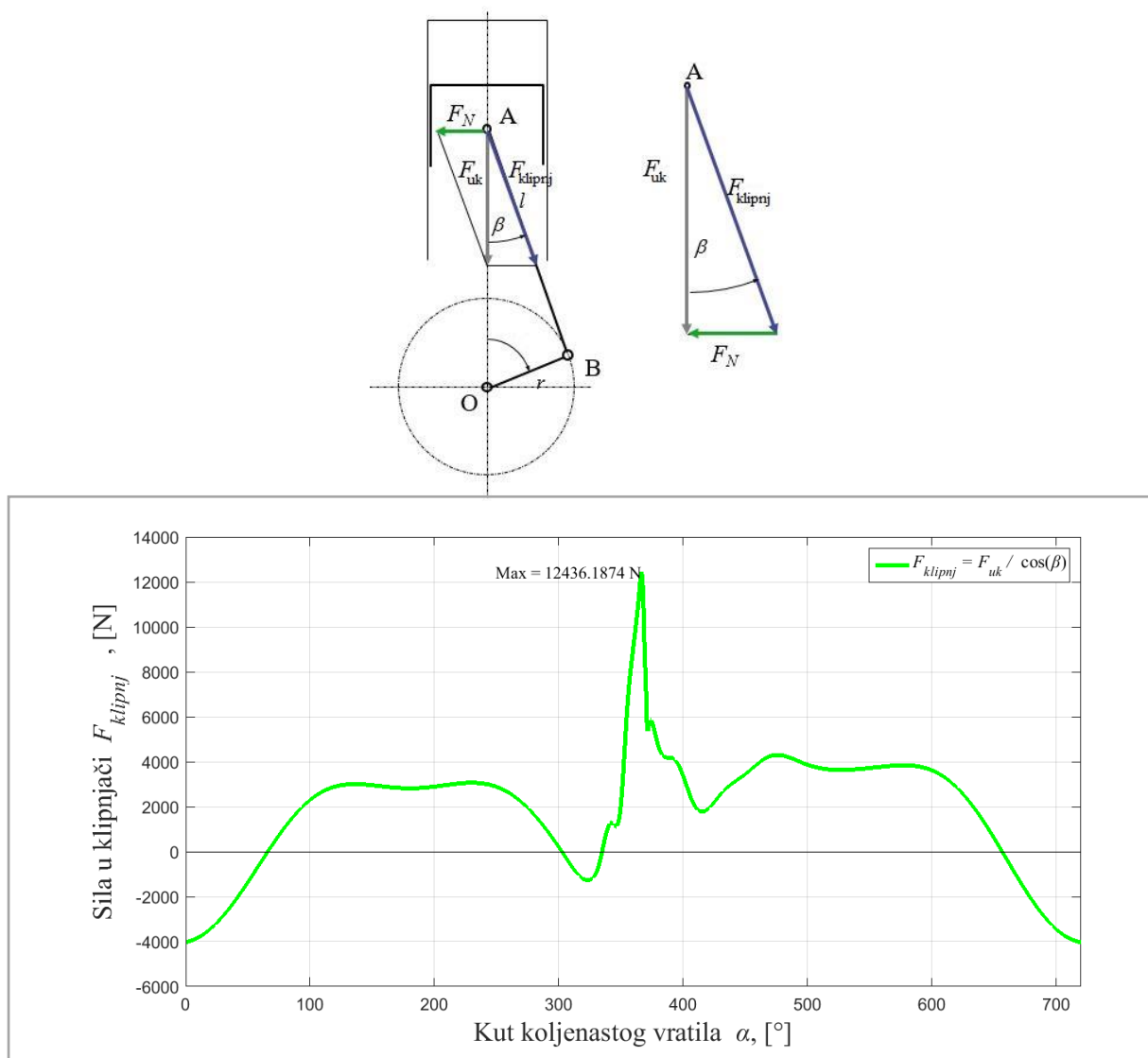
$$F_N = F_{uk} \cdot \tan \beta. \quad (12)$$

Već ranije je naglašeno da je sam kut β vremenski promjenjivog karaktera, a prema izrazu (2) to je bilo prikazano na [Slika 12.]. Kako bi dobili ovisnost sile u klipnjači o kutu zakreta koljenastog vratila poslužit ćemo se transformacijom kosinusa kuta u sinus prema (13), pa se njegovim uvrštavanjem u (2), te potom u (13) i sređivanjem jednadžbe, dobiva (14) :

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \quad (13)$$

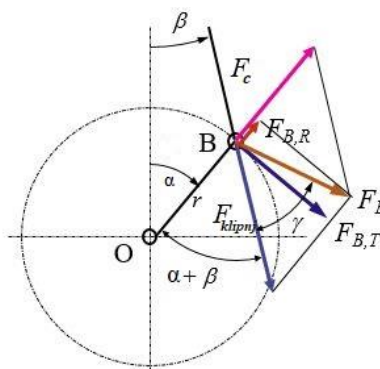
$$F_{klipnj} = \frac{F_{uk}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \quad (14)$$

Sila u klipnjači prema (14) prikazana je na [Slika 25.].



Slika 25. Sila koja djeluje na klipnjaču

Nadalje, vektorski zbroj sile koja djeluje na klipnjaču i centrifugalnu silu dijelimo na tangencijalnu i radijalnu komponentu, kao što je prikazano na [Slika 26.], a prema izrazima (15) i (16) iz [4].

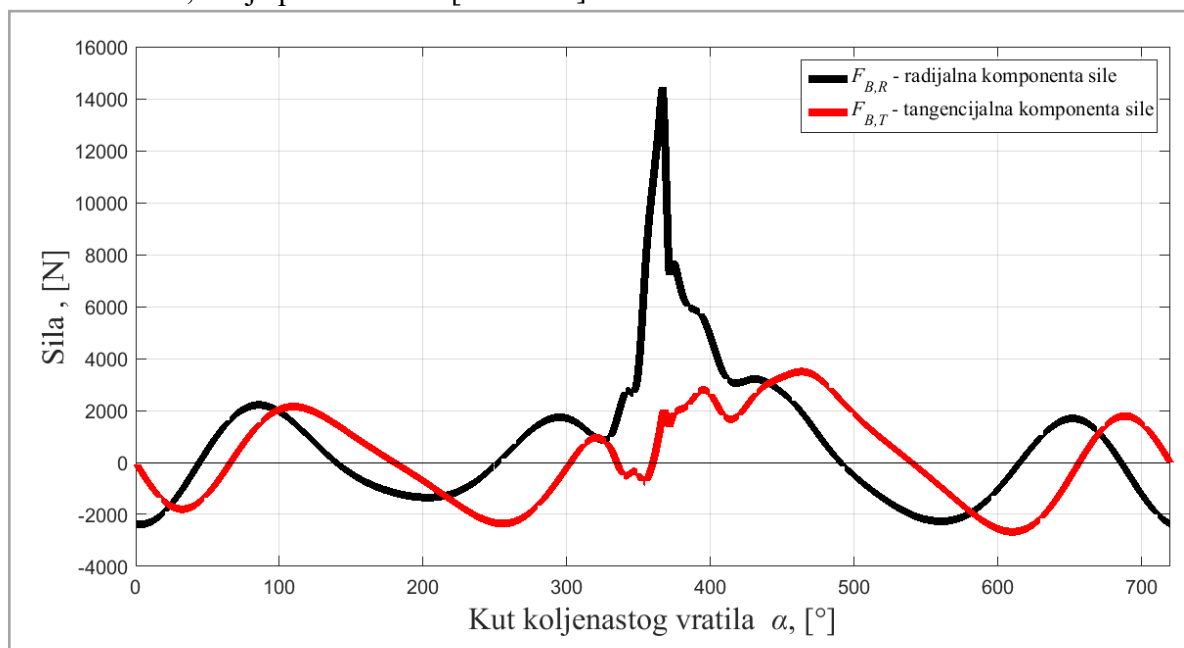


Slika 26. Tangencijalna i radijalna komponenta sile na letećem rukavcu koljnastog vratila [10]

$$F_{B,T} = F_{uk} \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \right) \quad (15)$$

$$F_{B,R} = F_c - F_{uk} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{\lambda \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \right). \quad (16)$$

Prema izrazima (15) i (16) dobili smo iznos radijalne i tangencijalne sile u ovisnosti o kutu zakreta vratila, što je prikazano na [Slika 27.].



Slika 27. Radijalna i tangencijalna komponenta sile u ovisnosti o kutu zakreta koljenastog vratila

Ovdje svakako treba dati napomenu što predznak pojedine sile znači, budući da se radi o mehanizmu više tijela koji međusobno mjenjaju položaje jedno s obzirom na drugo. Dakle, pozitivna tangencijalna sila djeluje u smjeru vrtnja motora, a pozitivna radijalna sila djeluje u smjeru od rukavca klipnjače prema središtu tj. osi rotacije [4].

3.4. Zaključak analize dinamike

Ovom analizom odredili smo promjenjive karaktere iznosa i smjerova sile koje djeluju na leteći rukavac koljenastog vratila u ovisnosti o kutu zakreta koljenastog vratila, α . Dobiveni rezultati ove analize poslužit će nam kao ulazni podaci za analitički proračun koljenastog vratila i numeričku analizu u programskom paketu Abaqus®.

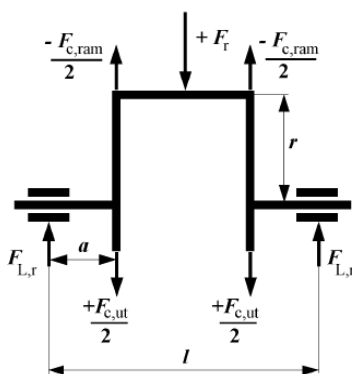
4. PRORAČUN KOLJENASTOG VRATILA NA ČVRSTOĆU

U ovom poglavlju ukratko će biti kvalitativno opisan analitički postupak proračunavanja koljenastog vratila. Za rješavanje složenih dinamičkih naprezanja koljenastog vratila uslijed savijanja, uz uzimanje u obzir uležištenja u kliznim ležajevima, koji djeluju kao prigušni elementi, još ni danas ne postoji opće primjenjiva teorija. Naprezanja uslijed torzije računaju se na temelju opće prihvaćene teorije torzijskih vibracija. Poznato je da su savijanje i torzija koljenastog vratila povezani silama u glavnim ležajevima, ali ove dvije pojave računaju se odvojeno. Kod računanja naprezanja uslijed savijanja ne uzimaju se u obzir vibracije, nego se ona određuju za svaki položaj koljenastog vratila metodama statike i elastostatike. Budući da je koljenasto vratilo istovremeno opterećeno na savijanje i torziju, proračun čvrstoće vrši se na temelju ekvivalentnog naprezanja. Ekvivalentno naprezanje utvrđuje se za najugroženija mjesta (prijelazni radijusi i otvori uljnih kanala), gdje se najčešće javljaju lomovi uslijed zamora.

Pri proračunu koljenastog vratila klasičnim metodama konstruktor mora riješiti sljedeće zadatke:

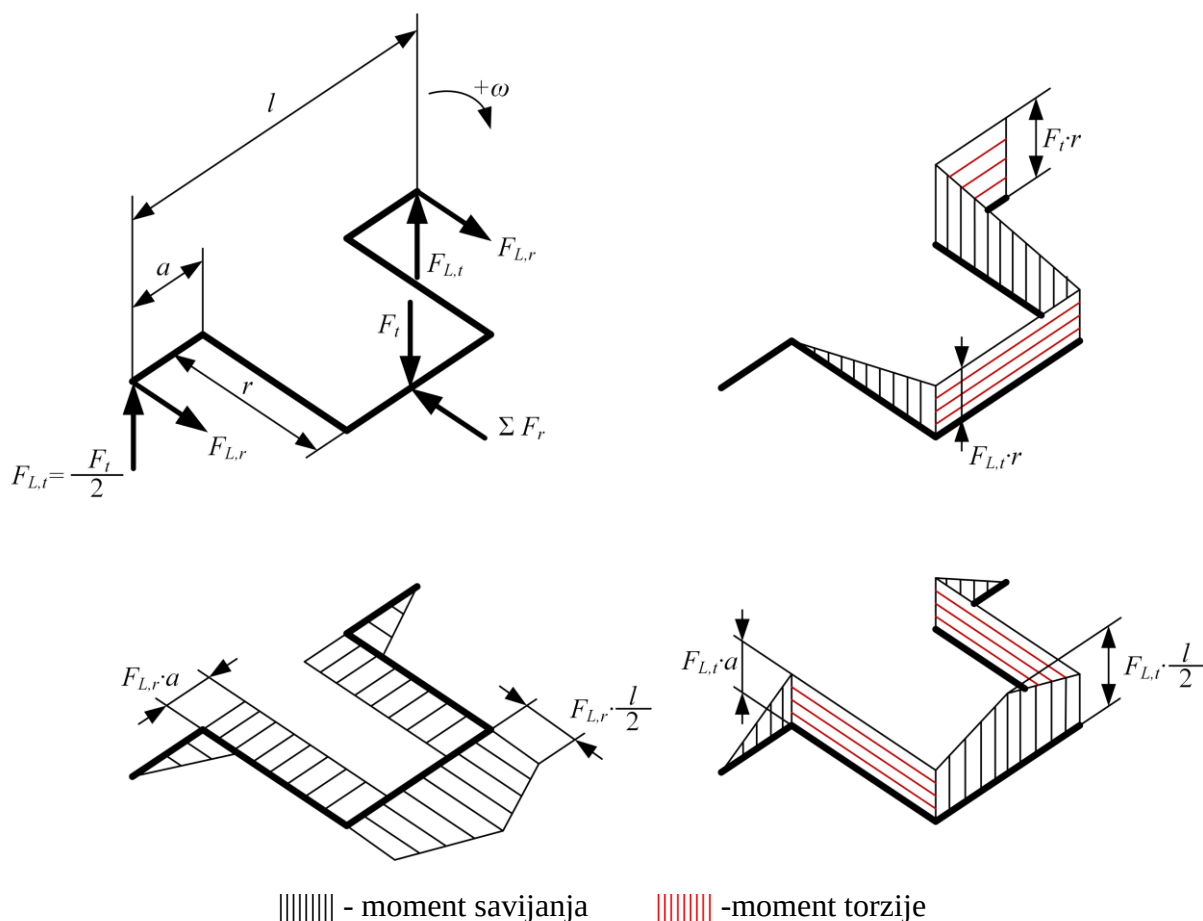
- odrediti opterećenja
- odrediti nazivna naprezanja uslijed savijanja i torzije statičkim proračunom
- pomoću faktora oblika (α_s , α_t) odrediti stvarna naprezanja uslijed savijanja i torzije na najugroženijim mjestima
- odrediti ekvivalentna naprezanja
- dobivene rezultate usporediti s trajnom titrajnom čvrstoćom.

Na [Slika 28.] prikazano je jednostavno simetrično opterećeno koljenasto vratilo kakvo se susreće kod rednih motora.



Slika 28. Opterećenje koljenastog vratila radijalnim silama [4]

Sila u klipnjači rastavlja se na radijalnu i tangencijalnu komponentu. U radijalnom smijeru, osim sile plinova, djeluju i centrifugalne sile rotirajućih dijelova : rotirajući dio klipnjače, leteći rukavac, rame. Zatim se jednostavnim jednadžbama ravnoteže određuju iznosi sila reakcija u osloncima, te momenti savijanja i torzije u zanimljivim nam presjecima. Na [Slika 29.] prikazana je raspodjela momenata savijanja i torzije duž pojednostavljene konture koljenastog vratila.



Slika 29. Kvalitativno prikazani momenti savijanja i momenti torzije u koljenu koljenastog vratila [4]

Nakon određenih momenata savijanja i torzije prikazanih na [Slika 29.] može se pristupiti računanju nazivnih naprezanja od savijanja i torzije prema izrazima iz [15]. Nadalje, stvarna naprezanja dobivaju se na temelju nazivnih, pomoću faktora oblika:

$$\sigma(\alpha) = \sigma_0(\alpha) \cdot \alpha_s, \quad (17)$$

$$\tau(\alpha) = \tau_0(\alpha) \cdot \alpha_t, \quad (18)$$

, gdje su faktori oblika za savijanje, α_s , i za torziju, α_t :

$$\alpha_s = \alpha_{s,0} \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 \cdot \zeta_4 \cdot \zeta_5 \cdot \zeta_6, \quad (19)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t,0} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot \delta_4. \quad (20)$$

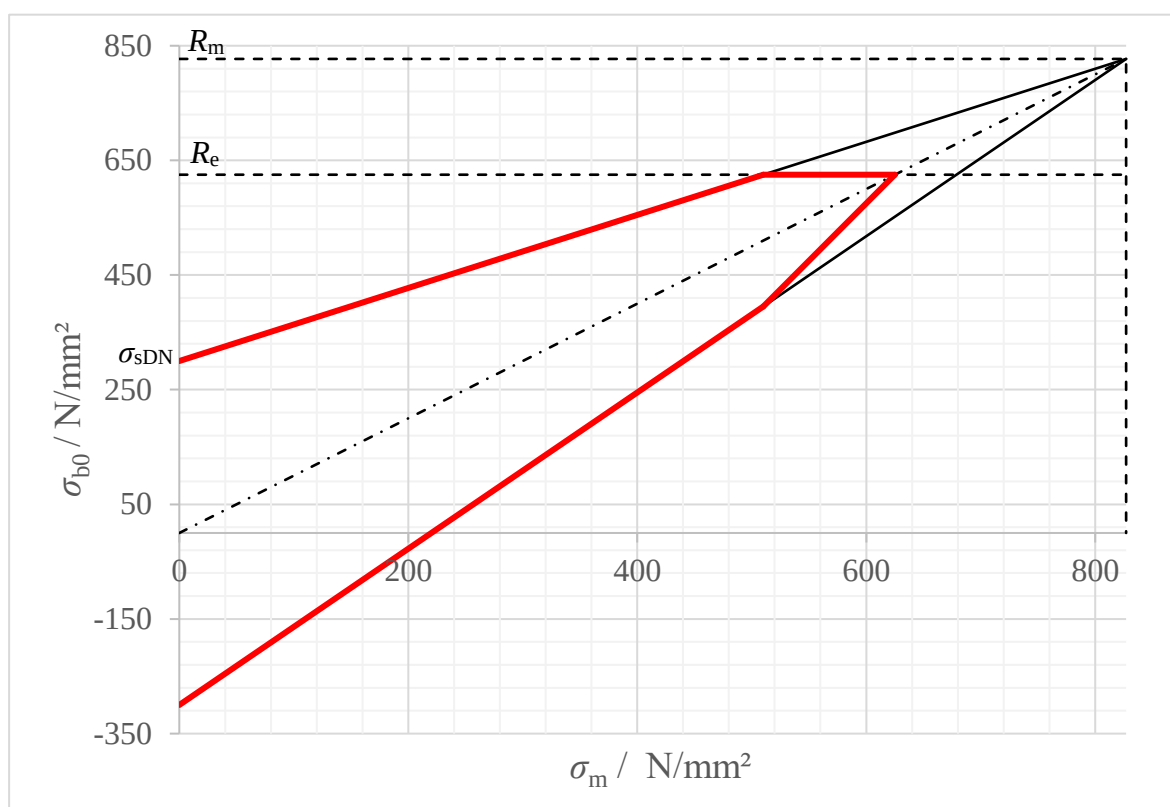
Faktori ζ i δ ovise o dimenzijama koljenastog vratila i određuju se prema dijagramima koji se mogu naći u literaturi [4].

Ukupno, odnosno ekvivalentno naprezanje, prema teoriji najvećeg deformacijskog rada (HMH), sastoji se od naprezanja uslijed savijanja i naprezanja uslijed torzije prema formuli (21):

$$\sigma_{ekv}(\alpha) = \sqrt{\sigma^2(\alpha) + 3\tau^2(\alpha)} \quad (21)$$

Svako od ovih naprezanja (σ i τ) sastoji se od statičkog dijela, koji odgovara srednjem naprezanju (σ_m i τ_m), i dinamičkog dijela, koji odgovara izmjeničnom odnosno amplitudnom naprezanju (σ_a i τ_a).

Nakon što se odrede vrijednosti gore navedenih parametara odgovarajuće stanje naprezanja može se prikazati u Smithovom dijagramu, koji je za naš materijal, i slučaj savijanja, prikazan na [Slika 30.] prema [11].



Slika 30. Smithov dijagram za materijal kovanog čelika i slučaj savijanja ($R = -1$)

Detaljnije provjere naprezanja uslijed sila plinova i sila inercije, te tangencijalnih sila i torzijskih vibracija vrše se pomoću specijaliziranih računalnih programa.

5. O METODI KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata (MKE) numerička je metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma i postala je nezaobilazna u konkretnoj inženjerskoj primjeni. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Drugim riječima, područje kontinuuma dijeli se na konačan broj potpodručja koja se nazivaju konačni elementi, odnosno razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u točkama na konturi koje se nazivaju čvorovi. Stanje u svakom elementu, kao što je npr. polje pomaka, polje deformacija, polje naprezanja, temperaturna polja i ostalih veličina u problemu polja, opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija. Te funkcije moraju zadovoljavati odgovarajuće uvjete da bi se diskretizirani model što više približio ponašanju kontinuiranog sustava [12]. Metoda konačnih elemenata prije svega je približna metoda, a njena su rješenja također približna no uz pravilnu formulaciju konačnih elemenata tj. pravilan izbor proračunskog modela, približavanje točnome rješenju raste s povećanjem broja konačnih elemenata odnosno povećanjem ukupnog broja stupnjeva slobode [13].

Kada je konstrukcija koja se analizira veoma složena potrebna je diskretizacija s velikim brojem konačnih elemenata tj. potrebno je riješiti sustav algebarskih jednažbi s velikim brojem nepoznanica, što je bez upotrebe računala vrlo teško postići. U današnje vrijeme postoji velik broj komercijalnih računalnih programa temeljenih na metodi konačnih elemenata koji omogućuju analizu kompleksnih konstrukcija bez razmatranja složene teorije koja opisuje njihovo fizikalno ponašanje. Kao što je već ranije spomenuto, metoda konačnih elemenata daje približne rezultate te dobivena rješenja treba prihvatiti s dozom kritičnosti tj. analitičnosti u njihovoj interpretaciji. Jedan od načina ispitivanja točnosti dobivenih rješenja je ispitivanje konvergencije. To fizikalno znači da usitnjavanjem mreže konačnih elemenata energija deformiranja konvergira k točnom iznosu energije deformiranja proračunskog modela. Pritom se podrazumijeva da se mreža s većim brojem elemenata dobiva tako da se elementi početne mreže dijele na dva ili više manjih elemenata. Ova metoda smanjenja veličine elemenata odnosno povećavanja njihovog broja u literaturi je poznata pod nazivom h-postupak. Kako bi se ostvarilo približavanje točnom rješenju s povećanjem broja elemenata, potrebno je da interpolacijske funkcije zadovoljavaju određene uvjete. Konvergenciju je moguće postići i

povećanjem stupnja polinoma interpolacijskih funkcija i kod relativno grube mreže, što je poznato kao p-postupak [12], [13].

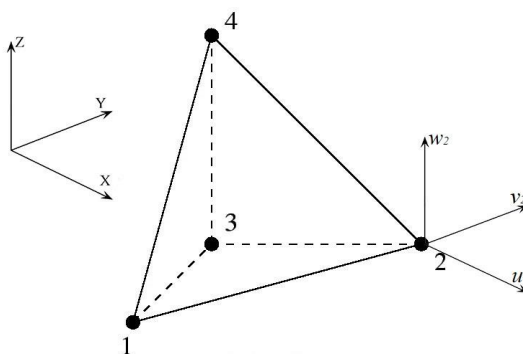
Metoda konačnih elemenata primjenjuje se u mehanici deformabilnih tijela za rješavanje statičkih i dinamičkih sustava, proračune temperaturnih polja, strujanja te analize elektromagnetskih polja.

5.1. Opis primjenjenih konačnih elemenata

Rješavanje problema čvrstoće za velik broj konstrukcijskih elemenata zahtijeva trodimenzijsku analizu. Kod takve analize tj. kod trodimenzijskih konačnih elemenata potrebno je ostvariti kontinuitet pomaka na plohama susjednih elemenata. Nije teško zaključiti da pri rješavanju prostornih problema valja računati sa znatno većim brojem nepoznanica u globalnoj jednadžbi konačnih elemenata, što znatno povećava vrijeme računanja.

5.1.1. Osnovni tetraedarski element

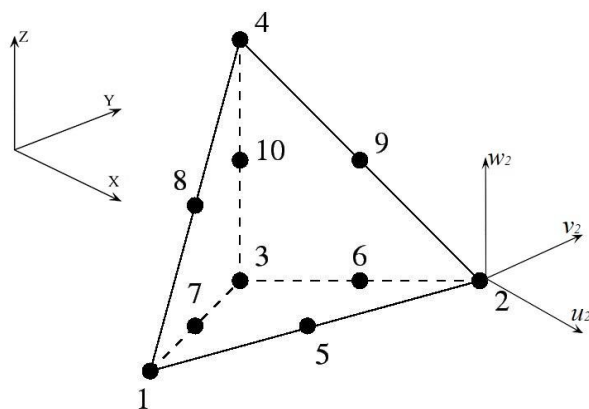
Najjednostavniji konačni element za trodimenzijsku analizu kontinuuma osnovni je tetraedarski element s 12 stupnjeva slobode [Slika 31.]. Element se sastoji od 4 čvora u vrhovima tetraedra s po tri komponente pomaka, u , v i w , u pravcu Kartezijevih koordinatnih osi x , y i z . Pomaci, u ovom slučaju, računaju se u čvorovima, a za sve ostale točke u elementu pomaci se dobivaju interpolacijom iz čvornih pomaka. Uobičajeno je red interpolacije povezan s brojem čvorova. Tako se, primjerice, elementi koji imaju čvorove samo u vrhovima nazivaju linearni elementi ili elementi 1. reda jer koriste linearnu interpolaciju u svim smjerovima za računanje vrijednosti pomaka u ostalim točkama elementa. U programskom paketu ABAQUS ovaj element stoji pod oznakom C3D4 [14].



Slika 31. Osnovni tetraedarski konačni element (C3D4)

5.1.2. Tetraedarski konačni element 2. reda

Dodavanjem čvorova osnovnom tetraedarskom elementu, izvodi se tetraedarski element 2. reda. Ovakav konačni element sadrži 10 čvorova (u svakom od vrhova i po 1 čvor na sredini svakog brida) i 30 stupnjeva slobode (3 pomaka u smjeru koordinatnih osi u svakom od čvorova). Polje pomaka u ovom elementu opisano je pomoću potpunog polinoma drugog stupnja, dakle interpolacija je kvadratna, a ovakav element naziva se kvadratnim elementom ili elementom 2. reda. Ovakav konačni element prikazan je na [Slika 32.]



Slika 32. Tetraedarski element 2. reda (C3D10)

U programskom paketu ABAQUS ovaj element stoji pod oznakom C3D10 [14].

6. VERIFIKACIJA PRIMJENJENIH KONAČNIH ELEMENATA

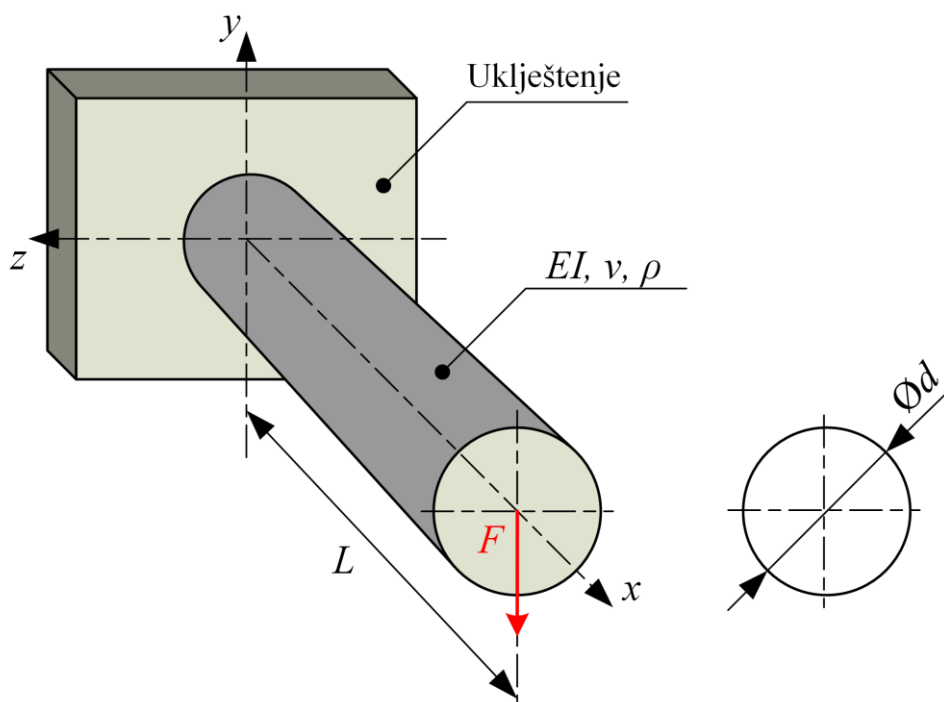
Cilj ovog dijela rada je verifikacija odabranih elemenata u kontekstu kreiranja korektnog proračunskog modela. Pomnim odabirom vrste elemenata za aproksimaciju proračunskog modela ispitana je konvergencija za jednostavnije slučajeve za koje je moguće dobiti analitička rješenja koja će poslužiti kao referenca za usporedbu numeričkih rješenja.

Kao numerički alat ovog rada korišten je programski paket ABAQUS®, a za verifikaciju numeričkih rješenja dobivenih u ABAQUS-u korišteni su analitički rezultati te dodatno program MITcalc [17] specijaliziran za rješavanje jednostavnih strojarskih problema.

Ispitivanjem konvergencije provjerena je prikladnost korištenih konačnih elemenata za dani model, opterećenje i rubne uvjete tj. općenito metodologiju rješavanja problema, a rezultati su prikazani u dijagramima. Primjeri su riješeni uz pretpostavku da je materijal homogen i izotropan te da su pomaci, deformacije i naprezanja mala tj. da vrijedi načelo geometrijske i materijalne linearnosti.

6.1. Savijanje konzole kružnog poprečnog presjeka

Za konzolu konstantne krutosti i poprečnog presjeka uklještenu i opterećenu prema [Slika 33.] odrediti progib na kraju $L = 250$ mm (desni kraj konzole).



Slika 33. Konzola kružnog poprečnog presjeka opterećena silom F_y

Geometrija te karakteristike materijala prikazane su u [Tablica 3.].

Tablica 3. Zadani podaci

Materijal	L / mm	$\varnothing d$ / mm	F_y / N
Čelik	250	30	-500

6.1.1. Analitičko rješenje

Analitički proračun proveden je prema [1] i [7]. Karakteristike materijala za čelik očitane su iz [1]. Poissonov koeficijent za čelik ν iznosi 0,3, dok Youngov modul odnosno modul elastičnosti iznosi 210 GPa.

Aksijalni moment tromosti oko osi z , I_z , računa se prema izrazu (22) :

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 30^4}{64} = 39760,78 \text{ mm}^4. \quad (22)$$

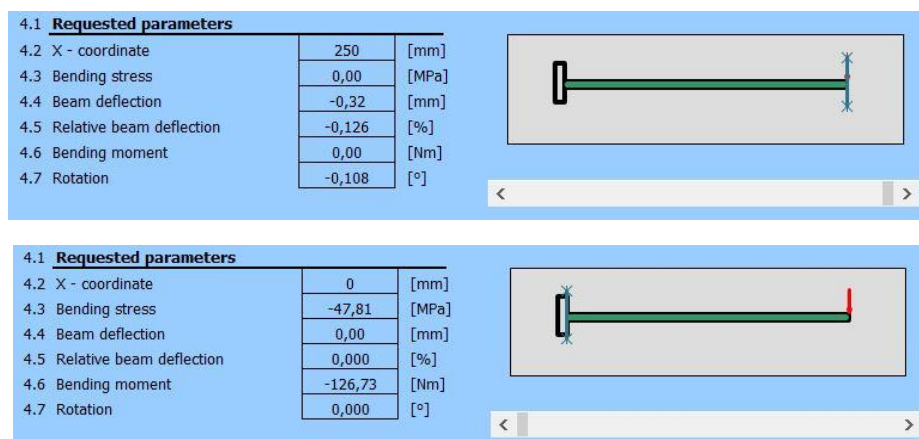
Statički progib $v_{y(analit)}$ iznosi :

$$V_{(analit)} = \frac{F L^3}{3EI} = \frac{-500 \cdot 250^3}{3 \cdot 210000 \cdot 39760,78} = -0,3118 \text{ mm}. \quad (23)$$

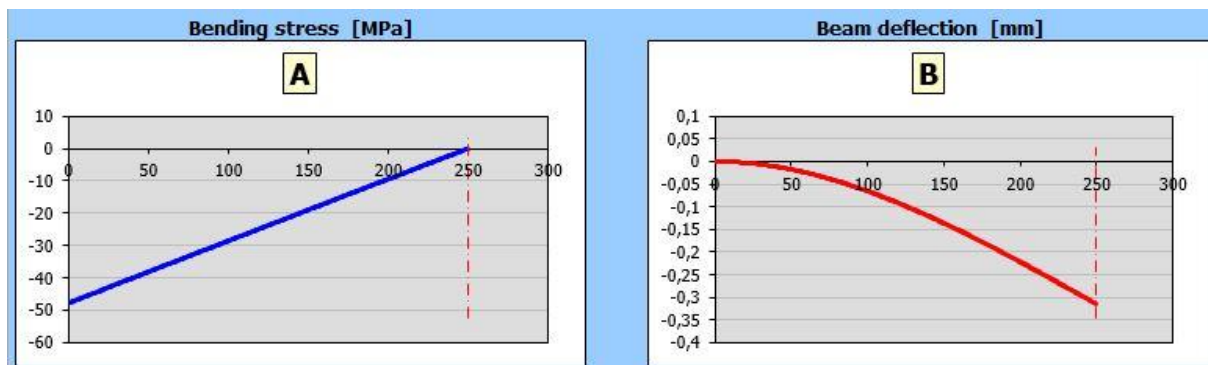
6.1.2. Rješenje dobiveno pomoću programa MITCalc

Dobiveno analitičko rješenje dodatno ćemo provjeriti u programu MITCalc radi potvrde točnosti odabrane analitičke metodologije.

Nakon što smo unijeli tražene parametre poput opterećenja, dimenzija poprečnog presjeka, karakteristika materijala te načina pričvršćenja tj. oslonce dobili smo rezultate prikazane na [Slika 34.] i [Slika 35.].



Slika 34. MITCalc (progib i naprezanje od savijanja)



Slika 35. MITCalc (promjena progiba i maksimalnog naprezanja od savijanja s koordinatom x)

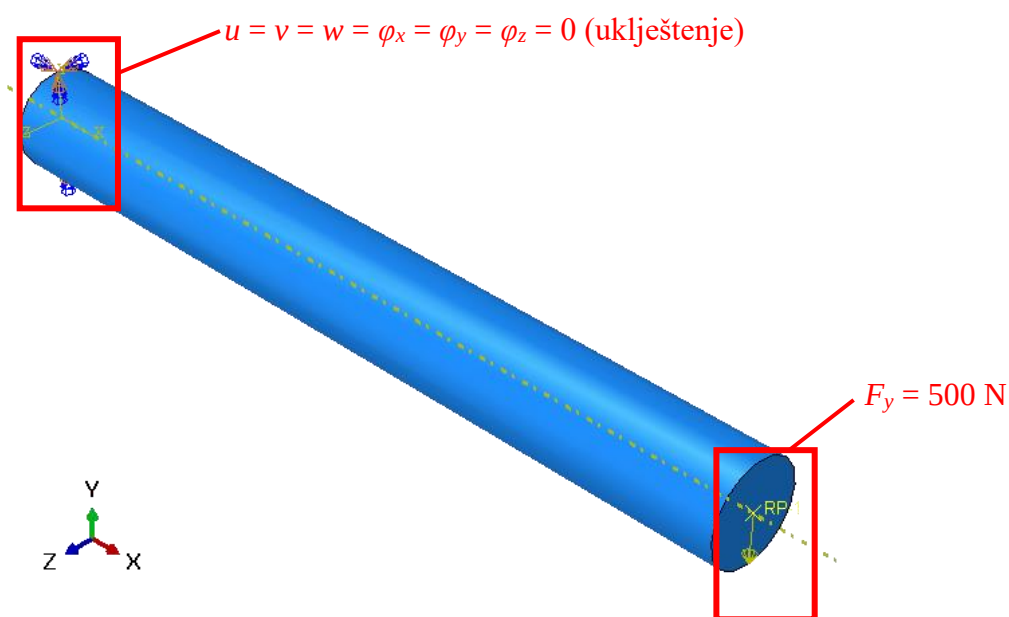
Usporedimo li rezultat analitičkog rješenja i rješenja MITCalc programa vidimo da dolazi do dobrog preklapanja.

$$V_{\text{(analit)}} = -0,3118 \text{ mm} \cong w_{z(\text{MITCalc})} = -0,32 \text{ mm} . \quad (24)$$

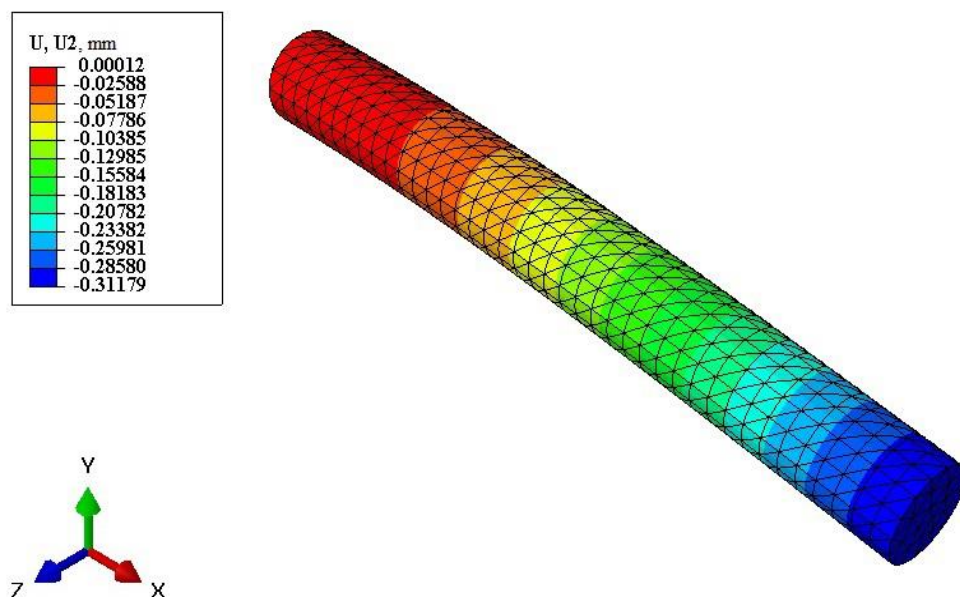
6.1.3. Numeričko rješenje i prikaz konvergencije

Numerički model kreiran je u programskom paketu ABAQUS® analogno zadanom analitičkom problemu prema [Slika 33.], uz materijalna i geometrijska svojstva preuzeta iz [Tablica 3.].

Rubni uvjeti i opterećenje proračunskog modela prikazani su na [Slika 36.]. Na [Slika 37.] prikazani su pomaci u smjeru globalne osi y (u ovom slučaju to je progib jer je koordinatni sustav postavljen tako da je os x uzdužna os).

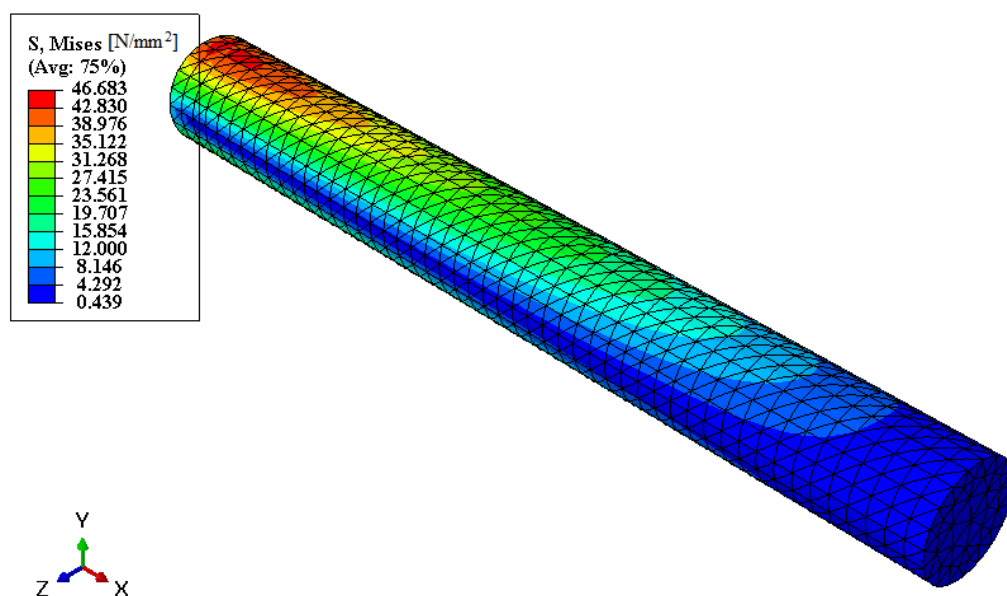


Slika 36. Rubni uvjeti i opterećenje konzole silom F_y

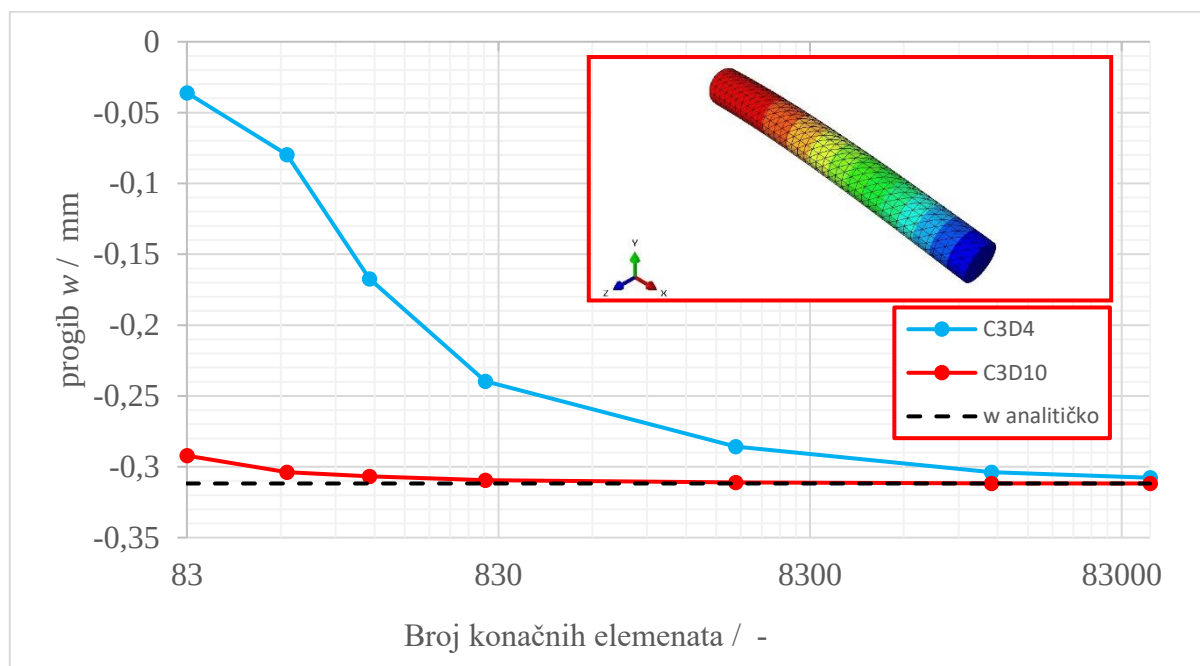


Slika 37. Pomaci u smjeru osi y

Na [Slika 38.] prikazana je raspodjela naprezanja prema von Misesu, dok je na [Slika 39.] grafički je prikazana konvergencija rješenja proračunskog modela diskretiziranog C3D4 konačnim elementima, kao i C3D10 konačnim elementima, k analitičkom rješenju. Ono što se može primjetiti je to da rješenja proračunskog modela diskretiziranog s C3D4 tetraedarskim osnovnim elementima monotono konvergiraju analitičkom rješenju, dok rješenja proračunskog modela diskretiziranog s C3D10 tetraedarskim konačnim elementima 2. reda konvergiraju gotovo trenutno.



Slika 38. Raspodjela naprezanja prema von Misesu

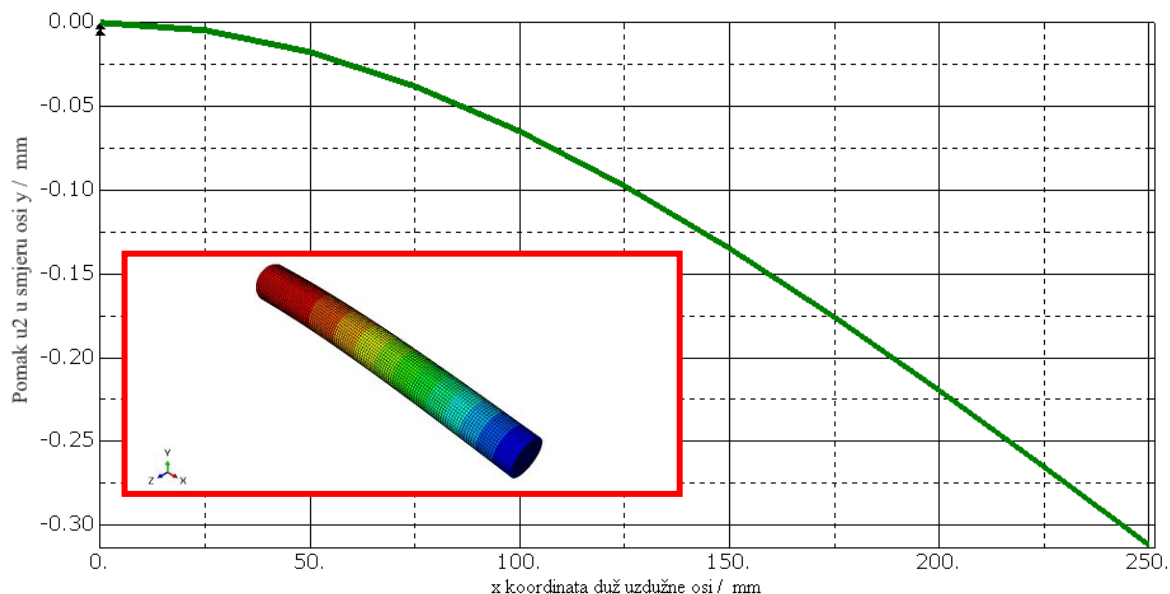


Slika 39. Konvergencija rješenja progiba proračunskog modela diskretiziranog C3D4 i C3D10 konačnim elementima

Ono što je na [Slika 39.] prikazano grafički, to je u [Tablica 4.] prikazao tablično. Ono što možemo primjetiti je to da se korištenje C3D4 tetraedarskih elemenata 1. reda isplati tek kada je mreža konačnih elemenata dosta gusta jer se tek tada numeričko rješenje, u usporedbi s analitičkim, nalazi u okviru inženjerske točnosti (<5% odstupanja). C3D10 elementi pokazali su se poprilično točnima i kod jako rijetke mreže konačnih elemenata.

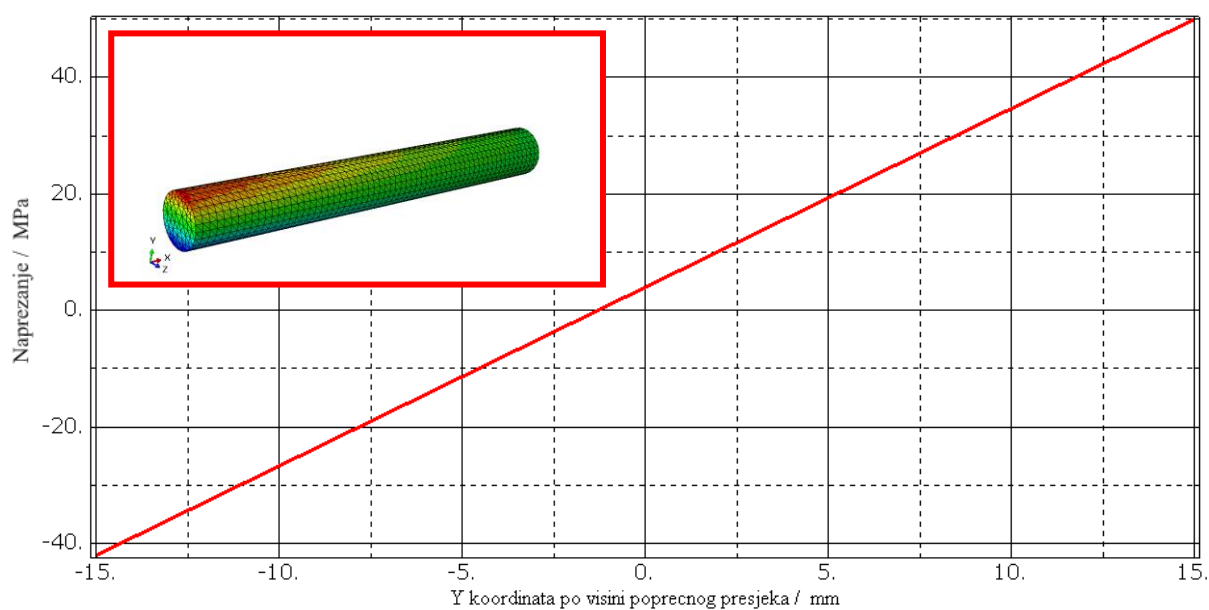
Tablica 4. Konvergencija rezultata za progib konzole / mm

Progib			Analitički progib $w_{analit} = -0,3118$ mm	
Broj konačnih elemenata n_{KE}	Tetraedarski konačni element 1. reda (C3D4) / mm	Tetraedarski konačni element 2. reda (C3D10) / mm	Greška / %	
			C3D4	C3D10
83	-0,03599	-0,29216	88,45	6,29
174	-0,0796	-0,30380	74,47	2,56
320	-0,16742	-0,30657	46,30	1,67
753	-0,23958	-0,30948	23,16	0,74
4793	-0,28573	-0,31105	8,36	0,24
31687	-0,30385	-0,31179	2,55	0,003
102417	-0,30774	-0,31180	1,30	0,00



Slika 40. Raspodjela pomaka duž uzdužne osi konzole (os x)

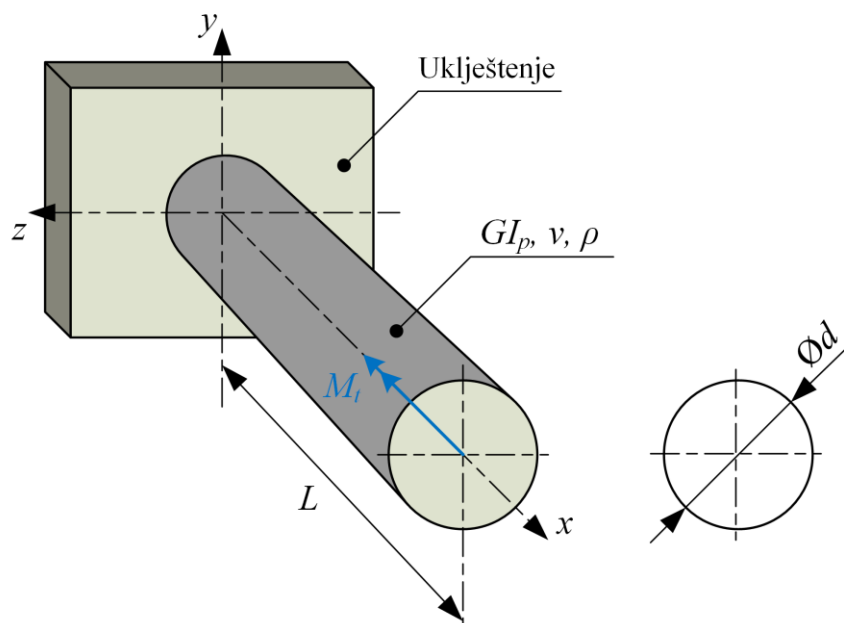
Na [Slika 40.] prikazana je linearna raspodjela pomaka duž uzdužne osi konzolnog nosača, a na [Slika 41.] prikazana je raspodjela normalnog naprezanja od savijanja duž vertikalne osi poprečnog presjeka (u našem slučaju koordinatni sustav postavljen je tako da je vertikalna os poprečnog presjeka os y) u presjeku s x koordinatom 0 (samo uklještenje). Usporedimo li rezultat koji nam je dao program MITCalc ($\sigma_x = 47,81$ MPa) možemo primjetiti da nam numerički rezultat (a i raspodjela) također odgovaraju.



Slika 41. Raspodjela naprezanja od savijanja po visini poprečnog presjeka

6.2. Uvijanje konzole kružnog poprečnog presjeka

Za konzolu konstantne krutosti i poprečnog presjeka uklještenu i opterećenu prema [Slika 42.] odrediti kut zakreta na kraju $L = 250$ mm (desni kraj konzole).



Slika 42. Konzola kružnog poprečnog presjeka opterećena momentom torzije (uvijanja)
Geometrija te karakteristike materijala prikazane su u [Tablica 5.].

Tablica 5. Zadani podaci

Materijal	L / mm	$\varnothing d$ / mm	M_t / Nmm
Čelik	250	30	-500000

6.2.1. Analitičko rješenje

Analitički proračun proveden je prema [15],[16]. Karakteristike materijala za čelik očitane su iz [15]. Poissonov koeficijent za čelik ν iznosi 0,3, dok Youngov modul odnosno modul elastičnosti iznosi 210 GPa. Prema izrazu (25) dobit ćemo vrijednost G tj. Columbovog modula, modula smicanja ili modula klizanja :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000}{2(1+0,3)} = 80769,23 \text{ MPa} . \quad (25)$$

Polarni moment tromosti prema izrazu (26) glasi :

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79521,56 \text{ mm}^4 . \quad (26)$$

Polarni moment otpora prema izrazu (27) jednak je :

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi 30^3}{16} = 5301,43 \text{ mm}^3. \quad (27)$$

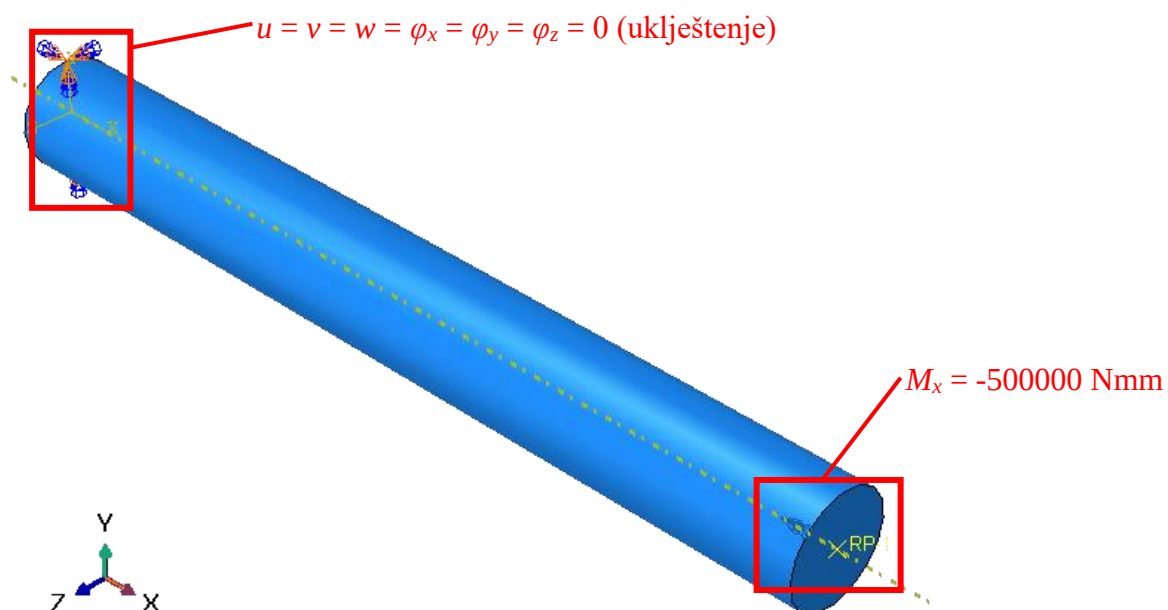
Konačno, kut uvijanja ili kut torzije φ_x prema izrazu (28) :

$$\varphi_x = \frac{M_t l}{G I_p} = \frac{-500000 \cdot 250}{80769,23 \cdot 79521,56} = -0,019462 \text{ rad.} \quad (28)$$

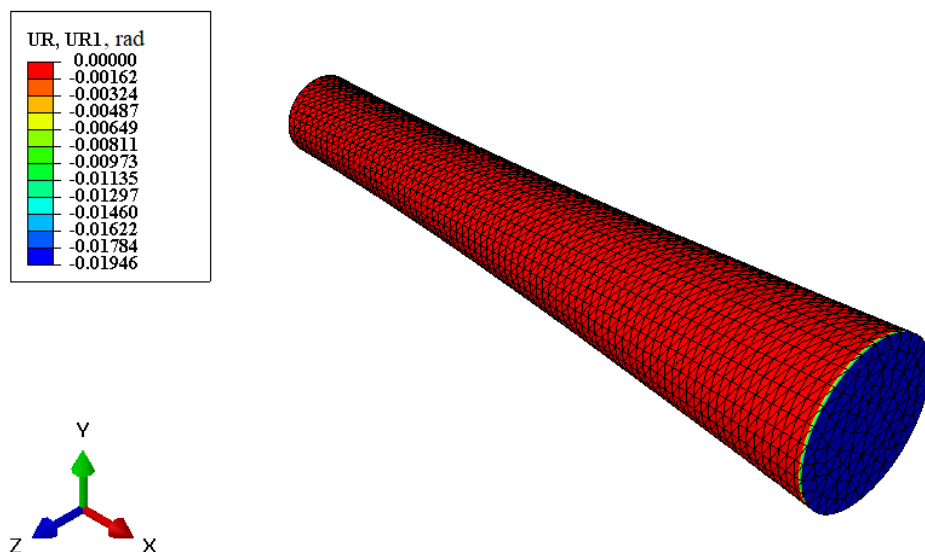
6.2.2. Numeričko rješenje i prikaz konvergencije

Numerički model kreiran je u programskom paketu ABAQUS® analogno zadanom analitičkom problemu prema [Slika 39.], uz materijalna i geometrijska svojstva preuzeta iz [Tablica 5.].

Rubni uvjeti i opterećenje proračunskog modela prikazani su na [Slika 43.]. Na [Slika 44.] prikazani su kutevi uvijanja u smjeru globalne osi x (koordinatni sustav postavljen tako da je os x uzdužna os).

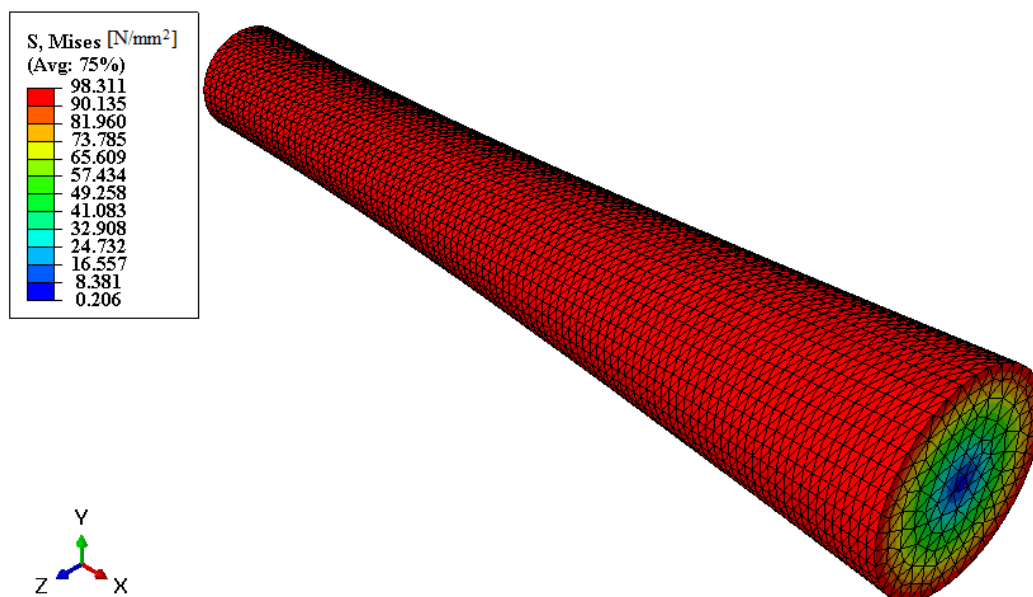


Slika 43. Rubni uvjeti i opterećenje konzole momentom torzije

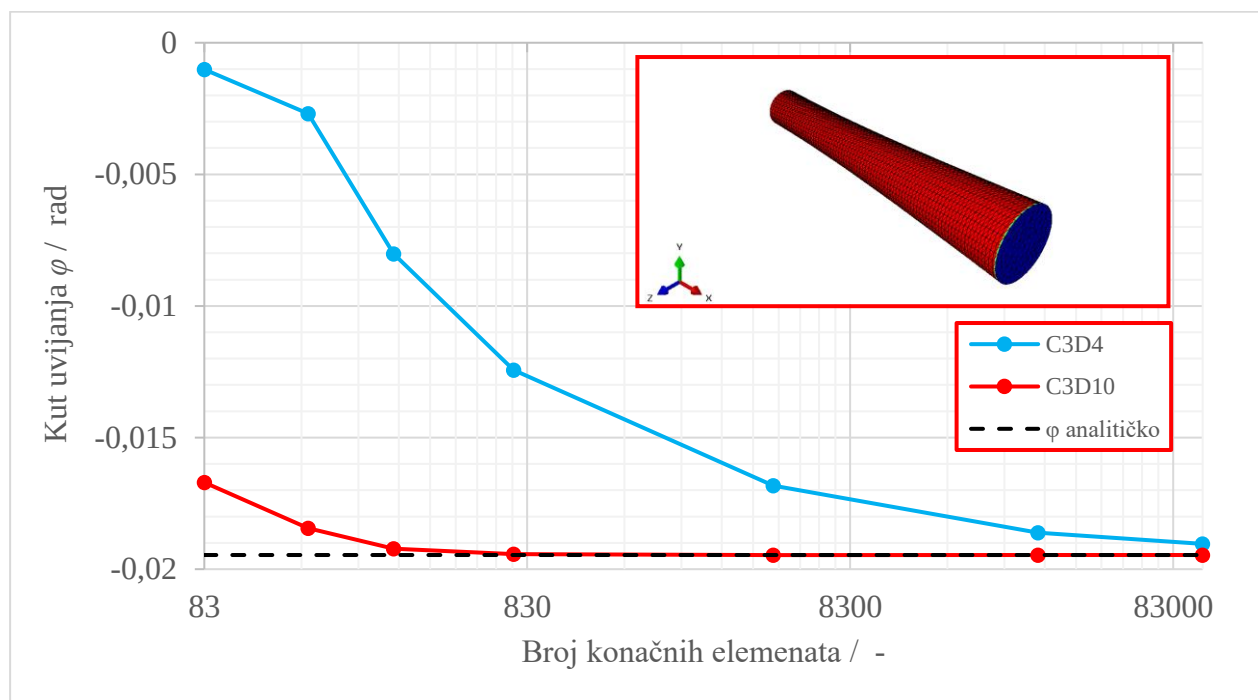


Slika 44. Kutevi uvijanja duž osi x

Na [Slika 45.] prikazana je raspodjela ekvivalentnog von Misesovog naprezanja, dok je na [Slika 46.] grafički je prikazana konvergencija rješenja proračunskog modela diskretiziranog C3D4 konačnim elementima, kao i C3D10 konačnim elementima, k analitičkom rješenju. Ono što se može primjetiti je to da rješenja proračunskog modela diskretiziranog s C3D4 tetraedarskim osnovnim elementima monotono konvergiraju analitičkom rješenju, dok rješenja proračunskog modela diskretiziranog s C3D10 tetraedarskim konačnim elementima 2. reda konvergiraju gotovo trenutno, kao što je bio slučaj i kod savijanja konzole kružnog poprečnog presjeka.



Slika 45. Raspodjela naprezanja prema von Misesu



Slika 46. Konvergencija rješenja kuta uvijanja proračunskog modela diskretiziranog C3D4 i C3D10 konačnim elementima

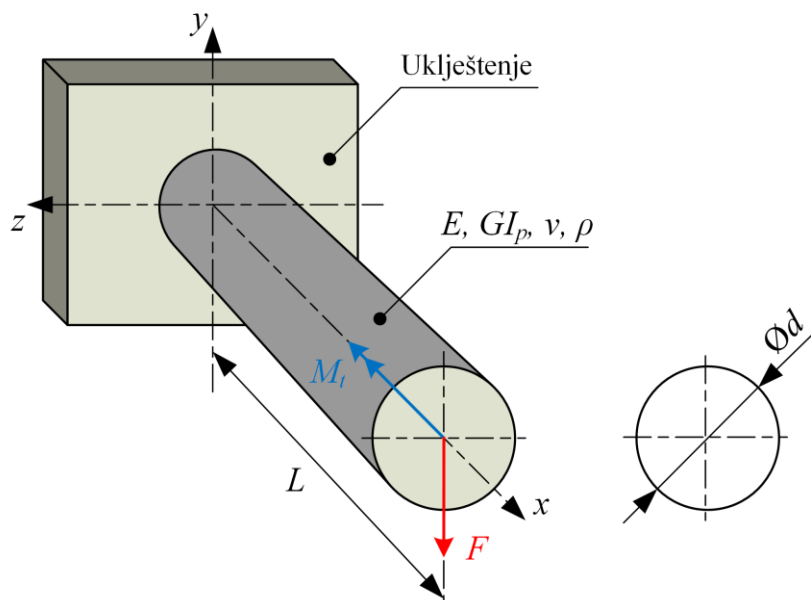
Ono što je na [Slika 46.] prikazano grafički, to je u [Tablica 6.] prikazao tablično. Ono što možemo primjetiti je to da se korištenje C3D4 tetraedarskih elemenata 1. reda isplati tek kada je mreža konačnih elemenata dosta gusta jer se tek tada numeričko rješenje, u usporedbi s analitičkim, nalazi u okviru inženjerske točnosti (<5% odstupanja). C3D10 elementi pokazali su se poprilično točnima i kod jako rijetke mreže konačnih elemenata.

Tablica 6. Konvergencija rezultata za kuta zakreta konzole, rad

Kut uvijanja			Analitički kut uvijanja $\varphi_x = -0,019462$ rad	
Broj konačnih elemenata n_{KE}	Tetraedarski konačni element 1. reda (C3D4) / rad	Tetraedarski konačni element 2. reda (C3D10) / rad	Greška / %	
			C3D4	C3D10
83	-0,001014	-0,016704	94,78	14,17
174	-0,002699	-0,018448	86,13	5,21
320	-0,008025	-0,019223	58,76	1,22
753	-0,012432	-0,019424	36,12	0,19
4793	-0,01682	-0,019461	13,57	0,005
31687	-0,018611	-0,019462	4,37	0,00
102417	-0,019038	-0,019462	2,17	0,00

6.3. Složeno opterećenje konzole kružnog poprečnog presjeka (uvijanje + savijanje)

Za konzolu konstantne krutosti i poprečnog presjeka, uklještenu i opterećenu prema [Slika 47.] odrediti vrijednosti ekvivalentnog naprezanja.



Slika 47. Uklještena konzola sa složenim opterećenjem (sila + moment torzije)
Geometrija te karakteristike materijala prikazane su u [Tablica 7.].

Tablica 7. Zadani podaci

Materijal	L / mm	$\varnothing d$ / mm	M_t / Nmm	F_y / N
Čelik	250	30	-500000	-500

6.3.1. Analitičko rješenje

Proračun će se računati prema izrazima iz [16].

6.3.1.1. Naprezanje od savijanja

Da bi odredili naprezanje od savijanja, najprije je potrebno odrediti maksimalan moment savijanja, odnosno presjek kod kojeg je moment savijanja maksimala. Prema izrazu (29):

$$M_z = F_y l. \quad (29)$$

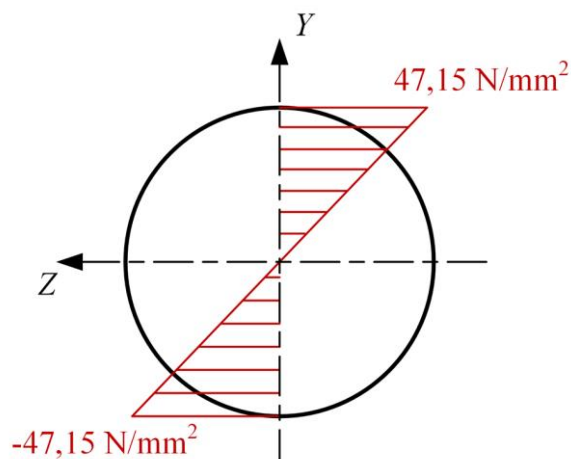
, možemo zaključiti da se maksimalan moment savijanja nalazi u presjeku $x = 0$, odnosno presjek u kojem sila ima krak maksimalnih $l = 250$ mm.

$$M_{z(\max)} = F_y = -500 \cdot 250 = -125000 \text{ Nmm} . \quad (30)$$

Moment tromosti presjeka izračunali smo ranije prema (22), pa naprezanje σ_x iznosi:

$$\sigma_x = \frac{M_z r}{I_z} = \frac{-125000 \cdot (\pm 15)}{39760,78} = \pm 47,15 \text{ N/mm}^2 . \quad (31)$$

Na [Slika 48.] prikazana je raspodjela normalnog naprezanja (savijanje) po visini kružnog poprečnog presjeka.



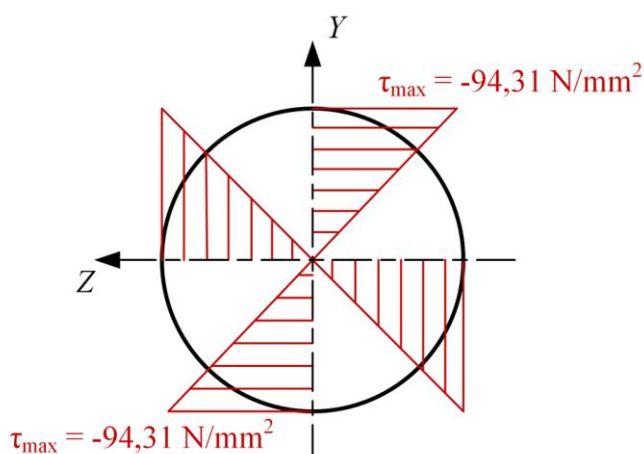
Slika 48. Raspodjela σ_x

6.3.1.2. Posmično naprezanje

Maksimalno posmično naprezanje prema [16] računa se prema izrazu (32), polarni moment otpora W_p izračunali smo prema (27) :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{-500000}{5301,43} = -94,31 \text{ N/mm}^2 . \quad (32)$$

Na [Slika 49.] prikazana je raspodjela posmičnog naprezanja na kružnom poprečnom presjeku.



Slika 49. Raspodjela $\tau_{\max}$

6.3.1.3. Ekvivalentno naprezanje

Postoje četiri teorije čvrstoće prema kojima bi se moglo izračunat ekvivalentno reducirano naprezanje a to su :

1. teorija najvećeg normalnog naprezanja,
2. teorija najveće duljinske deformacije,
3. teorija najvećeg posmičnog naprezanja,
4. teorija najveće distorzijske energije.

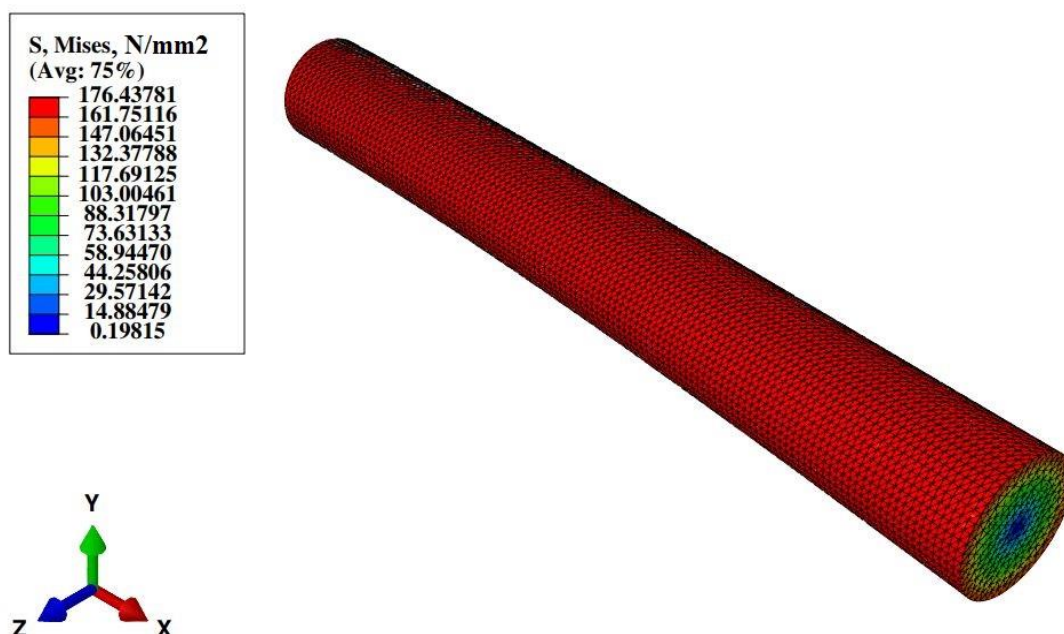
Budući da ABAQUS reducirana naprezanja računa prema von Misesu (4. ili HMH teorija čvrstoće) i mi ćemo u ovom radu preuzeti taj pristup za analitički proračun. Prema [16] slijedi izraz (33) :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{47,15^2 + 3 \cdot 94,31^2} = 170,01 \text{ N/mm}^2. \quad (33)$$

6.3.2. Numeričko rješenje

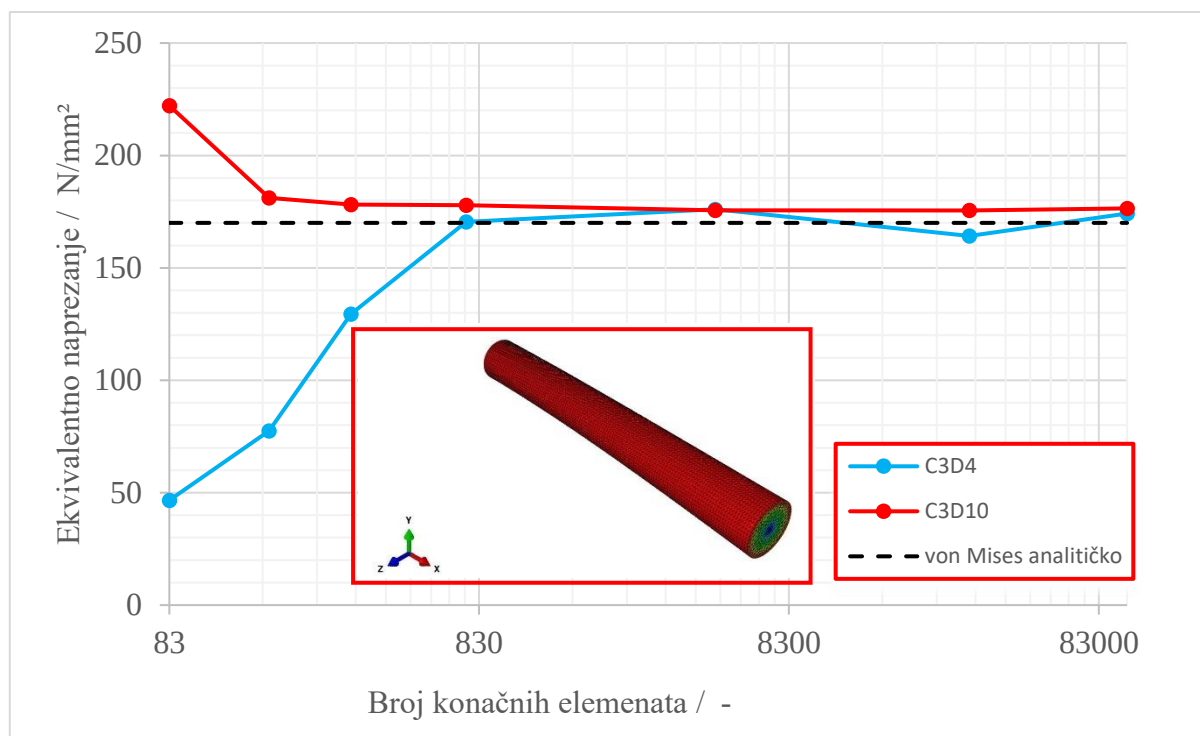
Numerički model kreiran je u programskom paketu ABAQUS® analogno zadanom analitičkom problemu prema [Slika 47.], uz materijalna i geometrijska svojstva preuzeta iz [Tablica 7].

Na [Slika 50.] prikazana su reducirana naprezanja prema von Misesu.



Slika 50. Naprezanja prema von Misesu (proračunski model diskretiziran s 102417 KE)

Na [Slika 51.] grafički je prikazana konvergencija rješenja proračunskog modela diskretiziranog C3D4 konačnim elementima, kao i C3D10 konačnim elementima, k analitičkom rješenju. Ono što se može primjetiti je to da i rješenja proračunskog modela diskretiziranog s C3D4 tetraedarskim osnovnim elementima i rješenja proračunskog modela diskretiziranog s C3D10 tetraedarskim konačnim elementima 2. reda konvergiraju monotono analitičkom rješenju



Slika 51. Konvergencija rješenja naprezanja prema von Misesu proračunskog modela diskretiziranog C3D4 i C3D10 konačnim elementima

Ono što je na [Slika 51.] prikazano grafički, to je u [Tablica 8.] prikazao tablično. Ono što možemo primjetiti u slučaju složenog opterećenja je to da se korištenjem C3D4 tetraedarskih elemenata 1. reda i C3D10 tetraedarskih konačnih elemenata 2.reda rješenju približavamo monotonom konvergencijom gotovo jednakom brzinom. Kada je mreža konačnih elemenata malo gušća numeričko rješenje, u usporedbi s analitičkim, nalazi se u okviru inženjerske točnosti (<5% odstupanja).

Tablica 8. Konvergencija rezultata za kuta zakreta konzole, rad

Naprezanje prema von Misesu			Analitički kut uvijanja $\sigma_{ekv} = 170,01$ N/mm ²	
Broj konačnih elemenata [n _{KE}]	Tetraedarski konačni element 1. reda (C3D4) / N/mm ²	Tetraedarski konačni element 2. reda (C3D10) / N/mm ²	Greška / %	
			C3D4	C3D10
83	46,63119	222,171	72,57	30,68
174	77,44765	181,0805	54,44	6,51
320	129,5219	178,1839	23,81	4,80
753	170,5261	177,8594	0,30	4,61
4793	176,0839	175,5724	3,57	3,27
31687	174,2714	175,5376	2,5	3,25
102417	174,1534	176,4378	2,43	3,78

6.4. Zaključak verifikacije

Zaključak ove verifikacije ABAQUS-ovih C3D4 i C3D10 konačnih elemenata je da ti elementi vrlo dobro opisuju i rješavaju zadane probleme te pokazuju vrlo dobra preklapanja s analitičkim rješenjima jednostavnijih primjera što ih čini adekvatnima za rješavanje našeg problema numeričke analize koljenastog vratila.

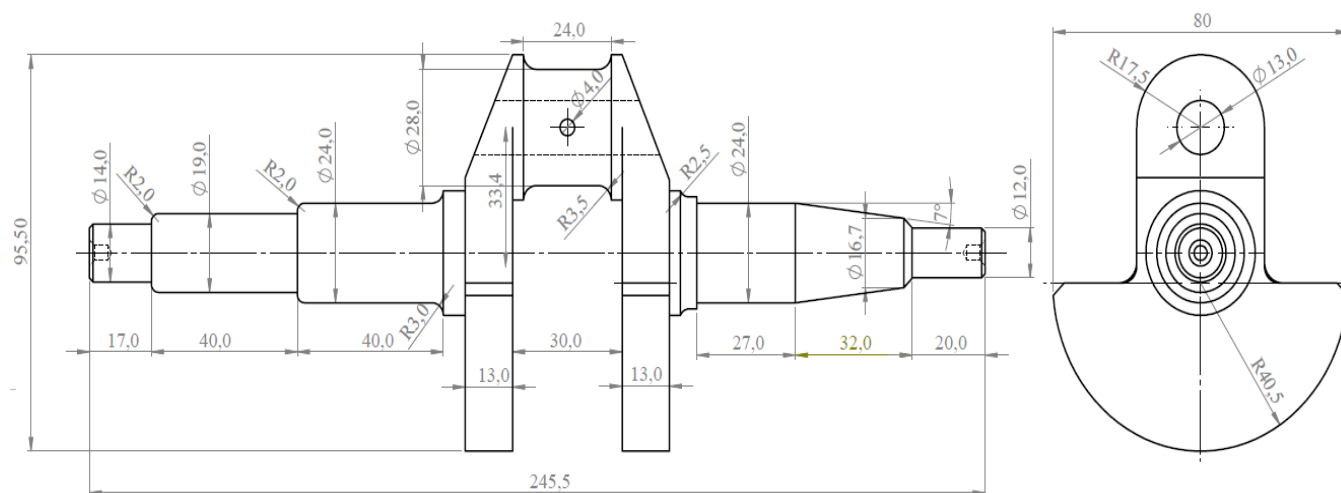
7. NUMERIČKI PRORAČUN KOLJENASTOG VRATILA

Nagli razvoj računala posljednjih dvadeset godina prošlog stoljeća u mnogome je unaprijedio proračune čvrstoće strojnih dijelova, naročito uvođenjem numeričkih metoda u inženjersku praksu. Tako je metoda konačnih elemenata postala glavnim alatom za proračun svih važnih dijelova motora. Međutim, klasične metode mehanike i nauke o čvrstoći i nadalje predstavljaju važan oslonac projektantu jer mu omogućuju neophodnu kontrolu i bolje razumijevanje rezultata dobivenih pomoću specijaliziranih računalnih programa [4].

U ovom poglavlju biti će riječi o modeliranju CAD modela koljenastog vratila za numeričku analizu, bit će pojašnjeno kako je generirana mreža konačnih elemenata te prikaz konvergencije rješenja. Objašnjeni su korišteni rubni uvjeti, jer kako znamo rubni uvjeti i primjenjeno opterećenje, uz korištene konačne elemente za diskretizaciju, imaju najveći utjecaj na krajnje dobivene rezultate.

7.1. CAD model

CAD model modeliran je prema dostupnoj dokumentaciji sa internetskih portala u programskom paketu SolidWorks [18], a modelirano koljenasto vratilo sa svojim osnovnim gabaritnim dimenzijama prikazano je na [Slika 52.].



Slika 52. Dimenzije modeliranog koljenastog vratila

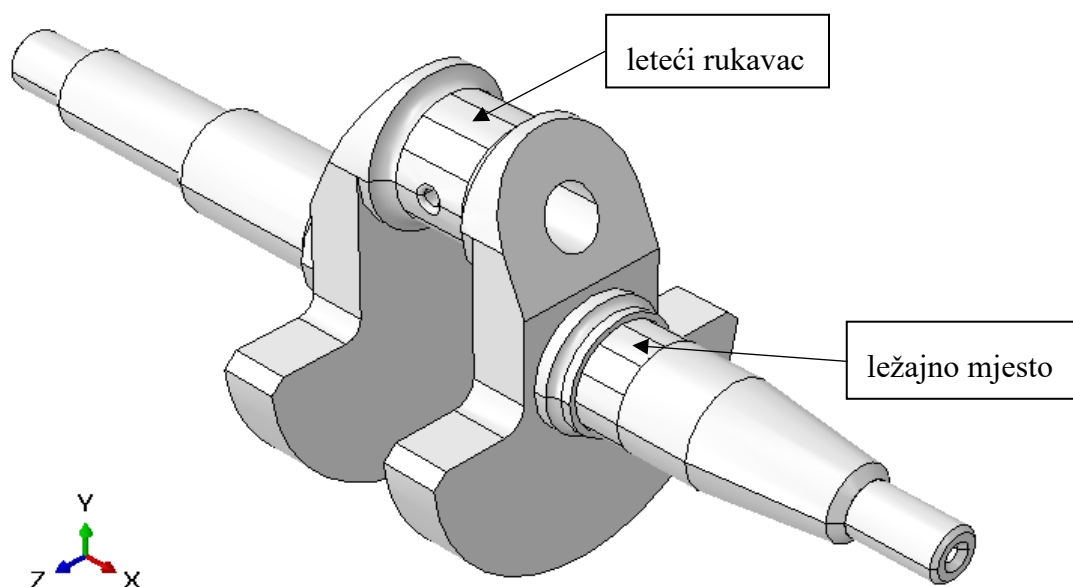
7.2. Opis analize ciklusa

Svaki strojarski odnosno inženjerski problem koji se pokušava analizirati numeričkim metodama može se riješiti na više načina, ovisno o željenoj preciznosti, brzini analize ili dostupnim resursima u smislu procesorske snage računala. U ovom radu odabran je pristup u

kojem će se diskretizirani FE model zakretat u određenim inkrementima, svakih 30° zakreta koljenastog vratila, tijekom jednog ciklusa motora od 720° , te primjenjujući za svaki taj trenutak opterećenje sa svojom veličinom i smjerom, a prema dijagramu sa [Slika 49.], dobit će se povijest naprezanja u ovisnosti o kutu zakreta. Dakle, analize su izvršene u 24 točke kroz 720° .

7.3. Kreiranje proračunskog modela u ABAQUS-u

Nakon što smo dobili CAD model u SolidWorks-u, on je iz .SLDPRT datoteke bio konvertiran u multiplatformsku .IGES datoteku te importirana u ABAQUS. Sljedeći korak koji je bilo potrebno poduzet kako bi uspješno proveli analizu na zamišljen način objašnjen u poglavlju 6.2. bilo je particioniranje koljenastog vratila. To je bilo učinjeno na načina da smo leteći rukavac i mjesta uležištenja koljenastog vratila razdijelili na segmente od 30° što je prikazano na [Slika 53.].

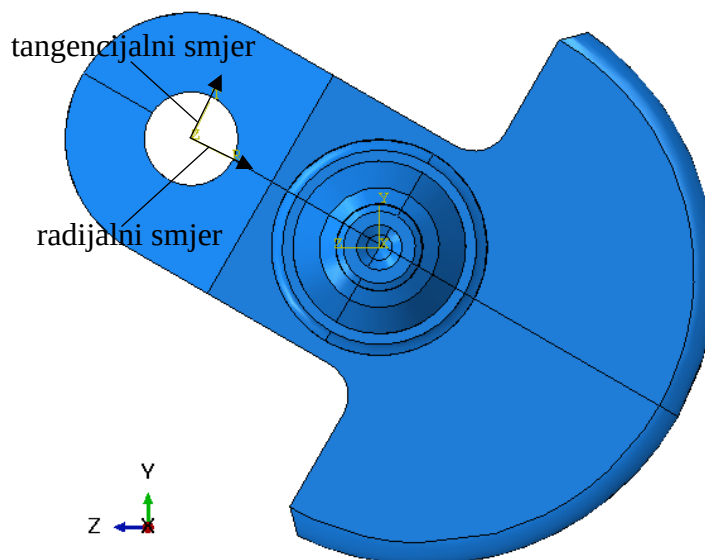


Slika 53. Koljenasto vratilo – leteći rukavac i mjesta uležištenja razdjeljena na segmente od 30°

Tako razdjeljeni djelovi omogućili su nam promjenu veličine i smjerova rubnih uvijeta i opterećenja karakterističnih za svaku od 24 provedene simulacije tijekom jednog ciklusa četverotaktnog motora od 720° okreta koljenastog vratila.

Naredni korak bio je kreiranje cilindričnog koordinatnog sustava u osi letećeg rukavca čije će nam osi u svakom trenutku zakreta koljenastog vratila pokazivati na pozitivne smjerove djelovanja tangencijalne i radijalne sile tj. to će biti referentni koordinatni sustav za određivanje smjerova sile. Kreiran cilindrični lokalni koordinatni sustav prikazan je na [Slika

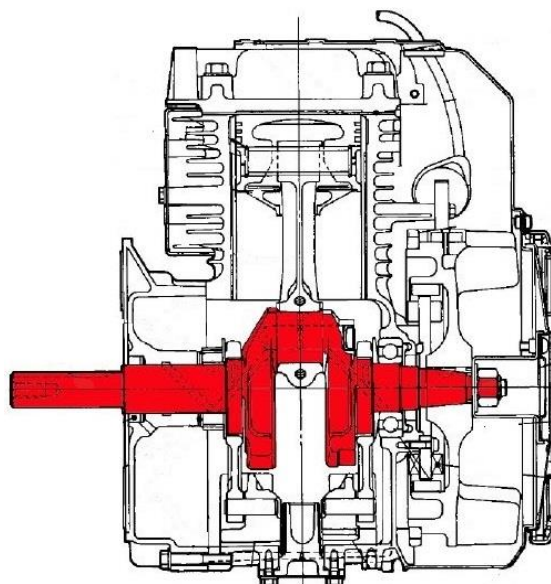
54.], konkretno u položaju koljenastog vratila 300° KV. Vidimo da pozitivan radijalni smjer ide od letećeg rukavca prema osi rotacije koljenastog vratila, dok je pozitivan tangencijalni smjer određen tako da bude u smjeru rotacije koljenastog vratila.



Slika 54. Cilindrični koordinatni sustav u osi letećeg rukavca – položaj 300° KV

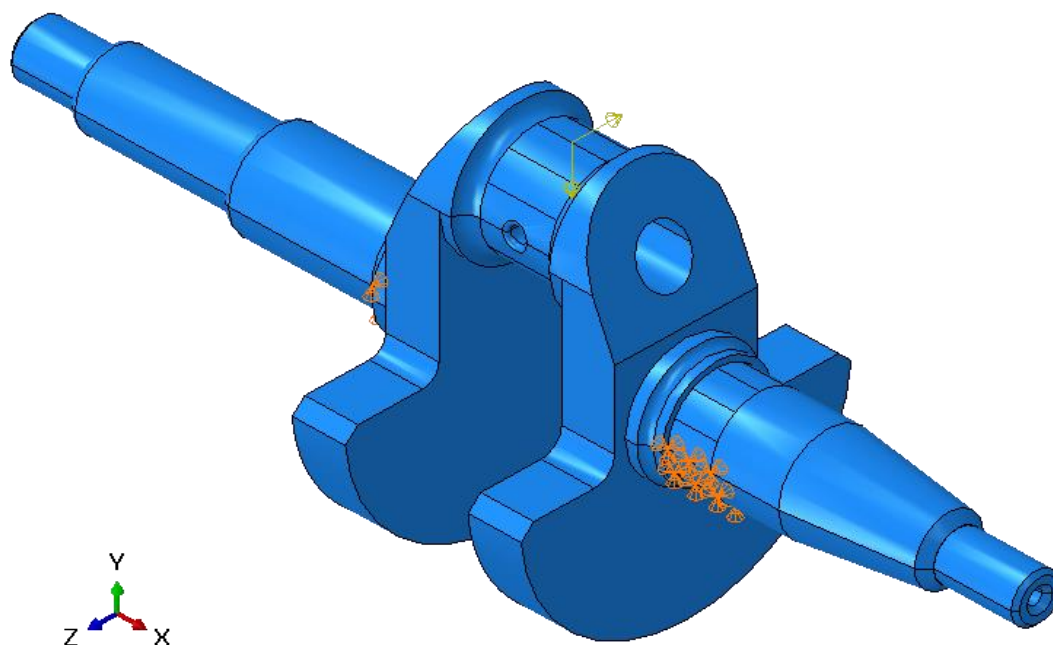
7.4. Rubni uvjeti i opterećenje

Kako bi se odredili odgovarajući rubni uvjeti, korišteni su dostupni sklopni crteži prema literaturi [19]. Prema [Slika 55.] možemo vidjeti način montaže koljenastog vratila sličnog našem u sklopu motora.



Slika 55. Način montaže koljenastog vratila u sklop motora [5]

Možemo primjetiti da je koljenasto vratilo na desnom ležajnom mjestu ograničeno kugličnim ležajem, dok je na lijevoj strani uležišteno kliznim ležajem. Kuglični ležaj i koljenasto vratilo spojeni su na način da čine čvrsti dosjed i kuglični ležaj vratilu ne dopušta pomake u smjerovima ni jedne koordinatne osi osim rotacije oko glavne uzdužne osi. Budući da se samo 180° ležišne površine suprotstavlja nametnutom opterećenju to ograničenje u ABAQUS-u izmodelirano je tako da je bila fiksirana polukružna površina široka kao kuglični ležaj koljenastog vratila. Drugi glavni rukavac leži na kliznom ležaju. Zbog toga je ta strana bila modelirana kao polukružni rub koji se suprotstavlja nametnutom opterećenju, te su onemogućeni pomaci u svim smjerovima osim aksijalnog. Ti stupnjevi slobode proizlaze iz same definicije kliznog ležaja koji omogućuje pomake u smjeru aksijalne osi. Rubni uvjeti rotiraju zajedno sa smjerom primjenjene sile tako da unutarnja strana fiksirane polukružne površine i polukružni prsten, kod kliznog ležaja, gledaju u smjeru sile tj. preuzimaju opterećenje. Primjerice, kao što je prikazano na [Slika 56.], ako sila djeluje prema dolje, unutrašnja strana površina kod kojih su primjenjeni rubni uvjeti gledat će prema gore.

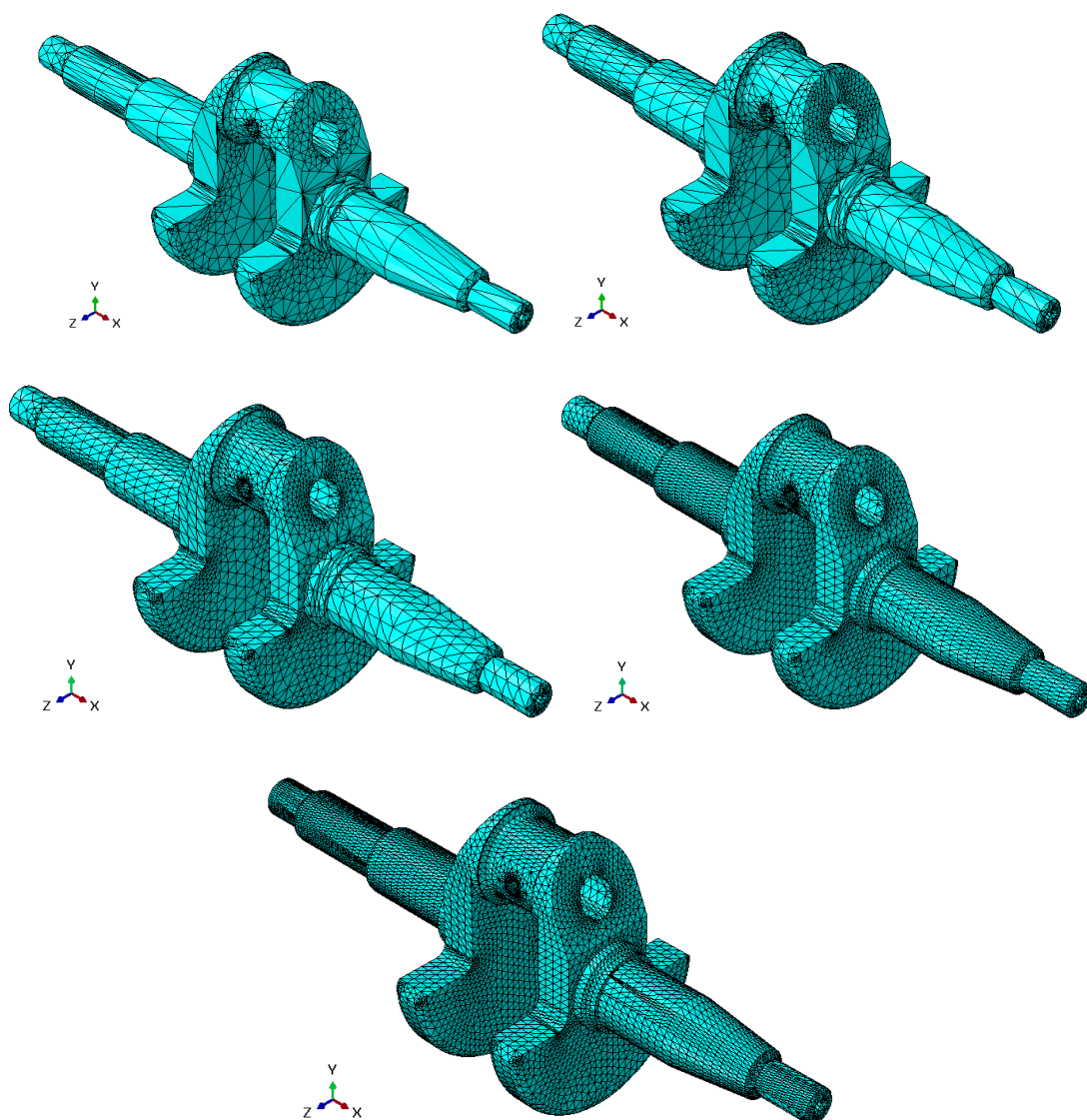


Slika 56. Rubni uvjeti i opterećenje: 360°KV

7.5. Generiranje mreže konačnih elemenata

Kako bi se diskretizirao model koljenastog vratila korišteni su parabolični tetraedarski konačni elementi (u ABAQUS-u stoje pod nazivom C3D10). Za diskretizaciju ovako kompleksne importirane geometrije tetraedarski konačni elementi bili su nam jedina opcija bez

komplikiranog particioniranja pojedinih regija modela. Kako bi izbjegli krutost i manju točnost nismo koristili linearne već parabolične elemente. Model je bio diskretiziran sa različitim veličinama elemenata tj. različitom gustoćom mreže kako bi kasnije mogli ispitati konvergenciju rješenja numeričkog modela. Različite gustoće mreže konačnih elemenata prikazane su na [Slika 57.].

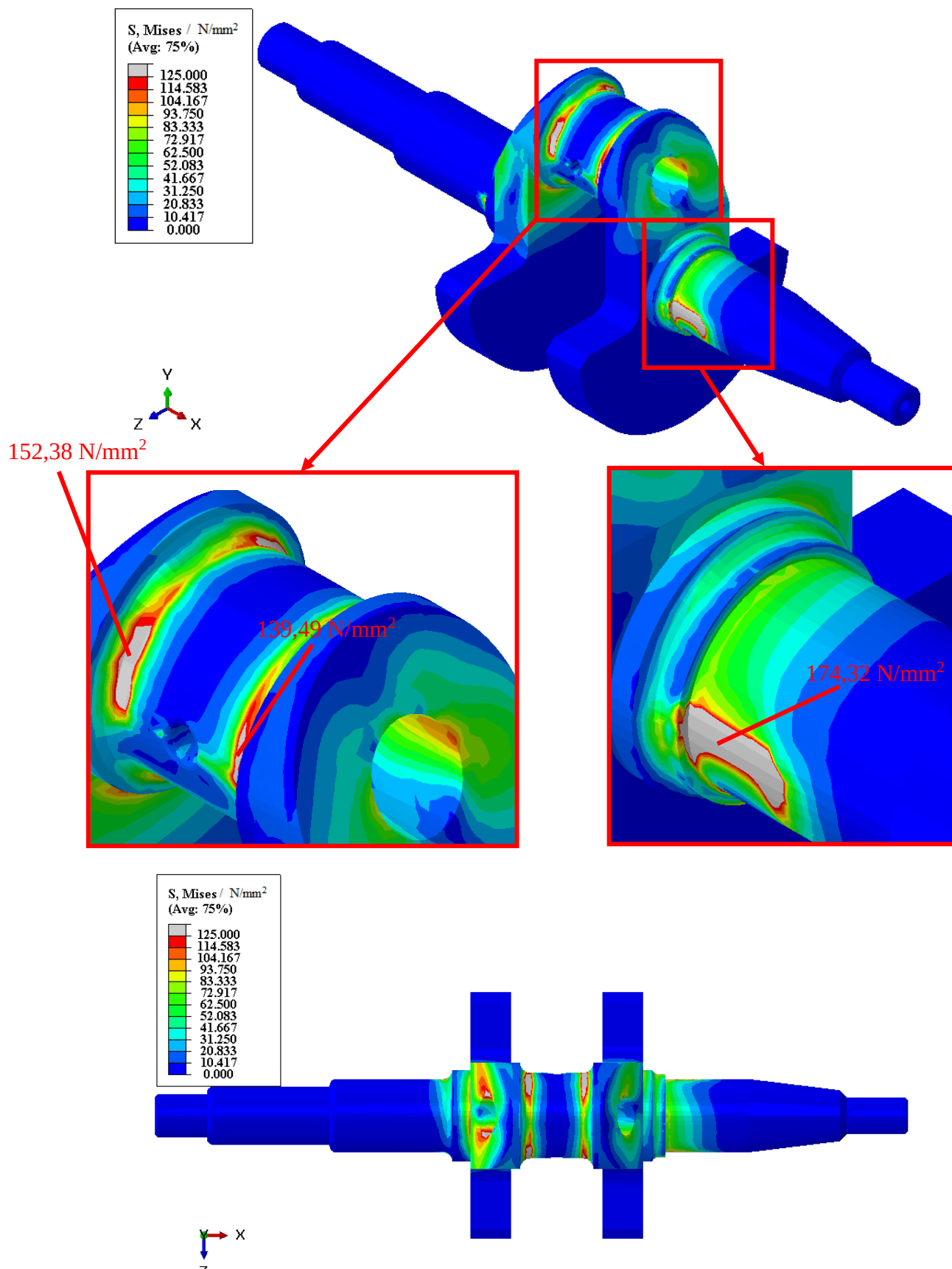


Slika 57. Različita gustoća mreže konačnih elemenata: a) 22393 b) 32625 c) 47345 d) 80058 e) 113808

7.6. Rezultati analize

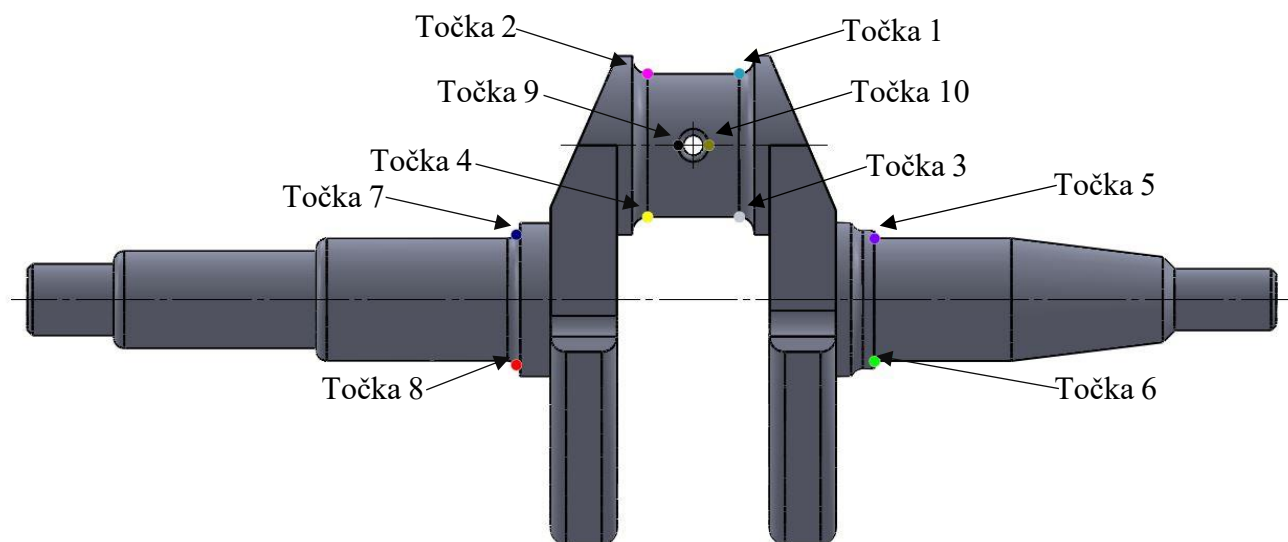
Provedena je numerička analiza kroz 24 vremenske točke unutar ciklusa od 720° .

Na [Slika 58.] prikazana je raspodijela von Mises naprezanja u trenutku detonacije tj. najopterećenijem trenutku ciklusa prema dijagramu na [Slika 27.].

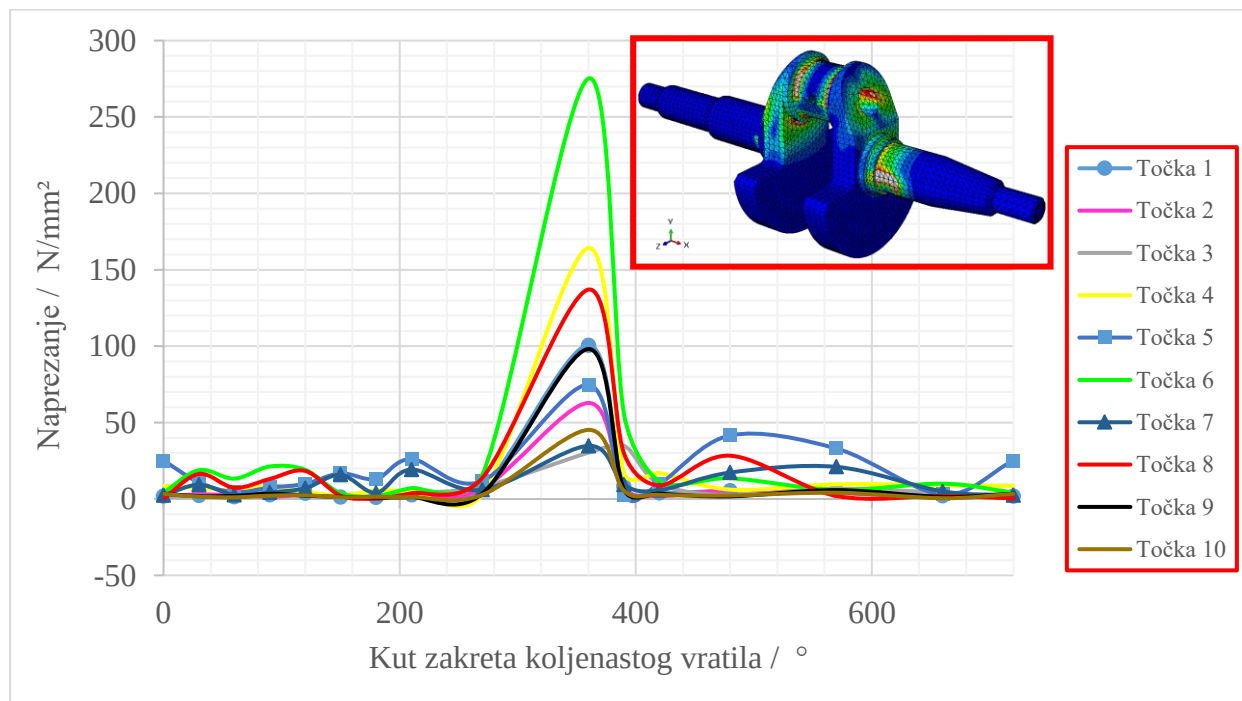


Slika 58. Raspodjela von Mises naprezanja u najopterećenijem trenutku

Ono što se može primjetiti je to da se koncentracija naprezanja javlja na mjestima prijelaza s jednog dijela koljenastog vratila na drugi, odnosno u prijelaznim zaobljenjima ležajnih mjesta, te prijelaznim zaobljenjima s letećeg rukavca na rame koljenastog vratila. Nadalje, može se vidjeti povećana koncentracija naprezanja na samom ramenu koljenastog vratila te na ulazu u uljni kanal. Ta mjesta identificirali smo kao kritična mjesta kao što je prikazano na [Slika 59.] te je vremenski promjenjiv karakter naprezanja tijekom ciklusa u tim točkama prikazan na [Slika 60.].

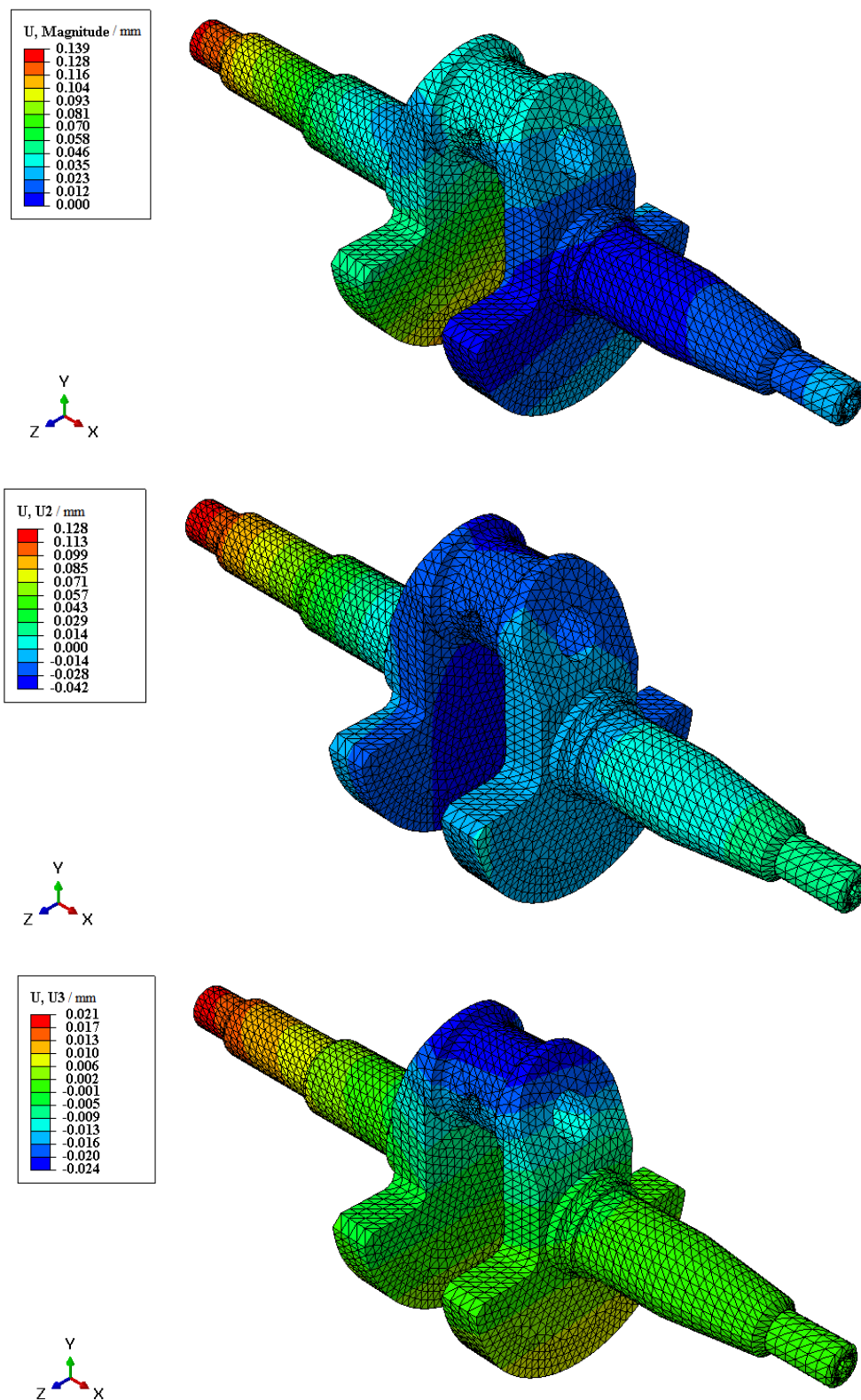


Slika 59. Kritične točke u kojima se javljaju koncentracije naprezanja tijekom ciklusa



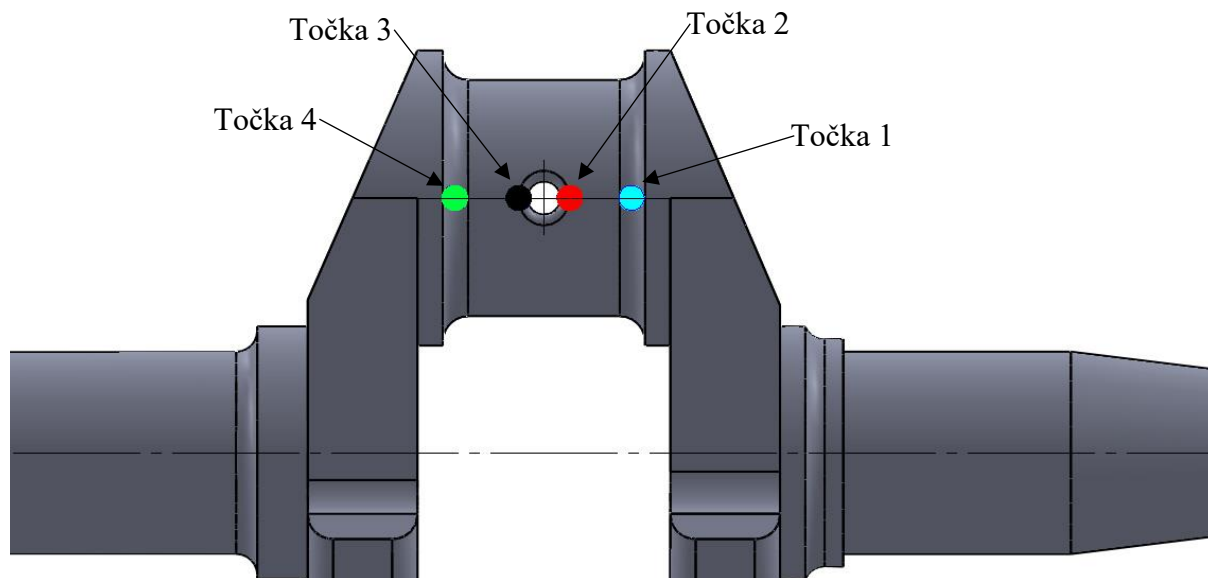
Slika 60. Iznos naprezanja u kritičnim točkama tijekom ciklusa

Na [Slika 61.] prikazana je raspodjela pomaka u kritičnom trenutku tj. u trenutku u kojem se javljaju najveća naprezanja.

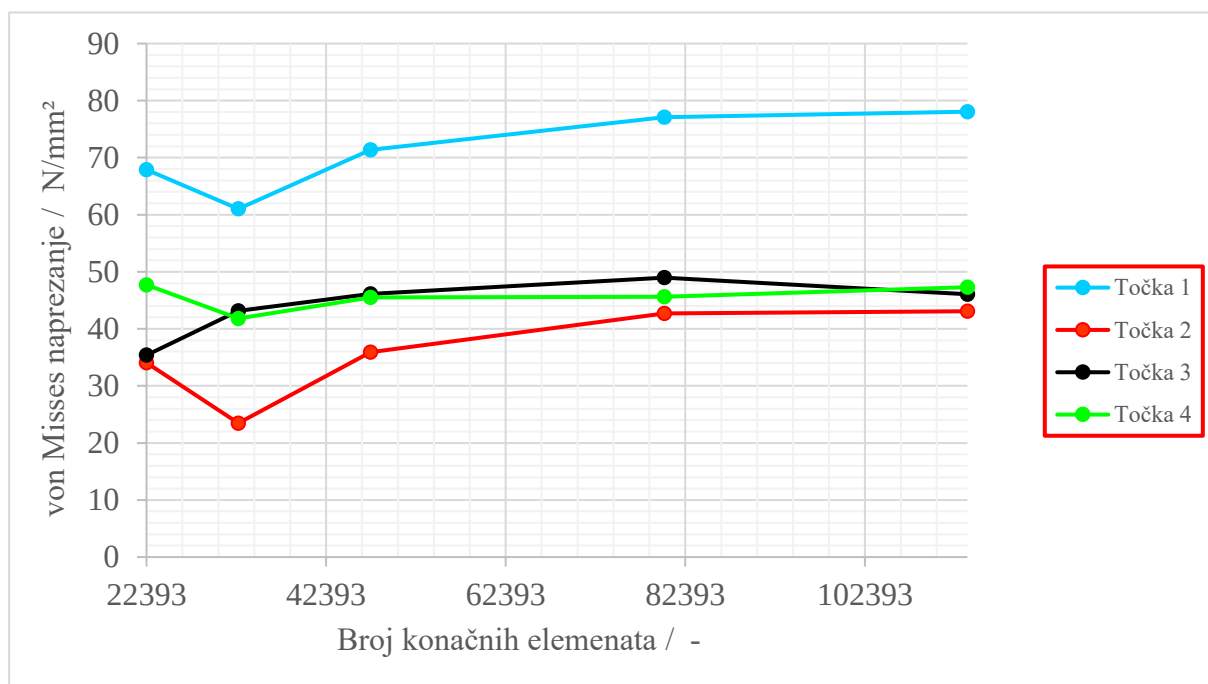


Slika 61. Raspodjela pomaka: a) ukupan pomak b) u smjeru osi y c) u smjeru osi z

Također, provjerena je konvergencija rješenja u trenutku najvećeg opterećenja koljenastog vratila u 4 točke na letećem rukavcu, u blizini i okolini uljnog kanala. Te 4 točke prikazane su na [Slika 62.], dok je sama konvergencija prikazana na dijagramu na [Slika 63.].



Slika 62. Točke u kojima je provjeravana konvergencija von Mises naprezanja



Slika 63. Konvergencija von Mises naprezanja u točkama 1, 2, 3 i 4 sa [Slika 62.]

8. ANALIZA ZAMORA I PROCJENA ŽIVOTNOG VIJEKA KOLJENASTOG VRATILA

Prva stvar koju treba pojasniti je zašto uopće raditi analizu zamora ako naprezanja koja se javljaju u konstrukcijskom elementu ne prelaze granicu vlačne čvrstoće. Još sredinom 19.stoljeća zamjećena je učestala pojava lomova kod željezničkih osovina pri znatno manjim naprezanjima od vlačne čvrstoće materijala, pa čak i granice razvlačenja. Ono zbog čega je dolazilo do takvih lomova naziva se zamor materijala. Zamor materijala je pojava postupnog oštećenja materijala uslijed dugotrajnih periodičkih promjenjivih opterećenja tj. naprezanja, upravo onakvih kakve se javljaju uslijed radnog vijeka koljenastog vratila. Zamor materijala nastaje uglavnom kod dinamički opterećenih konstrukcija gdje će materijal, kao što je već navedeno, puknuti pri znatno manjim naprezanjima od vlačne čvrstoće σ_m , pa čak i granice razvlačenja $\sigma_{0,2}$. Otpor materijala prema dinamičkom ili cikličkom naprezanju nazivamo dinamička izdržljivost, a trajna dinamička čvrstoća je veličina koja predstavlja najveće naprezanje po apsolutnoj vrijednosti koje materijal može podnijeti pri neograničenom broju ciklusa. 80 % do 90 % svih lomova materijala imaju svojstvo loma od zamora materijala. Lom uslijed umora materijala počinje na mjestu najveće koncentracije naprezanja, na kojem dolazi do iniciranja pukotine, a kasnijim daljnjim cikličkim opterećenjem do rasta pukotine od mikropukotine preko makropukotine, pa sve do kritične duljine pukotine, a_{kr} , kod koje dolazi do loma. Trajna dinamička čvrstoća konstrukcija uobičajeno se daje preko Wöhloerovih krivulja (S-N krivulje). Krivulje su dobile naziv po Augustu Wöhloeru koji je provodio ispitivanja lomova uslijed promjenjivog opterećenja. Ono što je primjetio je to da bi kriterij dimenzioniranja trebao biti taj da je amplituda naprezanja manja od trajne dinamičke čvrstoće. Za koljenasto vratilo, kao komponentu motora s unutrašnjim izgaranjem koja je podvrgnuta velikim brzinama vrtnje, kriterij cjelovitosti moraju biti strogi. Dakle, lom nikako ne možemo smatrati kriterijem za zamjenu koljenastog vratila jer bi lomom koljenastog vratila nastala oštećenja i svih okolnih komponenti, odnosno morao bi se mjenjati cijeli motor. Zato ćemo kao kriterij cjelovitosti uzeti trenutak inicijacije pukotine.

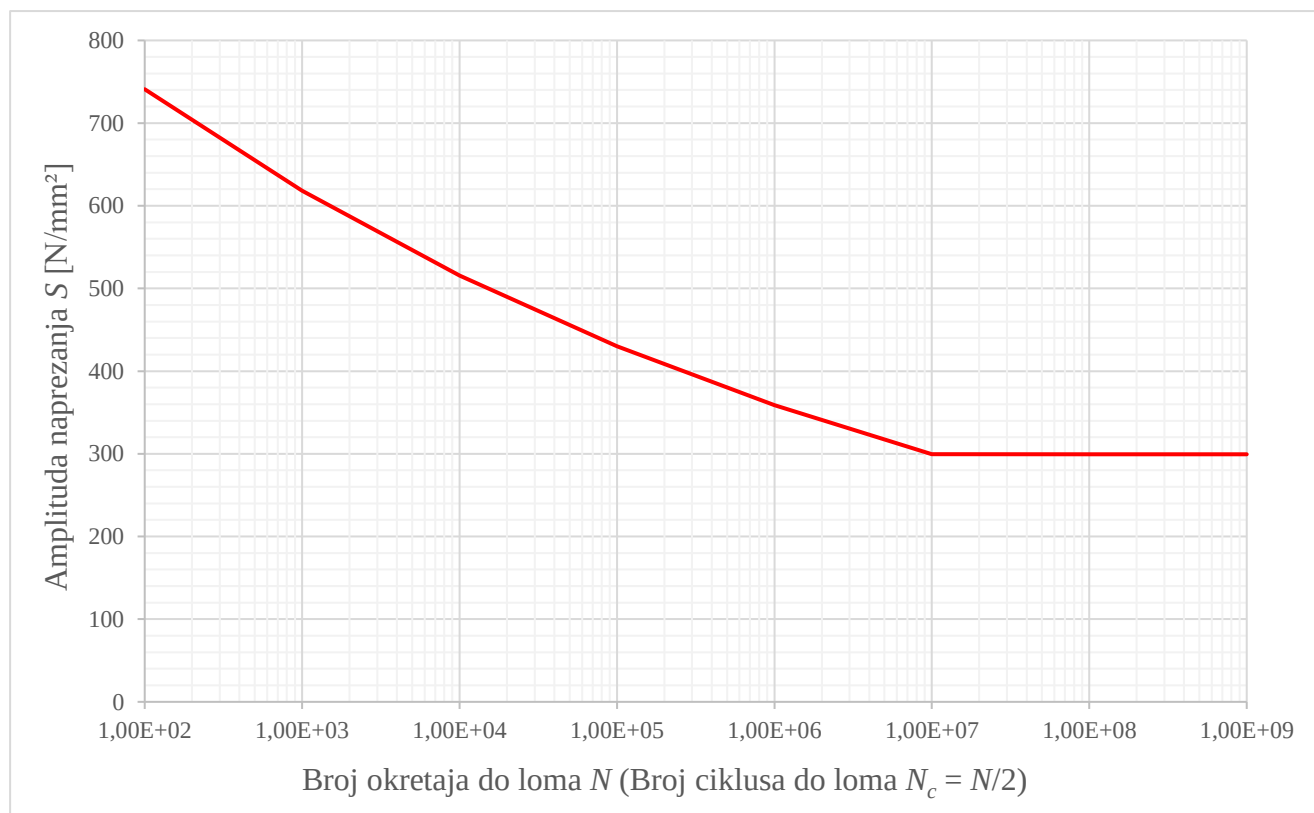
Provedena FEM analiza poslužila nam je kako bi dobili raspodjelu nominalnih naprezanja koljenastog vratila, na temelju čega ćemo procijeniti životni vijek samog koljenastog vratila.

U radnom svom radnom vijeku koljenasto vratilo podvrgnuto je visokocikličkom zamoru (engl. High-Cycle (Low Strain) Fatigue), što znači da su naprezanja i deformacije uglavnom u elastičnom području. U situacijama kad su naprezanja i deformacije dominantno u elastičnom

području, procjena životnog vijeka konstrukcijskog elementa vrši se na temelju S-N krivulja, što nazivamo S-N metoda, za razliku od niskocikličnog zamora (engl. Low-Cycle (High Strain) Fatigue), gdje su naprezanja i deformacije u elastoplastičnom području, i kada se koristi ε -N metoda. Zaključke o životnom vijeku izvući ćemo na principu sličnosti, odnosno broj ciklusa do loma konstrukcijskog elementa bit će jednak broju ciklusa do loma epruvete, čijim su zamorom dobiveni eksperimentalni podaci odnosno S-N krivulje.

Za dani materijal, trajna dinamička čvrstoća ovisi o mnogo faktora od kojih su neki: površinska obrada, veličina, način opterećenja, radna temperatura, korozivna i ostala agresivna radna okolina, srednje naprezanje, amplituda naprezanja, koncentracije naprezanja itd.

Na [Slika 64.] prikazana je S-N krivulja materijala iz kojeg je izrađeno koljenasto vratilo. Podaci su preuzeti iz dostupne literature, prema [11].



Slika 64. S-N krivulja materijala koljenastog vratila

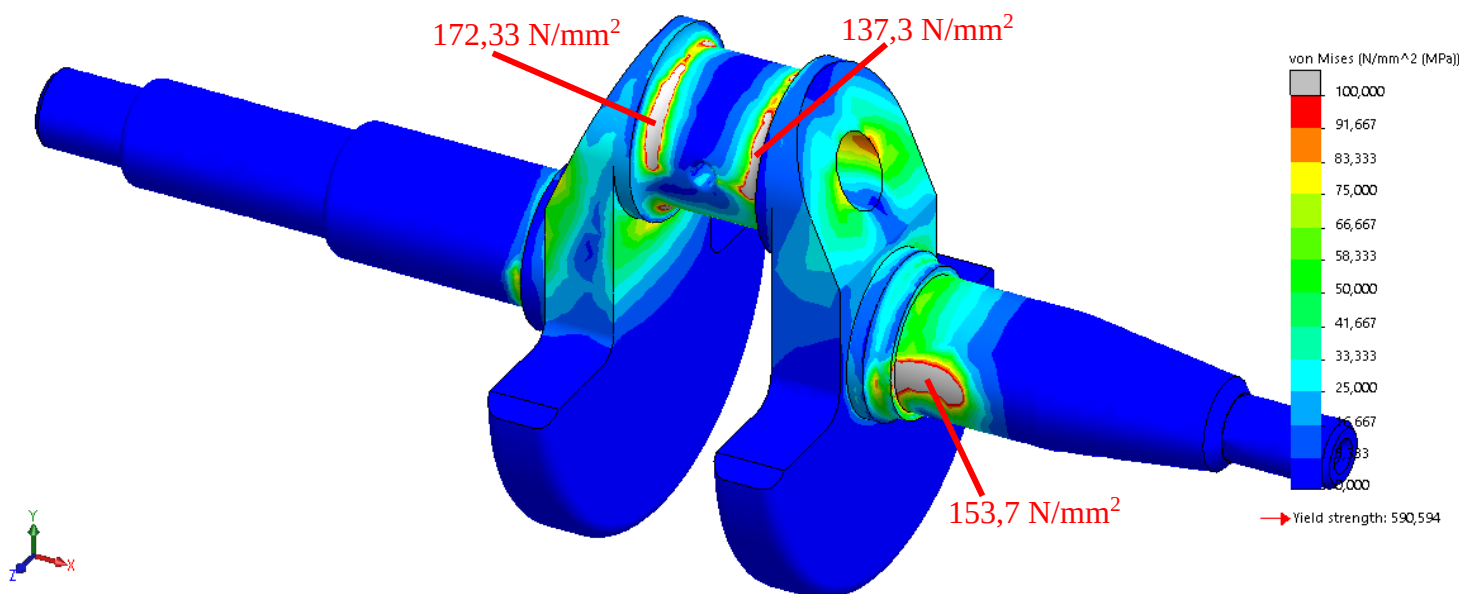
8.1. Procjena životnog vijeka koljenastog vratila

Frekvencija promjene opterećenja kod koljenastog vratila motora toliko je velika da se broj ciklusa od 10^7 , koji je postavljen kao kriterij za trajnu čvrstoću, postiže već nakon relativno kratkog vremena. Koljenasto vratilo tipičnog motora s unutrašnjim izgaranjem koji pogoni

automobil radi u području od 500 do 6000 okr/min. Recimo da je prosječan broj okretaja 4000 okr/min. Lako je za zaključiti da koljenasto vratilo ima željeni životni vijek od mnogo milijuna ciklusa pa čak i nekoliko milijardi. Primjerice, ako je životni vijek prosječnog automobila od 300000 km, i on ima prosječnu brzinu vožnje od 110 km/h (pretpostavimo autocestom) pri 4000 okr/min, motor, i koljenasto vratilo, trebali bi izdržati životni vijek od 1 100 000 000 ciklusa. Polje naprezanja dobiveno je iz statičke analize u trenutku najvećeg opterećenja (360° KV), a pretpostavljeno je čisto naizmjenično cikličko naprezanje ($R = -1$). Analizu smo proveli u programskom paketu Solidworks 2016, a za korekciju srednjeg naprezanja korištena je najkonzervativnija, Soderbergova relacija prema izrazu (34).

$$\frac{S_a}{S_{a0}} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \quad (34)$$

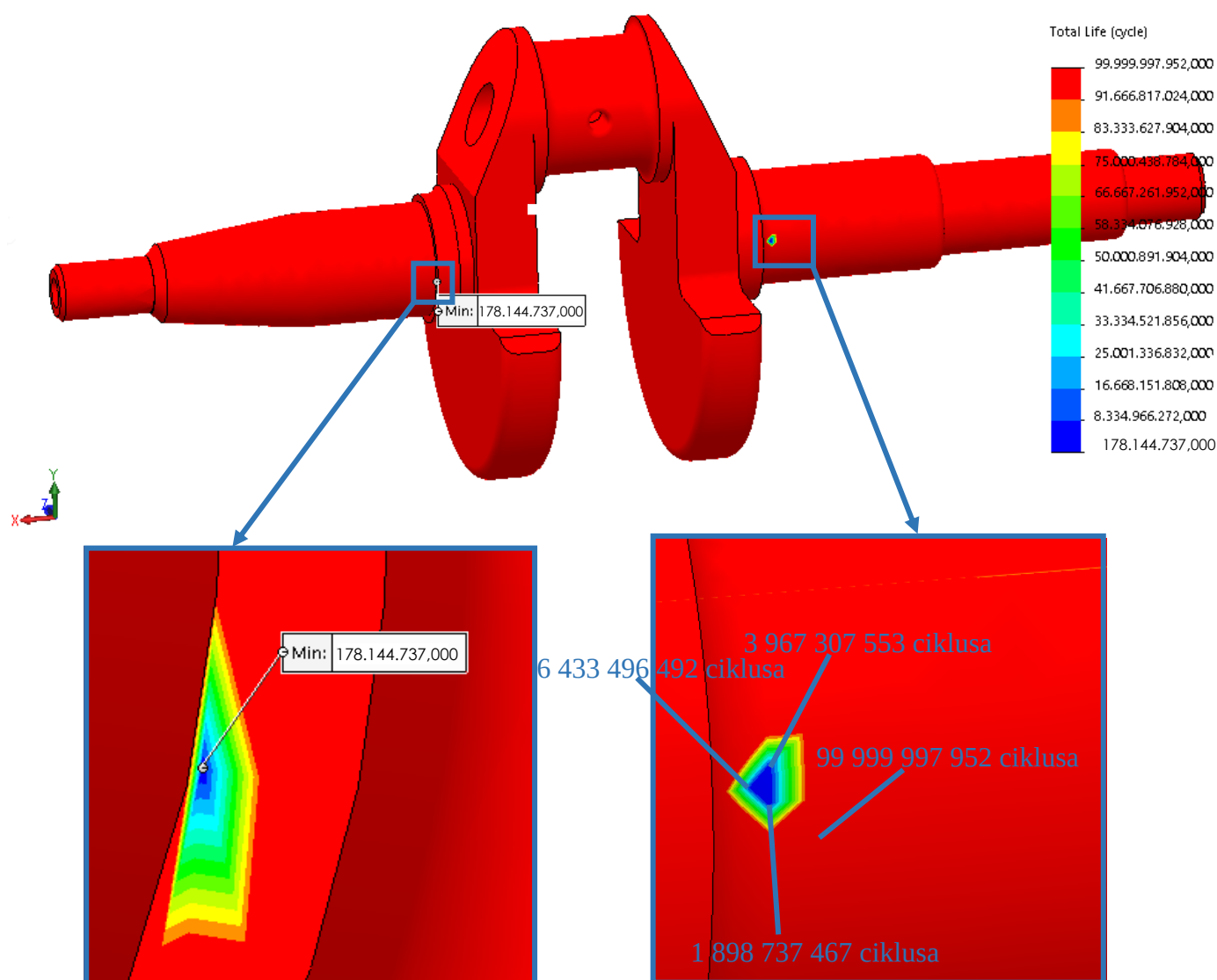
Na [Slika 65.] možemo vidjeti rezultat statičke analize u SolidWorksu, gdje su rubni uvjeti i opterećenje modelirani ekvivalentno onima u Abaqus-u. Također, može se primjetiti da se rezultati iz SolidWorks-a i Abaqus-a podudaraju.



Slika 65. Rezultat statičke analize u SolidWorksu

Nakon statičke analize pristupilo se analizi zamora (engl. *Fatigue analysis*), gdje smo u postavke materijala unijeli podatke za S-N krivulju prema [Slika 62.]. Rezultati analize zamora prikazani su na [Slika 66.]. Ono što možemo primjetiti, a što smo mogli zaključiti odmah nakon statičke analize, jest činjenica da će kod ovog koljenastog vratila, koje je napravljeno od danog

materijala i opterećeno na način prikazano u prethodnim poglavljima, doći do iniciranja pukotine na mjestima s najvećom koncentracijom naprezanja nakon 178 144 737 ciklusa naprezanja. Ova informacija okvirno nam može pomoći u tome da pravovremeno znamo izvršiti inspekciju ovog konstrukcijskog elementa da bi spriječili moguća oštećenja, kako koljenastog vratila, tako i ostalih dijelova koji čine klipni mehanizam odnosno motor.



Slika 66. Rezltati analize zamora u SolidWorks-u (engl. Fatigue analysis)

178 144 737 ciklusa bi značilo da bi se prva inspekcija, ako uzmemo da prosječno vozilo dnevno prođe 50-ak kilometara, trebala izvršiti nakon 2,5 godine korištenja u ovakvim uvjetima.

9. ZAKLJUČAK

U ovom radu izvršena je numerička analiza koljenastog vratila koje pripada jednocilindričnom motoru. Materijal vratila je kovani čelik, za koji su uzeti podaci prema dostupnoj literaturi.

U uvodnom dijelu objašnjena je funkcija samog koljenastog vratila, ukratko opisani načini i materijali izrade, problemi zbog kojih dolazi do lomova, sile koje djeluju na koljnasto vratilo itd. U daljnjim poglavljima napravljena je analiza kinematike, te zatim, i dinamike koljenastog mehanizma čiji su rezultati poslužili kao ulazni podaci za numeričku analizu.

Numerička analiza provedena je metodom konačnih elemenata, koja je opisana u poglavlju 4. Analiza je provedena u programskom paketu ABAQUS. Provedena je i verifikacija korištenih konačnih elemenata dostupnih u ABAQUS-ovoj bazi elemenata, te su ti rezultati uspoređeni s analitičkim rezultatima. Pokazalo se da su C3D10 3D tetraedarski elementi 2.reda pogodni za rješavanje problema uvijanja i savijanja, kao što je to slučaj kod opterećenja koljenastog vratila.

Nakon toga pristupilo se numeričkoj analizi koljenastog vratila, na način da se koljenasto vratilo zakretalo u segmentima od 30° i opterećivalo pripadnim iznosima sila (određenima u poglavlju 3.) u tangencijalnom i radijalnom smjeru. Dobiveni su rezultati kroz jedan ciklus koljenastog vratila koji kod četverotaktnog motora traje 2 okreta vratila. Ono što se moglo primjetiti kroz ciklus je to da je prisutan samo jedan kritični trenutak, kada je vratilo zakrenuto za 360° , tj trenutak u kojem se javljaju najveća naprezanja, koji je ključan i koji može prouzročiti narušavanje cjelovitosti zbog zamora materijala. Nakon toga pristupilo se analizi zamora koljenastog vratila u programskom paketu Solidworks.

Ono što se moglo zaključiti iz gore navedenog postupka analize je da je kod koljenastog vratila postoje dva izvora opterećenja : izgaranje i inercija. Superpozicioniranjem FEM rezultata dobivenih opterećenjem s dvije okomite sile (tangencijalnom i radijalnom) imamo jednostavnu i efikasnu metodu za analizu povijesti naprezanja kroz jedan ciklus. Nadalje, gotovo sva kritična mjesta geometrije koljenastog vratila bila su prijelazni radijusi gdje je zbog velikih gradijenata naprezanja dolazilo do koncentracije naprezanja. Kako bi se povećao životni vijek ovog koljenastog vratila, može se pristupiti optimizaciji koljenastog vratila ili koristiti materijal koji je više otporan na zamor. Ta ideja, kao i usporedba ovdje dobivenih numeričkih rezultata s eksperimentom, možda u budućnosti mogu biti tema nekog drugog rada.

LITERATURA

- [1] Vučković, K.: Podloge uz predavanja iz kolegija Elementi konstrukcija II – Osovine i vratila, FSB, Zagreb, 2014.
- [2] https://hr.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cetverotaktni_motor – Četverotaktni motori
- [3] https://hr.wikipedia.org/wiki/Koljenasto_vratilo - Koljenasto vratilo
- [4] Mahalec, I., Kozarac, D., Lulić, Z.: Konstrukcije motora, FSB, Zagreb, 2015.
- [5] Hrvatska obrtnička komora, Pučko otvoreno učilište: TEHNIKA motornih vozila, Zagreb, 2004
- [6] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Kovanje> - Kovanje
- [7] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Kinematika> - Kinematika
- [8] Dabasa, T.: Finite Element Analysis and Optimization of Single Cylinder Engine Crankshaft for Improving Fatigue Life, Addis Ababba University, 2016.
- [9] SOLIDWORKS Help : <http://help.solidworks.com/2017/>
- [10] Dvornik, J.: Kinematika i dinamika koljenastog mehanizma, Split, 2012.
- [11] Williams, R.J.: Fatigue Performance Comparison and Life Predictions of Forged Steel and Ductile Cast Iron Crankshafts, The University of Toledo, 2007.
- [12] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing, Zagreb, 2004.
- [13] Tonković, Z.: Numerička analiza konstrukcija – Podloge s predavanja i vježbi, Zagreb, 2017.
- [14] ABAQUS, Abaqus Documentation: Version 6.14. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, [10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE](http://www.dassault-systemes.com).
- [15] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb, 1970.
- [16] Alfiredić, I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.
- [17] Mechanical, Industrial and Tehnical Calculations, MITCalc, web: <http://www.mitcalc.com/>, 2018.
- [18] Mikulčić, M.: Diplomski rad, FSB, Zagreb, 2016.
- [19] Farzin, H.: Stress Analysis and Optimization of Crankshafts Subjected to Dynamic Loading, The University of Toledo, 2007.
- [20] Decker, K. H.: Elementi strojeva, Tehnička knjiga Zagreb, 1975.
- [21] Herold, Z.: Računalna i inženjerska grafika, Zagreb, 2003.
- [22] Tonković, Z.: Predavanja iz kolegija Pogonska čvrstoća, Zagreb, 2015.

- [23] ABAQUS, Abaqus Software: Version 6.14. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, [10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE](http://10.rue.Marcel.Dassault.78140.Vélizy-Villacoublay.FRANCE).
- [24] <https://simcompanion.mscsoftware.com/> - MSC.Adams 2017.2 Help
- [25] <https://www.efatigue.com/> - Fatigue Analysis on the Web
- [26] Zhiwei, Y., Xiaolei, X.: Failure analysis of a diesel engine crankshaft, Institute of Metal and Technology, Dalian Maritime University, 2004.
- [27] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Dinamika> - Dinamika
- [28] Domović, F.: Programski zadaci iz kolegija Pogonska čvrstoća, Zagreb, 2016.
- [29] Domović, F.: Programski zadaci iz kolegija Numerička analiza konstrukcija, Zagreb, 2017.
- [30] Putre, R., Dragović, N.: Metalizacija koljenastih vratila, Brodogradnja, 2013.
- [31] Kranjčević, N.: Elementi strojeva, FSB, Zagreb, 2012.

PRILOZI

- I. CD-R disc